UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

DISEÑO DE UN MATERIAL DIDÁCTICO PARA ANALIZAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO FUNCIÓN EN EL NIVEL SUPERIOR

Práctica de Desarrollo Profesional que para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa

con Orientación en el Nivel Superior

Presenta:

Claudia Ivette Hernández Quemada

Directoras de la tesis:

Dra. Carolina Carrillo García

M.C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Zacatecas, Zac., Diciembre, 2018

M.C. Nancy Calvillo Guevara

Responsable del Programa de Maestría en Matemática Educativa

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "*Diseño de un material didáctico para analizar la comprensión del concepto función en el nivel superior*" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. *Claudia Ivette Hernández Quemada*, egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior, cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquélla establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 20 de noviembre del 2018

______________________________________	______________________________________
Dra. Carolina Carrillo García	**M.C. Nancy Janeth Calvillo Guevara**

Dra. en D. Samanta Deciré Bernal Ayala

Responsable del Departamento Escolar

De la Universidad Autónoma de Zacatecas

“Francisco García Salinas”

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre “*DISEÑO DE UN MATERIAL DIDÁCTICO PARA ANALIZAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO FUNCIÓN EN EL NIVEL SUPERIOR*” y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Claudia Ivette Hernández Quemada, egresada de la Maestría en Matemática Educativa, ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 3 de diciembre de 2018

____	____
Dra. Carolina Carrillo García	**M.C. Nancy Janeth Calvillo Guevara**

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 20 del mes de noviembre del año 2018, la que suscribe, Claudia Ivette Hernández Quemada, egresada del Programa de Maestría en Matemática Educativa con número de matrícula 29105858, manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado ***"DISEÑO DE UN MATERIAL DIDÁCTICO PARA ANALIZAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO FUNCIÓN EN EL NIVEL SUPERIOR"*** bajo la dirección de la Dra. Carolina del Rosario Carrillo García y la M.C. Nancy Janeth Calvillo Guevara.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Claudia Ivette Hernández Quemada

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Becaria No. 585797

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a los profesores de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, a los de la licenciatura y maestría, por su apoyo, entrega, paciencia y confianza hacia mí, por ser fuente de conocimiento en mi formación.

Especialmente a las directoras del trabajo: la Dra. Carolina Carrillo García por su entrega y entusiasmo en cada sesión y a la M. en C. Nancy Calvillo Guevara por enseñarme siempre con un amor especial.

Al Dr. J. Marcos López Mojica por ser lector de este trabajo, por sus réplicas en cada uno de los seminarios en que exponía los avances de esta investigación.

A los profesores de las tres diferentes instituciones académicas que pusieron en nuestras manos a sus alumnos para aplicar el material didáctico, por cedernos algunas de sus sesiones dentro de las aulas, sus opiniones y experiencias que contribuyeron a la mejora de la investigación.

A la Dra. Leticia Ramírez Hernández por las facilidades brindadas para la realización de esta investigación. Gracias por su apoyo.

También a mis compañeros y amigos de la generación: Sandra, Claudia, Anahí, Xitlali, Gerardo, Emmanuel, Alex, Jonatan, Christian, Gustavo y Luis Ángel, por cada experiencia vivida junto a ellos.

Dedicatoria

Al Espíritu Santo de Dios por ser fuente de amor, sabiduría y gracia en mi vida, por acompañarme e inspirarme en cada paso. Por darme la oportunidad de vivir, esa brisa suave que se encarga de animarme en cada desánimo y de levantarme en cada una de mis caídas.

A mis padres Ismael y Hortencia, ellos mi gran equipo para vivir cada batalla, sin su entrega y amor no sería posible lo que soy. Gracias papis por confiar en mí. Mis ejemplos de trabajo y lucha.

A mis hermanos Ivonne e Ismael, por animarme y apoyarme, a mis tías y tíos por decirme ¡Sí se puede!

A mis sobrinos César, Ángel y Jacqueline, que han sido unos hijos para mí, mis grandes bendiciones que con su amor puro han sabido enamorarme, a ellos espero que este esfuerzo les ayude de ejemplo.

A mis hermanos de la comunidad de Santo Domingo de la Renovación Carismática Católica en Espíritu Santo, por sus bellas oraciones y bendiciones, especialmente a mi gran amigo y compañero de vida, Eduardo.

RESUMEN

A partir del análisis de investigaciones relacionadas con materiales didácticos se observa la falta de éstos para el estudio de las funciones en el nivel educativo superior; asimismo, se confirma la problemática en torno a la enseñanza y el aprendizaje del concepto función. Ante ello, y considerando las ventajas que un material didáctico concreto ofrece, este trabajo se plantea como objetivo proponer un material didáctico para analizar la comprensión del concepto de función matemática en el nivel superior.

El diseño del material consistió en una adaptación del juego de mesa *Adivina quién*, en el que los personajes habituales se intercambiaron por objetos propios del tema de función, poniendo en juego algunas concepciones, características y propiedades de este concepto que fueron reportadas como dificultades o generadoras de errores dentro de su didáctica; es decir, ya sea en la manera de enseñar y/o de aprender.

Este material didáctico se implementó para su validación y mejora en las aulas de Universidad Politécnica de Zacatecas-Fresnillo; del Colegio Santa Elena Zacatecas; y finalmente, en la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Se utilizó como método la aplicación de dos técnicas para la recogida de datos, por medio de un cuestionario y de bitácoras que registraban el uso del material didáctico. El análisis de resultados de la comprensión del concepto función matemática se hizo confrontando las respuestas de los estudiantes en el juego y en el cuestionario con base en los niveles de comprensión de Perkins.

De los resultados obtenidos, se observaron algunas de las dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de este concepto, tales como: la conversión entre algunos registros de representación o confundir la ecuación con una expresión algebraica. La implementación recurrente en las distintas instituciones también nos brindó elementos para mejorar el material.

Palabras Clave: función, comprensión, material didáctico, representaciones semióticas.

Claudia Ivette Hernández Quemada

ABSTRACT

From the analysis of research related to didactic materials, the lack of these is observed for the study of the functions in the higher educational level, likewise, the problematic around the teaching and learning of the function concept is confirmed. Given this, and considering the advantages that a specific material offers, this work aims to propose a didactic material to analyze the understanding of the concept of mathematical function at the higher level.

The design of the material consisted in an adaptation of the table game Guess who, in which the usual characters were exchanged for objects of the function theme, introducing certain conceptions, characteristics and properties of this concept that were reported as difficulties or generating errors within its didactics; that is, either in the way of teaching and / or learning.

This didactic material was implemented for its validation and improvement in the classrooms of the Polytechnic University of Zacatecas-Fresnillo, Santa Elena School in Zacatecas; and finally, in the Academic Unit of Mathematics, of the Autonomous University of Zacatecas, with students who were studying the second semester of the Degree in Mathematics.

Using as methodology the application of two techniques for the collection of data, by means of a questionnaire and the use of the didactic material. The analysis of the results of the understanding of the mathematical function concept was done by comparing the responses of the students in the game and in the questionnaire based on the levels of understanding of Perkins.

From the results obtained, some of the difficulties that students have in understanding this concept were observed, such as: conversion between some records, confusing the equation with an algebraic expression. He also provided us with elements to improve the material.

Keywords: function, comprehension, didactic material, semiotic representations.

Claudia Ivette Hernández Quemada

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

PRESENTACIÓN

A partir del análisis de investigaciones relacionadas con materiales didácticos concretos se observa que éstos son implementados en contextos que involucran principalmente los niveles educativos preescolar y primaria y ya en menor medida en secundaria y bachillerato; sin embargo, hizo evidente la falta de uso de estos para el estudio de conceptos matemáticos en el nivel educativo superior. Por otra parte, siendo de nuestro interés el concepto matemático función, mediante el análisis de antecedentes se pudo confirmar la problemática en torno a su enseñanza y aprendizaje, así como la importancia de este concepto, básico para el estudio del Cálculo. Ante este panorama, y considerando las ventajas que un material concreto puede ofrecer en la didáctica de las matemáticas, este trabajo se plantea como objetivo proponer un material didáctico para analizar la comprensión del concepto de función matemática en el nivel superior.

El diseño del material consistió en una adaptación del juego de mesa *Adivina quién*, en el que los personajes habituales se intercambiaron por objetos propios del tema de función. Los ítems incluidos se fueron seleccionando por medio del análisis de las concepciones, características y propiedades de este concepto que fueron identificadas y reportadas en resultados de investigación como dificultades o generadoras de errores dentro de su didáctica; es decir, ya sea en la manera de enseñar y/o de aprender.

Con el objetivo de validar y mejorar el material didáctico propuesto, se implementó en contextos reales de enseñanza-aprendizaje en las aulas de la Universidad Politécnica de Zacatecas-Fresnillo (con estudiantes de ingeniería industrial); posteriormente en el Colegio Santa Elena Zacatecas (con dos grupos de nivel medio superior); y finalmente, en la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Zacatecas, con alumnos que cursaban el segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

El fundamento teórico que dio sustento al diseño y la posterior interpretación de los datos recabados estuvo conformado por aspectos de la Teoría de Representaciones Semióticas propuesta por Duval, así también adoptamos la noción de comprensión propuesta por Perkins y, dado que el objetivo final de este proyecto es proponer un material didáctico, se abordaron algunos nociones relacionadas con los materiales didácticos, sus clasificaciones y uso para la enseñanza.

Dentro de los aspectos metodológicos se utilizaron dos técnicas para la recogida de datos con los estudiantes, por medio de un cuestionario y la observación para el uso del material didáctico. El análisis de resultados de la comprensión del concepto función matemática se hizo confrontando las respuestas de los estudiantes en el juego y en el cuestionario con base en los niveles de comprensión de Perkins.

La experiencia obtenida mediante la aplicación del material didáctico propuesto en las diferentes escuelas que nos permitieron el desarrollo de la actividad sirvió para mejorar el diseño del material. Como complemento para dicha mejora, se aplicó también un cuestionario a los profesores de los alumnos que utilizaron el material. En dicho cuestionario, se les preguntó su opinión general acerca del juego y se les solicitó que hicieran las observaciones que consideraran pertinentes en torno a los tiempos de aplicación, el nivel de dificultad de los ítems, ventajas y desventajas al hacer uso del material, entre otros aspectos.

Entre los resultados obtenidos se observaron algunas de las dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de este concepto, tales como: conversión entre algunos registros, dominio y rango de las funciones, confundir la ecuación con una expresión algebraica. También nos brindó elementos para mejorar el material, como la implementación de la bitácora de resultados, donde se pueden analizar las preguntas que hacen los estudiantes al jugar, o algunas reglas que se deben agregar para que los jugadores no elijan su respuesta de manera azarosa.

De manera general, éste es el trabajo que se desarrolló y que se expone en este trabajo recepcional dividido para su presentación escrita en los siguientes apartados:

En el capítulo 1 se hace el planteamiento del problema, presentando los antecedentes en dos apartados principales, uno referente a materiales didácticos y otro en torno a la función.

En el capítulo 2 se planteó el fundamento teórico de la investigación, conformado por la Teoría de Representaciones Semióticas y algunas nociones de comprensión que nos ayudan a interpretar los resultados obtenidos en las aplicaciones, así como lo que entenderemos por material didáctico.

En el interior del capítulo 3 está la metodología, donde se explican las fases que llevó el diseño del material, así como las herramientas que se utilizaron en la aplicación del mismo y para el análisis de datos.

En el capítulo 4 se analizan y se exponen los resultados de las concepciones, errores y obstáculos de los estudiantes, que se obtuvieron en las diferentes aplicaciones del material didáctico, tanto en nivel medio superior así como en superior.

Dentro del capítulo 5 se dan las conclusiones a las que llegamos, después de un análisis de datos, a la par de retomar nuestro objetivo de investigación e hipótesis. También se incluyen algunas recomendaciones para investigaciones futuras y una reflexión desde mi postura como docente, después de la experiencia realizada.

Finalmente, se encuentran las referencias que fueron utilizadas para llevar a cabo la investigación y los Anexos que incluyen las herramientas utilizadas y evidencias de los datos que se obtuvieron en las diferentes aplicaciones.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo presentaremos tres elementos del inicio de nuestra investigación: la motivación inicial del estudio, la revisión realizada de los estudios que nos preceden y, finalmente, una reflexión en torno a lo que consideramos se podía realizar a partir del análisis hecho. Posteriormente, se presenta el planteamiento formal del problema atendido.

1.1. Motivación

Desde que inicié mis estudios en la Licenciatura en Matemáticas, me interesó el uso de materiales didácticos para su enseñanza. Durante ese tiempo participé en varias ocasiones en eventos de difusión y divulgación de las matemáticas, como en el Taller de Difusión Creativa de las Matemáticas, impartido en las instalaciones de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Se trabajaba con estudiantes de 5° y 6° de primaria y 1° de secundaria, se impartían sesiones de dos horas semanalmente, ahí les dábamos a los participantes, 15 minutos de gimnasia cerebral con distintos ejercicios que estimulaban un mejor aprendizaje de las matemáticas, después se les repartían diversos problemas enfocados a un tema en específico por sesión y concluíamos con el uso de un material didáctico que pudiera reforzar el conocimiento visto en la reunión. En ese espacio, pude observar que las personas parecían interesarse en esta ciencia cuando es presentada de una manera informal y que el apoyo de materiales concretos favorecía el aprendizaje de las matemáticas.

Al respecto, según Arrieta (1998) afirma:

> El material [manipulativo] facilita la comprensión y la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, favorece la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática, convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento. (Arrieta, 1998, pág. 107).

Esta premisa suele ser aceptada e implementada con bastante naturalidad en los niveles básicos de enseñanza. Sin embargo, en el nivel educativo superior hay pocos materiales didácticos diseñados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, según Eisenberg (1991), el concepto de función es una de las ideas fundamentales de la Matemática Moderna y es uno de los de mayor dificultad para su enseñanza y aprendizaje. Díaz (2013) confirma y amplía esta idea al afirmar que “el concepto de función es uno de los conceptos fundamentales en la matemática, pero también es uno para el cual los estudiantes tienen problemas para desarrollar una comprensión satisfactoria” (p. 1).

Asimismo, otras investigaciones han analizado las dificultades que tienen los alumnos al estudiar la función: López (2007), por ejemplo, menciona que los estudiantes presentan dudas respecto a las actividades realizadas en clase como la graficación, identificación del dominio y la semejanza con otros conceptos matemáticos como la ecuación. Asimismo, Prada (2015) analiza las dificultades que presentan los estudiantes al abordar este tema y presenta como uno de sus resultados que los estudiantes necesitan un apoyo visual o gráfico para identificar si una expresión es una función.

Finalmente, entre los aspectos que motivaron esta investigación, nos cuestionamos si realmente los estudiantes comprenden lo visto en clases. Hitt (2003) menciona que en la enseñanza tradicional regularmente se privilegia la memorización y la algoritmia y no en sí la comprensión, como podría ser un enfrentamiento del alumno con tareas de conversión de representaciones entre al menos dos registros de representación.

Fue a partir de estas ideas que surgió el interés por analizar la comprensión de los estudiantes en el tema función con ayuda de un material didáctico.

1.2. Antecedentes

Planteado el interés inicial del proyecto, una primera etapa de esta investigación consistió en analizar los antecedentes respecto al concepto función matemática. Esto nos permitió reconocer la importancia del concepto función y de su enseñanza, la diversidad de concepciones en torno a ello, su historia, así como dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes en su aprendizaje.

La búsqueda de trabajos al respecto se llevó a cabo tanto en medios físicos como virtuales. En el caso de los medios virtuales se usaron bases de datos, revistas virtuales y memorias de congresos, entre otras fuentes. Los descriptores empleados para la búsqueda fueron: función, concepciones de los estudiantes, dificultades, secuencias didácticas. Entre los medios físicos, encontramos algunos libros y reportes de investigación. En general, se encontró que se presentan aspectos como: historia de la función, la epistemología de las concepciones en torno al concepto, así como algunas dificultades reportadas.

Una vez analizada la importancia del concepto, dificultades, obstáculos, concepciones, secuencias didácticas e historia en torno a ello, y conociendo las ventajas que ofrecen los materiales didácticos, se decidió que sería pertinente analizar la comprensión del concepto función por medio de uno de ellos. Por ello, también se realizó una búsqueda y análisis de trabajos que permitieran comprender de una manera más formal qué entender por materiales didácticos.

A continuación se presentan algunos aspectos de los trabajos analizados. Se han dividido para su presentación en este escrito en dos apartados, uno correspondiente a la enseñanza de las funciones y otro en torno a materiales didácticos.

1.2.1. Funciones

Se encontraron diversos estudios enfocados al concepto función y a su didáctica. Para su presentación en este escrito han sido organizados en dependencia del tópico atendido: la historia del concepto, las concepciones que han surgido en torno a las funciones a lo largo de la historia y en el salón de clases, algunas de las dificultades más frecuentes en su aprendizaje y finalmente, algunas propuestas didácticas producto de estos aportes.

Historia del concepto función

En Díaz (2013) se presenta un breve estudio de la historia de la función, concepto matemático cuya enseñanza afirma es larga y laboriosa, y que

> …es uno de los conceptos fundamentales en la matemática, pero también es uno para el cual los estudiantes tienen problemas para desarrollar una comprensión satisfactoria. …ya presenta muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones, además de una variedad de conceptos asociados que se manifiestan con diferentes niveles de abstracción (p. 13).

El autor cita a Youschkevitch (1976), quien divide la historia de la función en tres etapas: la antigüedad, la edad media y el periodo moderno, y se apoya en autores como Pedersen (1974), Boyer (1946) y Rüting (1984) para presentar una descripción de cada una de ellas. A continuación presentamos de manera breve lo expuesto por Díaz (2013):

- *La Antigüedad*: En ella considera principalmente la Matemática Babilónica (2000 a. C. – 600 a. C.) y la Griega. Los números considerados por estas civilizaciones sólo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza; el pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de cantidad variable o de una función.
- *La Edad Media*: La cual divide en dos fases: la Fase Latina (500-1200), en la que encontraron soluciones de ecuaciones con una incógnita. Pero la idea de variable no surgió, y no se consideró que una ecuación con dos incógnitas establecía una relación funcional entre dos variables; y la no Latina (1200-1500), en la que los tratados sobre proporciones, desarrollados principalmente por Oresme, representaron una teoría primitiva de funciones en la que ésta tenía que ver con la dependencia de una cantidad variable sobre otra pero les faltó el lenguaje del álgebra con el cual expresar la ley de variación o la correspondencia funcional.
- *El Período Moderno*: sugiere un cambio de una visión estática y discreta a una visión dinámica y continua de la relación funcional. Distingue a partir del siglo XVIII cuatro etapas principales en el desarrollo del concepto de función, que pueden distinguirse por el tipo de definición dada a este concepto, por ejemplo:
    - 1ª etapa. La función es una ecuación o fórmula. Asociada con Euler (1707-1783). "Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión

analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes”.

- 2ª etapa. En 1822 Fourier avanza en la definición del concepto de función, al hacer notar que lo principal era la asignación de valores para la función; que esta asignación fuera llevada a cabo por una o varias fórmulas no era de importancia. “En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única”.
- 3ª etapa. En 1829 Dirichlet llega a formular por primera vez el concepto moderno de función: “y es una función de una variable x, definida en el intervalo $a<x<b$, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia”.
- 4ª etapa. Asociada con Bourbaki (1939). Se caracterizó por la arbitrariedad del dominio y el rango. “Sean E y F dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional en y, si para toda x E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x.

Del análisis de su historia concluye que “la enseñanza del concepto de función ha experimentado un desarrollo análogo al histórico” (Dreyfus, 1990, citado en Díaz, 2013) y reconoce que “algunas de las dificultades que experimentan los estudiantes con el concepto de función se parecen a las ideas que tenían los matemáticos del siglo XVIII”.

Además, Díaz reconoce la importancia del concepto de función y advierte la dificultad de su didáctica, citando la siguiente aportación de Ruíz (1993): “El concepto de función es inherentemente difícil para los alumnos cualquiera que sea el método de enseñanza”.

Concepciones de función

Otros autores categorizan las concepciones que tienen los alumnos al abordar el concepto de función en los primeros semestres del nivel educativo superior.

Lávaque, Méndez y Villaroel (2006) afirman que el término *concepción* lo utiliza con el fin de: “establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las diversas significaciones que le pueden asociar los alumnos” (p. 1). Después de ello, presenta las concepciones en torno a la función que han ido evolucionando históricamente como obstáculos epistemológicos, basándose en el trabajo de Ruíz-Higueras (1998), quien hizo un análisis histórico de las concepciones predominantes:

- *La función como variación*.- "Existe una distancia muy grande entre instinto de funcionalidad y la noción de función" (Ruíz-Higueras, 1998).
- *La función como proporción*.- "Esto conduce a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones" (Ruíz-Higueras, 1998).
- *La función como gráfica*.- "La dependencia se representaba globalmente por toda la figura, predominando entonces la concepción de función como gráfica". (Lávaque *et al.*, 2006).
- *La función como curva*.- "Noción de función, cuando se asocia la gráfica con la trayectoria de puntos en movimiento y no con conjuntos de puntos que satisfacen condiciones en una relación funcional". (Lávaque *et al.*, 2006).
- *La función como expresión analítica*.- Euler del concepto de función, reemplaza el término cantidad hasta ese momento por el de expresión analítica. (Lávaque *et al.*, 2006).
- *La función como correspondencia arbitraria*: aplicación.- "una cantidad es función de otra u otras", aunque no se conozca por qué operaciones atravesar para llegar de una a la otra. (Lávaque *et al.*, 2006).
- *La función como terna*.- terna $f = (A, B, G)$ en donde A, B, G son conjuntos con las siguientes condiciones $G \subset AxB$, $x \in A$, y $\in B$ tal que $(x, y) \in G$. (Lávaque *et al.*, 2006).

En esta investigación, Lávaque y colaboradores también analizan las concepciones de un grupo de universitarios, basándose en que la comprensión implica la articulación coherente entre los distintos registros de representación semiótica. Para ello, aplica a 24 estudiantes una evaluación de seis ejercicios de pasaje entre los diferentes registros, obteniendo los siguientes resultados:

1. La conversión del registro algebraico al gráfico en el caso de funciones lineales y cuadráticas tiene un porcentaje óptimo de respuestas correctas, pero si se trata de la función exponencial y la función racional los porcentajes disminuyen.
2. Las tareas internas al registro algebraico son extensas y aumentan en complejidad se transforman en una dificultad para la conversión entre registros.
3. Los porcentajes más bajos en las respuestas correctas se dan en la conversión entre registros en funciones como la exponencial y la racional con las cuales los alumnos han tenido menos experiencia, lo cual nos induce a pensar que la cantidad de actividades que los alumnos realizan debería considerar este aspecto.

(Lávaque *et al.*, 2006, pág. 3).

Por otra parte, Vanegas (2013) también considera importante estudiar las concepciones de los estudiantes pues afirma que pueden ayudar para proporcionar las bases en un aprendizaje significativo. Aplica como parte de su metodología un pre-test y un pos-test, en los cuales los estudiantes debían graficar tres funciones: una lineal, una cuadrática y una cúbica; cabe aclarar que aplica el mismo test con la finalidad de observar los aprendizajes relacionados con las funciones, antes y después de 80 horas de clases.

En la Tabla 1.1 se presenta la descripción de las concepciones encontradas por Vanegas, con 29 estudiantes de primer semestre de ingeniería en el concepto de función de una variable.

Tabla 1. 1. Concepciones de los estudiantes en torno a la función (Vanegas, 2013, p. 108).

Porcentaje de Estudiantes	Concepción
10.34%	Mantienen la noción inicial, es decir, consideran las funciones como valores que se ubican en un sistema de coordenadas.
17.24%	Las funciones son o representan una ecuación.
51.72%	La función es la relación entre los elementos de dos conjuntos.
10.34%	Integran nueva información.

Prada (2015) inicia citando a algunos de los autores que destacan la importancia de la enseñanza del concepto de función como:

- Eisenberg (1991), quien considera que el concepto de función es una de las ideas fundamentales de la Matemática Moderna y es uno de los de mayor dificultad para su enseñanza y aprendizaje.
- Farfán y García (2005), quienes mencionan que el concepto de función es uno de los esenciales en el estudio del Cálculo en la Educación Superior.

Prada tuvo como objetivo evaluar los distintos elementos que están presentes en la comprensión del concepto de función en los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Francisco de Paula, Santander, Colombia. Para ello utilizó una metodología cualitativa del tipo investigación descriptiva, hizo un estudio de caso con estudiantes que cursan la materia de cálculo diferencial. El instrumento que utilizó constó de nueve ítems en donde se utilizan diversos registros de representación alrededor del concepto de función. Por ejemplo, en el primer ítem el autor presentaba al alumno dos representaciones gráficas con la finalidad de que el estudiante identificara cuál de ellas representaba una función.

Después del análisis, llegó a resultados como: “los estudiantes evalúan si la gráfica representa una relación, en cuyo caso concluyen que ya no es función” (p. 41). Concluye que los estudiantes no tienen un concepto claro de lo que es función y poseen diferentes conceptos entre los cuales destaca:

> Asociación de función con la de par ordenado, asociación de correspondencia única entre pares de elementos e incluso entre pares de conjuntos.
>
> Necesitan un apoyo visual o gráfico más que analítico para comprender si una expresión dada es una función, debido a la carencia de competencias algebraicas.
>
> Una gráfica representa una función si es continua, entendida la continuidad como un sinónimo de secuencia o de no interrupción desconociendo las funciones definidas por partes o a tramos. (p. 42).

Los resultados y conclusiones obtenidos por parte de Prada nos sirvieron de referencia para el diseño de los ítems a incluir en el material que proponemos (*Adivina cuál*), principalmente aquellos que ponen en juego las concepciones de los estudiantes en el tema de funciones. Asimismo, nos ha permitido justificar la importancia del concepto de función en la enseñanza.

Tabla 1.2. Concepciones en la historia (Lávaque *et al*., 2006, pp. 2 y 3).

Desarrollo histórico y epistemológico del concepto de función	
Concepción	**Periodo en que se usó esa concepción o quiénes la usaban**
• Función como *variación* (buscaban regularidades en las tabulaciones de fenómenos naturales para después intentar aritmetizar y generalizar tales observaciones).	Idea en el pensamiento de los babilonios.
• Como *proporción*, la búsqueda de proporcionalidad era la relación privilegiada entre magnitudes variables, es decir, la variabilidad atada a las magnitudes físicas, las cuales se consideraban diferentes a las matemáticas.	Los griegos comparaban longitudes con longitudes, áreas con áreas y volúmenes con volúmenes.
• Como *gráfica*, Oresme traza un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes y para cada instante traza un segmento perpendicular cuya longitud representa la velocidad en ese instante.	Por Oresme en el siglo XIV.
• Como *Curva*, cuando se asocia la gráfica con la trayectoria de puntos en movimiento y no con conjuntos de puntos que satisfacen condiciones en una relación funcional.	Fermat y Descartes en el siglo XVII.

• *Expresión analítica*, definición propuesta por Euler "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes". Se entiende que una función es una combinación de operaciones dada por una expresión analítica.	Bernoulli y Euler siglo XVIII.
• *Correspondencia arbitraria*, a partir del problema de la cuerda vibrante de Euler, surge la noción de correspondencia general: se dice que "una cantidad es función de otra u otras".	Euler en el siglo XVIII y Fourier XIX.
• Como *Terna*, a fines del siglo XIX y principios del siglo XX se llama función a la terna $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{G})$ en donde $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{G}$ son conjuntos con las siguientes condiciones $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{AxB}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, y $\in$ $\boldsymbol{B}$ tal que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{G}$.	Finales del siglo XIX y principios del siglo XX.

Dificultades, errores y obstáculos

El aspecto cognitivo de los estudiantes también ha sido un tema de interés para algunos investigadores, quienes se han interesado en identificar y/o analizar las dificultades, errores y obstáculos que se presentan en torno al aprendizaje de la función. Estos aspectos son de interés para considerar en el diseño del material de este trabajo y los obtienen mediante el diseño y aplicación de algunas herramientas.

García, Vázquez e Hinojosa (2004) aplicaron una prueba a 433 estudiantes de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del estado de Nuevo León, México, con actividades en las que debían pasar algunas funciones del registro gráfico al algebraico y viceversa. Ejemplo de las actividades que implementó son las siguientes:

- Hallar el dominio y rango de una función.
- Confrontar la gráfica de una función con una serie de funciones con dominio y rango correspondientes, para determinar cuál pertenece a la gráfica.
- Identificar valores de la variable independiente dada la gráfica de la misma, mostrando algunos puntos con sus coordenadas correspondientes.

Después de analizar las respuestas de los estudiantes, García obtuvo los siguientes resultados acerca de las dificultades de los estudiantes:

1. Los tres reactivos con mayor porcentaje de error fueron reactivos basados en tareas del paso de registro gráfico al algebraico. Este resultado es una fuerte evidencia de que las mayores dificultades de aprendizaje y dominio del concepto de función se encuentran en esta categoría de tareas.

2. El estudiante utiliza el registro algebraico con muy pocas conexiones con otros registros semióticos.
3. Resumiendo, se demuestra y se documenta que uno de los obstáculos en el aprendizaje es la falta de una conversión congruente entre registros de representación del concepto de función. (García, 2004, pp. 31 y 32).

Por otra parte, López (2007), de Yucatán, México, hace una revisión documental donde observa algunas interrogantes que se hacen los estudiantes: ¿estoy graficando ecuaciones o funciones? ¿El dominio de una función es siempre el conjunto de números reales? ¿Una función es una ecuación, o viceversa? Con base en esta revisión se elaboraron dos instrumentos para emplear conceptos propios de la función y de ecuación. Utiliza como metodología la ingeniería didáctica.

Dentro del capítulo de análisis e interpretación de resultados afirma que los estudiantes presentan las siguientes características:

- Confusión entre función y ecuación.
- Falta de discernimiento en la identificación de funciones y ecuaciones (una ecuación que representa a una gráfica).
- Concebir el conjunto de los reales como el dominio de cualquier función (el dominio de una función es siempre el eje de las abscisas).
- Identificar una relación funcional entre dos conjuntos en los que no existe (se limitaban a marcar los elementos repetidos en ambos conjuntos dados).
- Describir las variables por medio de las literales usualmente empleadas (escribieron, x, y).

Algunas de las actividades que aplica López (2007) se utilizaron dentro de nuestro instrumento para aplicar, extrayendo el sustento que se da en cada actividad.

