UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA EL TEMA DE FACTORIZACIONES BÁSICAS DE TRINOMIOS EN EL NIVEL BACHILLERATO

Informe Académico de Desarrollo Profesional
para obtener el grado de:

Maestra en Matemática Educativa
con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

Pilar Monserrat González Domínguez

Directoras de Tesis:

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

Dra. Carolina Carrillo García

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Zacatecas, Zac., junio 2019

AGRADECIMIENTO A CONACYT

Expreso mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado a través de la beca con número **636371**, para la realización de mis estudios de maestría.

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "Diseño, Implementación y Evaluación de una Unidad Didáctica para el tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios en el Nivel Bachillerato" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Pilar Monserrat González Domínguez estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 15 de junio del 2019

Judith A Hdz S.

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

Directora de Informe Académico

Dra. Carolina Carrillo García

Asesora de Informe Académico

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Asesora de Informe Académico

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 15 del mes de mayo del año 2019, la que suscribe Pilar Monserrat González Domínguez alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 25604013; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado "Diseño, Implementación y Evaluación de una Unidad Didáctica para el tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios en el Nivel Bachillerato" bajo la dirección de la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez, la Dra. Carolina Carrillo García y la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asi mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Pilar Monserrat González D.

Pilar Monserrat González Domínguez

RESUMEN

La práctica del profesor y su formación se han convertido en los últimos años en temas de interés para la Educación Matemática, considerándolos en factores que inciden en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, es sabido que algunos profesores de matemáticas no fueron formados con los conocimientos base ni las habilidades prácticas necesarias para el desarrollo de una clase eficiente. Algunos de estos profesores, como en mi caso, eligen construirlos a través de programas de formación y espacios de desarrollo profesional. De esta manera, en el presente estudio se describe la experimentación del diseño, ejecución y evaluación de una unidad didáctica con el apoyo de un material didáctico para el tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios para el nivel Bachillerato. Estas prácticas fueron sustentadas mediante el marco teórico-metodológico del análisis didáctico, con la finalidad de contribuir en el manejo de herramientas teórico-metodológicas que las sustenten. En este caso se eligió el tema de Factorización por las relaciones que establece con niveles educativos posteriores; además, de ser un tema que se le complica enseñar a la profesora en cuestión. El uso de material didáctico es una decisión de la profesora para apoyar su proceso de instrucción y construir conocimientos en el manejo e implementación de estos recursos. Derivado de esta experiencia, fue posible comprobar que la factorización de trinomios es un tema que los estudiantes ven como el conjunto de reglas y procedimientos operatorios algebraicos (representación simbólica), sin considerar el significado de la equivalencia entre expresiones como foco central de este tema. Además, se presentaron dificultades con la representación geométrica de dichos métodos a través del material didáctico y la aplicación de los métodos en la solución de problemas. Esta experiencia permitirá a la profesora dar a conocer aspectos de mejora en los que podría enfocarse en procesos de enseñanza futuros. De esta manera se da evidencia de la construcción de conocimiento profesional especializado y por ende se espera contar con una práctica docente más eficiente.

Palabras clave: desarrollo profesional, análisis didáctico, material didáctico, conocimiento profesional, formación del profesor de matemáticas.

ABSTRACT

The practice of the teacher and his training have become in recent years topics of interest for Mathematics Education, considering them as factors that affect the teaching and learning of mathematics. However, it is known that some mathematics teachers were not trained with the basic knowledge or practical skills necessary for the development of an efficient class. Some of these teachers, as in my case, choose to build them through training programs and professional development spaces. In this way, the present study describes the experimentation of the design, execution and evaluation of a didactic unit with the support of a didactic material for the theme of Basic Trinomial Factorizations for the Baccalaureate level. These practices were supported by the theoretical-methodological framework of didactic analysis, with the aim of contributing to the management of theoretical-methodological tools that support them. In this case the Factorization theme was chosen for the relationships it establishes with subsequent educational levels; in addition, to be a subject that is complicated to teach the teacher in question. The use of didactic material is a decision of the teacher to support her instruction process and build knowledge in the management and implementation of these resources. Derived from this experience, it was possible to verify that the factorization of trinomies is a subject that the students see as the set of rules and algebraic operative procedures (symbolic representation), without considering the meaning of the equivalence between expressions as the central focus of this topic. In addition, there were difficulties with the geometric representation of these methods through the didactic material and the application of the methods in the solution of problems. This experience will allow the teacher to present aspects of improvement that could focus on future teaching processes. In this way, evidence of the construction of specialized professional knowledge is given and, therefore, it is expected to have a more efficient teaching practice.

Key words: professional development, didactic analysis, didactic material, professional knowledge, teacher training in mathematics.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La educación en México se ha sometido a una reconstrucción con cambios dirigidos a la elevación de su calidad, y en ese sentido es que la formación y la actuación del profesor se encuentran estrechamente relacionada, por lo que, para el caso de la educación matemática, los investigadores se han centrado en catalogar precisamente el perfil del profesor como un tema de interés para la investigación. Un campo enfocado en establecer y comprender los criterios y conocimientos que requiere un profesor de matemáticas para integrarse a la actividad docente.

Por consiguiente, los investigadores se han dado a la tarea de hacer propuestas de modelos teóricos que describan aquellos conocimientos, habilidades y destrezas que deben poseer en su formación. Algunos de estos conocimientos son: el modelo sobre el Conocimiento Base para la Enseñanza de Shulman (1987); el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), creado por Ball y colaboradores en el 2000, clasificando este conocimiento en dos dominios, el conocimiento de la materia y el conocimiento didáctico del contenido; el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), creado por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2012), que tiene como base el anterior y que categoriza los conocimientos igualmente en dominios: relacionado con el conocimiento matemático y el segundo en el dominio del conocimiento didáctico del contenido. Otro de los modelos es el creado por Schoenfeld y Kilpatrick denominado Teoría de la Proficiencia (2008), un modelo basado en la competencia profesional del profesor; y el modelo Conocimiento Didáctico- Matemático del Profesor (CDM), propuesto por Pino-Fan y Godino en el 2015. Un modelo que presenta organizadamente los conocimientos en dimensiones y facetas. Siendo conocimientos que enlistan y describen los conocimientos mas, no proporcionan al profesor el cómo construirlos y es por tal motivo que se recurre a la elección del Análisis Didáctico como un modelo que proporciona una metodología para el alcance de algunos de los conocimientos descritos en los modelos teóricos.

Bajo el mismo tenor, y con la creación de estos modelos ahora los investigadores hacen propuestas de investigaciones dedicadas al mejoramiento de la formación docente, al cómo hacer uso de esos conocimientos y de cómo promoverlos. Un ejemplo de estas propuestas es la que comparte Alsina (2010), centrada en aprendizaje reflexivo; la propuesta de Sáenz y Lebrija en el 2004, con su programa formativo de profesores de matemáticas; la propuesta por Solar, Ortiz y Ulloa en el 2016, con su modelo de formación continua o la propuesta de Hurtado y Torres en el 2015 con su propuesta de una unidad didáctica del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita real. Asimismo, se presenta la descripción del material didáctico que se implementó en la unidad didáctica, pues es un recurso de apoyo en el aprendizaje de los estudiantes y por ende es un conocimiento debe poseer un profesor.

Otra de las propuestas es la que expone este Informe Académico De Desarrollo Profesional de una profesora del Nivel Medio Superior (NMS). Un informe que surge de la problemática, de que los modelos teóricos del conocimiento del profesor únicamente nos dan a conocer los conocimientos que debo poseer, pero no aportan las herramientas específicas para llevarlos a la práctica y se delimita en el problema de la dificultad para guiar un proceso de enseñanza-aprendizaje con el sustento teórico metodológico de la matemática educativa.

En atención a lo anterior se propone en esta unidad como objetivo general: realizar el diseño, ejecución y evaluación de una unidad didáctica para el tema de factorizaciones básicas de trinomios para el NMS, con el apoyo de un material didáctico y del marco teórico metodológico del análisis didáctico. Como objetivos específicos: identificar, seleccionar y organizar el contenido involucrado en la enseñanza-aprendizaje del tópico matemático de factorizaciones básicas de trinomios; determinar las expectativas y limitaciones de aprendizaje para el tema de factorizaciones básicas de trinomios; seleccionar, diseñar o rediseñar actividades, tareas y los recursos necesarios para la enseñanza y aprendizaje del tema de factorizaciones básicas de trinomios congruentes con las expectativas de aprendizaje; implementar y desarrollar la unidad didáctica en el aula, evaluar los aprendizajes alcanzados por parte del alumno en relación con el tema de factorizaciones básicas de trinomios; y reflexionar sobre el proceso del diseño, desarrollo y evaluación de la unidad didáctica de factorizaciones básicas de trinomios centrándonos en mi propia práctica.

Estos objetivos se dirigen a la superación de mis limitaciones de formación docente favorablemente a través del reforzamiento de mis conocimientos. En la búsqueda de lograr estos objetivos, se recurrió al empleo del marco teórico metodológico del análisis didáctico (Gómez, 2007 y Rico, 2013), el cual según Rico (2013), tiene la finalidad de: "fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos" (p. 19). Acciones que busco construir como conocimiento para potenciar mi práctica de la mano de la metodología propuesta en ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2007) y con la inclusión de un material didáctico. Un ciclo compuesto de un diseño curricular global que se centra en caracterizar aspectos según el contexto de los estudiantes en donde se aplica la unidad didáctica propuesta y un diseño curricular local, basado en los cuatro tipos de análisis que constituyen al análisis didáctico del tema de interés en este caso de la factorización básica de trinomios.

Una vez que se lleva a cabo esta unidad didáctica, de la mano del análisis didáctico, los resultados obtenidos en cada uno los análisis que los conforman fueron: del análisis de contenido de esta unidad didáctica, se abarcan los tres focos prioritarios del análisis respecto al tema de factorización de trinomios como: los hechos históricos que dieron origen de la factorización como uno de los métodos de solución de la ecuación cuadrática; una estructura conceptual general de la factorización, que permite organizar todos esos contenidos que se pretenden compartir a los estudiantes en este proceso de enseñanza/aprendizaje; los sistemas de representación simbólico y geométrico que caracterizan a la factorización y finalmente, su fenomenología en la solución de problemas relacionados con la medición de longitudes y áreas. Asimismo, se encuentra el análisis de instrucción con el que se diseñó e implementó la planeación de la unidad didáctica. Este análisis se construye a partir de lo establecido en los análisis anteriores y expone las ocho actividades que se solicitó realizar a los estudiantes incluyendo las que tienen que ver con el manejo del material didáctico (tabletas algebraicas).

Por último, el análisis evaluativo expone dos tipos de evaluaciones: una enfocada a los aprendizajes alcanzados por parte del estudiante y una segunda dirigida a la evaluación y reflexión de la implementación. La primera se desarrolló con tablas de registro como instrumento de evaluación, las cuales permitieron cotejar que capacidades de las propuestas para cada actividad fueron desarrolladas y cuáles no por los estudiantes, y se argumentan algunos de los datos obtenidos. La segunda se construye de mi reflexión sobre mi experiencia en la implementación y las decisiones que tomé durante el diseño, ejecución y evaluación de la unidad didáctica del tema de factorizaciones básicas de trinomios.

Finalmente, en este trabajo se muestra una reflexión de los conocimientos construidos durante la elaboración de cada uno de los análisis del tema de factorizaciones básicas de trinomios, abordando no solamente lo que logré construir y me quedó a mi como profesora de matemáticas en formación, sino también un cotejo entre los conocimientos alcanzados y los propuestos en los modelos del conocimiento del profesor de matemáticas revisados. Para terminar, al final del documento se exponen las referencias bajo a las cuales se sustentan algunas de las ideas vertidas en el presente informe de desarrollo profesional.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE DESARROLLO PROFESIONAL

1.1. MOTIVACIÓN

Esta motivación está basada en mis creencias y experiencias que hasta al momento se han compilado en mi práctica. En virtud de ello al finalizar mi trabajo de grado espero retomarla desde una perspectiva formal y sólida; construida durante este proceso de formación y desarrollo profesional desde la Matemática Educativa.

La mejor experiencia de ser docente, para mí, es poseer la oportunidad de ser parte de la formación de mis estudiantes, es decir, ser partícipe de su aprendizaje académico. Estar frente a grupo me ha permitido reflexionar sobre mi práctica docente y asimismo identificar algunas de las deficiencias que poseo en mi formación como: planear una clase y el saber elegir cuales contenidos y actividades son las pertinentes para el alcance de los aprendizajes esperados y el diseñar propuestas de evaluación que me permitan hacer medible de una forma certera el aprendizaje de los estudiantes. Por consiguiente, considero que, para desempeñar un buen papel de profesor, estas deficiencias necesitan ser atendidas y orientadas a potenciar mi práctica.

En mi opinión un profesor comprometido con su profesión siempre debe estar abierto a cambios; involucrarse en la constante búsqueda de todas aquellas estrategias, métodos y técnicas que le ayuden en su práctica; ampliar su perspectiva y no quedarse únicamente con lo que hasta el momento ha aprendido durante su práctica, sino también aspirar a ofrecer eficiencia a un sistema educativo y una educación de calidad a sus estudiantes.

Por lo anterior quiero ampliar mi visión, construir los conocimientos y experiencias que me sean fundamentales en mi formación y que me den la posibilidad de planificar, desarrollar y evaluar correctamente un proceso de enseñanza- aprendizaje de algún contenido matemático escolar; siendo esta la razón por la que surge la decisión de mi ingreso a la maestría en Matemática Educativa, en la búsqueda de un desarrollo profesional.

Especialmente desde mi poca experiencia como docente, el tema de factorizaciones básicas de trinomios es un contenido matemático que en lo personal me es un poco difícil de enseñar. El método que hasta el momento he utilizado durante mi práctica no ha sido del todo correcto o simplemente requiere de ajustes relacionados con las oportunidades de aprendizaje antes mencionadas. Por tanto, me es de suma importancia intervenir mi práctica docente con una propuesta didáctica. La cual se apoya con un material didáctico y una herramienta teórico-metodológica que me permita mejorar mi práctica profesional. También se espera que los resultados puedan ser de utilidad para algún otro profesor interesado en enriquecer su práctica o en enseñar el tema de factorización en el NMS.

1.2. ANTECEDENTES

Partiendo de la visión de lo que se quiere lograr con la elaboración de este trabajo de grado, enseguida se muestra una recopilación de revisiones de investigaciones enfocadas en la formación del profesor de matemáticas, con el objeto de concretar de qué modo estas pueden influir en mi desarrollo profesional como profesora de matemáticas.

Primeramente, se habla del auge que ha adquirido la formación del profesor dentro de la enseñanza de las matemáticas y por ende el por qué debe ser considerado como uno de los temas fundamentales para la investigación de la Educación Matemática. Posteriormente se presentan algunos de los modelos teóricos que proponen los conocimientos y habilidades base de un profesor de matemáticas; con el fin de identificar qué componentes son necesarios para lograr el cambio que requiero en mi práctica. También se exponen algunas investigaciones que han experimentado propuestas para la formación del profesor; con el propósito de identificar algunas de las aportaciones y posibilidades teóricas y metodológicas que ya existen en el campo, como punto de arranque de la propuesta de desarrollo profesional. Finalmente, se presenta una última sección relacionada con los materiales didácticos, dado que se propone utilizar este recurso en la ejecución de la unidad didáctica propuesta.

1.2.1 Formación de profesores como tema de investigación

En la búsqueda de una educación de calidad, los investigadores en el área de la Matemática Educativa han determinado la existencia de una variedad de elementos que intervienen en el alcance de dicho propósito; siendo uno de ellos la actividad del profesor. Es por eso que en este apartado se presentan algunas de las investigaciones que se han ocupado de definir el por qué el conocimiento para la formación del profesor es ahora considerado como un tema de interés dentro de la investigación.

Según Sánchez (2011), algunos de los principales temas para los investigadores en la formación de profesores de matemáticas son: las creencias, opiniones y concepciones de los maestros y sus prácticas; los conocimientos y habilidades necesarios para ser un "buen" profesor de matemáticas; la relación entre la teoría y la práctica y el papel del pensamiento reflexivo. De estos temas de investigación los que serán de interés en el presente informe y de acuerdo a los objetivos de mi desarrollo profesional serán: la práctica del profesor; los conocimientos y habilidades que debe tener un "buen" profesor y la reflexión de la práctica.

Sumado a lo anterior, en las últimas décadas la preocupación por la educación ha propiciado cambios y reformas que están incidiendo en el sistema educativo; siendo el profesor y su formación, uno de los elementos que se constituye como el centro de interés

(García, 2005). Esto ha generado la necesidad de explorar y dar evidencia de cómo el desempeño del profesor podría ser una de las piezas clave en el éxito de los estudiantes y del desarrollo de la educación. En este caso se le ha dado énfasis a la formación docente, como una medida que incide en la enseñanza de las matemáticas en las aulas (Gellert, 2014).

En relación con lo anterior, Esparza y Jiménez (2017), señalan que "las investigaciones en la formación de profesores de matemáticas han centrado su mayor interés en la importancia sobre la determinación de los diferentes componentes necesarios del conocimiento del profesor" (p. 175). Por consiguiente, estas lecturas permiten evidenciar que el propósito de la mayoría de las investigaciones en torno al profesor se centraliza en comprender la estructura del conocimiento que necesita un profesor, el cual no es exclusivamente matemático de carácter conceptual, sino también práctico, pedagógico, didáctico, curricular, contextual, entre otros. Sin embargo, estos son desconocidos para algunos de los profesores, por lo que dentro del campo de la Matemática Educativa también han buscado trabajar en la creación de modelos como una herramienta que apoye su formación frente a la comprensión de dicho conocimiento que caracteriza al profesor de matemáticas.

Por consiguiente, surgen algunas preguntas como: ¿cuáles son esos componentes del conocimiento del profesor?, ¿cómo un profesor puede adquirir o construir esos conocimientos? y ¿cómo podría aplicarlos en su práctica docente? Conocer algunas respuestas a estas preguntas permitirá contar con elementos que guíen este proyecto de práctica profesional. A continuación, se presentan algunos avances en las respuestas a estas preguntas y que guiarán el desarrollo profesional de la profesora que es autora de este trabajo.

Aquí es importante mencionar que la presentación de algunos de los modelos del conocimiento del profesor de matemáticas, tienen la intencionalidad de describir los conocimientos que debe poseer un profesor de matemáticas; sin embargo, si el interés fuese comparar y analizar sus semejanzas y diferencias, esto puede consultarse en González y Eudave (2018).

1.2.2 Modelos del conocimiento del profesor de matemáticas

Es evidente como en la actualidad, la didáctica de las matemáticas se ha interesado en la formación de los profesores de matemáticas. Solano y Bedoya (2013), aseguran que: "dentro de la didáctica de las matemáticas se encuentra un campo de Formación de Profesores de Matemáticas, el cual se ocupa de los diferentes dominios de conocimiento y saberes sobre los procesos instruccionales, curriculares y educativos en torno a los distintos contenidos matemáticos escolares" (p. 404). Este campo se encarga de describir aquellos conocimientos teóricos y los relacionados con la práctica, que en conjunto forman el verdadero conocimiento profesional de un profesor de matemáticas.

Por tanto, ante la relevancia de la función del profesor dentro de la educación, los investigadores se han enfocado en proponer modelos teóricos que describan esos conocimientos necesarios. Modelos que se basan principalmente en la descripción y categorización de dichos conocimientos; con la intencionalidad de que estos sean de utilidad para su desarrollo profesional exitoso. Una de las primeras contribuciones en este sentido fue la de Elbaz (1983), fue según Ponte y Chapman (2006), señalan que:

> se enfocó en identificar el conocimiento práctico y como este se basa en la experiencia de primera mano, cubre el conocimiento de sí mismo, el entorno, la materia, el desarrollo del plan de estudios y la instrucción, y se representa en la práctica como reglas, principios e imágenes (p. 461).

Después de tres años, Shulman con su modelo conocimiento base para la enseñanza, se interesa en los conocimientos del profesor a través de la presentación del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Un conocimiento en el cual se proponen tres dominios basados en la idea de enfocar los estudios del contenido a enseñar: Conocimiento del Contenido a Enseñar (SMK), Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y Conocimiento Curricular (KCC) (Shulman, 1986, citado por Sosa y Carrillo, 2010, p. 571). Ratificando en el interés por los conocimientos necesarios que un profesor debe tener para enseñar matemáticas.

Posteriormente, Shulman modifica su modelo añadiéndole algunos dominios resultando finalmente los siguientes: Conocimiento del Contenido, Conocimiento Pedagógico en general, Conocimiento del Currículo, Conocimiento Pedagógico del Contenido, Conocimiento de los Estudiantes y sus características, Conocimiento de los Contextos Educativos y finalmente, Conocimientos de los fines, Propósitos y Valores de la educación, todos con el objetivo de plantear que todo profesor en su preparación requiere tener un conocimiento base para enseñar (1987, citado por González y Eudave, 2018, p. 31).

Las categorías del modelo de Shulman (1987) son modificadas en la propuesta de Ball y colaboradores (2000, citado por Montes, Contreras y Carrillo, 2013, p. 403). Este modelo denominado "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" (MKT, por sus siglas en inglés) propone dos dominios. El primero es el Conocimiento de la Materia (SMK) que a su vez engloba al Conocimiento Común del Contenido (CCK), al Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y al Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK). El segundo dominio es el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) dentro del cual se sitúa el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y finalmente, el Conocimiento del Currículo (KCC). Para este modelo su principal contribución es el Conocimiento Especializado del Contenido; refiriéndose a este según Montes, Contreras y Carrillo (2013), como: "el conocimiento que es exclusivo del profesor de matemáticas para desarrollar su profesión" (p. 403). Es evidente como el modelo de Shulman y el MKT, comparten el reconocimiento de dos esferas de conocimiento: el Conocimiento del contenido y el Conocimiento Didáctico del Contenido.

Tanto el modelo de Shulman como el de Ball han seguido sirviendo de base para otros modelos. Uno de ellos es el llamado "Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (MTSK). Éste considera que el conocimiento que posee el profesor debe ser especializado en tanto le sea necesario en el desarrollo de su labor (Montes, Contreras y Carrillo, 2013). Este modelo como lo plantean sus creadores Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), se divide en dos dominios. El primero es el Conocimiento Matemático (MK), constituido a su vez por tres subdominios: Conocimiento de los Temas (KOT), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica de la Matemática (KPM). Un segundo dominio el Conocimiento didáctico del contenido (PCK), conformado por los subdominios: Conocimiento de las Características de Aprendizaje de Matemáticas (KFLM), Conocimiento de la Enseñanza de las matemáticas (KMT) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas (KMLS), (Flores-Medrano, Escudero, Montes y Aguilar, 2014**)**.

Este modelo mantiene los mismos dominios que anteriormente propone el MKT, sin embargo, poseen sus diferencias en denominación de los subdominios. El MTSK surge de la delimitación de subdominio (Montes, Contreras y Carrillo, 2013; Rojas, 2014 y Flores-Medrano, Sosa y Ribeiro, 2016),y esto se refiere a que no plantea de forma específica y total los conocimientos que se establecen para cada uno de los diferentes subdominios dado que, según Flores-Medrano, Sosa y Ribeiro (2016), plantean que: "las definiciones que se proponen en muchos de los subdominios del MKT quedan en términos de aquello que el profesor es capaz de hacer al tener ese tipo de conocimiento"(p.8), es decir, más en términos de habilidades y no como un conocimiento exclusivo del profesor de matemáticas. Otro elemento que marca diferencia entre ambos modelos son las creencias del profesor que presenta el MTSK. Elemento que permite comprender las concepciones que tiene el profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; el conocimiento en si del profesor y como éstas repercuten en el desarrollo de su labor (Montes, Contreras y Carrillo, 2013).

Otro de los modelos teóricos centrados en las componentes para la eficacia del profesor, es el creado por Schoenfeld y Kilpatrick denominado Teoría de la Proficiencia. Estos autores toman como antecedente a los modelos de Ball (2000) y Shulman (1986), e introducen los componentes necesarios para un buen profesor en términos de competencias, con la adopción de la palabra "Proficiencia" en la enseñanza de las matemáticas, interpretándola de manera formal como una "competencia profesional".

En dicho modelo, según sus creadores, el profesor debe contar con las siguientes competencias:

- Conocer las matemáticas a profundidad.
- Conocer a sus alumnos como personas pensantes y que aprenden.
- Tener la capacidad de diseñar y gestionar entornos de aprendizaje.
- Desarrollar normas de disciplina en clase.
- Hacer uso de materiales y estrategias que apoyen el aprendizaje de los contenidos.
- Reflexionar sobre su propia práctica (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, citado en Godino, 2009, p. 18).

A grandes rasgos este modelo propone las cualidades que debe tener un profesor competente en su formación.

Otro de los modelos que puede apoyar al profesor en el desarrollo de su práctica es el modelo "Conocimiento Didáctico-Matemático" conocido como CDM propuesto por Godino (2009). Este modelo lo que propone es que no basta únicamente con el conocimiento matemático para un proceso de enseñanza- aprendizaje de dicha disciplina, sino que además el profesor dentro de su formación requiere de conocimientos de cómo enseñar toda esa gama de contenidos que conforman la enseñanza de las matemáticas escolares. Este modelo se constituye de seis facetas las cuales son*:* interaccional, afectiva, cognitiva, epistémica, mediacional y ecológica. Algunas son en común con las dimensiones de los modelos anteriormente abordados; no obstante, adiciona nuevos elementos, como el dominio afectivo y las relaciones entre el profesor, el alumno y el medio. A su vez se compone de cuatro niveles: idoneidad, normas, configuraciones y prácticas (Godino, 2009, citado por González y Eudave, 2018, p. 37).

Después de un tiempo, Godino en colaboración con Pino-Fan en el 2015 realizan un rediseño del modelo modificando las facetas y niveles por tres dimensiones las cuales son: Matemática, Didáctica y Meta Didáctico Matemática. En la dimensión Matemática, se enfoca en aquellos conocimientos que están relacionados con el objeto matemático ideal para resolver problemas que solicita el currículo de matemáticas, así como también conocimiento matemático de las matemáticas escolares de niveles posteriores que propone el mismo currículo.

La dimensión Didáctica se compone de seis categorías o facetas. La primera faceta es la epistémica que se sustenta en los conocimientos matemáticos del profesor; es decir, la forma en la que comprende y conoce las matemáticas. Luego, la fase cognitiva se refiere a tomar en cuenta el desarrollo del conocimiento del alumno sus formas de pensar y actuar. La faceta afectiva que como su nombre lo dice, se enfoca en las actitudes y emociones del alumno.

Otra faceta es la interaccional, la cual se enfoca en el conocimiento que posee el profesor en su instrucción como: la organización de tareas, resolución de dificultades de sus estudiantes; incluso sobre las interacciones que se suscitan en el aula, en las que se toman en cuenta las relaciones entre el profesor y el estudiante. También se propone una faceta mediacional enfocada al uso de los recursos materiales y tecnológicos. Finalmente, una faceta ecológica, basada en las relaciones existentes entre el contenido matemático con otras disciplinas y el entorno social que se asocian en los procesos de enseñanza de las matemáticas. En el caso de la última dimensión que es la Meta Didáctico Matemática se centra en los conocimientos relacionados con las normas, reflexión e idoneidad en la práctica (Pino-Fan y Godino, 2015, citado por González y Eudave, 2018, p. 38-39).

Hasta el momento se han expuesto algunos modelos en los que plantean los conocimientos y competencias que debe poseer un profesor de matemáticas; sin embargo, no presentan formalmente una herramienta que sea de utilidad y apoye de una forma comprensible y organizada al profesor para llegar a construir los conocimientos que permitirán desarrollar esas competencias en la práctica como tal. En consecuencia, ahora la pregunta es: de qué manera un profesor puede construir o promover esos conocimientos y esas competencias para mejorar su práctica o de una manera más general, cómo se pueden integrar estos componentes en la formación de profesores de matemáticas.

Si a lo anterior le sumamos que en el sistema educativo de México con la aparición de nuevas reformas y nuevas formas de operar se ha ido incluyendo el manejo de dichos contenidos; pero no se explica la forma de llevarlo a la práctica o bien en el caso de no contar con esos conocimientos y habilidades cómo construirlos, lo que orilla al profesor a caer en la acción de manejar dichos contenidos con base en su experiencia. Para atender este tipo de problema, dentro de la didáctica de la matemática se propone una herramienta metodológica que guie al profesor de matemáticas en el diseño, ejecución y evaluación de una clase en un enfoque teórico denominado análisis didáctico. Rico (2013) lo define como “un método que se sustenta en la historia, en la propia matemática, en la filosofía del conocimiento y de la educación; utiliza técnicas y métodos del análisis conceptual y del análisis de contenido” (p. 19). Un método que, guía al profesor en la planificación (diseño, ejecución y evaluación) de la enseñanza de un contenido matemático específico y fundamentada en lo que estipula el currículo.

En estas contribuciones, es evidente que los primeros cinco modelos del conocimiento descritos anteriormente, proporcionan al profesor un listado de cualidades, habilidades y conocimientos con los que debe contar. Estos modelos describen de manera detallada la naturaleza y características del conocimiento especializado del profesor de matemáticas; sin embargo, faltaría explicar o proponer al profesor la manera de aplicarlos en su propia práctica o construirlos para su formación. Es aquí que se hace la elección de un modelo teórico metodológico como es el Análisis Didáctico (Rico,2013 y Gómez,2007), como el modelo que contiene los elementos que más se adecuan a los intereses del presente trabajo en especial a nuestra problemática y objetivos que adelante se presentan.

En la búsqueda de propuestas que puedan guiar esta experiencia de práctica profesional se continúa con la siguiente sección donde se presentan algunas propuestas para la formación de profesores.

1.2.3 Propuestas en la formación de profesores de matemáticas

Esta sección se conforma precisamente de propuestas que son creadas con la finalidad de contribuir a la formación de los profesores de matemáticas; propuestas que deben incluir conocimiento del currículo, conocimiento de un contenido matemático, conocimiento didáctico de contenido, un contenido psicológico (cognitivo) y finalmente conocimientos de instrucción y evaluación (Solano y Bedoya, 2013).

La mayoría de estas propuestas son investigaciones diseñadas en torno a la formación de profesores; orientadas a identificar y promover los tipos de conocimientos y habilidades que el profesor necesita para lograr una buena enseñanza (García, 2013), y es con base en ello, impactar positivamente en la formación del profesor de matemáticas. A continuación, se exponen algunas propuestas para la formación del profesor de matemáticas. Iniciando con una experiencia aplicada en la formación inicial del profesor y posteriormente seis propuestas con profesores en formación continua.

En relación con la propuesta para el mejoramiento de la formación docente, un modelo para la formación inicial es el que propone Alsina (2010). Éste consiste en el *aprendizaje reflexivo* para enseñar matemáticas; el cual "se fundamenta en las teorías socioculturales del aprendizaje humano" (p.151), a través de la aplicación del ciclo formativo ALACT de Korthagen. Este estudio tiene un enfoque de investigación interpretativo; en el que se aplica un método de investigación-acción, donde el profesor cumple con el papel de investigador y los alumnos aprenden a partir de la práctica que surge dentro del aula. Finalmente, a partir de un análisis cualitativo dedujeron que la intervención del aprendizaje reflexivo en la práctica educativa del profesor de matemáticas permite al profesor adquirir conciencia de su práctica. De esta manera se inicia un proceso de autorreflexión que le garantice un proceso de cambio de su propia práctica (Alsina, 2010).

Para el caso de la formación continua, Sáenz y Lebrija (2014) proponen un programa formativo dirigido a profesores de matemáticas en activo. Igual que la anterior, se basa en el aprendizaje reflexivo centrando su práctica en el estudiante. Los investigadores a través de los resultados resaltan que estos cursos se realicen a partir de las necesidades del profesor en formación y la influencia que tienen sus ideas y discusiones con colegas y expertos en aspectos de su práctica.

Otra investigación enfocada en la formación continua del profesor de matemáticas es la que plantea Font (2013), en la que específicamente busca obtener un desarrollo por competencias que refleje una práctica eficiente. Este proyecto se concreta en el Master de Formación de Profesor de Secundaria de matemáticas en España; donde proponen un mejoramiento en la preparación de sus profesores en matemáticas y en su didáctica, mediante la aplicación de ciclos formativos del modelo de análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico para el desarrollo de competencias.

Los resultados de las investigaciones con este enfoque, exponen algunos de los alcances en la formación del profesor con los ciclos formativos, pues son considerados útiles para aquellos profesores que se encuentran en proceso de formación. Estos ciclos formativos son un ejemplo de propuesta para guiar y mostrar de una forma organizada al profesor aprendiz, los conocimientos teóricos y metodológicos que debe poseer en su preparación, para luego aterrizarlos en su práctica y obtener un verdadero crecimiento profesional.

En el caso de Gascón, Bosch, Sierra y Ruiz (2014), proponen un programa de formación para la enseñanza en matemáticas formulado en términos de cuestiones a estudiar. Ésta se basa en la elaboración de conjuntos de preguntas enfocadas a un tema específico; cuya finalidad consiste en proporcionar respuesta a éstas. Las preguntas propuestas son consideradas importantes en el aprendizaje del alumno y en el desarrollo de la práctica del profesor de matemáticas; guiando su método de enseñanza de algún contenido matemático. Finalmente, los autores concluyeron que la propuesta de formación si funcionó, pero detectaron algunas dificultades generales que surgieron durante su experimentación considerándolas como restricciones al tipo de formación. Algunas de las dificultades detectadas fueron: dificultad en la formulación de las preguntas y búsqueda de respuestas a las cuestiones del formador; falta de disponibilidad de la comunidad matemática, de las praxeologías matemáticas para la enseñanza y de infraestructura y dificultad en plantear cuestiones que nacen de la profesión y proponer elementos de respuestas a las mismas.

