UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

Unidad Académica de Matemáticas

Situaciones didácticas que atienden el proceso de enseñanza-aprendizaje de exponentes naturales, cero y racional $\left(\frac{1}{2}\right)$ en bachillerato

Informe académico de desarrollo profesional que para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

L. en M. Sandra García Quezada

Directoras del informe académico de desarrollo profesional:

M. en M. Elvira Borjón Robles

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Zacatecas, Zac. Noviembre de 2018

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo financiero otorgado
por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)
de Septiembre de 2015 a Julio de 2017.
N° de Becario: 708372

Dedicatoria

Dedico esta tesis con mucho amor a mis padres, a mi hermano y a mi esposo, ya que sin ellos habría sido imposible la conclusión de este trabajo, ya que, siempre estuvieron ahí apoyándome moralmente, en aspectos técnicos, desvelándose conmigo para que no me quedara sola trabajando, etc. Por todo esto y mucho más, les dedico este proyecto.

Agradecimientos

A Dios por darme la oportunidad de concluir con este proyecto tan importante en mi vida profesional.

A mi padre, por todas las ocasiones en las que se levantó temprano para llevarme a tomar mis clases de maestría y por su apoyo incondicional que me brindó durante todo este proyecto, incluso por preguntarme por la tesis, aunque me molestara.

A mi madre, por las ocasiones en las que se desveló junto conmigo acompañándome mientras yo avanzaba en la tesis y por brindarme su apoyo incondicional durante todo este trabajo e incluso, por aguantar mi mal carácter por el estrés de la maestría.

A mi hermano, por apoyarme de manera incondicional en asuntos técnicos, por hacer críticas constructivas a los diseños de las actividades que se elaboraron para este proyecto, sin importar lo cansado que estuviera y el tiempo que tuviera que invertir en ello.

A mi esposo, por la gran ayuda que me brindó en innumerables ocasiones, por ejemplo, por ayudarme a buscar artículos en internet que yo no encontraba y él sí, por su paciencia cuando andaba de mal humor, por impulsarme a seguir adelante incluso cuando en ocasiones no tenía ganas de continuar.

A mis asesoras de tesis, la M. en M. Elvira Borjón Robles y la M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara, por compartir sus conocimientos conmigo, por el tiempo que me dedicaron y por la paciencia que me tuvieron para que me decidiera a concluir este proyecto.

Al Dr. Plácido Hernández Sánchez por prestar el material (reglas y compás) que sirvió de apoyo a los alumnos participantes en el desarrollo de la situación didáctica 2.

A los maestros Edrick y Raúl, profesores de la Unidad Académica de Preparatorias Plantel V (Jerez de García Salinas), ya que sin su apoyo, no habría sido posible la experimentación de este trabajo.

A mis sinodales y a todos los maestros que me dieron clase durante la maestría, por las aportaciones que hicieron a este trabajo y en general por compartir su conocimiento conmigo.

A todas las personas que de una u otra manera hicieron posible que se cumplieran los objetivos de esta investigación.

Carta de responsabilidad y cesión de derechos

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 1 del mes de Noviembre del año 2018, la que suscribe Sandra García Quezada, alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 27803914; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado titulado "Situaciones didácticas que atienden el proceso de enseñanza-aprendizaje de exponentes naturales, cero y racional $\left(\frac{1}{2}\right)$ en bachillerato" bajo la dirección de la M. en M. Elvira Borjón Robles y M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara.

Por tal motivo, asume la responsabilidad de su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

ATENTAMENTE

Sandra García Quezada

Índice

Resumen

En el presente trabajo se aborda la problemática relacionada con la enseñanza-aprendizaje de los exponentes en el bachillerato. Se ha identificado que los alumnos cometen errores cuando estudian este contenido, ya sea en el nivel secundaria, bachillerato o superior, esto se cree que puede deberse a la complejidad del tema, ya que, históricamente hablando se han establecido algunas convenciones matemáticas, por ejemplo, se sabe que $a^0 = 1, a^n = a \times a \times a \dots \times a$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, esto, al ser convenios que se han establecido dentro de la matemática puede ser que dificulte el aprendizaje de los alumnos. Al respecto, se ha encontrado que éstos cometen errores como: $2^0 = 0,\ 2^{-3} = -8,\ 2^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)$, los cuales evidencian que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de los exponentes. Por tal motivo, este tema adquiere importancia para ser estudiado.

Por otra parte, se puede comentar que la presente investigación tiene como objetivo que los alumnos aprendan mediante dos situaciones didácticas el contenido de exponentes: natural, cero y racional $\left(\frac{1}{2}\right)$. Dicho aprendizaje se verá reflejado en la solución que los alumnos proporcionen a dichas situaciones, ya que según Brousseau (1986) el alumno aprende adaptándose al medio. El logro de los objetivos de este trabajo se llevó a cabo mediante la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseua, 1986) y con la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como metodología. Con la finalidad de cumplir los objetivos planteados, se diseñaron dos situaciones didácticas, una para exponentes naturales y cero (Actividad 1) y otra para exponentes racionales, en particular, para el exponente $\frac{1}{2}$ (Actividad 2).

Como conclusiones, se puede decir que gracias al marco teórico utilizado y a la metodología, se logró cumplir con los objetivos, en particular, siguiendo las fases de la metodología como fue la experimentación y el análisis a posteriori y validación se obtuvieron algunos resultados como los siguientes:

Los alumnos de segundo semestre de bachillerato aprendieron a desarrollar y dar el resultado correcto para expresiones exponenciales como: $3^5, 5^3, 2^5$, con la secuencia didáctica diseñada y con la ayuda del material didáctico propuesto (Actividad 1). También, aprendieron a aproximar la raíz cuadrada de varios números naturales mediante el método geométrico y obtuvieron conclusiones por ellos mismos como fue: identificar que la raíz cuadrada de un número es lo mismo que elevar ese número al exponente $\frac{1}{2}$ (Actividad 2). Esto, comparado con el análisis a priori que se hizo de las actividades deja ver que en general se obtuvo lo que se esperaba en esta investigación.

Palabras clave: Exponente natural, exponente racional, exponente cero y situación didáctica.

Introducción

La inquietud por esta investigación que se centra en el contenido de exponentes naturales y racionales, en el nivel bachillerato, surgió primeramente de mi experiencia, ya que observé que para los alumnos de dicho nivel es muy complicado entender exponentes, detecté que cometían algunos errores como los que reportan Abrate, Pochulu y Vargas (2006) y Martínez (2007). Específicamente, en el trabajo de Martínez (2007), por ejemplo, se exhibe que estudiantes de Secundaria, Bachillerato y Superior cometen los siguientes errores:

$2^0 = 0$, ya que "el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada".

$2^0 = 2$, ya que "el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2".

$2^1 = (2)(2) = 4$, ya que "multiplicamos una vez"

$2^{-4} = -16$, ya que "$2^4 = 16$ y se le pone un signo".

(Martínez, 2007, p. 129-130)

Martínez (2007) y González (2010) atienden este tipo de errores a través del diseño de secuencias didácticas, sin embargo, llama la atención que en su diseño siempre trabajan con la expresión 2^x. Por ello, en la presente investigación se quiere brindar una propuesta alternativa que sea utilizada para promover el aprendizaje del tema de exponentes en alumnos de segundo semestre del nivel Bachillerato.

En el capítulo 1, se puede encontrar la problemática que originó esta investigación, que se refiere a la identificación de los errores que cometen los estudiantes de nivel bachillerato en el contenido de exponentes, además, se encuentran los objetivos tanto generales como específicos que orientan esta investigación, de manera general se puede decir que se quiere lograr el aprendizaje de los estudiantes de bachillerato en el tema de exponentes racionales y esto se logrará mediante el diseño y aplicación de una situación didáctica.

Además, se puede encontrar la sección de antecedentes que contiene el análisis de diez investigaciones, dos de ellas (Socas, 1997; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006) muestran errores detectados en el tema de exponentes, cuatro (Lezama, 1999; Martínez, 2000; Martínez, 2007; González, 2010) son propuestas de situaciones didácticas para la enseñanza del tema y el resto (Dennis y Confrey, 2000; Cantoral y Farfán, 1998; Boyer, 1968 y Cajori, 1913) tratan sobre la epistemología del concepto.

El capítulo 2, contiene lo referente al marco teórico que en este caso es la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como metodología, tanto del marco teórico como de la metodología se encuentran las definiciones más importantes para este trabajo como son los diferentes tipos de situación (acción, formulación, validación e institucionalización), devolución, contrato didáctico, etc. Así como las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica y las dimensiones que componen a éstas.

Respecto al capítulo 3, en éste, se puede encontrar la fase de análisis preliminar y todas las dimensiones que lo componen, en específico, se puede encontrar la dimensión epistemológica del exponente, es decir, desde cuando comenzaron a surgir estudios para el exponente fraccionario y cero. Enseguida, se encuentra la dimensión cognitiva, en ésta, se muestra un cuestionario que se realizó a estudiantes de primer semestre de bachillerato con la finalidad de detectar su conocimiento en el contenido de exponentes y cuáles son los errores que cometen con mayor frecuencia, esto con el objetivo de poder identificar desde dónde partir en el diseño de las situaciones didácticas.

En la parte final de este capítulo, se muestra la dimensión didáctica, la cual muestra un cuestionario realizado a profesores de secundaria y bachillerato con la finalidad de conocer cómo es que ellos enseñan el contenido de exponentes, posteriormente, se puede encontrar también un análisis que se hizo de algunos libros de texto para observar el tipo de problemas o ejercicios que proponen sobre este contenido.

Por otra parte, el capítulo 4, expone todo lo referente a la concepción de las situaciones didácticas y muestra también el análisis a priori de éstas, es decir, describe de manera específica todo lo que se espera que los alumnos respondan en cada una de las actividades y en cada una de sus partes.

Posteriormente, el capítulo 5 describe de manera muy detallada cómo es que se llevó a cabo la experimentación, en cuál preparatoria, el semestre que cursan los alumnos, etc. También, se puede encontrar el análisis a posteriori de las dos actividades, dividido cada actividad en situación de acción, formulación, validación e institucionalización, dentro de éstas se muestran algunas imágenes y transcripciones que ayudan a mostrar con más claridad las respuestas de los alumnos. Además de mostrar las respuestas que dieron los equipos con los que se trabajó, se compararon (validaron) con lo que se expuso en el análisis a priori.

Finalmente, se encuentra el capítulo de conclusiones, en éste se describe de manera detallada el cumplimiento de los objetivos (general y específicos), las limitantes que hubo en la investigación realizada y posibles modificaciones que podrían hacerse a los instrumentos aplicados, así como también se mencionan algunas problemáticas que podrían ser atendidas en futuras investigaciones.

Capítulo 1

Antecedentes, problemática y justificación de la investigación

Capítulo 1: Antecedentes, problemática y justificación de la investigación

1.1 Antecedentes

En esta sección se describe el análisis de las investigaciones de: Lezama (1999), Martínez (2007), González (2010), Barrios (2015), Dennis y Confrey (2000), Cantoral y Farfán (1998), Boyer (1968), Cajori (1913), Socas (1997), Abrate, Pochulu y Vargas (2006), Cadenas (2007), Sosa, Huitrado, Hernández, Borjón y Ribeiro (2013) y Rico, et al. (2015), que dan cuenta de la problemática relacionada con el aprendizaje de los exponentes. Es importante señalar que ésta es una problemática que han vivido o viven los profesores, al abordar este contenido en el salón de clases. Las investigaciones analizadas en las que se sustenta este trabajo, se clasificaron de la siguiente manera: 1) aquellas que muestran los errores cometidos por los estudiantes en el contenido de exponentes, 2) las que realizan un análisis histórico-epistemológico del contenido de exponentes y 3) aquellos que contienen propuestas de secuencia didáctica. La manera en que es organizada la revisión de antecedentes se muestra en la Figura 1.

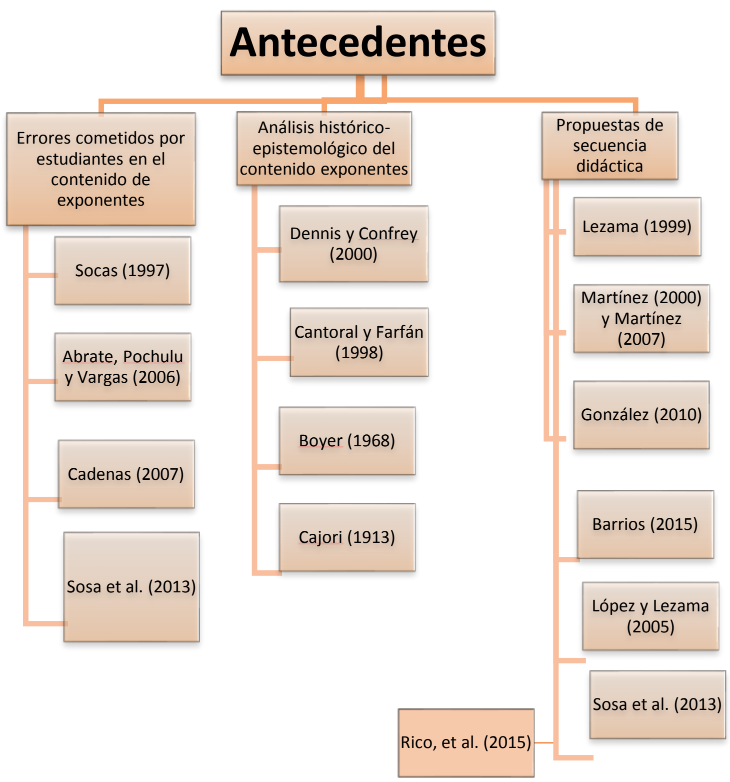


Figura 1: Organización de los antecedentes según el tipo de investigación

En primer lugar, se analizan los trabajos relacionados con los errores que cometen los estudiantes de diversos niveles educativos, al abordar el contenido de exponentes. Entendiendo por error "intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación" (Matz, 1980, citado en Ruano, Socas y Palarea, 2008, p. 312).

Se toma esta definición debido a que la autora de este trabajo concuerda con Ruano, et al. (2008) que menciona lo siguiente:

[…] la mente del alumno no es una página en blanco, el alumno tiene un conocimiento anterior que le parece suficiente y establece en su mente cierto equilibrio. Por ello, la principal razón para que se produzca la asimilación del nuevo conocimiento es que éste debe tener significado para el alumno, para lo cual, ha de responder a las preguntas que él mismo se ha formulado. En ningún caso el nuevo conocimiento se añade al antiguo, al contrario, le crea un conflicto al alumno, porque le provoca una reestructuración nueva del conocimiento total, produciéndose posteriormente una acomodación de la estructura anterior, que le permite recobrar el equilibrio perdido. (p. 312)

Por esto, la definición de error según Matz (1980, citado en Ruano, et al. 2008, p. 312) es de suma importancia para la presente investigación, pues, la profesora-investigadora considera que los errores que cometen los estudiantes de nivel bachillerato, respecto al contenido de exponentes es debido justamente a que para ellos no tiene significado el nuevo conocimiento, esto es, no le encuentran el sentido a que primero se les muestre la propiedad $a^n = a \times a \times a \ldots \times a$ y posteriormente, el profesor proporcione lo siguiente: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^0 = 1$ o $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ por mencionar algunas. Por ello, en el intento de querer entender las nuevas leyes de los exponentes, en ocasiones tienden a multiplicar la base por el exponente, ya que relacionan dicho contenido con el producto debido a la primer propiedad ($a^n = a \times a \times a \ldots \times a$) que se les mostró anteriormente.

1.1.1 Investigaciones que identificaron errores cometidos por los alumnos respecto al contenido de exponentes.

En la revisión de artículos para esta investigación, también se han encontrado algunos trabajos en los cuales se abordan aspectos interesantes como son: las dificultades, obstáculos y errores que presentan los estudiantes al abordar algún contenido (Socas, 1997; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006). En la revisión de las investigaciones mencionadas, se encontró lo siguiente:

Los objetivos que Abrate, et al. (2006) persiguieron en su investigación son: conocer los errores que detectan los profesores de matemáticas en el aprendizaje de sus alumnos durante la formación del nivel medio superior y cuáles de ellos persisten todavía cuando ingresan al nivel superior.