En el contexto argentino, Oviedo (2005) analizó las dificultades que presentan dos grupos de alumnos pertenecientes a los niveles medio y universitario acerca del concepto de función. Para ello aplicó una evaluación diagnóstica a estudiantes con edades de 17 a 20 años, con actividades en las que debían reconocer funciones representadas en distintos registros, como las siguientes:

- Clasificar algunas de las funciones representadas gráficamente en lineales o cuadráticas.
- Indicar el dominio y el conjunto imagen de determinadas funciones.
- Señalar en la gráfica los puntos de intersección de dos funciones.
- Calcular, analíticamente, los puntos de intersección de las gráficas de dos funciones.

Producto del análisis realizado en las investigaciones anteriores, se resumen en la Tabla 1.3. Las dificultades que presentan los estudiantes, con la siguiente clasificación: procedimentales, conceptuales e incompletas.

Tabla 1. 3. Listado de dificultades

Dificultades procedimentales y conceptuales	Autor
• Dificultades en tareas de pasaje de registro gráfico al algebraico (poca relación con otros registros). (Conceptual).	García, Vázquez e Hinojosa (2004) Jaimes (2012) Lávaque *et al.*, (2006)
• Concebir el conjunto de los reales como el dominio de cualquier función (el dominio de una función es siempre el eje de las abscisas). (Conceptual). • Falta de discernimiento en la identificación de funciones y ecuaciones (una ecuación que representa a una gráfica). (Conceptual). • Identificar una relación funcional entre dos conjuntos, en los que no existe (se limitaban a marcar los elementos repetidos en ambos conjuntos dados). (Conceptual). • Describir las variables por medio de las literales usualmente empleadas (escribieron $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$). (Procedimental). • Identificación de curvas como funciones, cuando no lo son (indicaron que una parábola horizontal puede ser catalogada como la gráfica de una función). (Procedimental). • Graficando y operando funciones como si fueran ecuaciones. (Procedimental). • Los alumnos recurrían a un procedimiento algebraico para localizar los puntos "clave" para la correcta graficación. (Procedimental).	López (2007)
Listado de dificultades conceptuales (equivocadas o incompletas)	**Autor**
• Las funciones son ecuaciones o representan una ecuación. • Una relación entre los elementos de un conjunto. • Valores que se ubican en un sistema de coordenadas.	Vanegas (2013)

Propuestas didácticas

Se encontraron también algunos aportes dirigidos hacia la enseñanza del concepto función a manera de propuestas didácticas. Por ejemplo, García (2004) diseñó una secuencia con ejercicios relacionados con el concepto de la función en el nivel superior, en la cual los estudiantes deben pasar de una representación a otra, es decir del registro algebraico al gráfico. Su estrategia fue confrontar a los estudiantes con ejercicios de una ecuación con su representación gráfica.

Jaimes (2012) hace un análisis epistemológico acerca del concepto de función para proponer una secuencia didáctica que indica puede ser aplicada en los primeros semestres del nivel educativo superior. Su propuesta consistía en inducir el concepto de función a través de problemas matemáticos, teniendo en cuenta el comportamiento de los valores de una tabla, la gráfica o la ecuación y usando como herramienta la modelación matemática.

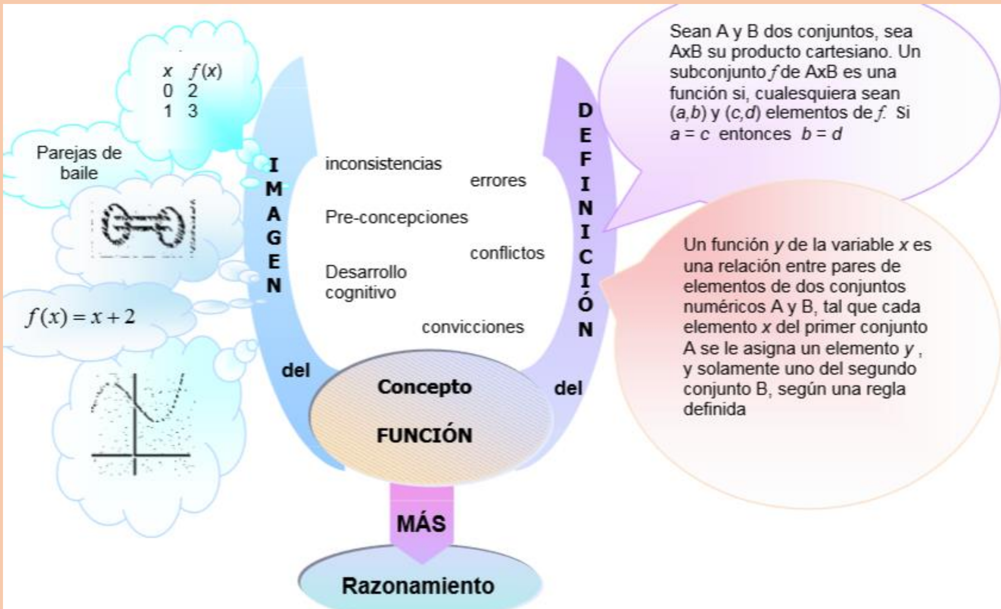
Cantoral y Montiel (2001) proponen el tema de función matemática en una enseñanza contemporánea, llevando del excesivo tratamiento algebraico de las funciones hacia la visualización, donde ésta se entiende como un proceso del pensamiento matemático. En este libro presentan secuencias con los distintos métodos de representar las funciones (tabulación, transformaciones, operaciones, análisis matemáticos y gráficos); secuencias diseñadas, según afirman los autores, a lo largo de diez años con base en el análisis de un carácter múltiple en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México.

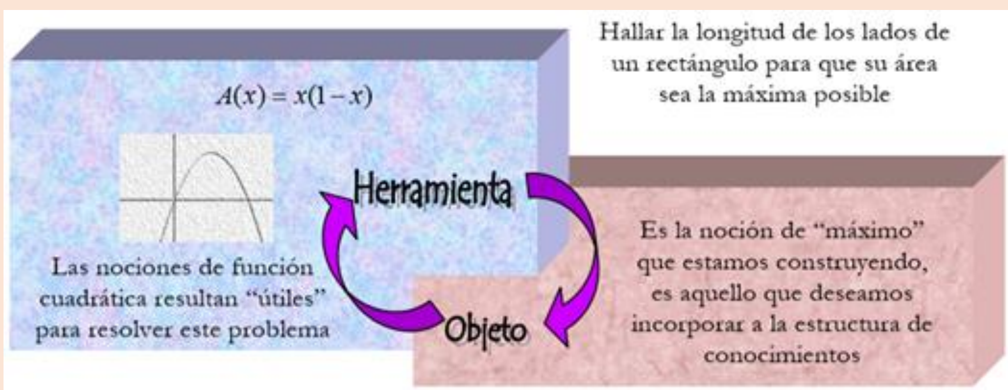
Marcos teóricos

Entre las investigaciones que han tenido como objeto de estudio a la función se pueden observar distintas posturas teóricas. A continuación presentamos algunas de ellas.

Ferrari (2001) hace un estudio sobre la función logarítmica desde el punto de vista de la Socioepistemología. El planteamiento de su problema de investigación lo empieza presentando un análisis del concepto de función desde distintas perspectivas teóricas. En la Tabla 1.4 se resume esta parte de su trabajo, que evidentemente es de nuestro interés para comprender el tratamiento que se ha dado a este concepto desde la investigación.

Tabla 1. 4 Resultados de investigaciones de diferentes perspectivas teóricas acerca del tema de función (Ferrari, 2001).

<table>
<tr><th>Marco teórico</th><th>Esquemas de aspectos considerados desde la investigación con ese marco teórico</th></tr>
<tr><td>Imagen conceptual versus definición del conceptog (Vinner y Tall, 1981)</td><td>


Esquema en torno al aprendizaje del concepto de función
</td></tr>
<tr><td>Dialéctica Herramienta – Objeto y Juego de contextos (Douady, 1986)</td><td>


Esquema herramienta – objeto para el caso de función
</td></tr>
</table>

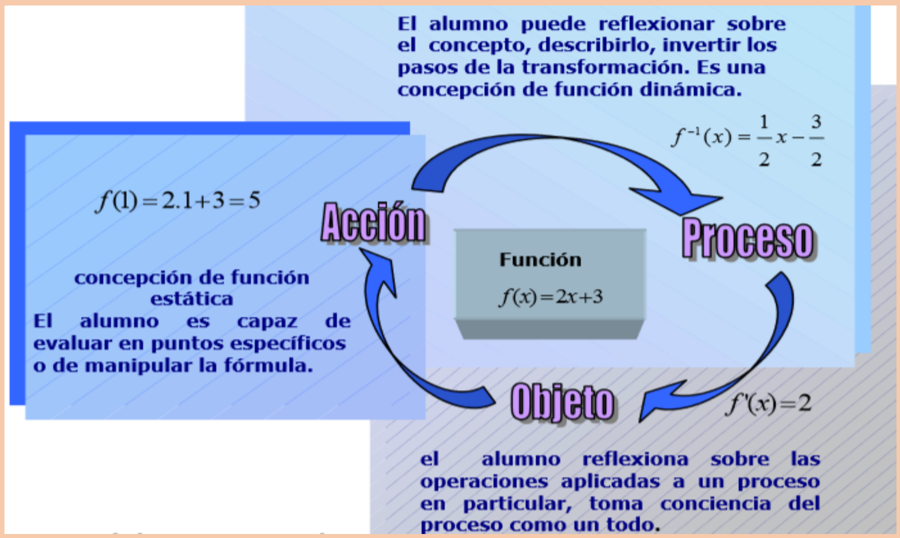
<table>
<tr>
<td>Proceso-Objeto. APOE
(Dubinsky ,1991)</td>
<td>

Los alumnos asocian el concepto de función con un proceso calculatorio, es decir, con una manipulación de variables.

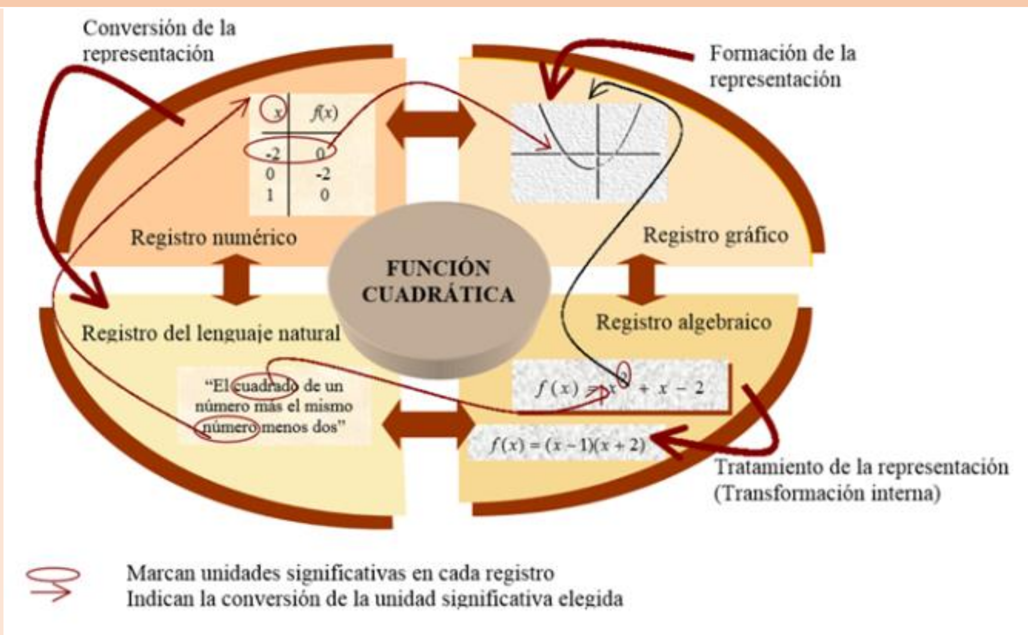
Confunden el proceso de construir un conjunto de pares ordenados con la función misma.

Requieren de una regla bien definida que puedan expresar mediante un gráfico o fórmula.

Creen que gráficas discontinuas representan varias funciones.



</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones Semióticas
(Duval, 1999)</td>
<td>



Esquema de la articulación de registros semióticos para el caso de función cuadrática

</td>
</tr>
</table>

Por otro lado, Ruíz (1998) en su tesis doctoral realiza un análisis epistemológico y didáctico del concepto función. Utiliza como fundamento y marco conceptual la transposición didáctica, que toma como centro de atención los cambios que se dan del saber científico o saber sabio al saber a enseñar.

Desde su postura, la noción de concepción epistemológica en Didáctica de las Matemáticas, "puede referirse a la evolución histórica de los objetos del saber matemático, así como en los programas oficiales y libros de texto de los alumnos" (Ruíz, 1998, p. 49). Para analizar las concepciones de los estudiantes respecto a la función toma las definiciones de Vinner y otros investigadores de *imagen conceptual* y *definición conceptual*, las cuales presenta como:

Imagen conceptual.- un conjunto de esquemas mentales asociados a dicho concepto. (Vinner y Dreyfus, 1989, p. 356). Donde incluyen imágenes del concepto por ejemplo en función los símbolos "$f(x)$", "$y =$ ".

Definición conceptual.- conjunto de palabras que se usan para especificar lo que es un concepto. (Vinner y Tall, 1981, p. 152).

Ruíz, en el análisis epistemológico y didáctico, concluye describiendo siete tipos de concepciones: relación entre magnitudes variables, razón o proporción, gráfica, curva, expresión analítica, correspondencia arbitraria y función como terna.

Este primer apartado dentro de la revisión de antecedentes nos ha permitido tener una visión más amplia del trabajo realizado en la investigación en Matemática Educativa con respecto al concepto función.

1.2.2. Materiales didácticos

Los trabajos que se abordarán en los siguientes párrafos fueron considerados de interés, dada la relación con la propuesta de intervención planteada. Algunos de ellos han permitido establecer un lenguaje común en torno a los materiales didácticos, aspecto que se profundizará en el capítulo 2 correspondiente a los referentes teóricos; otros tienen una metodología similar a la que se pretende utilizar en nuestra investigación, además de que los resultados obtenidos en estas investigaciones nos dan una mayor referencia de lo que se ha hecho en torno a esta temática y lo que aún falta por hacer, como se verá reflejado en la reflexión en el apartado final de esta sección.

El uso de materiales didácticos sustentado por la NCTM

Boggan (2010), en su investigación titulada *Using manipulatives to teach elementary mathematics,* afirma que los materiales deben ser usados dentro del aula en cualquier nivel educativo y que esta idea es apoyada por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés). Señala que aunque algunos de los profesores se niegan a usarlos dentro del aula, porque consideran que es una pérdida de tiempo implementarlos, otros profesores lo consideran una oportunidad para construir su propio conocimiento.

Presenta una breve historia acerca de los materiales señalando su uso desde los babilónicos con el ábaco chino, el cual posiblemente es una adaptación del ábaco romano. Dentro de esta historia se menciona también a Friedrich Froebel en el año de 1837 con el uso de materiales como los bloques geométricos.

Por otro lado, Kelly (2006), en el artículo *Using Manipulatives in Mathematical Problem Solving: A Performance Based Analysis*, se enfoca hacia el uso de materiales a partir de la resolución de problemas, es decir usando los pasos de la resolución de problemas: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Y menciona, al igual que Boggan, el respaldo de la NCTM en torno al uso de materiales didácticos.

Nociones relacionadas con material didáctico

Uno de los aspectos que se encontraron al hacer la revisión de investigaciones relacionadas con los materiales didácticos fue que existen varios términos que se utilizan tanto en el ámbito de la investigación como en el cotidiano, que se vinculan con la noción de material didáctico e incluso se usan de manera indistinta, como sinónimos. Ejemplo de ello son recursos didácticos, materiales, herramientas, manipulables, material concreto, entre otros. Ante ello, cabe incluir algunas de las definiciones o caracterizaciones que de estos términos se encontraron en dichos trabajos.

Recurso tecnológico

- Todo aquello, objetos, aparatos o medios de comunicación, que puede ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje. (Alsina, 1988, citado en Arrieta, 1998).

Material

- Todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje. (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988, citados en Mendoza (s.f.); Velasco, 2012 y Valenzuela, 2012).

Material didáctico

- Todo objeto, juego, medio técnico, etc. capaz de ayudar al alumno a suscitar preguntas, sugerir conceptos, o materializar ideas abstractas. (Álvarez, 1996, p. 9, citado en Mendoza (s.f.) y Velasco, 2012).
- Los objetos usados por el profesor o el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemáticas con el fin de lograr unos objetivos didácticos programados, es decir, aquellos objetos que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases del aprendizaje. (Cañadas, 2002, p. 3).

Materiales manipulativos

- Este término es el más usado en la literatura anglosajona, *manipulatives,* para hacer referencia a los materiales didácticos concretos.
  Todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico (estructurado), que el alumno pueda tocar directamente con sus manos, además de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones. (Valenzuela, 2012, p. 24).

Materiales curriculares

- Propuestas para la elaboración de proyectos educativos y curriculares de centro; propuestas relativas a la enseñanza en determinadas materias o áreas, o en determinados niveles, ciclos o etapas; propuestas para la enseñanza a alumnos con necesidades educativas especiales; descripciones de experiencias de innovación curricular; materiales para el desarrollo de unidades didácticas; evaluaciones de experiencias y de los propios materiales curriculares, etc. (Parcerisa, 2005, p. 26, citado en Gairín, 2010).

Categorías

Cascallana (1999) y Velasco (2012) clasifican los materiales en estructurados y no estructurados. Los materiales *estructurados* son aquellos diseñados especialmente para la enseñanza de las matemáticas. No son figurativos y suponen una mayor capacidad de abstracción, pero son previos al uso exclusivo de los signos numéricos. Los materiales *no estructurados* son todos los que el niño puede manipular, sin ser necesariamente creados con fines matemáticos, como por ejemplo juguetes.

Morales (2012) los clasifica del tipo modelo o maqueta, según el órgano receptor y audiovisuales.

Según González (2010) se puede clasificar en tres categorías: 1) materiales manipulativos y no manipulativos. 2) A partir de los bloques contenidos matemáticos, por ejemplo en el contenido correspondiente a geometría y medida, se pueden utilizar, tangrams, construcciones geométricas, geoplanos, geoespacios y espejos. 3) Según su utilidad o finalidad.

Ventajas y desventajas

Uno de los aspectos por los cuales surge el interés de trabajar con materiales didácticos en esta investigación es la motivación que puede generar entre los estudiantes. Sin embargo, cualquier profesor que se interese en integrar a su práctica docente alguna innovación debe ser consciente de las ventajas pero también de las desventajas que esas modificaciones pueden conllevar con respecto a la enseñanza tradicional.

Respecto a las *ventajas* de incluir materiales didácticos, algunos autores mencionan:

- Arrieta (1998), "facilita la comprensión y la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, favorece la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia la matemática, convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento". (p. 107).
- Cañadas (2002), "permitir mayor independencia del alumno respecto al profesor, conectar las matemáticas con el entorno físico del alumno, favorecer un clima de participación en el aula, y el trabajo en equipo… refuerza el conocimiento y el aprendizaje significativo". (p. 4).
- Gairín (2008), "Aproximar al alumno a la realidad de lo que se quiere enseñar". "Motivar a la clase". "Facilitar la percepción y la comprensión de los hechos y de los conceptos". "Concretar e ilustrar lo que se está exponiendo oralmente". "Economizar esfuerzos para conducir a los alumnos a la comprensión de hechos y conceptos". "Contribuir a la fijación del aprendizaje a través de la impresión más viva y sugestiva que puede provocar el material". "Dar oportunidad a que se manifiesten sus aptitudes". (pp. 60 y 61).
- Carrillo (2010), "Comprobar intuitivamente una propiedad o descubrirla, relacionar la geometría con el álgebra y el aritmética". (p. 185).
- Velasco (2012), "Para favorecer la adquisición de rutinas. Para modelizar ideas y conceptos matemáticos. Para plantear y resolver problemas". (p. 4).
- Mendoza (s.f.) señala que los materiales sirven para:

  Para favorecer la adquisición de rutinas. Para modelizar ideas y conceptos matemáticos. Para plantear problemas. Permite la reflexión y análisis de procedimientos y resultados, proporciona oportunidades para que los estudiantes muestren sus concepciones erróneas, acerca de determinados conceptos matemáticos, desarrolla la motivación y potencia la capacidad creativa de los estudiantes. (pp. 3 y 4).

Por otra parte, consideramos que al realizar un trabajo en el que se contemple dentro de la metodología el uso de materiales didácticos también se deben considerar algunas de las *desventajas* que estos autores advierten respecto a su implementación:

- Mendoza (s.f.): "No garantiza la comprensión de los sujetos". (p. 6).
- Godino (2003) advierte acerca de:

  …las dificultades de aprendizaje del software o la calculadora si el alumno no está familiarizado con el mismo. Ello puede ocasionar que el tiempo, ya limitado, para la enseñanza de la matemática se invierta en el aprendizaje de la tecnología. Por ello se recomienda usar recursos fácilmente manipulables que no añadan complejidad innecesaria a la actividad matemática. (p. 142).
- Valenzuela (2012): la sofisticación del material (complejidad del objeto), utilización del material por el docente y no por el alumno, poca cantidad de materiales, la no adecuación del concepto presentado por el material, creer que el material ya asegura la adquisición de un concepto, falta de recursos para obtener materiales.

- Velasco (2012) proporciona una lista de desventajas a considerar: Dificultades económicas; Dificultades estructurales; Excesivo número de alumnos y alumnas; Las concepciones previas de alumnos y alumnas, profesores y profesoras y padres y madres como "los juegos se realizan en el patio", "los juegos generan mucho ruido", "las buenas clases son aquellas donde reina el silencio"; las exigencias del desarrollo curricular: Los programas, que hay que acabar, pueden suponer enemigos irreconciliables del uso de material didáctico.

Se puede observar que existe una sugerencia de uso de los materiales desde un organismo reconocido como la NCTM así como desde diversas investigaciones. Aunque apoyamos la postura de que su inclusión puede aportar beneficios en la enseñanza, también somos conscientes de que ésta debe hacerse de manera formal y cuidadosa y considerando las desventajas advertidas por las investigaciones precedentes.

1.2.3. Reflexión

A partir de la revisión acerca del concepto de función se analizaron distintas investigaciones relacionadas con su enseñanza, tratando diferentes tópicos, algunos en el nivel educativo medio superior y otros en superior. Lo que se puede extraer de estas investigaciones como apoyo para la presente es lo siguiente:

- Conocer la historia de la función. Fue interesante conocer la génesis de este concepto y las circunstancias que se suscitaron para llegar a su definición, así como la antigüedad que tiene desde antes de Cristo, con las diferentes nociones que ya utilizaban para asociar elementos. Se puede observar que la mayoría de las dificultades que se presentaron a lo largo de la historia son similares a las que aparecen en el aula con los estudiantes en el momento de su enseñanza/aprendizaje.
- La implementación de un material didáctico favorece la motivación de los estudiantes. Siendo la función un concepto difícil de aprender e importante dentro del cálculo, esto nos motiva a aportar un material didáctico para la verificación de la comprensión de los alumnos en este concepto.
- Observamos que existen diversas concepciones alternativas respecto al tema de función. Esto nos brinda un horizonte desde dónde partir en nuestro diseño, para la elección de aquellas concepciones más usuales que pueden provocar alguna dificultad en su comprensión. Por ejemplo, la hipérbola se ha presentado en cursos anteriores a cálculo como una función, esta idea se fija en los estudiantes quienes se niegan a dejar de verla como una función aun cuando ésta es rotada.
- Algunos ítems de las investigaciones se tomarán como referencia para diseñar nuestro material. Específicamente los ejercicios que tienen un dominio discreto

y los que cambian de la representación algebraica a la geométrica y viceversa, pues consideramos que una manera de verificar si el estudiante efectivamente está comprendiendo el concepto es que éste pase de una representación a otra con las menores dificultades.

El análisis de antecedentes del concepto de función nos lleva a tener una visión más completa y amplia acerca de lo que se ha estudiado en esta área, así como ideas para retomar o mejor no tomar.

Respecto a la revisión de trabajos en torno a materiales didácticos se observó que los investigadores manejan algunos términos que pueden parecer similares dado su uso para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, mencionamos uno de los más comunes: material y recurso, por señalar una diferencia que existe entre ellos sería que los primeros fueron elaborados con fines educativos exclusivamente de un tema y los segundos no necesariamente. De las definiciones de material didáctico, observamos que los autores acuden recurrentemente a la de Alsina, Burgués y Fortuny (1988), presentada anteriormente.

En cuanto a las ventajas y desventajas de usar los materiales didácticos dentro del aula, en las investigaciones se hace más hincapié en las ventajas. Entre los ejemplos más comunes se encuentran: la motivación, el desarrollo de competencias que el currículo pide al profesor que desarrolle en sus estudiantes, comprobar intuitivamente alguna propiedad o descubrirla. Entre las desventajas más comunes están: que no garantizan la comprensión de los sujetos, el costo puede ser elevado, si nos enfocamos en la tecnología, ésta podría acarrear que el alumno no sepa manejarla y puede llevar más tiempo en enseñar su uso que enseñar el concepto mismo.

Por medio del constructivismo, la enseñanza tradicional sufre un cambio. Y en este sentido, un aspecto que considero necesario resaltar en el uso de materiales didácticos es el papel del profesor: el maestro debe estar convencido de su uso y no verlo como una pérdida de tiempo o algo de relleno dentro de la clase y que lo considere como extra respecto al currículo. Cuando los profesores están muy arraigados dentro de la enseñanza tradicional lo que no se encuentra dentro de ella pudieran verlo con cierto rechazo.

En opinión personal el leer documentos que hablaban de la historia de los materiales didácticos rompió algunos mitos que tenía acerca de su novedad. Me di cuenta de que éstos han estado ahí desde la antigüedad, sin embargo, en mi caso no había tenido mucho contacto con ellos. Por mencionar algún autor que aborde los materiales en la trayectoria histórica, Comenius alrededor del año de 1630 propone que el conocimiento se adquiere y tiene origen con los sentidos, pues los objetos hay que mostrarlos no describirlos. Entre otros autores más cercanos en la línea del tiempo tenemos a Rousseau y Montessori.

Otro punto para abordar es la diferencia del uso de materiales didácticos en el nivel básico con el nivel superior, ya que la complejidad de los temas es diferente, mientras que en un nivel su objetivo es dar una noción de los conceptos matemáticos en otro nivel más elevado se tiene que enseñar a mayor profundidad. El hecho que los temas sean más complejos no significa que el material a usar lo sea también, sino que éste debe ser accesible y de uso fácil para no destinar más tiempo en la explicación de cómo usar el material que en el propio contenido matemático.

Finalmente, aunque el uso de materiales didácticos es antiguo, cabe destacar que la mayor parte de la investigación se enfoca en primaria, secundaria y bachillerato, hay poca investigación sobre este tema en el nivel educativo superior. Consideramos que uno de los motivos por los cuales existen pocos materiales en el nivel superior podría ser que en ocasiones se cree que los alumnos de la universidad ya se encuentran motivados; otra razón pudiera ser el trabajo que involucra el diseño de materiales para conceptos cada vez más complejos o abstractos; además, es sabido que en los niveles bachillerato y superior, principalmente, se tiende a implementar el uso de la tecnología (que también es un material didáctico) para favorecer la comprensión. Sin embargo, más allá de indagar sobre la razón por la cual casi no tenemos materiales didácticos *concretos* en estos niveles, pensamos que cualquiera que sea el nivel educativo debe de existir un impulso para aprender, una motivación y sostenemos que los materiales didácticos la propician. Como lo describimos en párrafos anteriores, éstas son algunas de las bondades que los materiales ofrecen, es por eso que creemos importante el uso de materiales didácticos en el nivel superior, además que éstos también pueden ser de apoyo en la evaluación del estudiante.

1.3. Planteamiento del problema

1.3.1. Problemática

Según Arrieta (1998), el material facilita la comprensión y la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, favorece la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática. Eisenberg (1991), considera que el concepto de función es una de las ideas fundamentales de la Matemática Moderna y es uno de los de mayor dificultad para su enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo, existe poco material didáctico para utilizarse en el nivel educativo superior, y más aún dentro del tema de funciones matemáticas. Los materiales que se encontraron están relacionados principalmente con el uso de algún software.

1.3.2. Pregunta de investigación

¿Qué características debe tener el material didáctico con el fin de analizar la comprensión del concepto de función matemática?

1.3.3. Objetivo general

Proponer un material didáctico para analizar la comprensión del concepto de función matemática en el nivel educativo superior.

1.3.4. Objetivos particulares

- Diseñar una primera propuesta del material didáctico, con base en:
  - Características de los materiales existentes.
  - Análisis de errores, obstáculos, dificultades y concepciones alternativas que presentan los estudiantes.
  - Propuestas didácticas en torno a la enseñanza del concepto función.
  - Aspectos didácticos escolares de la función.
- Implementar la secuencia.
- Mejorar el diseño.

1.3.5. Hipótesis

Las características que debe tener el material didáctico, para que cumpla el objetivo de analizar la comprensión del concepto de función en el nivel educativo superior, son:

- Contemplar las distintas representaciones (Geométrico, algebraico, tabular y lenguaje verbal).
- Confrontar las posibles concepciones alternativas de los estudiantes.

1.3.6. Justificación

Se reportan diversidad de investigaciones de funciones, diferentes obstáculos y dificultades al abordar el tema. Un material diseñado con base en los resultados de investigación puede ser un auxiliar dentro de la evaluación que el profesor realiza en el aula. Además el hacer uso de los materiales didácticos por las bondades que estos ofrecen, tal es el ejemplo de la motivación y el apoyo para descubrir ideas nuevas.

Por ejemplo, los estudiantes consideran que algunas funciones no lo son por el simple hecho que su representación geométrica representa trazos de dos o más partes; tal es el caso, por ejemplo, de la función de la parte entera, que se muestra en su representación geométrica en la Figura 1.1.