En la investigación de Ponte, Mata, Quaresma y Velez (2014), se promueve la reflexión del profesor sobre su formación. En ésta se le propone involucrar en clase el uso de tareas; el manejo organizado de discusiones en el aula y atribuir participación y trabajo autónomo al alumno en clase. Lo que les arrojó como resultado cambios positivos en la práctica del profesor; demostrando estar convencidos de su aplicación en algún momento en su práctica diaria. El propósito de incluir tareas bien diseñadas en nuestra práctica, es el de usarlas como estrategia de apoyo para el alcance de las expectativas de aprendizaje. Un alcance centrado en el aprendizaje y participación del estudiante, y en el que es posible verse involucrada nuestra actuación como profesor. Siendo este último un aspecto que se debe reflexionar no solamente para fortalecer nuestra labor, sino también para buscar garantizar un progreso en el conocimiento del estudiante.

Siguiendo con el tema sobre propuestas para la formación de profesores de matemáticas, Solar, Ortiz y Ulloa (2016) exhiben un modelo de formación continua llamado "Mejoramientos de la Experiencia Docente (MED)", basado como su nombre lo dice en la experiencia. Este modelo se construye de cuatro etapas: análisis de la práctica de otros; análisis de la práctica propia; diseño e implementación de clase y evaluación de la implementación. Dicho modelo se centra en el conocimiento pedagógico del contenido. Aquí, la colaboración siempre debe ir de la mano de la experiencia y la práctica del profesor; diseñado concretamente para promover el desarrollo de conocimientos didácticos basado en la reflexión. Este modelo, según sus creadores establece una relación entre el conocimiento pedagógico de contenido y la reflexión de su propia práctica. Lo anterior, según los autores logra producir cambios favorables en los profesores, considerándolo como un gran avance en la formación continua de éstos. Esta propuesta, desde nuestra perspectiva trata de rescatar algunos de los conocimientos que debe poseer el profesor de matemáticas en su formación; conocimientos que ya han sido anteriormente descritos y expuestos en algunos de los modelos, con la finalidad de mejorar su práctica docente.

Al igual que en México, en Israel se tiene la necesidad de implementar un nuevo currículum y mejorar la preparación de sus profesores a través de programas que dirigidos a enriquecer su desarrollo profesional. Estos esfuerzos quedaron registrados en Levenberg y Patkin (2014), en donde proponen un programa de capacitación para docentes de matemáticas en servicio, llamado "Especialización en matemáticas". Los objetivos en este proyecto fueron: fortalecer el conocimiento de las matemáticas de los profesores, así como su conocimiento del nuevo plan de estudios de la escuela primaria; capacitar a los profesores que podrían desarrollar entornos de aprendizaje adaptados a una variedad de tipos de estudiantes; además de proporcionar conocimiento para implementar varias formas de evaluar el desempeño de los estudiantes. La implementación de este programa trajo un logro limitado, debido a que según los autores la tasa de los profesores que habían completado con éxito el programa de profesionalización variaba entre el 63% y 85%. Es decir, sólo cerca de la mitad de los profesores que enseñaban matemáticas en la escuela participaron en el programa y muchas escuelas enviaron solo representantes individuales y no equipos de profesores.

Lo que es rescatable de esta experiencia es el trabajo colaborativo, siendo un elemento importante para la formación continua de profesores; un trabajo que no solamente se enfoque en compartir conocimiento relacionado con la disciplina, sino que a su vez sea conocimiento basado en las experiencias prácticas de otros profesores, en donde se vean involucradas estrategias, técnicas y/o herramientas que ya fueron exitosas y que podrían ser de utilidad para otros profesores, es decir, tratar de trabajar con un acompañamiento para realmente alcanzar cambios factibles y notorios en la educación matemática.

Las aportaciones expuestas en este apartado dan a conocer modelos o proyectos que pueden contener sugerencias para considerar en procesos de desarrollo profesional. En particular, podrían ser considerados en la experiencia propuesta para el mejoramiento de mi desempeño docente. Algunas de las que podrían contribuir a ello son:

- Incluir la reflexión sobre la propia práctica profesional; en la que de forma particular se involucre una revaloración de mi formación; la implementación de tareas adecuadas que potencien diferentes prácticas; además de promover la participación del alumno. Estos puntos fueron propuestos en Ponte, Mata, Quaresma y Velez (2014);
- Participar en una experimentación donde sea el profesor el responsable de la implementación de una nueva propuesta de desarrollo profesional, dirigido a mejorar el trabajo en las aulas. Lo anterior, como las propuestas planteadas por Sáenz y Lebrija (2012); Gascón, Bosch, Sierra y Ruiz (2014); Solar, Ortiz y Ulloa (2016); Levenberg y Patkin (2014). Finalmente,
- Considerar que la práctica sea analizada y retroalimentada por expertos en la formación de profesores; todo con la visión de generar un espacio de desarrollo profesional.

En las propuestas anteriores los reportes fueron realizados por investigadores que experimentaron sus propuestas en proyectos de formación inicial y continua. En los siguientes artículos es el profesor quien adopta el papel de investigador. Es decir, es él quien busca construir un conocimiento sólido a partir de la investigación de la propia práctica. Estas investigaciones tienen algo en común, que fueron desarrollados bajo el mismo enfoque teórico metodológico. Debido a lo cual, de todos los modelos enfocados en la formación del profesor anteriormente ya mencionados, el modelo de elección para desarrollar el presente trabajo y que se adecua a nuestro objetivo general, es el del Análisis Didáctico.

En Rojas y Flores (2001), señalan que: "el análisis didáctico recoge la necesidad práctica del profesor de profundizar en un contenido matemático escolar, ayudándole en el desarrollo de su actuación cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa actividades de enseñanza" (p.20). En atención a ello, es considerado una herramienta metodológica que permitirá al profesor conseguir sus propósitos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A continuación, se presentan algunas investigaciones que igualmente han contribuido en la formación del profesor desde este enfoque teórico metodológico.

La primera aportación presentada en esta sección y que se fundamenta en el Análisis Didáctico es la realizada por Mora, Gutiérrez y Herrera (2013), como consecuencia de la entrada de un nuevo programa de estudio en Matemática para la educación primaria y secundaria en el país de Costa Rica. Esta investigación consiste en la propuesta de una unidad didáctica para el tema de la recta y tiene la particularidad de ser una investigación en proceso, por lo que solamente se presenta el análisis de contenido y cognitivo del análisis didáctico; concluyendo hasta el momento la creación de tareas con conocimiento matemático aplicadas a la realidad.

A su vez Hurtado y Torres (2015), comparten una propuesta de una unidad didáctica para la enseñanza y aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita real; basada de igual forma en el marco teórico metodológico del Análisis Didáctico. Dicha unidad didáctica, trajo como resultado la determinación de aspectos importantes con relación a los conocimientos didácticos que debe poseer un profesor en el abordaje de una clase. Uno de ellos por ejemplo es que el profesor identifica las posibles dificultades que pueden llegar a poseer los estudiantes en torno al tema que se está enseñando o al enfrentarse a las actividades o tareas propuestas para el desarrollo del contenido. Asimismo, en el estudio aclaran que la propuesta presentada no contempla todos los conocimientos didácticos, pero si brinda una especie de guía para su aplicación en el diseño de una clase; siendo una de varias propuestas para la enseñanza-aprendizaje del tema y no la única en existencia.

En estas últimas aportaciones se reflexionó cómo a través de la metodología del Análisis Didáctico, se propició la construcción o fortalecimiento de los conocimientos que plantean los modelos teóricos del conocimiento del profesor descritos en la sección anterior. Los resultados de esta reflexión se presentan en el capítulo 5, mediante la tabla 9 que derivado de la experiencia vertida en este informe muestra para cada etapa de este marco teórico metodológico cuáles son los conocimientos del profesor de matemáticas que podrían construirse en cada uno de los modelos ya descritos.

Para concluir el capítulo de antecedentes, se presenta un apartado dirigido a los Materiales Didácticos. La razón es que, en mi labor como profesor, he recurrido a la implementación de algunos materiales didácticos con la finalidad de fortalecer el aprendizaje de mis estudiantes. En el desarrollo de estas sesiones, tuve la oportunidad de identificar que, al incluir un material manipulable en la enseñanza de un tema matemático, esto ayuda a que el estudiante tenga una mayor compresión. Algunas de las justificaciones es que, al tener una representación lo más cercano a lo real, le permite construir el significado del concepto. Esto y otras razones de elegir el uso de un material didáctico manipulable se sustentan en la siguiente sección desde los resultados de la investigación.

1.2.4 Materiales didácticos

La meta ideal de un profesor de matemáticas es garantizar el aprendizaje de sus estudiantes; por consiguiente, se ha visto en la necesidad de buscar aquellos recursos y materiales didácticos que le apoyen y le sean de utilidad en el alcance de dicho fin. En Alsina, Burgués y Fortuny (1988), definen a los materiales didácticos como "todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje" (p. 13). Por otro lado, Coriat (1997; citado por Socas, Camacho y Hernández, 1998), describe a los recursos didácticos como: "todos aquellos materiales que el profesor utiliza en clase, dejando la denominación de materiales didácticos para aquellos que se construyen con fines educativos específicos" (p. 79). Luego, la diferencia que existe entre ambos términos es que los recursos didácticos son herramientas de apoyo para la práctica sin un fin educativo; mientras que los materiales didácticos son un medio orientado únicamente a la educación. Por lo tanto, dado a la intencionalidad e interés de lo que se quiere lograr construir con este trabajo, se utilizará un material didáctico en apoyo de la enseñanza del tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios.

En la enseñanza de las matemáticas los materiales didácticos pueden ser clasificados desde diferentes criterios. En González (2010) se propone clasificarlos en: *material didáctico estructurado y no estructurado*. Los materiales didácticos estructurados son materiales considerados y producidos para enseñar y aprender matemáticas como: las regletas, bloques lógicos, ábacos entre otros. Los materiales didácticos *no estructurados*, son aquellos materiales manipulables comunes que no son útiles para la enseñanza de las matemáticas, como: material de desecho, calculadores, botones.

Otra forma de clasificar los materiales didácticos, es la que propone Alsina, Burgués y Fortuny (1988), la cual está basada de acuerdo a la función de los materiales y se compone de nueve familias de materiales que a continuación se presentan.

1. Materiales dedicados a la comunicación audiovisual: dibujos hechos con tiza, transparencias, diapositivas, películas animadas, montajes de videos, sonidos, explicaciones, canciones, refranes, etc.
2. Materiales para dibujar: instrumentos de dibujo: reglas, compases, pantógrafos, inversores, trasladores, simetrizadores, escuadras, carbones, elipsógrafos, parabológrafos, hiperbológráfos.
3. Materiales para leer: libros, cuentos o comics.
4. Materiales para hacer medidas directas e indirectas: reglas graduadas, compases de escultor, transportadores, esferómetros, metros, metros cuadrados.
5. Materiales que son modelos: Poliedros, polígonos, mosaicos, superficies, curvas etc.

6. Materiales para el descubrimiento de conceptos: todos los materiales que se precien de serlo, pero enfatizan en aquellos en el que su uso lleva al descubrimiento de nuevos conceptos o propiedades.
7. Materiales para mostrar aplicaciones: instrumentos que permiten evidenciar nuevas aplicaciones de conceptos, ya asumidos, consolidando los propios conceptos previos, así como sus posibilidades.
8. Materiales para resolver problemas (rompecabezas, piezas de mosaicos o de mecano, el plegado de papel, etc.).
9. Materiales para demostraciones y comprobaciones (especialmente en geometría existe la posibilidad de presentar demostraciones) (p. 15).

En el caso de Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011), manejan dos criterios de clasificación según su utilidad y formato (Figura 1). Dentro del criterio de utilidad consideran: el contenido (Aritmética, Álgebra, Geometría, Funciones y Estadística); nivel educativo (educación infantil, educación primaria, secundaria y bachillerato); momento en el que se utiliza (Pre-instruccional, Co-instruccional, Post- instruccional); tipo de tarea y actividad (mostrar-observar, proponer-manipular, plantear-resolver problemas y buscar-desarrollar estrategias) y tipo de aprendizaje (memorizar, comprender, resolver problemas, aplicar algoritmos y dominar técnica). Respecto al criterio de formato contemplan: el soporte (informático, material plástico y papel); la accesibilidad (facilidad de encontrar en el mercado o solamente en comercio especializado) y grado de difusión (muy conocido, difundido y específico).

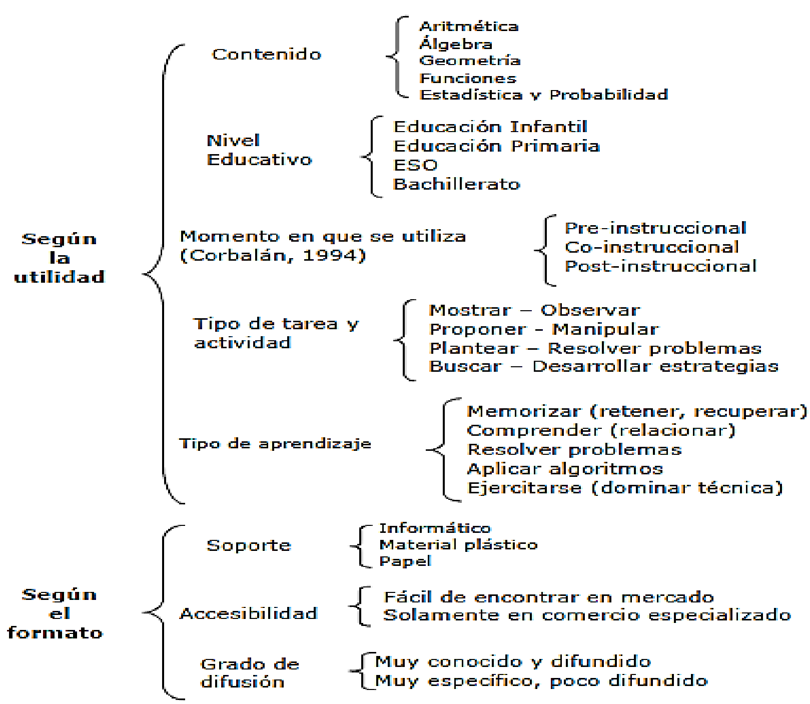


Figura 1. Criterios de clasificación de los materiales o recursos *(Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina, 2011, p. 43)*

Las ventajas de utilizar un material didáctico es que según Rico (1997, citado por Socas, M., Camacho, M. y Hernández, J., 1998, p.80), proporciona los soportes con los que se representan y refuerzan los conceptos y procedimientos matemáticos; además, permite nuevas formas de evaluación, permitiendo al profesor cambiar su discurso tradicional. Por esta razón, considero que harán que mi práctica salga de lo habitual; es decir, me dará la posibilidad de ejecutar una clase más innovadora.

Sin embargo, en la implementación de materiales didácticos es necesario saber sus fortalezas y debilidades. Las ventajas según González (2010), son:

- Permiten modelizar conceptos e ideas matemáticas, permitiendo analizar sus propiedades y facilitar la comprensión de los conceptos.
- Proporcionan una fuente de actividades matemáticas estimulantes y atractivas para los alumnos hacia las matemáticas.
- Permiten que los alumnos realicen actividades de forma autónoma.
- Proporcionan un buen entorno donde plantear situaciones -problema.
- Con ellos se pueden adaptar las actividades a cualquier nivel y a cualquier grupo de alumnos, respetando las diferencias individuales.
- Permiten el trabajo en grupos, lo que posibilita la colaboración, el debate y el diálogo entre alumnos y con el profesor.
- Son buenos instrumentos para diagnosticar y evaluar la comprensión de conocimientos matemáticos (p. 9).

En contraparte, González (2010) señala algunas desventajas en su uso:

- Dificultades económicas: los materiales didácticos son caros, pero algunos pueden se elaborados por el profesor.
- Dificultades estructurales: las verdaderas condiciones en las que se da una clase, pueden dificultar la administración del tiempo, por lo que puede ser un tanto difícil el desarrollo adecuado de la misma.
- Excesivo número de alumnos.
- Concepciones inadecuadas de los materiales didácticos de parte de los alumnos, profesores y padres," los juegos se realizan en el patio", " los juegos generan mucho ruido", " las buenas clases son aquellas donde reina el silencio".
- El desarrollo curricular: los programas, que hay que acabar, pueden suponer enemigos irreconciliables del uso de material didáctico, es decir pueden existir contenidos matemáticos que nos son compatibles o no pueden ser enseñados con el uso de un material didáctico.
- Las exigencias que conlleva: el utilizar un material didáctico como apoyo para la enseñanza de un tópico matemático demanda de mayor trabajo y preparación por parte del profesorado (p. 10).

El diseño para el tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios se complementará con el apoyo de un material didáctico. Por tal motivo, se presentan dos materiales didácticos que han sido propuestos por investigadores del campo para contribuir en la enseñanza de este tema.

El primer material didáctico lo presentan Salazar, Jiménez y Mora (2013), denominado: "Tabletas algebraicas", esta alternativa consiste en la implementación de un material manipulativo procedente de los bloques multibase (BAM), o Bloques de Dienes. Este material es propuesto por estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia (Figura 2). La finalidad es apoyar en el proceso de enseñanza del tema factorización de algunos polinomios de la forma $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, $a, b \in N; c, d, e, f \in Z$. A pesar de ser una propuesta que aún no ha sido aplicada a un grupo de estudiantes, ellos consideran que es un material que permite asignar sentido al proceso de factorización de algunos polinomios de segundo grado, pero no de cualquier polinomio. Esto lo hace un material limitado en cuanto a cobertura, pero accesible para introducir la factorización de polinomios con ciertas características.

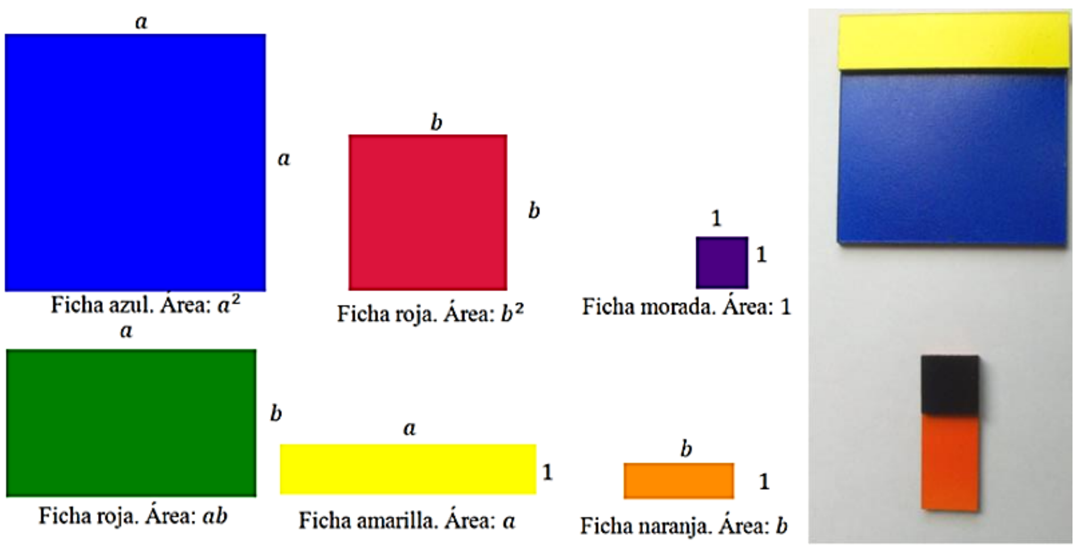


Figura 2. Material didáctico tabletas algebraicas *(Salazar, Jiménez y Mora, 2013, p. 2)*

Un segundo material didáctico es el que se presenta en Acevedo (2015), con el propósito de proporcionar al profesor y a sus estudiantes una herramienta para la resolución de ejercicios de factorización de polinomios. La propuesta es llamada "El álgebra es un juego", y utiliza un material didáctico compuesto por un tablero y fichas; los cuales permitirán al estudiante visualizar la factorización de polinomios. Ellos exponen como ejemplo la factorización del polinomio $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(x^2 + 2x + 1) = (x + 1)(x + 1)(x + 1) = (x + 1)^3$ (Figura 3) y el polinomio $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) = (x + y)^3$ (Figura 4). En esta propuesta se hace hincapié que va más allá de los procesos algorítmicos y repetitivos, diferente a lo que comúnmente se ve en una clase tradicional. De esta manera, aun cuando no ha sido aplicada a estudiantes, aseguran que la implementación de este material didáctico en clase permitirá lograr la transición entre el pensamiento concreto al pensamiento abstracto a través de su manipulación, lo que a su vez generará la asimilación del contenido matemático.

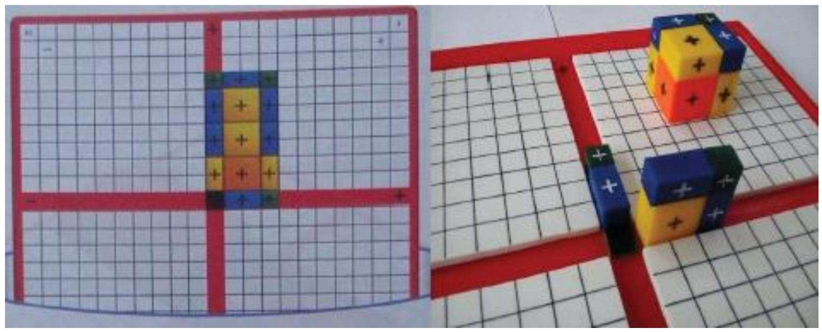


Figura 3. Material didáctico "el álgebra es un juego" *(Acevedo, 2015, p.225)*

Figura 4. Material didáctico "el álgebra es un juego" *(Acevedo, 2015, p.225)*

Pese a que, en ambos artículos no se menciona el haber probado el material en un aula real con estudiantes, los autores plantean que este tipo de materiales podría mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje del tema de factorización de polinomios. Por el momento tentativamente se pretende utilizar como material didáctico para esta propuesta de unidad didáctica las regletas o tabletas algebraicas, material del cual sus razones y forma de implementación se discutirán a profundidad en el análisis de instrucción, puesto que son aspectos que dependen de la elección del método de factorización que se decida y se tenga oportunidad de enseñar, ya que la profesora en cuestión no es la titular de la materia del grupo en el que se aplicará la unidad didáctica.

Una de las finalidades de los antecedentes es que permitan profundizar en el tema de interés identificando la problemática, el problema y opciones para resolver dicho problema.

De esta manera a continuación se presenta el planteamiento del problema, quedando así delimitado el interés y los alcances del presente proyecto.

1.3. PLANTEAMIENTO DE PROBLEMA

1.3.1 Problemática

Según Gellert (2014), “los investigadores y formadores en el campo educativo de las matemáticas han puesto gran interés en la formación docente como medida para mejorar las prácticas de enseñanza de las matemáticas en las aulas” (p.70). Por consiguiente, algunas de las investigaciones se han enfocado en la búsqueda de los conocimientos y habilidades que requiere un profesor en su formación (Esparza y Jiménez, 2017), a través de propuestas de modelos que describen detalladamente los conocimientos que le servirán de guía para alcanzar a ser un profesor eficiente y de calidad. Sin embargo, los modelos anteriormente mencionados al igual que las expectativas de las instituciones educativas como Gómez (2007), señala “no aporta necesariamente las pautas específicas para el día a día de la práctica de los profesores” (p.18), lo que ha generada preocupación en el profesor por buscar respuestas de cómo organizar y llevar a cabo su enseñanza, produciendo en algunos de ellos interés y curiosidad en la investigación del campo.

Un modelo que presenta una propuesta metodológica para que los profesores de matemáticas sistematicen diferentes prácticas y en el proceso construyan o utilicen conocimientos específicos y especializados del profesor es el Análisis Didáctico. Un procedimiento con el que el profesor puede trabajar el conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar los aprendizajes de los estudiantes sobre las matemáticas y la práctica de enseñanza del profesor (Gómez, 2007).

De esta manera, el problema que dirige esta práctica de desarrollo profesional y que a continuación se enuncia se enmarca en la necesidad de los profesores y en particular de mi persona de mejorar como docente. Lo anterior, a través de sustentos teóricos metodológicos que me permitan construir conocimiento profesional y guíen mis prácticas de planeación, desarrollo y evaluación de una clase.

1.3.2 Problema

Algunos de los problemas con los que se enfrenta y debe resolver un profesor en su actividad docente, es la planificación y la gestión de una clase (Gómez, 2007). El reto es que el profesor lo realice con el sustento de herramientas teórico metodológicas basadas en la matemática educativa que guíen su actuación y reflexión. De tal manera que impacten de manera positiva en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas y por consiguiente en el aprendizaje de los estudiantes.

En lo que respecta a mi práctica docente, actualmente tengo ciertas dificultades para guiar un proceso de enseñanza-aprendizaje sustentado por la matemática educativa. Algunas de estas dificultades son: la selección y organización de los significados congruentes de los contenidos matemáticos y acorde a los aprendizajes esperados del tema; la construcción de expectativas de aprendizaje con fines coherentes al programa de estudios y a las necesidades de los estudiantes; el diseño o selección de actividades que promuevan los aprendizajes esperados y evaluaciones congruentes con lo que se quiere lograr. Lo anterior, podría ser resultado de mi poca experiencia o mi formación inicial que no es la de un profesor de matemáticas. Motivo por el cual se propone como objetivo general en esta unidad didáctica lo siguiente.

1.3.3 Objetivo general

Realizar el diseño, ejecución y evaluación de una unidad didáctica para el tema de factorizaciones básicas de trinomios para el NMS, con el apoyo de un material didáctico y del marco teórico metodológico del Análisis Didáctico.

1.3.4 Objetivos específicos

1. Identificar, seleccionar y organizar el contenido involucrado en la enseñanza-aprendizaje del tópico matemático de Factorizaciones Básicas de Trinomios.
2. Determinar las expectativas y limitaciones de aprendizaje para el tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios.
3. Seleccionar, diseñar o rediseñar actividades, tareas y los recursos necesarios para la enseñanza y aprendizaje del tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios congruentes con las expectativas de aprendizaje.
4. Implementar y desarrollar la unidad didáctica en el aula.
5. Evaluar los aprendizajes alcanzados por parte del alumno con relación al tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios.
6. Reflexionar sobre el proceso del diseño, desarrollo y evaluación de la unidad didáctica de Factorizaciones Básicas de Trinomios centrándonos en mi propia práctica.

1.3.5 Justificación

La preocupación por la educación ha propiciado cambios y reformas que están incidiendo en el sistema educativo. En México se propone la implementación de un nuevo modelo educativo (SEP, 2017), el cual arribó en el mes agosto del 2018. Este nuevo modelo plantea las adecuaciones que se realizarán en los programas de las asignaturas de Matemáticas del Nivel Medio Superior; con el fin de dar a conocer a los futuros y ya establecidos profesores, aquellos cambios que se consideran convenientes en bien de una mejora educativa; modificaciones que se espera impacten en el desarrollo de sus prácticas y discursos en la enseñanza de las matemáticas.

Es por ello que la formación docente ha adquirido cierto énfasis, como una medida que incide en la enseñanza de las matemáticas (Gellert, 2014). Esto ha provocado, según Esparza y Jiménez (2017), que las investigaciones en la formación de profesores de matemáticas enfoquen precisamente su atención en la determinación de componentes necesarios para la profesionalización del profesor.

Entre estas componentes están: el poseer conocimiento sobre las relaciones entre contenidos; las formas de aprendizaje de los alumnos; conocimiento en las diferentes formas de enseñanza de un tópico en específico; el tener habilidad para diseñar tareas y actividades; gestionar entornos de aprendizaje; el saber implementar materiales en la enseñanza y el reflexionar sobre la práctica. Componentes que debo poseer, dado que serán los que me permitirán obtener las competencias necesarias para fortalecer mi formación y por ende en un futuro contar con una práctica más efectiva.

1.3.6 Alcance o aplicación

Esta experiencia de desarrollo profesional se espera me ayude a construir conocimientos y habilidades teóricas y metodológicas para su aplicación en las prácticas de planeación, desarrollo y evaluación de una clase. El construir habilidades que permitan sustentar mi práctica se considera me hará una mejor profesora y me permitirá ser más competente. Es decir, tomar mejores decisiones y proponer soluciones a situaciones reales que, desde mi perspectiva pueda distinguir y que repercutan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en mi aula. Siendo importante para mí el brindar un proceso de enseñanza que realmente contribuya a la construcción de un pensamiento matemático en el estudiante. Asimismo, se espera que esta experiencia profesional pueda motivar a otros profesores a sumar los resultados de la matemática educativa a su práctica diaria.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El análisis didáctico puede ser utilizado para diferentes objetivos. Uno como herramienta de análisis curricular y otro como metodología de investigación. El primer objetivo va orientado a la formación del profesor y a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El segundo se enfoca a las primeras fases de la investigación en la Matemática educativa, puesto que, se ve involucrada información específica a un problema de la investigación (González & Gallardo, 2006), siendo de interés en este trabajo el primer objetivo.

El papel que juega el análisis didáctico en la formación del profesor según Gómez y González (2013), es el de proporcionar un procedimiento sistémico para el análisis de un tema concreto de las matemáticas escolares. Un procedimiento que se verá reflejado en el diseño, ejecución y evaluación de dicho tema en clase.

Rico (2013), destaca algunos rasgos relevantes del análisis didáctico como:

- Trabajar desde unas dimensiones curriculares sobre las cuales erige sus componentes y elaborar unas categorías que sustentan y renuevan el discurso matemático escolar.
- Trabajar y profundizar sobre los conceptos, usar técnicas de escrutinio para conseguir precisión y dominio en su descripción y uso.
- Completar los procesos de análisis con los de síntesis, según su finalidad educativa para organizar, secuenciar información y tomar decisiones fundadas.
- Fundamentar un método preciso y reglado para comprender textos matemáticos escolares, es decir, para su estudio, diseño e interpretación.
- Proporcionar una guía normativa para intervenir en la práctica y predecir con base en la investigación y la experiencia.
- Establecer criterios para la formación inicial y permanente del profesorado en la planificación y evaluación de unidades didácticas (p.19-20).

Los tres primeros rasgos del análisis didáctico anteriormente expuestos, permiten dar solución a las dificultades anteriormente presentadas y alcance a los objetivos de esta unidad didáctica, ya que el que este trabajo se base en este marco teórico, me dotará de experiencia para fortalecer el discurso en el aula; métodos de enseñanza; las técnicas de organización de los significados de los contenidos del tópico que se desee enseñar y el tomar decisiones oportunas al elegir las tareas y actividades pertinentes de acuerdo a los aprendizajes esperados que demanda el currículo. Todo con la finalidad de construir conocimientos que den un sustento a mi práctica y aseguren un crecimiento profesional.

Gómez (2007), presenta un esquema metodológico llamado “Esquema general del bloque sobre Análisis Didáctico” (Figura 5), para asistir al profesor a desarrollar las competencias y capacidades necesarias para el diseño de una unidad didáctica. Él menciona que dicho esquema surge de un proceso de reflexión; desarrollado con ayuda de fundamentos y herramientas conceptuales. Algunos de ellos abarcan: la noción de currículo y fundamentos sobre la matemática escolar; además, de herramientas relativas a los organizadores del currículo. Estos componentes conceptuales y metodológicos se constituyen en los instrumentos que sustentan los cuatro tipos de análisis que conforman el Análisis Didáctico (p. 187).

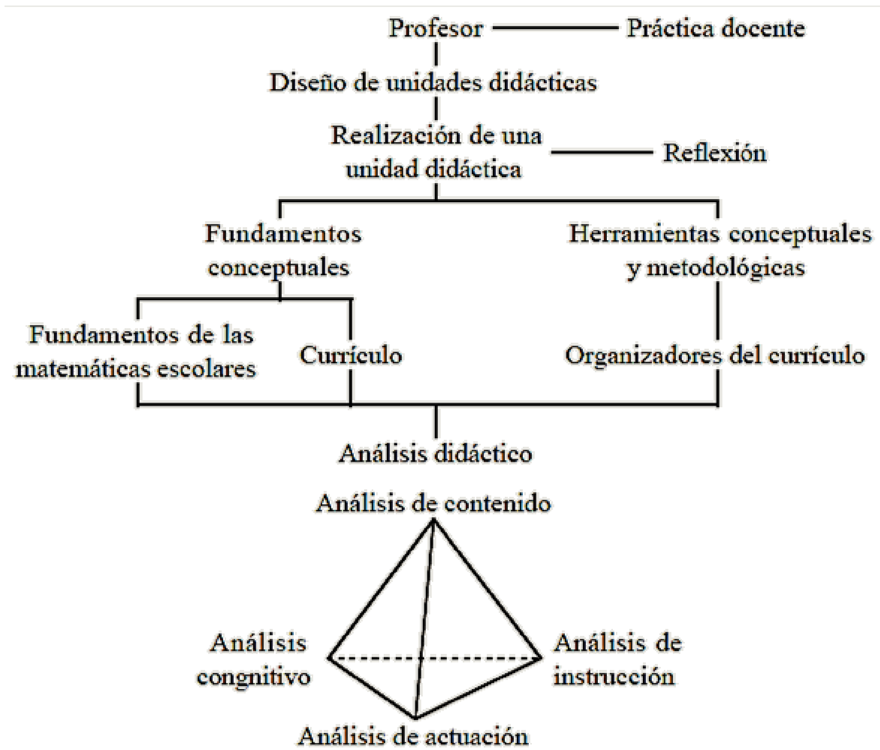


Figura 5. Esquema general del bloque sobre Análisis Didáctico *(Gómez, 2007, p. 188)*

El Análisis Didáctico se encuentra constituido por cuatro organizadores del currículum que son: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción (Figura 5). El análisis de contenido, cognitivo y de instrucción son análisis *a priori*, dado que, son análisis que se enfocan en los procedimientos que se realizan antes de la puesta en práctica como: el diseño y planificación. Finalmente, el análisis de actuación y en vista de que centra en la evaluación como un procedimiento que se promueve después de la puesta en práctica, este es un análisis *a posteriori.* (Lupiáñez, 2013). A continuación, se describirá con mayor detalle en que consiste cada uno de estos análisis.