Algunas de las conclusiones que se obtuvieron del estudio, fueron:

- Consideran que tienen un número negativo elevado a cierto exponente cuando el signo menos se antepone a la potencia ($-2^4 = 16$).

- Recuperan el esquema de multiplicación reiterada, con factores negativos, cuando el exponente de la potencia es un entero negativo $(2^{-3}) = (-2)(-2)(-2) = -8$.
- Asumen que toda potencia de exponente nulo da por resultado cero o es igual a la base de la misma $5^0 = 0$ o $5^0 = 5$.
- Estiman que la raíz con radicando negativo e índice impar tiene un doble resultado, o que no posee solución en el campo de los reales $\left(\sqrt[3]{-27} = \pm 3 \quad \sqrt[3]{-27} = \text{No tiene solución en los reales}\right)$.
- Identifican la semántica de potencias con base entera y exponente fraccionario negativo, como tomar el inverso multiplicativo del exponente $9^{-\frac{1}{2}} = 9^2 = 81$.

Además, algunos de los errores en Matemática que cometen alumnos que ingresan a la Universidad son:

- Resuelven potencias de índice par cuando se antepone un signo negativo a la misma.
- Calculan potencias con exponente fraccionario y negativo.
- Trabajan con ejercicios combinados que involucren potencias de sumas y/o restas con exponentes negativos.
- Determinan el valor de raíces de índice impar y radicando negativo.

Con base en lo anterior, la profesora-investigadora nota que el contenido de exponentes es complicado para los estudiantes, ya que los errores muestran que el contenido no se ha comprendido todavía.

Luego, Socas (1997) analizó los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, un ejemplo respecto a los estadios es cuando se quiere aprender a usar la definición y propiedades de exponentes, éstos son los siguientes:

- Estadio semiótico: El sistema nuevo de signos es caracterizado por el antiguo. Por ejemplo:

  $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ o $a^4 = a \times a \times a \times a$.

- Estadio estructural: El sistema nuevo de signos se estructura según la organización del antiguo. Ejemplo:

$$3^4 \times 3^3 = 3^7$$

$$(3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^{4+3} = 3^7$$

  Y así, se llega al esquema general

$$a^4 \times a^3 = a^{4+3}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2$$

- Estadio autónomo: Actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior. Por ejemplo:

1. $3^0 = 1$
2. $3^{-1} = \frac{1}{3}$
3. $e^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^2}$

Lo anterior, es de suma importancia para la investigación, específicamente en el estadio autónomo, ya que puede ser donde estén surgiendo los errores de los estudiantes, pues, no hay una explicación "lógica" del porqué surgen esos tipos de igualdades que se acaban de mostrar.

Por otra parte, otro de los estudios que se encontró relevante para el presente trabajo es el que realizó Cadenas (2007), en éste se analizó a cinco generaciones consecutivas de alumnos de primer semestre de la escuela de Educación de la Universidad de los Andes. El objetivo principal de dicha investigación fue encontrar las dificultades, errores y carencias que tienen los alumnos recién ingresados a dicha institución respecto a los conocimientos matemáticos básicos que deberían tener.

Para recopilar dicha información, Cadenas (2007) realizó el diseño de un examen diagnóstico que consta de 10 ítems, de los cuales, únicamente dos son relevantes para el presente trabajo, ya que éstos están relacionados con el contenido de exponentes. Los ítems que se muestran a continuación originalmente fueron denotados como ítem cinco e ítem 10 respectivamente, el primero de ellos es:

a) El valor de $(2^2)^{-2}$ es

El autor menciona que el error que se encontró con mayor frecuencia entre los estudiantes fue dar como respuesta 16, ya que según ellos $(4)^{-2} = (-4)(-4) = 16$.

El otro ítem se muestra a continuación:

b) Calcular $\frac{(-2)^4 3^4}{(-2)^3(-3)^3}$

El investigador comunica que en este ítem, la mayoría de los estudiantes comete errores debido a que dan respuestas incorrectas cuando la base es negativa.

El resultado que obtuvo Cadenas (2007), es que la mayoría de los estudiantes tienen carencias, dificultades y errores en los conocimientos básicos, especialmente en el área de aritmética y álgebra, esto puede notarse en los ítems mostrados anteriormente, ya que éstos muestran errores de tipo aritmético.

Para concluir esta sección, se analiza el reporte de investigación realizado por Sosa, Huitrado, Hernández, Borjón y Ribeiro (2013), éste trata sobre el trabajo que realizó un equipo de profesores del nivel bachillerato en un seminario que tuvo como duración una semana, en la cual se trabajaron dos horas diarias. Ahí se solicitó a los equipos (conformados por dos o tres profesores) que identificaran un error común referente a un contenido matemático en sus estudiantes y posterior a ello, realizaran una propuesta para subsanar dicho error, lo que propuso uno de los equipos fue lo siguiente:

Se identificó que los estudiantes que cursaban en ese momento la clase de álgebra cometían los siguientes errores: $3^2 = 6$ y $3^3 = 9$.

Los profesores argumentaron que ellos creen que los alumnos recuerdan que tienen que realizar una multiplicación, pero ellos relacionan la base y el exponente como factores, por ello dicen que: $3^2 = 3 * 2 = 6$ y $3^3 = 3 * 3 = 9$, este error como puede notarlo el lector, también fue detectado por Martínez (2007), tal y como se muestra más adelante.

También, los profesores piensan que los estudiantes asocian dichas expresiones con la adición, es decir, que suman la base, la cantidad de veces que indica el exponente, es decir:

$3^2 = 3 + 3 = 6$ y $3^3 = 3 + 3 + 3 = 9$.

Para subsanar dichos errores, los profesores comentaron que dirían a los estudiantes que cambiarían de tema y propusieron un problema que implica potenciación, éste se muestra en la sección de propuestas de secuencias didácticas.

1.1.2 Investigaciones de corte histórico-epistemológico

Ahora, se describirán los aspectos importantes que se han encontrado en algunas investigaciones, respecto a la aparición del exponente ya sea natural o no natural. Se comenzará con la investigación histórica realizada por Dennis y Confrey (2000), en ella se encontraron los siguientes objetivos:

- Bosquejar la historia del desarrollo del concepto de exponentes continuos.
- Examinar cuidadosamente el escenario epistemológico en el que este desarrollo se llevó a cabo.

La finalidad de esta investigación era explicar la forma en que surgió el exponente, para que los profesores comprendan su surgimiento y lo lleven al salón de clase con el objetivo de que los alumnos lo reconstruyan; sin embargo, este hecho no se daría tal cual ocurrió el proceso en la historia, porque son alumnos que tienen otras problemáticas, además piensan y poseen herramientas diferentes.

Dicha revisión histórica realizada por Dennis y Confrey (2000), la hicieron tomando datos de fuentes originales, por ejemplo, para conocer el trabajo que desarrolló Wallis, revisaron el

Arithmetica Infinitorum, que fue publicado por primera vez en 1655 y su autor es el propio Wallis. Así mismo, analizaron los documentos escritos por Newton, Euler, entre otros.

La investigación se centró principalmente en el trabajo de Wallis (1606-1703), ya que aunque no fue la primera persona en trabajar con exponentes fraccionarios, a él se le atribuye su uso. Posteriormente, Newton (1642-1722), desarrolló su binomio tomando como base las contribuciones de Wallis. Luego, Euler (1707-1783), utilizó el binomio de Newton para explorar las funciones continuas, incluyendo las exponenciales con base natural y las logarítmicas (Euler, 1988).

Los autores muestran el término de razón característica, introducido por Wallis (1972), dicho término se considera de gran importancia para el presente trabajo, debido a la justificación geométrica que se muestra para el exponente fraccionario.

Ahora, es impresionante encontrarse en Cantoral y Farfán (1998), así como en Boyer (1968), que el binomio de Newton se escribió por primera vez como $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ y no como $(a+b)^n$. Lo anterior, igual que el trabajo de Wallis, muestra la existencia de los exponentes fraccionarios desde varios siglos atrás.

Por otra parte, Cantoral y Farfán (1998), mencionan que aunque las expresiones $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ y $(a+b)^n$ parecen idénticas, salvo la notación, son conceptualmente distintas. También dicen que apareció primero $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$, debido a que en ese tiempo se buscaba modelar, anticipar y predecir fenómenos naturales. En esto último, se puede pensar que: como los fenómenos no ocurren necesariamente en tiempos enteros, es por ello que surgió la necesidad de buscar una expresión para modelar cualquier fenómeno, y eso, solamente podría darse mediante el primer binomio de Newton.

Así mismo, Boyer (1968) indica que Newton descubrió el binomio en 1664 o 1665, sin embargo, no lo dio a conocer hasta el año de 1676, cuando lo envió al secretario de la *Royal Society*, años después, fue publicado por Wallis en *Álgebra de Wallis* en 1685, por supuesto con crédito para Newton. En Boyer (1968), también se puede encontrar una descripción detallada de cómo Newton fue encontrando cada uno de los términos de la expresión:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}P^{\frac{m}{n}}Q^2 + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}\frac{m-2n}{3n}P^{\frac{m}{n}}Q^3 + \text{etc.}$$

Así, las investigaciones realizadas por Cantoral y Farfán (1998) y Boyer (1968), son de gran importancia para el análisis epistemológico que se realizará en esta investigación, debido a que el exponente fraccionario surge en la época de Wallis y Newton.

Finalmente, en Cajori (1913), se hace una descripción de cómo surgieron los conceptos de logaritmo y exponente, se muestran algunas de las cartas que se mandaban Euler, Bernoulli, D'Alembert y Leibniz tratando sobre dichos conceptos.

Euler, en una ocasión le dijo a D'Alembert una forma para calcular el valor de e^x, que era mediante la siguiente serie: $1 + x + \frac{x^2}{1*2} + \cdots$ Sin embargo, D'Alembert no le creyó a Euler pues no tenía una demostración formal para tal afirmación.

1.1.3 Propuestas de secuencia didáctica

En esta sección se encuentran algunas propuestas de secuencias didácticas, éstas son relevantes para esta investigación debido a que muestran actividades que se han desarrollado con anterioridad para atender los errores que surgen por parte de los alumnos en el salón de clase. Las secuencias didácticas que se muestran a continuación, se han experimentado en diversos niveles educativos como son: Secundaria, bachillerato y superior.

En Lezama (1999), se aplicó un cuestionario a estudiantes de bachillerato y licenciatura con el objetivo de conocer sus concepciones acerca de la función 2^x. En su instrumento se realizaron las siguientes preguntas:

Tenemos la expresión algebraica 2^x.

¿Qué significa?

¿Siempre se puede calcular? Da ejemplos.

Calcula la expresión para $x = 2, 3, 4, 20, 0, -1, -2, -3, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}$.

¿Es posible encontrar algún valor de x para el cual 2^x resulte negativa?

¿Es posible encontrar algún valor de x para el cual 2^x sea igual a 50?

¿Puede representarse gráficamente la expresión? Explica.

¿Es posible encontrar valores de x que hagan que 2^x resulte mayor que 50, que 500? Explica.

¿Conoces un fenómeno o situación que requiera de la expresión 2^x? (p. 24)

De las respuestas que proporcionaron los estudiantes, se encontró que tienen algunas dificultades, como pensar que 2^x es una expresión algebraica que solamente se puede calcular para números enteros, ya que la interpretan como multiplicar el 2 por sí mismo "x" número de veces.

Además, cuando $x < 0$ los estudiantes responden de manera diversa, como se puede observar en los siguientes ejemplos:

- $2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$
- $2^{-3} = .002$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Finalmente, si el exponente es racional, los estudiantes lo interpretaron solamente como notación, es decir:

- $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

De los resultados mostrados en la investigación de Lezama (1999), se puede concluir que los estudiantes de bachillerato y universidad presentan el mismo tipo de errores respecto al contenido de exponentes, lo cual deja pensar que el contenido es complicado desde su desarrollo histórico, es por ello que los estudiantes tienen dificultades para entenderlo.

Relacionado con el trabajo anterior, se encuentra el de López y Lezama (2005). En dicha investigación se tuvo como objetivo principal "identificar los efectos didácticos que se producen cuando los estudiantes de bachillerato emplean criterios geométricos para construir segmentos y localizar algunos puntos de la función exponencial 2^x" (López y Lezama, 2005, p. 363). El trabajo se llevó a cabo bajo el marco teórico conceptual de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), la Transposición Didáctica (TD) y se utilizó la Ingeniería Didáctica (ID) como metodología. También es importante señalar que las actividades con las que se realizó este estudio fueron tomadas de Lezama (1999).

La investigación se llevó a cabo con tres equipos de estudiantes del nivel bachillerato, los cuales realizaron tres etapas de actividades, en la primera se exploraron los conocimientos matemáticos que tenían los estudiantes para posteriormente trabajar con la propuesta. Ésta última consta de 14 actividades y se obtuvieron los siguientes resultados:

- Los tres equipos avanzaron de manera adecuada en las actividades propuestas, a pesar de que no tenían un dominio total de los algoritmos geométricos que requerían, sin embargo, con algunas sugerencias otorgadas por el profesor pudieron continuar con la actividad.

- El manejo de exponentes fraccionarios produjo algunas dificultades, sin embargo, fueron superados en gran medida, esta actividad se realizó en mayor tiempo que las anteriores. La actividad fue la siguiente:

Después de localizar en el plano cartesiano los puntos $(0, 2^0)$, $(1, 2^1)$ y $(2, 2^2)$, se pidió a los alumnos que localizaran los puntos $\left(1/2, 2^{1/2}\right)$, $\left(1/4, 2^{1/4}\right)$, $\left(3/4, 2^{3/4}\right)$ y $\left(5/4, 2^{5/4}\right)$.

Utilizando los procedimientos geométricos que se proporcionaron en la etapa de preparación (etapa uno), los alumnos deciden que el orden de los puntos deberá ser $\left(1/4, 2^{1/4}\right)$ y posteriormente $\left(1/2, 2^{1/2}\right)$, sin embargo, para obtener la coordenada $\left(1/4, 2^{1/4}\right)$ se topan con una dificultad, pues no recuerdan como calcular $2^{1/4}$, ellos, se dan cuenta que pueden obtener $2^{1/2}$ con el teorema de Pitágoras, con base en lo anterior intentan obtener $2^{1/4}$, sin éxito.

Luego de esto, notan que $2^{\frac{3}{4}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{1}{4}}\right)$ y $2^{\frac{5}{4}} = (2^1)\left(2^{\frac{1}{4}}\right)$, en ese momento se dieron cuenta de que si conocieran el valor de $2^{1/4}$ todo estaría resuelto, luego intentan nuevamente con el teorema de Pitágoras pues saben que $2^{1/4} = \left(2^{1/2}\right)^{1/2}$ y logran resolverlo con facilidad, en esta solución advierten que los algoritmos se basan en la semejanza de triángulos.

A continuación, se presentan algunas conclusiones de esta investigación:

- Se lograron las intenciones didácticas que se pretendían con la Situación Didáctica.
- Los alumnos pasaron por las fases de acción, formulación y validación propuestas por Brousseau para el aprendizaje.
- La estructura del diseño propició que los estudiantes se dieran cuenta que la función 2^x es creciente.
- Los alumnos afrontaron de manera ingeniosa los obstáculos matemáticos con los que se encontraron; es decir, cuando no recordaban los algoritmos geométricos para poder encontrar el valor $2^{1/4}$, lo hicieron como a ellos se les ocurrió.

En la investigación de López y Lezama (2005) se muestra la importancia de mostrar una actividad interesante para los alumnos, ya que, aunque no lograron recordar con exactitud los algoritmos geométricos enseñados por el profesor en la etapa inicial de la Situación Didáctica, los estudiantes dedujeron tales algoritmos, pues estaban interesados en la actividad y la resolvieron utilizando sus propias estrategias.

Por otro lado, en Martínez (2000) se proponen las siguientes preguntas de investigación:

¿Cuáles fueron los mecanismos que permitieron la construcción y la aceptación social de la noción de exponente no natural?