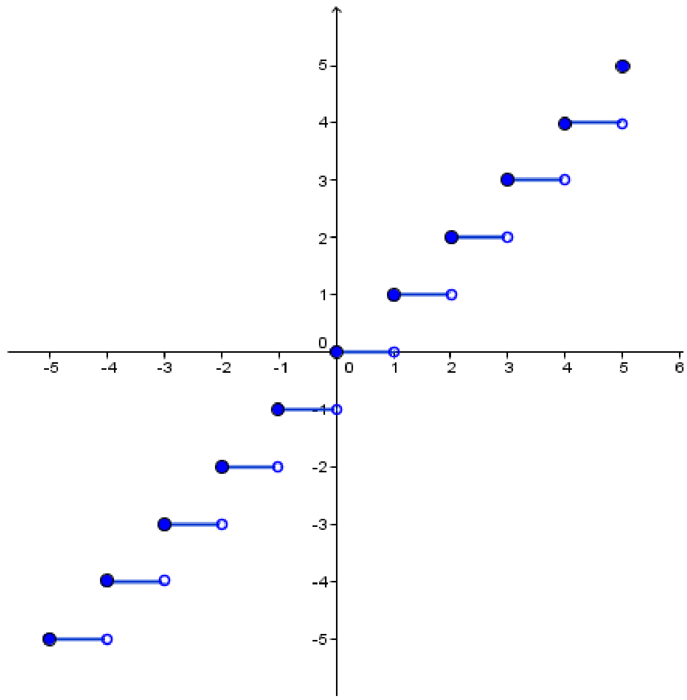


Figura 1. Función parte entera

Consideramos que el diseño puede ayudar al profesor como punto de partida desde el cual abordar el tema, así como al estudiante para identificar y reflexionar acerca de sus propias dificultades. Por otra parte, puede ser de ayuda para los docentes del nivel superior ya que les permitiría tener una herramienta alternativa para el análisis de la comprensión de este concepto de una manera quizá más atractiva para los estudiantes.

Por otro lado, según Arrieta (1998), el material facilita la comprensión y la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, favorece la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática. Sin embargo, existen muy pocos materiales didácticos en el nivel educativo superior. Este material puede incidir en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de función, no sería memorístico y algorítmico además permite visualizar elementos de la matemática y motivar a los estudiantes.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTO TEÓRICO

Para conformar el marco referencial de esta investigación nos basamos en algunos aspectos de las Representaciones Semióticas. Dado el objetivo planteado, es importante también incluir qué se entenderá por comprensión y cómo se pretende analizar. Y por último, con el fin de establecer un lenguaje común, se incluyen también algunas definiciones relacionadas con los materiales didácticos.

2.1. Representaciones Semióticas

La noción de *representación* aparece en el panorama de la psicología desde sus inicios como disciplina, a principios del siglo pasado. Diversos autores la han mostrado como centro de su reflexión.

- *Representación mental* (1924 - 1926).- Piaget recurre a esto como la <u>evocación de los objetos ausentes</u>.
- *Representación interna o computacional* (1955 - 1960).- Uno de los iniciadores fue Broadbent y se concibe desde las teorías que privilegian la transformación que hace un sistema de las informaciones que recibe para que produzcan una respuesta adaptada, es decir, como una <u>codificación de información</u>.
- *Representación semiótica* (1985).- desde el marco de la educación matemática, en particular considerando los problemas de aprendizaje, se presenta como el <u>cambio de la forma en que un conocimiento está representado</u>.

La Teoría de Representaciones Semióticas, desarrollada por Duval (1999), sostiene que la actividad matemática se realiza necesariamente con representaciones, a las que concibe como: "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación el cual contiene sus propios constreñimientos de significancia y funcionamiento". (Duval, 1999, p. 14).

Para entender un concepto matemático es necesario una representación de él, y más aún si se quiere adquirir una comprensión es preciso pasar de un registro a otro. Si el estudiante se queda con un solo registro trabajando o adquiriendo habilidades, podría quedarse con la representación, y no con los propios conceptos. "No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación". (Duval, 1999, p. 13).

Por ejemplo, en el tema de nuestra investigación, si en el material didáctico se trabaja únicamente con ítems de un solo registro como el geométrico, sería difícil analizar si el estudiante en realidad está comprendiendo o sólo adquirió un conocimiento del concepto de función.

Los registros de representación fundamentales son: lenguaje natural, tabular, algebraico y geométrico.

Existen tres actividades que son necesarias en toda representación, que son: constituir una marca o un conjunto de marcas, transformar y convertir.

- *Constituir una marca o un conjunto de marcas:* Que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
- *Transformar: L*as representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que pueden constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
- *Convertir:* Las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Duval afirma "no hay noesis sin semiosis, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis". Entendiendo por *Semiosis la* aprehensión o producción de una representación semiótica y por *Noesis* los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia. (Duval, 1999, p. 13). Con esto, Duval defiende la idea de que para poder comprender los conceptos matemáticos por naturaleza abstractos, no concretos, se precisa partir de una representación semiótica que permita exteriorizar las representaciones mentales que se forman en torno al mismo.

Hay tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis y son: la formación de transformaciones, tratamiento y conversión.

- *Formación de transformaciones:* En un registro semiótico particular, ya sea para "expresar" una representación mental, o bien para "evocar" un objeto real.
- *Tratamiento:* Cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro.
- *Conversión:* Cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

(Duval, 1999, p. 40).

Un ejemplo de transformación y conversión se da en la siguiente figura, en el concepto de función matemática.

Figura 2. Ejemplo de las tres actividades cognitivas del concepto de función.

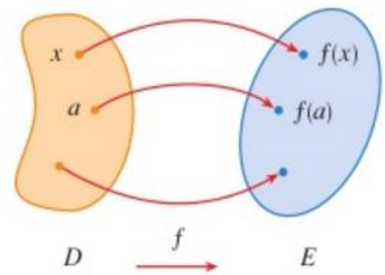
<table>
<tr>
<td>Representación
Una función f es una regla que asigna a cada elemento del conjunto D, exactamente un elemento llamado $f(x)$, de un conjunto E.</td>
<td>Conversión


Gráfico
$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ Analítico</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Tratamiento

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evaluar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

SOLUCIÓN Primero evalúe $f(a+h)$ sustituyendo x mediante $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto al sustituir en la expresión que se proporciona y simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$
</td>
</tr>
</table>

Duval hace recomendaciones acerca de los criterios de congruencia entre representaciones.

- Correspondencia semántica de los elementos significantes, toda unidad que depende del léxico de un registro.
- Univocidad semántica terminal, a cada unidad significante elemental de salida le corresponde una de llegada.
- Orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones, las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones, (pertinente cuando éstas tienen el mismo número de dimensiones).

Puede no haber congruencia fallando un solo criterio.

(Duval, 1999, pp. 50 y 51).

2.2. La noción de Comprensión

Para poder definir el concepto de comprensión, se presentarán dos nociones que según Perkins (1999) se relacionan con ella y que regularmente los profesores pretenden desarrollar en los alumnos en las escuelas: el conocimiento y la habilidad. Se entiende por *conocimiento* la información respecto a un tema, en el caso particular de las matemáticas podríamos entender como conocimiento las definiciones, propiedades, teoremas o características. La *habilidad* es el desempeño de rutina, por tanto algunas de las tareas que podríamos considerar habilidades en matemáticas podrían ser la aplicación de algoritmos, resolver problemas o demostrar teoremas. A partir de estas nociones, Perkins (1999) define *comprensión* como "la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe" (p.1). Y en ese sentido aunque el conocimiento y la habilidad son necesarios para comprender, esto va más allá de poseer información o desarrollar tareas rutinarias.

A manera de experiencia, puedo compartir cuando estaba cursando la secundaria nos basábamos en las habilidades, es decir una matemática de algoritmos y si éstos estaban bien desarrollados, entonces se tenía la idea que éramos buenos para las matemáticas. Ahora, en la Maestría Profesionalizante en Matemática Educativa he aprendido que es más que aplicar un algoritmo, sino una comprensión a fondo, no por el hecho de haber aprendido a aplicar un algoritmo puedo asegurar que ya sé matemáticas. Más bien a partir de conocer algunos teoremas, definiciones, propiedades, extraer ese conocimiento y aplicarlo.

Tomando la definición que propone Perkins (1999), ¿qué es la comprensión? Es la

Habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe.

Por ejemplo: cuando el estudiante tiene la siguiente expresión, y el trabajo que realiza es sustituir para ciertos valores de x, podríamos decir que tiene habilidades y conocimientos del tipo que la función es una relación entre dos magnitudes.

$$f(x) = x + 5$$

$x = 1$ $\quad f(1) = 1 + 5 = 6$

$x = 19$ $\quad f(19) = 19 + 5 = 24$

$x = 28$ $\quad f(28) = 28 + 5 = 33$

En cambio, si en la siguiente expresión logra ver que es la función de la parábola trasladada cinco unidades hacia arriba, el estudiante ya habrá pensado y extraído conocimientos anteriores, y podríamos decir que el estudiante está comprendiendo.

$$f(x) = x^2 + 5$$

Para apreciar que se ha comprendido un tema se puede solicitar al estudiante que realice algunas tareas/acciones que den evidencia de ello, tales como pasar de una función en su representación gráfica a representación algebraica.

> Dos ideas surgen de estas observaciones de sentido común. Primero, para apreciar la comprensión de una persona en un momento determinado, se le puede pedir que haga algo que ponga su comprensión en juego, explicando, resolviendo un problema, construyendo un argumento, armando un producto. Segundo, lo que los estudiantes responden no sólo demuestra su nivel de comprensión actual sino que lo más probable es que los haga avanzar. Al trabajar por medio de su comprensión en respuesta a un desafío particular, llegan a comprender mejor. Además cuando un estudiante no puede ir más allá de la memorización y el pensamiento y la acción rutinarios, esto indica falta de comprensión. (Perkins, 1999, p. 4).

Después de haber analizado la definición de comprensión, nos surgen las siguientes cuestiones ¿cómo lograr que el estudiante comprenda las funciones?, ¿qué actividades permiten/promueven el desarrollo de la comprensión? O ¿por qué se marca al inicio de clases como objetivo, que el alumno comprenda, cuando en realidad sólo se le dota de habilidades y conocimientos?

Ahora en el papel de profesores ¿Por qué no comprendieron los alumnos? De lo que se pudiera dar respuesta es que probablemente las actividades o ejemplos no fueron los indicados para alcanzar un nivel distinto a las habilidades y retención, reafirmando con lo que se dice en Perkins (2003) para desarrollar la capacidad de comprensión se necesita algo más que un método superior. "Hace falta enseñar algo más y algo distinto. Para mejorar la capacidad de comprensión, debemos enseñar otro tipo de cosas" (p. 80).

Para dar respuesta a algunas de estas preguntas, Perkins (2003) hace referencia a algunas actividades que pueden generarla entre los estudiantes, así como la relación de imágenes mentales con la comprensión y define cuatro niveles de ésta, mostrados en la Tabla 2.1:

Tabla 2.1. Hacia una pedagogía de la comprensión, de Perkins (2003, pp. 82 - 90).

Niveles de comprensión	Actividades de comprensión
a) Contenido.- Conocimiento referente a datos y procedimientos de rutina, las actividades no son de comprensión sino de repetición.	a) La explicación b) La ejemplificación c) La aplicación d) La justificación
b) Resolución de problemas.- Resolver problemas expresados en lenguaje ordinario.	e) Comparación y contraste f) La contextualización
c) Epistémico.- Se generan explicaciones y justificaciones.	g) La generalización

d) Investigación.- Se construyen nuevos conocimientos.	

Estas siete actividades que describe Perkins (2003) puedan dar muestra de que un estudiante está comprendiendo.

Por ejemplo, en nuestro caso con el concepto de función, si un alumno justifica por qué cierta expresión es una función, de acuerdo a su definición, si es capaz de construir un ejemplo que cumpla con las condiciones de ser una función, podemos afirmar que está comprendiendo, al realizar tareas como ejemplificación o justificación.

Una imagen mental es un tipo de conocimiento holístico y coherente; cualquier representación unificada y abarcadora que nos ayuda a elaborar un determinado tema (p. 8). Perkins (2003) señala que las imágenes mentales están en correspondencia con la comprensión ya que éstas nos permiten indagar lo que puede suceder con cierta lógica, es decir a partir del conocimiento que se tiene y con la ayuda de las imágenes mentales poder dar una conjetura. Por ejemplo, si un estudiante tiene la imagen mental de una parábola $f(x) = x^2$, cuando el profesor le pregunte por la representación gráfica de la función de $f(x) = x^2 - 2x - 8$, éste podrá llegar a la respuesta con la ayuda de la imagen mental de la función anterior.

Por último, en los niveles de comprensión se puede tener como referencia en el momento de analizar la comprensión del estudiante, es decir qué tanto ha comprendido el tema, por ejemplo en el nivel dos que corresponde a la resolución de problemas con un lenguaje ordinario, podría parecer al cambio de registro de representación, es decir del lenguaje verbal pasar al lenguaje numérico o gráfico para poder resolver los problemas.

2.3. Materiales didácticos

En el capítulo uno se explicó y se presentaron algunas definiciones relacionadas con materiales didácticos, como recurso, materiales, material curricular y material manipulable.

Dentro de la misma revisión de lo anterior, pudimos analizar algunas de las definiciones específicamente de materiales didácticos. La que adoptamos dentro de nuestra investigación es la propuesta por Álvarez (1996): “es todo objeto, juego, medio técnico, etc. capaz de ayudar al alumno a suscitar preguntas, sugerir conceptos, materializar ideas abstractas” (p. 9). Ya que fue una de las que nos pareció más completa y que se adaptaba a la idea de implementar el juego como un material didáctico que nos permitiera observar la comprensión.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se expone el camino seguido para el alcance de los objetivos planteados. En primera instancia se define el tipo de investigación, los aspectos contemplados para el diseño de la propuesta, las aplicaciones realizadas para su validación y mejora y, finalmente, aspectos sobre la aplicación realizada para analizar la comprensión de los estudiantes.

3.1. Tipo de investigación

Como se mencionó anteriormente, una primera etapa de la investigación consistió en la revisión de trabajos previos relacionados con los tópicos propios del interés de la investigación, como función matemática.

Es necesario reconocer que el análisis de la comprensión del concepto función se puede realizar por otros medios, tales como un examen, preguntas en clase u otra opción, pero hemos elegido realizarlo por medio de un material didáctico concreto y un cuestionario, dado que existe la hipótesis de que los primeros promueven la motivación, la participación del estudiante y los segundos para tener un análisis más profundo de cada estudiante. Además, se triangularon los resultados obtenidos. Recordemos que, según Cohen (2007), la triangulación es “el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano” (p. 142).

Dadas las características de los datos que se esperan obtener, esta investigación puede considerarse del tipo cualitativa, que según Kothari (2004) “se ocupa de fenómeno cualitativo, es decir, los fenómenos relacionados con la calidad o tipo” (p. 3).

3.2. Diseño de la propuesta

Para el diseño del material a utilizar se contempló lo obtenido en el análisis de antecedentes. Los resultados reportados por las investigaciones previas nos brindaron un panorama acerca de las posibles dificultades y errores que los estudiantes podrían presentar al abordar el concepto función.

Por otra parte, también se consideraron aspectos oficiales de su enseñanza, es decir, desde su planteamiento dentro del plan de estudios hasta el discurso del profesor a cargo de la unidad didáctica que lo contiene.

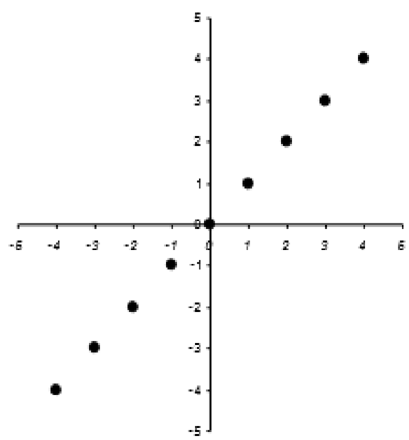
Finalmente, previo a la aplicación final con un grupo de nivel superior, se implementó el prototipo con 2 grupos de estudiantes para de esta forma validar los ítems seleccionados y contemplar aspectos que pudieran mejorar el diseño.

3.2.1 Análisis de antecedentes

En la revisión de antecedentes del concepto de función se enfatizó en aquellos estudios que reportaran: concepciones en torno a la función, algunos obstáculos, errores y dificultades que los estudiantes presentan al abordar el tema y propuestas de secuencias didácticas. Después de dicha revisión se seleccionaron aquellos ejercicios de funciones y no funciones en los que los estudiantes suelen presentar nociones erróneas. Por ejemplo:

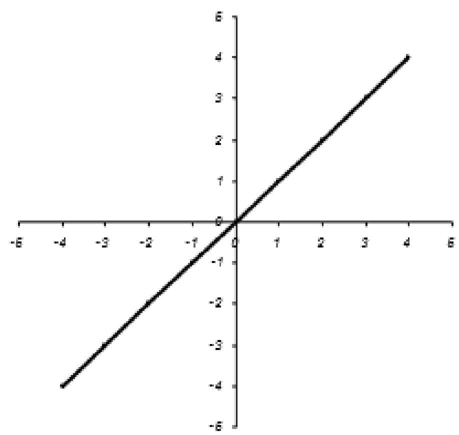
iii. Marca con una X la(s) gráfica(s) que represente(n) una función.

a)



Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores enteros

b)



Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores reales

¿Por qué elegiste esa(s) gráfica(s)? ______________________________

Figura 3. Problema de cuestionario para alumnos, (López, 2007, p. 68).

En la Figura 3 Se presenta un ejemplo de uno de los problemas en que los estudiantes suelen tener dificultades, debido a que generalmente consideran que el dominio de una función debe pertenecer siempre a un conjunto continuo.

También se encontraron propuestas para enseñar el concepto de función en el nivel educativo superior. En una de ellas se introducía el concepto de función desde lo más trivial, es decir ejemplos y ejercicios de funciones constantes y polinómicas, continuaban con trigonométricas para finalizar con exponenciales y logarítmicas.

La mayor parte de la propuesta didáctica se manejaba en representación algebraica y numérica.

3.2.2 Análisis del plan de estudios

Ante nuestro interés en analizar la comprensión de los estudiantes con respecto a la función, hicimos una revisión del Programa de la unidad didáctica de Cálculo contenida en el Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas impartida en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Se analizó su ubicación dentro de la asignatura, los conocimientos previos, la definición del concepto, así como sus propiedades para poder llevar a cabo el estudio.

En los conocimientos previos se encontraron:

Propiedades de las operaciones aritméticas (suma y producto, división, potencia, leyes de los exponentes), de los logaritmos, de las exponenciales en los números reales, relación de igualdad y sus propiedades como relación de equivalencia.

Se encontraron tópicos en los semestres como:

a) Primer semestre, Precálculo.- dominio e imagen de las funciones elementales (constante, lineal, cuadrática, exponencial, entre otras más), representación de las funciones elementales en los diferentes registros (tabular, analítico, gráfico y verbal), transformación de funciones a través de variación de parámetros (traslaciones verticales y horizontales) y clasificación de funciones inyectivas y sobreyectivas.
b) Segundo semestre, Cálculo diferencial.- dominio, rango, continuidad, crecimiento y decrecimiento, diferentes registros de representación.

Identificando que en el primer semestre en la materia Precálculo, es donde se introduce por primera vez la noción de función, junto con definición y rango de éstas. Aquí se da un primer encuentro de las dificultades de los estudiantes, que se describen en algunas investigaciones.

3.2.3 Análisis de la didáctica

En los meses de octubre y noviembre (2017), participé como observadora en las clases de Precálculo que se impartieron en el Auditorio de la Unidad Académica de Matemáticas, con alumnos de primer semestre en un horario de 8:00 a.m. a 9:00 a.m.

La didáctica de la profesora para impartir la clase radicaba primero en algunas definiciones junto con ejemplos, ejercicios en las cuatro representaciones (tabulares, geométricas, algebraicas y verbales); cabe señalar que la docente hacía énfasis en el uso de representaciones. También, incluyó la visualización de los elementos matemáticos, con ayuda del Software Geogebra, resolución de problemas contextualizados como la función lineal modelando el comportamiento de una función que modela el crecimiento de un bebé en sus primeros meses de vida. Se presentaban casos particulares hasta llegar a la generalización de los conceptos.

En el caso de la enseñanza del tema función, la docente fue mostrando primero el producto cruz, después algunas relaciones entre conjuntos, para posteriormente inducir poco a poco a la definición de función, de la siguiente manera:

Dados dos conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{R}$ se define una función de A en B como una relación que tiene la característica: "a cada elemento de A se relaciona con uno y sólo un elemento de B"

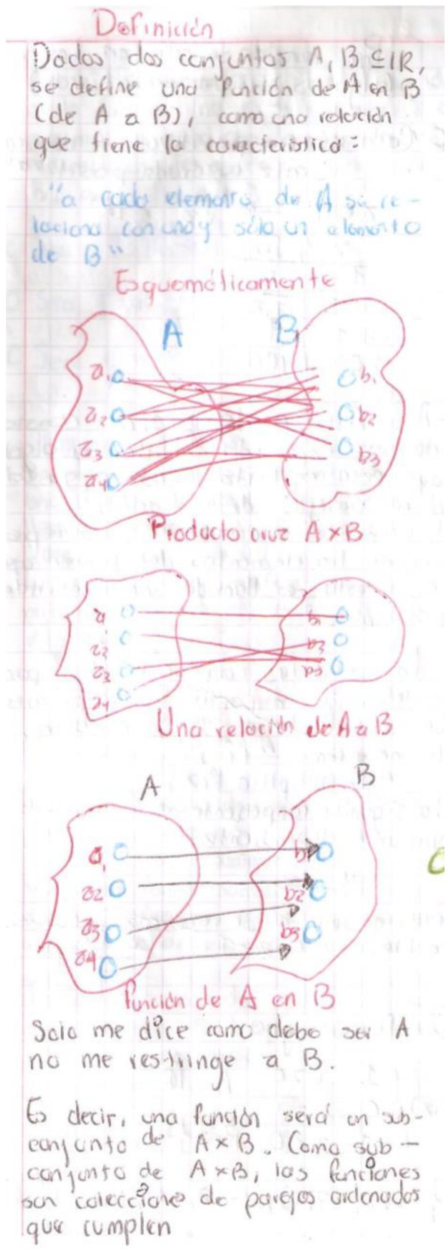


Figura 4. Apuntes de la clase de Precálculo.

3.2.4 Prototipos

Por otro lado, en el diseño del material didáctico se hizo una exploración de éstos y algunos juegos. Se optó por el juego "Adivina quién" por su característica de elección dicotómica de la respuesta a las preguntas planteadas, así como el uso de la lógica y estrategia. Las instrucciones del juego son:

1) Formular preguntas que se puedan responder con un "sí" o un "no".
2) Una pregunta a la vez, por jugador.
3) Podrán adivinar el ítem del jugador contrario, hasta que el estudiante tenga dos objetos matemáticos en el tablero.
4) Gana el primero que descubra el personaje misterioso del jugador contrario.

Figura 5. Juego original ¿Adivina quién?

En el diseño del material didáctico se cambiaron los personajes del juego por ítems de prototipos de funciones elegidos de propuestas didácticas de otros investigadores o por su dificultad reportada. Tal es el caso, por ejemplo, de las funciones por partes, un punto en el plano, algunas funciones discontinuas (ya que los estudiantes tienden a relacionar la función con la continuidad), entre otras (Ver Anexo 2). Además se decidió presentarlos en sus cuatro representaciones, dada la postura de Duval de que si el estudiante es capaz de manipular como mínimo dos de las representaciones de las funciones, significa una mejor comprensión del concepto.

En una primera aproximación, se realizó un tablero con una cartera de huevos en la cual se hicieron aberturas para colocar los objetos (ítems de funciones recortados y pegados en rectángulos de cartulina), como se muestra en la Figura 6.

Figura 6. Primer prototipo

Otro prototipo del material didáctico es el que se muestra en la Figura 7, manteniendo la misma idea del tablero del juego de mesa. Este material se elaboró con madera, se le pidió a un carpintero su elaboración. Presenta una mejor resistencia y permite ver claramente los objetos matemáticos.

Figura 7. Segundo prototipo

Algunas de las preguntas que se consideraron dentro del juego previo a su aplicación fueron:

¿Tu objeto se encuentra en representación geométrica? ¿Tu objeto se encuentra en representación tabular? ¿Tu objeto se encuentra en representación algebraica? ¿Tu objeto tiene asíntotas? ¿Tu objeto es una función? ¿El dominio de tu función es…? ¿El rango de tu función es...? ¿Tu función es creciente? ¿Tu función es decreciente? ¿Tu función es inyectiva? ¿Tu función es sobreyectiva? ¿Tu función es biyectiva?

3.2.5 Validación

También se consideraron otras dos puestas en escena del material didáctico en diferentes contextos de la UAM. La primera de ellas en la Universidad Politécnica de Zacatecas, ubicada en Fresnillo, Zacatecas. La segunda aplicación fue en el Colegio Santa Elena, con dos grupos de cuarto semestre de preparatoria, en diferentes módulos cada uno.

3.3. Análisis

La recogida de la información se llevó a cabo mediante la observación de los estudiantes y junto a las definiciones que se presentaron anteriormente en el marco referencial de comprensión.

Tabla 3.1. Niveles de comprensión.

Nivel de comprensión	Descriptor	Actividad del alumno
Contenido	Conocimiento referente a datos y procedimientos de rutina, las actividades no son de comprensión sino de repetición.	Identificación de funciones prototipo como la identidad. Contestar preguntas relacionadas con describir definiciones y propiedades.
Resolución de Problemas	Resolver problemas expresados en lenguaje ordinario.	El alumno resuelve problemas en el lenguaje matemático. Como definir si las expresiones matemáticas son funciones.
Nivel epistémico	Se generan explicaciones y justificaciones.	En los problemas resueltos el estudiante realiza explicaciones y justificaciones de sus conocimientos.
Nivel de investigación	Se construyen nuevos conocimientos.	El estudiante resuelve problemas que hacen cambios de representación.

Se consideran la confiabilidad y la validez de la investigación vía la observación, ya que como afirman Hernández, Fernández y Baptista (1997): “La observación consiste en el registro sistemático, válido y confiable de comportamientos o conducta manifiesta. Puede utilizarse como instrumento de medición en muy diversas circunstancias” (p. 316).

Al final, se reflexionó sobre los resultados obtenidos, comparando con nuestros objetivos e hipótesis, definiendo los alcances que se tuvieron, así como las debilidades y sugerencias que se pueden hacer en las investigaciones posteriores.

3.3.1 Población de estudio

La población final de este estudio fue un grupo de 2° semestre de la Licenciatura en Matemáticas y se llevó a cabo la actividad en el semestre de enero-junio de 2017. En un lapso de dos módulos aproximadamente, donde en el primer módulo se implementó el material didáctico, es decir se organizaron los equipos que participaron en las partidas. En un segundo módulo se hizo la aplicación de un cuestionario congruente con los ítems del material didáctico.

Se llevaron al aula dos tableros como los de la Figura. 2 del prototipo, con los respectivos ítems que se presentarán más adelante. Además fue posible desarrollar el estudio en el periodo previsto de tiempo, aplicando y analizando resultados.

Puesta en práctica

La metodología descrita anteriormente da respuestas al objetivo planteado en esta investigación. Porque se interactúa con el estudiante y se pueden analizar las respuestas. Por ejemplo, sean dos estudiantes a y b que se encuentran jugando, con el siguiente dialogo:

- Alumno a : ¿Tu objeto es inyectiva?
- Alumno b: ¡Sí!

En este momento, el profesor puede observar las tarjetas que los estudiantes seleccionan para seguir en el tablero como inyectivas, ya sea en el registro gráfico o algebraico, cual sea el caso que se haya elegido en el juego. De esta manera analizará si tienen la noción de lo que es inyetividad, en los dos participantes.

- Alumno *b:* ¿Tu elemento es una función?
- Alumno *a:* ¡No!

Entonces se deberían de descartar todas aquellas expresiones que efectivamente no sean una función, pero si algunas que no cumplen con serlo permanecen en el tablero, se podría decir que aún no identifica bien la definición del concepto (esto se analiza en los dos jugadores). Sucesivamente ambos pueden ir preguntando características y conceptos de las expresiones hasta llegar a descubrir el objeto matemático del jugador contrario.

Así se pretendió que los estudiantes jueguen con el material didáctico, con las diferentes características de cada expresión, el profesor puede observar a cada uno de sus alumnos y analizar qué tanto comprendió del tema.

Una segunda etapa de análisis se dio por medio de un cuestionario, conformado con base en los ítems que lleva el tablero del material didáctico. Se aplicó después de haber jugado con la finalidad o ventajas de:

- Al aplicar los dos métodos, en el cuestionario se pueden analizar las ideas de los estudiantes más desarrolladas, es decir, durante el juego el alumno puede afirmar que un objeto matemático es función con un sí, pero al estar dentro de la dinámica de un juego su justificación puede no ser clara. El uso de ambos métodos de toma de datos permitió contrastar las respuestas y verificar aquellas que dieron en el juego Adivina cuál.

- Al confrontar al estudiante con los dos métodos, se puede triangular, es decir, hacer el uso de dos técnicas para la recogida de datos. Para comprobar que las respuestas no fueron acertadas en *Adivina quién* por azar, por ejemplo, si se le pregunta al alumno:
  - A1 ¿Tu objeto es una función?
  - A2 No.

Si la respuesta del alumno dos, no fue razonada y sólo se respondió por no dejar de contestar y además éste acierta a la respuesta, entonces nos deja muy abierto el análisis de si el estudiante realmente está comprendiendo específicamente en esa respuesta.

3.3.2. Herramientas

3.3.2.1. Ítems

Como se había mencionado anteriormente los ítems que se colocaron en los 18 espacios del tablero del material didáctico que llamaremos Adivina cuál, fue una recopilación de algunos problemas o actividades de las investigaciones que se analizaron en la etapa de antecedentes, principalmente de Prada (2015) y López (2007). También se incluyeron ejercicios y ejemplos que se tomaron de la libreta de apuntes de la materia de Precálculo, que se mencionó anteriormente.

De entre los contenidos reportados del plan de la Unidad Didáctica, se incluyeron problemas que cuestionan al estudiante acerca de las diferencias de función con ecuación, dominio y rango de funciones, gráficas por trozos, en distintos registros de representación.

3.3.2.2 Cuestionario

El cuestionario fue elaborado con base en los ítems del material didáctico pero de tal manera que los estudiantes resuelvan más explícitamente los problemas. El cuestionario está conformado por diez preguntas, divididas de la siguiente manera:

- Tres de ellas en representación verbal, donde el estudiante tiene que dar muestra de sus conocimientos en las definiciones de función de dominio y rango de una función, así como función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
- Otras tres están en representación gráfica, donde el alumno debe identificar cuáles gráficas representan una función.
- Por último, cuatro problemas están en representación algebraica con un nivel de dificultad diferente que los anteriores, pues el estudiante debe ser capaz de transitar por lo menos en dos representaciones para poder resolverlos.