2.1 ANÁLISIS DE CONTENIDO

El análisis de contenido lo define Lupiáñez (2009) como: "una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados del contenido matemático de un tema concreto, es decir, de los conceptos y procedimientos principales que lo delimitan" (p. 41). En este análisis el profesor tiene la oportunidad de identificar, seleccionar y organizar los significados de los contenidos y procedimientos del tema matemático que considera son importantes dentro de su proceso de enseñanza (Lupiáñez, 2009); siendo un análisis que, permitirá alcanzar el primero de nuestros objetivos para seleccionar aquellas nociones relevantes en el tema de factorizaciones básicas de trinomios.

Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008), a partir de la determinación de significado de Frege (1996), exponen que: "los diferentes significados de un concepto matemático vienen dado por las estructuras conceptuales en que se inserta -referencia-, por los sistemas de símbolos que lo representan -signos-, y por los objetos y fenómenos de los que surge -sentido- "(p. 9). Por consiguiente, el análisis de contenido se constituye en tres organizadores del currículo: *sistemas de representación*, *estructura conceptual* y *fenomenología* que a continuación se describen.

Sistemas de Representación

Los sistemas de representación en el análisis de contenido, son considerados como el conjunto de las diferentes formas en las que se puede presentar un concepto matemático de interés y las relaciones que en particular pudieran existir con otros conceptos. Estos sistemas en sí, representan diversas facetas de un concepto o estructura matemática, basados en determinadas reglas propias de la matemática y de la naturaleza del concepto (Gómez, 2002).

Los sistemas de representación pueden ser de tipo: *numérico*, compuesto por los símbolos de los números; *simbólico* con diferentes signos y símbolos como letras, números y operaciones aritméticas; *tabular*, relacionado con el numérico pero a su vez con el uso de líneas; *gráfico*, relacionado con el plano cartesiano; *verbal* como una expresión o lenguaje verbal; *geométrico*, asociado a representar el producto a través de la construcción de un rectángulo; *pictórico* relacionado con la cardinalidad de cierta cantidad de elementos; *manipulativo*, como apoyo para la comprensión de un tema y finalmente, *ejecutable* asociado al uso de las TIC (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018)

La funcionalidad que tiene un sistema de representación según Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2007), es que "cada sistema de representación destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa, permite entender y trabajar algunas propiedades, y contribuyen a la comprensión de conceptos y procedimientos" (p. 7), esto da la posibilidad de evidenciar que, al recurrir a esta clase de significados, permitirá al profesor potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha disciplina, pues como los describe Rico (2012), son: "definidos por los conjuntos de signos gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros" (p. 52).

Estructura Conceptual

La estructura conceptual, se enfoca en la descripción de las relaciones que existen entre un concepto con otros, es decir, se identifican los conceptos y sus relaciones tomando en cuenta los sistemas de representación, modelos y los fenómenos asociados (Gómez, 2002). La estructura conceptual se refiere a tener en cuenta su estructura matemática, relaciones conceptuales y relaciones de representación. Aquí, según Gómez (2009), será posible considerar tres tipos de elementos: "objetos, como casos particulares de un concepto; conceptos, como predicados que son saturados por los objetos y, a su vez, conforman estructuras matemáticas, y las estructuras matemáticas, conformadas por conceptos" (p.478); tratando de apoyar al profesor y permitirle comprender los conceptos y sus propiedades (Rico, 2012). Asimismo, se sucintan dos tipos de relaciones, verticales y horizontales. Las relaciones verticales serán aquellas que se den entre los tres tipos de elementos (objeto, concepto y estructura matemática) y las horizontales, las relaciones entre los sistemas de representación (Gómez, 2009).

Finalmente, para organizar los diferentes significados relacionados con el contenido matemático escolar, Gómez (2007) propone como instrumento el empleo de un mapa conceptual. Esto ya que es una herramienta que le permitirá al profesor organizar la información recabada en relación con los significados del concepto en cuestión, lo que facilitará la construcción de la estructura conceptual y dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los conceptos que caracterizan el tema?, ¿Qué procedimientos están implicados en el tema?, ¿Cómo se relacionan esos conceptos entre sí?, ¿Cómo se relacionan esos procedimientos entre sí? y ¿Cómo se relacionan esos conceptos y esos procedimientos? Las respuestas proporcionarán los elementos base para la formulación del análisis de contenido.

Fenomenología

La última dimensión es la de fenomenología; ésta se refiere a la contextualización o aplicación del concepto matemático y "surge de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto" (Gómez, 2007, p.50). Dicho de otra manera, se enfoca en aquellos fenómenos que en sí dan origen al concepto y le dan su propio significado y sentido (Rico, 2012)

Los significados seleccionados partiendo de las dimensiones anteriormente ya mencionadas, permitirán al profesor extender y organizar su elección de significados del concepto matemático de interés. Además, permiten comprender y/o establecer relaciones con otros conceptos, con la posibilidad de construir aquellos objetivos de aprendizaje que se promoverán en la instrucción del contenido matemático escolar.

2.2 ANÁLISIS COGNITIVO

El Análisis Cognitivo se centra en el estudiante involucrando las expectativas de aprendizaje del profesor hacia sus estudiantes (Lupiáñez, 2009). En este apartado el profesor determina las expectativas de aprendizaje, capacidades, competencias y limitaciones de aprendizaje para el tema de factorizaciones básicas de trinomios.

En este análisis Gómez (2002), sostiene que: "el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje" (p.271), es decir, realiza un análisis del cómo aprenden los estudiantes, tomando en cuenta lo que se les dificulta o facilita respecto a un tema matemático en específico a través de lo establecido no solamente por el criterio del propio profesor, sino especialmente por el currículo.

Este análisis se constituye de tres categorías específicas: expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas que posteriormente se describen.

Expectativas de aprendizaje

Son el conjunto de competencias y/o habilidades que el profesor espera que desarrolle un estudiante ante un proceso de enseñanza-aprendizaje de un tópico matemático (Rico y Lupiáñez, 2010). Estas expectativas de aprendizaje se centran en dos elementos los cuales son: los objetivos específicos y las competencias matemáticas.

Los objetivos específicos se encargan de enlazar los contenidos de un tema matemático con sus tareas, en donde según Lupiáñez (2009), estos objetivos, "se expresan como capacidades y se muestran mediante conductas observables, relativos a un tema concreto y referidos a tareas de una complejidad determinada sobre ese tema" (p.82) (Figura 6).

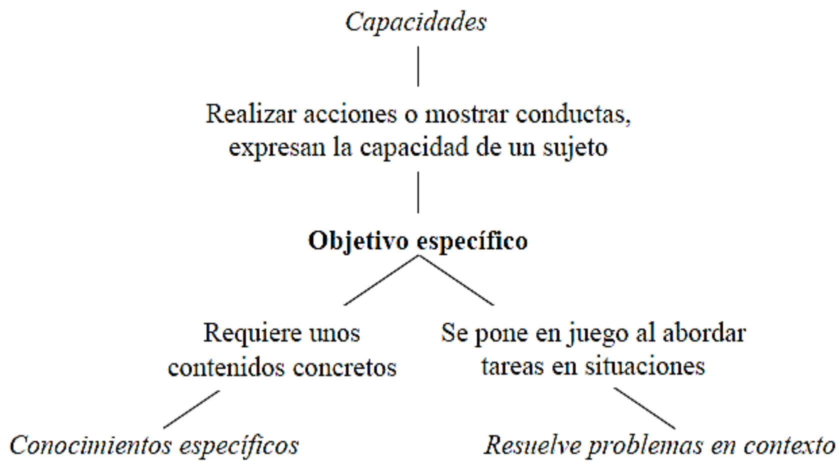


Figura 6. Componentes de los objetivos específicos *(Lupiáñez, 2009, p.82)*

Por otra parte, para el alcance de los objetivos planteados en este trabajo, es necesario desarrollar ciertas competencias. Una *Competencia* se refiere a la movilización e integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico" (SEP, 2017, p. 867), es decir, estar lo suficientemente preparado para actuar ante cualquier actividad que involucre un razonamiento matemático.

Limitaciones del aprendizaje

Enfocadas en aquellos elementos y/o aspectos que impiden el aprendizaje del estudiante, es decir, según Rico (2013), asociada a las dificultades y los errores en el proceso de aprendizaje del tema identificados en la práctica; o en aquellos casos donde el profesor no cuenta con experiencia como en el caso de la formación inicial se le sugiere apoyarse en la literatura de campo. Estas son caracterizadas por algunos autores como la parte negativa del análisis didáctico, puesto que son asociadas a los errores y dificultades a los que se puede enfrentar un estudiante al estar en contacto con un tema específico en matemáticas. Lupiáñez (2009), define a estas limitaciones de aprendizaje como: aspectos importantes para el diseño de unidades didácticas, pues a pesar de ser originadas por diferentes factores o circunstancias se presentan en cualquier proceso educativo, impidiendo afianzar el aprendizaje de los mismos.

Demandas cognitivas

Una categoría en la que el profesor busca reflejar aquellas capacidades cognitivas, a través de ciertas actividades en las que se involucre el desarrollo de competencias y la superación de las limitaciones específicas de algún tópico matemático en particular. Es decir, como lo dice Rico (2013), es donde las "tareas en las que se reta al alumno a dar respuesta a diversas cuestiones cuyo propósito está en el logro de su aprendizaje y la superación de los errores relativos al tema" (p.23). Siendo su objeto de análisis el alcance del aprendizaje y la superación de los errores sobre algún tema en específico (Rico, 2013), a través de capacidades.

Lupiáñez (2009), define el termino de *capacidad* como: "aquellas aptitudes o habilidades para realizar determinadas tareas o actividades que posee un sujeto, su poder para realizar un acto físico o mental" (p.78), lo que contextualizando en la enseñanza de las matemáticas se referiría a la práctica exitosa de cualquier tipo de tarea sobre algún tema matemático específico.

2.3 ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

En el Análisis de instrucción, el profesor selecciona y propone el diseño y secuenciación de las tareas que se realizarán en el desarrollo de la propuesta de la unidad didáctica (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), por lo que, conforme a ello dentro de la presente, dichas actividades a implementar serán congruentes a los aprendizajes que se pretenden lograr, en torno al tema de factorizaciones básicas de trinomios, en otras palabras, es la implementación y desarrollo de la unidad didáctica en el aula.

El objetivo de la selección de las tareas que se verán involucradas en las actividades de enseñanza-aprendizaje, permitirán al estudiante tener a su alcance la oportunidad de aprender y adquirir una mejor comprensión del contenido matemático, partiendo de esto, Lupiáñez (2009), se refiere a tareas y actividades de la forma siguiente:

- *Tareas*: demandas que un profesor plantea a los escolares, que movilizan el conocimiento de éstos sobre un tema matemático determinado, y que concretan los objetivos específicos de este tema matemático en términos de actuaciones.
- *Actividades*: son las diversas respuestas de los escolares ante las demandas planteadas; refiriéndose en términos de las actuaciones que se derivan de la realización de tareas.

(p. 62)

De acuerdo con lo anterior es evidente que el seleccionar las tareas es un procedimiento esencial dentro del análisis de instrucción, en el que dichas tareas deben ser las adecuadas para su implementación, por lo que Gómez (2007), propone los siguientes pasos para una correcta selección:

1. Establecer el contexto en el que se va a realizar la tarea (Especificar nivel educativo, describir, en términos de competencias, las principales características del diseño

curricular global en el que se enmarca la planificación local que incluye las tareas en cuestión y explicitar los supuestos acerca de las normas del aula).

2. Seleccionar un objetivo de aprendizaje concreto para cuyo logro se seleccionarán las tareas.
3. Como parte del análisis cognitivo, producir la tabla de capacidades-competencias para el objetivo de aprendizaje.
4. Caracterizar el objetivo de aprendizaje en términos de su contribución a las competencias y sus caminos de aprendizaje.
5. Seleccionar unas tareas.
6. Evaluar las tareas con respecto a su tabla capacidades- competencias.
7. Construir el grafo de los caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden cada tarea.
8. Establecer a qué competencias contribuye la tarea y en qué medida.
9. Evaluar la pertinencia de las tareas a partir de esta información.
10. Aceptar, rechazar o modificar las tareas y establecer una secuenciación.

(p. 84-85)

En la búsqueda de dichas tareas, a su vez se hace una selección de los posibles materiales y recursos que apoyarán al profesor en la implementación de la unidad didáctica, por lo que, se analizará la posibilidad de incluir como recurso a los materiales didácticos propuestos en la sección de antecedentes; esto dependerá si estos materiales son acordes a las expectativas declaradas en el análisis cognitivo y los significados elegidos en el análisis de contenido.

Según Carretero, Coriat y Nieto (1993, citados por Flores; Gómez; Marín, 2013) los recursos y materiales se definen como:

- *Recursos*: Se entiende por recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el profesor decide incorporar en sus enseñanzas.
- *Materiales*: Se distinguen de los recursos porque, inicialmente, se diseñan con fines educativos y en general, un buen material didáctico transciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones (p. 3).

La inclusión de los materiales y recursos en el desarrollo de tareas del profesor, complementa su instrucción, ya que en la implementación además de poner en juego las competencias de sus estudiantes, propicia la representación del concepto matemático de interés; lo que favorecerá en la comprensión del mismo convirtiéndose en lo que en Matemática Educativa llaman modelos no matemáticos, por lo que Gómez (2007), ha señalado que: "De esta manera, la manipulación del modelo permite "simular" el funcionamiento de la estructura matemática y genera un nuevo significado para ella" (p.91).

Esta postura justifica mi decisión como profesora de utilizar un material didáctico para la enseñanza del tema de factorización. Sin embargo, se deberá considerar de qué manera este material puede ser utilizado de acuerdo a las características del contenido y de los aprendizajes que se buscan lograr no solamente en el estudiante, sino también y con mayor razón en la profesora en cuestión.

La forma de desarrollar, y llevar a cabo un proceso de instrucción es propia de cada profesor, en el que de manera particular se evidencia su esencia y personalidad que individualmente le caracteriza en su labor, es decir, no existe una receta clave que le de las pautas de desempeñar su instrucción, siendo esta impredecible y cambiante para cada uno de ellos. Sin embargo, Lupiáñez (2009, p. 69), cita a Marín (2009), quien propone una serie de pasos que el profesor puede realizar para llevar a cabo un análisis de instrucción, lo cuales son:

1. Describir y clasificar tareas matemáticas, atendiendo los contenidos matemáticos que ponen en juego; las expectativas de aprendizaje a cuyo logro pueden contribuir, y para detectar y diagnosticar errores.
2. Diseñar o seleccionar tareas sobre el tema específico en el que se centra la unidad didáctica atendiendo a los criterios anteriores y con diferentes grados de complejidad.
3. Reformular el enunciado de algunas tareas para que promuevan el desarrollo de alguna competencia matemática específica, destacando entre ellas la de plantear y resolver problemas y modelizar.
4. Analizar críticamente secuencias didácticas presentadas en los libros de texto y otros materiales curriculares, presentando propuestas de modificación.
5. Construir secuencias de tareas orientadas por características específicas.
6. Elaborar criterios sobre el papel del profesor en el aula y las diferentes variables que intervienen en la planificación de una sesión de trabajo en el aula.
7. Analizar y seleccionar tareas orientadas a la evaluación del aprendizaje de un tema matemático.
8. Planificar los contenidos y expectativas de todas las sesiones de trabajo de una unidad didáctica y diseñarlas haciendo intervenir criterios de secuenciación y de gestión del aula.

2.4 ANÁLISIS DE EVALUACIÓN

Finalmente, seguido de la aplicación de la unidad didáctica existe un último análisis; el cual para Gómez (2007) es denominado como Análisis de Actuación en el que "el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta el momento" (p.29). El profesor hace uso de la información arrojada por el análisis anterior y evalúa las expectativas de aprendizaje que inicialmente se plantearon alcanzar y las limitaciones que puedan surgir en el desarrollo de la unidad didáctica, comparándolas a su vez con lo que en la puesta en escena se suscitó en su momento y centrándose en la descripción del conocimiento y comprensión de los contenidos matemáticos por parte del estudiante. Según Lupiáñez (2009) el profesor puede reflexionar en:

- Determinar en qué medida los escolares alcanzaron sus objetivos específicos de aprendizaje que se planificaron.
- Valorar si la selección y organización de contenidos ha permitido llevar a cabo la instrucción de una manera consistente y coherente.
- Comprobar el nivel de desarrollo de las competencias matemáticas de los escolares como del trabajo realizado con un tema específico de matemáticas.
- Constatar la superación de los errores y dificultades de los escolares en el trabajo con ese tema de matemáticas.
- Analizar si la selección y organización de las tareas resultaron provechosas y adecuadas para el aprendizaje perseguido.
- Determinar si esas tareas cumplieron con la función con la que fueron diseñadas.
- Establecer en qué medida el empleo de materiales y recursos optimizó el proceso de aprendizaje de los escolares; y
- Valorar la convivencia de los métodos e instrumentos de evaluación para extraer información del aprendizaje de los escolares de forma objetiva y clasificadora (p.71).

Respecto al presente análisis, existen otros investigadores que además de evaluar el desempeño del alumno, a su vez consideran importante la autoevaluación del profesor. Al respecto Rico (2013), se dirige a los desempeños tanto del estudiante como del profesor, por lo que a este último análisis por su parte lo nombra *Análisis Evaluativo.* En este análisis Rico (2013) maneja los criterios e instrumentos para diagnosticar, orientar y valorar los aprendizajes de estudiantes. Para ello, le pide al profesor que interprete los rendimientos y resultados alcanzados. Toda esta información le permite al profesor evaluar las decisiones que tomó y finalmente la reflexión del proceso de enseñanza y aprendizaje que se infiere de los logros alcanzados y su desempeño como profesor (Rico, 1995, citado por Rico, 2013), pues este análisis está orientado a la evaluación en sí de la enseñanza, con base en su habilidad y competencia de planificación e implementación de la unidad didáctica.

Es indudable que, a pesar de nombrarse de formas diferentes, este análisis en particular según Rico (2013), se encargará de: “mostrar los aprendizajes alcanzados, determina el desarrollo cognitivo de los escolares, enjuicia fortalezas y debilidades del proceso de instrucción, previene sobre sus amenazas y señala sus oportunidades de mejoras. Contribuye a la toma de decisiones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje del tópico matemático en estudio” (p. 24).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

El objetivo general de este informe de desarrollo profesional se ubica dentro del grupo propuesto en Kothari (2004) de aquellos que proponen familiarizarse con un fenómeno o adquirir nuevos conocimientos. Esto debido a que, al experimentar el ciclo del análisis didáctico sobre un contenido matemático escolar y con el apoyo de un material didáctico, me permitirá construir y reforzar conocimientos con sustento teórico metodológico. Además, de adoptar las competencias profesionales necesarias para el diseño, ejecución y evaluación de una clase. Competencias sustentadas en conocimientos matemáticos y conocimientos particulares de la matemática escolar y su enseñanza que, según Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), son útiles en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

Esta investigación es del tipo aplicado, dado que se centra en realizar una propuesta para dar solución a un problema práctico. En este caso, enriquecer los conocimientos y habilidades que uso en algunas de mis prácticas docentes dotándolas de un sustento teórico y metodológico. Las prácticas que se propone serán enriquecidas son: la elección de los significados del contenido, formas de usar un material de apoyo, tareas con diferentes niveles de dificultad; el poseer las habilidades necesarias para la elaboración de una planeación efectiva; el conocer sobre las diferentes limitaciones de aprendizaje en los estudiantes de un tópico y finalmente, que respalde y apoye mi proceso de actuación e instrucción.

La planificación y la gestión de una clase según la investigación en Matemática Educativa, es un problema al que normalmente se enfrentan los profesores en su labor (Gómez, 2007). Por consiguiente, el enfoque metodológico adoptado es el cualitativo puesto que se parte de examinar lo que se experimenta en la práctica. Es decir, consiste en comprender y describir algunos de los fenómenos que rodean el contexto de mi labor como profesora y construir conocimientos metodológicos a través de aquellas interpretaciones de mi experiencia. Todo lo anterior, se verá complementado con aquellos aportes de la literatura especializada.

La metodología a utilizar en el alcance de los objetivos propuestos es el *Ciclo del Análisis Didáctico* (Gómez, 2007). La forma sintetizada de este proceso metodológico se presenta en la Figura 7.

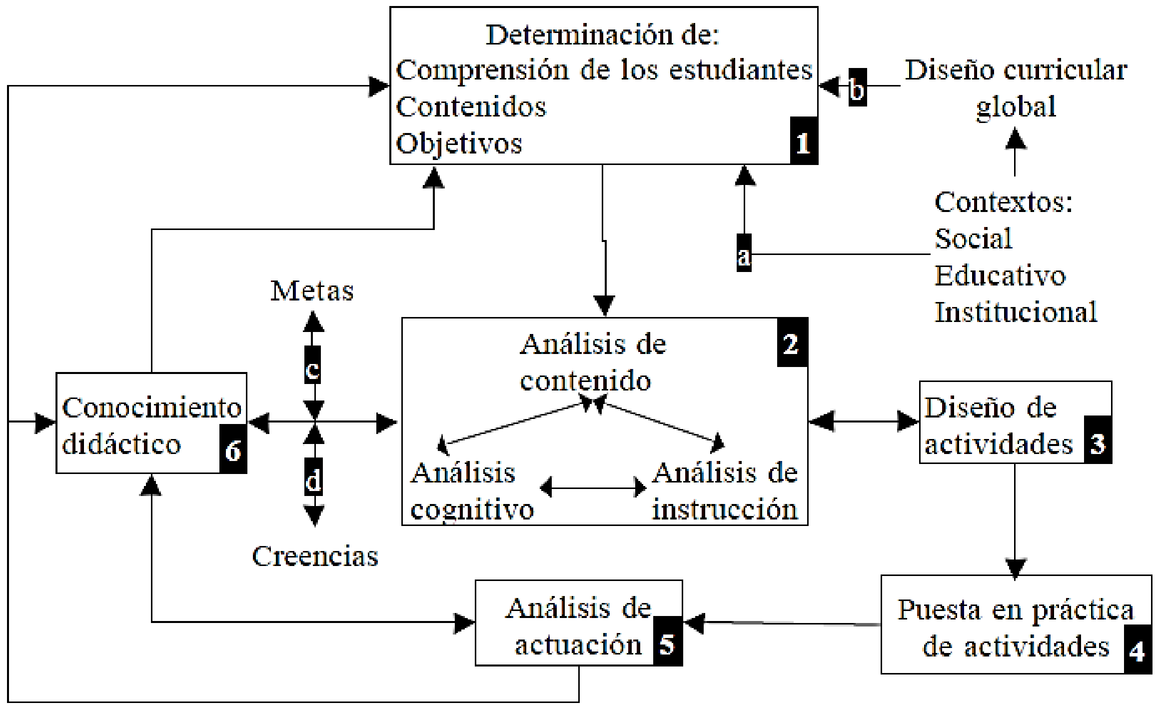


Figura 7. Ciclo del Análisis Didáctico *(Gómez, 2007, p.31)*

El Ciclo se inicia con un diseño curricular global. Un diseño que se centra en características y aspectos del contexto social, educativo e institucional. Incluye además de forma general el conocimiento que se tenga de los estudiantes a los que se aplica la unidad didáctica. A su vez, se hace la elección del tópico matemático que se quiere enseñar y los objetivos de aprendizaje que se quieren alcanzar en los estudiantes (Cuadro 1 de la Figura 7). Por otra parte, el ciclo del análisis didáctico también se constituye de un diseño curricular local. En este diseño el papel principal lo asumen las creencias y decisiones del profesor, abordando la planificación con el análisis de contenido; información que permitirá dar cavida al análisis cognitivo y de instrucción (cuadro 2 en la Figura 7).

Este último análisis se compondrá del diseño de actividades que, constarán de aquellas tareas diseñadas coherentemente de acuerdo a los tres tipos análisis mencionados (cuadro 3 en la Figura 7). El producir dicho análisis según Gómez (2009, p.476), “depende y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis”.

A continuación, el profesor pondrá en práctica dichas tareas y actividades que anteriormente fueron seleccionadas y/o diseñadas (cuadro 4 de la Figura 7), dando inicio al Análisis de actuación (cuadro 5 de la Figura 7). En este último análisis (cuadro 6 de la Figura 7), se estudian y analizan las acciones tanto de los estudiantes como del profesor, poniendo en juego por un lado el conocimiento de un nuevo contenido matemático por parte del estudiante y un conocimiento didáctico matemático por parte del profesor (Gómez, 2007). El conocimiento didáctico Gómez (2009), lo define como: “los conocimientos y destrezas que son necesarios para realizar el análisis didáctico de un tema matemático” (p.479). Conocimientos que se buscarán desarrollar en el transcurso de esta investigación, facilitando el alcance de las metas propuestas del profesor y propiciar el cambio o fortalecimiento de sus creencias en su formación como futuro profesor.

Para cada objetivo específico de esta unidad didáctica, se propone un método y una técnica para su alcance (Tabla 1). Tanto los métodos como las técnicas fueron elegidos con base en la propia propuesta metodológica del Análisis Didáctico y los alcances esperados en cada objetivo.

Tabla 1.
Método y Técnica de Objetivos

Método y Técnica de Objetivos		
Objetivo Específico	**Método**	**Técnica**
Identificar, seleccionar y organizar el contenido involucrado en la enseñanza-aprendizaje del tópico matemático de Factorizaciones Básicas de Trinomios.	Análisis conceptual y de contenido. (Rico, 2013)	Identificar y Organizar los focos preferentes del conocimiento matemático escolar.
Determinar las expectativas, las capacidades y las limitaciones de aprendizaje para el tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios.	Análisis cognitivo. (Rico, 2013)	Revisión de literatura documentada y conocimiento recabado por el profesor a través de su experiencia.
Seleccionar o diseñar actividades, tareas y los recursos necesarios para la enseñanza y aprendizaje del tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios congruentes con las expectativas de aprendizaje.	Análisis de instrucción. (Rico, 2013)	Revisión de libros de texto, materiales escolares y propuestas con base en la experiencia del profesor.
Implementar y desarrollar la unidad didáctica en el aula.	Observación participante. (Kothari, 2004)	Técnicas fotográficas y videos.
Evaluar los aprendizajes alcanzados por parte del alumno en relación con el tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios.	Análisis evaluativo. (Rico, 2013)	Valoración e interpretación de los rendimientos y resultados alcanzados.

Reflexionar sobre el proceso del diseño, desarrollo y evaluación de la unidad didáctica de Factorizaciones Básicas de Trinomios.	Análisis Evaluativo. (Rico, 2013)	

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

En este capítulo se presenta formalmente como tal la unidad didáctica, ya que se muestran como resultados cada uno de los análisis que la conforman y en donde no solamente se evidencia el desarrollo de la unidad, sino también se ven reflejados de forma organizada y real los conocimientos y habilidades que involucra y pone en juego un profesor de matemáticas en la enseñanza de la factorización Básica de Trinomios.

4.1 DISEÑO CURRICULAR GLOBAL

El objetivo principal de esta propuesta de desarrollo profesional parte de la intencionalidad de proporcionar a la profesora en cuestión las herramientas necesarias para construir conocimientos teórico-metodológicos para la realización del diseño, ejecución y evaluación de una unidad didáctica, así como también proporcionar la experiencia en la implementación y uso de un material didáctico para la enseñanza del tema de Factorizaciones Básicas de Trinomios en estudiantes de NMS.

Esta unidad didáctica será puesta en práctica en el programa de Preparatoria III de la Universidad Autónoma de Zacatecas, en un grupo de alumnos que recursan el primer semestre. Esta institución se encuentra ubicada en el municipio de Fresnillo del estado de Zacatecas.

El diseño de dicha propuesta se elabora a partir del mes de enero 2017 y se espera concluirlo en el mes de agosto del 2019.

4.2. ANÁLISIS COGNITIVO DEL TEMA DE FACTORIZACIÓN BÁSICA DE TRINOMIOS

El análisis cognitivo dentro del análisis didáctico, es el organizador centrado en el aprendizaje del estudiante y por consiguiente dirigido a la enseñanza de las matemáticas escolares. Este análisis en sí pretende marcar la pauta de para qué y el hasta dónde es importante aprender sobre un contenido matemático (Valenzuela, Ramos, González & Portugal, 2018). A continuación, como resultado de esta práctica de desarrollo profesional y reflexión se presenta cada una de las categorías que conforman dicho análisis específicamente enfocadas el tema de factorización.

4.2.1 Expectativas de Aprendizaje para el Tema de Factorización Básica de Trinomios

Esta primera categoría del análisis cognitivo concierne a los aprendizajes que se esperan logren los estudiantes sobre el tema de factorización. Estos aprendizajes deben ser congruentes con lo establecido en el currículo para el Nivel Medio Superior. Por lo que se inicia ubicando este tema dentro del nuevo currículo de matemáticas y rescatando la información de interés.

El tema de factorizaciones básicas de trinomios, es un tópico ubicado en la asignatura de Matemáticas I en el eje del Pensamiento Aritmético al Lenguaje Algebraico. El nuevo currículo para la educación media superior fue creado por los expertos en educación de nuestro país con el propósito de atender y superar las demandas en términos de aprendizaje del estudiante y de sus competencias como futuros ciudadanos. Un currículo que busca promover en el estudiante *actitudes proactivas y críticas* para la construcción de su conocimiento, con métodos de enseñanza no tradicionales; con el objetivo según el currículo de formar personas con la capacidad de desarrollar un razonamiento (SEP, 2017, p. 10) que le proporcione las habilidades necesarias para asignar un *significado* a ese conocimiento matemático (SEP, 2017), que en el futuro puede ser de utilidad para desenvolverse en la sociedad.

Por consiguiente, según el plan de estudios al finalizar el curso de Matemáticas I de Nivel Medio Superior es importante que el estudiante desarrolle un pensamiento matemático para resolver problemas en diferentes contextos y que le brinden las capacidades para *construir e interpretar situaciones reales, hipotéticas o formales que requieran de utilización del pensamiento matemático y formule y resuelva problemas, aplicando diferentes enfoques*, cualidades que pueden verse reflejadas al momento de poner al estudiante en contacto con el contenido matemático en cuestión y en las actividades propuestas por el mismo profesor. Asimismo, es importante que el estudiante adquiera la habilidad de *argumentar la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos*, la cual puede ser evidente al interactuar el estudiante con algún material didáctico, por ser un material educativo de apoyo que le brinda la posibilidad de experimentar y comprender el conocimiento aprendido aterrizándolo a su vez a la realidad (SEP, 2017, p.107). De esta manera, tanto las actividades como el material didáctico se convierten en un medio para promover el pensamiento matemático y ambos formarán parte de esta experiencia y serán descritos en el análisis instruccional.

Según el *Programa de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior* (SEP, 2017), la factorización básica de trinomios posee expectativas de aprendizaje (tabla 2) ubicadas en el eje del *Pensamiento Aritmético al Lenguaje Algebraico* con componente de *Patrones, Simbolización y Generalización: elementos del Álgebra Básica*; y como contenido central el *Trabajo Simbólico*. De una forma global los aprendizajes esperados respecto al tema de factorizaciones básicas de trinomios según el programa de estudios son: que el estudiante *opere y factorice polinomios de grado pequeño (dos y tres)*, del cual se busca obtener como producto esperado que el estudiante sea capaz de *expresar soluciones de ecuaciones cuadráticas*; un aprendizaje que le es de utilidad en temas y niveles académicos posteriores (SEP, 2017, p. 111).

Tabla 2

Expectativas de aprendizaje para el tema de factorizaciones básicas de trinomios

Nivel	Eje	Componentes	Contenido Central	Contenidos Específicos	Aprendizajes Esperados	Productos Esperados
Primer semestre.	Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.	Patrones, simbolización y generalización: elementos del Álgebra Básica.	El trabajo simbólico.	Operaciones y factorizaciones básicas de trinomios	Opera y factorizan polinomios de grado pequeño.	Expresar las soluciones de ecuaciones cuadráticas.

Fuente: recuperado de Plan de Estudios del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior, SEP, 2017 p. 111.

Las expectativas de aprendizaje anteriormente propuestas por el programa de estudios dan pauta al profesor de investigar sobre el origen de los errores y obstáculos que comúnmente cometen los estudiantes frente al tema de factorización. Una búsqueda que se construye de ideas o hipótesis que el profesor conjetura de la literatura reportada en la investigación y de su propia experiencia en el aula (Valenzuela, Ramos, González y Portugal, 2018). Esto se presenta en la siguiente sección.

4.2.2 Limitaciones de Aprendizaje para el tema de Factorización Básica de Trinomios

La factorización es uno de los temas que mayor dificultad causa aprender en los estudiantes (Ávila, 2017; Gallego, 2017; Sánchez, 2015; Morales, 2008; Morales y Sepúlveda, 2006); estas dificultades pueden tener su origen en diversos aspectos. Algunos investigadores lo atribuyen a la forma de enseñanza; a una enseñanza tradicional del método de las reglas o pasos y que probablemente prevalece en los niveles académicos posteriores (Morales, 2008).

Otros señalan que puede ser ocasionada por las concepciones de considerarlo un tema sin conexión con contenidos futuros o de poca utilidad y aplicación en actividades de la vida real (Sánchez, 2015; Torres, Mora y Luque, 2003); o simplemente porque no recuerdan lo aprendido en un nivel anterior (Ávila, 2017). En sentido contrario, algunos lo consideran una herramienta de utilidad para la solución de problemas (Torres, Mora y Luque, 2003), orillando a los investigadores a averiguar cuáles son esos errores y dificultades que experimenta el estudiante con el tema. Esto con la intención plantear propuestas que apoyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje del mismo.