¿Cuál fue la relación de la noción de exponente no natural con la noción de función exponencial en la construcción social de ambas nociones?

¿Cuál es la vida escolar de los exponentes no naturales? (p. 6)

En el trabajo se realizaron dos análisis:

Epistemológico: Buscó establecer un esquema de la génesis y desarrollo histórico de la noción de exponente no natural desde un punto de vista epistemológico. Este análisis contempló el estudio del funcionamiento y de las diversas formulaciones de las nociones que les interesaron a los autores, mediante la consulta, en la medida de lo posible, de textos matemáticos antiguos originales, como los que se mencionaron en la sección anterior.

Didáctico: Que cumplió con el objetivo de construir un esquema de la vida escolar del exponente no natural. Además, contempló el análisis de programas de estudio para identificar aquellas de sus partes que consideran la noción de exponente no natural y el análisis de textos más utilizados. Igualmente, se realizó un estudio con profesores con el objetivo de determinar, con más precisión, la vida escolar de la noción de exponente no natural.

El autor obtuvo las siguientes conclusiones:

- Independientemente de la situación cognitiva y didáctica, es decir, de cómo el profesor aborda el contenido con los estudiantes, estos últimos revelarán dificultades, ante las igualdades que involucran exponentes no naturales $\left(2^0 = 1,\ 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},\ 2^{-3} = \frac{1}{2^3}\right)$, atribuibles a la estructura de un conocimiento que ha sido producto de consideraciones de tipo metamatemático, las cuales están relacionadas con la naturaleza y función de las matemáticas.

- Lo anterior queda ejemplificado con los argumentos lógicos que proporcionan los estudiantes a través del modelo de multiplicación reiterada y en las "demostraciones" que proporcionan algunos profesores y textos de álgebra a partir de ciertas leyes de los exponentes.

- El conocimiento de las convenciones matemáticas relativas a los exponentes, no necesariamente llevan a concebir a la expresión a^x como una operación entre *a* y *x* (operación de potenciación), concepción necesaria para la construcción de la noción de función exponencial en el sentido de Dirichlet-Bourbaki.

- La necesidad de algunos estudiantes, de realizar operaciones con números se percibe en el establecimiento de valores de 2^x a través de la utilización de operaciones simples.

- Aun cuando algunos estudiantes tienen el recurso de la representación por medio del radical, ignoran y no toman en cuenta la naturaleza de dicho número, al considerar $\sqrt{2}$ =1.4, pero no interpretan este número como resultado de una "exponenciación" sino como una notación.

Teniendo como marco teórico la socioepistemología, el trabajo de Martínez (2007) sugiere una forma alternativa para abordar los exponentes cero y negativo. Su propuesta consiste en hacer que el alumno se dé cuenta por él mismo, cuánto vale 2^0 y 2^{-2} y para elaborarla realizó un análisis de libros de texto e hizo una clasificación de fenómenos que observó en estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad, con base en las respuestas y justificaciones que los jóvenes proporcionaban para algunas expresiones como las anteriores $(2^0, 2^{-2})$.

El instrumento contiene 13 actividades. La puesta en escena se llevó a cabo con dos equipos de secundaria, éstos conformados de tres alumnos cada uno. Solamente uno de ellos logró el objetivo de la secuencia, es decir, se pretendía que los estudiantes llegaran a intuir el valor correcto de $\left(2^0, 2^{-2}\ y\ 2^{\frac{1}{2}}\right)$. El otro no lo hizo debido a que se les terminó el tiempo y contestaron sin reflexionar.

Por otra parte, se revisó a González (2010). En su investigación se presentó el siguiente objetivo:

> Diseñar una situación didáctica, con base y sustento en otras situaciones didácticas ya establecidas, para favorecer el desarrollo, en situación escolar, de la noción de función exponencial $f(x) = 2^x$, sus diferentes representaciones y características principales, así como la correcta apropiación de algunas convenciones en el tratamiento de exponentes no naturales como $2^0 = 1$ y $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$. (p. 4).

Esta investigación fue desarrollada bajo la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y como metodología se utilizó la Ingeniería Didáctica (ID). Para la construcción de su secuencia se tomaron en cuenta algunas de las actividades propuestas por Martínez (2000) y Lezama (1999) haciendo una adaptación propia, además, se resalta que González (2010) incluyó una técnica geométrica que fue tomada de Lezama (1999) y Cantoral et al. (2000) para resolver exponentes racionales.

De este estudio se concluyó lo siguiente:

- En el análisis exploratorio se observó que los estudiantes tenían cierto conocimiento de la función 2^x.
- La mayoría de los alumnos no son capaces de graficar o encontrar alguna aplicación para la función.
- Algunos alumnos afirman que $2^0 = 0$, $2^{-1} = -2$ y $2^{-2} = -4$, debido al uso de la multiplicación reiterada.
- Se comprobó la hipótesis, es decir, se afirmó que los estudiantes de bachillerato tienen poco conocimiento de la función exponencial $f(x) = 2^x$, especialmente cuando el exponente es fraccionario o negativo.
- Mediante las actividades propuestas, algunos estudiantes lograron descubrir algunas convenciones matemáticas como $2^0 = 1$ y $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ y otros las reafirmaron.
- La situación didáctica ofrece una alternativa diferente a la que se muestra en los libros de texto para abordar la función exponencial.

Por otra parte, en la investigación de Barrios (2015), se observa que a través de la suma de números impares consecutivos se pueden obtener todas las potencias naturales de números naturales, es decir, las realizan utilizando la aritmética. También, se muestra este hecho de utilizando la geometría, aunque llegando a n^8, ya no lo pueden trabajar de esta forma, puesto que se necesitaría la cuarta dimensión. Por ejemplo, de manera aritmética para obtener las potencias de exponente 2 se hace lo siguiente:

$$1 = 1 = 1$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$\vdots$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2 \text{ (p.56)}$$

Posteriormente, para obtener las potencias de exponente 3, se acomodan los números impares empezando desde el 1 en un triángulo (figura 2), después se suman los números que hay en cada fila obteniendo datos como los siguientes:

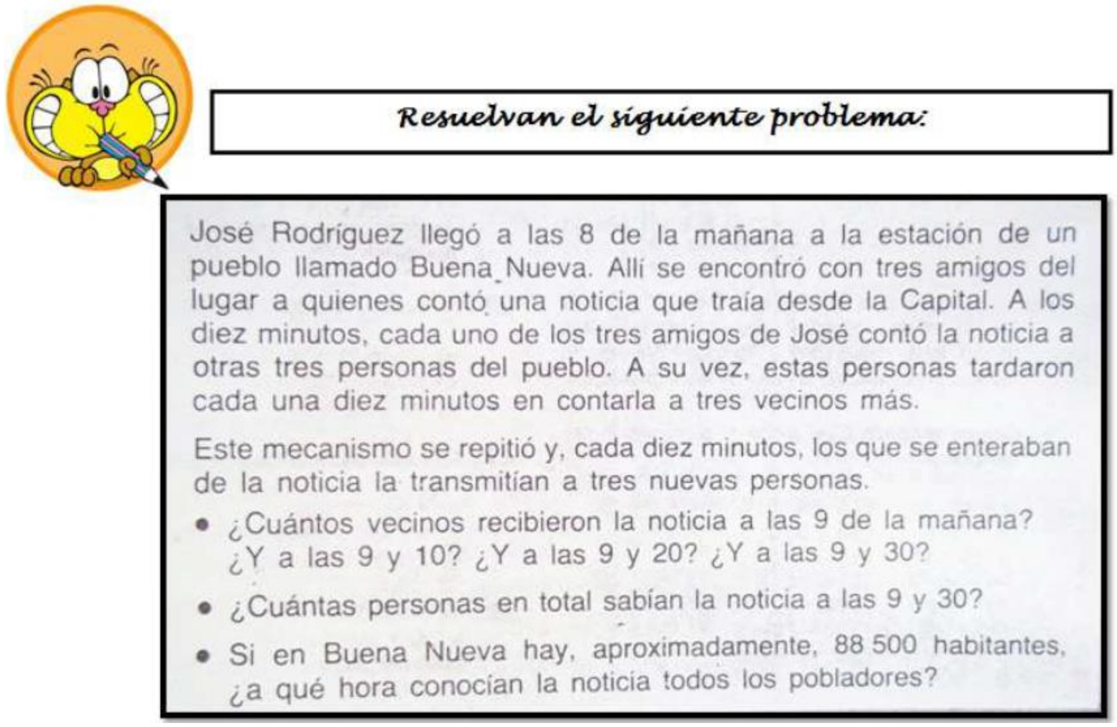
$$\begin{array}{rcrcr}
1 & = & 1 & = & 1^3 \\
3 + 5 & = & 8 & = & 2^3 \\
7 + 9 + 11 & = & 27 & = & 3^3 \\
13 + 15 + 17 + 19 & = & 64 & = & 4^3 \\
21 + 23 + 25 + 27 + 29 & = & 125 & = & 5^3 \\
31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 & = & 216 & = & 6^3 \\
43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 & = & 343 & = & 7^3 \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

Figura 2: Potencias de exponente 3. *Recuperada de Barrios (2015, p. 57)*

De manera similar, aunque con el acomodo de los números impares de manera diferente, se van encontrando las potencias de exponente 4, 5, 6 y 7, llegando a los exponentes 8, 9 y 10, se hace el cálculo únicamente utilizando la aritmética tomando en cuenta algunos de los resultados realizados para los otros exponentes. Finalmente, se encuentra la generalización para encontrar los valores de las potencias de exponente n.

Esta investigación es relevante para este trabajo debido a que muestra una propuesta didáctica para exponentes naturales y dicha propuesta no es solamente aritmética sino también geométrica, sin embargo, no lo hace para el exponente cero, exponentes negativos o racionales.

Por otra parte, se muestra la propuesta didáctica que realizaron los profesores analizados por Sosa et al. (2013), ésta se realizó con la finalidad de subsanar los errores que cometen los estudiantes respecto a exponentes naturales. El problema propuesto fue el siguiente:



Resuelvan el siguiente problema:

José Rodríguez llegó a las 8 de la mañana a la estación de un pueblo llamado Buena Nueva. Allí se encontró con tres amigos del lugar a quienes contó una noticia que traía desde la Capital. A los diez minutos, cada uno de los tres amigos de José contó la noticia a otras tres personas del pueblo. A su vez, estas personas tardaron cada una diez minutos en contarla a tres vecinos más.

Este mecanismo se repitió y, cada diez minutos, los que se enteraban de la noticia la transmitían a tres nuevas personas.

- ¿Cuántos vecinos recibieron la noticia a las 9 de la mañana? ¿Y a las 9 y 10? ¿Y a las 9 y 20? ¿Y a las 9 y 30?
- ¿Cuántas personas en total sabían la noticia a las 9 y 30?
- Si en Buena Nueva hay, aproximadamente, 88 500 habitantes, ¿a qué hora conocían la noticia todos los pobladores?

Figura 3: Problema para abordar el contenido de exponentes. Recuperada de Sosa et al. (2013, p. 5)

El problema anterior se considera relevante para la presente investigación, debido a que puede dar luz para el diseño de la Situación Didáctica que se aplicará a estudiantes de nivel bachillerato, respecto al tema de exponentes racionales, ya que, aunque éste es para exponentes naturales, podrían surgir algunas adaptaciones para otro tipo de exponentes u otras bases.

Finalmente, se analizó la investigación de Rico, et al. (2015) en la cual se menciona que se analizó a una profesora que imparte clases en 6° año de primaria, el grupo en el que ella se desempeña es mixto y cuenta con 35 alumnos, la sesión duró 45 minutos. En la sesión que los investigadores observaron, la maestra impartió el contenido de: repaso de potencias, para esto, ella utilizó el cubo de Rubik como apoyo, solicitó a los estudiantes que se reunieran en equipos de 5 personas y posteriormente entregó al menos un cubo Rubik por equipo, a uno de los equipos le entregó un cubo Rubik desarticulado. Posteriormente, solicitó a los estudiantes expresar mediante notación de potencias cuántos cubos unidad componen el cubo Rubik completo.

Los resultados de tal tarea no fueron los que la maestra esperaba, pues ella pensó que los estudiantes llegarían fácilmente a la expresión $3 \times 3 \times 3 = 3^3$, por el contrario, los estudiantes llegaron a expresiones como:

$$9^6 \qquad 6^9$$

$$9_6 \qquad 6_9$$

Las cuales fueron así según Rico, et al. (2015), debido a que los estudiantes contaron el número de cuadritos en una cara del cubo, tal conteo arroja como resultado 9 y, posteriormente contaron el número de caras del cubo que son 6 y por ello obtuvieron las expresiones anteriores, sin embargo, ellos asocian la notación de potencia con multiplicación de la base por el exponente, por ello, incluso dudaron en cómo escribir los números, por eso en las segundas expresiones:

$$9_6 \qquad 6_9$$

Parece más una notación de multiplicación que de potencia.

Al ver estos resultados, la maestra solicitó a los estudiantes que repensaran la tarea y encontraran otras expresiones, sin embargo, algunos estudiantes se quedaron con la misma expresión que son las anteriores y otros propusieron las siguientes:

$$9^4 \qquad 4^9$$

$$9_4 \qquad 4_9$$

Para tales expresiones, Rico, et al. (2015) comentaron que los estudiantes las propusieron debido a que ahora contaron las aristas que hay en cada uno de los cuadritos visibles en el cubo Rubik, que son 4 y posteriormente los cuadritos que hay en una cara del cubo que son: 9. Es importante destacar, que siguen con la idea de que la notación de potencia es una multiplicación de la base por el exponente.

Finalmente, la profesora al ver que los estudiantes no encontraron la expresión deseada, les dio la respuesta diciendo: "Numéricamente, el total de cubos unidad se expresa, pues, mediante el producto de tres veces la cifra 3 (treses), cuya escritura como potencia emplea la cifra 3 dos veces $3 \times 3 \times 3 = 3^3$" (Rico, et al., 2015, p. 69).

Luego, los investigadores hacen notar que la profesora no interpretó la respuesta de sus estudiantes, es decir, no se preguntó ¿por qué dieron tales respuestas?, si ella hubiera analizado cómo surgieron éstas, los habría podido orientar y decirles que no era lo que ella les estaba pidiendo, les habría hecho notar la diferencia entre las aristas, los cuadrados y los cubos. Sin embargo, nada de esto hizo la profesora, sumado a esto, cuando dijo que los cubitos unidad que había en el cubo de Rubik eran 27, los estudiantes que tenían el cubo Rubik desarticulado no se convencieron de tal respuesta, ya que no son cubitos unidad. Por último, los investigadores notaron que los estudiantes no cambiaron la respuesta que ellos tenían, pues la maestra no logró convencerlos de que la respuesta era $3 \times 3 \times 3 = 3^3$.

Finalmente, los investigadores mencionan que el conocimiento matemático de la maestra no garantiza una instrucción efectiva, ya que le hizo falta poseer más conocimiento didáctico para lograr que los estudiantes superaran las concepciones surgidas en ese momento respecto al contenido de potencias.

1.1.4 Reflexión de los antecedentes

Con base en los antecedentes anteriores, se puede concluir lo siguiente: es de suma importancia trabajar el contenido de exponentes, debido a que los alumnos de diferentes niveles educativos (secundaria, bachillerato y superior) presentan dificultades para su comprensión, esto puede notarse debido a los errores que se identificaron en diferentes investigaciones, por ejemplo: Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007). Además, llama la atención que los errores evidenciados son comunes en estudiantes de secundaria, bachillerato y superior, los más comunes son:

$$3^2 = 6$$

$$3^3 = 9$$

$$2^0 = 0$$

$$2^0 = 2$$

$$2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$$

$$2^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por lo anterior, se considera importante incidir en el nivel bachillerato con esta investigación, ya que en este nivel educativo es donde se enseña con mayor profundidad el contenido de exponentes, pues se enseñan los exponentes naturales, cero, negativos y racionales, así como las propiedades de éstos.