3.3.2.3. Bitácora

El estudiante puede escribir las preguntas que va haciendo en cada partida del juego, en cada uno de los renglones de la bitácora, así como marcar la respuesta que le dio el jugador contrario (sí o no). También podrá tachar el número de ítem que descartó en cada movimiento.

3.3.2.4. Cuestionario de profesores

Con la finalidad de conocer la opinión de los profesores de los grupos a los que se les aplicó el diseño, se elaboró un cuestionario, que contiene preguntas relacionadas con la opinión en general que se tiene del material didáctico, así como fortalezas y debilidades que ellos puedan señalar, según su experiencia y sugerencias para la mejora.

3.4. Análisis de datos

En este apartado se describe el análisis que se hizo previo a la aplicación de cada herramienta conforme a nuestro fundamento teórico, ubicando algunas de las posibles respuestas en algun conocimiento, concepción o los distintos niveles de comprensión.

Enseguida se muestra un pre analisis de respuestas que pudieran dar lo estudiantes en la aplicación del cuestionario que va después de algunas jugadas con el material didáctico.

Cuestionario

1. ¿Qué es una función? Da un ejemplo.

Tabla 3.2. Análisis de datos, pregunta uno.

Conocimiento	Concepción	Comprensión (contenido)
• Aquella expresión que tiene $\boldsymbol{f(x)}$. • Relación entre elementos de un conjunto. • Es una correspondencia de conjuntos de números. • Es la correspondencia de dos puntos en dos grupos distintos. • A todo $\boldsymbol{x}$ le pertenece un sólo número de $\boldsymbol{y}$. • Es cuando una recta pasa sólo por un punto de $\boldsymbol{x}$, si la recta pasa por dos puntos deja de ser función.	• Un par ordenado • Una gráfica • Una ecuación	Dados dos conjuntos A,B ⊆R, se define una función de A en B, como una relación que tiene la característica: “A cada elemento de A se relaciona con uno y sólo uno de B” Es una fórmula que dice que a cada conjunto de A le corresponde uno y sólo uno del conjunto B.

2. ¿Qué es el dominio y rango de una función?

Tabla 3. 3. Análisis de datos, pregunta dos, dominio de una función.

Conocimiento	Concepción	Comprensión (contenido)
Un conjunto. Los valores de salida.	Toda la recta real. El eje de la x. Valores enteros.	Las x en $\mathbb{N}$ tal que $f(x)$ tiene sentido (las x que puede sustituir de manera directa en la regla de asignación).

Tabla 3. 4. Análisis de datos, pregunta dos, rango de una función.

Conocimiento	Concepción	Comprensión (contenido)
Los valores de llegada. Un conjunto.	Todo el eje y. Todos los reales. Números reales que se toman en una gráfica.	Los números y que obtenemos al calcular $f(x)$ (los valores obtenidos luego de sustituir o reemplazar x).

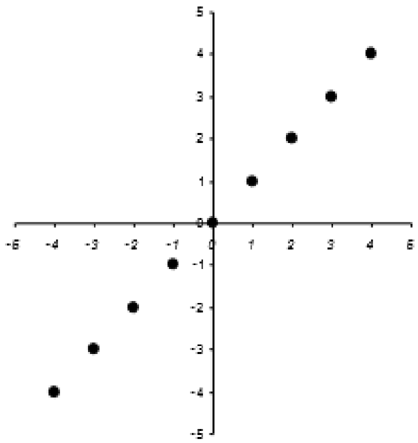
3. ¿Qué significa que una función sea inyectiva, sobreyectiva y biyectiva?

Tabla 3. 5. Análisis de datos, pregunta tres.

Conocimiento	Concepción	Comprensión (contenido)
Uno a uno Correspondencia	Cada valor del dominio tenga solo uno del contradominio.	f se dice inyectiva, si cada $y \in B$ se ha puesto en relación bajo f con uno y sólo un elemento de $x \in A$. f se dice sobreyectiva en B, si cada y en B se ha puesto en relación bajo f, con al menos un elemento de $x \in A$.

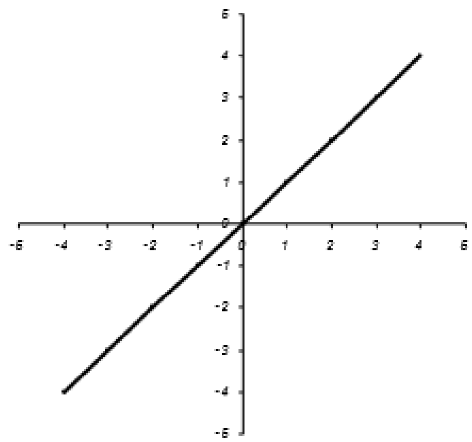
4. ¿Cuál gráfica representa una función?

a)



Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores enteros

b)



Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores reales

Tabla 3.6. Análisis de datos, pregunta cuatro.

Conocimiento	Concepción	Comprensión
La identidad siempre es una función.	La gráfica con dominio en todos los reales.	Contenido.- Se observa que pasando una barra vertical toca sólo un punto, por lo tanto las dos imágenes son funciones. Epistémico.- Las dos gráficas representan una función, ya que cumplen con la definición de que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del rango.

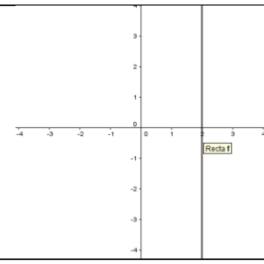
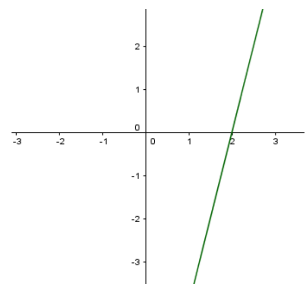
5. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa una función? (Grafica tu respuesta)

Tabla 3.7. Análisis de datos, pregunta cinco.

Conocimiento	Concepción	Comprensión
Le corresponde más de un valor a cada elemento del conjunto de salida. Pasa solo por un punto. Pasa la prueba de la línea vertical.	Una función se representa con $f(x)$.	Epistémico.

Comprensión nivel Epistémico

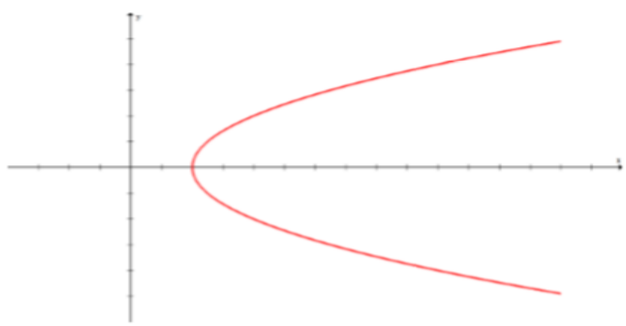
Tabla 3.8. Comprensión del nivel epistémico, pregunta cinco.

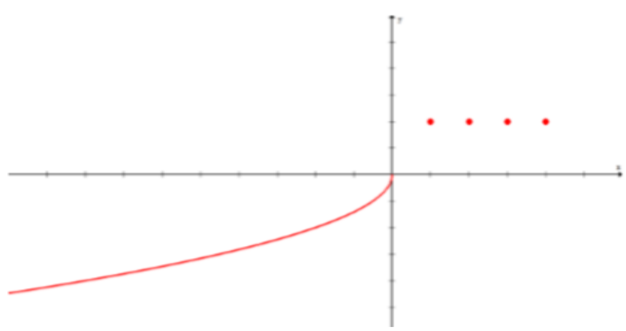
Expresión	¿Es función?	¿Por qué?	Gráfica
$4x - 8 = 0$	No	Es una ecuación, dónde la x toma valores de una incógnita.	
$f(x) = 4x - 8$	Sí	Una variable depende de otra es una relación, además es una función porque solo toma un valor al sustituir cuaquier real en x.	

6. Identifique cuál de las siguientes representaciones es una función.

Concepción

Cuando el estudiante conteste que las dos representaciones





7. De los siguientes conjuntos:
   - Defina si son funciones.
   - Realice dos cambios de representación de ello (tabular, algebraico, geométrico o verbal).

   Nivel de comprensión de investigación

   $G = \{(a, 2a): a \in \mathbb{R}\}$

   $*$ Es una función ya que a cada uno de ellos le corresponde sólo un elemento del conjunto de llegada es decir; cada real tiene su doble y es único.

   1.- La relación de un número real con su doble.

   2.-

x	$f(x)$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

   $H = \{(|a|, a): a \in \mathbb{R}\}$

   - No es una función ya que no cumple con la definición, pues le corresponde dos elementos del conjunto de llegada, esto muestra con un ejemplo, sea $x = 3$ entonces $y = 3$ o $y = -3$.

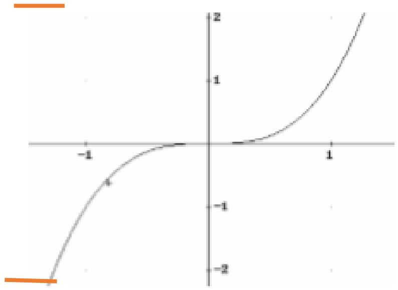
   1.-

x	$f(x)$
2	-2
2	2
0	0
1	-1
1	1
3	-27

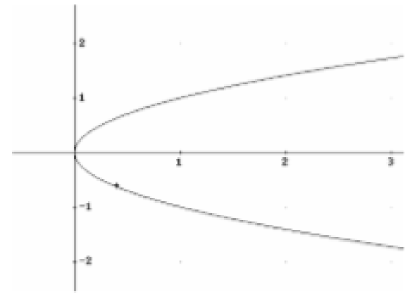
   2.- $f(|x|) = x$

8. Indica cuál de las siguientes gráficas representan una función.

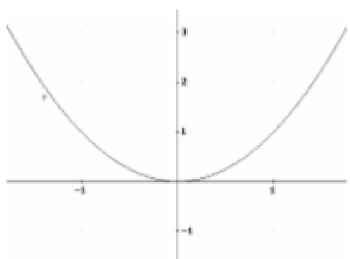
a)



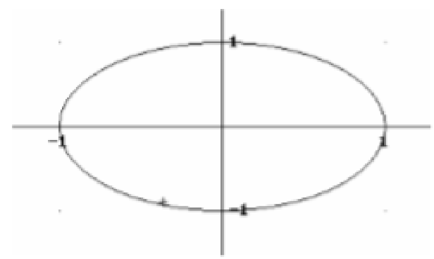
b)



c)



d)



9. Grafique las siguientes expresiones e identifique si son una función, en caso de serlo defina su dominio y rango.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Comprensión.- (Epistémico).- Es una función con $D = \mathbb{R}$ $R = \{0,1\}$
Concepción.- No es una función porque no es continua
Conocimiento.- Es una función $D = \{0,1\}$ $R = \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Comprensión.- (Epistémico).- Es una función con $D = \mathbb{R}$ $R = \{0,1,-1\}$
Concepción.- No es una función porque no es continua o porque está expresada con una letra diferente a la $f(x)$
Conocimiento.- Son muchas funciones

10. Identifique si la siguiente expresión es una función, en caso de serlo defina si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva en los números reales.

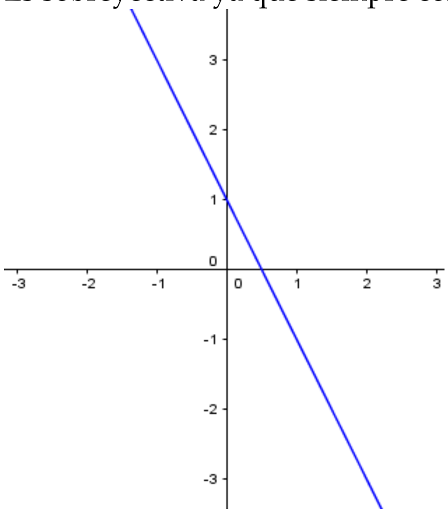
$w(x) = 1 - 2x$

Nivel de comprensión de investigación (aquí se pueden dar todos los niveles)
Es una función sólo toca un punto en su rango
Es inyectiva

$$\text{Sea } y = 1 - 2x \quad y = 1 - 2w$$

$$1 - 2x = 1 - 2w$$
$$-2x = -2w$$
$$x = w$$

Es sobreyectiva ya que siempre corta al eje de las y



CAPÍTULO 4. RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos en las cuatro aplicaciones del material didáctico y las distintas herramientas en nivel licenciatura así como media superior.

Como se indicó en el capítulo anterior de la metodología, se realizó una revisión del Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas. Se observó que en los dos primeros semestres se enseña el tema de función, en el capítulo 2 y 4 respectivamente. Se decidió trabajar con los contenidos del primer semestre porque eran los que iniciaban con las principales características de la función, que son el dominio, imagen, inyectiva y sobreyectiva, como se muestra en la Figura 8.

Conceptos que fueron vistos en el curso que se llevó de Precálculo.

UNIDAD DE COMPETENCIA 4	TOTAL DE HORAS DEL SEMESTRE QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA		
	AID	ATS	ATI
Expresar las relaciones funcionales entre dos conjuntos, en sus diferentes representaciones: tabular, analítica, gráfica y verbal; para reconocer el cambio de una magnitud (variable dependiente) respecto de otra (variable independiente).			

Desempeños	Saberes Teóricos/Declarativos	Saberes Procedimentales	Competencias Genéricas
Determinar dominio e imagen de las funciones elementales: constante, lineal, cuadrática, exponencial, radicales, valor absoluto, logaritmo, seno y coseno; y aquellas definidas a trozos a partir de éstas.	Funciones como relaciones especiales entre conjuntos Funciones en los diferentes registros: tabular, analítico, gráfico y verbal Dominio, imagen y pre-imagen como un conjunto de valores Reales	Interpretación de un conjunto de coordenadas que componen a una función en los diferentes registros (numérico, algebraico y grafico).	Capacidad crítica y autocrítica Compromiso con la calidad
Representar las funciones elementales en los diferentes registros (evaluar expresiones algebraicas, construir tabulaciones, graficar parejas ordenadas), primero a lápiz y después con el apoyo de software de graficación.	Funciones elementales (lineal, cuadrática, exponencial, radicales, valor absoluto, logaritmo, trigonométricas, funciones a trozos. Igualdad, identidad, e inversa de funciones Funciones acotadas y no acotadas.	Identificar las gráficas, expresiones algebraicas o verbales que representan a las funciones elementales. Manejar la calculadora o software gráfico	
Transformar funciones a través de variar sus parámetros; traslaciones horizontales y verticales: *f(x)+b; f(x+a),* reflexiones:	Uso de signos en las funciones (-,+, raíz, valor absoluto): variación gráfica por medio de: *−f(x) f(-x),* *Raiz(f(x) y Abs(f(x)* Traslaciones horizontales y verticales: *f(x)+b; f(x+a)*	Reconocer el comportamiento grafico de las funciones al operar (uso de signos -, +) y variar los parámetros Determinar los cambio que sucede en el dominio e imagen	

Figura 8. Capítulo 4 del Plan de Estudios de Precálculo

UNIDAD DE COMPETENCIA 2	TOTAL DE HORAS DEL SEMESTRE QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA		
	AID	ATS	ATI
Usar el concepto, características y distintos registros de la función definida como relación, tanto para la determinación si una relación es o no función, como para la caracterización de una que si lo es, para la construcción de funciones con características específicas y para la resolución de problemas de aplicación.			

Desempeños	Saberes Teóricos/Declarativos	Saberes Procedimentales	Competencias Genéricas
Identificar el concepto de función en sus distintas representaciones; así como determinar la sobreyectividad e inyectividad de funciones elementales.	Identificará en los diferentes registros (algebraico-analítico, gráfico, verbal y tabular) las funciones por sobre aquellas que sólo son relaciones; así como las primeras propiedades de éstas: ser inyectiva y ser sobreyectiva. Reconocerá las componentes de una función: dominio, recorrido; caracterizándolas como conjuntos topológicos en R.	Reconocer las funciones elementales: polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas. Determinar si una función elemental es inyectiva y/o sobreyectiva.	Capacidad crítica y autocrítica Compromiso con la calidad
Clasificar a las funciones de acuerdo a sus características específicas.	Relacionará las propiedades de las funciones de ser inyectivas y sobreyectivas, con los conjuntos que definen a la función.	Modificar los conjuntos de definición de las funciones para cambiar las características de inyectividad y/o sobreyectividad.	
Aplicar el concepto de función en la resolución de problemas en distintos contextos.	Identificará el concepto de función como relación unívoca entre magnitudes o variables, y sus usos, en diferentes contextos	Identificará las propiedades de ser inyectiva/o sobreyectiva, de las funciones, así como los dominios y recorridos adecuados, cuando se presenta este concepto en diferentes fenómenos: problema del calentamiento-	

Figura 9. Capítulo 2 del Plan de Estudios de Cálculo Diferencial de la UAM

Aplicación

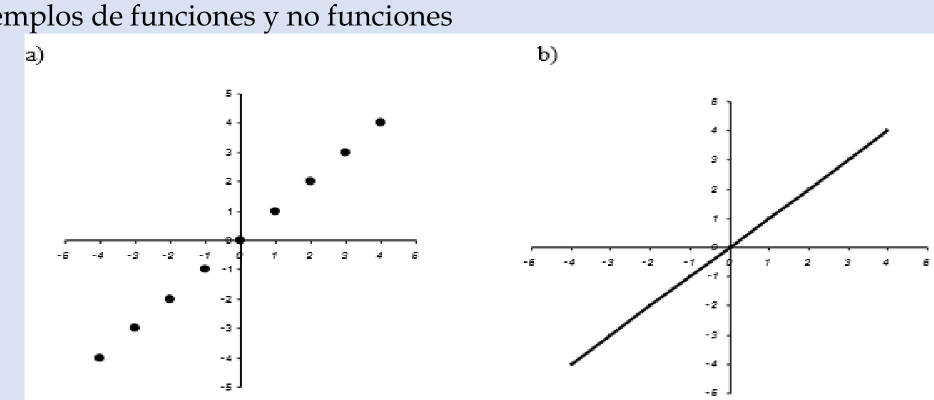
4.1. Reporte de actividades de la primera aplicación

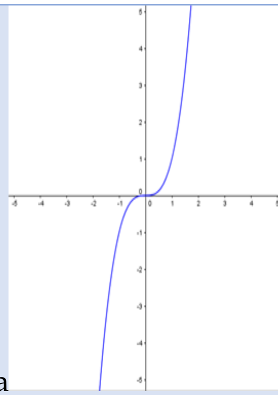
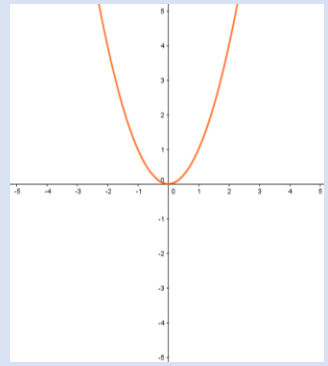
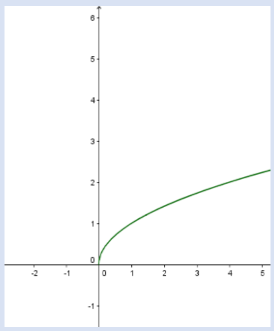
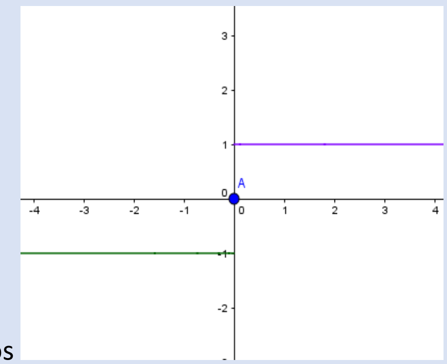
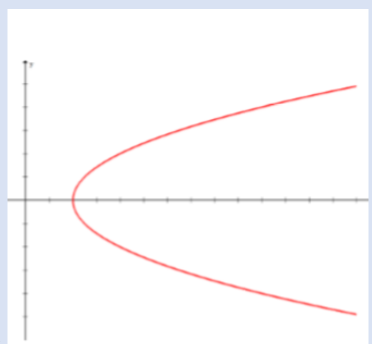
La primera aplicación del material didáctico propuesto se realizó en la Universidad Politécnica de Zacatecas, ubicada en Fresnillo, Zacatecas, con estudiantes de segundo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial. Se efectuó los días 20 y 21 de febrero del 2017 y su duración fue de dos módulos de 90 minutos cada uno, en un horario de 6:00 – 8:00 p.m. y 8:00 – 10:00 p.m., respectivamente. Los estudiantes tenían edades en un rango de entre 30 a 45 años de edad, la mayoría casados, trabajan por las mañanas y estudian por las tardes, habían dejado de estudiar por algún tiempo.

En el primer módulo se impartió un repaso del tema función matemática a los estudiantes.

La didáctica del repaso fue de la siguiente manera.

Tabla Análisis. 1. Actividades del repaso, en la primera aplicación.

1	Presentación de la relación entre conjuntos en números reales. • Repaso de los números reales (dígitos, naturales, enteros, racionales e irracionales). • Una relación entre dos conjuntos A y B se define como un subconjunto de AxB. • Una función es una relación pero con ciertas restricciones.
2	Definición de función Dados dos conjuntos $A, B \subseteq R$, se define una función de A en B, como una relación que tiene la característica: “A cada elemento de A se relaciona con uno y sólo uno de B”
3	Ejemplos de funciones y no funciones  $f(x) = 4x - 8$ $f(x) = \frac{1}{x}$

	Función cúbica  Función parábola  Función raíz  Función a trozos  Función a trozos no son funciones 
4	**Verificación de la línea vertical en la representación gráfica**. A los estudiantes se les explicó que una manera de verificar si una expresión geométrica representa una función es por medio de una línea vertical y hacer un escáner parecido al código de barras que se muestra en la siguiente imagen. Si al pasar la recta por todo el eje de las abscisas, ésta toca sólo un punto, entonces se dice que la expresión es una función. Si toca dos o más puntos de la recta, entonces la expresión no es una función sino una relación. 7 8 8 4 9 2 8 0 8 2 7 4

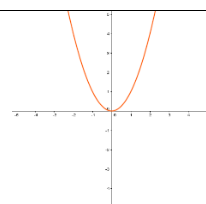
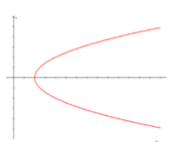
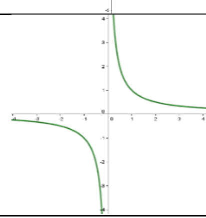
5	Dominio de una función • Dominios continuos y discretos Las x en $\mathbb{R}$ tal que (x) tiene sentido (las x que puede sustituir de manera directa en la regla de asignación.
6	Rango de una función • Rangos continuos y discretos Los números y que obtenemos al calcular $f(x)$ (los valores obtenidos luego de sustituir o de reemplazar x)
7	Algunos ejemplos con el uso de Geogebra para visualizar el comportamiento de algunas expresiones.

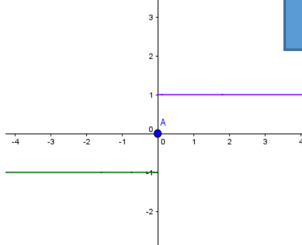
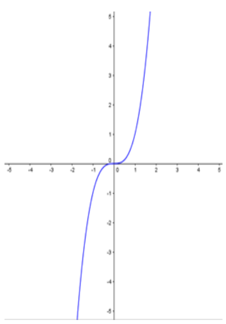
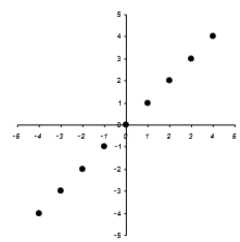
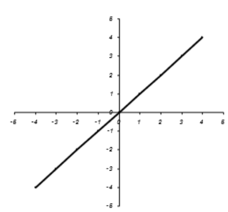
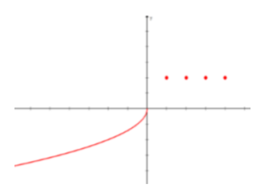
En la siguiente sección de las clases se aplicó el material didáctico Adivina cuál. En el aula se contaba con:

- Un proyector.
- Pizarrón.
- Un par de tableros del material didáctico Adivina cuál.
- 20 alumnos (Sólo 3 no habían asistido un día anterior).
- Cuadernos y plumas.
- Una cámara de video (enfocando a los estudiantes).
- Tarjetas para anotar el número de elemento que elegían.

El tablero tenía los siguientes ítems:

Tabla Análisis. 2. Ítems del material didáctico.

1 $f(x) = \dfrac{1}{x}$	2 	3 $f(x) = 4x - 8$
4 	5 	6 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$

<table>
<tr>
<td>7
$f(x) = x^3$</td>
<td>8
$$h(x) = \begin{cases} \mathbf{1}, & x > 0 \\ \mathbf{0}, & x = 0 \\ \mathbf{-1}, & x < 0 \end{cases}$$</td>
<td>9
<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>$\pi/2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$1/3$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>π</td><td>0</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>10
</td>
<td>11
$\boldsymbol{G} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^3) : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\}$</td>
<td>12
La relación de un número real con su doble.</td>
</tr>
<tr>
<td>13
</td>
<td>14
$4x - 8 = 0$</td>
<td>15
</td>
</tr>
<tr>
<td>16
La estatura de un niño respecto a su edad</td>
<td>17
</td>
<td>18
</td>
</tr>
</table>

Los ítems anteriores ya presentados en el material didáctico se observan en la siguiente imagen.

Figura 10. Material didáctico.

Para motivar a los estudiantes a esforzarse a competir en el juego, se les ofreció que el equipo ganador tendría un punto extra en un parcial. Se pudo observar que algunos tomaron su libreta de apuntes para repasar lo de la clase anterior y otros cuestionaban a sus compañeros "¿qué significa que una expresión sea una función?".

Se hicieron cuatro equipos de cinco estudiantes. A continuación se presenta lo sobresaliente que sucedió en cada partida.

Partida 1.- En un inicio compitieron el equipo 1 y 4, con algo de dudas y nervios porque eran los primeros en participar.

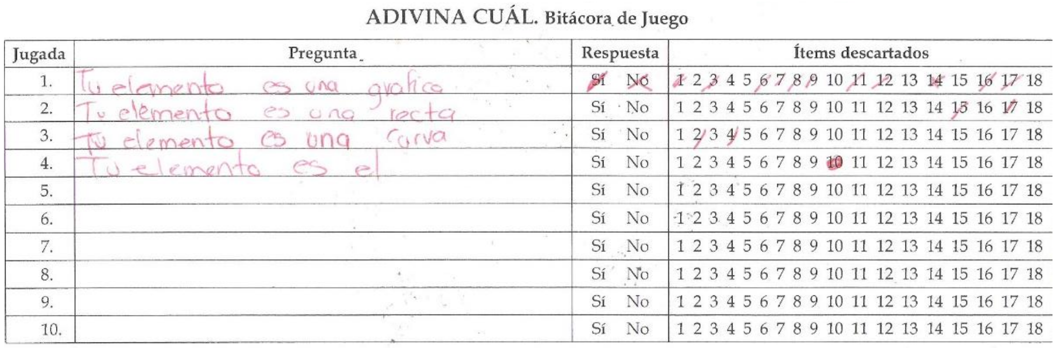
En esta primera jugada se les daba más tiempo para que alcanzaran a tachar el número de fichas que iban bajando. Pero aun así podemos observar en la siguiente imagen que no alcanzaban a tachar toda la información, por lo que no nos da mucha información. Lo etiquetaremos de la siguiente manera:

Partida: P

Número: 1, 2,…

Ganador o perdedor: G o P

Por ejemplo las siglas P1G significa partida número uno y fue el equipo ganador, en cambio P1P es de la partida uno pero el perdedor.

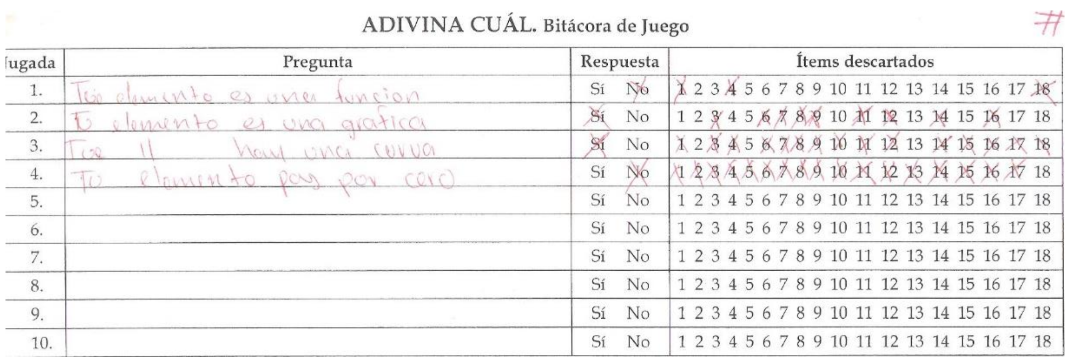


ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.	Tu elemento es una grafica	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.	Tu elemento es una recta	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.	Tu elemento es una curva	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.	Tu elemento es el	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
10.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Figura 11. Bitácora del equipo P1P

En la siguiente imagen podemos ver que en la primera pregunta, toman el elemento número 18 que no es una función, por verlo diferente a las funciones prototipo.



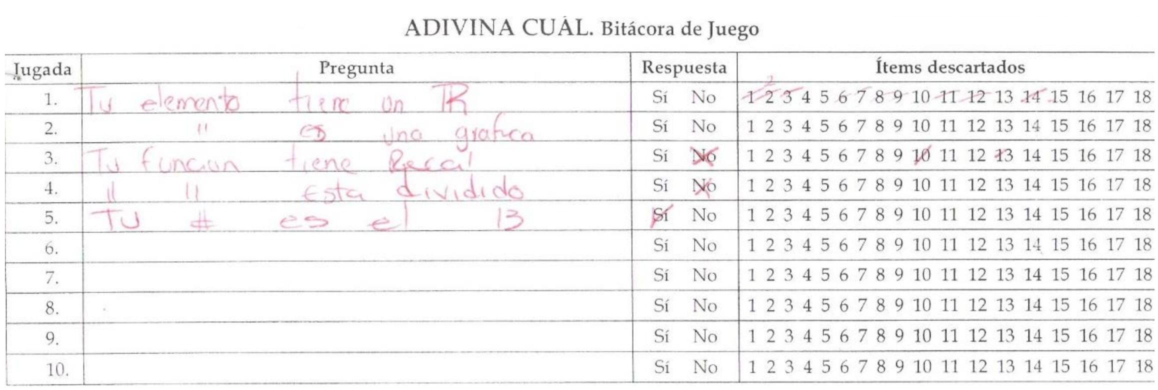
ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.	Tu elemento es una función	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.	Tu elemento es una grafica	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.	Tu " hay una curva	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.	Tu elemento pasa por cero	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
10.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Figura 12. Bitácora del equipo P1G

En esta partida ganó el equipo que sus respuestas se reflejan en la segunda imagen. Sin embargo, pudimos observar que ganaron por cuestiones de azar.