Las dificultades que comúnmente se presentan en el tema de factorización de trinomios y que están ligadas a las expectativas de aprendizaje determinadas en la sección anterior son dos de las mencionadas en García (2010) y Morales y Sepúlveda (2006). La primera consiste en que el estudiante no llega a una comprensión del concepto de factorización en sí (García, 2010) y la segunda es que el estudiante no sabe o presenta confusión para elegir cuál de todos los métodos de factorización es el ideal para factorizar un polinomio (Morales y Sepúlveda, 2006). Estas dificultades pueden ser atribuidas a diversos factores, como: dificultad en el uso de los números y letras; el manejo incorrecto de los signos de una expresión algebraica; el no poseer una comprensión sobre la noción de variable o no tener conocimiento de los diferentes métodos de factorización (Morales y Sepúlveda, 2006; Baltazar, Rivera, Martínez, Cárdenas y Amaya, 2015).

Existen otras dificultades que según mi experiencia como profesora son:

- *Conocimiento y/o nociones de ciertos conceptos.* El estudiante no comprende en sí el significado de algunos de los conceptos base para entender el tema de factorización; por ejemplo: factorizar, factor, factor común, trinomio cuadrado perfecto y trinomio cuadrático.
- *Multiplicación de expresiones algebraicas.* Los estudiantes normalmente muestran dificultad en la aplicación de algoritmos.
- *Uso de las leyes de los signos.* Los estudiantes usualmente presentan confusiones y errores en el manejo de las leyes de los signos.
- *Raíz cuadrada del término cuadrático.* El estudiante no recuerda el procedimiento para encontrar la raíz cuadrada del término cuadrático del polinomio.

Las expectativas y limitaciones de aprendizaje dotan de información que apoya a la construcción de demandas cognitivas. En este caso, se rescata que las limitaciones ligadas a la factorización de trinomios son del tipo conceptual y procedimental. Por lo anterior, las demandas cognitivas deben estar dirigidas en ayudar a superar las limitaciones del tema que fue delimitado en las expectativas de aprendizaje. Recordando que éstas últimas no son solicitadas únicamente por el profesor, sino también por el currículo. De esta manera en la siguiente sección se presentan las demandas cognitivas para el tema de factorización de trinomios.

4.2.3 Demandas cognitivas para el tema de factorización básica de trinomios

Esta última categoría del análisis cognitivo se basa en las demandas cognitivas que propone el profesor al estudiante, expresadas en capacidades con la finalidad de: potenciar el aprendizaje, apoyar en la superación de dificultades y errores (Rico y Fernández-Cano, 2013) y lograr el alcance de las expectativas de aprendizaje sobre el tema. Las demandas cognitivas específicas para el tema de factorización de trinomios básicas son estructuradas a partir de la expectativa de aprendizaje de: *opera y factoriza polinomios de grado pequeño (dos y tres)* y de las competencias propuestas en el plan de estudios siguientes:

Competencias disciplinares

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales (IMM).
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques (RP).
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales (ER).
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (AS).
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento (AR).
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos (IG) (SEP, 2017, p. 107).

Capacidades

A continuación, se proponen las capacidades asociadas a la expectativa de aprendizaje establecida, la cual será separada en dos: "o*perar polinomios de grado 2 y 3*" y "*factorizar polinomios de grado 2 y 3*". Esta unidad didáctica se centrará en experimentar específicamente la segunda expectativa de aprendizaje y con polinomios de grado 2. En el caso de la primera al no ser el centro de interés, esta será contemplada como un conocimiento previo en el alcance de la segunda.

1. ***Operar polinomios de grado 2***

Para obtener esta primera expectativa y considerando las limitaciones de aprendizaje se dividirá en dos expectativas específicas: *reconocer las nociones centrales de monomios y polinomios* de corte conceptual y la segunda *realizar operaciones entre polinomios y monomios* de corte procedimental, para las cuales se proponen las siguientes capacidades:

1.1 *Reconocer las nociones centrales de monomios y polinomios*

- Identificar los elementos de un término (coeficiente, variable, exponente).
- Identificar el grado de un término.
- Identificar los términos de una expresión algebraica (cuadrática, lineal e independiente).
- Identificar el grado de una expresión algebraica

- Reconocer los términos semejantes.
- Identificar las características de una expresión algebraica según su número de términos (monomio y polinomio).
- Reconocer los diferentes tipos de polinomios según su grado.

1.2 ***Realizar operaciones entre polinomios y monomios***

- Realizar las operaciones aritméticas básicas (suma, resta multiplicación y división de números reales) de forma correcta
- Aplicar correctamente las leyes de los signos
- Efectuar suma y resta términos semejantes.
- Aplicar las reglas de los exponentes.
- Multiplicar un número por un monomio.
- Multiplicar un monomio por otro monomio.
- Multiplicar un número por un polinomio.
- Multiplicar un polinomio por otro polinomio.
- Dividir un monomio entre otro monomio.
- Dividir un polinomio entre un monomio.
- Dividir un polinomio entre otro polinomio.

2. ***Factorizar polinomios de grado 2***

Para este segundo objetivo específico se proponen capacidades asociadas a cada una de las técnicas de factorización pese a ser en esta unidad didáctica de nuestro principal interés la factorización básica de trinomios, así como también las capacidades necesarias para obtener como producto esperado de expresar soluciones de ecuaciones cuadráticas.

2.1 Factorización de factores comunes

- Comprender el término "factor".
- Identificar el máximo factor común (MFC) de un polinomio.
- Aplicar propiedad distributiva.

2.2 Factorización por agrupación

- Aplicar propiedad asociativa.
- Factorizar factores comunes

2.3 Factorización de diferencia de dos cuadrados

- Operar el producto de dos binomios conjugados.

- Identificar la diferencia de cuadrados en la expresión algebraica.
- Encontrar la raíz cuadrada de cada término algebraico.
- Identificar y representar el producto de dos binomios conjugados.

2.4 Factorización de suma o diferencia de dos cubos

- Identificar la suma o diferencia de dos cubos.
- Encontrar las raíces cúbicas de los términos cúbicos.

2.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

- Identificar y operar un binomio al cuadrado.
- Identificar los dos términos que son cuadrados.
- Reconocer un trinomio cuadrado perfecto.
- Encontrar la raíz cuadrada de cada término cuadrado.

2.6 Factorización de trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

- Reconocer un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.
- Identificar el término cuadrático del trinomio.
- Identificar el coeficiente cuadrático del trinomio.
- Identificar el término lineal del trinomio
- Identificar el coeficiente lineal *(b)* del trinomio.
- Identificar el término independiente del trinomio *(c)* del trinomio.
- Encontrar la raíz cuadrada del término cuadrático.
- Encontrar dos enteros cuyo producto sea c y cuya suma sea b.
- Aplicar las leyes de los signos.
- Asociar el significado del término cuadrático del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
- Asociar el coeficiente cuadrático con la cantidad de tabletas correspondiente.
- Asociar el significado del término lineal del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
- Asociar el coeficiente lineal con la cantidad de tabletas correspondiente.
- Asociar el significado del término independiente del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
- Asociar el término independiente con la cantidad de tabletas correspondiente.
- Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
- Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.
- Factorizar trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

- Reconocer al trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática.

2.7 Factorización de trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

- Reconocer un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
- Identificar que el término cuadrático del trinomio.
- Identificar el coeficiente cuadrático*(a)* del trinomio.
- Identificar el término lineal del trinomio.
- Identificar el coeficiente lineal *(b)*.
- Identificar el término independiente *(c)* del trinomio.
- Encontrar dos enteros con producto *ac* y suma *b*.
- Operar suma y resta de monomios
- Aplicar leyes de los signos.
- Asociar el significado del término cuadrático del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
- Asociar el coeficiente cuadrático con la cantidad de tabletas correspondiente.
- Asociar el significado del término lineal del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
- Asociar el coeficiente lineal con la cantidad de tabletas correspondiente
- Asociar el significado del término independiente del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
- Asociar el término independiente con la cantidad de tabletas correspondiente.
- Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.
- Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.
- Factorizar trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
- Reconocer al trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática.

Relación entre Expectativas de Aprendizaje, Competencias y Capacidades.

En esta sección se presentan cuatro tablas (de la 4 a la 7) que organizan y muestran las posibles relaciones entre la expectativa de aprendizaje, las capacidades y competencias disciplinares en torno al tema de factorizaciones básicas de trinomios (cuadrados perfectos, trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$).

Tabla 3
Capacidades de expectativa de aprendizaje 2.5 y su relación con las competencias disciplinares

Capacidad	Expectativa de aprendizaje	Competencias disciplinares					
	Factorización de trinomios cuadrados perfectos	**IMM**	**RP**	**ER**	**AS**	**AR**	**IG**
2.5.1	Identificar un binomio al cuadrado.						✓
2.5.2	Identificar los dos términos que son cuadrados.	✓					
2.5.3	Reconocer un trinomio cuadrado perfecto.	✓					✓
2.5.4	Encontrar la raíz cuadrada de cada término cuadrado.	✓					

Tabla 4
Capacidades de Expectativa de aprendizaje 2.6 y su relación con las competencias disciplinares

Capacidad	Expectativa de aprendizaje	Competencias disciplinares					
	Factorización de trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$	**IMM**	**RP**	**ER**	**AS**	**AR**	**IG**
C 2.6.1	Reconocer un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.	✓					
C 2.6.2	Identificar el término cuadrático del trinomio.	✓					
C 2.6.3	Identificar el coeficiente del término cuadrático del trinomio.	✓					
C 2.6.4	Identificar el término lineal del trinomio.	✓					
C 2.6.5	Identificar el coeficiente del término lineal *(b)* del trinomio.	✓					
C 2.6.6	Identificar el término independiente *(c)* del trinomio.	✓					
C 2.6.7	Encontrar la raíz cuadrada del término cuadrático.	✓					

C 2.6.8	Encontrar dos enteros cuyo producto sea c y cuya suma sea b.	✓					
C 2.6.9	Aplicar las leyes de los signos.	✓					
C 2.6.10	Asociar el significado del término cuadrático del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.						✓
C 2.6.11	Asociar el coeficiente cuadrático con la cantidad de tabletas correspondiente.						✓
C 2.6.12	Asociar el significado del término lineal del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.						✓
C 2.6.13	Asociar el coeficiente lineal con la cantidad de tabletas correspondiente.						✓
C 2.6.14	Asociar el significado del término independiente del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.						✓
C 2.6.15	Asociar el término independiente con la cantidad de tabletas correspondiente.						✓
C 2.6.16	Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	✓					✓
C 2.6.17	Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.	✓					✓
C 2.6.18	Factorizar trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	✓					
C 2.6.19	Reconocer al trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática.	✓					

Tabla 5

Capacidades de Expectativa de aprendizaje 2.7 y su relación con las competencias disciplinares

Capacidad	Expectativa de aprendizaje	Competencias disciplinares					
	Factorización de trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$	**IMM**	**RP**	**ER**	**AS**	**AR**	**IG**

C 2.7.1	Reconocer un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.	✓					
C 2.7.2	Identificar que el término cuadrático del trinomio.	✓					
C 2.7.3	Identificar el coeficiente del término cuadrático*(a)* del trinomio.	✓					
C 2.7.4	Identificar el término lineal del trinomio.	✓					
C 2.7.5	Identificar el coeficiente del término lineal *(b)* del trinomio.	✓					
C 2.7.6	Identificar el término independiente *(c)* del trinomio.	✓					
C 2.7.7	Encontrar dos enteros con producto *ac* y suma b.	✓					
C 2.7.8	Operar suma y resta de monomios	✓					
C 2.7.9	Aplicar leyes de los signos.	✓					
C 2.7.10	Asociar el significado del término cuadrático del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.						✓
C 2.7.11	Asociar el coeficiente cuadrático con la cantidad de tabletas correspondiente.						✓
C 2.7.12	Asociar el significado del término lineal del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.						✓
C 2.7.13	Asociar el coeficiente lineal con la cantidad de tabletas correspondiente.						✓
C 2.7.14	Asociar el significado del término independiente del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.						✓
C 2.7.15	Asociar el término independiente con la cantidad de tabletas correspondiente.						✓
C 2.7.16	Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	✓					✓

C 2.7.17	Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.	✓					✓
C 2.7.18	Factorizar trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	✓					
C 2.7.19	Reconocer al trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática.	✓					

La elaboración de este análisis y la información obtenida del mismo, dota al profesor de información que lo apoya a identificar, seleccionar y organizar los significados de los conceptos y procedimientos del tema matemático (Factorización de trinomios) que considera son importantes dentro de su proceso de enseñanza (Lupiáñez, 2009), dando origen a lo que será el análisis de contenido presentado en el siguiente capítulo.

4.3. ANÁLISIS CONTENIDO DEL TEMA DE FACTORIZACIÓN BÁSICA DE TRINOMIOS

El análisis de contenido según Rico y Fernández-Cano (2013), es aquel que: "contribuye a delimitar y precisar la pluralidad y diversidad de significados de aquellos conocimientos que lo estructuran; conocimientos que se consideran dan respuesta a la cuestión curricular inicial: ¿qué conocimientos? "(p.16). En esta sección se expone la información de corte histórico que se encontró y que se considera está relacionado con el método de factorización básica de trinomios. Además, se exponen los sistemas de representación, la estructura conceptual y fenomenología que determinan los significados que serán potenciados en el diseño de la unidad didáctica para el tema en cuestión.

4.3.1 Historia de la Factorización

En este apartado se presenta una revisión histórica en donde se describen algunos de los sucesos que marcaron y dieron origen al tema de factorización. Asimismo, a través de esta revisión, fue posible comprender la utilidad que desde la antigüedad hasta hoy en día se le asignó a este método de solución en la matemática.

- ***Mesopotamia***

El Álgebra jugo un papel esencial en la época de Mesopotamia y es aquí donde se presentaron las primeras apariciones de la factorización. En textos antiguos los babilonios evidenciaron y demostraron algunos de los métodos de solución de las ecuaciones de segundo grado, entre ellos el de factorización. Un método con procedimientos diferentes a los que hoy en día utilizamos, esto atribuido a los términos y símbolos que utilizaban en esa época. Estos matemáticos desarrollaron cierta habilidad en el manejo de operaciones algebraicas como: trasponer términos en una ecuación sumando igualdades; eliminar fracciones u otros factores multiplicando ambos miembros por cantidades iguales; además, sumando $4ab$ a $(a-b)^2$ lo podían transformar en $(a-b)^2$ que en sí eran factorizaciones simples que comúnmente utilizaban y de las que adquirieron práctica (Boyer, 2007).

- ***Euclides de Alejandría***

En el libro II de los Elementos de Euclides, describe un álgebra geométrica que es de utilidad para dar explicación a las técnicas de factorización. Por ejemplo, en la preposición 1, Euclides expone que:

> Sí tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un numero cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores (300 a.c. citado por Boyer, 2007, p. 151).

Presentando con ello el teorema $\mathrm{AD}(\mathrm{AP}+\mathrm{PR}+\mathrm{RB}) = AD \cdot AP + AD \cdot PR + AD \cdot RB$ y la representación geométricamente (figura 8) de la propiedad distributiva o la factorización de factores comunes: $a(b+c+d) = ab+ac+ad$ (Boyer, 2007).

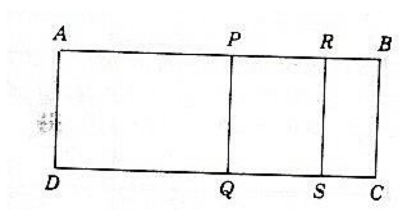


Figura 8. Teorema AD(AP+PR+RB)=AD · AP + AD·PR+AD ·RB *(Boyer, 2007, p.151)*

En la proposición II.5 de los elementos, se presenta la expresión: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ la cual asemeja al método de factorización de diferencia de dos cuadrados. Un teorema que fue comprobado geométricamente por Euclides (figura 9), cuyo significado dependía de los usos que los algebristas griegos les asignaban a las figuras como un equivalente geométrico (Boyer, 2007).

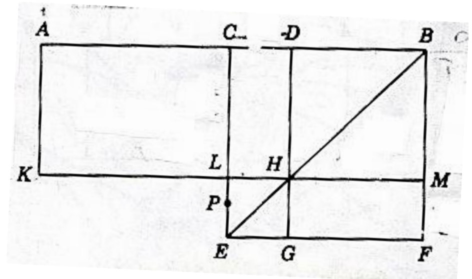


Figura 9. Teorema $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ *(Boyer, 2007, p.152)*

Por otra parte, en la preposición 4 de Euclides se presenta lo siguiente: "si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos"(300 a.c. citado por Boyer, 2007, p. 152), siendo una forma de expresar $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, lo que se podría asemejar a una igualdad entre un binomio al cuadrado (leyendo de izquierda a derecha) y su forma factorizada el trinomio cuadrado perfecto (leyendo de derecha a izquierda).

- ***Preludio a la matemática***

En esta época del Álgebra Boyer (2007), menciona en su libro a Thomas Harriot como uno de los primeros en introducir el método de factorización para la solución de ecuaciones, ya que se le conocía como una persona con conocimiento de las relaciones existentes entre las raíces y coeficientes de una ecuación y entre las raíces y la descomposición de factores, pero sin considerar las raíces negativas e imaginarias.

Pienso que todo esto en medio de la historia, contribuyo a darle a la factorización la característica de un método, pero también un significado de identidad matemática. Un significado que se pretende potenciar en esta unidad a través del trabajo de dos de sus representaciones: la simbólica y la representación geométrica.

4.3.2 Estructura conceptual del tema de factorización básica de trinomios

Esta categoría del análisis de contenido se compone de los conceptos, los procedimientos y las relaciones entre ellos. Estas componentes son recogidos y organizados lo que permitirá comprender la esencia del concepto en si (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018). Enseguida se presenta el análisis de cada uno de estos elementos asociados al tema de Factorización Básica de Trinomios.

En este apartado se enlistan aquellos contenidos básicos matemáticos considerados para abordar el tema de factorización de trinomios. La elección de estos, se realiza de acuerdo con lo establecido en las expectativas de aprendizaje demandadas en el programa de estudios; también se apoya con la revisión de libros de texto de álgebra elemental de los cuales fueron: *Álgebra Elemental* (Bellos, 1999), *Aritmética y Álgebra* (Acevedo, Valadez y

Sánchez, 1996), *Álgebra* (Barnett, Ziegler, Byleen, 2000) y *Matemáticas 1 Aritmética y Álgebra* (Ibáñez y García, 2009). Asimismo, se tomó en cuenta la experiencia de quién diseña la unidad didáctica. Por consiguiente, los contenidos de carácter conceptual y procedimental que para la autora de esta unidad didáctica formarán parte del análisis de instrucción son:

Conocimiento conceptual

a) Hechos

- *Términos*
  - Término.
  - Coeficiente.
  - Variable.
  - Término cuadrático.
  - Término lineal.
  - Término independiente.
  - Factor.

- *Notaciones*
  - Término cuadrado (x^2).
  - Producto (bx).
  - Doble producto $\left(2(bx)\right)$.
  - Raíz cuadrada del término cuadrático $\left(\sqrt{(ax^2)}\right)$.
  - Binomio elevado al cuadrado $((r-p)^2)$.
  - Trinomio cuadrado perfecto $(r^2-2rp+p^2 = (r-p)^2)$.
  - Trinomios de la forma $\left(x^2+bx+c\right)$.
  - Trinomios de la forma $\left(ax^2+bx+c\right)$

- *Convenios*
  - Para dar solución a una ecuación cuadrática por factorización, es necesario ordenar los términos de la ecuación (termino cuadrático, lineal e independiente)
  - Identificar el tipo de técnica a aplicar según su forma, es decir, si es de forma x^2+bx+c se usará la de factorización de trinomios de la forma x^2+bx+c o si es de la forma ax^2+bx+c se usará la de factorización de trinomios de la forma ax^2+bx+c.

- *Resultados*
  - Un trinomio es cuadrado perfecto si el primer y tercer término tienen raíz cuadrada exacta y la doble multiplicación de la raíz del primer por el tercer término es el segundo término del trinomio original.
  - Los trinomios serán de las formas x^2+bx+c y ax^2+bx+c si el primer y tercer términos no tienen raíz exacta (Ibáñez y García, 2009).

b) Conceptos

- Monomio.
- Trinomio.
- Polinomio.
- Ecuación cuadrática.
- Binomio al cuadrado.
- Diferencia de cuadrados.
- Trinomio cuadrado perfecto.
- Trinomio cuadrático.

c) Estructuras

Técnicas de factorización

- Factorización de trinomios cuadrados perfectos
- Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$
- Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Conocimiento Procedimental

a) Destrezas

- Reconocer la técnica de factorización pertinente según las características del trinomio.
- Operar correctamente la regla de factorización.

b) Razonamientos

- Deductivo: Interpretar geométricamente la expresión que plantea un problema.
- Analógico: demostrar equivalencia entre la representación algebraica (simbólica) y geométrica.
- Figurativo: uso de representaciones geométricas.

c) Estrategias

- Aplicación de técnicas de factorizaciones básicas de trinomios para ecuaciones cuadráticas.
- Dar solución a problemas de aplicación de la ecuación cuadrática.

Una vez establecidos algunos de los contenidos que abordan el tema de interés de esta unidad didáctica; enseguida se presenta la propuesta de dos mapas conceptuales, uno general y otro detallado. Ambos tienen la finalidad de mostrar y describir la estructura y las relaciones existentes entre los elementos que conforman el conocimiento conceptual y el procedimental.

Mapa Conceptual del tema de Factorización Básica de Trinomios

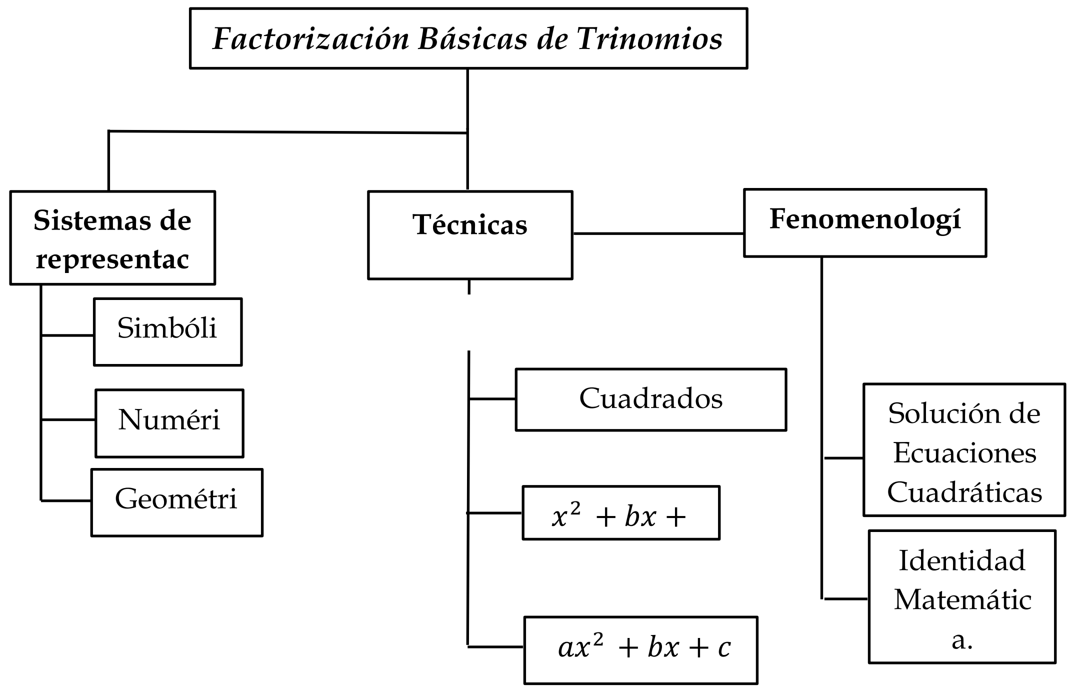


Figura 10. Mapa Conceptual general para el tema de Factorización

Este primer mapa conceptual de factorizaciones básicas de trinomios (figura 10), muestra las relaciones de una forma general entre los contenidos que son considerados como los focos prioritarios dentro de esta unidad didáctica. Estos focos prioritarios los conforman: los sistemas de representación con los que trabajaremos; las técnicas de factorización de trinomios y su fenomenología.

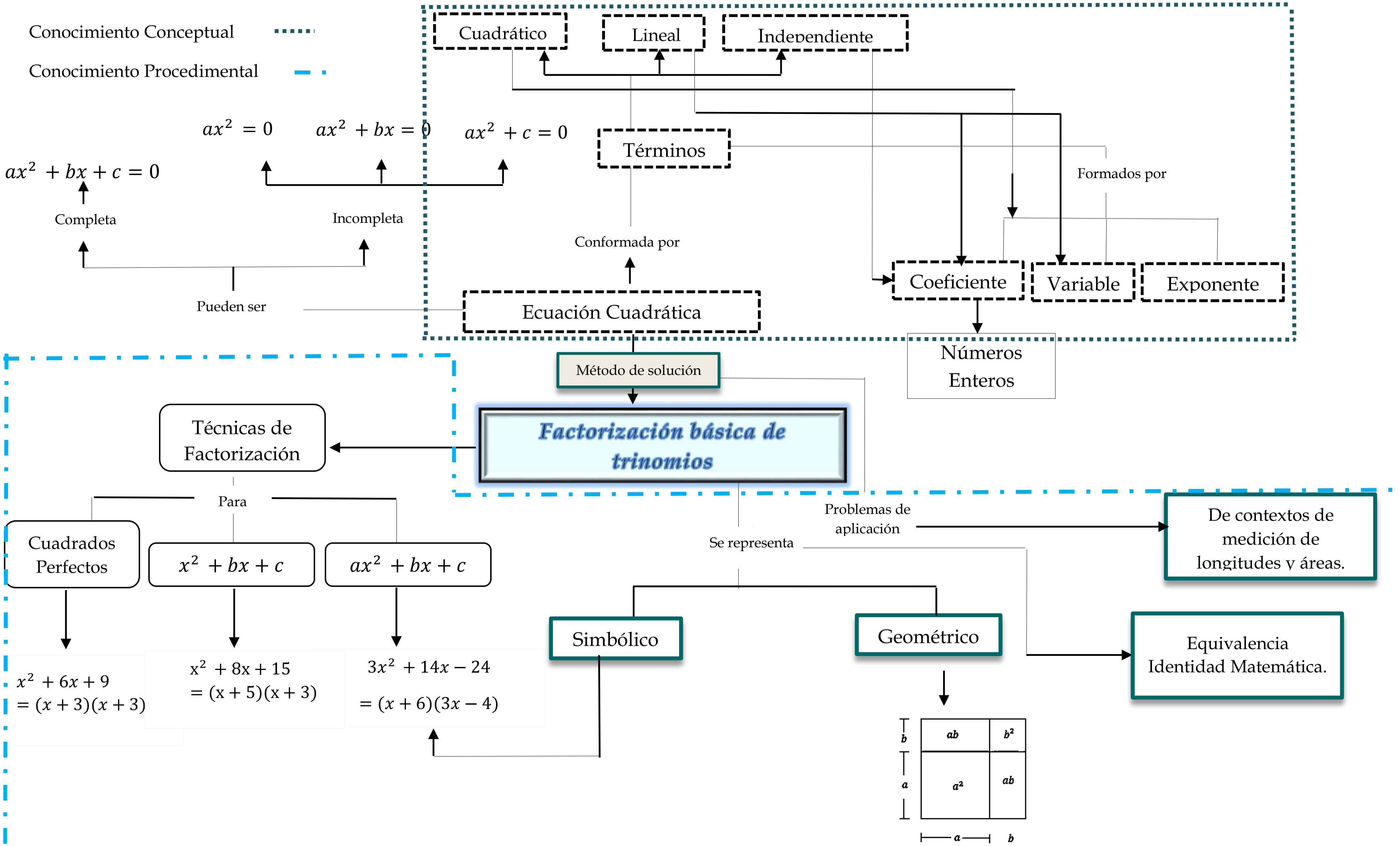


Figura 11. Mapa Conceptual detallado para el tema de Factorizacion Básica de Trinomios

La figura 11 presenta una propuesta de mapa conceptual que incluyen los contenidos que se involucran dentro de tema de factorizaciones básicas de trinomios, abarcando términos y conceptos previamente aprendidos como los posteriores a aprender, dentro de estos contenidos se encuentran los tres elementos que en este informe dotarán de significado al tema de interés, para lo clasifique dichos contenidos en dos categorías de conocimientos: la primera en conocimientos conceptuales y la segunda en conocimientos procedimentales, con el propósito de organizar, comprender significativamente y determinar una estructura conceptual.

Como lo muestra el mapa conceptual, dentro de la clasificación de los conocimientos conceptuales previos se agrupan los contenidos de: trinomios, termino, coeficiente, variable, números reales y letras, estos conforman los elementos que componen a una ecuación cuadrática. Uno de los métodos de solución de este tipo de ecuaciones es la factorización de trinomios la cual puede ser expresada a través de tres sistemas de representación: simbólica, numérica y geométrica, que a su vez representa matemática mente una identidad matemática. en lo que respecta a los conocimientos de carácter procedimental de la factorización básica de trinomios, se encuentran: las técnicas de factorización de trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ o de la forma $ax^2 + bx + c$. ; los sistemas de representación algebraica y geométrica y su aplicación como un método y/o herramienta auxiliar en la búsqueda de la solución de problemas relacionados con la medición de longitudes y áreas.

Este mapa presenta en primera instancia una estructura conceptual en la cual se ven reflejadas las relaciones existentes entre los conceptos y términos que conforman el tema de factorización básica de trinomios. Sin embargo, lo más importante de esta es que, refleja que en esta unidad didáctica se espera promover a la factorización como una "equivalencia" y una "identidad matemática" de expresiones algebraicas, a través de los sistemas de representación algébrico y geométrico; y su relación con los conceptos de área y longitud

4.3.3 Sistemas de representación del tema de factorización básica de trinomios

Los sistemas de representación es otra de las categorías del análisis de contenido. Rico (2000), expresa a las representaciones matemáticas como: "aquellas herramientas, signos o gráficos mediante los cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático" (p. 1). Las representaciones aunadas a la fenomenología y la referencia, determinan los diferentes significados para dicho concepto matemático y construir un aprendizaje.

Por otra parte, Kaput (1992, citado por Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018), exhibe a los sistemas de representación como: "un sistema de reglas para: identificar o crear signos, operar sobre y con ellos y finalmente, para determinar relaciones entre ellos" (p. 71) ya que, de esta manera es posible interactuar y trasmitir un concepto matemático en especial. Los sistemas de representación que se abordarán en esta unidad didáctica de acuerdo al tema de interés serán: la representación *simbólica y geométrica*.

Representación simbólica

La representación simbólica de la factorización básica de trinomios se asocia a los diferentes signos y símbolos como las variables y números que conforman a los trinomios, algunos ejemplos de esta representación podrían ser las siguientes:

1. $x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$
2. $9x^2 + 12x + 4$
3. $2x^2 - 7x - 4$

(Bello, 1999)

En los ejemplos propuestos es evidente la presencia de signos y símbolos, así como también las diferentes características de cada uno de los trinomios. En el ejemplo uno puede utilizarse la técnica de factorización de trinomio de la forma $x^2 + bx + c$; el ejemplo dos la técnica de factorización de trinomios cuadrados perfectos y finalmente, el ejemplo tres la técnica de factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

Esta representación con respecto a la Factorización Básica de Trinomios también se encuentra asociada al valor numérico resultante al dar solución a una ecuación cuadrática. Un ejemplo podría ser el siguiente:

$$\boldsymbol{x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)}$$

$$x = -\mathbf{1}$$
$$x = \mathbf{3}$$

(Ospina, 2015)

Representación geométrica

La representación geométrica, representa la multiplicación de números naturales y su resultado. En el caso de la factorización básica de trinomios se encuentra relacionado con el álgebra geométrica; traduciendo conocimiento matemático a través del uso e interpretación de la formación de figuras geométricas como son: rectángulos y cuadrados, tal y como fueron surgiendo algunos de los conceptos matemáticos en la antigüedad. Un ejemplo es el siguiente:

Factorización Geométrica de:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2$$

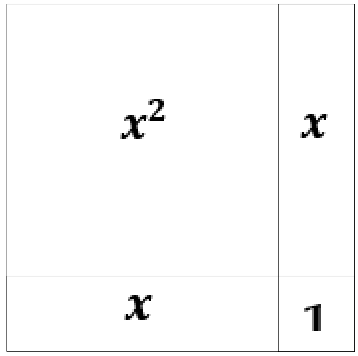


Figura 12. Factorización geométrica de trinomio cudrado perfecto *(Ospina, 2015, p. 49)*

4.3.4 Fenomenología del tema de factorización básica de trinomios

En esta sección se presentan los fenómenos asociados a las factorizaciones básicas de trinomios, los contextos y los modos en los que es aplicable dicho tema como método de solución de ecuaciones cuadráticas.

Análisis de contextos

Este tema da respuesta a algunos problemas como los siguientes

- El área de un terreno que tiene forma de un cuadrado está dada por la expresión $\boldsymbol{x^2 + 6x + 9}$. ¿Cuánto medirán los lados de ese cuadrado?

- ¿Cuál será la longitud de los lados de una figura geométrica, si su área está representada por la siguiente expresión algebraica: $\boldsymbol{x^2 + 5x + 6}$

- Determina las longitudes de los lados de la figura geométrica que se expresan mediante la siguiente expresión algebraica: $2\boldsymbol{x^2 + 7x + 3}$

(Acevedo, Valdez y Sánchez, 1996).

Análisis de fenómenos

- Medición de longitudes
- Medición de áreas y superficies

4.4. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN DEL TEMA DE FACTORIZACIÓN BÁSICA DE TRINOMIOS

El análisis de instrucción como es mencionado en secciones anteriores, es el análisis en el que las decisiones que han sido tomadas por el profesor comienzan a tener mayor relevancia, es decir, es aquí donde partiendo de lo obtenido en los dos análisis anteriores tiene la oportunidad de diseñar, rediseñar o elegir aquellas tareas y/o actividades que se desarrollarán en esta unidad didáctica, y le darán respuesta a cómo y cuándo llevar a cabo su implementación (Valenzuela, Ramos, González y Portugal, 2018).