Otro aspecto que llama la atención, es que ninguna de las investigaciones revisadas utiliza la tecnología ni material didáctico para la enseñanza de los exponentes, salvo la de Rico, et al. (2015), sin embargo, aunque en esta investigación se utilizó el cubo de Rubik, no tuvo éxito, pues la profesora no orientó a los estudiantes para que lograran el aprendizaje esperado. Además, el hecho de solicitar a los alumnos la cantidad de cubitos unidad que hay en el cubo de Rubik es de cuidado, ya que en la desarticulación de éste se puede notar que no hay cubos en el interior, lo cual causa revuelo entre los estudiantes, por esto, sería mejor utilizar un material didáctico, en el cual sí se puedan observar todos los cubos.

1.2 Problemática

1.2.1 Planteamiento del problema

En general, en el proceso de enseñanza-aprendizaje se presentan errores, obstáculos y dificultades al trabajar el álgebra, en particular, Socas (1997) ha identificado algunas problemáticas que remontan a la aritmética (operaciones con fracciones, manejo de desigualdades y operaciones con exponentes). Respecto a estas problemáticas, en específico se identifica que los estudiantes cometen varios errores al trabajar con exponentes no naturales (Martínez, 2007).

1.2.2 Problema

Con base en los antecedentes mostrados con anterioridad, se ha identificado que los estudiantes de nivel secundaria, bachillerato y superior, cometen errores del tipo:

a) $2^0 = 0$

b) $2^0 = 2$

c) $2^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$

(Martínez, 2007; Lezama, 1999; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006).

Estos errores se presentan debido a que, perciben dichas expresiones como una multiplicación de la base por el exponente (a y b), en otras ocasiones (c) hacen uso de la multiplicación reiterada y posteriormente añaden el signo negativo.

1.2.3 Objetivos

Objetivo general

Brindar una propuesta alternativa para la enseñanza-aprendizaje de exponentes naturales, cero y racional $\left(\frac{1}{2}\right)$ mediante el diseño y experimentación de dos situaciones didácticas con alumnos de segundo semestre de bachillerato.

Objetivos específicos

- Realizar un análisis epistemológico de los exponentes.
- Analizar la forma en que abordan algunos profesores de secundaria y bachillerato el contenido de exponentes.
- Detectar los conocimientos previos de los estudiantes de primer semestre de bachillerato respecto al contenido de exponentes.
- Diseñar dos situaciones didácticas para exponentes cero, natural y racional $\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Analizar los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento.

De acuerdo a Mora (2005), los objetivos específicos se formulan de la siguiente manera:

> Se derivan del objetivo general; plantean lo que se pretende lograr de las variables de estudio y su interrelación; expresan los alcances que se persiguen; quien investiga debe preguntarse cómo llegar al objetivo general. Al igual que el objetivo general es usual iniciar su redacción con un verbo en infinitivo. Al respecto, es importante que la persona que investiga tenga presente los niveles de aplicación de los objetivos. En consecuencia, el objetivo general debe plantearse en un nivel superior de aplicación que los objetivos específicos, dado que éstos apoyan el cumplimiento del objetivo general. (p. 82)

1.2.4 Justificación

Aunque en algunas investigaciones que se analizaron se realizan propuestas didácticas que se ponen en práctica en diversos niveles educativos, se identifica la necesidad de diseñar una situación didáctica que incorpore bases diferentes a las que se trabajaron en las investigaciones de Lezama (1999), Martínez (2007) y Barrios (2015) por mencionar algunas y además, que permita incorporar material didáctico con la finalidad de motivar e incentivar al alumno.

Este trabajo servirá a los profesores que dan clase en el nivel bachillerato para promover la enseñanza-aprendizaje del contenido exponentes. Recuerde, además, que los estudiantes cometen el siguiente tipo de errores reportados por Martínez (2007), los cuales aparecen debido a la falta de comprensión del tema.

$2^0 = 0$, ya que "el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada".

$2^0 = 2$, ya que "el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2".

$2^1 = (2)(2) = 4$, ya que "multiplicamos una vez"

$2^{-4} = -16$, ya que "$2^4 = 16$ y se le pone un signo".

(p. 129-130)

Es importante señalar que Martínez (2007) y González (2010), atienden este tipo de errores a través del diseño de secuencias didácticas, sin embargo, llama la atención que en su diseño siempre trabajaron con la expresión 2^x y la propiedad de multiplicación con bases iguales. Por ello, nos proponemos trabajar en este mismo sentido, con otras expresiones ($3^x, 4^x$), para brindar una propuesta alternativa que sea utilizada en el proceso enseñanza-aprendizaje del contenido de exponentes en alumnos bachillerato.

Capítulo 2

Marco Teórico y Metodología de la Investigación

Capítulo 2: Marco Teórico y Metodología de la Investigación

A continuación, se describe el marco teórico que corresponde a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (1986), misma que sirve de sustento teórico para la realización de esta investigación. En un primer momento se explica cómo surgió la didáctica de las matemáticas, esto es relevante debido a que ésta dio origen al estudio de las Situaciones Didácticas. Finalmente, se muestran las definiciones que se tomarán en cuenta para poder diseñar la Situación Didáctica del contenido de exponentes racionales.

Por otra parte, también se describe la ingeniería didáctica retomada de Artigue (1995), es decir, las fases que la componen, así como las dimensiones que componen la fase de análisis preliminar, además, se muestra en la medida de lo posible en cada una de las fases lo que se realizará en cada una de ellas con base en este trabajo.

2.1 ¿Cómo surgió la Teoría de Situaciones Didácticas?

Es importante señalar que todo lo que a continuación se presenta respecto al surgimiento de la Teoría de Situaciones Didácticas fue tomado de Santaló, et al. (1994), estos autores mencionaron lo siguiente:

La Didáctica de las Matemáticas es una rama del conocimiento considerada como autónoma, nació en Francia después de la Reforma Educativa (Matemática Moderna) que se originó a finales de los 60´s. Esta rama del conocimiento surgió principalmente del trabajo de los matemáticos que se encontraban en los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM).

La actividad de los IREM en un principio, consistió en complementar la formación matemática de los profesores que estaban en servicio y de aquellos que se encontraban en preparación, es decir, todos aquellos que se encontraban en las normales. Otras tareas que realizaban era producir libros de texto de matemáticas para el profesor, fichas de trabajo para los estudiantes, juegos, etc.

Posteriormente, con la reflexión que se originó de los miembros que constituían los IREM, se dieron cuenta que lo importante no era la producción de medios para actuar sobre la enseñanza, más bien había que producir conocimientos para controlar y producir tales acciones en la enseñanza. En ese momento, la actividad realizada por los participantes de los IREM originó un gran cambio. Es en esta etapa justamente, cuando Guy Brousseau, miembro del IREM de Burdeos, propone estudiar las condiciones bajo las cuales se produce el conocimiento, ya que al controlar dichas condiciones se pueden reproducir y optimizar los procesos mediante los cuales se adquiere el conocimiento.

Otro aspecto importante que se debe mencionar, es que no es suficiente que el investigador se dedique a observar y analizar los fenómenos que hacen que el alumno se apropie del saber, es importante también, que el mismo investigador participe en la Situación Didáctica, ya que él debe tener cierta influencia para producir tales fenómenos.

Por otra parte, el objetivo de la Didáctica de las Matemáticas es determinar cómo funcionan las Situaciones Didácticas, es decir, encontrar cuáles son las características que resultan fundamentales en una situación para lograr el desarrollo del comportamiento de los estudiantes y el conocimiento que adquirieron sobre algún concepto específico. Es importante destacar, que no solamente interesan las situaciones exitosas, también las que no tienen éxito pueden aportar a la Didáctica de las Matemáticas, siempre y cuando se logren encontrar las características que hicieron fracasar la Situación Didáctica. Por todo lo anterior, se puede decir que uno de los objetos de estudio de la Didáctica de las Matemáticas es la Teoría de Situaciones Didácticas.

2.2 Teoría de Situaciones Didácticas

Para comenzar con el estudio de las situaciones didácticas, es importante primero conocer la definición de situación, la cual fue dada por Brousseau (1999, citado en Panizza, 2003) de la siguiente manera:

> La situación es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”. (p. 3)

Entonces, una situación puede entenderse como un sujeto que se encuentra inmerso en un ambiente problemático, por decirlo de alguna manera. Dicha situación, puede darse en cualquier lugar, en una tienda al querer comprar algo y tener que conocer el valor de las monedas para saber cuántas equivalen al valor que debe pagar, eso es una situación, ya que el problema al que se enfrenta el comprador, es conocer cuántas monedas entregar al tendero para cubrir el valor de la deuda. Otra situación, podría suscitarse en una charla entre dos o más personas en la cual se encuentren discutiendo algo y tengan que tomar una decisión.

Por otra parte, dentro de la situación, se puede encontrar particularmente la situación didáctica que fue definida por Brousseau (1982b, citado en Santaló, et al. 1994) de la siguiente manera:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (p.4)

La definición anterior puede ser mejor descrita mediante el conocido triángulo didáctico o sistema didáctico que se muestra a continuación:

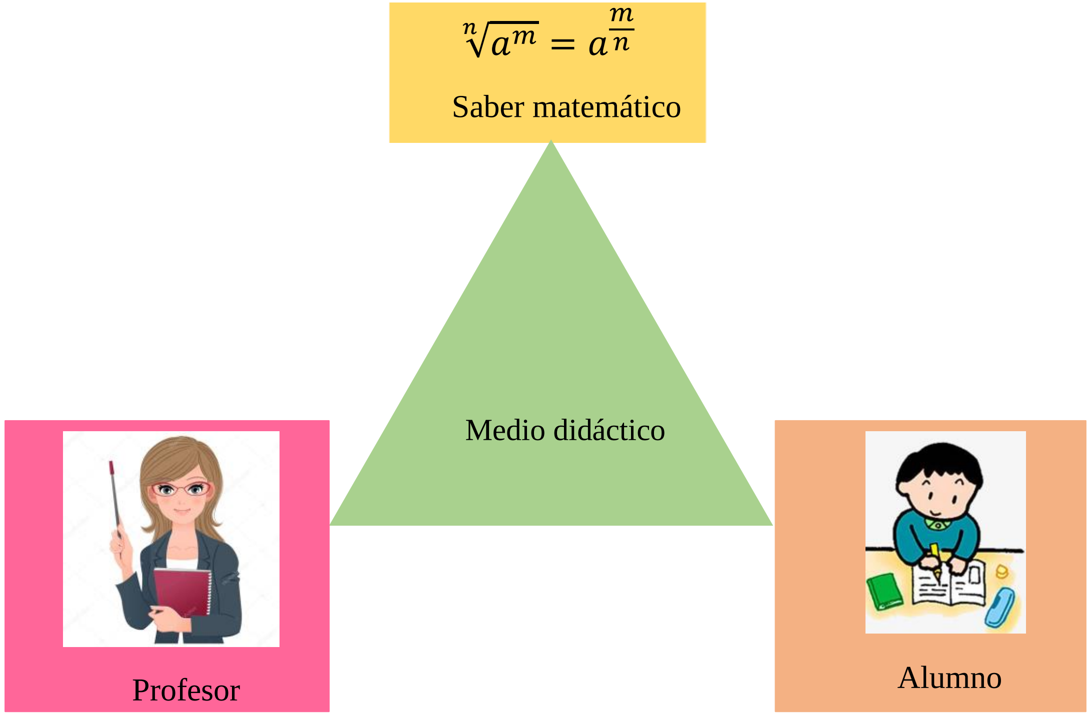


Figura 4: Sistema didáctico

En la Figura 4 se muestra la relación que hay entre el saber, el profesor, el alumno y el medio, dichas componentes deben de aparecer en una situación didáctica y no debe faltar ninguna.

Es importante señalar que el medio pueden ser varias cosas como, por ejemplo: material didáctico, recursos tecnológicos, juegos como el dominó, la lotería, etc. No se debe de olvidar que la situación didáctica siempre debe de tener la intencionalidad de que el alumno aprenda algo. Con base en esto, se muestra el siguiente ejemplo de situación didáctica:

Ejemplo 1: Cuentan que un rey, en vísperas de una batalla, consultó con sus sacerdotes sobre el desenlace de la misma. El sumo sacerdote le pronosticó un desenlace tan favorable que el rey, en su euforia, le ofreció cualquier don que pudiera desear. El sacerdote solicitó que le diesen dos granos de trigo por la primera casilla de un tablero de ajedrez, cuatro por la segunda, y que así sucesivamente se fuese aumentando el doble de la cantidad en cada una de las casillas siguientes. El rey consideró humilde la petición y accedió a ella.

¿Cuántos granos se le debe pagar en la casilla número 1?, ¿Cuántos granos se le debe pagar en la casilla número 2?, ¿En la 3,4,…?

1. Representa mediante una gráfica la información anterior.
2. ¿Cuántos granos de trigo se le deben pagar al sacerdote en la casilla 64?
3. ¿Por qué crees tú que sea una cantidad demasiado elevada?
4. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de casillas del tablero de ajedrez con el número de granos? ¿Cuál es la fórmula?

5. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

(González, 2010, p.31-32)

El saber en juego es: que los alumnos conozcan la función exponencial 2^x, las diferentes representaciones que tiene y en particular los exponentes naturales.

El medio es: El problema junto con la serie de preguntas que vienen a continuación, además, algunos materiales como reglas graduadas, lápiz, hojas blancas y calculadora.

El sistema educativo que es el profesor y por supuesto los alumnos.

Las relaciones que se establecen entre estos aspectos que componen a la situación didáctica son generadas después de que el profesor entrega el problema. En ese momento, comenzará a generarse la situación a-didáctica y en consecuencia las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. Por tal motivo, la explicación completa de este ejemplo se hará en las definiciones posteriores.

El conjunto de relaciones que se establecen entre el profesor y el alumno se llama contrato didáctico, el cual fue definido por Brousseau (1986), de la siguiente manera:

> El contrato didáctico es la regla del juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena. Pero la evolución de la situación modifica el contrato, que permite entonces obtener situaciones nuevas. De igual forma, el conocimiento es lo que se expresa por las reglas de la situación a-didáctica y por las estrategias. La evolución de estas estrategias requiere producciones de conocimientos que permiten a su vez la concepción de nuevas situaciones a-didácticas. (p. 15)

Entonces, el contrato didáctico son las reglas que existen entre el profesor y el alumno, sin embargo, éstas no tienen que mostrarse de manera explícita, es decir, no necesariamente deben estar escritas, pues cada alumno sabe qué esperar del profesor en el salón de clase, aunque éste no se lo diga. Por ejemplo: si un profesor generalmente imparte sus clases de manera expositiva, proporciona definiciones a los alumnos, luego les muestra ejemplos y finalmente les pide que resuelvan algunos ejercicios, los alumnos ya saben que hay que resolver los ejercicios tal y como lo hizo el profesor anteriormente.

De esta manera, si el profesor un día llega a impartir su clase de una manera diferente a como lo hace en otras ocasiones, es decir, que ahora comience la clase proporcionando un problema a sus estudiantes para que lo resuelvan, ellos empezarán a desconcertarse y decir al profesor que cómo quiere que resuelvan ese problema si no han visto el tema, esto podría llamarse un rompimiento del contrato didáctico y ahora se tendrá que establecer otro, ya que tanto los alumnos como el profesor jugarán un rol diferente al que tenían con anterioridad.

Con base en la definición anterior y debido a que una situación a-didáctica forma parte de la situación didáctica, es importante conocer su definición:

El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

(Brousseau, 1986, citado en Panizza, 2003, p.4)

Referente a la situación a-didáctica también se muestra la definición de devolución, ya que es importante para que el alumno pueda entrar en dicho tipo de situación, Brousseau (1998, citado en Panizza, 2003, p. 8) la define de la siguiente manera: “la devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia”.