Partida 2.- Aquí participaron el equipo 4 y 2. Volvía a participar el equipo ganador de la partida anterior.



ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.	Tu elemento tiene un TR	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.	" es una grafica	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.	Tu funcion tiene Recal	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.	" " esta dividido	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.	Tu # es el 13	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
10.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Figura 13. Bitácora del equipo P2G

En esta partida podemos observar en la imagen anterior que arrojan pocos datos para analizar debido que ganaron por adivinar el número 13, no por haberlo descubierto por conocimientos.

Este equipo aún tenía algunas tarjetas en su tablero, por lo que sintió que ya iba perder, mencionó el número, a ver si le atinaba y por cuestiones de azar sí era el número 13 la tarjeta del equipo contrario y ganaron.

Esta experiencia nos deja como advertencia de regla, decir el elemento hasta que tengan dos tarjetas o elementos aún arriba del tablero.

ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.	Tu elemento es una gráfica	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.	Tu elemento es una función.	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.	Tu elemento pasa por el origen.	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.	Tu elemento tiene curva	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.	" " tiene dos curvas	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Figura 14. Bitácora del equipo P2P

El equipo 2 nos arrojó más datos, como lo vemos en la Figura 19, tachan los elementos que dejan arriba y dejan en blanco los elementos que bajan, por lo que acotan rápido el número de tarjetas.

En la siguiente pregunta ¿tu elemento es una función? Saben discernir cuáles corresponden a una función, por lo que se observa un conocimiento del tema.

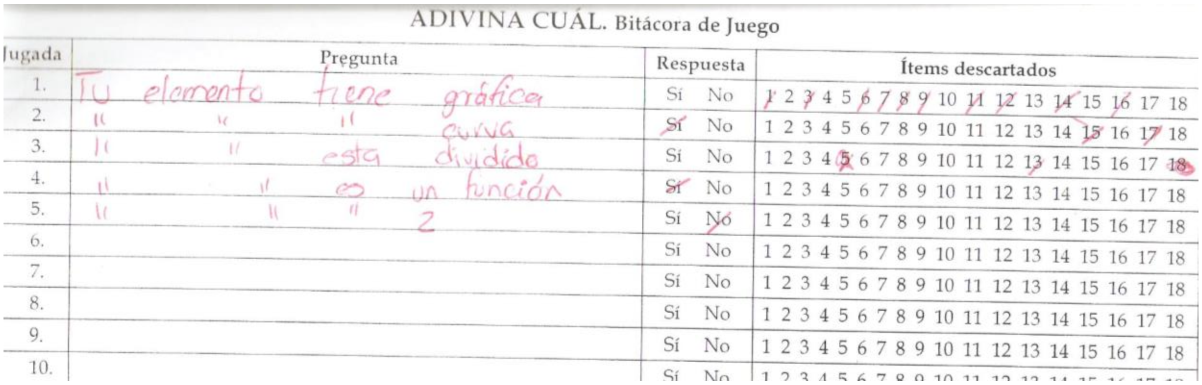
En todas las preguntas que el equipo hizo, lo hicieron muy bien, estaban por ganar ya sólo tenían dos tarjetas, pero se enfrentaron a perder por cuestiones de azar y tiempo.

Partida 3.- En esta partida participó nuevamente el equipo 4 y de nuevos jugadores los estudiantes del el equipo 3.

Vamos a observar ya nuevas preguntas entre los participantes, es decir la experiencia de los juegos pasados para ambos equipos fue de ayuda para plantear preguntas de tal manera que pudieran descubrir más fácilmente el elemento del equipo contrario.

Ganó el equipo de la figura 21 el número tres, esta partida fue realmente ganada por descubrir el elemento del equipo contrario con estrategias de conocimiento relacionado al tema.

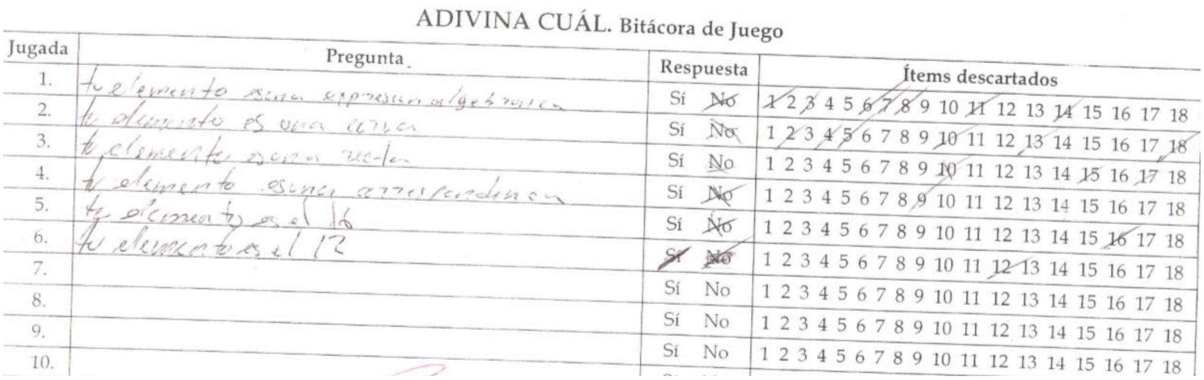
Es importante mencionar que el equipo ganador, antes de jugar estaban platicando entre ellos algunas dudas que tenían del juego y del tema función, se ayudaban entre ellos para ganar. Estudiaron algunas definiciones antes de participar.



ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.	Tu elemento tiene gráfica	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.	" " " curva	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.	" " esta dividido	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.	" " es un función	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.	" " " 2	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
10.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Figura 15. Bitácora del equipo P3P



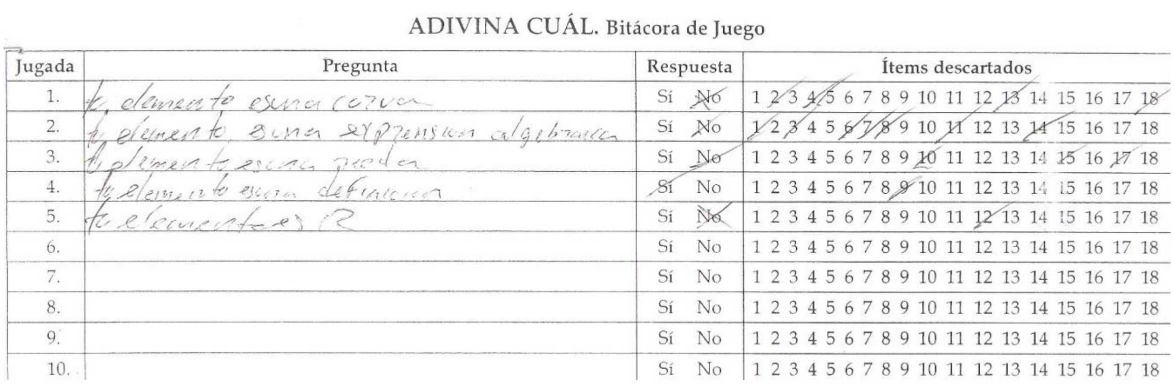
ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.	tu elemento es una expresion algebraica	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.	tu elemento es una curva	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.	tu elemento es una recta	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.	tu elemento es una [illegible]	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.	tu elemento es el 16	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.	tu elemento es el 12	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
10.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Figura 16. Bitácora del equipo P3G

Partida 4.- En esta última partida se dividió el equipo ganador de la partida anterior, era un equipo de cuatro integrantes por lo que fue de dos *vs* dos.

Fue una partida en la que se pudieron observar con más detalle los movimientos de los participantes, en cada pegunta que formulan analizaban más detenidamente cuáles tarjetas descartar. Mientras tanto los demás compañeros estaban apoyando a sus favoritos.



ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.	tu elemento es una curva	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.	tu elemento es una expresion algebraica	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.	tu elemento es una recta	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.	tu elemento es una definicion	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.	tu elemento es 12	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
10.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Figura 17. Bitácora del equipo P4G

Los jugadores de figura 22 fueron los ganadores. Como podemos ver hacen preguntas relacionadas a los sistemas de representación, por lo que les lleva a descartar más fácil. Siendo los ganadores y como observadora puedo decir que sí sabían del tema en comparación de sus compañeros, ya que en la clase que se destinó de repaso se veía que participaban en la clase.

Al terminar el juego se sintieron más motivados y se veía en sus rostros que se mostraban alegres ante la situación.

ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.	TU ELEMENTO ES UNA RECTA	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.	TU ELEMENTO ES UNA FUNCION	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.	" " ES UNA ~~FUNCION~~ EXPRESION ALGEBRAICA	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.	TU ELEMENTO ES UNA CURVA	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.	TU ELEMENTO PASA POR CERO	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.	TU FUNCION ES UNA CORRESPONDENCIA	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Figura 18. Bitácora del equipo P4P

Los jugadores de la imagen anterior, uno de ellos batallaba en algunas partidas para descartar los elementos, ante lo cual su compañero le explicaba cómo realizarlo para ganar. Ambos jugadores, a pesar de que perdieron, se fueron motivados por llegar a la partida final y además por obtener un punto extra en su parcial siguiente del tema de derivadas.

Reflexión

Dar un punto extra al equipo ganador, los motivó aún más para ganar en las partidas.

Al terminar de competir todos los equipos, se destinó una sesión para la aplicación de un cuestionario que fue elaborado con problemas que pudieran ser resueltos con base en la clase de un día anterior.

También se les pidió que anotaran (en la parte superior derecha) si fue de agrado interactuar con el material didáctico, a lo que la mayoría de los estudiantes escribieron un sí, excepto un estudiante que por cuestiones de tiempo no anotó su comentario.

La mayoría de los estudiantes no resolvieron los últimos problemas del cuestionario, a algunos les pareció complejo de resolver, pero en su minoría por cuestiones de tiempo ya que se terminó el tiempo de la sesión y se les tuvo que retirar el cuestionario.

Los siguientes problemas son los que se aplicaron:

Cuestionario

Lee con atención lo que se pide en cada instrucción, contesta con pluma y en caso de borrar, enciérralo y continúa con tu respuesta.

1. ¿Qué es una función?

Tabla. Análisis. 3. Descripción de las respuestas de los alumnos en el cuestionario, pregunta uno.

Descripción	Cantidad de alumnos
No contestó	2
Tiene algún tipo de conocimiento (correspondencia o asignación)	13
Concepción de gráfica	1
Tienen una comprensión del tipo contenido	3

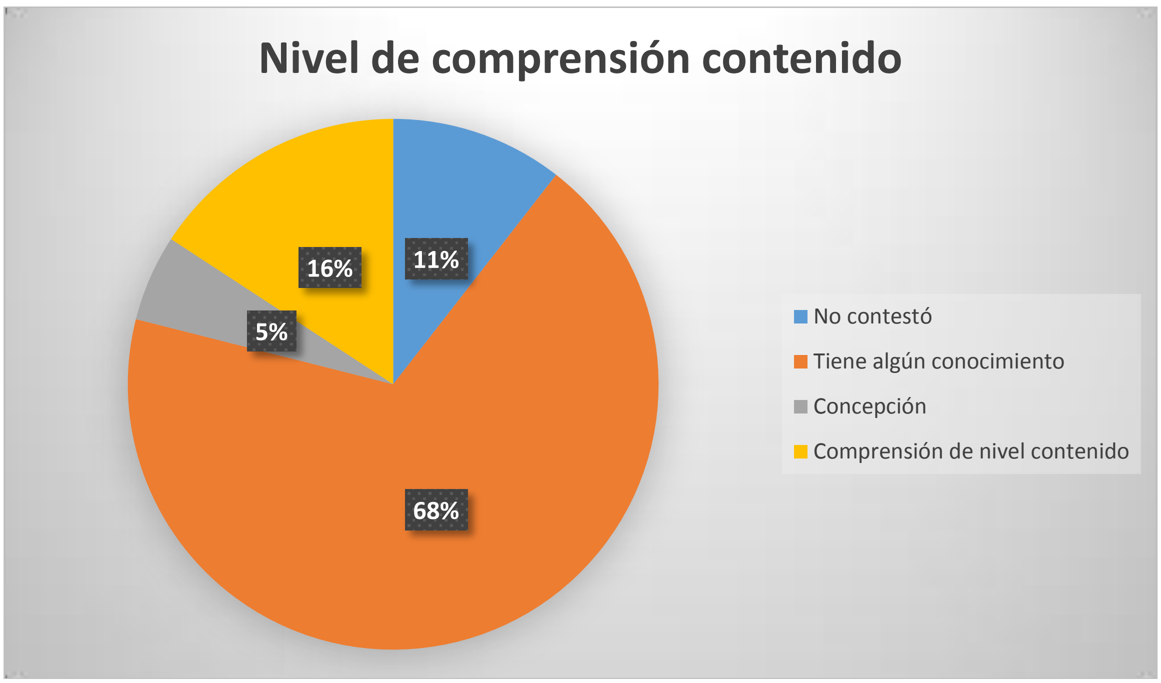


Figura 19. Nivel de comprensión

2. ¿Qué es el dominio de una función? ¿Qué es el rango de una de una función?

Tabla A. 4. Descripción de las respuestas de los alumnos en el cuestionario, pregunta dos.

Descripción	Cantidad de alumnos
No contestó	3
Tiene algún tipo de conocimiento	5
Concepción de todo el eje x	11
Tienen una comprensión del tipo contenido	0

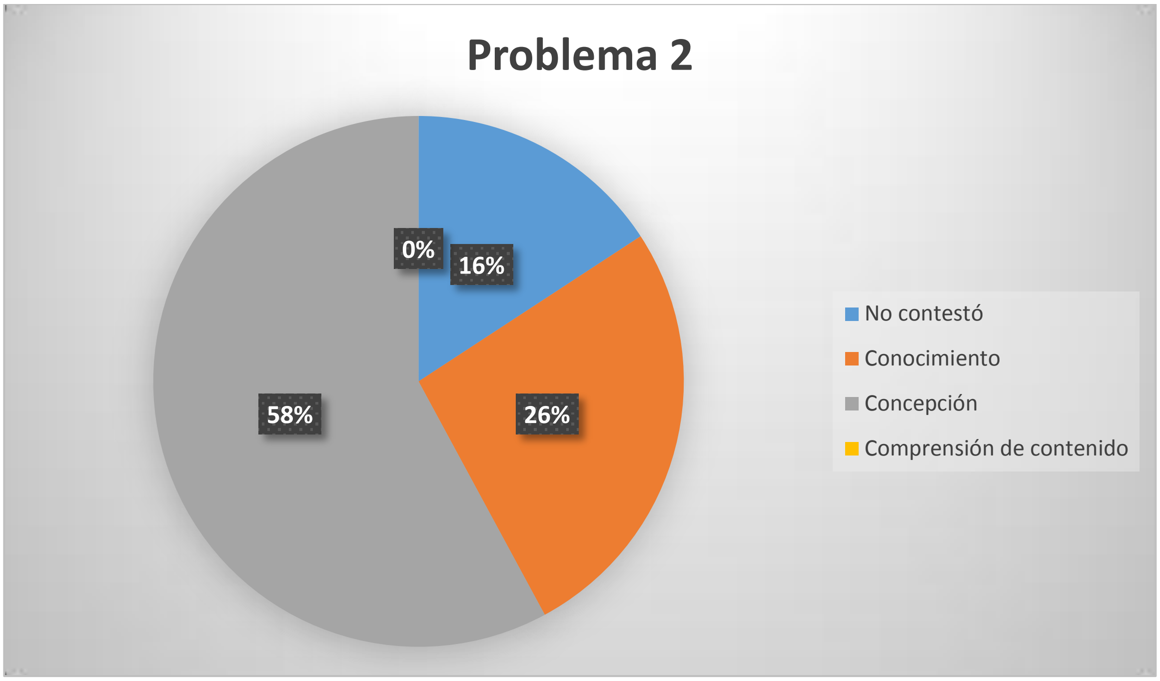
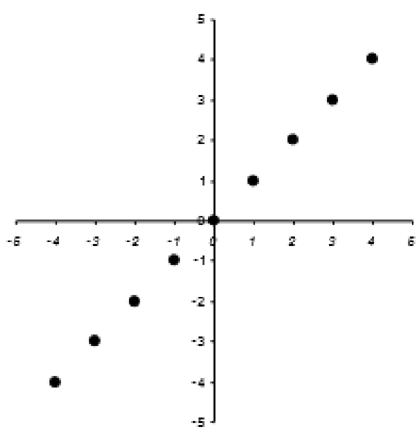


Figura 20. Problema dos

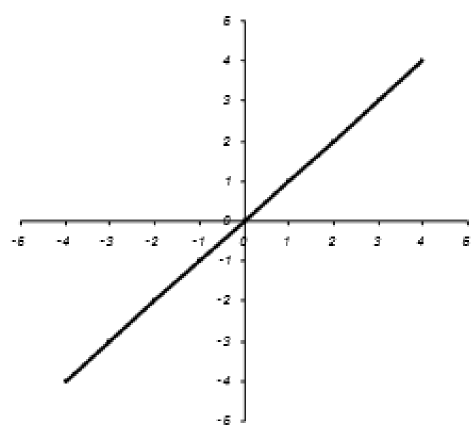
3. Analice si las siguientes graficas son funciones y justifique su respuesta

a)



Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores enteros

b)



Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores reales

Tabla A. 5. Descripción de las respuestas de los alumnos en el cuestionario, pregunta tres.

Descripción	**Cantidad de alumnos**
No contestó	1
Tiene algún tipo de conocimiento	0
Concepción de función discreta	1
Tienen una comprensión del tipo contenido	14

Tienen una comprensión del tipo epistémico	3

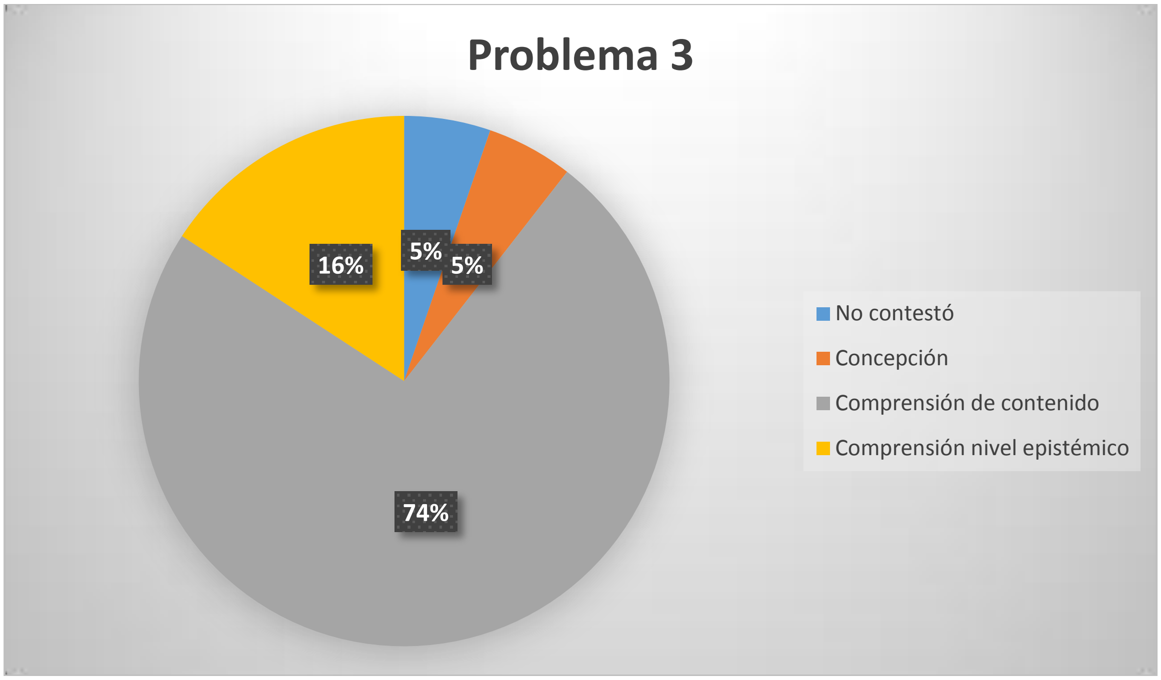


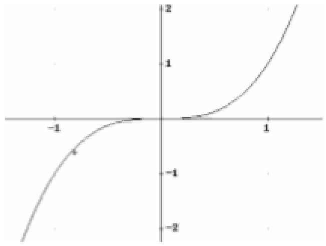
Figura 21. Problema tres

4. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa una función? (Grafica tu respuesta)

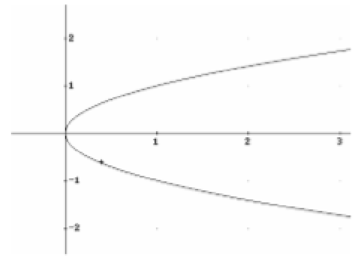
Expresión	¿Es función?	¿Por qué?	Gráfica
$4x - 8 = 0$			
$f(x) = 4x - 8$			

5. Indica cuál de las siguientes gráficas representan una función.

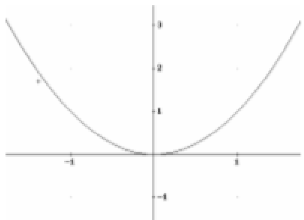
a)



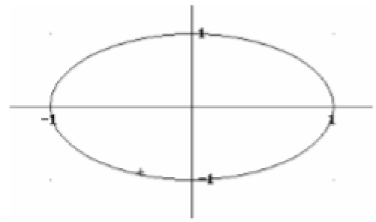
b)



c)



d)



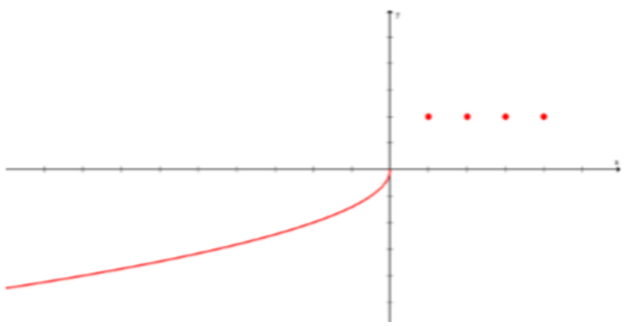


Tabla A. 6. Descripción de las respuestas de los alumnos en el cuestionario, pregunta cinco.

Descripción	**Cantidad de alumnos**
No contestó	0
Tiene algún tipo de conocimiento	17
Concepción	2
Tienen una comprensión del tipo resolución de problemas	17

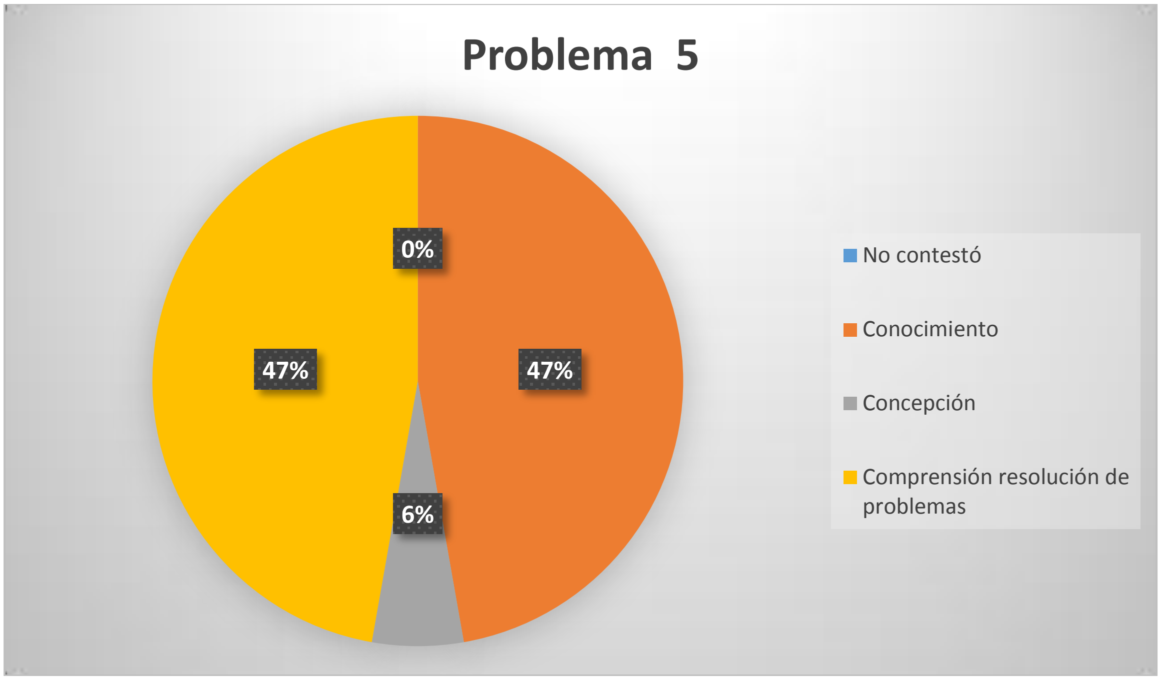


Figura 22. Problema cinco

6. Grafique las siguientes expresiones e identifique si son una función, en caso de serlo defina su dominio y rango.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Tabla A. 7. Descripción de las respuestas de los alumnos en el cuestionario, pregunta seis A.

Descripción	Cantidad de alumnos
No contestó	14
Tiene algún tipo de conocimiento	4
Concepción	0
Tienen una comprensión del tipo epistémico	1

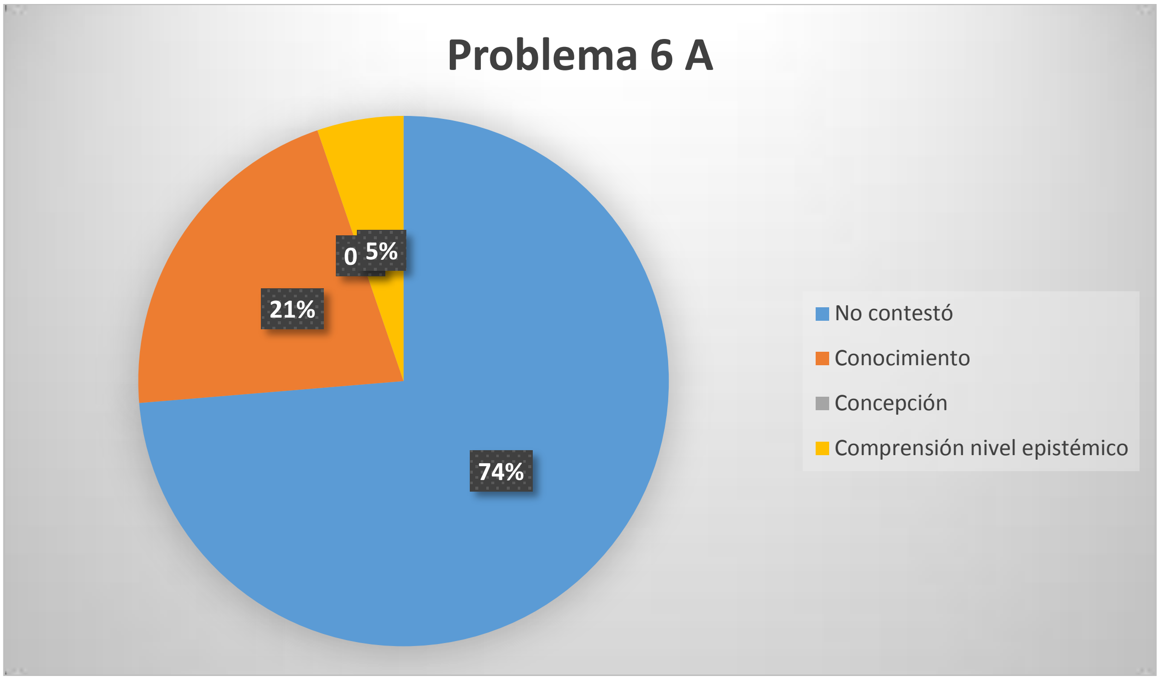


Figura 23. Problema seis A

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Tabla A. 8. Descripción de las respuestas de los alumnos en el cuestionario, pregunta seis B.

Descripción	Cantidad de alumnos
No contestó	11
Tiene algún tipo de conocimiento	6
Concepción	1
Tienen una comprensión del tipo epistémico	1

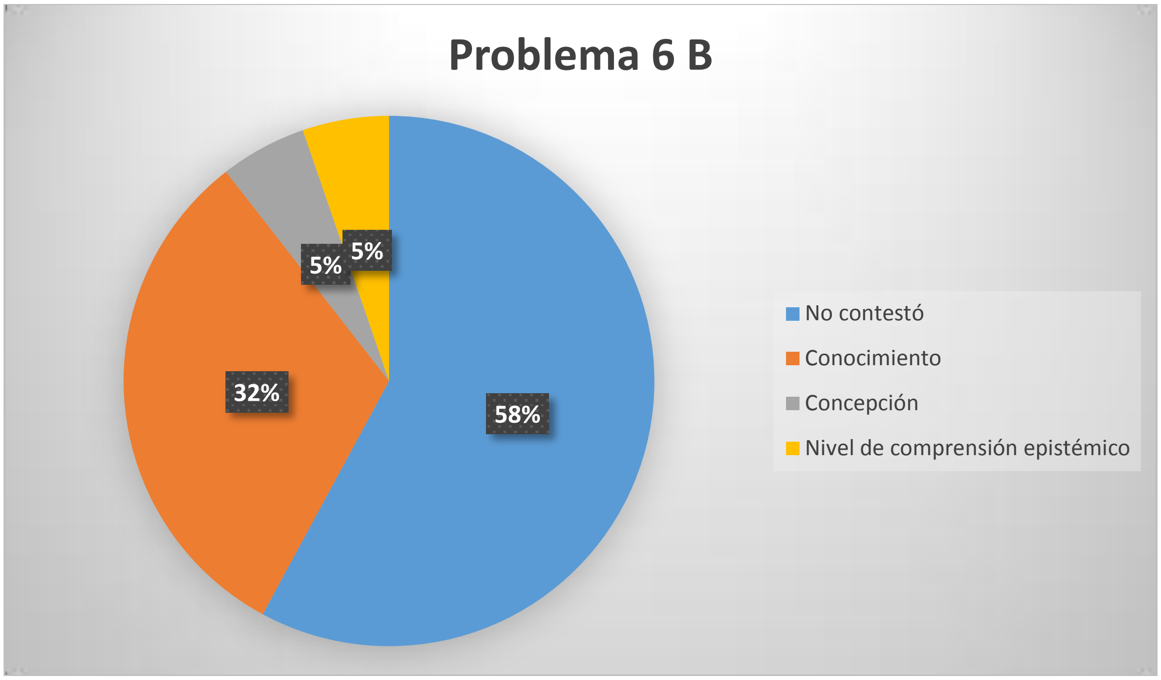


Figura 24. Problema seis B

7. Identifique si la siguiente expresión es una función, en caso de serlo defina dominio y rango.

$w(x) = 1 - 2x$

Tabla A. 9. Descripción de las respuestas de los alumnos en el cuestionario, pregunta siete.