Partiendo de lo anterior, se plantea un análisis de instrucción en el cual se exhiben las tareas y actividades que se solicitarán completar a los estudiantes, destinadas al alcance de las capacidades propuestas en tiempos y formas determinadas por la profesora. Es importante mencionar que algunas de las tareas elegidas por la profesora fueron tomadas de la bibliografía ya descrita en el análisis de contenido y otras fueron de su propia autoría. En el caso de la forma de la administración del tiempo de duración y la organización de cada una de las tareas y actividades, fue propuesta a partir de las consideraciones establecidas en el diseño curricular global.

4.4.1 Grados de Complejidad

- **Reproducción**

En este grado de complejidad se abordarán tareas en donde el estudiante utilice las técnicas (reglas) de factorización para trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$

Ejemplo:

Factoriza la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{x^2 - 8x + 12}$$

(Acevedo, Valadez y Vargas, 1996)

Indicadores

- Conocimiento ya practicado.
- Aplicación de algoritmos estándar.
- Realización de operaciones sencillas.
- Uso de fórmulas elementales.

(Lupiañez,2005)

Capacidades

- **C 2.6.2** Identificar el término cuadrático del trinomio.
- **C 2.6.3** Identificar el coeficiente cuadrático del trinomio igual a 1.
- **C 2.6.4** Identificar el término lineal del trinomio
- **C 2.6.5** Identificar el coeficiente lineal *(b)*del trinomio.
- **C 2.6.6** Identificar el término independiente del trinomio *(c)*del trinomio.
- **C 2.6.7** Encontrar la raíz cuadrada del término cuadrático.
- **C 2.6.8** Encontrar dos enteros cuyo producto sea c y cuya suma sea b.
- **C 2.6.9** Aplicar las leyes de los signos.

- **Conexión**

Para este grado de complejidad se solicitará a los estudiantes realizar tareas con apoyo de un material didáctico.

Ejemplo:

En equipo de 3 personas y con apoyo del material proporcionado, forma rectángulos y determina la expresión que es equivalente para cada una de las siguientes expresiones:

1. $4h^2 + 8h + 3$
2. $2u^2 + 5u + 3$
3. $k^2 + 7k + 6$
4. $2c^2 - 7c + 6$
5. $3x^2 - 5x - 2$

Indicadores
- Contexto menos familiar.
- Interpretar y explicar.
- Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación.

(Lupiañez,2005)

Capacidades

- **C 2.6.17** Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.
- **C 2.7.17** Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.

- **Reflexión**

Para este grado de complejidad se solicitará a los estudiantes realizar problemas en un contexto cotidiano con apoyo de todo lo aprendido.

La huerta del colegio nos permite sembrar diferentes productos para nuestro consumo, de acuerdo con lo establecido en la organización de estos productos para ser sembrados, se establecieron diferentes maneras de sembrar como lo veremos en la siguiente gráfica.

x^2	$12x$
$3x$	36

¿Qué expresión representa el área del terreno?
¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno?

(Ballén, 2012)

Indicadores

- Tareas que requieren comprensión y reflexión.
- Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.
- Generalizar y justificar resultados obtenidos.

(Lupiañez,2005)

Capacidades

- **C.2.6.16** Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
- **C.2.6.18** Factorizar trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

- **C.2.6.19** Reconocer al trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática.

4.4.2 Materiales y recursos didácticos

Los materiales y recursos a utilizar en esta unidad didáctica son:

- **Materiales didácticos**

  - Tabletas Algebraicas (Bloques de Dienes)

Las tabletas algebraicas son un material adaptado para su uso didáctico por algunos estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional, basado en los bloques de Dienes (Salazar, Jiménez y Mora, 2013). Estas tabletas consisten en cuadros grandes y pequeños y rectángulos en diferentes colores. En esta unidad didáctica los cuadros grandes son de color rojo, los cuadros pequeños de color amarillo y los rectángulos de color azul. Estas tabletas algebraicas, partiendo de la clasificación de los recursos didácticos propuesta en Godino, Batanero y Font (2003), son un recurso material manipulativo que apoya y potencia el razonamiento matemático del estudiante y a su vez, es un material manipulativo tangible por su función de simbolizar y grafico textual verbal, puesto que participa en la percepción visual y simbólica; sirviendo como una herramienta para expresar las técnicas y el concepto de factorización básica de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$.

Este material didáctico se fundamenta en una posición constructivista que implica un proceso de formación de un concepto que parte de lo intuitivo a la simbolización y el manejo abstracto del concepto (Mancera,1998), en este caso de la factorización a través de la formación de rectángulos con las tabletas algebraicas. Es de tipo manipulativo y apoya en el aprendizaje de la aritmética y el álgebra, y consiste en cuadrados de dos tamaños diferentes (tamaño grande y pequeño), y de regletas (rectángulos), siendo útil para abordar la factorización de trinomios a través de su representación geométrica (figura 4).

Figura 133. Tabletas algebraicas

- **Recursos didácticos**

Pizarrón, libros de texto, planeación de la clase e instrumentos para evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

4.4.3 Secuenciación y organización de tareas de la unidad didáctica de factorización básica de trinomios

La secuenciación didáctica según Marín (2009, citado por Lupiáñez, 2009, p.66), "son unidades de información y propuestas de acción que el profesor suministra al alumno con diferentes intenciones". Estas propuestas son planteadas como tareas, con el propósito de promover actividades con situaciones de aprendizaje (Flores, Gómez y Marín, 2013). Siendo así, a continuación, se presentan la secuencia y organización de las tareas que se desarrollarán en la implementación de esta unidad didáctica.

Descripción y organización de tareas

- **Orden de las tareas**

Las tareas se realizarán en 2 sesiones de clase en el siguiente orden:

1. Técnicas de Factorización de trinomios de las formas de $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$
2. Aplicaciones de la factorización de trinomios de las formas de las formas de $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$

- **Tipos de tareas**

Partiendo de la clasificación que propone Parcerisa (1996, citado por Lupiáñez, 2009, p. 96) y tomando como base dicha clasificación, las tareas que se ejecutarán en esta unidad didáctica, serán de los siguientes tipos:

- *Tareas de revisión de conocimientos previos* base para abordar el tema de factorización de trinomios como los términos de: coeficiente, variable, término cuadrático, término lineal y término independiente. Ejemplo, Identifica los elementos que conforman la siguiente expresión

$$\boldsymbol{x^2 + 7x + 12}$$

Término cuadrático: x^2
Coeficiente cuadrático:1

¿Cuál es el término cuadrático de la expresión?

¿Qué coeficiente posee el término cuadrático?

Término lineal: $7x$
Coeficiente lineal
$b = 7$

¿Cuál es el término lineal de la expresión?

¿Cuál es el coeficiente lineal?

Término independiente
c =12

¿Cuál es el término independiente de la expresión?

– *Tareas de construcción de significados*, en las cuales a través del uso del material didáctico (tabletas algebraicas) se promoverá el aprendizaje de la factorización a partir de: sus representaciones simbólica y geométrica, modelar y dar solución a problemas relacionados con áreas de rectángulos. Por ejemplo,

Con apoyo de las tabletas algebraicas. ¿Cómo puede ser representada geométricamente la expresión $\boldsymbol{x^2 + 4x + 3}$?

La profesora solicita a los estudiantes formar un **rectángulo** con las tabletas que representan la expresión y les plantea las siguientes preguntas:

a) ¿Qué expresión tiene la base del rectángulo?
b) ¿Qué expresión tiene la altura del rectángulo?
c) ¿Qué área tiene el rectángulo formado?
d) Al factorizar algebraicamente la expresión. ¿Qué factores resultan?
e) ¿Qué relación hay entre los factores resultantes algebraicamente y la representación geométrica de la expresión?

– *Tareas de ejercitación*, en las cuales se solicita al estudiante factorizar trinomios de las formas de $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$ a través de la aplicación de las técnicas (reglas) de factorización correspondiente al trinomio.

Factoriza las siguientes expresiones

1. $u^2 + 7u + 6$
2. $3x^2 + 8x + 4$
3. $14m^2 - 31m - 10$
4. $g^2 + 6g + 8$
5. $18p^2 + 17p - 15$

– *Tareas de síntesis*, al presentar y solicitar al estudiante la solución y modelización de problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas a partir del método de factorización.

La huerta del colegio nos permite sembrar diferentes productos para nuestro consumo, de acuerdo con lo establecido en la organización de estos productos para ser sembrados, se establecieron diferentes maneras de sembrar como lo veremos en la siguiente gráfica.

x^2	$12x$
$3x$	36

¿Qué expresión representa el área del terreno?
¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno?

(Ballén, 2012)

<u>Desarrollo de la secuencia de tareas de la unidad didáctica</u>

Duración: Esta unidad didáctica se conforma de 2 sesiones, una de tres horas el día 23 de marzo del 2019 y la segunda de una hora el día 30 de marzo de 2019, la cuales son descritas a continuación.

SESIÓN 1. Reconocimiento de trinomios de la forma de $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$ y aplicación de técnicas de factorización.

Esta primera sesión tendrá una duración de 3 horas Fecha: 23/03/19

1. **Contenidos y objetivos**

- **Conceptos básicos**: concepto de factorización, término cuadrático, término lineal, término independiente; factorización algebraica (reglas de las técnicas de factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$) y factorización geométrica.
- **Contextos y situaciones:** la factorización como identidad matemática.
- **Sistemas de representación:** simbólico y geométrico
- **Expectativas de aprendizaje:**

Expectativa de aprendizaje 2: factorización de trinomios de grado 2

– **Factorización de trinomios de la forma $\mathbf{x^2 + bx + c}$**

Capacidades

C 2.6.1 Reconocer un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.
C 2.6.2 Identificar el término cuadrático del trinomio.
C 2.6.3 Identificar el coeficiente cuadrático del trinomio.
C 2.6.4 Identificar el término lineal del trinomio
C 2.6.5 Identificar el coeficiente lineal *(b)* del trinomio.
C 2.6.6 Identificar el término independiente del trinomio *(c)* del trinomio.
C 2.6.7 Encontrar la raíz cuadrada del término cuadrático.
C 2.6.8 Encontrar dos enteros cuyo producto sea c y cuya suma sea b.
C 2.6.9 Aplicar las leyes de los signos.
C 2.6.10 Asociar el significado del término cuadrático del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C 2.6.11 Asociar el coeficiente cuadrático con la cantidad de tabletas correspondiente.
C.2.6.12 Asociar el significado del término lineal del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C.2.6.13 Asociar el coeficiente lineal con la cantidad de tabletas correspondiente.

C.2.6.14 Asociar el significado del término independiente del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C.2.6.15 Asociar el término independiente con la cantidad de tabletas correspondiente.
C.2.6.16 Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
C 2.6.17 Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.
C.2.6.18 Factorizar trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
C.2.6.19 Reconocer al trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática

- **Factorización de Trinomios de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c}$**

Capacidades:

C 2.7.1 Reconocer un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
C 2.7.2 Identificar que el término cuadrático del trinomio.
C 2.7.3 Identificar el coeficiente cuadrático*(a)* del trinomio.
C 2.7.4 Identificar el término lineal del trinomio.
C 2.7.5 Identificar el coeficiente lineal *(b)*.
C 2.7.6 Identificar el término independiente *(c)* del trinomio.
C 2.7.7 Encontrar dos enteros con producto *ac* y suma *b*.
C 2.7.8 Operar suma y resta de monomios
C 2.7.9 Aplicar leyes de los signos.
C 2.7.10 Asociar el significado del término cuadrático del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C 2.7.11 Asociar el coeficiente cuadrático con la cantidad de tabletas correspondiente.
C.2.7.12 Asociar el significado del término lineal del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C.2.7.13 Asociar el coeficiente lineal con la cantidad de tabletas correspondiente
C.2.7.14 Asociar el significado del término independiente del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C.2.7.15 Asociar el término independiente con la cantidad de tabletas correspondiente.
C.2.7.16 Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.
C 2.7.17 Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.
C.2.7.18 Factorizar trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

C.2.7.19 Reconocer al trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática

2. Conexión de conocimientos anteriores con los posteriores

Esta sesión, al ser continuación de los métodos de factorización anteriores a la factorización de trinomios de las formas $x^2 + bx + c$ y $x^2 + bx + c$ y ya vistos por el profesor; a manera de recapitular, esta sesión comenzará con una revisión histórica breve sobre el origen del tema de la factorización. Esta sesión se orienta a hacer un recordatorio breve a los estudiantes de los conocimientos previos al tema de factorización; conceptos básicos que le permitirán abordar el tema de factorización en sesiones posteriores.

Por consiguiente, se espera que los estudiantes ya han tenido contacto con conceptos como: coeficiente, variable, monomio, trinomio, polinomio, ecuación cuadrática, término cuadrático, término lineal , término independiente, binomio al cuadrado, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, Trinomio cuadrático y procedimientos como: operaciones de polinomios, factorización de factores comunes, factorización por agrupación, factorización de diferencia de dos cuadrados, factorización de suma o diferencia de dos cubos y factorización de trinomios cuadrados perfectos, los que servirán de base para abordar la factorización de trinomios de la forma formas $x^2 + bx + c$ y $x^2 + bx +$ c y lo que se verá en la sesión 2

3. Secuencia de tareas

<u>Duración: 10 min.</u>

- **Intervención del profesor**

La profesora introduce la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$, explicando a los estudiantes el significado de la factorización y el método que se abordará en la sesión, para ello inicia planteando el siguiente problema:

Si el área del rectángulo está representada por el trinomio correspondiente, determina los lados del rectángulo siguiente.

$\boldsymbol{A} = x^2 + 3x + 2$

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + 3x + 2}}$$

(Ibáñez y García, 2009)

Una vez que expone el problema, la profesora da apertura a la explicación de los elementos que conforman a este tipo de trinomios y sus diferencias, así como también, las reglas de factorización de ambos trinomios.

- **Factorización**

Un factor de un número es uno de dos o más números cuyo producto es el número dado. Por ejemplo,

$$12 = 6 \cdot 2$$
$$12 = 4 \cdot 3 \cdot 1$$
$$12 = \underbrace{12 \cdot 1}_{\textbf{Factores}}$$

1, 2, 3 ,4 y 6 son factores de 12

Los factores de una expresión algebraica es uno de dos o más expresiones algebraicas cuyo producto es la expresión dada. Por ejemplo,

Expresiones Equivalentes

$$\boxed{x^2 - 4} = \underbrace{\boxed{(x-2)(x+2)}}_{\textbf{Factores}}$$

Al proceso de escribir un número o una expresión algebraica como el producto de otros números o expresiones algebraicas se llama **Factorización** (Barnett, Ziegler y Byleen, 2000).

La profesora expone y da a conocer a los estudiantes los elementos que conforman a los trinomios y establece un acuerdo que se manejará a lo largo de este proceso de enseñanza-aprendizaje. En vista de que las técnicas de factorización son planteadas hacia dos tipos, trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, .la profesora propone el siguiente acuerdo:

Acuerdo: para los trinomios de la primera forma, el coeficiente cuadrático siempre tendrá el valor 1 en cambio para los trinomios de la segunda forma el valor del coeficiente cuadrático será representado por la variable a y su valor será diferente de 1.

- **Elementos de los Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$**

Término lineal

Término cuadrático

Término Independiente

$$x^2 + bx + c$$

Coeficiente cuadrático: *1*
Coeficiente lineal: *b*

En donde **b** y **c** son números enteros diferentes de cero.

Tarea 1	**Características de los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y forma $x^2 + bx + c$**	Duración: 20 min

<u>ACTIVIDAD 1</u>

<u>Duración: 10</u>

Partiendo de lo expuesto anteriormente, la profesora presenta un ejemplo de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y solicita a los estudiantes identificar cada uno de los elementos que lo conforman, planteando a manera de apoyo algunas preguntas como:

a) ¿Cuál es el término cuadrático de la expresión?
b) ¿Qué coeficiente posee el término cuadrático?
c) ¿Cuál es el término lineal de la expresión?
d) ¿Cuál es el coeficiente lineal?
e) ¿Cuál es el término independiente de la expresión?

- **Formulación**: identifica los elementos que conforman la siguiente expresión

$$x^2 + 7x + 12$$

Término cuadrático: x^2
Coeficiente cuadrático:1

¿Cuál es el término cuadrático de la expresión?

¿Qué coeficiente posee el término cuadrático?

Término lineal: $7x$
Coeficiente lineal
b= 7

¿Cuál es el término lineal de la expresión?

¿Cuál es el coeficiente lineal?

Término independiente
c =12

¿Cuál es el término independiente de la expresión?

- **Meta:** con esta actividad se pretende que los estudiantes conozcan cada uno de las características y elementos que conforman un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

- **Materiales y recursos:** Pintarrón y libreta.

- **Capacidades:**

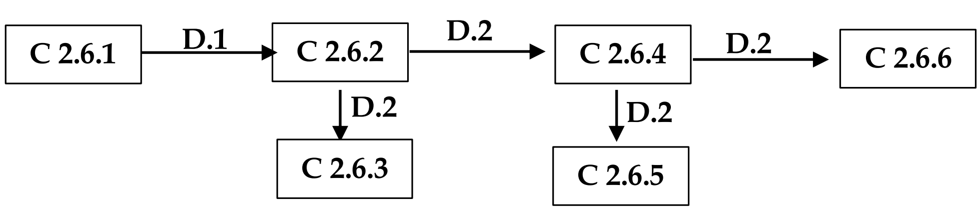
C 2.6.1 Reconocer un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.
C 2.6.2 Identificar el término cuadrático del trinomio.
C 2.6.3 Identificar el coeficiente cuadrático del trinomio igual a 1.
C 2.6.4 Identificar el término lineal del trinomio
C 2.6.5 Identificar el coeficiente lineal *(b)*del trinomio.
C 2.6.6 Identificar el término independiente del trinomio *(c)*del trinomio.

- **Dificultades:**

D.1 Definiciones o preconcepciones incorrectas de variable.
D.2 Identificación incorrecta de elementos de los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

- **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje para actividad 1**

– Factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$



- **Situación de aprendizaje:** Esta actividad será realizada en conjunto profesora-estudiante, sin embargo, con la intención de propiciar participación voluntaria de los estudiantes para que comiencen a interactuar con el contenido matemático y propiciar un recordatorio de conocimientos previos como: variable, coeficiente y término.

ACTIVIDAD 2

Duración: 10min

Con lo anterior, la profesora presenta ahora un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y solicita a los estudiantes identificar cada uno de los elementos a través de algunas preguntas como:

a) ¿Cuál es el término cuadrático de la expresión?
b) ¿Qué coeficiente posee el término cuadrático?
c) ¿Cuál es el término lineal de la expresión?
d) ¿Cuál es el coeficiente lineal?
e) ¿Cuál es el término independiente de la expresión?

- **Elementos de los Trinomios de la forma $\mathbf{a}\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$**

Término lineal

Término cuadrático

Término Independiente

$$\underbrace{\boldsymbol{ax^2}}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{\boldsymbol{bx}}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{\boldsymbol{c}}_{\text{Término Independiente}}$$

Coeficiente cuadrático: a
Coeficiente lineal: b

En donde a es diferente de 0 y 1, y $\boldsymbol{b}$ y c son números enteros diferentes de cero.

- **Formulación**: identifica los elementos que conforman las siguientes expresiones

$$\boldsymbol{2x^2 + 13x + 15}$$

Término cuadrático: $2x^2$
Coeficiente cuadrático
a=2

¿Cuál es el término cuadrático de la expresión?

¿Qué coeficiente posee el término cuadrático?

Término lineal:$13x$
Coeficiente lineal
b= 13

¿Cuál es el término lineal de la expresión?

¿Cuál es el coeficiente lineal?

Término independiente$(c) = 15$

¿Cuál es el término independiente de la expresión?

$$\boldsymbol{3m^2 - 28x + 16}$$

Término cuadrático: $3m^2$
Coeficiente cuadrático
a=3

Término lineal:$13x$
Coeficiente lineal
b= -28

Término independiente(c) =
16

- **Meta:** con esta actividad se pretende que los estudiantes conozcan cada uno de las características y elementos que conforman un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

- **Materiales y recursos:** Pintarrón y libreta

- **Capacidades:**

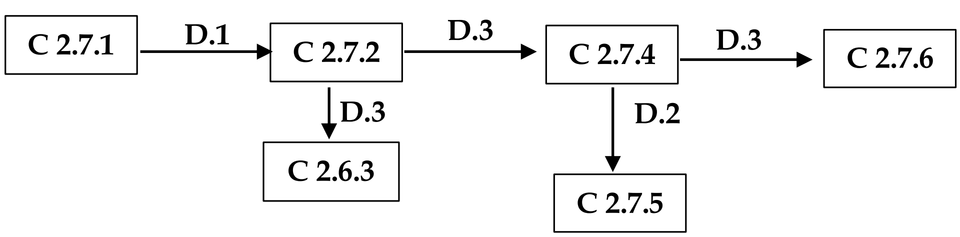
C 2.7.1 Reconocer un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
C 2.7.2 Identificar que el término cuadrático del trinomio.
C 2.7.3 Identificar el coeficiente del término cuadrático*(a)* del trinomio.
C 2.7.4 Identificar el término lineal del trinomio.
C 2.7.5 Identificar el coeficiente del término lineal *(b)* del trinomio.
C 2.7.6 Identificar el término independiente *(c)* del trinomio.

- **Dificultades:**

D.1 Definiciones o preconcepciones incorrectas de variable.
D.3 Identificación incorrecta de los elementos de los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

- **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje para actividad 2**

– Factorización de Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$



- **Situación de aprendizaje:** Esta actividad será realizada en conjunto profesora-estudiante, sin embargo, con la intención de propiciar participación voluntaria de los estudiantes para que comiencen a interactuar con el contenido matemático.

Tarea 2	**Técnicas de Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y forma $x^2 + bx + c$**	Duración total: 50min

- **Intervención del profesor**

Después la profesora expone y explica a los estudiantes las técnicas de factorización para los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

- **Técnicas de Factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$**

<u>Duración:10 min</u>.

Tomando en cuenta lo expuesto anteriormente, las reglas para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ son las siguientes.

Para dar inicio a presentar las reglas de factorización, la profesora con apoyo de la expresión $x^2 + 7x + 12$, plantea a manera de recordatorio las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el término cuadrático de esta expresión?
b) ¿Qué coeficiente posee el término cuadrático?
c) ¿Cuál es el término lineal de esta expresión?
d) ¿Cuál es el coeficiente del término lineal?
e) ¿Cuál es el término independiente de esta expresión?

Una vez identificados los elementos, plantea la primera regla y a su vez la explica. Para abordar estas técnicas, la profesora propicia la participación de los estudiantes al momento que va explicando, con la intención crear interacción e interés por parte de los estudiantes sobre el contenido matemático.

Las reglas de factorización para trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ están dadas por:

$$\boldsymbol{x^2 + bx + c = (\mathrm{A}x \pm B)(Cx \pm D)}$$

Donde, A y C son coeficientes, y B y D son números enteros.

Para dar énfasis a cada regla, la profesora subraya las palabras clave de las mismas.

1. ***Encontrar la <u>raíz cuadrada</u> del <u>término cuadrático</u>.***

$$x^2 + 7x + 12$$

Es importante recordar que, ***a=1, b=7*** y ***c=12*** entonces,

La raíz cuadrada del término cuadrático es:

$$\sqrt{x^2} = x$$

> ***Recordando….***
> Las raíces de términos
>
> 1. Sacar la raíz cuadrada del coeficiente del término cuadrático.
> 2. Dividir el exponente del término cuadrático entre el índice de la raíz (entre 2).

Por tanto, ¿Qué requerimos multiplicar por la "x" para obtener x^2 ?

$$(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^2}$$

Lo que significa que, debemos tener dos términos lineales con coeficientes A y C (Ax y Cx), los cuales siempre para este caso deben ser igual a 1. Por tanto,

$$\boldsymbol{x^2 + 7x + 12 = (x \quad)(x \quad)}$$

2. ***Determinar el <u>signo de los factores</u>***

$$\boldsymbol{x^2 + 7x + 12 = (\mathrm{A}x \pm B)(\mathrm{C}x \pm D)}$$

Para esta regla se toman en cuenta las siguientes condiciones:

a) Sí *b* y *c* son positivos, entonces B y D deben ser enteros positivos.
b) Si *c* es positivo *y b* negativo, B y D son enteros negativos.
c) Si *c* es negativo y b es positivo, B y D son uno positivo y uno negativo.
d) Si b y c son negativos, entonces B y D son uno positivo y uno negativo.

El coeficiente lineal es signo positivo y el término independiente también posee signo positivo, por tanto, los factores B y D deben ser enteros positivos.

$$\boldsymbol{x^2 + 7x + 12 = (x + B)(x + D)}$$

3. ***<u>Encontrar dos factores</u> cuyo producto sea el termino independiente (c) y la suma de esos sea el coeficiente lineal (b).***

Es decir:

(B)(D) =c y ***B+D=b***

Coeficiente lineal: ***b=7***

B+D=b
3+4 = 7
B=3 D=4

La profesora pregunta a los estudiantes:

¿Cuáles podrían ser dos factores (números) que al sumarlos me den 7?

Termino independiente: ***c=12***

(B)(D) =c
(3)(4) = 12
B=3 D=4

La profesora pregunta a los estudiantes:

¿Cuáles podrían ser dos factores (números) que al multiplicarlos me den 12?

Los factores buscados son: 3 y 4

4. *Colocar en primer lugar los dos primeros factores y enseguida los segundos factores.*

Por tanto, la factorización es:

$$x^2 + 7x + 12 = (\boldsymbol{x} + \mathbf{3})(\boldsymbol{x} + \mathbf{4})$$

La profesora presenta un segundo ejemplo:

2) $d^2 + 3d - 10$

ACTIVIDAD 3

La profesora solicita a los estudiantes la siguiente actividad:

Duración: 15 min

- **Formulación**: factoriza las siguientes expresiones

1) $a^2 + 14a + 13$
2) $x^2 + 3x + 2$
3) $w^2 - 5w - 36$
4) $y^2 - 16y + 64$
5) $c^2 - 7c - 18$

- **Meta:** con esta actividad se pretende que los estudiantes trabajen la representación simbólica de la factorización y la aplicación de las técnicas de factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ **.**

- **Materiales y recursos:** Pintarrón y libreta.

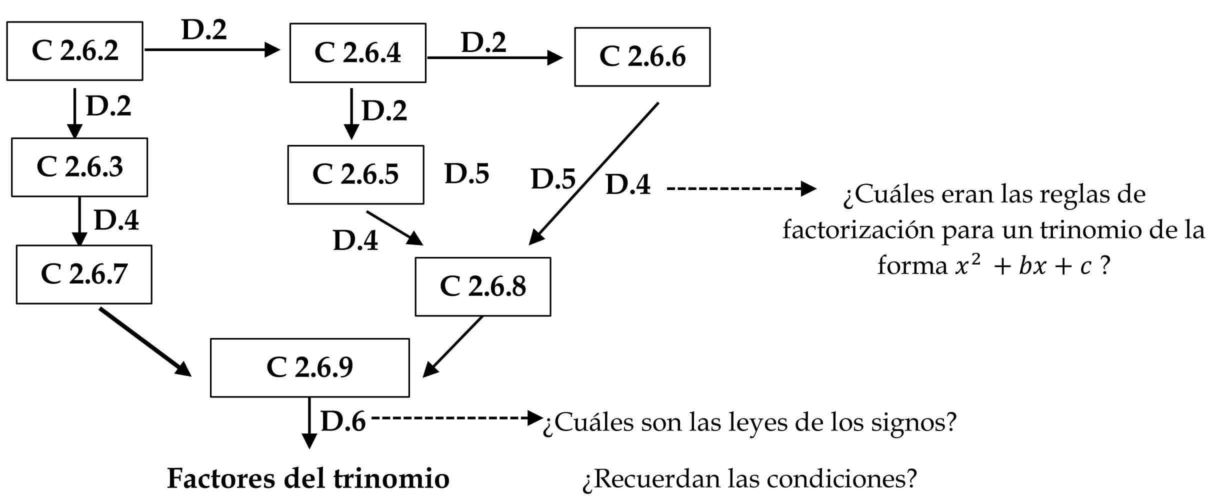
- **Capacidades:**

C 2.6.2 Identificar el término cuadrático del trinomio.
C 2.6.3 Identificar el coeficiente del término cuadrático del trinomio.
C 2.6.4 Identificar el término lineal del trinomio.
C 2.6.5 Identificar el coeficiente del término lineal *(b)*del trinomio.
C 2.6.6 Identificar el término independiente del trinomio *(c)*del trinomio.
C 2.6.7 Encontrar la raíz cuadrada del término cuadrático.
C 2.6.8 Encontrar dos enteros cuyo producto sea c y cuya suma sea b.
C 2.6.9 Aplicar las leyes de los signos.

- **Dificultades:**

D.2 Identificación incorrecta de elementos de los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
D.4 Aplicación incorrecta de las reglas de factorización de los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
D.5 Aplicación incorrecta de los algoritmos de operaciones aritméticas (suma y multiplicación de números enteros).
D. 6 Aplicación incorrecta de leyes de los signos.

- **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje para actividad 3**



- **Situación de aprendizaje:** Esta actividad será realizada individualmente, pero también se buscará propiciar la participación voluntaria de los estudiantes, al retroalimentar y compartir los resultados obtenidos en la actividad.
- **Intervención del profesor**

  Después la profesora expone y explica a los estudiantes las técnicas de factorización para los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

- **Técnicas Factorización de trinomios de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$:**

<u>Duración: 10 min</u>.

Tomando en cuenta lo expuesto anteriormente, las reglas para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ son las siguientes.

Para dar inicio a presentar las reglas de factorización, la profesora con apoyo de la expresión $\boldsymbol{3x^2 + 4x - 15}$, plantea a manera de recordatorio las siguientes preguntas:

f) ¿Cuál es el término cuadrático de esta expresión?
g) ¿Qué coeficiente posee el término cuadrático?
h) ¿Cuál es el término lineal de esta expresión?
i) ¿Cuál es el coeficiente del término lineal?
j) ¿Cuál es el término independiente de esta expresión?

Una vez identificados los elementos, expone a los estudiantes la primera regla, explica y propicia la participación de los estudiantes al momento, con la intención crear interacción e interés por parte de los estudiantes sobre el contenido matemático.

Tomando en cuenta las expresiones anteriores, las reglas para factorizar un trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ son las siguientes:

Las reglas de factorización para trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ están dadas por:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = (Ax \pm B)(Cx \pm D)}$$

Donde, A y C son coeficientes lineales, B y D son números. *a*: coeficiente cuadrático, *b*: coeficiente lineal y *c* el término independiente.

<u>Duración: 15min.</u>

$$3x^2 + 4x - 15$$

1. ***Encontrar <u>dos factores</u> (entero y/o variable) cuyo <u>producto sea el término cuadrático</u>, y dos factores (enteros) cuyo <u>producto sea el término independiente</u>.***

Es decir,

$$(Ax)\,(Cx) = ax^2 \qquad \text{y} \qquad (B)(D) = c$$

Lo que significa que,

$$(Ax)\,(Cx) = 3x^2$$
$$(B)(D) = -15$$

para tanto;

La profesora pregunta a los estudiantes:

¿Cuáles podrían ser dos factores (números y variables) que al multiplicarlos me den $3x^2$?

$$3x^2 + 4x - 15$$
$$3 \longleftrightarrow 3$$
$$1 \longleftrightarrow -5$$

$$(3x)\,(x) = 3x^2$$
$$(3)(-5) = -15$$

La profesora pregunta a los estudiantes:

¿Cuáles podrían ser dos factores (números) que al multiplicarlos me den -15?

2. ***<u>Multiplicar horizontalmente</u> los factores***

$$3x^2 + 4x - 15$$
$$3x^2 \longleftrightarrow 3 \rightarrow \quad (3x^2)(3) = 9x^2$$
$$1x \longleftrightarrow 5 \rightarrow \quad (x)(5) = 5x$$

3. ***Determinar los signos de manera conveniente para realizar la operación de monomios (suma o resta) adecuada para coincidir con el segundo término del trinomio.***

$$(Ax)\,(Cx) = 3x^2$$
$$(B)(D) = -15$$

$$[(Ax)(B)] + [(Cx)(D)] = 14$$

Es decir,

$$3x^2 + 4x - 15$$

3x +9 x 3 → $(3x^2)(3) = 9x^2$

1x - 5x -5 → $(x)(5) = -5x$

4x

La profesora pregunta a los estudiantes:

¿Recuerdan la suma y resta de monomios?

¿Cuáles eran las leyes de los signos?

Para esta regla se toman en cuenta las siguientes condiciones:

a) Si a, b y c son positivos B y D serán positivos.
b) Si a y b son positivos y c negativo, B y D serán uno positivo y otro negativo.
c) Si a y c son positivos y b negativo, B y D serán ambos negativos.
d) Si a es negativo y b y c son positivos, B y D serán uno positivo y otro negativo.
e) Si a es positivo y b y c son negativos, B y D serán uno positivo y otro negativo.

4. Colocar de forma cruzada los factores.

Por tanto, la factorización es:

$$3x^2 + 4x - 15 =$$

3x 3

1x -5

Primero los factores del término cuadrático:

$$\mathbf{3x^2 + 4x - 15 = (3x \pm B)(x \pm D)}$$

En este caso como a y b son positivos y c negativo, B y D serán uno positivo y otro negativo, por tanto,

$$\mathbf{3x^2 + 4x - 15 = (3x - B)(x + D)}$$

En segundo lugar, se colocan los factores del término independiente:

$$\mathbf{3x^2 + 4x - 15 = (3x - 5)(x + 3)}$$

La profesora recalca a los estudiantes:

"la siguiente expresión es la factorización de $3x^2 + 4x - 15$ "

La profesora presenta un segundo ejemplo:

2) $4e^2 - 15e + 9$

ACTIVIDAD 4

Duración: 15 min

La profesora al terminar la explicación de las técnicas de factorización para trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$,solicita a los estudiantes la siguiente actividad:

- **Formulación**: factoriza las siguientes expresiones

1) $3x^2 - 5x - 2$
2) $21m^2 + 11m - 2$
3) $2z^2 + 10z + 12$
4) $6g^2 - 7g - 3$
5) $30a^2 + 13a - 10$
6) $3x^2 - 8x - 16$
7) $\boldsymbol{x^2 + x + 1}$ **(no se puede factorizar por estos métodos)**

La profesora explica a los estudiantes:

Es un polinomio irreducible o primo, cuando no puede descomponerse en factores.