Continuando con la explicación del ejemplo 1, la situación a-didáctica se genera cuando el profesor entrega el problema a los equipos y los integrantes de cada uno comienzan a trabajar sobre la situación (problema), además, en este momento también se está dando la devolución, ya que, los alumnos, han aceptado resolver el problema, esto lo harán únicamente con lo que ellos saben, ya que el profesor se mantiene “alejado” de dicha situación, el punto en la situación a-didáctica es que no se pueda utilizar otro medio de solución, más que el saber que está en juego. Que el profesor se mantenga alejado no significa que no va a decir nada a sus alumnos o que se salga del salón y los deje trabajando. Según Panizza (2003) la situación a-didáctica implica que el profesor debe saber qué decir y en qué momento decirlo, de tal manera que no diga demasiado como para que con ello los estudiantes obtengan la respuesta, ni tan poco que los alumnos no encuentren el camino para la solución de la situación.

Brousseau (s.f., citado en Santaló, et al., 1994) hace una distinción de los tipos de situaciones que se pueden encontrar dentro de una situación didáctica, dicha distinción puede verse como etapas de la situación didáctica, éstas son las que se muestran a continuación:

1. Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

2. Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

3. Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.

4. Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación

> socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. (p.5)

Tome el ejemplo 1 y observe que la situación de acción se generaría en el momento en que los alumnos observan el problema y planean cómo resolverlo, el momento más interesante de la acción se generaría en la pregunta 2, ya que es cuando se pretende que los estudiantes observen un comportamiento exponencial.

El instante de la formulación, llegaría cuando cada uno de los miembros del equipo comente con sus compañeros cuál es la posible solución, por ejemplo, en la pregunta número 4 (¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de casillas del tablero de ajedrez con el número de granos? ¿Cuál es la fórmula?) los alumnos harán sus formulaciones, algunos pueden llegar a la conclusión de que la fórmula es $2^n = 2 \times 2 \times ... \times 2$ en donde n representa el número de casilla del ajedrez, esto se comenta porque en González (2010) se muestra que los estudiantes llegan a tal resultado. Sin embargo, otros podrían llegar a la formulación $2n$ donde n representa el número de la casilla, esto es mera intuición de las autoras debido a los antecedentes revisados con anterioridad, en los cuales se muestra que los estudiantes pueden confundir 2^n con $2n$ (Sosa, et al., 2013), pues, esta formulación puede ser creada debido a que los estudiantes se fijen únicamente en que en la casilla número 1 se otorgan 2 granos de trigo y en la casilla número dos se proporcionan 4 granos de trigo, por ello puede pensarse que como $2(1) = 2$ y $2(2) = 4$ entonces la fórmula es $2n$. Respecto a la validación dentro del equipo, ésta aparecerá cuando elijan una de las respuestas de los integrantes del equipo, para realizar dicha elección, los argumentos del sujeto que posee la solución elegida debieron ser lo suficientemente buenos y convincentes para resultar elegido.

Finalmente, la institucionalización ocurre cuando el profesor menciona cuál es la respuesta correcta, sin embargo, para que llegue ese momento, anteriormente tuvieron que haber pasado los representantes de cada equipo para mostrar la solución del problema, y ahí se vuelven a generar los distintos tipos de situaciones otra vez, es decir, se generan tanto en el equipo como de manera grupal. El profesor en este problema puede institucionalizar justamente lo de la pregunta 4, ya que es el cierre de las demás preguntas, por supuesto, también tiene que verificar que los estudiantes hayan encontrado el número de granos correctos que deben otorgarse en las casillas 2, 3, 4,…,64. Después de verificar que esto sea correcto, entonces el profesor puede decir que la fórmula que representa la relación entre el número de casillas con el número de granos es 2^n y tomar algunos números de casillas para que los alumnos vean que sí se obtienen los granos que ya habían obtenido.

Por otra parte, es importante mencionar, que este marco teórico es el ideal para lograr los objetivos de este trabajo, debido a que es el que más se adapta al diseño de una clase y porque según Brousseau (1986), la enseñanza-aprendizaje se logra justamente cuando el alumno pasa por cada una de las situaciones didácticas y esto es justamente lo que se quiere lograr, brindar una alternativa para la enseñanza-aprendizaje de los exponentes con alumnos de bachillerato.

2.3 Metodología: Ingeniería Didáctica

La noción de ingeniería didáctica se originó en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta, ésta surgió como una metodología para realizar Situaciones Didácticas y se define de la siguiente manera:

> […] es una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (Artigue, 1995, p. 33-34)

Luego, es importante destacar que la ingeniería didáctica funciona como marco teórico y también como metodología, sin embargo, en este documento se utiliza como metodología, la cual se caracteriza de la siguiente manera:

> 1. Por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Aquí se distinguen por lo general dos niveles: La *micro-ingeniería* y la *macro-ingeniería.* Las primeras son más fáciles de llevar a la práctica pues permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase. Las segundas, a pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales que imponen, se hacen indispensables.
>
> 2. Por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (Artigue, 1995, p. 36-37)

Según Artigue (1995), el segundo punto que caracteriza a la ingeniería didáctica como metodología difiere de otras respecto a la validación debido a que en otras metodologías la validación es externa, es decir, se utilizan grupos experimentales y de control mientras que en la ingeniería didáctica no es necesario esto, pues la validación se da entre el análisis a priori y el a posteriori, es decir, se da de manera interna.

Fases de la Ingeniería Didáctica

Artigue (1995) menciona que las cuatro fases de la ingeniería didáctica como metodología son: "La fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y la fase 4 de análisis a posteriori y validación" (p.38).

Fase 1: Análisis preliminar. Se consideran al menos tres dimensiones, las cuales se podrían desarrollar para tener completa la primera fase, según Artigue (1995) son:

1. La dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego.

2. La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
3. La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. (p. 40)

La descripción detallada de dichas dimensiones se dará a continuación:

La dimensión epistemológica:

Provee de historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual presenta como objetos universales tanto en tiempo como en espacio. Estos se conciben, con su mediación, como susceptible de evolución perdiendo esa categoría de verdades en sí mismos.

Provee de historicidad a las nociones matemáticas y protomatemáticas, tales como el rigor y con ello contribuye a mostrar que la concepción de un rigor eterno y perfecto de las matemáticas es sólo una ficción.

Posibilita a la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado y con ello contribuye a desterrar otra de las ficciones de la escuela, a saber, la concepción de que los objetos de enseñanza son copias simplificadas; pero fieles a los objetos de la ciencia. El análisis epistemológico nos permite comprender que es lo que gobierna la evolución del saber científico y tomar conciencia de la distancia que separan a esos dos sistemas. En este sentido, la noción de transposición didáctica toma en cuenta esas diferencias. (Farfán, 1997, p.15)

Entonces la dimensión epistemológica toma en cuenta la historia que hay detrás del concepto que se quiere enseñar, en el caso de la presente investigación se considera ¿cómo surgió el concepto de exponente?, es decir, con base a qué necesidades se originó. Justamente de la dimensión epistemológica se pueden encontrar las aplicaciones del concepto, pues al surgir de alguna necesidad, significa que tiene aplicación en la vida real. Sin embargo, no en todos los casos su aplicación se encuentra en la vida cotidiana, también algunos objetos matemáticos pudieron surgir como soporte dentro de la misma matemática.

En la presente investigación dentro de esta dimensión se analizan trabajos tales como el de Dennis y Confrey (2000), Cantoral y Farfán (1998), Boyer (1968) y Cajori (1913), pues estos autores realizaron sus investigaciones acerca de cómo y por qué surgieron los exponentes. En general, con las lecturas que se han llevado a cabo se ha encontrado que primero surgieron los exponentes naturales, luego los negativos y finalmente los racionales, justo como se encuentran inmersos en la vida escolar.

La dimensión cognitiva: Según Farfán (1997), en esta dimensión se distinguen dos aspectos importantes que se deben de realizar.

- Poner en evidencia la diversidad de ideas que se tienen sobre un mismo objeto matemático, las diferentes representaciones que se le asocian al objeto y el tratamiento que se le da.

- Hace una distinción entre los conocimientos que el profesor desearía que sus alumnos tengan y los que realmente han adquirido.

Esta dimensión se refiere principalmente a los estudiantes, es decir, se observa qué conocimientos tienen los alumnos respecto a un determinado contenido. En el caso del presente trabajo se realiza un cuestionario que posteriormente se aplica a estudiantes de primer semestre de bachillerato, esto con la finalidad de identificar cómo representan los estudiantes los exponentes racionales, qué saben acerca de ese contenido, es decir, qué tratamiento le dan cuando se encuentran con algún problema que implique el uso de exponentes, cuáles errores de los que se mencionaron en los antecedentes presentan al abordar dicho contenido, etc.

Por otra parte, es importante señalar que esta dimensión, se encuentra directamente relacionada con el objetivo específico: detectar los conocimientos previos de los estudiantes de primer semestre de bachillerato respecto al contenido de exponentes. Esta relación se da porque dentro de la dimensión cognitiva hay que realizar el cuestionario para los alumnos, aplicarlo y analizar los resultados, lo cual lleva a cumplir el objetivo específico mencionado anteriormente.

La dimensión didáctica:

> En el plano didáctico, la fuerza de la enseñanza basada en algoritmos (tal recurso se encuentra bloqueado aquí, ya que el estudio cualitativo puede dar lugar al desarrollo de métodos pero no puede convertirse en algoritmos), el status inframatemático del cuadro gráfico en la enseñanza, y el mito de la resolución completa (el estudio cualitativo va a colocar la mayoría del tiempo al profesor en la posición de tener que detenerse en el camino y admitir que no puede responder a todas las preguntas que se formulan de forma natural). (Artigue, 1995, p. 41)

En esta dimensión se analizan los programas de estudio (referente al contenido de exponentes) de las escuelas donde se aplicará la situación didáctica, serán dos instituciones una pública y otra privada. Así mismo se analizarán algunos libros de texto para observar cómo es que se desarrolla el contenido de exponentes en ellos. También se aplicará un cuestionario a profesores de nivel secundaria y bachillerato de diferentes instituciones educativas con la finalidad de conocer cómo aborda el profesor el contenido en cuestión con sus estudiantes, en qué año o semestre se imparte dicho contenido y con qué profundidad se hace, es decir, si se ven exponentes naturales, negativos y racionales o sólo algunos de los anteriores.

El objetivo específico: conocer cómo abordan algunos profesores de secundaria y bachillerato el contenido de exponentes, se logró a través de la dimensión didáctica, pues en ésta se realizó y aplicó un cuestionario para los profesores de dichos niveles, posteriormente, se analizaron y agruparon las respuestas que proporcionaron los profesores.

Fase 2: Concepción y análisis a priori. El investigador tiene que determinar las variables de comando con las que va a trabajar aparte de las que ya están delimitadas en sus objetivos, Artigue (1995), menciona dos tipos de variables de comando que son: “Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería. Las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase" (p. 42).

Según De Faria (2006) las variables pueden ser generales o dependientes del contenido a enseñar. También es importante destacar que las variables macro-didácticas (selecciones globales) aunque se encuentren separadas de las micro-didácticas (selecciones locales) no son independientes.

Por otra parte, Artigue (1995) destaca que el análisis a priori comprende una parte descriptiva y otra predictiva en las cuales se debe realizar lo siguiente:

Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.

Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.

Prever los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

De lo anterior se puede concluir según De Faria (2006) que el análisis a priori tiene como objetivo determinar cómo las selecciones hechas tanto globales como locales influyen en el comportamiento de los estudiantes. Por ello, el análisis a priori está conformado de una serie de hipótesis que se validarán en la fase 4 con el análisis a posteriori. Es decir, se verificará si las hipótesis resultaron ser ciertas o no.

Fase 3: Experimentación. De Faria (2006), menciona lo siguiente:

> Es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la investigación.
>
> La experimentación supone:
>
> El explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
>
> El establecimiento del contrato didáctico;
>
> La aplicación de los instrumentos de investigación;
>
> El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

> Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, hacer un análisis a posteriori local, confrontando con los análisis a priori, con el fin de hacer las correcciones necesarias.
>
> Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis a priori (p. 5).

Respecto al primer punto que se mencionó anteriormente se tiene planeado aplicar la situación didáctica en un grupo de bachillerato de segundo semestre, ése será tomado de una institución pública que es la preparatoria de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) plantel V que se encuentra ubicada en el municipio de Jerez de García Salinas, dicho grupo cuenta con alrededor de 30 estudiantes.

Respecto a los dos puntos siguientes, la profesora-investigadora juega el rol de guía, ya que ella observa cómo están llevando a cabo la actividad cada uno de los equipos y si tienen alguna dificultad ella hace preguntas a los integrantes del equipo para que logren construir el conocimiento deseado. Luego, los estudiantes serán los encargados de construir su propio conocimiento con la orientación pertinente de los demás equipos y la profesora-investigadora.

Por otra parte, también es importante señalar que las actividades diseñadas son dos, la primera es referente a los exponentes naturales y cero y la segunda actividad trata de obtener una aproximación al valor de raíces cuadradas de números naturales mediante geometría.

En el último punto de los que se mencionaron anteriormente, es decir, en el registro de observaciones realizadas en la experimentación, se toman en cuenta hojas de trabajo, así como fotografías y posiblemente videos de apoyo.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación. De Faria (2006) comenta lo siguiente:

> Esta es la última fase de la ingeniería didáctica. Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc. La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis, el a priori y a posteriori (p. 5).

Capítulo 3

Análisis preliminar

Capítulo 3: Análisis preliminar

3.1 Dimensión epistemológica

La epistemología trata de explicar cómo surgió algún concepto históricamente hablando, en este caso, el concepto que se trabaja aquí es el de exponentes, para el desarrollo de esta dimensión se analizó el trabajo de Dennis y Confrey (2000) el cual se centra en un análisis del Arithmetica Infinitorum (Wallis, 1972) que trata principalmente de exponentes racionales.

Según Dennis y Confrey (2000), aunque John Wallis (1606-1703) no fue la primera persona que sugirió exponentes racionales (fraccionarios), pues antes ya habían sido propuestos por Oresme en el siglo XIV y por Girard y Stevin en el siglo XVI, se le conoce a él como el primero, debido al peso que tuvo su trabajo del Arithmetica Infinitorum (Wallis, 1972), ya que aunque en éste no se muestran demostraciones formales, las definiciones de Wallis son duraderas dentro de las matemáticas debido a que demuestra su viabilidad a través de múltiples representaciones (tabulares, geométricas y algebraicas). Además, el Arithmetica Infinitorum sirvió de base para otros trabajos, por ejemplo, para que Isaac Newton (1642-1722), desarrollara su famoso binomio.

Por otra parte, es importante mencionar que Dennis y Confrey (2000) comentan en su investigación, que desean entender el desarrollo de exponentes racionales en un nivel más profundo y no verlos simplemente como una extensión de patrones numéricos y sus propiedades, ya que éstos surgieron por la necesidad de calcular áreas, límite de razones, razones con números negativos y funciones continuas. Además, se comenta que, si no hubieran surgido de tales necesidades, únicamente serían aceptados los exponentes naturales. También, mencionan en su investigación que la historia permite ver diferencias entre índice, exponente y potencia, sin embargo, no comentan cuáles son dichas diferencias, pues, en ocasiones cuando escriben índice, entre paréntesis escriben exponente.

Respecto a los exponentes naturales, Dennis y Confrey (2000) mencionan en su documento que la Geometría de René Descartes (Descartes, 1952) fue el primer tratado publicado en el que se escribe un exponente natural como un superíndice, es decir, se utiliza un índice para representar la multiplicación repetida (reiterada), escribió x^3 en lugar de xxx.

Posteriormente, John Wallis utilizó la notación que introdujo Descartes, para poder obtener los exponentes racionales. Wallis hizo todo un desarrollo para poder mostrar la veracidad de la igualdad $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$, éste es mostrado en Dennis y Confrey (2000) y también se encuentra en este trabajo de la siguiente manera:

Wallis considera razones de la forma:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

Para cada valor entero de k Wallis investigó el comportamiento de la razón anterior cuando n se incrementa, es decir, el número de términos de la sucesión, así cuando $k = 1$, él calcula:

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{1}{2}$$

Cuando n se incrementa, esta razón se mantiene fija. Wallis llama a $\frac{1}{2}$, la razón característica del índice $k = 1$.