Descripción	Cantidad de alumnos
No contestó	8
Tiene algún tipo de conocimiento	7
Concepción	2
Tienen una comprensión del tipo resolución de problemas	2

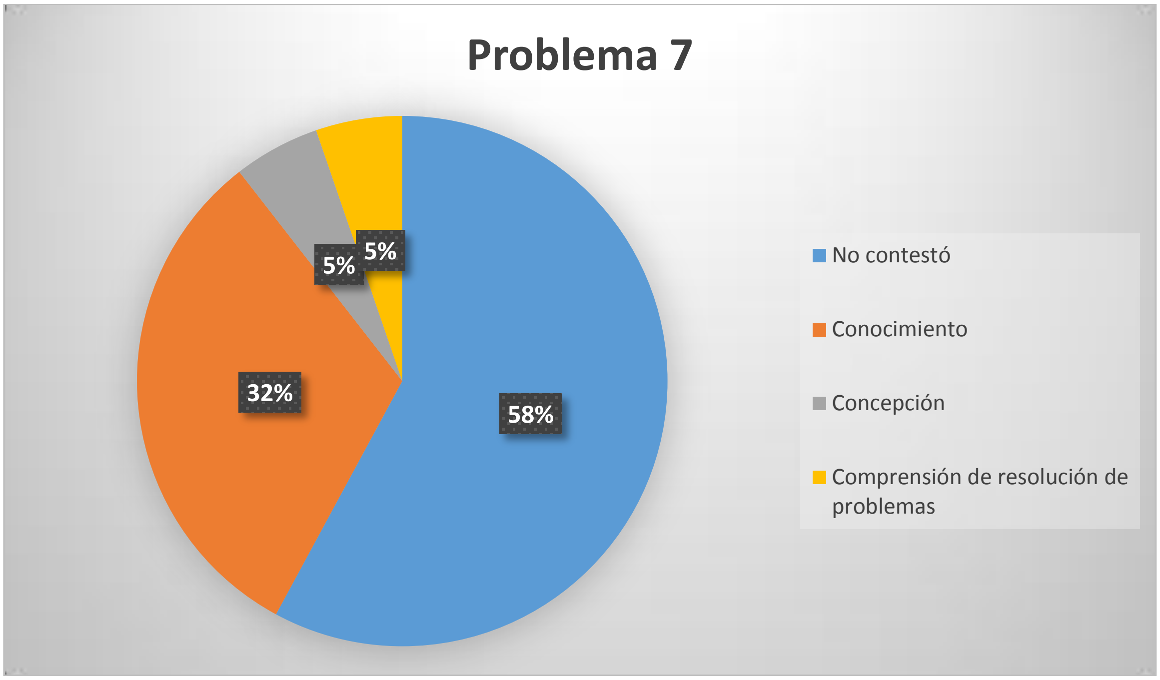
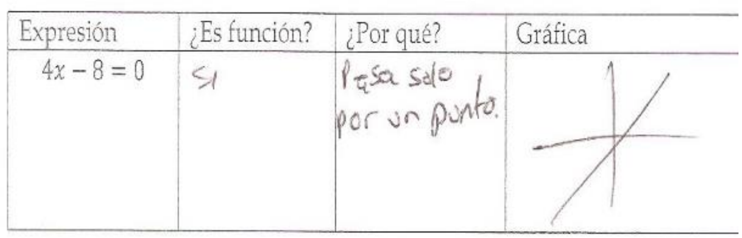
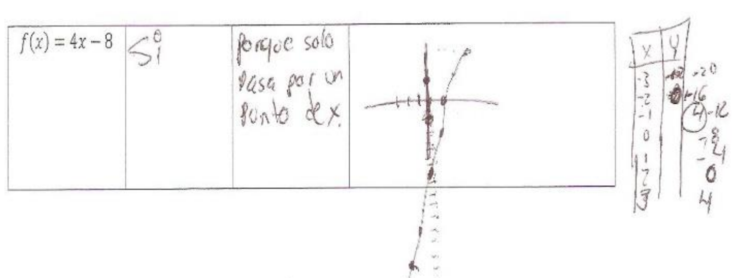
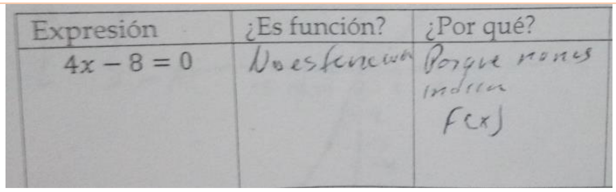
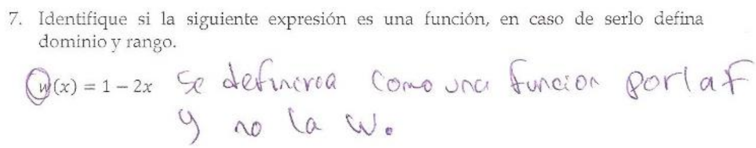


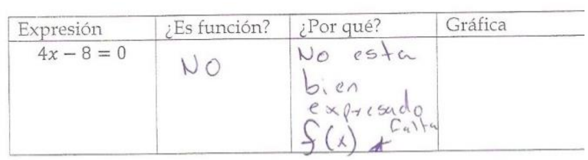
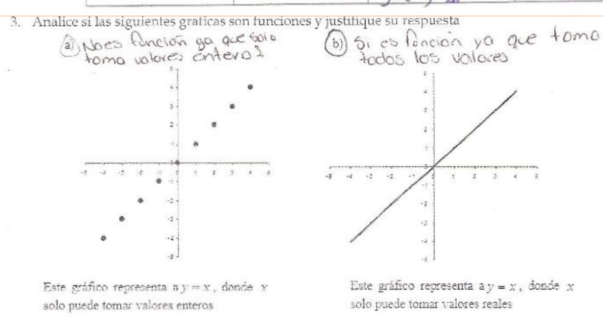
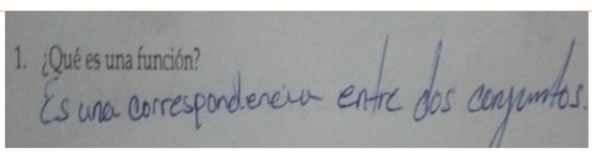
Figura 25. Problema siete

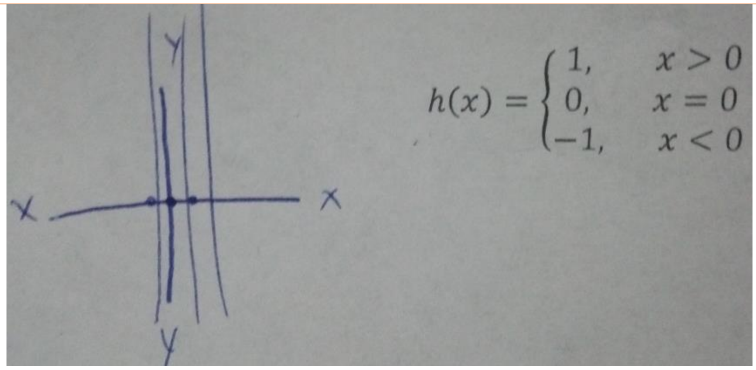
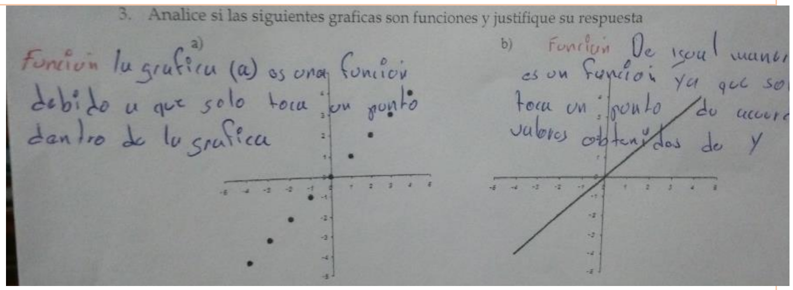
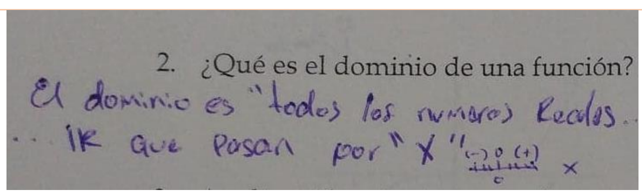
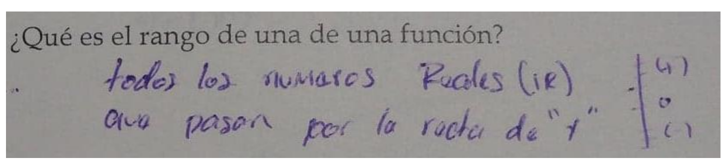
Tabla A. 10. Tabla de resultados en general del cuestionario.

Descripción	Evidencia
Las funciones son o representan una ecuación. Vanegas (2013). El problema número 4 del cuestionario se puso con la finalidad de analizar si los estudiantes distinguían entre una ecuación y una función. Pero podemos observar que los estudiantes tienen la concepción de que una función se puede representar con una ecuación; es decir, no se distinguen el papel de $\boldsymbol{x}$ como variable e incógnita. Una de las dudas que tenían los estudiantes cuando resolvían el cuestionario fue: **Maestra ¿se equivocó en**	 

<table>
<tr>
<td>este problema? Está repetido
Les respondía que verificarán bien si eran iguales.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Describir las variables por medio de las literales usualmente empleadas. López (2007).
No es de la forma $\boldsymbol{F(x)}$ o bien tiene una letra distinta a $\boldsymbol{f}$ tal es el caso de $\boldsymbol{w(x)}$ (escribieron x, y).</td>
<td>
Expresión | ¿Es función? | ¿Por qué?
$4x - 8 = 0$ | No es función | Porque no nos indica F(x)


7. Identifique si la siguiente expresión es una función, en caso de serlo defina dominio y rango.
$w(x) = 1 - 2x$ Se definiría como una función por la F y no la W.


Expresión | ¿Es función? | ¿Por qué? | Gráfica
$4x - 8 = 0$ | NO | No esta bien expresado f(x) falta |</td>
</tr>
<tr>
<td>Una gráfica representa una función si es continua, entendida la continuidad como un sinónimo de secuencia o de no interrupción desconociendo las funciones definidas por partes o a tramos. Prada (2015).
Dificultades relacionadas con la continuidad.</td>
<td>
3. Analice si las siguientes graficas son funciones y justifique su respuesta
a) No es función ya que solo toma valores enteros
b) Si es función ya que toma todos los valores
Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores enteros
Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores reales</td>
</tr>
<tr>
<td>Asociación de función con la de par ordenado, asociación de correspondencia única entre pares de elementos e incluso entre pares de conjuntos. Prada (2015).
Este tipo de respuestas se observaron en diferentes cuestionarios, olvidando la parte fundamental de “uno y sólo uno de llegada”</td>
<td>
1. ¿Qué es una función?
Es una correspondencia entre dos conjuntos.</td>
</tr>
</table>

Tránsito de registros de representación. *Dificultades en tareas de pasaje de registro gráfico al algebraico (poca relación con otros registros)*. García, Vázquez e Hinojosa (2004) Jaimes (2012) Lávaque *et al*. (2006)	
Representación geométrica para visualizar si son funciones. *Necesitan un apoyo visual o gráfico más que analítico para comprender si una expresión dada es una función, debido a la carencia de competencias algebraicas*. Prada (2015) Se les mostró que si pasamos una recta vertical en la gráfica y toca dos puntos entonces no era una gráfica y viceversa. Por lo que ellos	
*Relacionan como eje de las **x** como el dominio de la función y el eje de las **y** como el rango.* López (2007) afirma que los estudiantes conciben el conjunto de los reales como el dominio de cualquier función (el dominio de una función es siempre todo el eje de las abscisas). Se comprueba que efectivamente se presentan este tipo de errores, no queda claro qué es el dominio y rango de una función.	

Mejoras derivadas de esta aplicación:

- Establecer en las reglas del juego que no pueden dar su elemento sólo al azar.

- Ellos mismos al final deben decir, de acuerdo a las preguntas que hicieron, el por qué acertaron o no en el juego.
- En la bitácora colocar un espacio para que el estudiante pueda anotar el número de elemento que eligió él y el jugador contrario.
- Poner más elementos en el registro tabular y verbal.

4.2. Reporte de actividades de la segunda aplicación

Sesión de aplicación de nivel medio superior (Colegio Santa Elena de la Universidad de la Vera Cruz). Miércoles 29 y jueves 30 de marzo de 2017.

Población: 23 estudiantes de cuarto semestre de preparatoria.

Metodología:

- Se hicieron 5 equipos de cuatro estudiantes y un equipo de 3, a consideración del profesor encargado de la materia.
- Se dieron las instrucciones antes de comenzar el juego.
- Se les entregó una bitácora por equipo junto con un papel, para poner el número del elemento que eligieron, se optó por esta idea del papel ya que al dejar la tarjeta enfrente como en el juego original, los alumnos que estuvieran de espectadores, podrían pasar la voz al equipo contrario de la tarjeta que se hubiera elegido.
- Dos tableros, se identificaron como equipo rojo y azul, para ello se colocaron unas calcomanías redondas en cada tablero con la finalidad de mencionarlos por colores durante la competencia, así como para nombrar equipo ganador y orden de turnos para preguntar.
- La duración del juego en total fue de una hora y media, porque fueron seis equipos, y en algunas partidas se equivocaban al dar las respuestas o en descartar los ítems y esto ocasionaba que no llegarán a descubrir el objeto del equipo contario, por lo que tenían que rectificar toda la partida.
- Con el fin de agilizar tareas, conforme los equipos iban perdiendo iniciaban a contestar el cuestionario.
- Nuevamente, en acuerdo con el profesor, el equipo ganador obtuvo un punto extra.
- Se les permitió sacar la libreta de apuntes durante el juego, esto con la finalidad de que ellos repasarán algunas definiciones. Cabe mencionar que esto no afecta en el análisis, ya que a lo más que pueden alcanzar, observando los apuntes, es una comprensión de contenido.
- Aplicación de los ítems y cuestionario general.

Fue una experiencia en la que los estudiantes se sintieron en una competencia, interesados por el premio, buscaban en sus libretas las ideas que les llevara al triunfo de cada partida.

Los estudiantes hicieron preguntas como las siguientes:

¿Tu elemento es una función?

¿Es una relación?

¿Es una tabla?

¿Es una parábola?

¿Su función es una relación?

¿Está expresada con un enunciado?

¿Es cuadrática?

¿Es algebraica?

¿Tu función es decreciente?

¿Tiene irracionales?

¿Es una gráfica?

¿Tu función es a tramos?

¿Tu función es a trozos?

¿Es función escalonada?

¿Su expresión tiene número real?

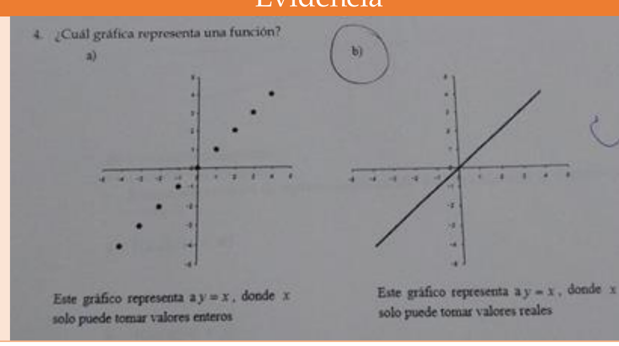
¿Su elemento tiene un dominio discreto?

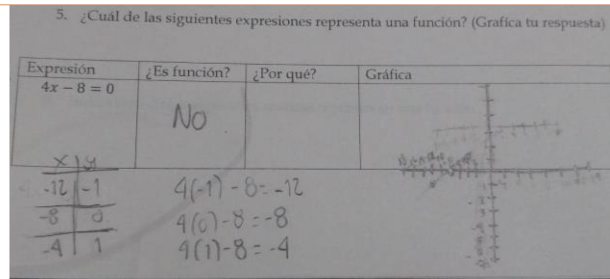
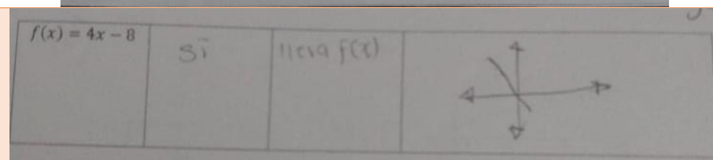
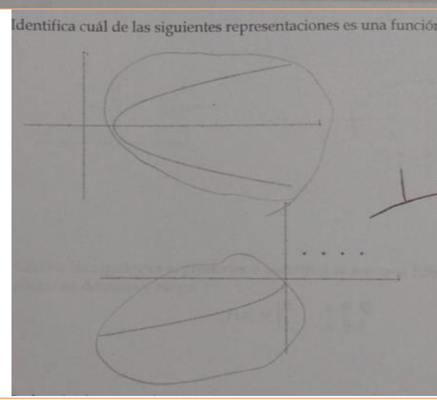
¿Su elemento tiene asíntotas?

Existieron algunas discusiones acerca de ¿una función es a trozos o a tramos? ¿Tiene números irracionales? Esto sucedió ya que ellos habían visto en clase funciones a trozos, escalonadas y a tramos.

Evidencias

Tabla A. 11. Descripción de algunas concepciones de los estudiantes, en la segunda aplicación.

Descripción	Evidencia
Los alumnos tienen la concepción de representaciones gráficas de funciones con dominio discreto, no son funciones.	
Los estudiantes necesitan un apoyo gráfico para responder	

si una expresión es una función o una ecuación. Asocian que es necesario ser tabulada una expresión para que pueda llegar a ser una función.	
Tiene un f (x)	
Consideran que la parábola ubicada de manera horizontal es una función.	

Se muestra el análisis de tres problemas de los siete del cuestionario ya que iban más acorde en el nivel de los estudiantes.

Problema cuatro

Tabla A. 12. Descripción del problema cuatro del cuestionario, segunda aplicación.

Concepción del dominio discreto no es una función	Conocimiento de funciones escalonadas	Responden que las dos son funciones, es decir tienen un nivel de comprensión de contenido. (En este problema el alumno puede alcanzar un nivel epistémico, pero en la aplicación se observó que respondieron por el escaneo en las gráficas).
15	**3**	**4**

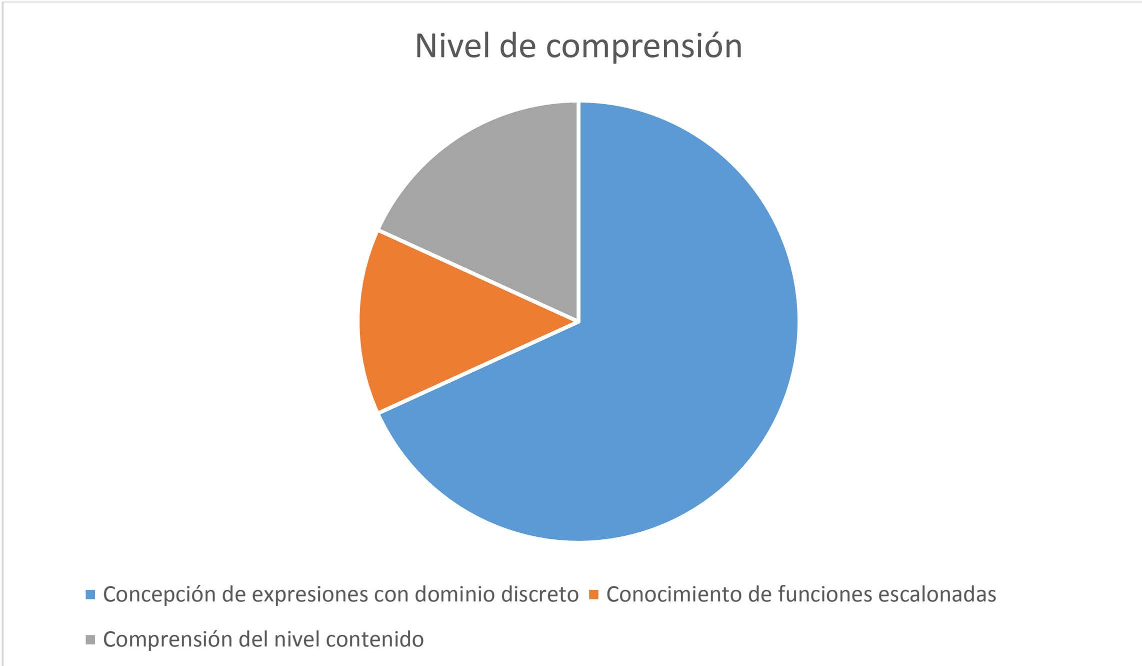


Figura 26. Segunda aplicación, problema cuatro.

Problema 5 a)

Tabla A. 13. Descripción del problema cinco A del cuestionario, segunda aplicación.

No contestaron	Concepción	Conocimiento	Comprensión
7	1	8	6

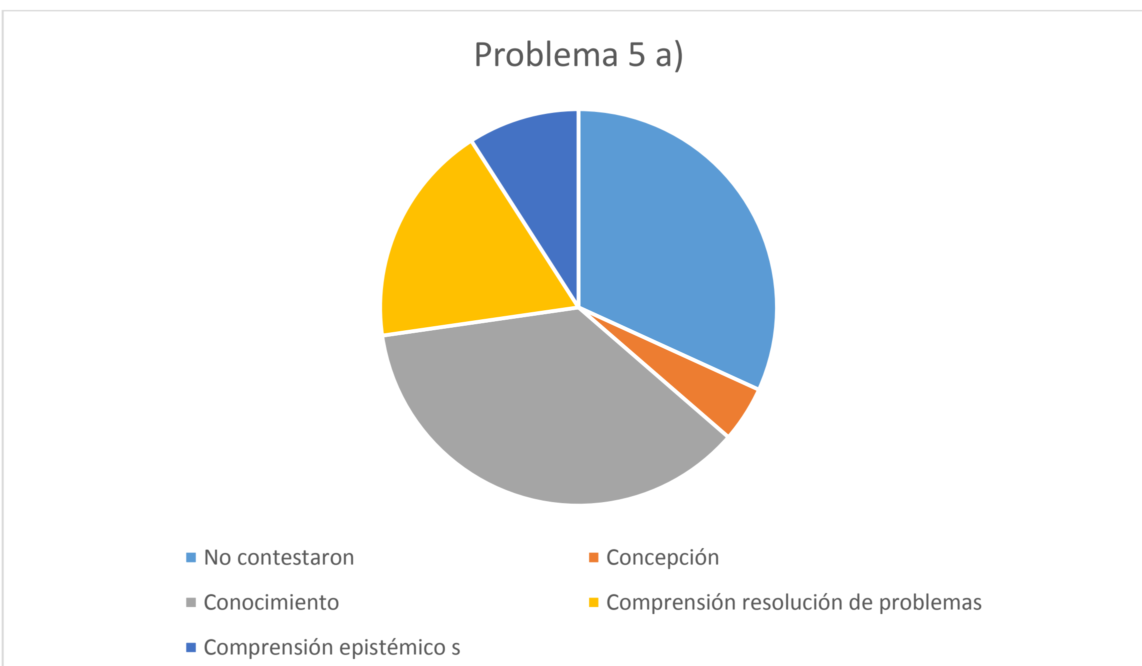


Figura 27. Segunda aplicación, problema cinco A.

Problema 5 b)

Tabla A. 14. Descripción del problema cinco B del cuestionario, segunda aplicación.

No contestó	Concepción	Conocimiento
5	6	11

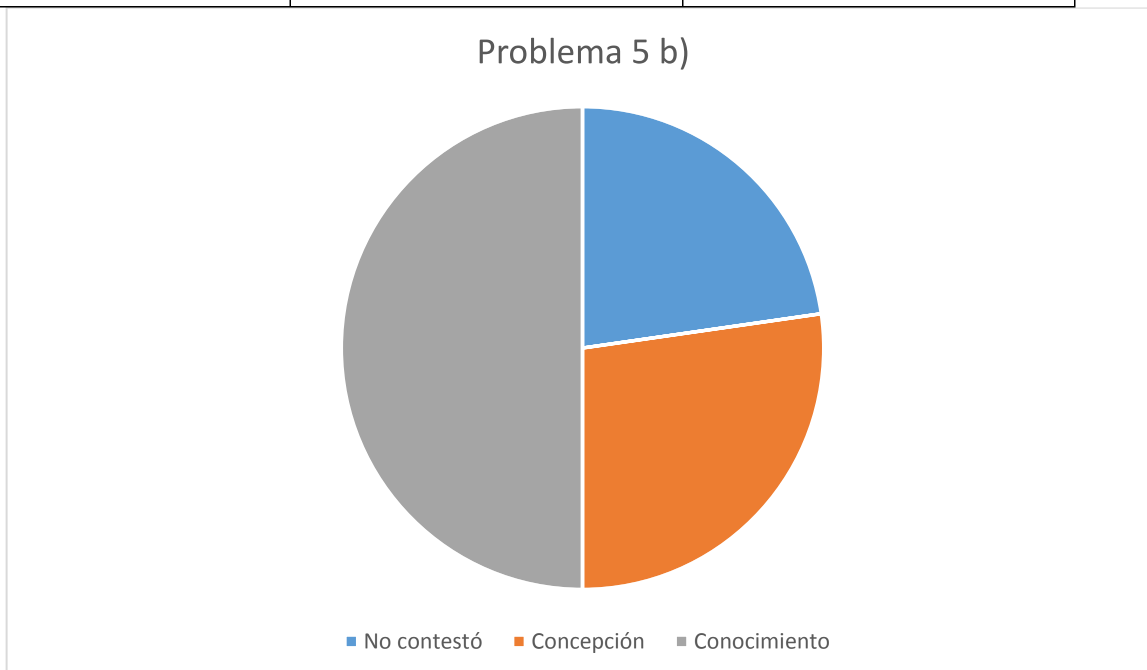


Figura 28. Segunda aplicación, problema cinco B.

Problema 6

Tabla A. 15. Descripción del problema seis del cuestionario, segunda aplicación.

No contestó	Concepción	Conocimiento	Comprensión nivel contenido
1	6	3	12

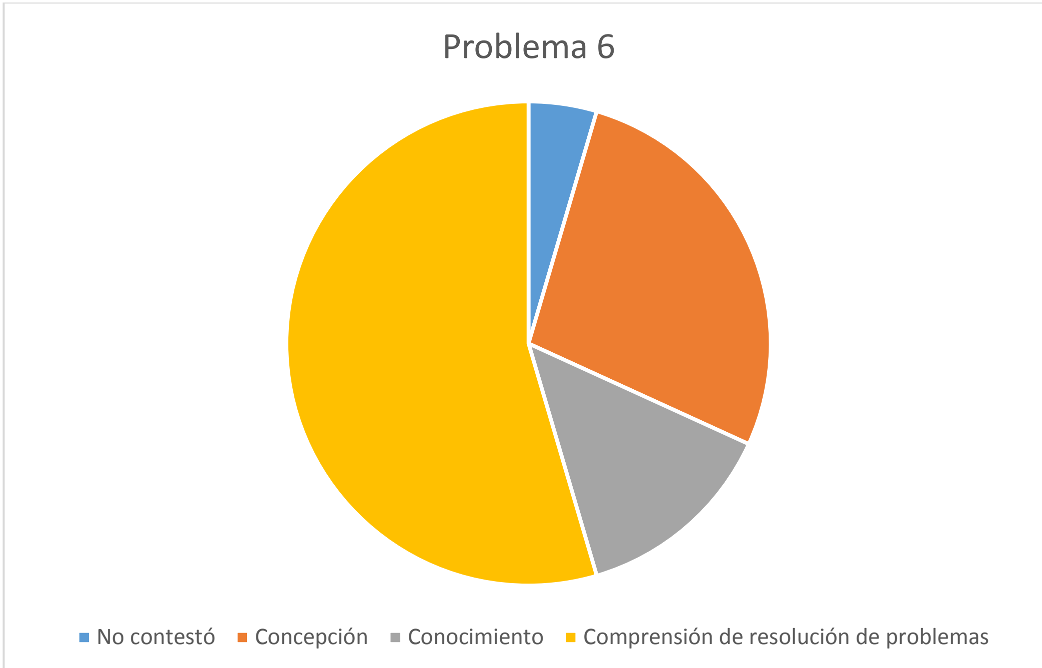
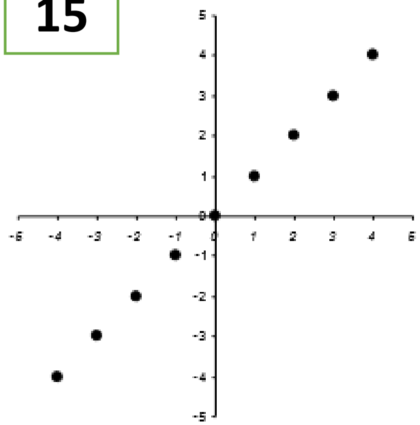


Figura 29. Segunda aplicación, problema seis

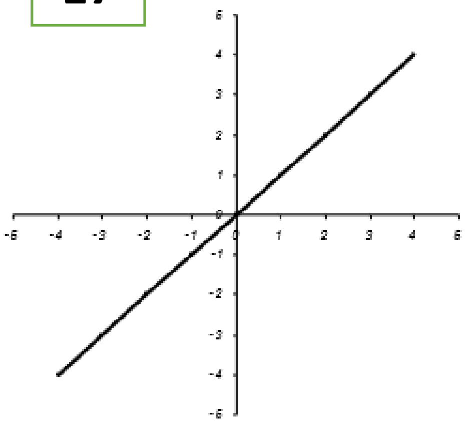
En general se observó que a los estudiantes les gustó interactuar con el material didáctico, pues no se presentó desorden durante la aplicación del juego, los alumnos estaban estudiando para la competencia. Cuando estaban en la partida buscaban sus apuntes para corroborar preguntas y respuestas.