La profesora explica a los estudiantes:

"Es importante aclarar que los métodos de factorización para resolver una ecuación cuadrática no siempre son ideales, por lo que en algunos casos es conveniente usar la fórmula general.

- **Meta:** con esta actividad se pretende que los estudiantes trabajen la representación simbólica de la factorización y la aplicación de las técnicas de factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ **.**

- **Materiales y recursos:** Pintarrón y libreta.

- **Capacidades:**

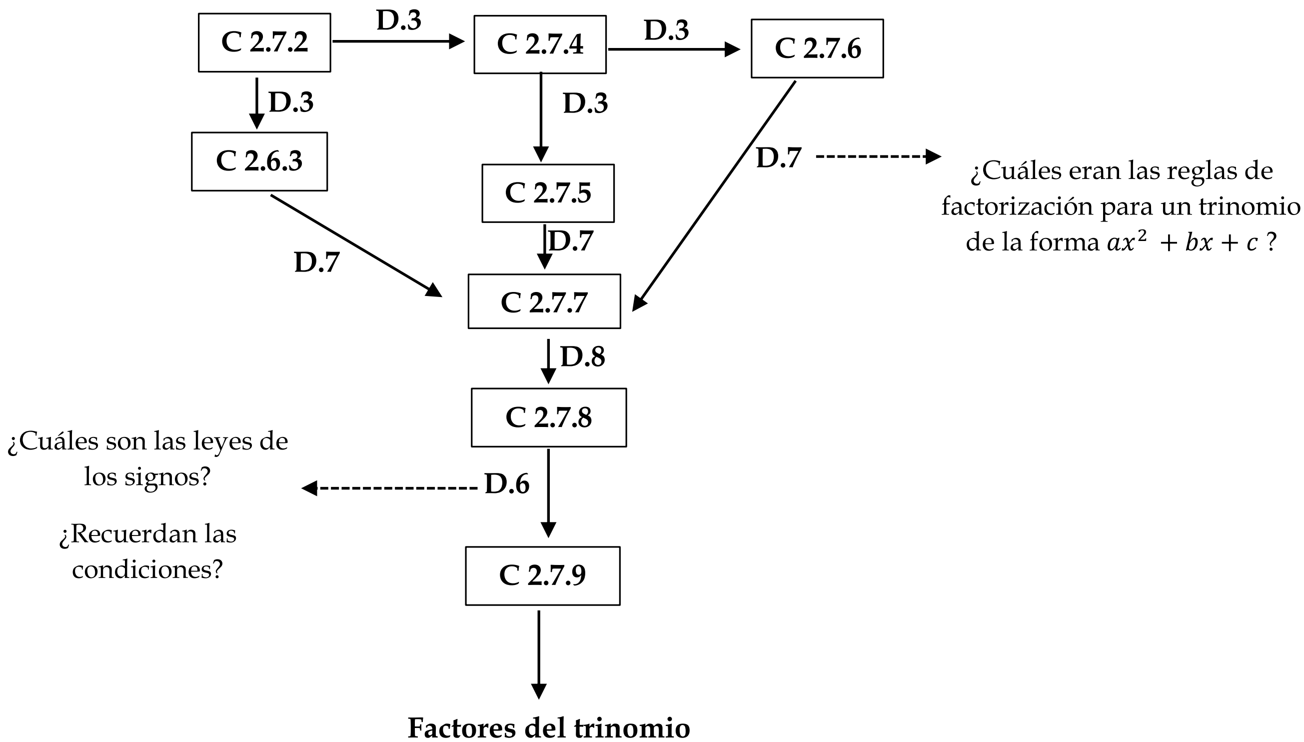
C 2.7.2 Identificar que el término cuadrático del trinomio.
C 2.7.3 Identificar el coeficiente del término cuadrático*(a)* del trinomio.
C 2.7.4 Identificar el término lineal del trinomio.
C 2.7.5 Identificar el coeficiente del término lineal *(b)* del trinomio.

C 2.7.6 Identificar el término independiente *(c)* del trinomio.
C 2.7.7 Encontrar dos factores (entero y/o variable) cuyo producto sea el término cuadrático, y dos factores (enteros) cuyo producto sea el término independiente.
C 2.7.8 Operar suma y resta de monomios
C 2.7.9 Aplicar leyes de los signos.

- **Dificultades:**

D.3 Identificación incorrecta de elementos de los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.
D. 6 Aplicación incorrecta de leyes de los signos.
D.7 Aplicación incorrecta de las reglas de factorización de los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.
D.8 Operar incorrectamente la suma, resta y multiplicación de monomios.

- **Trayectorias hipotéticas para actividad 4**



- **Situación de aprendizaje:** Esta actividad será realizada individualmente por el alumno, sin embargo, la profesora elige a algunos estudiantes voluntarios para corroborar resultados finales de las factorizaciones y hacer una retroalimentación.

ACTIVIDAD 5

Esta tarea será una actividad que el estudiante deberá trabajar en casa, con el propósito de que aplique todo lo aprendido durante la clase, así como también provocar que formule dudas sobre lo aprendido y será entregada en la próxima sesión.

- **Formulación**: factoriza las siguientes expresiones

6. $u^2 + 7u + 6$
7. $3x^2 + 8x + 4$
8. $14m^2 - 31m - 10$
9. $g^2 + 6g + 8$
10. $18p^2 + 17p - 15$

- **Meta:** el estudiante practique lo aprendido en clase.

- **Materiales y recursos:** ninguno en específico.

Tarea 3	**Equivalencia- factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y forma $x^2 + bx + c$**	Duración: 20min

- **Intervención del profesor**

Una vez que los estudiantes, han interactuado con la representación simbólica y los procedimientos de las técnicas de factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$, la profesora solicita a los estudiantes factorizar con apoyo del material didáctico llamado tabletas algebraicas, permitiéndoles asignar a dicho método un significado de "equivalencia" de expresiones.

- **Presentación del material didáctico**

- **Duración: 5 min.**

La profesora muestra el material didáctico y explica el significado de cada una de las figuras del material y las reglas de manejo del mismo, tal y como se describe a continuación.

– La tableta de color rojo tiene el significado de x^2.

Figura 144. Representación de x^2

– La tableta de color azul tiene el significado de las x.

Figura 15. Representación de la x

– La tableta de color amarillo, tiene el significado de término independiente.

Figura 166. Representación de término independeinte

– Las tabletas de color rojo, azul y amarillo significan que los términos son positivos

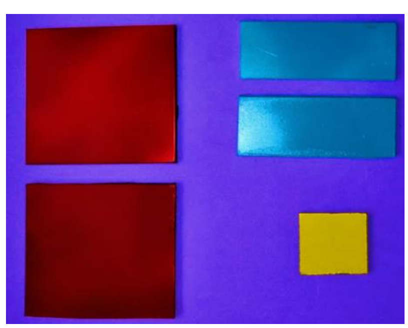


Figura 177. Representación de términos positivos

– La tableta de color negro significa que los términos son negativos

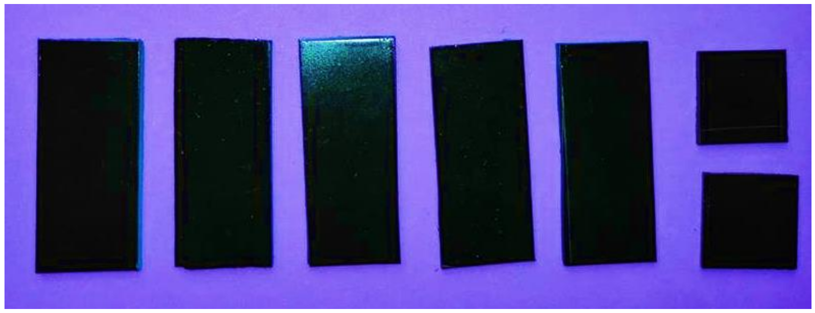


Figura 18. Representación de términos negativos

Una vez que la profesora presenta a los estudiantes el material, plantea una quinta actividad.

ACTIVIDAD 6

Duración: 5 min

- **Formulación**: tomando en cuenta el significado de las tabletas algebraicas, representa los siguientes trinomios. Por ejemplo:

1. En equipo de 3 personas, representa geométricamente las expresiones y completa la tabla.

Expresión algebraica	No. De tabletas rojas	No. de tabletas azules	No. de tabletas amarillas	No. de tabletas Positivas	No. de tabletas Negativas
1. $3x^2 - 5x - 2$					
2. $n^2 + 7n$+6					
3. $6p^2 - 13p + 6$					

- **Meta:** esta actividad tiene tres intenciones; la primera, que los estudiantes familiaricen y conozcan el Material didáctico (tabletas algebraicas); la segunda, que asignen un significado algebraico a cada uno de las tabletas que serán utilizadas para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$ y la tercera, que comiencen a visualizar y comprender la equivalencia entre la representación simbólica y geométrica.

Con el objetivo de alcanzar esta meta se plantearán las siguientes preguntas de apoyo a los estudiantes:

a) ¿Cuántos cuadros rojos tienen?
b) ¿Cuántos rectángulos azules tienen?
c) ¿Cuántos cuadros amarillos tienen?
d) ¿Cuántos tabletas positivas tienen cada expresión?
e) ¿Cuántos tabletas negativas tienen cada expresión?

- **Materiales y recursos:** Tabletas algebraicas y Libreta

- **Capacidades que se ponen en juego**

C 2.6.10 Asociar el significado del término cuadrático del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C 2.6.11 Asociar el coeficiente cuadrático con la cantidad de tabletas correspondiente.
C 2.6.12 Asociar el significado del término lineal del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C 2.6.13 Asociar el coeficiente lineal con la cantidad de tabletas correspondiente.
C 2.6.14 Asociar el significado del término independiente del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C 2.6.15 Asociar el término independiente con la cantidad de tabletas correspondiente.
C 2.6.16 Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

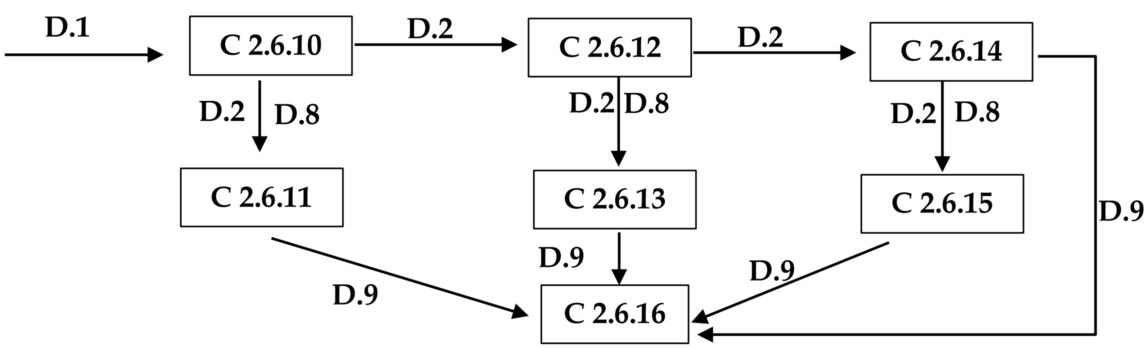
C 2.7.10 Asociar el significado del término cuadrático del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C 2.7.11 Asociar el coeficiente cuadrático con la cantidad de tabletas correspondiente.
C 2.7.12 Asociar el significado del término lineal del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C 2.7.13 Asociar el coeficiente lineal con la cantidad de tabletas correspondiente
C 2.7.14 Asociar el significado del término independiente del trinomio con la tableta algebraica correspondiente.
C 2.7.15 Asociar el término independiente con la cantidad de tabletas correspondiente.
C 2.7.16 Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

- **Dificultades:**

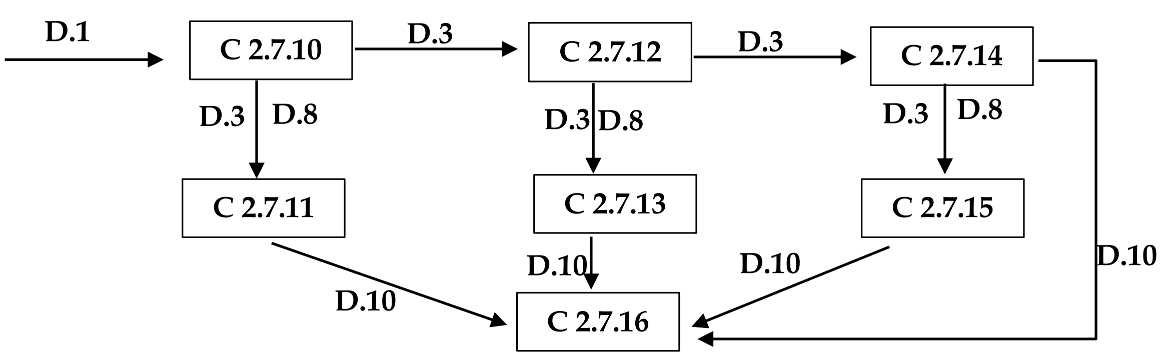
D.1 Definiciones o preconcepciones incorrectas de variable.
D.2 Identificación incorrecta de elementos de los trinomios de las formas la forma $x^2 + bx + c$.
D.3 Identificación incorrecta de elementos de los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.
D.8 No relacionar el significado algebraico con la tabla algebraica correspondiente.
D.9 No representar geométricamente la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$
D.10 No representar geométricamente la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

- **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje para actividad 6**

– **Factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$**



– **Factorización de Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$**



- **Situación de aprendizaje:** Esta actividad la trabaja el estudiante de forma individual, pero también la profesora pretende realizar en el transcurso de la misma las preguntas anteriormente mencionadas como apoyo en la ejecución de la actividad y familiarización con el material didáctico.

- **Intervención del profesor**

Duración: 5min.

Una vez que los estudiantes, han interactuado con el material didáctico, la profesora plantea un ejemplo, para introducir al estudiante a la actividad 6, pero antes explica las reglas de manejo del material para dicha actividad (formación de rectángulos).

– *Reglas de manejo*

1. Las tabletas sólo se pueden ubicar de forma consecutiva cuando los **lados compartidos sean de misma longitud**.

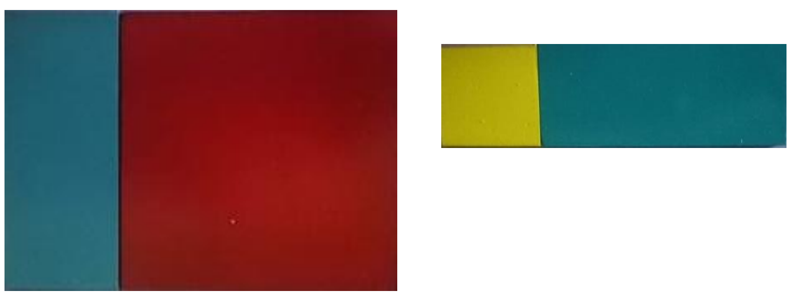


Figura 1919. Representación de lados compartidos entre tabletas algebraicas

2. El objetivo de cada configuración será formar rectángulos de tal manera que no queden espacios al interior del rectángulo y colocando una tableta roja en una esquina.

Figura 200. Formación de rectángulo con tabletas algebraicas

3. Una vez formado el rectángulo, se debe **interpretar** correctamente las **longitudes de los lados del rectángulo** (base y altura). Sumando la longitud de cada segmento que compone el lado total.

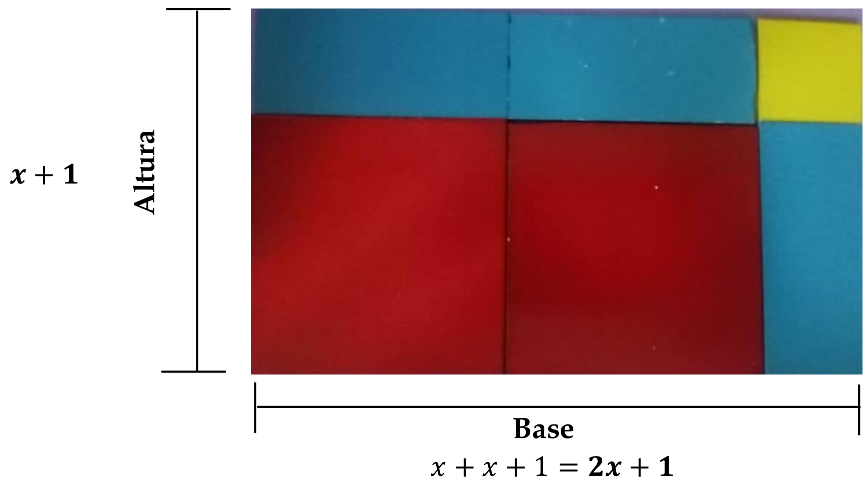


Figura 211. Interpretación de longitudes del rectángulo con tabletas algebraicas

Una vez planteado lo anterior, la profesora expone formalmente a los estudiantes lo siguiente:

2. Con apoyo de las tabletas algebraicas. ¿Cómo puede ser representada geométricamente la expresión $\boldsymbol{x^2 + 4x + 3}$?

La profesora solicita a los estudiantes formar un **rectángulo** con las tabletas que representan la expresión y les plantea las siguientes preguntas:

f) ¿Qué expresión tiene la **base** del rectángulo?
g) ¿Qué expresión tiene la **altura** del rectángulo?
h) ¿Qué **área** tiene el rectángulo formado?
i) Al factorizar algebraicamente la expresión. ¿Qué f**actores** resultan?
j) ¿Qué **relación** hay entre los factores resultantes **algebraicamente** y la representación **geométrica** de la expresión?

RECESO **Duración: 25min.**

ACTIVIDAD 7

Duración: 15 min

- **Formulación:** en equipo de 3 personas y con apoyo del material proporcionado, forma rectángulos y determina la expresión que es equivalente para cada una de las siguientes expresiones:

    1. $4h^2 + 8h + 3$
    2. $2u^2 + 5u + 3$
    3. $k^2 + 7k + 6$
    4. $2c^2 - 7c + 6$
    5. $3x^2 - 5x - 2$

- **Meta:** Esta actividad se plantea con el objetivo de que el estudiante con uso de las tabletas algebraicas, forme rectángulos para encontrar los factores de la expresión y viceversa; permitiéndole comprender y atribuir el significado de equivalencia al método de factorización.

- **Materiales y recursos:** Tabletas algebraicas.

- **Capacidades que se ponen en juego**

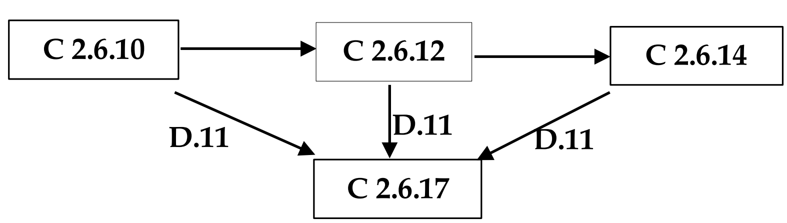
C 2.6.17 Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.
C 2.7.17 Asociar las dimensiones del rectángulo como factores de la expresión algebraica.

- **Dificultades:**

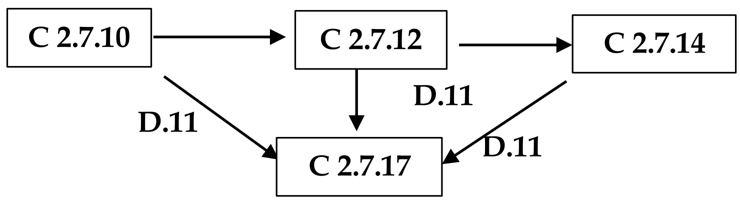
D. 11 No asociar el significado simbólico de la representación geométrica de la factorización como las dimensiones de un rectángulo.

- **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje para actividad 7**

– **Factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$**



– **Factorización de Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$**



- **Situación de aprendizaje:** Esta actividad se trabaja por los estudiantes en equipos de tres personas por las dificultades anteriormente descritas, por el tiempo de la sesión y la cantidad de material didáctico disponible. Al final de la actividad, la profesora pregunta al azar a un estudiante sobre ¿Cuál es la expresión equivalente al trinomio?, repuesta que se construirá al momento de que el alumno visualice la representación geométrica de la expresión en la formación del rectángulo, permitiéndole transitar de una representación simbólica a una representación geométrica de la factorización.

SESIÓN 2. La Factorización como una Equivalencia

Esta primera sesión tendrá una duración de <u>1 hora</u> Fecha: 30/03/19

- ***Intervención del profesor***

<u>Duración: 10 min.</u>

La profesora da inicio esta segunda sesión con un breve reencuentro de lo visto en la sesión anterior, con la finalidad de ubicar a los estudiantes. Después, la profesora presenta a los estudiantes tres problemas, los cuales son planteados con la intención de fortalecer el significado de *equivalencia* de la factorización y el sentido que tiene con las áreas.

Tarea 4	**La Factorización como una Equivalencia**	Duración total: 50 min

La profesora plantea nuevamente el problema con el que se dio inició en la primera sesión y muestra a los estudiantes otra manera de expresar la factorización de trinomios.

Duración: 10 min.

1. Si el área del rectángulo está representada por el trinomio correspondiente, determina los lados del rectángulo siguiente.

$\boldsymbol{A} = x^2 + 3x + 2$

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + 3x + 2}}$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

La profesora explica a los estudiantes:

Retomando todo lo aprendido:

¿cuáles serían las dimensiones del rectángulo?

¿Cuáles son lo factores del trinomio?

¿Esto qué significa?

"significa que son iguales o equivalentes" esto se llama ***Identidad matemática***

Identidad matemática

Una ecuación matemática que exprese la equivalencia entre sus dos miembros se dice que es una identidad matemática.

(Ibáñez y García, 2009)

ACTIVIDAD 8

Duración: 40 min.

- **Formulación:** resuelve los siguientes ejercicios.

2. ¿Cuál será el área de una pieza que tiene las siguientes dimensiones: largo = $(x + 7)$ y ancho= $(x + 2)$?

(Acevedo, Valadez y Vargas, 1996)

3. Se necesita instalar una ventana de aluminio en una pared. Si el área de la ventana está dada por la expresión $\boldsymbol{5x^2 + 18x + 16}$. ¿Cuánto medirá el total de sus lados?

(Acevedo, Valadez y Vargas, 1996)

4. La huerta del colegio nos permite sembrar diferentes productos para nuestro consumo, de acuerdo con lo establecido en la organización de estos productos para ser sembrados, se establecieron diferentes maneras de sembrar como lo veremos en la siguiente gráfica.

x^2	$12x$
$3x$	36

¿Qué expresión representa el área del terreno?
¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno?

(Ballén, 2012)

- **Meta:** el propósito de esta actividad es que, los estudiantes comprendan a la factorización como una identidad matemática y su relación con las áreas como otra forma de ser representada la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y de la forma $ax^2 + bx + c$.

- **Materiales y recursos:** Libreta

- **Capacidades:**

C 2.6.16 Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
C 2.6.18 Factorizar trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
C 2.6.19 Reconocer al trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática.
C 2.7.16 Representar geométricamente la expresión algebraica de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.
C 2.7.18 Factorizar trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
C2.7.19 Reconocer al trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y el producto de sus factores como una identidad matemática.

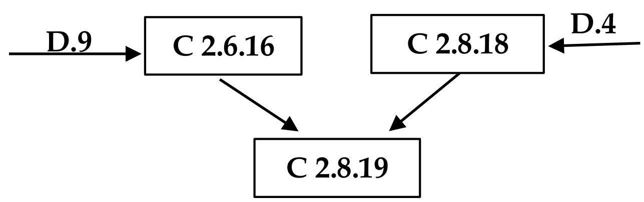
- **Dificultades:**

D.4 Aplicación incorrecta de las reglas de factorización de los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

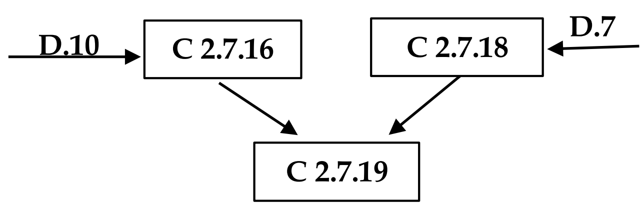
D.7 Aplicación incorrecta de las reglas de factorización de los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.
D.9 No representar geométricamente la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$
D.10 No representar geométricamente la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

- **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje para actividad 8**

– **Factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$**



– **Factorización de Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$**



- **Situación de aprendizaje:** Esta actividad la trabaja el estudiante de forma individual y en lapsos la profesora intervine, pues en el transcurso del desarrollo de la actividad los apoya con sus dudas y plantea preguntas como: ¿qué tipo de trinomio es?, ¿recuerdan las técnicas de factorización de ambos métodos? etc., permitiendo dar participación a los estudiantes en la actividad.

4.4.4 Criterios, Técnicas e Instrumentos de Evaluación

Se propone evaluar el aprendizaje de los estudiantes a partir de los siguientes criterios, técnicos e instrumentos de evaluación.

- **Criterios de evaluación**

1. Reconoce trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
2. Reconoce trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.
3. Factoriza trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
4. Factoriza trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

5. Representa geométricamente trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y de la forma $ax^2 + bx + c$ para determinar su factorización.
6. Manejo de la representación geométrica para interpretar un problema.
7. Manejo de la representación simbólica para interpretar un problema
8. Reconoce a la factorización como una identidad matemática.

- **Técnicas de evaluación**

  - Observación de la participación y comportamiento de los estudiantes durante la implementación de la unidad.
  - Tareas y actividades escritas.

- **Instrumentos de evaluación**

  - Tabla de registro

La tabla de registro de capacidades propuesta (tabla 6), es un diseño modificado de Acosta (2017), que relaciona a los estudiantes, la sesión, el número de actividad (A#) y las capacidades a desarrollar en cada una de ellas. Por consiguiente, serán registrados los resultados arrojados después de la implementación de la unidad y abordarán las capacidades que fueron promovidas por los estudiantes en tres de las actividades de esta unidad. Para el registro, se utilizará el símbolo ✓ para indicar que **SI** desarrolló la capacidad el estudiante y el símbolo ✗ para indicar que **NO** se desarrolló. Asimismo, se acompañarán de un análisis y descripción de cada una de ellas.

Tabla 6
Tabla de registro de capacidades

Sesión									Número de actividad (A#)										
ESTUDIANTE/CAPACIDAD																			**TOTAL POR ESTUDIANTE**
E1																			
E2																			
E3																			
E4																			
E5																			
E6																			
E7																			
E8																			
E9																			
E10																			
E11																			

E12																			
E13																			
E14																			
E15																			
E16																			
E17																			
E18																			
E19																			
E20																			
E21																			
E22																			
E23																			
E24																			
E25																			
TOTAL DE CAPACIDAD DESARROLLADA EN ACTIVIDAD																			

4.5. ANÁLISIS EVALUATIVO DEL TEMA DE FACTORIZACIÓN BÁSICA DE TRINOMIOS

El análisis evaluativo según Rico (1995, 2013), es el análisis centrado en los datos obtenidos y resultados logrados después de la implementación de la unidad didáctica. Este análisis se compone de tres categorías: una en la que se contemplan los criterios e instrumentos que serán de utilidad para evaluar los de aprendizajes de los estudiantes, los cuales ya fueron expuestos en análisis de instrucción; otra en la que se analizan, interpretan y evalúan los datos obtenidos al aplicar los instrumentos de evaluación durante la implementación; una tercera, en la cual el profesor evalúa las decisiones sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje, y del diseño y ejecución de la unidad didáctica del tema matemático de interés (Rico, 2013).

Por consiguiente, una vez que se han realizado los anteriores análisis (análisis cognitivo, de contenido y de instrucción) y la implementación de la unidad didáctica, resta ahora alcanzar el quinto objetivo específico de esta unidad didáctica y en atención a lo cual, a continuación, se presenta el análisis evaluativo de la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, abordando las dos categorías faltantes: la primera relacionada con los aprendizajes alcanzados por los estudiantes y la segunda dirigida a la reflexión del proceso de implementación.

4.5.1 Evaluación de las capacidades alcanzadas en la unidad didáctica.

En esta sección se presenta una evaluación de los datos obtenidos de la implementación de la unidad. Para esto, se utiliza la tabla 6 de registro que permite cotejar y analizar la presencia o no de una capacidad en cada una de las actividades; involucrando las capacidades, la actividad y por supuesto el estudiante. Para nombrar a los estudiantes se utilizó **E1**, donde **E** significa estudiante y **1** significa el número de estudiante, esto con el fin de proteger su identidad.

- **Evaluación de actividad 5**

La actividad cinco, consistió en solicitar al estudiante factorizar cinco expresiones, con las intenciones de que ponga en práctica todo lo aprendido en la sesión y desarrolle las capacidades de la C 2.6.1 a la C 2.6.9 y de la C 2.7.1 a la C 2.7.9.

Tabla 7

Registro de capacidades que se promovieron en la actividad 5

Sesión 1									A5									
ESTUDIANTE/CAPACIDAD	**2.6.1**	**2.6.2**	**2.6.3**	**2.6.4**	**2.6.5**	**2.6.6**	**2.6.7**	**2.6.8**	**2.6.9**	**2.7.1**	**2.7.2**	**2.7.3**	**2.7.4**	**2.7.5**	**2.7.6**	**2.7.7**	**2.7.8**	**2.7.9**	**TOTAL POR ESTUDIANTE**
E1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	17
E2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E7	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E8	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	17
E9	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	17
E10	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	17
E11	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E12	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	15
E13	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E14	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	17
E15	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E16	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E17	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	17
E18	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	17
E19	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	16
E20	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	17
E21	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E22	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18

E23	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E24	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	18
E25	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	0
TOTAL DE CAPACIDAD DESARROLLADA EN ACTIVIDAD	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	19	20	20	

Como se puede observar en la tabla 7, mayoritariamente las dieciocho capacidades propuestas a desarrollar en la actividad 5, se vieron presentes en su ejecución, pues quince de los veinticinco estudiantes que conforman el grupo, ejecutaron y pusieron en juego exitosamente todas las capacidades. Las capacidades relacionadas con conocimiento y comprensión de cada uno de los elementos que conforman a los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, fueron las capacidades que en su mayoría estuvieron presentes en la realización de la actividad, según lo plasmado en las actividades analizadas.

Sin embargo, con respecto a las capacidades dirigidas a la aplicación de las técnicas de factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, la tabla arroja aquellas capacidades que si fueron desarrolladas y las que no durante la ejecución de la actividad por los estudiantes. En cuanto a las capacidades que con menor frecuencia se desarrollaron fueron: la C 2.7.7, la cual su poco desarrollo se puede atribuir a la dificultad de los estudiantes de encontrar los factores tanto del término cuadrático como del término independiente de los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, una dificultad que fue visible en los estudiantes E8, E9, E10, E12 y E19 (figura 22).

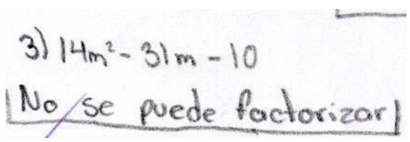


Figura 222. Respuesta de E19 a la actividad 5 de la tarea 2 ligada a la capacidad 2.7.7

Otra de las capacidades que no lograron desarrollar en la ejecución de esta actividad fue la C 2.7.8., está relacionada con la dificultad de los estudiantes de operar monomios, una que no fue desarrollada por los estudiantes: E17, E18 y E20, la cual probablemente no significa que tiene problemas en ello, sino es más atribuido a un error cometido por la falta de interés de los estudiantes (figura 23). Finalmente, la C 2.7.9., la cual no se vio presente en los estudiantes E1, E12, E14 y E19, evidenciando el poco dominio de las leyes de los signos (figura 24). Igualmente, también existieron estudiantes como fue el E25 que no mostró desarrollo de ninguna capacidad, pero esto debido a que no estuvo presente en la sesión.

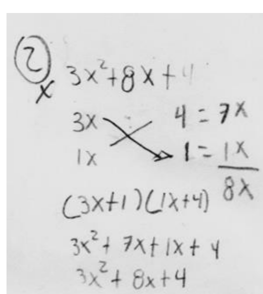


Figura 233. Respuesta de E17 a la actividad 5 de la tarea 2 ligada a la capacidad 2.7.7

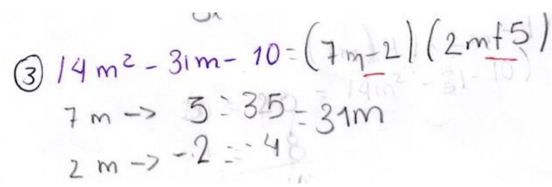


Figura 2424. Respuesta de E14 a la actividad 5 de la tarea 2 ligada a la capacidad 2.7.9

Por otro lado, y en efecto contrario, existieron alumnos que aparentemente si involucraron todas las capacidades propuestas para esta actividad, tanto para la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ como para trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, un ejemplo de ello, es el estudiante E7 (figura 26).