Ahora, cuando $k = 2$, Wallis calculó las siguientes razones:

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{4^2+4^2+4^2+4^2+4^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5^2+5^2+5^2+5^2+5^2+5^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$$

Wallis establece que el lado derecho de las ecuaciones es siempre igual a $\frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$, de esta expresión, él observó que cuando n se incrementa, la razón se aproxima a $\frac{1}{3}$, por lo que define la razón característica del índice $k = 2$ como $\frac{1}{3}$. De la misma manera, se pueden calcular las razones características para $k = 3,4,5, \ldots$ Luego, Wallis afirma que la razón característica del índice k es $\frac{1}{k+1}$ para todos los enteros positivos k.

Lo descrito anteriormente, se puede comprobar geométricamente según Wallis (1972), ya que el área bajo la curva $y = x^k$ (véase la figura 4), respecto del área del rectángulo que la contiene es la misma que la razón característica.

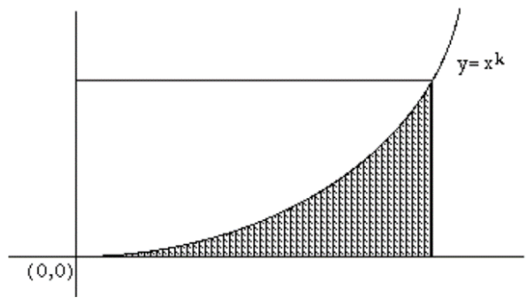


Figura 5: Representación del área bajo la curva $y = x^k$

Recuperada de Dennis y Confrey (2000)

Según Dennis y Confrey (2000), estos resultados geométricos Fermat, Roberval, Cavalieri y Pascal ya los habían encontrado, es decir, ellos se dieron cuenta de que el área bajo la curva de $y = x^k$ guardaba una proporción de $\frac{1}{k+1}$ respecto del rectángulo que lo contiene, cuando k es un entero positivo (Edwards, 1979. Capítulo 4). Aunque Pascal dio una prueba de inducción formal para este resultado, Wallis asegura que la afirmación también es cierta para $\sqrt{x}$, ya que se considera el índice como $\frac{1}{2}$ debido a que el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ es el complemento del área bajo $y = x^2$ (es decir, el área no sombreada de la Figura 5: Representación del área bajo la curva $y = x^k$Figura 5) debe tener una razón característica de

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1}$$

Lo mismo se puede ver para $\sqrt[3]{x}$, que tiene la siguiente razón característica:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1}$$

La coordinación de dos representaciones diferentes (gráfica y aritmética) dio a Wallis la confianza de afirmar que el índice apropiado para $y = \sqrt[q]{x^p}$ debe ser $\frac{p}{q}$ y la razón característica debe ser

$$\frac{1}{\frac{p}{q}+1}$$

Incluso Wallis afirmó que esto es cierto aun cuando se tenga un índice irracional.

Entonces, de acuerdo a lo que mencionan Dennis y Confrey (2000) parece ser que los primeros exponentes en surgir fueron los naturales y luego los racionales. Además, se observa que éstos aparecen al dar solución a problemas de cálculo de áreas. De lo anterior puede notarse que hay diferencia entre los exponentes que surgieron primero y como se enseñan en la educación actual, pues, en la historia se encuentran primero los exponentes naturales y luego los racionales lo cual es diferente a como se enseñan en la educación actual, ya que en ésta primero se enseñan los exponentes naturales, cero, negativos y finalmente los racionales.

3.2 Dimensión cognitiva

Esta dimensión es la segunda dentro del análisis preliminar según Artigue (1995), dentro de ésta, según Farfán (1997) se pone en evidencia la diversidad de ideas que se tiene sobre un mismo objeto matemático (en este caso los exponentes), las diferentes representaciones que se asocian al objeto y el tratamiento que se le da. Además, se hace una distinción entre los conocimientos que el profesor desearía que sus alumnos tengan y los que realmente han adquirido.

3.2.1 Conocimientos previos de algunos alumnos de primer semestre de bachillerato respecto al contenido exponentes

3.2.1.1 Diseño del cuestionario

A continuación, se muestra un cuestionario que se diseñó con la finalidad de detectar los conocimientos previos de los estudiantes de primer semestre de bachillerato respecto al contenido de exponentes, esto a su vez, hace que se cumpla uno de los objetivos específicos de este trabajo.

Por otra parte, antes de aplicar de manera definitiva dicho cuestionario, primero se hizo un piloteo, en el cual se aplicó el cuestionario a tres estudiantes pertenecientes al Centro de Asesorías para Estudiantes con Discapacidad (CAED), esto con la finalidad de medir el tiempo en que los estudiantes respondían a todas las preguntas y observar si tenían alguna dificultad para entender las instrucciones dadas. Como resultado, se obtuvo que los estudiantes terminaron en un tiempo aproximado de 30 minutos y no tuvieron ninguna dificultad para entender las instrucciones, un aspecto importante para destacar es que las respuestas dadas a cada una de las expresiones, son muy similares a las que proporcionaron los estudiantes de las instituciones en donde se aplicó el cuestionario.

Posterior a esto, el cuestionario se aplicó en dos instituciones diferentes: en una pública que pertenece al plantel V de la Unidad Académica de Preparatorias de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) y en una privada, que es el Colegio Santa Elena de la Universidad de la Vera-Cruz (UVC).

El cuestionario que se muestra en el Anexo 1, fue aplicado a 30 estudiantes de la UAZ y a 21 estudiantes de la UVC, éstos se separaron en dos partes: los que pertenecen al género femenino y los que pertenecen al masculino. Posteriormente, se eligieron 10 cuestionarios al azar de cada una de las instituciones, 5 de cada género, lo cual hace un total de 20 cuestionarios analizados.

Las actividades del cuestionario tenían objetivos específicos, es decir, se pusieron con la finalidad de identificar en qué tipo de exponentes (naturales, cero, negativos y fraccionarios) los estudiantes presentaban errores. De esta manera, si por ejemplo, los alumnos cometen errores desde el exponente natural, además del cero, negativo y racional, es necesario que la situación didáctica se diseñe para atender tal error, pues se considera importante que a los alumnos les quede claro el resultado que arroja un número elevado a potencia natural antes que los demás exponentes, ya que el resto de los exponentes tienen mayor grado de dificultad que los naturales y si los errores se cometen desde el exponente "más fácil" no se puede pretender que comprendan los demás.

A continuación, se muestra la Tabla 1 en la cual se encuentra el objetivo de cada una de las actividades propuestas en el cuestionario, así como las hipótesis que tuvo la profesora-investigadora del presente trabajo respecto a lo que contestarían los estudiantes.

Actividad	Objetivo	Hipótesis
1. Desarrolla las siguientes expresiones y escribe el resultado de la operación. a) $2^3 =$ b) $3^2 =$ c) $4^1 =$	Identificar si los alumnos cometen errores en el cálculo de exponentes naturales.	Se cree que los estudiantes no tendrán mucha dificultad para otorgar el valor de bases elevadas a exponentes naturales.
2. En cada una de las siguientes expresiones escribe una expresión que las simplifique. d) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ e) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ f) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 =$ Con base a la pregunta anterior, escribe una expresión que represente a	Detectar si los alumnos son capaces de llegar a la generalización respecto al exponente natural a^n	Los alumnos podrán dar una expresión que generalice las expresiones aritméticas proporcionadas en la actividad 1.

$a \times a \times a \times \ldots \times a =$ ____ si a se repite n veces.		
3. Escribe el procedimiento y resultado para calcular: g) $2^0 =$ h) $3^0 =$ i) $4^0 =$ Con base en lo anterior ¿cuál será el valor de a^0 si a representa cualquier número distinto de cero? Explica cómo llegaste a ese valor.	Identificar cuánto vale para los alumnos una base elevada al exponente cero y observar si son capaces de generalizar las expresiones aritméticas.	Con base en los antecedentes leídos y la experiencia docente de la profesora-investigadora de este trabajo, se tiene la idea de que los alumnos no dirán en ninguno de los incisos de la actividad que el resultado es 1, en su lugar, indicarán que el resultado es la misma base o cero. Además, se cree que no podrán generalizar.
4. Calcula el valor de las siguientes expresiones y explica tu procedimiento. j) $2^{-1} =$ k) $3^{-2} =$ l) $4^{-3} =$ ¿Podrías escribir una expresión que generalice los casos anteriores j), k) y l)?	Identificar la diversidad de valores que pueden otorgarle a una base con exponente negativo.	Los alumnos cometerán los errores que reportan algunos de los antecedentes vistos con anterioridad (Lezama, 1999; Martínez, 2007). Es decir, se encontrarán respuestas como: $3^{-2} = (-3)(-3) = 9$ o bien $3^{-2} = 3(-2)$.
5. Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones, describiendo ampliamente tu procedimiento. m) $2^{\frac{1}{2}} =$ n) $3^{\frac{2}{3}} =$ o) $4^{\frac{3}{4}} =$	Detectar los valores que dan los estudiantes a bases elevadas a exponentes fraccionarios.	Los estudiantes cometerán el error mencionado por Lezama (1999) y Martínez (2007), éste es: multiplicar la base por el exponente.

¿Podrías escribir una expresión que generalice los casos anteriores m), n) y o)?		
6. Indique el resultado de las siguientes operaciones, así como el procedimiento para obtenerlo. p) $3^2 \times 3^3 =$ q) $4^{-3} \times 4^4 =$ r) $\frac{3^4}{3^2} =$ s) $(2^4)^3 =$ t) $4^3 + 4^2 =$	Identificar si conocen o no las propiedades de los exponentes.	Los estudiantes conocen las propiedades, aunque en el último ejercicio pensarán que la base queda igual y los exponentes se suman, es decir, pensarán que es lo mismo que la propiedad de la multiplicación con bases iguales.
¿Tuviste alguna dificultad para hacer el cálculo? ¿Por qué? Esta pregunta se hizo en las actividades del 1-5.	Que los estudiantes escriban si tuvieron o no dificultad para realizar los cálculos con la finalidad de observar qué tan seguros estuvieron al dar su respuesta.	En algunos casos culparán al profesor, es decir, mencionarán que no han visto el contenido, que no le entendieron al profesor, o bien, que no tuvieron dificultades pues ya han visto dicho contenido, esto último dejará ver que realmente están seguros de su respuesta.
¿Podrías escribir una expresión que generalice los casos anteriores? Esta pregunta se hizo en las actividades del 2-5.	Identificar la capacidad de generalización que tienen los estudiantes, es decir, detectar si su pensamiento sigue siendo meramente aritmético o están ya en el algebraico.	Los estudiantes lograrán dar una expresión en general para cada una de las actividades.

Tabla 1: Objetivo e hipótesis de cada una de las actividades propuestas en el cuestionario

3.2.1.2 Resultado del análisis de las respuestas de los estudiantes.

En seguida, se muestra la Tabla 2 que indica la cantidad de respuestas correctas que proporcionó cada uno de los estudiantes en cada actividad.

	Institución Pública										**Institución Privada**									
Alumno	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
Género	H	H	H	H	H	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	H	H	H	H	H
Manejo de exponentes positivos (actividad 1 y 2)	6/6	3/6	2/6	0/6	0/6	6/6	6/6	1/6	2/6	3/6	5.5/6	5.5/6	1.5/6	3/6	1/6	4.5/6	6/6	1/6	6/6	1/6
Generalización	✔	✕	✕	✕	✕	✕	✔	✕	✕	✕	✕	✔	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✔	✕
Manejo de exponente cero (actividad 3)	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3
Generalización	✕	✔	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕
Manejo de exponentes negativos (actividad 4)	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3
Generalización	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕
Manejo de exponentes racionales (actividad 5)	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3	0/3
Generalización	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕	✕
Manejo de propiedades de los exponentes (actividad 6)	0/5	1/5	0/5	0/5	0/5	0/5	2/5	0/5	0/5	0/5	2.5/5	0/5	0/5	0/5	0/5	0/5	0/5	0/5	0.5/5	0/5

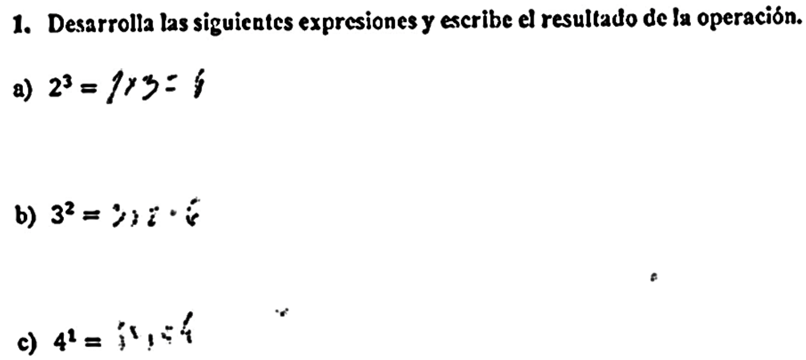
Tabla 2:Ítems correctos de los estudiantes en cada actividad

Luego, con base en la Tabla 2 se puede observar lo siguiente:

- Aunque se pensó que los estudiantes lograrían dar un valor correcto para los ejercicios con exponente natural no fue así, pues únicamente cinco estudiantes $(a_1, a_6, a_7, a_{17}, a_{19})$ lograron dar el valor correcto a todos los incisos. Otros dos, casi lo hicieron (a_{11}, a_{12}), sin embargo, solamente dejaron indicada la operación en uno de los incisos y no dieron el valor final. Del resto, algunos cometieron el error que se menciona en el estudio realizado por Sosa, et al. (2013), éste es: multiplicar la base por el exponente.
- Ninguno de los estudiantes logró proporcionar un valor correcto para el exponente cero, incluso, los estudiantes cometieron errores como los mencionados por Abrate, et al. (2006), Martínez (2007) y González (2010). Es decir, mencionaron que $3^0 = 3$ o bien $3^0 = 0$.
- Ninguno de los estudiantes logró proporcionar un valor correcto para el exponente negativo. Algo que llama la atención al respecto, es que los estudiantes cometieron un error que no se esperaba, pues algunos respondieron que $2^{-1} = 1, 3^{-2} = 1$ y $4^{-3} = 1$, otro multiplicó la base por el exponente, otro utilizó la multiplicación reiterada y al resultado le agregó el signo y uno de ellos restó el exponente de la base. Del resto, algunos no contestaron o cometieron otro tipo de errores.
- Ninguno de los estudiantes logró proporcionar un valor correcto para el exponente fraccionario.

Enseguida, se muestra el tipo de errores que cometieron los estudiantes, los cuales fueron mencionados en los puntos anteriores y algunos de éstos concuerdan con los errores que detectaron Abrate, Pochulu y Vargas (2006), Martínez (2007), González (2010) y Sosa et al. (2013). Por ejemplo:

Los alumnos: a_5, a_8, a_{18} y a_{20} cometen el error de multiplicar la base por el exponente, para exponentes naturales, como ejemplo, se muestra la Figura 6 correspondiente al alumno a_5 Este, también se encontró en Sosa et al. (2013), lo cual indica que los estudiantes que se analizaron en este trabajo y los de Sosa et al. (2013) cometen el mismo tipo de error con exponentes naturales. Esto se cree que se debe a que el contenido es difícil por sí mismo. Por ello, la importancia de diseñar una situación didáctica como alternativa para la enseñanza de tal contenido.