La mayoría de los estudiantes respondieron en el cuestionario que el material didáctico les gustó.

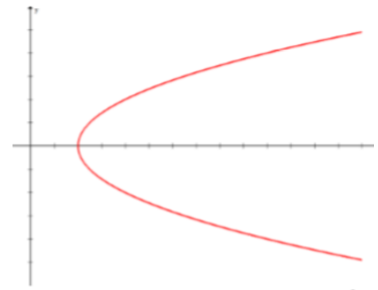
15



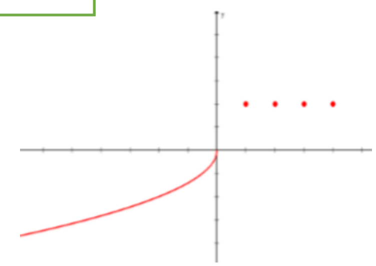
17



4



18



14

$$4x - 8 = 0$$

3

$$f(x) = 4x - 8$$

7

$$\boldsymbol{y^2 = x}$$

13

x	$f(x)$
$^{\pi}/_{2}$	$^{\pi}/_{2}$
0	0
$^{1}/_{3}$	$^{-1}/_{3}$
$^{4}/_{\sqrt{7}}$	$^{-4}/_{\sqrt{7}}$
1	1
1	-1

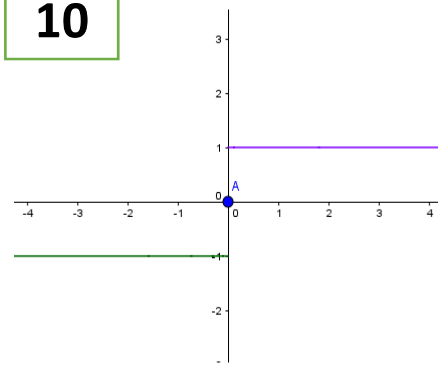
6

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}0, & x \in \mathbb{Q}\\ 1, & x \in \mathbb{I}\end{cases}}$$

8

$$\boldsymbol{h(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}}$$

10



9

x	$f(x)$
$\pi/2$	1
0	0
$1/3$	0
$\sqrt{2}$	1
π	0
$8/5$	0

1

$$\boldsymbol{H=\{(|a|,a): a \in \mathbb{R}\}}$$

11

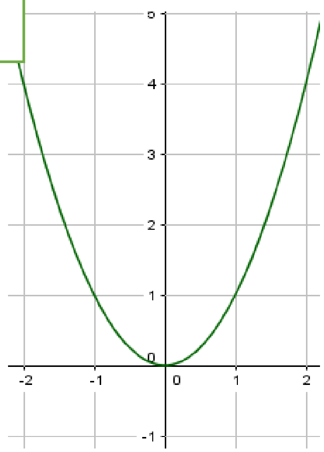
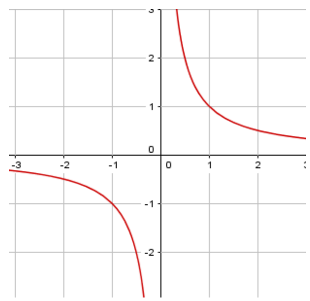
$$\boldsymbol{G=\{(a,2a): a \in \mathbb{R}\}}$$

12

La relación de un número real con su doble.

16

La estatura de un niño respecto a su edad.

2 	**5** 		

4.3 Reporte de actividades de la tercera aplicación

Población: 19 alumnos de cuarto semestre de nivel medio superior.

Aplicación en dos módulos de 50 minutos cada uno (en un módulo es la partida de juego adivina cuál y en el segundo módulo es la aplicación del cuestionario).

El profesor encargado de la materia que prestó el grupo para aplicar, nos explicaba que los alumnos ponían más atención en las clases que el grupo anterior, además que iban más avanzados en el contenido y que era un grupo que se apasionaba por competir entre ellos mismos.

Lo anterior se pudo confirmar, ya que el grupo desde el momento en que se entró al salón de clases se observó la disponibilidad que tenían, ellos mismos hacían ya sus equipos, la mayoría estaba estudiando con ayuda de sus compañeros y libretas.

Cuestionario

Se les aplicó el cuestionario general, el que fue diseñado para la aplicación en la licenciatura de matemáticas, se tomó la decisión de hacerlo porque el profesor consideraba que ya estaban aptos para hacerlo, es decir ya había visto todos los contenidos que abarcaba el cuestionario, ya habían visto los temas más no pudieron contestar del todo.

A diferencia del grupo anterior de la aplicación a este grupo no se le permitió sacar su libreta en el momento de contestar el cuestionario. En el momento de contestar el cuestionario fue donde algunos alumnos estaban inquietos, se escuchaban comentarios como: "está muy difícil", "Esto no lo hemos visto", "Hasta el juego íbamos muy bien". Por lo que se les pedía que contestaran sólo los problemas que estaban relacionados con los temas que ya habían visto. Cabe mencionar que sí había estudiantes motivados al responder el cuestionario, hacían cálculos y experimentaban sus respuestas, preguntaban lo que no sabían o no entendían en el problema.

De manera general, podríamos decir que:

Se les dificultó contestar el problema número siete, ya que al momento de leerlo decían que no habían visto representaciones.

La definición de función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva se les olvidó completamente a la mayoría.

En el momento de graficar querían hacer uso del software Geogebra.

Los problemas en representación algebraica se les dificultaban más que los de representación geométrica, es decir necesitan un apoyo gráfico para identificar si cierto objeto matemático correspondía con ser una función.

Identificaron el eje de las x y y como dominio y rango respectivamente de una función, (dibujan un plano cartesiano y señalan los ejes con los nombres).

De igual manera que en el grupo anterior, la mayoría de los estudiantes señalaron que expresiones con dominio discreto o graficas a trozos no son funciones.

Partidas

Los ítems del juego son los generales, que se presentaron anteriormente. Los estudiantes olvidan cuál elemento es el que eligieron y después tienen que levantar la tarjeta para recordar qué características tenía y así responder con un sí o un no la pregunta que se les hace. Además que tratan de elegir el elemento más difícil para que no sea tan sencillo de adivinar, pero en el momento de tener que responder las características que posee el elemento no pueden contestar, aun viendo los apuntes de la libreta.

El equipo ganador final de todas las partidas se ganó un punto extra cada integrante.

Fueron tres partidas, dos de ellas con cuatro equipos diferentes y el equipo ganador de cada partida jugo al final.

- Primera partida: un equipo de mujeres contra un equipo de hombres, ambos se mostraban competitivos entre ellos.

Ganó el equipo de las mujeres quien eligió el ítem número 4 (la parábola acostada) como su objeto, descubrió el elemento del equipo contrario el ítem número 15 (función identidad con dominio discreto).

Hicieron preguntas como: ¿Es una gráfica? ¿Trazando una línea recta toca sólo un punto? ¿Tu elemento es una función? ¿Tu elemento tiene dominio discreto? Cabe mencionar que al momento de hacer la primera pregunta los estudiantes descartan la gran parte de los ítems.

Los estudiantes hacían la pregunta ¿Tu elemento es una función? Pero no sabían descartar los elementos que no eran funciones, si éstos no estaban en representación geométrica, presentaban la necesidad del registro gráfico para constar si es o no una función.

- Segunda partida: dos equipos mixtos, en los cuales no participaban todos los integrantes, unos se sentían tímidos u otros simplemente no se les veía el interés de participar.

En esta partida ganó el equipo que eligió el ítem número 8 (una función a trozos), descubrió el elemento del equipo contrario el cinco (representación geométrica de la hipérbola).

Pasó algo peculiar en esta jugada: los dos equipos llegaron a las dos tarjetas arriba en el tablero, sin tener la correcta, por lo que tuvieron que rectificar nuevamente cada pregunta y descartar nuevamente los ítems. Duró más tiempo ya que los estudiantes tenían dificultades en distinguir si eran funciones los elementos que no estaban en representación geométrica.

En esta partida se hacen preguntas como: ¿Su elemento es una gráfica? ¿Es una función continua? ¿Es una parábola? ¿Su elemento es una función? ¿Su función es lineal? ¿Su función es algebraica? ¿Su función es de un grado?

En la bitácora de los equipos se puede observar que los estudiantes bajaron tarjetas que no cumplían con ser funciones o gráficas de acuerdo a lo que corresponde a las preguntas, es por eso que tienen que rectificar más de una vez las tarjetas que eligen.

- Tercera partida: los jugadores fueron los dos equipos ganadores de las partidas anteriores. Estuvo con más competencia, ya que la experiencia de los juegos pasados les ayudó a formular mejor las preguntas a realizar, así como el ítem que eligieron para no ser descubiertos. Conforme fueron avanzando en las partidas se puede observar que se hacían preguntas con más dificultad.

Se hicieron preguntas como:

Equipo ganador del primer lugar: ¿Su elemento es una gráfica? ¿Su elemento es una función? ¿Su gráfica pasa por el origen? ¿Su elemento es una función identidad?

Equipo ganador del segundo lugar: ¿Su elemento es una gráfica? ¿Su elemento es una función a trozos? ¿Su elemento es una función cuadrática?

En esta partida el equipo ganador sólo tiene una dificultad durante la partida en identificar si las funciones a trozos pasan por el origen. El equipo contrario se confunde en el momento de llenar la bitácora, por lo que no es posible analizar sus movimientos durante la partida.

Aunque no hubo mejorías en cuanto al material, nos sirvió de experiencia en tiempos e indicaciones.

4.4 Reporte de actividades de la cuarta aplicación

La aplicación de los instrumentos se llevó a cabo los días 11 y 12 de mayo de 2017, en dos módulos, uno en cada día, con una duración de una hora respectivamente. En el primer módulo se jugó con el material didáctico y en el segundo la aplicación del cuestionario de los 10 ejercicios.

Se aplicó con una población de diez estudiantes de segundo semestre de la UAM-UAZ, que ya habían llevado un primer bloque de materias (álgebra superior, geometría euclidiana, Precálculo, laboratorio de cálculo geometría, lógica y teoría de conjuntos y tratamiento de la información digital), y que actualmente cursaban un segundo bloque (álgebra superior II, geometría analítica, cálculo diferencial, laboratorio de cálculo y geometría II, matemática discreta e inglés I).

En el módulo de la aplicación del material se usó una cámara de video para grabar las respuestas y jugadas de los estudiantes, se contó con el apoyo de las bitácoras que fueron llenadas por los estudiantes y de tres hojas de máquina que tenían impreso los 18 ítems del material, esto con la finalidad de que el estudiante pudiera observar el objeto matemático que eligió. Los tableros del material didáctico se dividieron en colores rojo y azul, por medio de unas calcomanías que se colocaron en los tableros de madera. Los equipos se formaron conforme los estudiantes se acomodaron, consideramos que fue por amistades.

Las reglas que se les dieron a los jugadores fueron dos:

- Las preguntas sólo se pueden contestar con un sí o un no.
- Sólo se puede preguntar el número del ítem contrario.

Para iniciar cada partida se lanzaba una moneda al aire seleccionando águila o sello y el equipo que ganaba comenzaba a preguntar en el juego.

Partida #1

Dos equipos, el primero de color rojo, conformado por mujeres, lo etiquetamos de la siguiente manera P1R (partida, uno, rojo) y el segundo por hombres que lo llamaremos P1A (partida, uno, azul).

Entre los diálogos que se describirán enseguida se dará la observación (Obs.) y el análisis (An.) de las jugadas correspondientes a cada equipo.

Los equipos PIR Y P1A eligieron el mismo ítem, sin ellos darse cuenta.

P1A - ¿Es una función?

P1R – Sí.

Obs. – El equipo baja del talero los elementos que corresponden a los números 4 y 18, dejando aún elementos que no correspondían en el tablero. Se les cuestionaban que si estaban seguros de sus respuestas a lo que ellos contestaron – Sí.

An. – Los alumnos de P1A identifican los elementos correspondientes de una función en representación geométrica pero en otro registro no lo identifican.

P1R - ¿Su elemento está en representación gráfica?

P1A – Sí.

Obs. – Eliminan todas las tarjetas de correspondientes a gráficas.

An. – El equipo no tiene dificultades para identificar las expresiones que corresponden a una representación gráfica.

P1A - ¿Está en representación gráfica?

P1R – Sí.

Obs. – El equipo hace la misma pregunta que el anterior.

An. – De igual manera, los estudiantes no presentan dificultades para identificar las tarjetas que se encuentran en el registro gráfico.

P1R - ¿Está definida en todos los reales?

P1A – No.

Obs. - Se les dificulta distinguir si son todos los reales el dominio de la parábola $y = x^2$ por ver sólo una parte de ella en la gráfica. Pero después de que el equipo analiza la respuesta a dar se dan cuenta de que efectivamente la parábola tiene por dominio todos los reales.

An. – Logran definir de manera correcta los dominios de las funciones en partes y de dominio continuo.

P1A - ¿Su dominio son todos los reales?

P1R – No.

Obs. – El equipo muestra dificultades para distinguir las expresiones que tienen su dominio son todos los reales, entre comentarios entre ellos suben y bajan tarjetas, hasta estar seguros de haber bajado las correctas.

An. – Debido a que los estudiantes están indecisos en descartar las tarjetas, dejan la bitácora, como muestra que bajaron las número 2, 5 y 15, aunque en la observación del video se ve que en realidad sólo descartaron 2, 10 y 17 después de un lapso de haber analizado los objetos.

P1R - ¿Su función es continua en su dominio?

P1A – No.

Obs. – Por parte de los dos equipos se tiene confusión acerca de la continuidad en el dominio de la función y en todos los reales, por lo que ambos equipos se guían con continuidad en todos los reales para responder y descartar las tarjetas y no precisamente en lo que se había preguntado.

An. – La confusión de la continuidad o la falta de comprensión en la continuidad en el dominio, lleva al equipo a P1R a descartar las tarjetas 15 y 18 que efectivamente son continuas en todo su dominio pero también lo cumplían las que dejaron arriba, que es el caso de la 4 y 5.

P1A - ¿Está evaluada en cero?

P1R – No.

Obs. – El equipo P1A ya tenía dos fichas en su tablero pero ellos no quisieron preguntar el número del elemento, así hicieron la pregunta anterior, de la cual descartaron la número 15, que efectivamente estaban en lo correcto, pero ya no tenían oportunidad de preguntar, hasta el siguiente turno.

An. – P1A identifican que el ítem número 5 precisamente no está evaluado en cero o no pasa la gráfica por el punto cero.

P1R - ¿Su función es la 5?

P1A – Sí.

Obs. – El equipo ganador fue P1R, aunque al final no sabían cuál ítem elegir, tenían el 4 y 5 que ellas consideraban que habían cumplido con todas las características.

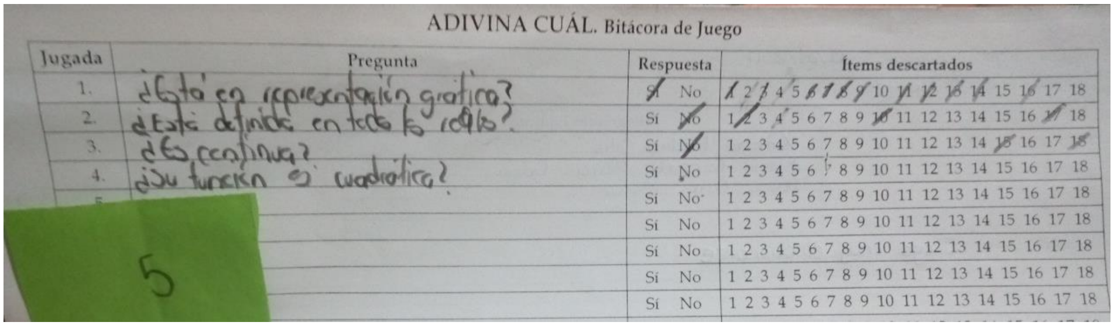


Figura 30. Bitácora del equipo P1R

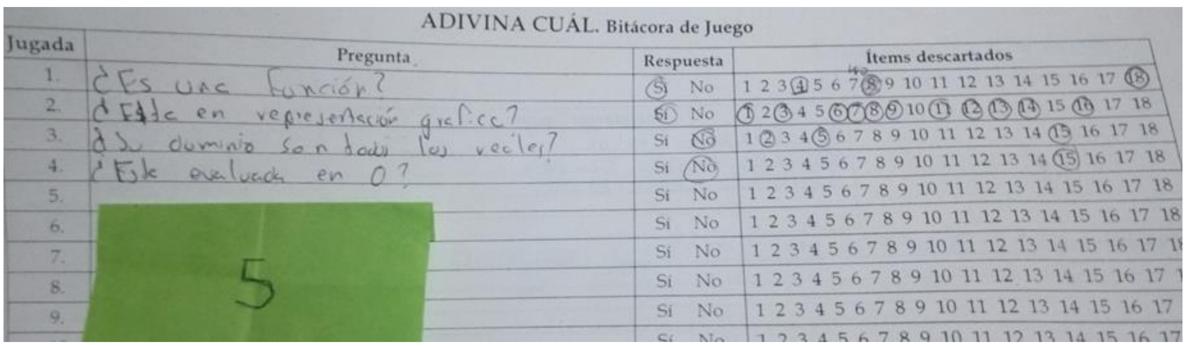


Figura 31. Bitácora del equipo P1A

En esta primera partida ganó el equipo P1R, del cual se pudo analizar que las estudiantes mostraron sus habilidades en sus preguntas y en descartar los ítems en sus jugadas.

Partida #2

En esta jugada sigue participando el equipo ganador P1R de la partida#1 el cual lo nombraremos de manera distinta según el número de la partida P2R. Se integran cuatro alumnos al equipo del tablero azul, el cual etiquetaremos de la siguiente manera P2A (partida, dos, azul).

P2R - ¿Está en representación gráfica?

P2A – No.

Obs. – El equipo P2R distinguen de manera correcta cuáles son los ítems que se encuentran en representación geométrica.

An. – Ahora jugarán con elementos algebraicos, tabulares y verbales de los cuales serán diferentes a la partida anterior.

P2A - ¿Está en representación gráfica?

P2R – No.

Obs. – En la bitácora del equipo P2A no encierran la respuesta que les da el equipo contrario de sí o no, pero se puede ver en el video que el equipo contrario les contesta que no. También reconocen los elementos pertenecientes a la representación gráfica.

An. – De la misma manera que el otro equipo, jugarán con otras representaciones diferentes a la gráfica.

P2R - ¿Su elemento se encuentra en representación verbal?

P2A – No.

Obs. – Distinguen los dos que se encuentran en representación verbal 12 y 16 ítem sin ninguna dificultad.

An. – Las estudiantes ya hacen preguntas diferentes a la anterior debido a que en su tablero tienen representaciones diferentes a la gráfica.

P2A – ¿Está representada a trozos?

P2R – Sí.

Obs. – Los estudiantes de manera rápida bajan las tarjetas que creen que no corresponden a funciones a trozos.

An. – Como sólo tenían en representación algebraica, tabular y verbal, descartaron los ítems que no se encontraban en representación algebraica. Aquí es importante mencionar que no se observó que los estudiantes hicieran un análisis de los ítem en representación tabular, sólo los eliminaron, aunque efectivamente no pertenecían a funciones a trozos.

P2R – ¿Su elemento tiene dominio en todos los reales?

P2A – Sí.

Obs. – En la bitácora no aparece tachada la respuesta del equipo ni los ítems que descartaron, pero se ve que las estudiantes eliminan de manera correcta aquellos ítems que no tienen dominio en todos los reales.

An. -

P2A – ¿Su función es la ocho?

P2R – Sí.

Obs. – El equipo P2A ya sólo tenían dos tarjetas arriba del tablero por lo que ya les correspondía decidirse por un ítem para ganar, tomaron el número ocho que efectivamente era el correcto.

An. – Los estudiantes trataron de hacer preguntas que descartaran el mayor número de tarjetas posibles, por lo que la estrategia les ayudó a ganar. Ellos observaban las tarjetas y veían qué tenían en común para poder asociarlas a sus preguntas.

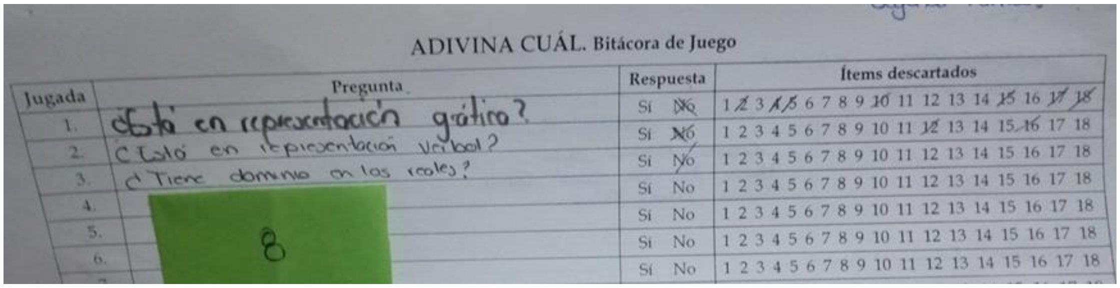


Figura 32. Bitácora del equipo P2R

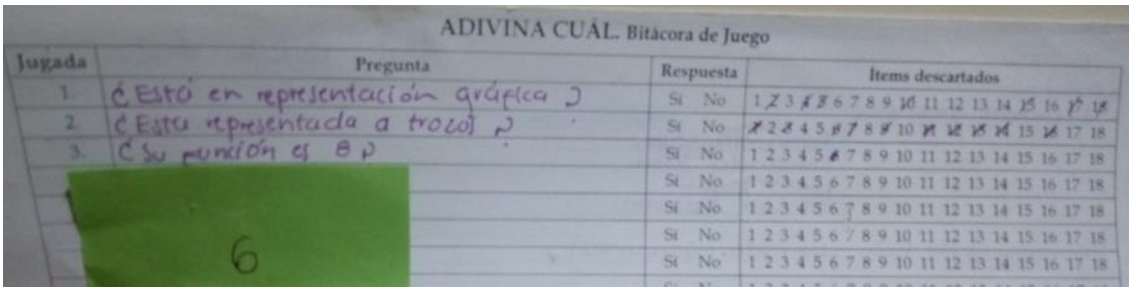


Figura 33. Bitácora del equipo P2A

Ganó el equipo P2A, por lo que al final se les pidió que se hicieran dos equipos de cinco integrantes cada uno para una última partida. Es importante aclarar que a los estudiantes se les dio tiempo libre en cada pregunta y respuesta, esto con la finalidad de que ellos tuvieran la oportunidad de analizar las expresiones de cada jugada, así como para que ellos compartieran sus ideas.

Ahora partida #3 se etiquetan los equipos rojo y azul de la siguiente manera P3A (partida, tres. azul) y P3R (partida, tres, rojo).

P3R - ¿Está en representación gráfica?

P3A – No.

Obs. – Seleccionan aquellos ítems que están en representación gráfica y los descartan rápidamente, para seguir con el juego. Las mujeres son las que más participan en este equipo P3R.

An. – Se puede ver que hacen preguntas al inicio del registro gráfico, considerando que se pueden eliminar más tarjetas en un inicio.

P3A - ¿Su función está en representación gráfica?

P3R – Sí.

Obs. –

An. -

P3R - ¿Su elemento es una ecuación?

P3A – No.

Obs. – Distinguen una ecuación de una función.

An. – Los alumnos observan que en el tablero existe una ecuación y aunque no les sirve para descartar varias tarjetas, dan muestra de sus conocimientos e ideas.

P3A - ¿Su función es continua en cero?

P3R – No.

Obs. – Se puede ver que los estudiantes sólo bajan una tarjeta la número dos, aunque ésta sea continua en cero.

An. – Se tiene dificultad en distinguir si la parábola es continua en cero. Ellos consideran que no por la representación gráfica que ven de ésta.

P3R – ¿Está en representación de conjuntos?

P3A – Sí.

Obs. – Con la ayuda de esta pregunta el equipo logra descartar gran parte de las tarjetas, dejando sólo dos en el tablero, esto les permitirá que la próxima jugada ya poder dar un número para descubrir el objeto matemático contrario.

An.- El analizar las tarjetas les permite a los estudiantes plantear las preguntas adecuadas que los lleven a ganar.

P3A – ¿Su elemento tiene dominio en todos los reales?

P3R – No.

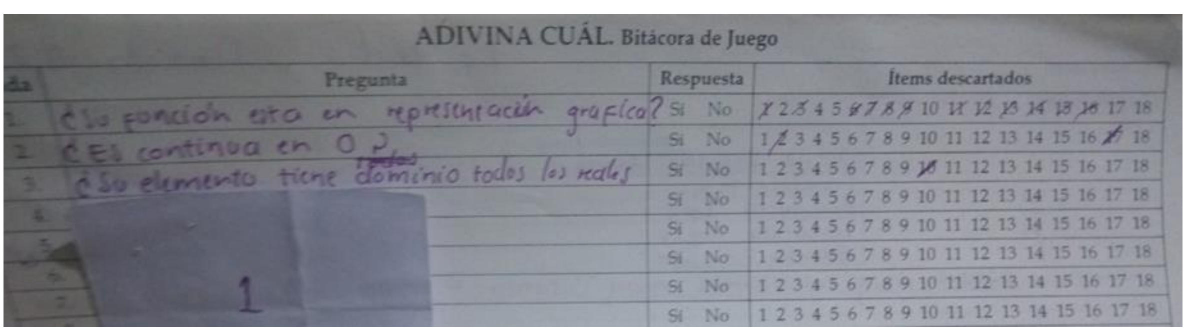
Obs. – Eligen bajar el número 10 (función a trozos) para descartar.

An. – A pesar de que analizaron por unos momentos los ítems no tenían características que descartaran varias a la vez.

P3R - ¿Su elemento es el 1?

P3A – Sí.

Obs. – Los ítems que quedaron al final sólo eran dos, que dieron uno al azar y sí lo acertaron.


ADIVINA CUÁL. Bitácora de Juego

da	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1	¿Su función esta en representación grafica?	Sí No	~~1~~ 2 ~~3~~ 4 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ 10 ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 18
2	¿Es continua en 0?	Sí No	1 ~~2~~ 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 ~~17~~ 18
3	¿Su elemento tiene dominio todos los reales	Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 ~~10~~ 11 12 13 14 15 16 17 18
4		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

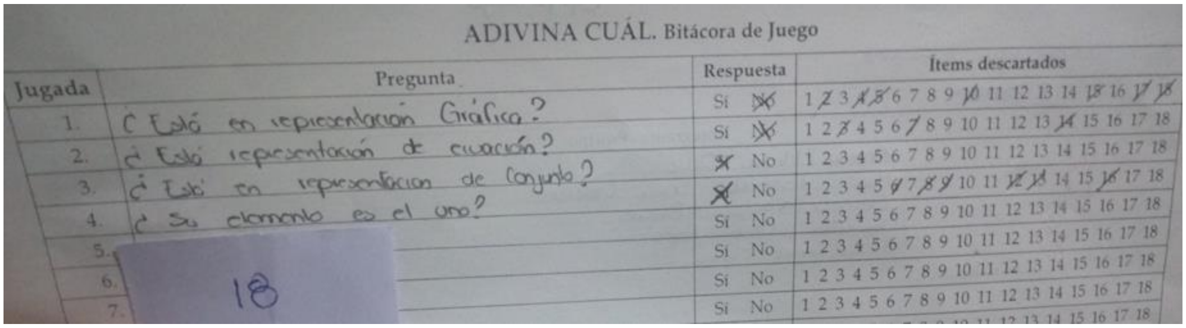


Figura 34. Bitácora del equipo P3R

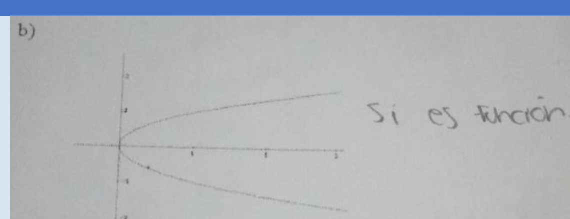
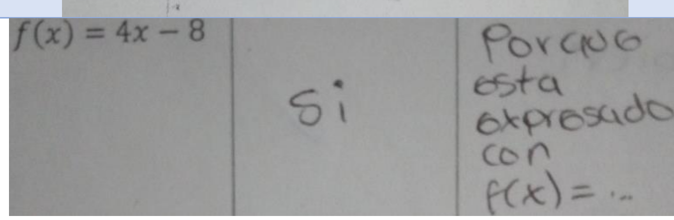
Análisis del cuestionario

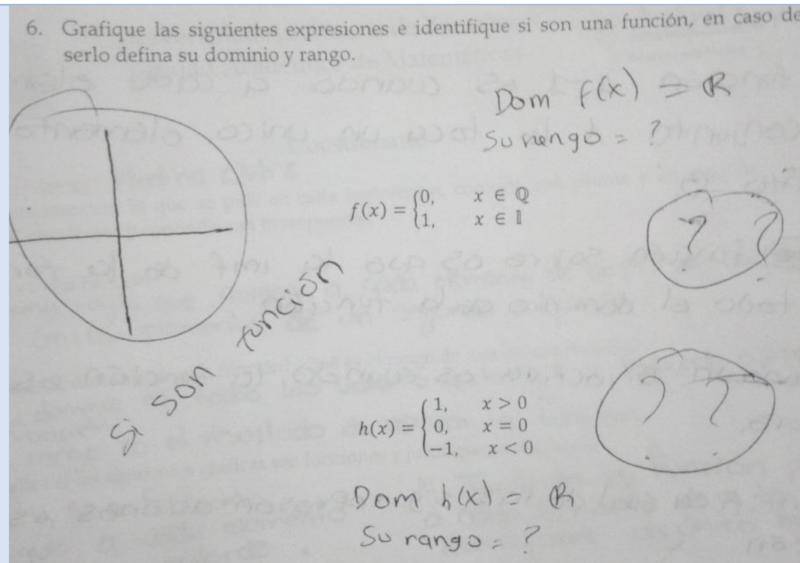
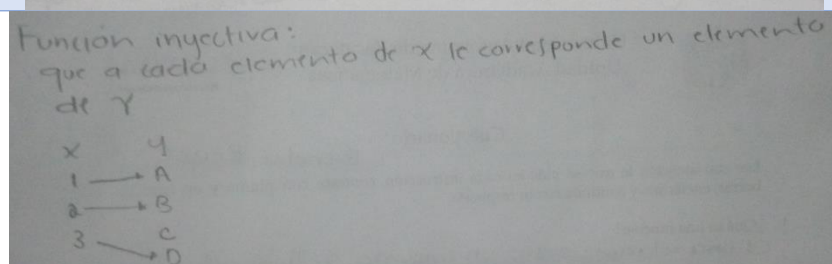
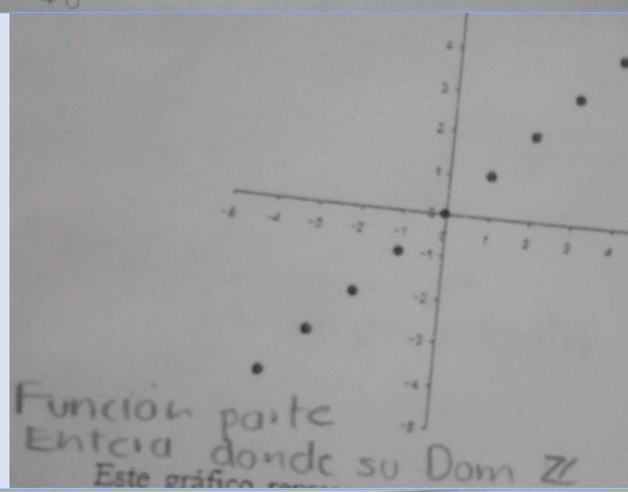
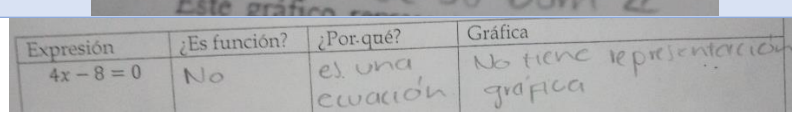
Ahora pasaremos al análisis de la aplicación del cuestionario, de la cual anteriormente ya se explicó que se destinó una hora para que los estudiantes lo resolvieran, pero sólo se llevó 50 minutos de la aplicación, ya que unos terminaron en 30 minutos, otros en 40.