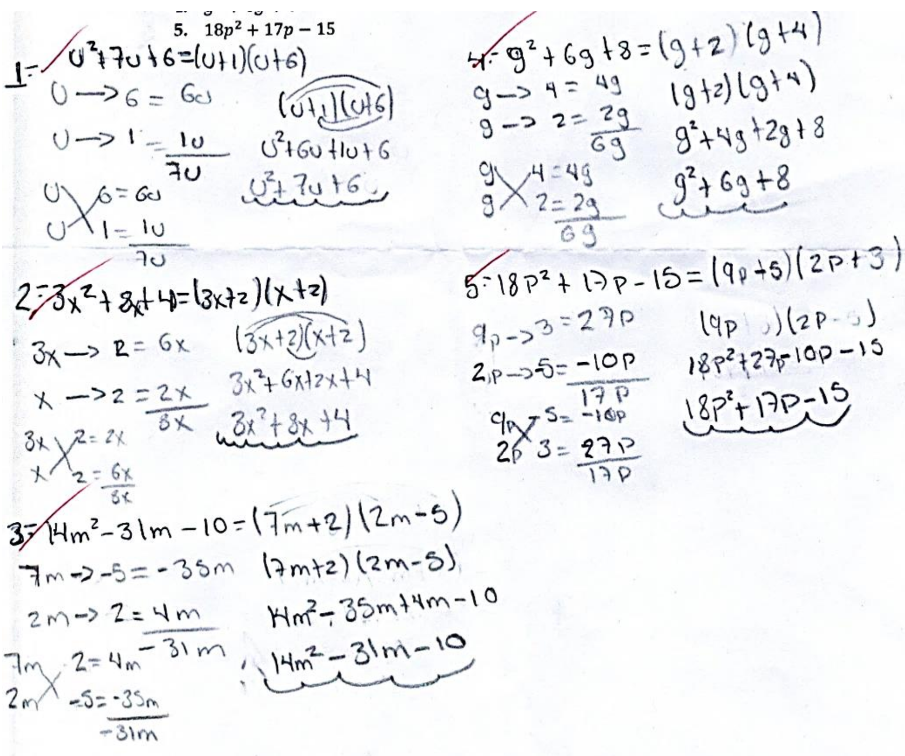


Figura 255. Respuesta de E7 a la actividad 5 de la tarea 2 ligada a las capacidades 2.6.1 a 2.6.9 y 2.7.1 a 2.7.9

Finalmente se concluye que las capacidades que con mayor frecuencia si fueron alcanzadas son: la C 2.6.1, C 2.6.2, C 2.6.3, C 2.6.4, C 2.6.5, C 2.6.6, C 2.6.7, C 2.6.8, C2.6.9, C 2.7.1, C 2.7.2, C 2.7.3, C 2.7.4, C 2.7.5 y la C 2.7.6, y las capacidades que en algunos de los casos no fueron desarrolladas durante la actividad fueron: la C 2.7.7, C 2.7.8 y la C 2.7.9.

Es importante mencionar que, para la elaboración de este registro, se recurrió a la observación de la participación en clase de los estudiantes y al análisis de las actividades escritas por ellos, una actividad en la cual se buscó tomar en cuenta todas aquellas capacidades que se hicieron presentes en las primeras actividades planteadas (actividad 1, actividad, 2 actividad 3 y actividad 4) durante la sesión 1.

- **Evaluación de actividad 7**

Hasta el momento se ha presentado la evaluación con respecto a la actividad 5, a continuación, se expone la evaluación de la actividad 7. Una actividad que se llevó a cabo con el apoyo de un material didáctico y orientado a trabajar y potenciar a la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ como una "equivalencia" y una "identidad matemática" de expresiones algebraicas, a través de los dos sistemas de representación simbólico y geométrico; y su relación con los conceptos de área y longitud.

Esta actividad se evalúo a partir de la observación de los estudiantes durante la realización de la actividad y conforme a ello, se identificaron las capacidades que sí fueron involucradas y las que no durante la actividad. A diferencia de la evaluación de la actividad 5, la actividad 7, se evalúo de forma grupal dado que fue una actividad abordada en equipos (siete equipos de tres personas y un equipo de cuatro personas) y al tiempo de la sesión con la intención de demostrar uno de los significados de la factorización.

Durante esta actividad se evidencio que, algunos de los estudiantes si lograron alcanzar todas las capacidades que fueron propuestas, lo que significó como respuesta favorable al incluir un material didáctico (tabletas algebraicas) en la enseñanza del tema de factorización. Algunos aspectos relevantes suscitados durante la ejecución de esta actividad fueron que, tres equipos mostraron gran interés en manejar el material, lo que les benefició a no tener problemas al identificar y relacionar cada una de las tabletas con los términos de los trinomios, formar rectángulos y asociar las dimensiones de este con los factores de la expresión algebraica. Lo que finalmente explica que nueve de los veinticinco estudiantes que conforman el grupo lograron desarrollar las dieciséis capacidades propuestas para dicha actividad. Sin embargo, también existieron cuatro equipos que mostraron poco interés en la clase, así como también exhibieron ciertas dificultades.

Algunas de las dificultades más notorias fueron las siguientes: dificultades para formar rectángulos con las tabletas algebraicas y asociar sus dimensiones con los factores de algunas de las expresiones algebraicas. A pesar de que los estudiantes enfrentaron estas adversidades, ellos después de varios intentos con los trinomios posteriores lograron dominar la actividad, permitiéndoles desarrollar la mayoría de las capacidades descritas para la actividad. Un aspecto interesante respecto a estos siete equipos fue que algunos mostraron en la formación de rectángulos acomodos variados y diferentes a los que estaban previstos, que a pesar de las indicaciones o reglas de manejo del material que se les presentó previamente a la actividad fueron expresados (figura 27 y figura 28).

Figura 266. Rectángulo que represnta la expresión $3x^2$ -$5x$+2

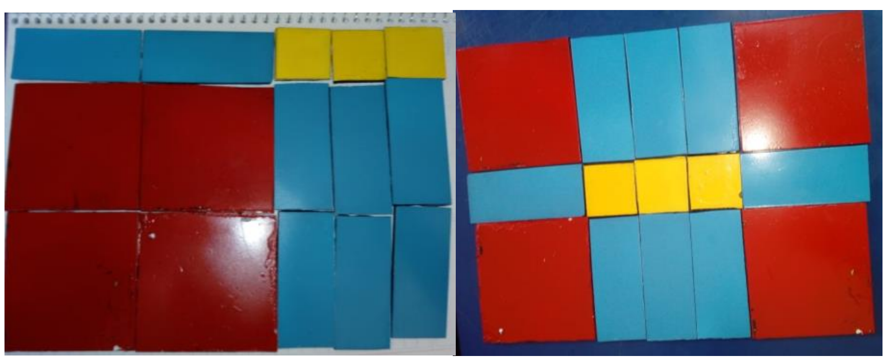


Figura 277. Rectángulo que represnta la expresión $4x^2 + 8x + 3$

Por el contrario, existieron estudiantes de uno de los equipos que manifestaron desinterés, actitud desfavorable y mínima disponibilidad de trabajar con el material didáctico, lo que los orilló a cometer algunos errores durante la realización de la actividad como: errores en la formación de rectángulos, en los que era posible observar acomodos sin orden y sentido, esto dando como resultado un desarrollo nulo de las capacidades propuestas.

Para finalizar esta evaluación, se mostró que todas las capacidades que se plantearon para la actividad 7, el 84% de los estudiantes (veintiuno de los veinticinco), que conforman el grupo, evidenciaron con su actitud y trabajo el desarrollo de las capacidades correspondientes al llevar acabo la actividad con el material. Lo que queda decir que tres estudiantes, es decir, el 16%, no lograron el alcance de dichas capacidades.

- **Evaluación de actividad 8**

La actividad 8, se planteó con el propósito de presentar a la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y de la forma $ax^2 + bx + c$ como una identidad matemática y exponer su relación con las áreas como otra de las formas de ser representada. Siendo así, esta actividad constó de tres problemas cortos en los que se propuso desarrollar por los estudiantes seis capacidades, mismas que fueron utilizadas para la evaluación de la actividad. A continuación, se presenta una tabla (tabla 8) en la cual se registra cuáles de las capacidades propuesta si fueron promovidas y cuáles no por los estudiantes a lo largo de efectuar la actividad.

Tabla 8

Registro de capacidades que se promovieron en la actividad 8

Sesión 2	**A8**						
ESTUDIANTE/CAPACIDAD	**2.6.16**	**2.6.18**	**2.6.19**	**2.7.16**	**2.7.18**	**2.7.19**	**TOTAL POR ESTUDIANTE**
E1	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E2	✗	✗	✗	✗	✗	✗	0
E3	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E4	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E5	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E6	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E7	✗	✓	✓	✗	✓	✓	4
E8	✗	✓	✓	✗	✓	✓	4
E9	✗	✓	✓	✗	✓	✓	4
E10	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E11	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E12	✗	✗	✗	✗	✗	✗	0
E13	✗	✗	✗	✗	✗	✗	0
E14	✗	✗	✗	✗	✗	✗	0
E15	✓	✓	✓	✓	✓	✓	6
E16	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E17	✗	✓	✗	✗	✓	✓	3
E18	✗	✗	✗	✗	✗	✗	0

E19	✓	✓	✗	✓	✓	✗	4
E20	✗	✓	✗	✗	✓	✗	2
E21	✗	✓	✗	✗	✓	✓	2
E22	✗	✓	✓	✗	✓	✓	4
E23	✓	✓	✓	✓	✓	✓	6
E24	✓	✓	✗	✓	✓	✗	4
E25	✓	✓	✗	✓	✓	✗	0
TOTAL DE CAPACIDAD POR ACTIVIDAD	5	20	6	5	20	8	

Según la tabla 8, las capacidades que más se promovieron y fueron alcanzada por los estudiantes en esta actividad fueron: C 2.6.18 y C 2.7.18, una capacidad que corresponde a la factorización simbólica y tradicional de los trinomios de forma $x^2 + bx + c$ y de la forma $ax^2 + bx + c$. El 80% de los estudiantes que conforman el grupo (veinte de los veinticinco), no presentaron dificultad para demostrar manejo de la representación simbólica del problema. Es decir, los estudiantes únicamente optaron por aplicar las técnicas de factorización de trinomios tanto de la forma $x^2 + bx + c$ como trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ de manera tradicional, sin tomar en cuenta su representación geométrica (rectángulos) para la interpretación del problema (C 2.6.16 y C 2.7.16). Esto arroja como resultado que, los estudiantes solamente lograron desarrollar y reconocer más la representación simbólica de la factorización que la geométrica, pues solo el 20% de los estudiantes (cinco de los veinticinco) demostraron un desarrollo de la capacidad. Algunos ejemplos de estos fueron: E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E16, E17, E18, E20, E21 y E22.

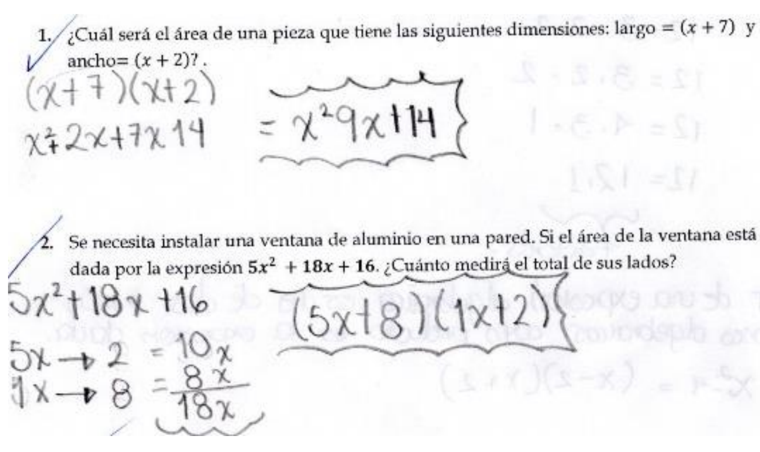


Figura 288. Respuesta de E14 a la actividad 8 de la tarea 4 ligada a las capacidades 2.6.18 y 2.7.18

No obstante, también existieron alumnos que demostraron manejo de los dos sistemas de representación simbólico y geométrico de la factorización de trinomios para interpretar los problemas, lo que llevó a concluir que lograron alcanzar las capacidades: C.2.6.16, C.2.6.18, C.2.7.16 y C.2.7.18. Algunos de ellos fueron: E15, E19, E23, E24 y E25

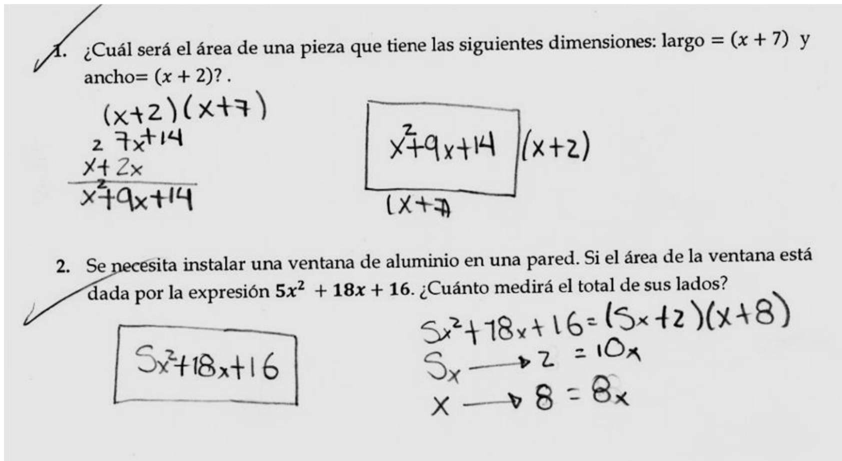


Figura 299. Respuesta de E15 a la actividad 8 de la tarea 4 ligada a las capacidades 2.6.16, 2.6.18, 2.7.16 y 2.7.18

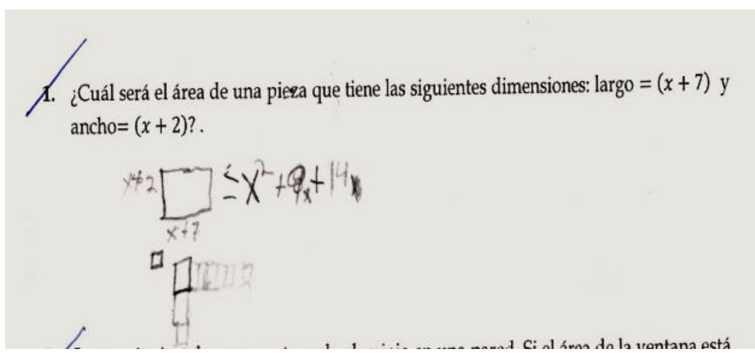
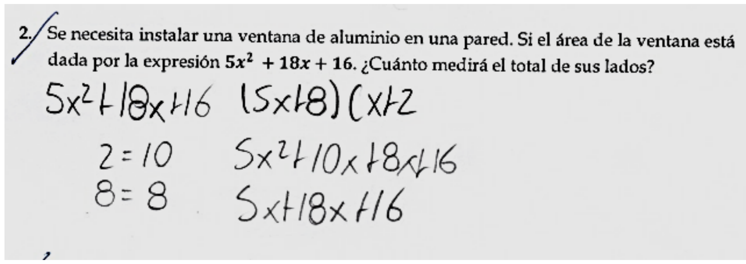


Figura 300. Respuesta de E25 a la actividad 8 de la tarea 4 ligada a las capacidades 2.6.16, 2.6.18, 2.7.16 y 2.7.18

Por otra parte, las capacidades C 2.6.19 y C 2.719, son capacidades las cuales se buscaron ver expresadas a partir de la realización del método de comprobación de las factorizaciones de los problemas. Estas capacidades fueron las que menos se desarrollaron en la realización de esta actividad, pues únicamente el 32% (ocho estudiantes de los veinticinco), lograron promoverla y el 68% no la alcanzó según lo expresado en la tabla 8. Algunos de estos estudiantes son: E7, E8, E9, E15, E17, E21, E22 y E23, y el resto de los estudiantes no la desarrollaron.

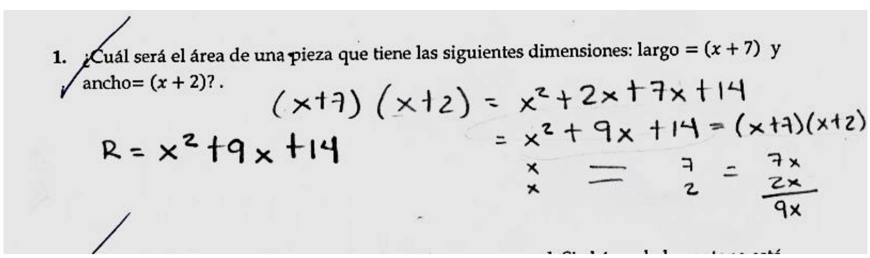

2. Se necesita instalar una ventana de aluminio en una pared. Si el área de la ventana está dada por la expresión $5x^2 + 18x + 16$. ¿Cuánto medirá el total de sus lados?

$5x^2+18x+16 \quad (5x+8)(x+2$

$2=10 \quad 5x^2+10x+8x+16$

$8=8 \quad 5x+18x+16$

Figura 311. Respuesta de E21 a la actividad 8 de la tarea 4 ligada a las capacidades 2.6.19 y 2.7.19


1. ¿Cuál será el área de una pieza que tiene las siguientes dimensiones: largo = $(x + 7)$ y ancho= $(x + 2)$? .

$(x+7)(x+2) = x^2+2x+7x+14$

$= x^2+9x+14 = (x+7)(x+2)$

$R = x^2+9x+14$

$x \quad 7 = 7x$

$x \quad 2 \quad 2x$

$9x$

Figura 322. Respuesta de E22 a la actividad 8 de la tarea 4 ligada a las capacidades C2.6.19 y 2.7.19

4.5.2 Evaluación de la implementación de la unidad didáctica.

Desde mi perspectiva, y a pesar de las adversidades que se suscitaron en la puesta en práctica de la unidad didáctica, considero que su implementación fue satisfactoria, pues lo central y verdaderamente importante dentro de ello fue construir un conocimiento que me será de utilidad para todo el trabajo que engloba ser profesor.

A lo largo de la puesta en práctica de esta unidad didáctica, fue posible desarrollar todo lo que se planteó trabajar previamente en el análisis de instrucción, sin embargo, durante la misma surgieron momentos en los que la planeación que se proyectó implementar sufrió de cambios y de algunas improvisaciones por parte de la profesora. El primero de los aspectos que estuvo expuesto a cambios en la organización de las actividades de la planeación fue la administración del tiempo. En la planeación, la primera sesión se programó para una duración de tres horas, pero debido a las formas de trabajo de la profesora titular únicamente se trabajaron dos horas con quince minutos, causando que el orden de las actividades 6 y 7 se desfasarán adjuntándose a la sesión 2 provocando ahora un desequilibrio en lo ya programado para dicha sesión.

No obstante, a pesar de lo anterior, en la sesión 2 a la cual se le destinó un tiempo de duración de una hora, si se consiguió concluir con las actividades, incluyendo la actividad 8. Otro de los cambios que se realizaron fue en la formación y organización de los equipos en la actividad 7, pues en la planeación se plasmó organizar al grupo en nueve equipos de tres estudiantes, puesto que el dato era que el grupo se conformaba de veintisiete estudiantes, sin embargo, en implementación de la segunda sesión el grupo se componía de veinticinco estudiantes lo que provocó una reorganización de siete equipos de tres estudiantes y un equipo de cuatro estudiantes.

Aún con esta idea de las modificaciones realizadas durante la implementación de la unidad didáctica, existen aspectos y detalles que desde mi punto de vista requieren de ajustes dirigidos a la búsqueda de un mejor papel como profesora y por supuesto al alcance de capacidades propuestas y expectativas de aprendizajes de los estudiantes. Algunas de estas mejoras se describen enseguida.

Una primera propuesta de mejora es revisar nuevamente el análisis de instrucción del que se compone esta unidad, en especial los tipos de actividades que se utilizaron o se eligieron. En mi opinión no quiere decir que fueron incorrectas, sino que simplemente requieren de modificaciones, por ejemplo, de la actividad siete modificaría el tiempo de duración que se le fue destinado, es decir, asignarle un lapso más extenso para que el estudiante logre comprender la actividad.

Por otro lado, otro ejemplo sería conveniente analizar y considera un rediseño de la estructura y redacción los problemas aplicados, pues para algunos de los estudiantes fue difícil comprender lo que le solicitaba el problema, así como también considerar problemas con contextos diferentes a la medición de longitudes y áreas, e incluso relacionados con alguna otra disciplina. Cabe aclarar que estas propuestas de cambio, son con la intención de buscar que aquellas actividades elegidas realmente cumplan con el propósito inicial por el que se eligieron plantear en dicho análisis y a su vez doten de mayor participación al estudiante.

Por otra parte, también sería enriquecedor el seguir con la búsqueda de otros materiales didácticos para la enseñanza de la factorización y probar cuál puede ser el más eficiente en cuanto a lo que se quiere lograr potenciar del tema, contemplando sus limitaciones y las posibles confusiones que pudiese generar en el estudiante. En este caso las tabletas algebraicas, en lo personal es un material didáctico eficiente para la enseñanza del tema, sin embargo, es importante mencionar, que este material para el tema de factorización posee algunas limitantes las cuales fueron identificadas al momento manejarlo durante la construcción del análisis de instrucción específicamente en el diseño de las actividades 6 y 7, fue posible identificar algunas de sus limitaciones para la enseñanza de factorización básica de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$. Estas limitaciones son:

1. No todas las expresiones se pueden representar en un rectángulo.

2. La interpretación de las representaciones geométricas de los términos negativos es confusa para los estudiantes.

3. Al factorizar una expresión a través de la representación geométrica es posible obtener diversos factores, que al ser comprobados con la factorización con las técnicas y reglas de factorización tradicionales no son equivalentes con la expresión inicial a factorizar, es decir, arrojan una expresión diferente.

Asimismo, con respecto al manejo del material didáctico, surgió una situación hasta cierto punto inesperada por parte de los estudiantes, una situación que desde mi punto de vista evalúo como no satisfactoria, pero sí de gran aprendizaje por la etapa de formación en la que estoy y el propósito de este informe. Esta situación se dio durante la ejecución de la actividad 6 y 7, en la cual los estudiantes expresaron desmotivación y desinterés por la actividad.

Este desinterés puede ser atribuido a factores que en mi opinión son adjudicados a ideas subjetivas de los estudiantes y ajenas a mí persona, debido a que, los estudiantes no me conocían y, por tanto, no representaba total autoridad. Esto también pudiese ser el origen de la actitud de apatía que presentaron hacia la clase, arrojando como resultado en la evaluación bajo alcance de las capacidades de aprendizaje en las actividades (6, 7 y 8). Es importante indicar que esto no solamente depende de la participación de los estudiantes, sino también sería valioso considerar mi actuación como profesora, pues a pesar de ya poseer experiencia frente agrupo igualmente debo considerar la actitud y participación que desarrolle.

Sin embargo, a pesar de todo lo anterior, si se logró el alcance por los estudiantes de una gran parte de las capacidades propuestas en cada actividad. En general, todo lo sucedido en la implementación de esta unidad didáctica, finalmente fue de provecho para mi formación sobre el experimentar de forma real en el aula, en un ambiente en el que se propician el aprendizaje; se siembran y resuelven dudas; se brindan ayudas para superar errores, dificultades y obstáculos, se promueve el compromiso, la responsabilidad y el trabajo en equipo entre los estudiantes y la profesora; y que con todo y adversidades esta experiencia mostro el verdadero escenario de una clase y toda esa mezcla de eventos con los que se encuentra y enfrenta un profesor en el aula (figura 33).

Una experiencia que involucró sucesos que van desde las improvisaciones; dar respuesta a preguntas inesperadas; toma en situación de decisiones que fue mi caso justo en el momento de la inserción del material a la clase, e incluso, hasta el ajustar el contenido con el tiempo disponible, tal cual se produce en la práctica real del profesor de matemáticas. Situaciones que en general no son abordados en los modelos o marcos teóricos de la educación matemática

Figura 333. Implementación de unidad didáctica

CAPÍTULO 5. REFLEXIÓN

Este capítulo se compone de una serie de reflexiones que se construyeron en el transcurso del desarrollo de los análisis que conforman el análisis didáctico. Aquí comparto aspectos relacionados con mi experiencia en la realización de esta experiencia de desarrollo profesional. Para el caso, exhibo los conocimientos que logre construir y los que no; planteo mejoras y nuevas propuestas como nuevas áreas de oportunidad para mi práctica, y por supuesto plasmo pensamientos e ideas que como un profesor de matemáticas llegue a formular antes y después de experimentar el diseño, ejecución y evaluación de esta unidad didáctica a través de la realización de los cuatro análisis del Análisis Didáctico.

Como ya se ha mencionado esta unidad didáctica tiene como pilar teórico metodológico el Análisis Didáctico; el cual me ha dotado de herramientas para la construcción de algunos conocimientos del profesor de matemáticas propuestos por los modelos planteados en la sección 1.2.2. Por consiguiente, en la tabla 9 se muestra la relación entre los conocimientos propuestos por los modelos teóricos y el análisis didáctico y trata de explicar desde mi perspectiva, qué conocimientos pueden ser puestos en práctica en cada uno de los organizadores de este marco teórico.

Tabla 9

Relación entre los conocimientos del profesor de matemáticas y el análisis didáctico

Análisis Didáctico	**Modelos del Conocimiento del Profesor de Matemáticas**				
	Conocimiento Base para la Enseñanza Shulman (1987)	**MKT** (Ball y colaboradores, 2000)	**Teoría de la Proficiencia** (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	**MTSK** (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013)	**CDM** (Pino-Fan y Godino, 2015)
	Conocimientos del profesor de matemáticas				
Análisis de Contenido	Conocimiento del contenido.	Subdominio Conocimiento Común del Contenido (CCK) y Conocimiento en el Horizonte Matemático, del dominio del Conocimiento de la Materia (SMK)	Dimensión Conocer las Matemáticas Escolares en Profundidad y Amplitud.	Dominio del Conocimiento Matemático (MK). Conocimiento de los temas (KOT), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y conocimiento de la Practica Matemática (KPM) Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) del dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido.	De la dimensión Matemática, el Conocimiento común del Contenido (CCC) y el conocimiento ampliado del contenido (CAC).

Análisis Cognitivo	Conocimiento de los estudiantes. Conocimiento del currículo.	Subdominio conocimiento especializado del contenido (SCK), del dominio conocimiento del contenido y subdominios Conocimiento Curricular, el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) del dominio Conocimiento Pedagógico del Contenido.	Dimensión de Conocer a sus Alumnos como Personas Pensantes y que Aprenden.	Dominio del Conocimiento Matemático (MK). Subdominios del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de Matemáticas (KFLM) y de los Estándares de Aprendizaje de Matemática (KMLS) del dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK).	Faceta Cognitiva y Ecológica de la dimensión Didáctica. Dimensión Meta Didáctico-Matemática.
Análisis de Instrucción	Conocimiento pedagógico del contenido. Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.	Subdominio Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) Subdominio Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) del dominio de Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK).	Dimensiones de Diseñar y Gestionar entornos de Aprendizaje, Desarrollar Normas para apoyar el discurso en el aula como parte de la enseñanza para comprensión y construir relaciones que favorezcan el aprendizaje.	Subdominio Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT) del dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK).	Faceta Epistémica, Interaccional y Mediacional.

Análisis de Evaluación			Reflexionar sobre la propia Práctica.		Dimensión Meta Didáctico-Matemática.

Fuente: Tabla realizada y complementada por la autora con información presentada en González y Eudave (2018)

Como se observa y se ha mencionado, la tabla 9 me ha sido de utilidad para relacionar los distintos conocimientos propuestos por los modelos teóricos y el marco teórico del análisis didáctico e identificar cuáles de ellos sí y cuáles no son considerados en el ciclo del análisis didáctico, pero también me ha permitido organizar y cotejar cuáles si fueron construidos o potenciados en cada uno de los análisis de esta unidad didáctica, información que se presenta en los siguientes apartados de este capítulo.

En la búsqueda de la relación de los conocimientos propuestos por los modelos teóricos y el marco teórico del análisis didáctico, me fue posible percatarme desde mi perspectiva que existen conocimientos, dimensiones y facetas que es poco notoria su relación con alguno de los cuatro análisis, pero sí de forma general con todo el ciclo del análisis didáctico. Estos conocimientos son: el conocimiento pedagógico general del modelo de , el cual considero que se encuentra muy relacionado en general con todo el ciclo del análisis didáctico, dado que este en su totalidad hace referencia a toda esa organización del trabajo en el aula (González y Eudave 2018); el conocimiento de los contextos educativos, puede referirse a el diseño curricular global del ciclo del análisis didáctico, dado que se relaciona con las características de la comunidad a la que fue aplicada esta unidad didáctica; y finalmente, la faceta afectiva de la dimensión didáctica del modelo CDM, la cual probablemente pudiese verse reflejada en el diseño curricular global del estudiante, e incluso, en el análisis de instrucción.

El no establecer o evidenciar correlación entre estos conocimientos y el análisis didáctico, no significa que esta no exista, sino simplemente desde mi punto de vista podría deberse a: en primera a mi poco conocimiento de los modelos y a mi inexperiencia para categorizar cada conocimiento en cada uno de los componentes del análisis didáctico y en segunda, al ser un marco teórico metodológico de reciente creación por ahora no sea visible dicha relación, con la idea que en un futuro este evolucione y sea más explícito en sus análisis para lograr incorporar dichos conocimientos.

En las siguientes secciones se exponen como ya se ha mencionado una reflexión de mi experiencia en la realización de cada uno de los análisis que conforman este ciclo del análisis didáctico.

5.1 ANÁLISIS COGNITIVO

La elaboración del primer análisis de esta unidad didáctica sobre el tema de Factorización de Trinomios Básicas, me ha permitido construir conocimientos dirigidos al alcance del segundo de los objetivos específicos propuestos de este trabajo. Por consiguiente, enseguida se describen los conocimientos que fueron construidos en esta en cada una de las categorías que conforman este el análisis cognitivo.

En lo que respecta a la primera categoría de *expectativas de aprendizaje*, me fue posible identificar la importancia de apoyar mi práctica con el currículo global, pues considero que a partir de la comprensión y el saber manejar los planes y programas de estudio del nivel educativo en cuestión, me será posible guiar o plantear estrategias de aprendizaje para mis estudiantes y en las que se vean involucradas las capacidades que les apoyarán en el alcance de objetivos específicos y competencias que el mimo sistema educativo busca promover en los procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas.

Dentro de este análisis me fue posible comprender algunas de las *limitaciones de aprendizaje;* las cuales se conforman de los principales errores y dificultades a las que comúnmente se enfrenta el estudiante al aprender el tema de factorización. Lo anterior, con el apoyo de lo sugerido en lo que ya se encuentra reportado en la investigación sobre el tema. El haber conseguido este conocimiento no solamente ha aumentado mis conocimientos, sino también me ha dado la oportunidad de compararlo con lo que he experimentado en mi propia práctica. Es decir, conectar los resultados de una investigación con lo experimentado y descubierto en mi práctica real como profesora al identificar limitaciones de mis estudiantes sobre el tema.

Finalmente, en lo que respecta a las *demandas cognitivas*, como última categoría de este análisis, aprendí a identificar los elementos clave que me darán la posibilidad de promover y ver reflejadas las capacidades cognitivas que apoyarán a los estudiantes en la superación de sus limitaciones al aprender este tema, para luego ser de utilidad en la elaboración del análisis de instrucción y de evaluación. El diseño de las capacidades que encabezan las demandas cognitivas para esta unidad didáctica, fue difícil para mí, pues como lo he mencionado anteriormente, es un conocimiento que no poseía, es decir, antes mis clases si se centraban en el logro de objetivos y expectativas de aprendizaje, pero las actividades que solicitaba a los estudiantes no tenían sentido en concreto. Ahora he adquirido habilidad para proponer capacidades que les peguen a actividades que realmente impacten de forma positiva en aprendizaje de los estudiantes.

En el desarrollo de este análisis y al reflexionar de ello, fue posible hacer una comparación de los conocimientos y preguntarme qué como profesora poseía antes y después de dicho análisis. Por tanto, a continuación, se muestra en la tabla 10 una comparación y la evolución de estos conocimientos durante el diseño y desarrollo del análisis cognitivo de esta unidad didáctica del tema de factorizaciones básicas de trinomios.

Tabla 10
Conocimientos del profesor de matemáticas en el análisis cognitivo del tema de factorizaciones básicas de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ *y de la forma* $ax^2 + bx + c$

<table>
<tr><th rowspan="2">Modelos</th><th rowspan="2">Conocimientos del profesor de matemáticas</th><th colspan="2">Análisis cognitivo</th></tr>
<tr><th>Antes</th><th>Después</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987)</td><td rowspan="2">Conocimiento de los estudiantes y sus características.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del currículo</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>Conocimiento</td><td>Al indagar bajo que</td></tr>
</table>

		limitado.	programa de asignatura debía respaldar esta unidad didáctica.
MKT (Ball y colaboradores, 2000)	Subdominio conocimiento especializado del contenido (SCK), del dominio conocimiento del contenido.		✓ Es un conocimiento que está involucrado cuando investigue sobre las limitaciones de aprendizaje de los estudiantes sobre el tema.
	Subdominio conocimiento curricular del dominio conocimiento pedagógico del contenido (PCK).	✓ Un conocimiento limitado que no era comprendido a profundidad.	✓ Al revisar el currículo para el desarrollo de la unidad didáctica y por ende para la elaboración
	Subdominio Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) del dominio Conocimiento Pedagógico del Contenido.		✓ Un conocimiento que se construyó durante la revisión de las limitaciones de aprendizaje de los estudiantes.
Teoría de la Proficiencia (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	Dimensión Conocer a sus alumnos como personas		✓

	pensantes y que aprenden.		Un conocimiento muy relacionado con las limitaciones de aprendizaje del estudiante sobre el tema en cuestión.
MTSK (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013)	Subdominio conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas (KFLM) del dominio conocimiento didáctico del contenido (PCK).		✓
			Reflejado en las limitaciones de aprendizaje de los estudiantes.
	Subdominio estándares de aprendizaje de matemática (KMLS) del dominio conocimiento didáctico del contenido (PCK).	✓	✓
		Conocimiento limitado.	Un conocimiento construido al momento revisar el currículo del de la asignatura del nivel del medio superior.
CDM (Pino-Fan y Godino, 2015)	Faceta cognitiva de dimensión didáctica		✓
			Construido durante la revisión de las limitaciones de aprendizaje de los estudiantes.
	Faceta ecológica de dimensión didáctica	✓	✓
		Conocimiento limitado.	Al revisar el currículo de la asignatura del nivel del medio superior.