1. Desarrolla las siguientes expresiones y escribe el resultado de la operación.

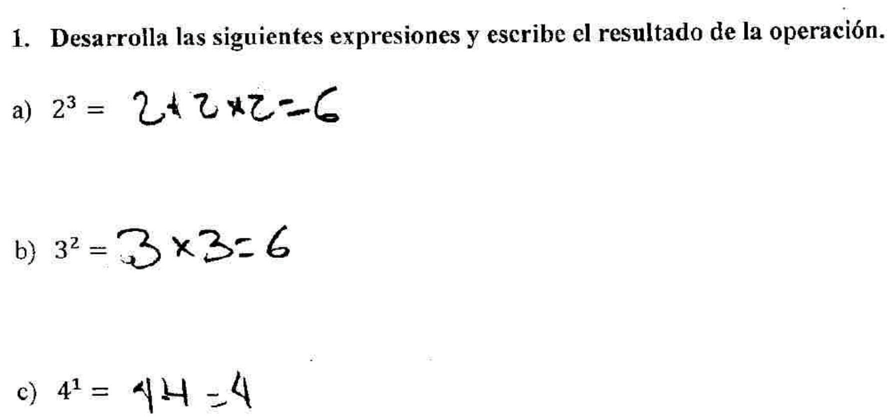
a) $2^3 =$

b) $3^2 =$

c) $4^1 =$

Figura 6: a_5, multiplicación base por exponente

Por otra parte, en la Figura 7 se puede notar que los alumnos a_{15} y a_{16} obtienen el mismo resultado que daría al multiplicar la base por el exponente, es decir, hacen el desarrollo correcto en los primeros dos incisos, lo expresan como multiplicación, pero el resultado que escriben es el que obtendrían al sumar 2+2+2 y 3+3, lo cual indica que aunque expresen el desarrollo de la expresión como multiplicación están sumando.



1. Desarrolla las siguientes expresiones y escribe el resultado de la operación.

a) $2^3 =$ 2×2×2=6

b) $3^2 =$ 3×3=6

c) $4^1 =$

Figura 7: a_{16}, multiplicación base por exponente

Luego, en el cuestionario que contestó el alumno a_{12} (Figura 8), se encontró que comete el mismo error que los alumnos a_5 y a_8, es decir, que multiplica la base por el exponente. Sin embargo, se muestra su respuesta debido a que llama la atención que tiene dos opciones, aunque, solamente en el primer inciso son diferentes, la que se encuentra después del igual es la correcta, pero duda y abajo pone la de multiplicación base por exponente, en el siguiente inciso aunque tiene 3×3, pone como respuesta 6, es decir, como si sumara o tal vez es para que coincida el resultado con el que obtiene al multiplicar la base por el exponente. El último inciso lo hace como si multiplicara base por exponente, lo cual le da la respuesta correcta, pero no por la razón correcta.

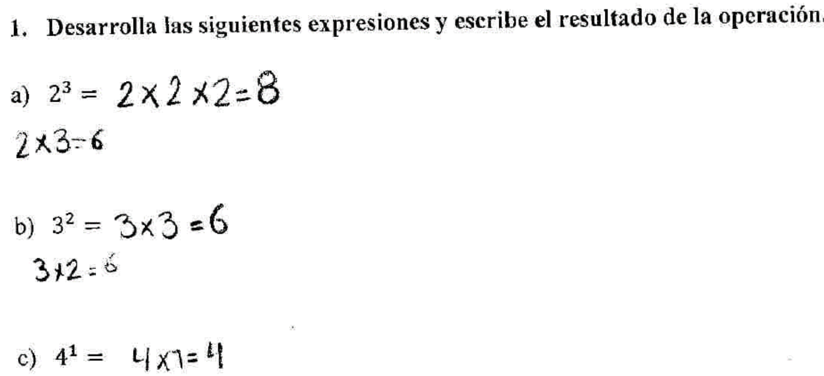


Figura 8: a_{12}, desarrollo correcto y multiplicación base por exponente

Ahora, se muestra el error que cometen los alumnos a_2, a_5, a_6, a_7, a_8 y a_{16}, éste se encuentra en la Figura 9 y coincide con el error que reportan Abrate, et al. (2006), Martínez (2007) y González (2010), éste es: $2^0 = 2$, es decir, que los estudiantes al tener una base elevada al exponente cero, dan como respuesta la base. Esto deja ver que lo mencionado por Martínez (2007) es verdad, no importa cómo enseñen el contenido los profesores, éste siempre será difícil para los estudiantes.

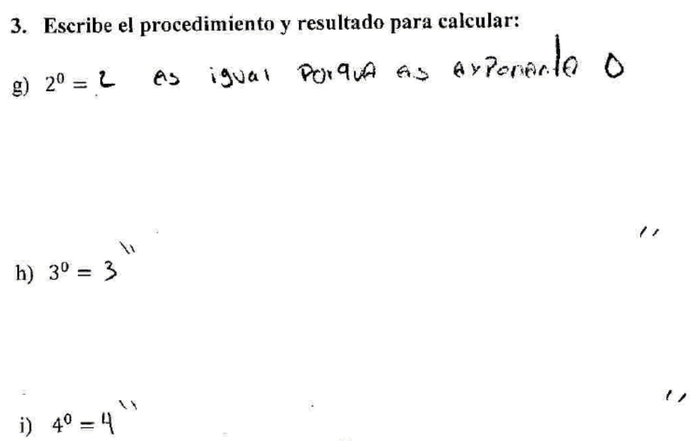
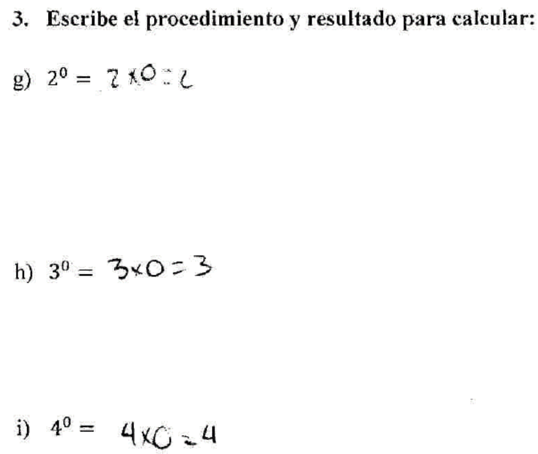


Figura 9: a_2, base elevada a la potencia cero, da como resultado la base

Luego, se encuentra el error que comete el estudiante a_{15} (Figura 10) el cual arroja como resultado la misma base (igual que el caso anterior), la diferencia es que a_{15} "multiplica la base por el exponente", aunque según él, el resultado de multiplicar un número cualquiera por cero da el mismo número.



3. Escribe el procedimiento y resultado para calcular:

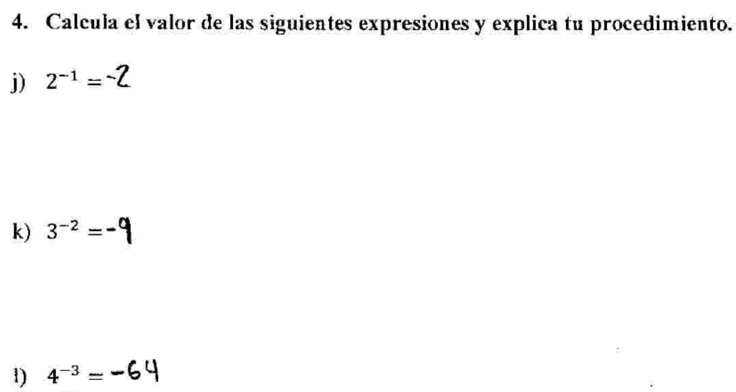
g) $2^0 = 2 \times 0 = 2$

h) $3^0 = 3 \times 0 = 3$

i) $4^0 = 4 \times 0 = 4$

Figura 10: a_{15}, multiplicación base por exponente, sin embargo, el resultado es la base

El alumno a_2 deja ver (Figura 11) el error que identificaron Martínez (2007) y González (2010), éste es: para exponentes negativos el estudiante hace lo mismo que si fuera un exponente natural (utiliza la multiplicación reiterada), posteriormente, añade el signo negativo al resultado.



4. Calcula el valor de las siguientes expresiones y explica tu procedimiento.

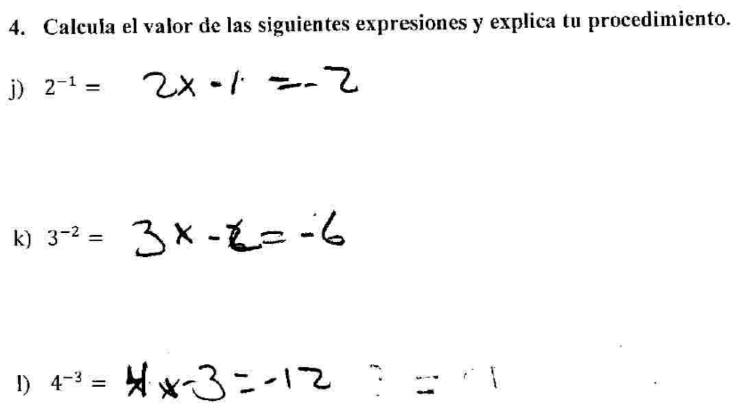
j) $2^{-1} = -2$

k) $3^{-2} = -9$

l) $4^{-3} = -64$

Figura 11: a_2, multiplicación reiterada, después añade el signo negativo al resultado

Luego, los alumnos a_{16} y a_{18} cometen el error de multiplicar la base por el exponente (véase la Figura 12) éste también es reportado en el trabajo de González (2010).


4. **Calcula el valor de las siguientes expresiones y explica tu procedimiento.**

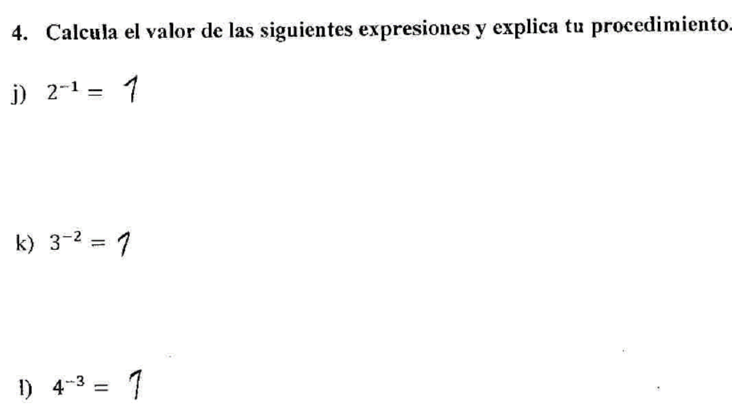
j) $2^{-1} =$ 2x -1 = -2

k) $3^{-2} =$ 3x -2 = -6

l) $4^{-3} =$ 4x-3 = -12

Figura 12: a_{16}, multiplicación de base por exponente, cuando éste es negativo

Un error que no se esperaba que apareciera en los estudiantes analizados fue: $2^{-1} = 1, 3^{-2} = 1$ y $4^{-3} = 1$, es decir, para cualquier base con exponente negativo respondieron que el resultado es 1. Esto se cree que puede deberse a que los estudiantes saben que en algún tipo de exponente el resultado es 1, más no recuerdan que ese exponente debe ser cero. Los estudiantes que cometieron este tipo de error son: a_5, a_8, a_{12} y a_{15}, éste puede verse en la Figura 13 que se muestra a continuación.


4. **Calcula el valor de las siguientes expresiones y explica tu procedimiento.**

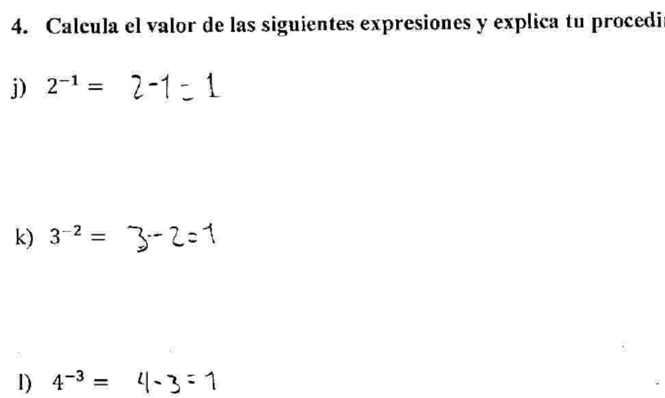
j) $2^{-1} =$ 1

k) $3^{-2} =$ 1

l) $4^{-3} =$ 1

Figura 13: a_8, base a exponente negativo, resultado 1

Finalmente, se encuentra al alumno a_{15}, éste muestra un error muy peculiar, ya que hace una resta, es decir, a la base le resta el exponente. Esto puede notarse en la Figura 14. Éste al igual que el anterior, es un error que no se pensó encontrar y sin embargo es muy interesante la cantidad de cosas que pueden existir en la mente del estudiante, en este caso, coincidió con el caso anterior de que la respuesta proporcionada por a_{15} es 1 en todos los incisos, esto es simple coincidencia, pues la diferencia entre la base y el exponente es 1, pero si la diferencia hubiera sido diferente de 1, el estudiante seguramente habría contestado lo mismo, esto porque su respuesta está guiada por la idea de tener que realizar una operación y como "entre los números hay un signo negativo”, lo más adecuado que vio el estudiante es que tenía que realizar una resta.



4. Calcula el valor de las siguientes expresiones y explica tu procedimiento.

j) $2^{-1} =$ 2-1 = 1

k) $3^{-2} =$ 3-2=1

l) $4^{-3} =$ 4-3=1

Figura 14:a_{15}, resta el exponente a la base

Para complementar lo anterior, a continuación se muestra la Tabla 3, la cual contiene las hipótesis que se tuvieron respecto a lo que contestarían los alumnos en cada actividad y lo que realmente ocurrió.

Actividad	Objetivo	Hipótesis	Realidad
1 y 2	Identificar si los estudiantes cometen errores al calcular exponentes naturales con bases enteras.	Se cree que los estudiantes no tendrán mucha dificultad para dar el valor de bases enteras elevadas a exponentes naturales.	No se cumplió la hipótesis planteada, ya que los estudiantes cometen errores también en el cálculo de exponentes naturales.
3	Identificar cuánto vale para los estudiantes una base elevada al exponente cero y observar si son capaces de generalizar las expresiones aritméticas.	Con base en los antecedentes leídos y la experiencia docente de la profesora-investigadora de este trabajo, se tiene la idea de que los estudiantes no dirán en ninguno de los incisos de la actividad que el resultado es uno, en su lugar, indicarán que el resultado es la misma base o cero. Además, se cree que no podrán generalizar.	Esta hipótesis se confirmó, pues ninguno de los 20 estudiantes analizados dio como respuesta que una base elevada a la potencia cero es igual a uno. Por el contrario, mencionaron que era la misma base o cero. Tampoco pudieron generalizar, tal y como se suponía.

4	Identificar la diversidad de valores que dan a una base con exponente negativo.	Los estudiantes cometerán los errores que reportan algunos de los antecedentes vistos con anterioridad (Lezama, 1999; Martínez, 2007). Es decir, se encontrarán respuestas como: $3^{-2} = (-3)(-3) = 9$ o bien $3^{-2} = 3(-2)$.	La hipótesis se cumplió, ya que sí se encontraron los errores que reportan Lezama (1999) y Martínez (2007).
5	Detectar los valores que dan los estudiantes a bases elevadas a exponentes fraccionarios.	Los estudiantes cometerán el error mencionado por Lezama (1999) y Martínez (2007), éste es: multiplicar la base por el exponente.	En este caso, la hipótesis no se cumplió, pues ninguno de los estudiantes cometió el error de multiplicar la base por exponente.
6	Identificar si conocen o no las propiedades de los exponentes.	Los estudiantes conocen las propiedades, aunque en el último ejercicio pensarán que la base queda igual y los exponentes se suman, es decir, pensarán que es lo mismo que la propiedad de la multiplicación con bases iguales.	No ocurrió lo pensado en la hipótesis, pues los estudiantes no conocen las propiedades de los exponentes, en los ejercicios, algunos estudiantes intentaron resolverlos, por ejemplo, para la propiedad de la multiplicación de bases iguales, el estudiante resolvió cada uno de los factores y luego los multiplicó.
¿Tuviste alguna dificultad para hacer el cálculo? ¿Por qué? Esta pregunta se hizo en las actividades del 1-5.	Que los estudiantes escriban si tuvieron o no dificultad para realizar los cálculos con la finalidad de observar qué tan seguros estuvieron al dar su respuesta.	En algunos casos culparán al profesor, es decir, mencionarán que no han visto el contenido, que no le entendieron al profesor, o bien, que no tuvieron dificultades pues ya han visto dicho contenido, esto último dejará ver que realmente están seguros de su respuesta.	Los estudiantes, respondieron en algunas ocasiones a este tipo de pregunta que ya habían visto el contenido, otros dijeron que no lo habían visto, por lo tanto no respondieron o estaban inseguros de su respuesta y otros más contestaron que se les

			olvidó y por ello no estaban seguros de su respuesta.
¿Podrías escribir una expresión que generalice los casos anteriores? Esta pregunta se hizo en las actividades del 2-5.	Identificar la capacidad de generalización que tienen los estudiantes, es decir, detectar si su pensamiento sigue siendo meramente aritmético o están ya en el algebraico.	Los estudiantes lograrán dar una expresión en general para la actividad 2.	Únicamente 4 de los 20 alumnos analizados lograron dar una expresión general para los exponentes naturales. Por lo tanto, no se cumplió la hipótesis.