Con base en la revisión del cuestionario, una parte de los estudiantes universitarios que se analizaron tienen concepciones de funciones prototipo, dificultades para distinguir de la definición de función y de función inyectiva, en graficar el conjunto solución de una ecuación, confusión de la representación de una función con dominio discreto con la función parte entera.

Enseguida, en la Tabla 4.1. se presentan evidencias de lo que se detectó en el análisis.

Tabla 4. 1. Análisis del cuestionario.

Concepción, dificultad, conocimiento o algún tipo de comprensión	Evidencia
Concepción de la parábola rotada, sigue siendo función.	
Es de la forma $\boldsymbol{F(x)}$ "Describir las variables por medio de las literales usualmente empleadas (escribieron x,y)". López (2007)	

<table>
<tr>
<td>Tránsito de registros de representación.
Dificultades en tareas de pasaje de registro algebraico al geométrico
Lo anterior lo mencionan:
García, Vázquez e Hinojosa (2004)
Jaimes (2012)
Lávaque et al. (2006)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificultad en distinguir la correspondencia de las variables en la definición de función y función inyectiva.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Uno de los estudiantes le llama función parte entera a una función con dominio discreto, se queda con la idea del parecido con la función parte entera.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificultad para graficar la solución de una ecuación.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las conclusiones de este trabajo, para ello retomaremos el objetivo general planteado y los particulares:

Objetivo general:

Proponer un material didáctico para analizar la comprensión del concepto de función matemática en el nivel educativo superior.

Objetivos específicos:

- Explorar las características deseables de materiales didácticos existentes.
- Revisar los aspectos contemplados en las propuestas didácticas en torno a la función, así como algunas de las dificultades, obstáculos, errores y concepciones que presentan los estudiantes al estudiar el concepto.
- Analizar las características de la función contempladas en el aula.
- Diseñar y validar el material.

Con base en lo planteado y en el análisis hecho, podemos decir que las características que debe tener el material didáctico para que cumpla el objetivo de analizar la comprensión del concepto de función en el nivel educativo superior son:

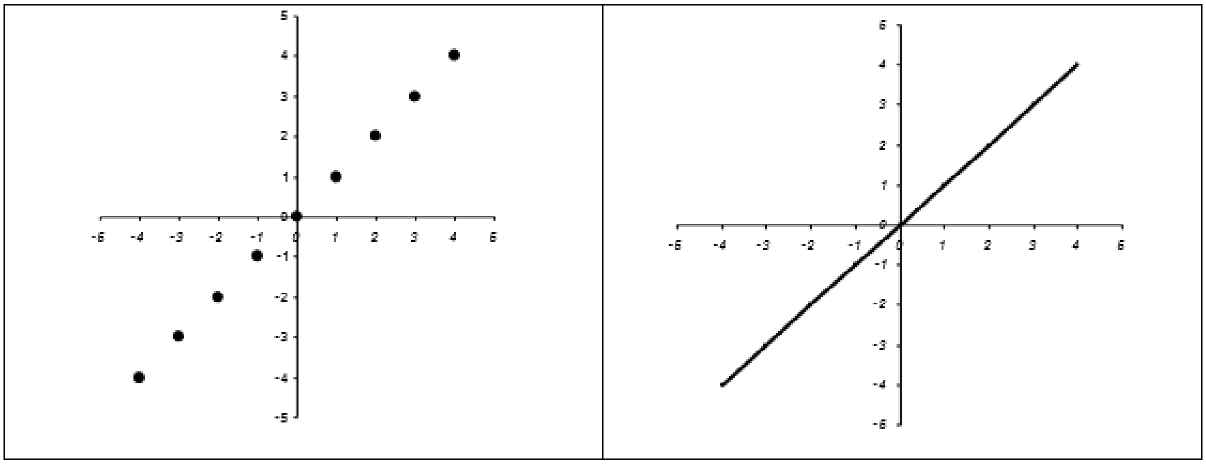
✓ Contemplar las distintas representaciones (Geométrico, algebraico, tabular y lenguaje verbal). Es decir, incluir una misma función en sus diferentes registros con el fin de que el estudiante identifique que se trata de la misma función.

✓ Confrontar las posibles concepciones alternativas de los estudiantes. Dentro del análisis de distintas investigaciones que abordaron las principales concepciones que presentan los alumnos en el tema, se toman algunas de ella para aplicarlas en nuestro material didáctico, de esta manera podemos analizar con más facilidad la comprensión, teniendo estos ítems en específico.

✓ Tener como apoyo la bitácora del juego que también tomó un papel importante para el análisis, ya que en ella se podía visualizar los pasos que hizo el estudiante en cada partida y jugada.

En la exploración de las características deseables de materiales didácticos existentes, encontramos que éstos deben de ser fáciles de manipular, de fácil acceso y motivadores para el estudiante. Aunque existe una gran diversidad de materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas, es importante decir que cada uno de ellos cumple con el objetivo de apoyar en la enseñanza de algunos temas.

En la revisión de los aspectos contemplados en las propuestas didácticas en torno a la función, estudiamos algunos de ellos que se presentan de manera general con los estudiantes como dificultades, obstáculos, errores y concepciones. Se tomaron aquellos que fueran *ad hoc* con lo visto en el plan de estudios, en el nivel educativo el alumno podría resolver con el conocimiento adquirido durante las clases. Dos de los ítems que causaron conflicto en los estudiantes fueron los siguientes, ya que descartaban la primera imagen de no ser función, mientras que el jugador contrario la mantenía como función, lo cual hacía nunca poder adivinar el objeto matemático y ellos mismos entrar en discusión, de si es o no es una función.



Fue enriquecedor el jugar con este ítem, pues el estudiante debatía y daba sus argumentos para defender sus ideas, de lo cual nosotros inferimos que estaba comprendiendo con base en nuestro marco referencial de las actividades de comprensión: la explicación, la ejemplificación, la aplicación, la justificación, comparación y contraste, la contextualización, y la generalización. Al final se daba la conclusión y entre ellos mismos se convencían de que efectivamente es una función.

El analizar las características de la función contempladas en el aula fue una experiencia en la que se permitió observar la manera en la que la docente enseñaba, los ejercicios y ejemplos que se presentaban en cada sesión, para posteriormente tomar algunos de ellos y poner en confrontación el conocimiento del estudiante. Por ejemplo, como el siguiente, fue un ítem en el que el alumno no identificaba su representación tabular y gráfica.

$$\boldsymbol{H} = \{(|\boldsymbol{a}|, \boldsymbol{a}) : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\}$$

El diseñar y validar el material fue un proceso divertido y enriquecedor, pues el diseño tuvo diferentes etapas e ideas que se discutieron para optimizar la que proporcionaría a los estudiantes para que analizaran. La validación del material en sus diferentes etapas, fue un rediseño de éste, pues en cada aplicación surgían detalles que hacían una mejora del material.

Recoger datos de manera escrita, videograbaciones, cuestionarios del estudiante y del profesor, bitácora del juego, son elementos que fortalecieron los resultados en cada aplicación y permitieron así tener un mejor diseño.

En cuanto a la comprensión de los estudiantes, podemos decir que existen diferentes niveles, unos muestran sus habilidades y conocimientos, otros alcanzan un nivel de comprensión de contenido, de resolución de problemas, de nivel epistémico, incluso hubo casos de estudiantes que tienen un nivel de comprensión nivel investigación, según Perkins (Ver Tabla 2.1).

Recomendaciones

Estar convencidos de que el uso de materiales didácticos ofrece tantas ventajas dentro del aula y no son una pérdida de tiempo es una de las opciones que se deben tomar para que se den buenos resultados, pues recordemos que el alumno tomará una actitud, según la manera que el profesor se lo presente.

Ser cuidadosos con el tiempo que se destina para aplicar cada actividad como lo son, el uso del material didáctico y aplicación del cuestionario, de tal manera que el estudiante pueda contestar sin presión y ésta no intervenga en sus respuestas. Cuidando siempre, no darles las respuestas, sino más bien, encaminarlos a que reflexionen cada una de sus ideas y puedan tener éxito en el juego, ganando por conocer y comprender el tema y no por cuestiones de adivinar.

Llevar más de un par de tableros, si el grupo a aplicar es numeroso ya que con uno se puede salir el grupo de control, llevando más se pueden hacer equipos y el profesor sólo observar la manera de jugar y contestar de los alumnos. Es importante mencionar que el material es de fácil acceso si se adaptan casilleros de blanquillos simulando el tablero y así se pueda llevar tantos materiales como se requieran.

En el momento de la aplicación ser extremadamente atento para poder analizar y conectar cada pregunta, respuesta y comentario que los estudiantes hagan en su momento. Que mejor que sea el profesor el que aplique dicho material, pues éste conoce la forma de pensar y aprender de sus alumnos y así puede indagar mejor en la interpretación de sus resultados.

Ideas para futuras investigaciones

El material didáctico desarrollado en esta investigación se puede adaptar para una gran diversidad de temas en los diferentes niveles educativos como secundaria, bachillerato y superior. Por ejemplo el tema de ecuaciones algebraicas en sus diferentes registros de representación, en el cual se puede ir aumentando el grado de dificultad para contestar según sea el nivel de los estudiantes. A manera de experiencia les comparto que esta idea yo la apliqué recientemente con mis estudiantes de secundaria, adaptándolo a su nivel y contexto que presentaban, obteniendo resultados favorables. Pude observar las limitantes que ellos presentaron al jugar, así como las fortalezas y conocimientos que más se aprendieron y sin duda una motivación por ganar en cada una de las partidas.

Es importante advertir que como con cualquier otro juego, la solución después de un tiempo de haberlo jugado se puede volver memorística. Es decir, podrían grabarse que algunos objetos matemáticos del juego son función, sin tener comprendido el por qué. También es importante decir que durante la aplicación del material, en una de las partidas los estudiantes ganaron al final, no porque supieran sino porque dieron la respuesta al azar y ésta fue acertada. En torno a esto, el material se podría aplicar más ocasiones para perfeccionar los ítems planteados, para delimitarlos por niveles educativos y también para aumentar el número de ítem que permitieran evitar en la medida de lo posible estos inconvenientes.

Hacer competencias a nivel escuela en las que se hagan grupos mixtos como equipos y así compacte sus conocimientos, fomentando la convivencia y talleres de conocimiento dentro de la institución.

Reflexión como profesora

Como lo mencioné en un inicio, en mi experiencia al haber trabajado con materiales didácticos en un taller de difusión, para mí era un tema de interés pues observaba que su uso era de apoyo para un mejor aprendizaje en los temas específicamente de matemáticas. Ahora, al concluir este trabajo, es satisfactorio haber aportado uno de ellos, específicamente para estudiantes de nivel superior, donde se observó que hay pocos. Y se reafirma que es interesante y motivador trabajar de manera lúdica sus conocimientos.

Al aplicar el material didáctico se pudo observar la motivación que se generaba en los estudiantes, incluso en aquellos que generalmente se mantenían apartados de la clase, se acercaban con interés a participar, sorprendiendo a sus profesores.

Como profesora me queda esa buena experiencia de que, con ayuda de los materiales didácticos, se puede despertar el interés por aprender matemáticas en los alumnos de cualquier nivel de una manera divertida, donde el estudiante explora y analiza su propio conocimiento.

El término de este trabajo representa el inicio de una nueva etapa que tanto he estado esperando con alegría, la cual es llevar el conocimiento a nuevos alumnos. Y es ahora que tengo la oportunidad de enseñar matemáticas a estudiantes de nivel secundaria, donde aplico un material didáctico al término de cada eje de los bloques según sea el tema visto se adapta, obteniendo de igual manera resultados favorables.

Observo que el reto no es llevar materiales didácticos solamente a los alumnos, sino también a los demás profesores que están en busca de mejorar su práctica docente, compartiendo ideas y resultados de implementarlo en sus aulas de trabajo.

Como profesores, el utilizar diversos métodos de enseñanza nos ayuda a entender la manera de aprender de nuestros diferentes estudiantes. Es decir, de los que se tenía la idea de que batallaban para entender las matemáticas, con ayuda de otros métodos nos podemos dar cuenta de que su manera de comprender es diferente a la que le estamos enseñando y que siempre es bueno innovar en nuestra forma de trabajar, pues cada estudiante es diferente y por lo tanto se le debe enseñar diferente.

El ser profesora es una oportunidad maravillosa de entrar al mundo del conocimiento, descubriendo en cada estudiante aprendizajes nuevos y únicos, como lo son ellos.

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Revista Psicodidáctica, 5*, 107-114.

Badia, A., Barberà, E., Coll, C., & Rochera, M. J. (2005). La utilización de un material didáctico autosuficiente en un proceso de aprendizaje autodirigido. *Revista de Educación a Distancia*, 1-18.

Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*. *3*, 1.

Brousseau (1896). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33- 115.

Cañadas, M. C., Durán, F., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M. J., Peñas, M., Villarraga, M., & Villegas, J. L. (2002). Materiales didácticos en la resolución de problemas. En J. M. Cadeñoso; E. Castro; A. J. Moreno; M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 101-112). Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/268/

Carrillo, D., & Sánchez, E. (2010). *El uso de materiales en la enseñanza de la matemática escolar*. Universidad de Murcia.

Cascallana, M. T. (1999). *Iniciación a la matemática Materiales y recursos didácticos*. España: Santillana.

Díaz. J.L. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza, 4*, pp. 14-21. Cinvestav-IPN, México, D.F.

Duval, R. (2005). *Cómo plantear y resolver problemas*. *Vigésimo séptima reimpresión*. México: Editorial Trillas.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Lávaque, J., Méndez, N., & Villaroel, H. (2006). Concepciones de los alumnos de la noción de Función. *Revista de Educación Matemática, 22*. Disponible en: www. famaf. unc. edu. ar/rev_edu/documents/vol_21/pro_2. pdf.

García, L., Vázquez, R.A., & Hinojosa M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías, 7*(24).

Gairín, J., & Fernández, J. (2010). Enseñar Matemáticas con Recursos de Ajedrez. *Tendencias Pedagógicas*, *1*(15).

Godino, J. D., Batanero, M.C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacán University San Nicolás de Hidalgo*, Morelia, México.

Jaimes, N.M. (2012). *La noción de función un acercamiento a su comprensión.* Universidad de Colombia.

Kelly, C. A. (2006). Using Manipulatives in Mathematical Problem Solving: A Performance Based Analysis. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3(2), 184-193, ISSN 1551-3440.

López, J. (2007). *Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Mendoza, L.M., Quintanilla, V.A., & Gallardo, J. (s.f). *Recursos y materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas.* Recuperado el día del 2016 de https://www.yumpu.com/es/document/view/21743000/recursos-y-materiales-didacticos-mendoza-quintanilla-gallardo

Nava, C., & Navarro, C. (2006). *Un estudio, sobre los registros de representación algebraica y gráfica, de inecuaciones lineales y de valor absoluto.* (Tesis de licenciatura no publicada). Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero.

Oviedo, L.M. (2005). Las funciones… un obstáculo para nuestros alumnos. *Aula Universitaria, 1*(7).

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone (Comp.), *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1. Pp. 69-92.

Perkins, D. (2003). El contenido. Hacia una pedagogía de la comprensión. Perkins, D., La escuela inteligente: *Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*, 79-101.

Prada, R., Hernández, C., & Ramírez, P. (2015). Comprensión del concepto de función en los primeros cursos de educación superior. *El Cálculo y su Enseñanza*, *6* (6), 29–44. Cinvestav - IPN. México, D.F.

Ruíz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* España: Universidad de Jaén.

Valenzuela, M. (2012). *Uso de Materiales Didácticos Manipulativos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría.* Departamento de Didáctica de Matemática. Universidad de Granada.

Vanegas, D., & Escalona, M. (2013). Concepciones sobre funciones matemáticas de una variable, en estudiantes del primer semestre de Ingeniería. *Revista Omnia.*

Velasco, E.S. (2012). *Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de Valladolid, España.

Youschkevitech, A. P. (1976). El concepto de función hasta la primera mitad del siglo XIX. *Arch. Hist. Exact. Sci*, (16), 37-85.

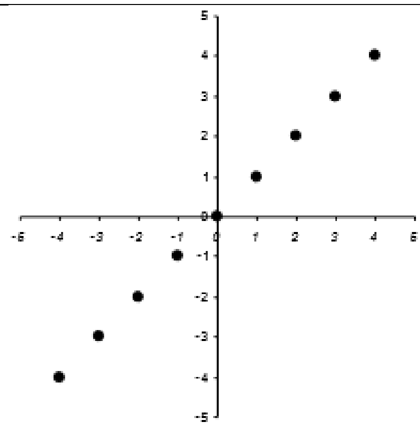
ANEXOS

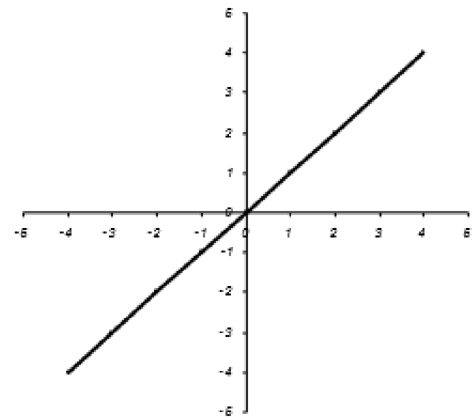
ANEXO 1. Extracto de la planeación de la Unidad Didáctica de Precálculo.

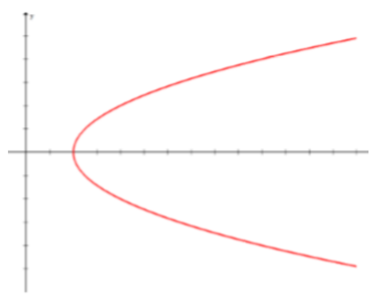
UNIDAD DE COMPETENCIA 2	TOTAL DE HORAS DEL SEMESTRE QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA		
	AID	ATS	ATI
Usar el concepto, características y distintos registros de la función definida como relación, tanto para la determinación si una relación es o no función, como para la caracterización de una que si lo es, para la construcción de funciones con características específicas y para la resolución de problemas de aplicación.			

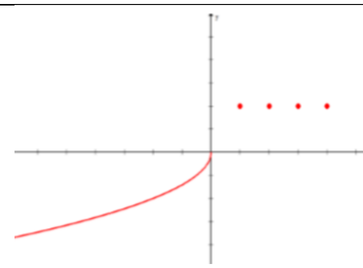
Desempeños	Saberes Teóricos/Declarativos	Saberes Procedimentales	Competencias Genéricas
Identificar el concepto de función en sus distintas representaciones; así como determinar la sobreyectividad e inyectividad de funciones elementales.	Identificará en los diferentes registros (algebraico-analítico, gráfico, verbal y tabular) las funciones por sobre aquellas que sólo son relaciones; así como las primeras propiedades de éstas: ser inyectiva y ser sobreyectiva. Reconocerá las componentes de una función: dominio, recorrido; caracterizándolas como conjuntos topológicos en R.	Reconocer las funciones elementales: polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas. Determinar si una función elemental es inyectiva y/o sobreyectiva.	Capacidad crítica y autocrítica Compromiso con la calidad
Clasificar a las funciones de acuerdo a sus características específicas.	Relacionará las propiedades de las funciones de ser inyectivas y sobreyectivas, con los conjuntos que definen a la función.	Modificar los conjuntos de definición de las funciones para cambiar las características de inyectividad y/o sobreyectividad.	
Aplicar el concepto de función en la resolución de problemas en distintos contextos.	Identificará el concepto de función como relación unívoca entre magnitudes o variables, y sus usos, en diferentes contextos	Identificará las propiedades de ser inyectiva/o sobreyectiva, de las funciones, así como los dominios y recorridos adecuados, cuando se presenta este concepto en diferentes fenómenos: problema del calentamiento-	

ANEXO 2. Ítems.









$$4x - 8 = 0$$

$$f(x) = 4x - 8$$

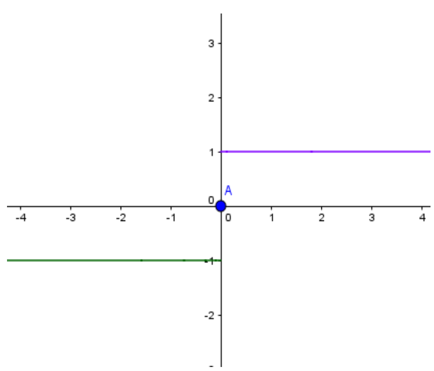
$$\boldsymbol{y^2 = x}$$

$$\boldsymbol{H} = \{(|\boldsymbol{a}|, \boldsymbol{a}) : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\}$$

x	$f(x)$
$\pi/2$	$\pi/2$
0	0
$1/3$	$-1/3$
$4/\sqrt{7}$	$-4/\sqrt{7}$
1	1
1	-1

x	$f(x)$
$\pi/2$	1
0	0
$1/3$	0
$\sqrt{2}$	1
π	0
$8/5$	0

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$	$h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

	$G = \{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$
La relación de un número real con su doble. 	La estatura de un niño respecto a su edad.

ANEXO 3. Cuestionario para estudiantes

Universidad Autónoma de Zacatecas
Unidad Académica de Matemáticas

Cuestionario

Lee con atención lo que se pide en cada instrucción, contesta con pluma y en caso de borrar, enciérralo y continúa con tu respuesta.

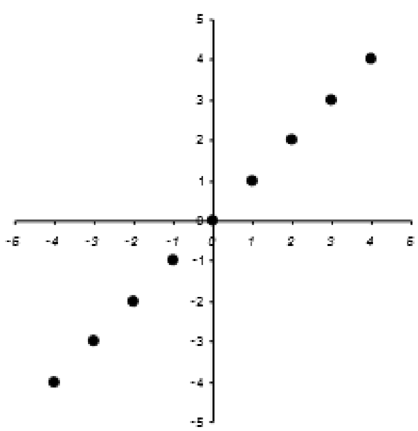
1. ¿Qué es una función? Da un ejemplo.

2. ¿Qué es el dominio y rango de una función?

3. ¿Qué significa que una función sea inyectiva, sobreyectiva y biyectiva?

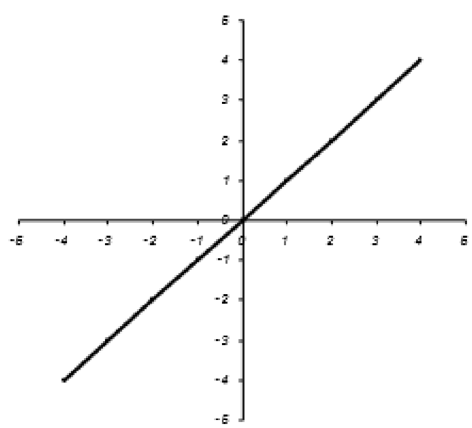
4. ¿Cuál gráfica representa una función?

a)



Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores enteros

b)

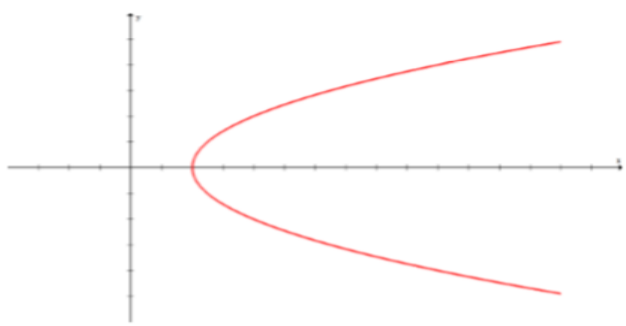


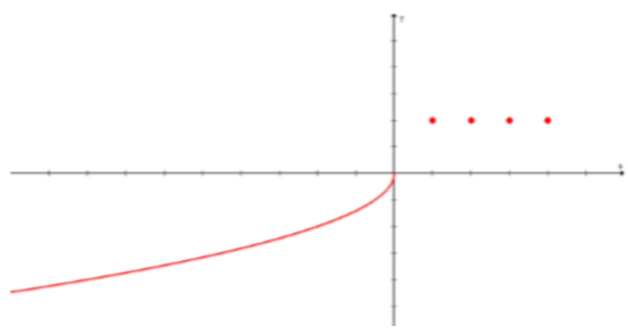
Este gráfico representa a $y = x$, donde x solo puede tomar valores reales

5. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa una función? (Grafica tu respuesta)

Expresión	¿Es función?	¿Por qué?	Gráfica
$4x - 8 = 0$			
$f(x) = 4x - 8$			

6. Identifique cuál de las siguientes representaciones es una función.





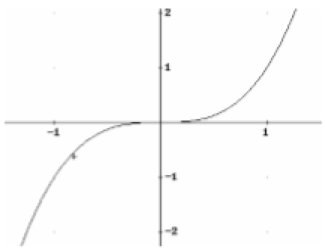
7. De los siguientes conjuntos:
   - Defina si son funciones
   - Realice dos cambios de representación de ello (tabular, algebraico, geométrico o verbal)

   $G = \{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$

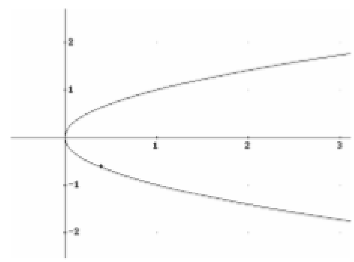
$H = \{(|a|, a) : a \in \mathbb{R}\}$

8. Indica cuál de las siguientes gráficas representan una función.

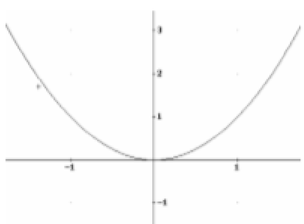
a)



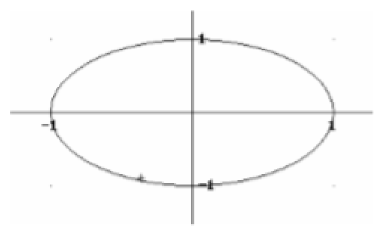
b)



c)



d)



9. Grafique las siguientes expresiones e identifique si son una función, en caso de serlo defina su dominio y rango.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

10. Identifique si la siguiente expresión es una función, en caso de serlo defina si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva en los números reales.

    $w(x) = 1 - 2x$

ANEXO 4. Cuestionario de opinión para profesores

Universidad Autónoma de Zacatecas
Unidad Académica de Matemáticas

Nombre: ____ Edad: __________________

Años de experiencia docente: ________ Escuela: ____________________________________

Por favor, conteste las siguientes cuestiones de la manera más honesta posible. Toda sugerencia o crítica recibida servirá para la mejora del material, por tanto se le agradece de antemano que sus respuestas sean profundas y justificadas.

1. ¿Cuál es su opinión general del material didáctico implementado (Adivina cuál)?
2. Considera viable la implementación del material dentro de su práctica docente cotidiana. ¿Sí o no y por qué?
3. De las reglas del juego (hacer preguntas que se respondan con un sí o un no, se puede adivinar el objeto del equipo contrario hasta que se tengan dos tarjetas en el tablero) ¿Cuál(es) cambiaría y por qué?, ¿Implementaría alguna otra? ¿cuál?
4. Los ítems del material ¿Le parecieron congruentes con el nivel de sus estudiantes?, ¿Cuál(es) le parecieron más y menos interesantes? Justifique su respuesta.
5. El tiempo de aplicación del material ¿Le pareció adecuado?, ¿Cree que podría incluirse dentro de la planificación de sus clases en torno al concepto función?
6. Fortalezas o ventajas que observó en los estudiantes en el momento de interactuar con el material.
7. Debilidades o desventajas que observó en los estudiantes en el momento de interactuar con el material.
8. Alguna sugerencia de modificación para el material.
9. Si usted lo aplicara con su grupo ¿Qué cambios haría en la forma de aplicación?
10. Respecto al cuestionario, ¿lo considera adecuado respecto a los conocimientos que sus estudiantes tenían?

ANEXO 5. Bitácora de Juego. ADIVINA CUÁL.

Jugada	Pregunta	Respuesta	Ítems descartados
1.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
3.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
4.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
5.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
7.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
8.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
10.		Sí No	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Lugar y fecha:

Grado y grupo:

Integrantes Equipo:

Observaciones:

____