De los conocimientos relacionados con el currículo global considero que se fortalecieron, pues anterior a este análisis, era un conocimiento con el que ya contaba en mi preparación, por lo que ahora después de trabajar en el análisis logre potenciarlos. Por otro lado, y en efecto contrario, los conocimientos relacionados con la cognición de los estudiantes para el tema de factorizaciones, tuve la oportunidad de adquirirlos y corroborarlos con lo reportado en la investigación durante la elaboración de este análisis, al momento de interactuar con ellos en el aula y al analizar los datos arrojados en sus actividades. Estos conocimientos son los relacionados con las limitaciones de aprendizaje como: la dificultad de los estudiantes en el uso de los números y letras, y el no poseer una comprensión sobre la noción de variable (Morales y Sepúlveda, 2006; Baltazar, Rivera, Martínez, Cárdenas y Amaya, 2015).

5.2 ANÁLISIS DE CONTENIDO

La elaboración de este segundo análisis, me ha permitido construir conocimientos dirigidos al alcance del primero de los objetivos específicos propuestos en este trabajo, conocimientos centrados en la selección de los significados que como profesora decidí potenciar en la enseñanza del tema de factorización de trinomios y relacionar con algunos de los conocimientos descritos por los modelos del conocimiento del profesor de matemáticas elegidos (tabla 11).

Como ya es sabido, uno de los componentes que determinan el significado de la factorización de trinomios es su *fenomenología*, y fue a través de ella que me fue posible conocer los fenómenos que dieron origen y comprender la utilidad a este concepto matemático escolar, un conocimiento que puede estar ubicado en el subdominio del conocimiento de los temas (KOT) en el modelo MTSK. El poseer este conocimiento en mi formación, me puede ser de utilidad en la planeación de mis procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, puede ser empleada como estrategia didáctica para la explicación de un tema, de ejemplos, tareas y/o actividades en clase, con el fin de hacerlos más accesibles de aprender y comprender para los estudiantes y facilitar el aprendizaje significativo.

A lo largo de la realización de todo este análisis, la dimensión de fenomenología fue la que más compleja me pareció de los significados del concepto de factorización, pues los conocimientos que la caracterizan, en ocasiones provienen de documentos a los que es difícil de acceder o de encontrar, pues el venir de textos antiguos y ser traducidos al español, los considero difíciles de institucionalizar en la matemática escolar. La fenomenología que logré identificar durante el desarrollo de este análisis, se centra en la medición de áreas y longitudes de figuras geométricas, atribuida especialmente a terrenos en el contexto de la vida real, un significado que se buscó ver reflejado en las actividades 6, 7 y 8.

Por otro lado, referente al componente de los *sistemas de representación* de este contenido, logré construir el conocimiento de identificar y definir que los sistemas de representación que busqué potenciar en esta unidad didáctica son el simbólico y geométrico, y a su vez aprendí a ligarlos con cada una de las actividades que planeé solicitar a los estudiantes, incluyendo aquellas actividades en las que se involucró el uso del material didáctico. Antes de estos nuevos conocimientos, si consideraba la existencia de las diferentes formas de representar la factorización, sin embargo, desconocía las maneras de llevarlas como tal a los estudiantes.

Ahora, que este conocimiento forma parte de mi formación me es de utilidad para expresar aquellos elementos que son relevantes en cualquier otro concepto matemático, que puedo utilizar como una estrategia para la enseñanza y el alcance de los objetivos que me solicita la matemática escolar. Estos son conocimientos que, desde mi perspectiva, los considero pueden empatarse con los propuestos en Subdominio conocimiento de los temas (KOT) del dominio del conocimiento matemático (MK), el subdominio conocimiento de la práctica matemática (KPM) del dominio del conocimiento matemático (MK) y conocimiento de la enseñanza matemática (KMT) de dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) del modelo MTSK ; y la dimensión Conocer las Matemáticas Escolares en Profundidad y Amplitud del modelo de la Teoría de la Proficiencia (tabla 11).

Desde otra perspectiva y con respecto al componente de la *estructura conceptual* y la construcción del mapa conceptual, alcancé la capacidad para identificar y a propiciar relaciones entre los conceptos tanto conceptuales (hechos, conceptos y estructuras) como procedimentales (destrezas, razonamientos y estrategias) que desde mi perspectiva consideré importantes y conforman un contenido matemático. Relaciones en las que se involucren su fenomenología, sistemas de representación, campos de aplicación y con los conceptos de niveles académicos anteriores y posteriores a él.

Para esta unidad didáctica aprendí que la factorización básica de trinomios, es un contenido matemático que está muy relacionado con las ecuaciones cuadráticas, pues es considerado desde la antigüedad como uno de los métodos de solución para dichas ecuaciones a través de la aplicación de las técnicas de factorización y que dentro de mi preparación no poseía, ya que únicamente lo consideraba un método para descomponer expresiones. Al ser la ecuación cuadrática un trinomio, para factorizarlo es necesario poseer conocimiento de los elementos que conforman un trinomio, por tanto, establecí una relación con los términos y conceptos como: término cuadrático, término lineal, término independiente, variable, coeficiente y exponente.

Otra conexión que determiné dentro de este análisis, fue la de factorización con el concepto de equivalencia, pues este es un concomimiento que construí en el proceso de la elaboración de dichas estructuras conceptuales especialmente cuando establecí los sistemas de representación que potenciaría de la factorización, pues era un conocimiento que no poseía en mi formación. De la misma forma, logré entender a partir de la relación con relación con el término de identidad matemática por medio de la representación simbólica de la igualdad entre expresiones, es decir, entre la expresión a factorizar y el producto de sus factores, y finalmente, distinguí sus campos de aplicación con la medición de áreas y longitudes mediante el sistema de representación geométrico y el uso del material didáctico.

Por último, desde mi punto de vista de los conocimientos que si alcancé a construir por medio de este componente, algunos se encuentran asociados con los propuestos por los modelos del conocimiento del profesor de matemáticas como: el conocimiento del contenido del modelo conocimiento base para la enseñanza; conocimiento horizonte matemático (HCK) del dominio del conocimiento de la materia (SMK) del modelo MKT; el subdominio conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) del dominio conocimiento matemático (MK) del modelo MTSK; y el conocimiento ampliado del contenido (CAC) de la dimensión Matemática.

Al final de todo estos son los conocimientos que construí en la realización de este análisis y serán los que me respaldarán en el futuro en mi práctica docente, ya que anteriormente eran conocimientos de los que en su mayoría carecía en mi preparación. Por tanto, a continuación, se exhibe en la tabla 11 el cotejo de los conocimientos que como profesora poseía antes y después de la elaboración de este análisis de contenido, así como también una descripción de lo que se aprendió en cada uno de los casos.

Tabla 11
Conocimientos del profesor de matemáticas en el análisis de contenido del tema de factorizaciones básicas de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ *y de la forma* $ax^2 + bx + c$

Modelos	Conocimientos del Profesor de Matemáticas	Análisis de Contenido.	
		Antes	**Después**
Conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987)	Conocimiento del contenido.		✓
		La factorización como un tema	La factorización como un método o herramienta para dar solución a ecuaciones cuadráticas y de descomponer

			expresiones.
			✓
MKT (Ball y colaboradores, 2000)	Subdominio Conocimiento Horizonte Matemático (HCK) del dominio del Conocimiento de la Materia (SMK).	La factorización como una herramienta para descomponer expresiones	La factorización como método de solución a ecuaciones cuadráticas.
			✓
Teoría de la Proficiencia (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	Dimensión Conocer las Matemáticas Escolares en Profundidad y Amplitud.	Ninguna representación	La factorización puede ser representada a partir de dos sistemas de representación simbólica, geométrica.
MTSK (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013)		✓	✓
	Subdominio Conocimiento de los Temas (KOT) del dominio del Conocimiento Matemático (MK) y conocimiento de la enseñanza matemática (KMT) de dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK).	Procedimientos de las Técnicas de factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y de la forma $ax^2 + bx + c$.	Al asociar los sistemas de representación con el material didáctico a utilizar.
	Subdominio Conocimiento de		✓

	la Practica Matemática (KPM) del dominio del Conocimiento Matemático (MK).	.	Definir la factorización como una equivalencia y una identidad matemática entre dos expresiones algebraicas, y al elegir el sistema de representación geométrico para relacionarlo con los campos de aplicación de áreas geométricas.
	Subdominio Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) del dominio Conocimiento Matemático (MK)		✓
		c	La factorización y su relación con la identidad matemática, equivalencia, solución de ecuaciones cuadráticas y la medición de áreas.
CDM (Pino-Fan y Godino, 2015)	Conocimiento común del contenido (CCC) de la dimensión Matemática.		
	Conocimiento		✓

	Ampliado del Contenido (CAC) de la dimensión Matemática.		Al momento de establecer la conexión entre factorización y la solución de ecuaciones cuadráticas como un tema y aprendizaje futuro.

5.3 ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El análisis de instrucción según Gómez (2002), es aquel organizador del análisis didáctico que le permite al profesor identificar, seleccionar, diseñar y/o rediseñar las tareas y actividades que desde su punto de vista considera relevantes para el aprendizaje de los estudiantes. Este análisis tiene como base el análisis cognitivo y de contenido, pues es en este dónde se comienza a articular lo aprendido en cada uno de ellos para la construcción de los próximos análisis.

En el desarrollo de este análisis de instrucción, construí conocimientos específicamente relacionados con los elementos que debo tener presente para la selección de las tareas y actividades que debo plasmar en una planeación. Tareas y actividades con significado, que impacten y propicien un crecimiento verdadero en el aprendizaje de mis estudiantes y por supuesto orientadas al alcance de las expectativas de aprendizaje, mediante la explotación de las competencias a través de las capacidades promovidas en el proceso de enseñanza. Esta es una habilidad que antes de este análisis no poseía en mi preparación y debido a esto la selección la centraba únicamente en el desarrollo del conocimiento matemático meramente algorítmico, sin tomar en cuenta las expectativas de aprendizaje que el currículo solicitaba o las capacidades y capacidades que involucraba.

Ahora para este reporte, la selección de las tareas la realicé estrictamente a partir de los elementos que componen el análisis cognitivo y el análisis de contenido, es decir, fueron elegidas a partir de: las expectativas de aprendizaje descritas en el currículo y el programas de estudios 2017 ; de las limitaciones de aprendizaje que reporta la investigación y las que en mi experiencia he detectado en el aula; de las demandas cognitivas que espero que desarrollen al ejecutar dichas actividades, pues estas son las que apoyaron al estudiante en la superación de sus limitaciones;. y de la fenomenología según sus campos de aplicación; y de sus sistemas de representación para la incorporación del material didáctico.

Por otro lado, también aprendí a categorizar las tareas según el grado complejidad, a distinguir si son tareas de reproducción, de conexión o de reflexión; a diseñar actividades para utilizar un material didáctico. También construí conocimientos no ajenos a la tareas y actividades, pero si diferentes como: aprendí a como buscar y elegir un material didáctico, a probar y detectar limitaciones, y sobre todo adecuarlo a una actividad en específico; a construir acuerdos de enseñanza; a prever preguntas antes de la puesta en práctica de una planeación; a elaborar estrategias de aprendizaje; adquirir destrezas para el diseño y re diseño de nuevas demandas cognitivas; y a realizar propuestas de trayectorias hipotéticas de aprendizaje, como posibles maneras de aprendizaje de un estudiante sobre el tema de factorizaciones básicas de trinomios.

Personalmente, de los tres análisis realizados, este ha sido el que mayor dificultad me causó, lo cual quizá se deba a la forma conjunta con la que se trabaja con los dos análisis anteriores o al desconocimiento del mismo. Sin embargo, a pesar de ello, fue el análisis que más disfruté y del que considero que construí más conocimientos, pues es del que veo reflejado más frutos al hacerme comprender la gran importancia de seleccionar idóneamente las tareas y actividades para la enseñanza.

Por consiguiente, considero que esta es una habilidad la cual requiere de mucha responsabilidad para realizarla en virtud de que es una acción en la que se ponen en riesgo muchos aspectos del aprendizaje del estudiante que, en mi opinión, si no son manejados de la forma correcta, puedo llegar a cometer equivocaciones y trasmitir un conocimiento erróneo o crear confusiones en los estudiantes. Es por ello que haberlo construido, considero que me ayudará a organizar y a diseñar la planeación de una clase con sustento teórico e intenciones de que resulte lo más satisfactoriamente posible para mí práctica profesional y para mis estudiantes, siendo esta una de mis limitaciones como profesora que dio origen a este trabajo y que al final de este análisis he superado.

Varios de estos conocimientos alcanzados se pueden ubicar y concatenar con algunos de los propuestos por los modelos teóricos y brindaron solución a algunas deficiencias en mi labor, por ejemplo: del modelo de MKT, el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT*)* del dominio de Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), el cual considero que construí cuando analicé las ventajas, desventajas y sentido que le daría al material didáctico que decidí utilizar para enseñar el contenido en cuestión. Del modelo de la Teoría de la Proficiencia, logré construir el conocimiento de la dimensión de Desarrollar normas para apoyar el discurso en el aula como parte de la Enseñanza para Comprensión, al momento que busqué planear y elegir las palabras clave y correctas para el discurso que utilizaré al explicar la solución de cada uno de los ejercicios que pretendo plantear a los estudiantes. De la misma forma potencié la construcción de relaciones que favorecen el aprendizaje, un conocimiento que desde mi perspectiva amplié al planear la actividad en la que se involucraran la implementación material didáctico, con las actividades en equipo.

Por otro lado, del modelo MTSK, considero que obtuve un poco el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT), al elegir y analizar los ejemplos y actividades que desde mi criterio son ideales a realizar con el material didáctico para el alcance de las expectativas de aprendizaje estipuladas por el curriulum, tomando en cuenta sus beneficios y dificultades de su uso en la enseñanza de estos métodos de factorización. Del modelo CDM: la fase epistémica, al estar consciente de cómo explicar a los estudiantes que no todas las expresiones pueden factorizarse o que el factorizarlas es el único método para dar solución, sino que existen otros como la fórmula general que puede ser de utilidad.

La faceta interaccional, un conocimiento que pretendo ajustar al implementar la unidad, pero que también con el tiempo pienso pulir. Desde mi punto de vista, este conocimiento pretendo construirlo en el momento en el que explique y solicite a los estudiantes resolver las actividades en conjunto, pues esto producirá relaciones profesor-alumno- contenido, una relación que puede potenciarse al expresarles preguntas que los motiven a participar y apoyen su desempeño. La faceta cognitiva, un conocimiento que pretendo desarrollar al proponer las trayectorias hipotéticas de aprendizaje del tema, y finalmente, la faceta Mediacional, un conocimiento que creo que construí cuando valore la utilidad y el significado que tendría el material didáctico en la unidad didáctica, y cuando se realiza la distribución y organización de los tiempos estimados de duración de cada actividad. En seguida se propone una tabla (tabla 12) de registro en la cual se acoteja los conocimientos que si fueron alcanzados durante la realización de este análisis y una descripción de lo aprendido antes y después del dicho análisis.

Tabla 12

Conocimientos del profesor de matemáticas en el análisis de instrucción del tema de factorizaciones básica de trinomios $x^2 + bx + c$ *y de la forma* $ax^2 + bx + c$

Modelos	Conocimientos del Profesor de Matemáticas	Análisis Instrucción	
		Antes	Después
Conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987)	Conocimiento pedagógico.		
	Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.		
MKT	Subdominio		✔

(Ball y colaboradores, 2000)	Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) del dominio de Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK).		Análisis de ventajas, desventajas y sentido del material didáctico para enseñar a Factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y de la forma $ax^2 + bx + c$.
Teoría de la Proficiencia (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	Dimensión de desarrollar normas para apoyar el discurso en el aula como parte de la enseñanza para comprensión y construir relaciones que favorezcan el aprendizaje.		✔
		No poseía la habilidad para utilizar normas para propiciar el aprendizaje.	En la planeación de las actividades en la que se involucraran el manejo del material didáctico.
MTSK (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013)	Subdominio Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT) del dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK).		✔
		No tenía conocimiento extenso sobre la implementación de materiales didácticos.	Análisis de los beneficios y dificultades del uso del material didáctico (tabletas algebraicas) en la enseñanza de la factorización.
CDM	Faceta Epistémica		✔

(Pino-Fan y Godino, 2015)		No lo consideraba relevante.	Al reflexionar sobre la importancia de las formas de explicar a los alumnos. Por ejemplo, explicar a los estudiantes que no todas las expresiones pueden factorizarse o que el factorizarlas es el único método para dar solución a ecuaciones cuadráticas.
	Faceta Cognitiva		✔
			Al abordar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.
	Faceta Interaccional.	✔	✔
		Planteaba preguntas de apoyo para los estudiantes, que permitían generar una relación profesor-alumno-contenido.	Al establecer la relación profesor-alumno-contenido al realizar y argumentar la solución de los ejercicios de algunas de las actividades.
	Faceta Mediacional		✔

		No poseía la habilidad para reflexionar sobre las consecuencias de incluir un material didáctico a proceso de enseñanza/ aprendizaje.	Al valorar la utilidad y el significado que tendría el material didáctico en la enseñanza de la factorización en esta unidad didáctica.

5.4 ANÁLISIS DE EVALUACIÓN

Justo como lo describe Rico (1995), la evaluación no es un proceso que nos sirve para señalar o clasificar si es bueno o malo un estudiante, sino es un proceso que sirve para identificar situaciones atípicas y sobre estas actuar para dar una solución. Estas evaluaciones según Scriven (1967, citado por Rico,1995), pueden ser de dos tipos: formativa, la cual es continua y que se centra en diagnosticar e informar los aspectos que son deficientes, y la evaluación sumativa, aquella que se dirige a la concentración de los logros alcanzados durante su aprendizaje. En el caso de esta unidad y como autora de ella, pienso que la evaluación que se eligió realizar es una evaluación formativa, pues lo que se evalúo en esta unidad fue el alcance de las capacidades como demandas cognitivas, requeridas por el currículo del Nivel Medio Superior.

En esta evaluación se buscó de los datos resultantes de la implementación de la unidad didáctica, evaluar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, pero también se expresó una evaluación sobre la implementación de la unidad didáctica centrada en mi participación y desempeño como docente. Para la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes, como se determinó en el análisis al final del análisis de instrucción, se hizo uso de una lista de cotejo como instrumento de evaluación en donde se registró el desarrollo de las capacidades en algunas de las actividades, siendo una de estas otras de las habilidades adquiridas, el saber elegir un instrumento de evaluación y el identificar los aspectos en los que se construye una evaluación.

Para realizar este registro, antes fueron analizadas y observadas cada una de las tareas que se asignaron a los estudiantes y con las que me fue posible corroborar lo que la investigación reporta en relación con las dificultades que comúnmente suelen presentan los estudiantes en su proceso de aprendizaje de este método, una habilidad que desconocía y de la que no poseía experiencia antes de la realización de este análisis. Considero seguir trabajando este conocimiento y enriquecerlo con la práctica, dándome la oportunidad de investigar sobre más técnicas e instrumentos de evaluación. Respecto a este análisis, lamentablemente no le encontré alguna vinculación exacta con los propuestos por los modelos revisados, sin embargo, no deja de ser importante y relevante para mi formación como profesora.

Desde otra perspectiva, en cuanto a la evaluación de la implementación de la unidad didáctica, está el enfoque en la reflexión, una condición proyectada a analizar y aportar a mi profesión. Esta reflexión se focalizó en suscitado de la puesta en escena, en valoración de las decisiones tomadas durante el diseño y ejecución de la unidad didáctica y en reconocer y/o establecer las áreas de oportunidad por resolver en mi práctica. Este conocimiento no lo considero reciente, pero si mejorado, pues al desarrollar este análisis me percaté que lo fortalecí y que se relaciona con el propuesto en dos de los modelos propuestos, el de Reflexionar sobre la propia Práctica, propuesto en la Teoría de la Proficiencia y la dimensión Meta Didáctico-Matemática del modelo CDM.

En la tabla 13, se muestra esta relación entre los conocimientos propuestos por los Modelos del Conocimiento del Profesor de Matemáticas y el Análisis Didáctico, evidenciando como los únicos que se vinculan con el marco teórico metodológico.

Tabla 13

Conocimientos del profesor de matemáticas en el análisis de evaluación del tema de factorizaciones de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ *y de la forma* $ax^2 + bx + c$

Modelos	**Conocimientos del Profesor de Matemáticas**	**Análisis de Evaluación**	
		Antes	**Después**
Teoría de la Proficiencia (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	Reflexionar sobre la propia Práctica	✓	✓
		Reflexiones limitadas.	Reflexionar sobre cómo fue que se suscitó la puesta en escena, las decisiones que se tomaron y en establecer áreas de oportunidad.
CDM	Dimensión Meta Didáctico-	✓	✓

(Pino-Fan y Godino, 2015)	Matemática	Reflexiones limitadas.	Reflexionar sobre cómo fue que se suscitó la puesta en escena, las decisiones que se tomaron y en establecer áreas de oportunidad.

Este análisis al igual que el análisis de instrucción, me causó ciertas dificultades, pues antes eran insuficientes, pues no tenía conciencia y mucho menos conocimiento de la importancia que tenían, pues únicamente asignaba un número como calificación a los estudiantes sin justificar el porqué de esa calificación. En cambio, ahora tuve la oportunidad de observar, analizar, hacer predicciones y posiblemente hasta determinar posibles consecuencias de sus deficiencias.

Esta práctica de desarrollo profesional me dotó de crecimiento y experiencia fundamentada de conocimientos y herramientas teóricas y metodológicas para mi práctica y a mi persona. Una experiencia que en mi opinión a pesar de sus adversidades la califico como exitosa, pues haber construido todos estos conocimientos y el descubrir mis áreas de oportunidad me hacen sentirme satisfecha de lo que logré, a tener más interés por indagar en la enseñanza de las matemáticas , pues esto me permitirá desempeñarme adecuadamente y ser competente no solo para la sociedad y mis futuros estudiantes, sino en especial para mí, puesto que, busco ser una profesora preparada, más responsable, comprometida y orgullosa de lo que decidí ser como profesionista.

5.5 REFLEXIONES GENERALES

Este informe de Desarrollo Profesional como ya lo he mencionado, nace del propósito de mejorar mi práctica como profesora de matemáticas, esto mediante la construcción y el fortalecimiento de conocimientos respaldados por la Matemática Educativa. Siendo una experiencia que me dotó no solamente de conocimientos que me ayudaron a superar mis limitaciones, sino también para fortalecer mi desarrollo emocional, pues al construir estos conocimientos, me hizo fortalecer mi seguridad profesional en mi desempeño. Una seguridad que influye en mi actuación y en mis decisiones y que por ende demuestra lo competente en la enseñanza; para diseñar una planeación; para elaborar estrategias de didácticas; para plantear propuestas de mejora en la educación, e incluso, para adoptar el compromiso de la profesión.

Es evidente que el haber experimentado el trabajar mi práctica docente en conjunto con un marco teórico metodológico me trajo resultados muy favorables en mi formación, pues cada uno de los análisis que conforman el ciclo del análisis didáctico, se enfoca en la obtención de varios conocimientos, ligados a la parte teórica y a una se podría decir práctica, ambos orientados a abarcar la mayoría de las habilidades que según los expertos de la Matemática Educativa el profesor debe poseer y poner en práctica en un proceso de enseñanza/aprendizaje.

En mi opinión, el análisis didáctico es uno de los marcos teórico metodológicos ideales para la formación de un profesor, dado que para mí fue de gran utilidad en la solución de mis necesidades en mi preparación. Sin embargo, a pesar de haber construido todos estos conocimientos anteriormente mencionados con apoyo del análisis didáctico, pienso que aún existen algunos que deben pulirse con la práctica yo otros que quizá debo buscar adquirir con apoyo de otras herramientas, puesto que dentro de este marco no trabaja una metodología para construir conocimientos relacionados con la parte emocional del estudiante. Un elemento que en mi opinión también es importante en mí formación y que también influye tanto en mis decisiones como en su proceso de aprendizaje, algo que como profesores nos compete y por lo tanto debemos estar preparados en esta profesión.

Finalmente, espero que la realización de esta a unidad didáctica no solamente sea de utilidad para mi práctica, sino que también lo sea para otros profesores que se encuentren en la misma condición y pese a algunas de las adversidades que surgieron en cada uno de los análisis que conforman esta unidad didáctica, recomiendo a otros profesores con experiencia o en formación busquen combinar su práctica con un marco teórico y la investigación, es decir, que respalden su práctica con un fundamento teórico; que se atrevan a ser parte de este tipo de prácticas; y que se interesen en informarse en proyectos de mejora continua de su formación, ya que el hacerlo puede llegar a fortalecer y enriquecer nuestra preparación como fue mi caso y por consiguiente ser más competentes para nuestros estudiantes.

REFERENCIAS

Acevedo, H. (2015). Enseñanza de factorización, con la ayuda del material didáctico "El álgebra es un juego., *Revista Colombiana de Matemáticas Educativa*, *1*(1), 522-526. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/8560/1/Acevedo2015Ensenanza.pdf

Acevedo, S., Valadez, A. y Vargas, E. (1996). *Matemáticas con aplicaciones Aritmética y Álgebra*. México: McGraw Hill.

Acosta, C. (2017). U*na propuesta de intervención desde el análisis didáctico. la enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Autónoma de Zacatecas. México, Zacatecas.

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, A. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas, *Educación Matemática*, *22*(1), 149-166. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n1/v22n1a7.pdf

Ávila, J. (2017). Usando el cálculo de volúmenes de recipientes para construir significados en la factorización de expresiones cúbicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 30*(1), 773-781. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/12277/1/Avila2017Usando.pdf

Ballén, J. (2012). *El Álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado*. (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Colombia, Bogotá.

Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H., & Amaya, T. (2015). Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 28*(1), 678-684. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10841/1/Baltazar2015Errores.pdf

Barnett, R., Ziegler, M. y Byleen, K. (2000). *Álgebra*. México: McGraw Hill.

Bellos, I. (1999). *Algebra Elemental*. México: International Thomson Editorial.

Boyer, C. (2007). *Historia de la Matemática*. España: Alianza Editorial.

Cañadas, M., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En Universidad de los Andes (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula* (pp. 53-112). Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/11904/

Esparza, L., & Jiménez, A. (2017). El aprendizaje del profesor de matemáticas como campo investigativo. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*, *19*(28), 173-196. doi:10.19053/01227238.6247

Flores, P., Lupiáñez, J., Berenguer, L., Marín, A., y Molina, M. (2011). *Materiales y Recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Flores, P., Gómez, P., & Marín, A. (2013). *Apuntes sobre Análisis de Instrucción. Módulo 4 de MAD*. Documento inédito (Documentación). Bogotá, Universidad de los Andes. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2061/

Flores-Medrano, E., Escudero, D., Montes, M., & Aguilar, A. (2014). *Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK*. España: Universidad de Huelva Publicaciones. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/271205348_Nuestra_modelacion_del_conocimiento_especializado_del_profesor_de_matematicas_el_MTSK

Flores-Medrano, E., Sosa, L., & Ribeiro, C. (2016). Tránsito del MKT al MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras & M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7-11). SGSE: Huelva. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/305937576_TRANSITO_DESDE_EL_MKT_AL_MTSK

Font, V. (2013, septiembre). Un modelo de educación por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas. *7° Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. CIBEM Montevideo, Uruguay.

García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática*, *17*(2), 153-166. Recuperado de http://www.redalyc.org/comocitar.oa?id=40517207

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura.* (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España, Granada.

García, M. S. (2013). Nuevas tendencias de investigación alrededor de la formación de los profesores de matemáticas. En C. Dolores, M. S. García, J. A. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp.73-75). Chilpancingo, Guerrero, México: Diaz de Santos, S. A.

Gascón, J., Bosch, M., Sierra, T. & Ruiz, A. (2014). Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones. *Bolema*, *28*(48), 319-340. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n48/16.pdf

Gallego, E. (2017). *Sistematización de la práctica. La factorización de lo geométrico a lo algebraico* (Tesis de Licenciatura no publicada). Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Colombia, Medellín.

Gellert, U. (2014). La formación de profesores de matemática: hacia una teoría de lo práctico, *Revista Integra Educativa*, *17*(1), 69-81. Recuperado de http://www.scielo.org.bo/pdf/rieiii/v7n1/v7n1_a06.pdf

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *3*(20), 13-31. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/20/Union_020_007.pdf

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas, *Bolema*, 31 (57), 90-113. Doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas, *Investigación e innovación en educación matemática, 7*(3), 251-292. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1537/1/89_Gómez2002Análisis_RevEMA.pdf

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral inédita). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España, Granada.

Gómez, P. (2009). Procesos de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 471- 498. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/2931/293121936022.pdf

Gómez, P., & González, M. (2013). Diseño de Planes de Formación de Profesores de Matemáticas basados en el Análisis Didáctico. En L. Rico., J.L. Lupiáñez, y M. Molina (Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*, (pp. 121-139). Granada: Editorial Comares, S. L.

González. & Eudave, D. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para a enseñanza de los profesores, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(54), 25-45. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2018/54/01.pdf

González, J. L., & Gallardo, J. (2006). Análisis didáctico curricular. Un procedimiento para fundamentar y completar el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas. *X Simposio de la SEIEM.* Huesca, España.

González, J. (2010). Recursos, *Material didáctico y juegos y pasatiempos para matemáticas en Infantil, Primaria y ESO: consideraciones generales*. Málaga: Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

Hurtado, C., & Torres, L. (2015). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. CIAEM, Universidad del Valle, Colombia.

Ibáñez, P. y García, G. (2009). *Matemáticas I Aritmética y Álgebra*. México: Cengage Learning

Kothari, C. R. (2004). *Research Methodology. Methods and Thechniques*. New Delhi: New Age International Publishers

Levenberg, I. & Patkin, D. (2014). The Contribution of In-Service Training Programs to the Professional Development of Mathematics Teachers, *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 7*(1), 93-104. Recuperado de https://www.ijlter.org/index.php/ijlter/article/view/140/53

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España, Granada.

Mejía, M. (2011). La factorización de polinomios de una variable real en un ambiente de lápiz/papel (L/P) y álgebra computacional (CAS) (Tesis de Maestría no publicada). Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática. Santiago De Cali, Colombia.

Montes, M. A., Contreras, L. C., & Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Mora, M., Gutiérrez, F., & Herrera, F. (2013). Primer acercamiento de un análisis didáctico de la recta para el diseño de una propuesta de intervención en el aula desde un enfoque funcional. *1er Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe*. *I* CEMACYC, República Dominicana.

Morales, M. (2008). La factorización de polinomios. Una experiencia docente. Acta *Latinoamericana de Matemática Educativa*. *21*(1), 299- 307. Recuperado de https://clame.org.mx/uploads/actas/alme21.pdf

Morales, I., & Sepúlveda, A. (2006). Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra. *Memorias de XIV Encuentro de profesores de Matemáticas*. (pp. 1-8). Michoacán: UMSNH.

Opsina, M. (2015). *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.

Ponte, J.P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and Practices. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), Vol. 1, pp. 461-494.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M. & Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20*(1), 71-94. Doi:10.12802/relime.17.2013

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas, *REVISTA EMA*, *1* (1), 4-24. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/12341496.pdf

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *SUMA*, *1* (58), 7-23. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/58/007-023.pdf

Rico, L., & Lupiáñez, J. (2010). Objetivos y Competencias en el Aprendizaje de los Números Naturales. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *2*(54), 14-30. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/12342116.pdf

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39–63. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1986/1/Rico_Avances.pdf

Rico, L. (2013). El método de análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*(33), 11-27. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf

Rico, L. & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L., Lupiáñez, & M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*, (pp. 1-23). Granada, España: Editorial Comares, S.L.

Rojas, N., & Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Castañeda, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 17-28). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de http://www.seiem.es/docs/grupos/pna/ActasPNAGranada.pdf

Rojas, N. (2014). *Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en Estudios de Casos* (Tesis doctoral inédita). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Granada, España. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/35199/24462111.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sáenz, C., & Lebrija, A. (2014). La formación continua del Profesorado de matemáticas: una práctica reflexiva para una enseñanza centrada en el aprendiz. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *17*(2), 219-244. doi: 10.12802/relime.13.1724

Salazar, V., Jiménez, S., & Mora, L. (2013). Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización. *Primer Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. ICEMACYC, Santo Domingo, República Dominicana.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129-145. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1722/1/Sanchez2011AReview.pdf

Sánchez, F. (2015). *Diseño y aplicación de una estrategia lúdica para la Enseñanza - aprendizaje de la factorización de polinomios.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia. Colombia, Manizales.

SEP (2017). *Programa de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior*. México: Autor. Recuperado el día 24 de abril de 2018 de: http://www.sems.gob.mx/curriculoems/planes-de-estudio-de-referencia

Socas, M., Camacho, M., & Hernández, J. (1998) "Análisis Didáctico del Lenguaje Algebraico en la Enseñanza Secundaria". *Revista Interuniversitaria de formación del Profesorado*, *2* (32), 73-86. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117980

Solano, S., & Bedoya, E. (2013, septiembre). La unidad didáctica y el análisis didáctico como instrumentos metodológicos de investigación en didáctica de la matemática y formación de profesores: el caso de la derivada. *7° Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. CIBEM, Montevideo, Uruguay.

Solar, H., Ortiz, A., & Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagógicos*, *42*(4), 281-298. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/1735/173553397016.pdf

Sosa, L., & Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

Torres, J., Mora, L., & Luque, C. (2003). Factorización Algebraica. *Memorias XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética*. (pp. 177-185). Santafé de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5992/

Valenzuela-Molina, M., Ramos-Rodríguez, E., González-Plate, L., & Portugal-Villar, J. (2018). El análisis didáctico como base de un curso en la formación inicial de profesores de educación primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *9*(25), 118-137. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ries/v9n25/2007-2872-ries-9-25-118.pdf