Tabla 3: Hipótesis vs realidad

Respecto a los resultados obtenidos en la tabla anterior, se puede concluir que efectivamente, los alumnos tienen dificultades con el contenido de exponentes, ya sea para elevar una base a un exponente natural, cero, negativo o fraccionario, esto a pesar de lo que se pensó en un principio, ya que antes de realizar el examen diagnóstico a los alumnos, se tenía la idea de que no batallarían con los exponentes naturales. Por todo lo anterior, se considera que el contenido es relevante para ser estudiado.

3.3 Dimensión didáctica

En la primera sección de este capítulo se analizan los resultados de un cuestionario que se aplicó a nueve profesores, tres de secundaria y seis de bachillerato. El objetivo del cuestionario era obtener información acerca de la forma en que los maestros abordan el contenido de exponentes. Se aplicó a maestros de secundaria y bachillerato debido a que se considera que los alumnos empiezan a ver el contenido desde este nivel.

En la segunda sección, se muestra el análisis de dos programas de estudio del nivel bachillerato, éstos se eligieron debido a que en ésas instituciones educativas se llevó a cabo la presente investigación, se le preguntó a los profesores con cuál programa de estudios trabajan y con base en ello fueron elegidos los programas que se presentan a continuación.

Después, dentro de este capítulo se encuentra en la tercera sección el análisis de cuatro cuadernos de estudiantes, en los cuales de muestra cómo aborda el contenido de exponentes el profesor, en qué orden muestra las propiedades, etc.

Finalmente, se encuentra en la cuarta sección un análisis de dos libros de texto que son utilizados en bachillerato como fuente bibliográfica, se analizó el libro de Oteyza, et al. (2007) y Baldor (1980), el primero se encuentra como fuente principal en la bibliografía del programa de Matemáticas I de la Unidad Académica de Preparatorias de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAPUAZ), el segundo se analizó debido a que el profesor del grupo con el que se implementa la experimentación comentó a la profesora-investigadora que él utiliza el libro de álgebra de Baldor.

3.3.1 Análisis de los cuestionarios contestados por algunos profesores

Se aplicaron nueve cuestionarios a profesores de secundaria y bachillerato con la finalidad de conocer cómo enseñan los exponentes naturales, cero, negativos y fraccionarios. Tres de los profesores que respondieron el cuestionario son profesores de secundaria (**profesor A, B** y **C**) y el resto son profesores de bachillerato (**profesor D, E, F, G, H** e **I**), es importante señalar que cada uno de los profesores trabaja en instituciones diferentes, de los cuestionarios se obtuvo la siguiente información:

Todos los profesores (secundaria y bachillerato) enseñan el contenido de exponentes, éste es trabajado en secundaria en primero y segundo grado según los **profesores A y C**. Los **profesores E, F, G, H** e **I** de bachillerato, coinciden en que el contenido de exponentes se encuentra por primera vez en la materia de álgebra que es impartida en primer semestre, el **Profesor D** mencionó que el contenido se encuentra en la materia de representaciones simbólicas y algoritmos que se encuentra en el nivel II de la preparatoria abierta.

A continuación, se muestran las respuestas que proporcionaron los profesores de secundaria, respecto al cuestionario que se les hizo, posteriormente se encontrarán las respuestas de los profesores de bachillerato.

3.3.1.1 Respuestas de los profesores de secundaria

El cuestionario que se realizó a los profesores contiene las siguientes preguntas: ¿Cómo aborda la definición de exponente con sus alumnos, cuando el exponente es un número natural, cero, negativo, $\frac{1}{n}, \frac{m}{n}$ $y - \frac{m}{n}$? Los profesores de secundaria respondieron:

Cuando el exponente es natural

Profesores A y C: Es el número de veces que se multiplica la base por ella misma.

Profesor B: Recuerda que la suma de varios sumandos iguales se transforma o convierte en una multiplicación, por ejemplo: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$. Análogamente, la multiplicación de varios factores iguales se convierte en una potencia, por ejemplo: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$.

Exponente cero

Los **profesores A y B** dijeron que $\frac{5^4}{5^4} = \frac{5\times5\times5\times5}{5\times5\times5\times5} = \frac{625}{625} = 1$, luego utilizando la propiedad de la división se tiene que $\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$, por lo que $5^0 = 1$. El **profesor C** lo hace de manera similar solo que en lugar de tener $\frac{5^4}{5^4} = \frac{5\times5\times5\times5}{5\times5\times5\times5} = \frac{625}{625} = 1$ dice que $\frac{5^4}{5^4} = \frac{5\times5\times5\times5}{5\times5\times5\times5}$, posteriormente elimina los tres primeros cincos del numerador con los tres primeros cincos del denominador hasta obtener $\frac{5}{5} = 1$.

Exponente negativo

Tanto el **profesor A** como el **profesor B** coinciden en mostrar este tipo de exponentes mediante la división, es decir, $\frac{3^2}{3^5} = \frac{3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3\times3\times3} = \frac{1}{3^3}$ además por la propiedad de división se sabe que $\frac{3^2}{3^5} = 3^{-3}$ por lo que $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$.

Además, el **profesor A** hace énfasis en que este tipo de explicación la hace en segundo grado, en primero, los exponentes que trabaja se encuentran en la notación científica y en ese momento la explicación que da de los exponentes negativos es: cuando el número es muy pequeño.

El **profesor C** dijo que explica la ley: un número elevado a un exponente negativo es igual a una fracción cuyo numerador es uno y su denominador es el mismo con exponente positivo. Por ejemplo: $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$

Exponente $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$

Profesores A y C: Expresaron que este tipo de exponente no se aborda en secundaria.

Profesor B: Recuerda a los estudiantes que cuando se tiene una raíz cuadrada, cúbica, etc. se puede convertir a una cantidad con exponente fraccionario, ejemplos: $\sqrt[2]{2^1} = 2^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[3]{2^1} = 2^{\frac{1}{3}}$.

Exponente $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$

Profesores A y C: Expresaron que este tipo de exponente no se aborda en secundaria.

Profesora B: Da la misma explicación que en el caso anterior solamente varían los ejemplos $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ y $(2a)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(2a)^3}$.

Exponente $\boldsymbol{-\frac{m}{n}}$

Los profesores explicaron que en los planes de estudio de nivel secundaria no se propone trabajar este tipo de exponentes.

Por otra parte, los profesores de secundaria mencionaron que trabajan las siguientes propiedades de los exponentes:

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Además el **profesor C** añadió las siguientes propiedades:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

También se preguntó a los profesores: ¿Considera que el contenido de exponentes es difícil para sus estudiantes?

Profesor A: Indicó que sí es difícil para los estudiantes este contenido, ya que tienden a multiplicar la base por el exponente y no comprenden por qué cuando una potencia se eleva a la potencia cero el resultado es uno, los estudiantes piensan que el resultado debería de ser cero.

Profesor B: No tomó una postura sobre la dificultad del contenido para los estudiantes.

Profesor C: *En mi breve experiencia sí es difícil, ya que los procesos de justificación que los profesores otorgamos como instrucción para ellos, no queda claro, además, nuestra didáctica está enfocada al método tradicionalista puesto que pocas veces hacemos por* *justificar el porqué de los enunciados de la ley para cada caso, por lo que únicamente pronunciamos las leyes y no hay un aprendizaje significativo en los alumnos. Al considerar esto, el aprendizaje se vuelve difícil y por ello los resultados negativos saltan a la vista, por ejemplo, los alumnos no aplican las propiedades de los exponentes en la resolución de problemas.*

3.3.1.2 Respuestas otorgadas por los profesores de bachillerato

El cuestionario que se aplicó a los profesores de bachillerato también contiene las siguientes preguntas: ¿Cómo aborda la definición de exponente con sus alumnos, cuando el exponente es un número natural, cero, negativo, $\frac{1}{n}, \frac{m}{n}$ $y - \frac{m}{n}$? Ellos respondieron de la siguiente manera:

Exponente natural

Todos los profesores que respondieron al cuestionario (profesor D, E, F, G, H e I) mencionaron que el exponente natural lo definen de la siguiente manera:

El número de veces que se va a multiplicar la base, por ejemplo, $3^2 = 3 \times 3$, además, tres profesores **D, E y F** hacen hincapié en que mencionan a sus estudiantes la semántica de la notación exponencial como son los exponentes y la base. Además, es importante señalar que el **profesor E** añade algunas actividades que pone a sus estudiantes como:

$$2 \times 2 = 4 = 2^2$$

Leer y escribir en lenguaje verbal: dos por dos, dos al cuadrado; leer base 2, exponente dos; enfatizar "Dos al cuadrado significa dos por dos". Esta actividad la hace para otras potencias y para otras bases también. Luego, también introduce una actividad que consta de una tabla con espacios vacíos para que los estudiantes la completen, esta tabla se muestra a continuación en la Figura 15.

Multiplica	Resultado	Notación
2	2	
2 × 2	4	2^2
2 × 2 × 2	8	2^3
2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2		

Figura 15: Tabla a llenar por los estudiantes

Esto mismo lo hace con otras bases, pero en la última fila coloca *n*. Los estudiantes al llenar esta tabla tienen que ir pronunciando la notación, “dos a la dos”, “dos a la tres”, etc. Finalmente, experimenta con las Torres de Hanoi hasta llegar a la expresión $2^n - 1$. Para el número *p* de discos, $n = 7{,}8{,}9, \ldots$ predice el número de movimientos.

Exponente cero

Profesor D: Pregunta a los estudiantes cuánto vale a^0, posteriormente, pone un ejemplo particular 2^0 y pregunta ¿cuánto vale? Algunos estudiantes responden que 2 y otros que 0. Tomando en cuenta que los estudiantes ya conocen las leyes de los exponentes se hace lo siguiente:

Se supone que $2^0 = 2$ por lo que

$$4 = 2^2 = 2^{0+2} = 2^0 \times 2^2 = 2 \times 2^2 = 2^3 = 8$$

Se nota que esto es un resultado incorrecto ya que $4 \neq 8$.

Ahora se supone que $2^0 = 0$ y se hace un proceso análogo al anterior, en el cual se llega a que $4 = 0$ pero esto es una contradicción, por lo que el valor de 2^0 tampoco es cero.

Después de esto, el profesor sugiere que $2^0 = 1$ y se realiza el procedimiento anterior, con el cual se verifica que efectivamente $2^0 = 1$ porque no se llega a ninguna contradicción.

Profesor E: El profesor utiliza la propiedad de la división para lograr que los estudiantes observen particularmente que $2^0 = 1$ para luego llegar a que $a^0 = 1$. Lo hace comenzando de la siguiente manera:

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2} = \frac{1024}{2} = \frac{2^{10}}{2^1} = 512$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9$$

Entonces

$$\frac{2^{10}}{2^1} = 2^9$$

Hace el mismo procedimiento para $\frac{2^9}{2^1}, \frac{2^8}{2^1}, \ldots, \frac{2^1}{2^1}$, por lo que se concluye que $\frac{2^1}{2^1} = 2^0 = 1$.

Después de lo anterior se realizan pasos similares, pero con otros exponentes tanto en el numerador como en el denominador para reforzar y finalmente se llena una tabla en la que tanto el numerador como el denominador son iguales. De esta manera se logra obtener el acuerdo general $\frac{a^x}{a^x} = a^{x-x} = a^0 = 1$.

Profesores F y G: Después de trabajar la propiedad de la división, se define que cualquier número real (distinto de cero) elevado a la potencia cero es igual a uno pues

$$\frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{a}{a} = 1,\, a \neq 0$$

$$\frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0 = 1$$

Profesor H: Lo define como un caso particular, es decir, se ve como un caso especial para no generar conflictos con lo anterior.

Profesor I: Lo define a partir de la propiedad de los exponentes, la cual indica que cualquier cantidad elevada a la potencia cero o que el exponente sea cero, entonces la base (la que sea) es igual a la unidad.

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Exponente negativo

Profesores D, F, H e **I:** Definen la propiedad, es decir, mencionan que $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Profesor E: Utilizando la propiedad de la división se tiene que

$$\frac{2^1}{2^2} = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

Por lo que $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

Después de varios ejemplos similares se toma el siguiente acuerdo:

$$\frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

Profesor G: Utilizando la propiedad de la división se tiene que

$$\frac{1}{x^n} = \frac{x^0}{x^n} = x^{0-n} = x^{-n}$$

Y posteriormente se dan ejemplos como $\frac{x^2}{x^3} = x^{-1}$ pero también $\frac{x^2}{x^3} = \frac{x*x}{x*x*x} = \frac{1}{x}$, es decir, $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Exponente $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$

Profesor D, H e **I:** Enuncian la propiedad $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ y el **profesor D** muestra algunos ejemplos concretos como $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ y $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$.

Profesor E: No menciona abiertamente la propiedad $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, únicamente trabaja de manera numérica algunos ejemplos de raíces exactas, por ejemplo: $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1$.

Profesores F y G: Enuncian la propiedad $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, además el **profesor F** aclara que m y n pertenecen a los reales por lo cual ya está definiendo las siguientes propiedades.

Exponente $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$

Profesores D, H e **I:** Muestran la propiedad $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ pero antes de escribir la igualdad, el **profesor D** pide a sus estudiantes que observen el caso anterior $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ para que le digan en este nuevo caso en dónde va *m.* Después de la discusión generada el profesor escribe la igualdad.

Profesor E: No menciona la propiedad $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, sin embargo, muestra ejemplos a sus estudiantes como el siguiente: $\sqrt[2]{1024} = \sqrt[2]{2^5 \times 2^5} = \sqrt[2]{2^{5+5}} = \sqrt[2]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$.

Profesores F y G: Ellos enuncian esta propiedad desde el caso $a^{\frac{1}{n}}$ como $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Exponente $\boldsymbol{-\frac{m}{n}}$

Profesores D y E: No contestaron.

Profesor F: La mencionó desde el caso $a^{\frac{1}{n}}$.

Profesores G, H e **I:** Mencionaron que $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

Los profesores, hablando de manera general, mencionaron que trabajan con las siguientes propiedades de los exponentes:

$$a)\ a^m a^n = a^{m+n}$$

$$b)\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$c)\ (a^m)^n = a^{mn}$$

$$d)\ (a * b)^n = a^n * b^n$$

$$e)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$f)\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$g)\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$h)\ a^0 = 1$$

De manera particular, el **profesor D** trabaja las primeras cinco propiedades (a, b, c, d y e). El **profesor E** únicamente trabaja con las primeras dos (a y b). Por otra parte, el **profesor F** dijo que trabaja las propiedades: a, b, c, e y f, el **profesor G** trabaja las siguientes: a, b, c, f y g, el **profesor H** trabaja las propiedades: a, b, d, e y h y el **profesor I** trabaja con: c, d, e, f, g y h.

Aunque todos los profesores hicieron la descripción en el cuestionario acerca de cómo abordan las últimas tres propiedades (f, g y h) no todos mencionaron todas las propiedades como vistas en clase, no se sabe si es porque no las consideran propiedades o porque no consideraron necesario mencionarlas debido a que se les cuestionó sobre ellas.

Finalmente, se rescataron las respuestas que proporcionaron los profesores respecto a la pregunta: ¿Considera usted que el contenido de exponentes es difícil para sus estudiantes? ¿Por qué?

Los **profesores D** y **E** consideran que sí es un tema difícil para sus estudiantes pues según el **profesor D** los estudiantes no identifican que el exponente indica el número de veces que se va a multiplicar la base y esto crea mayor confusión al momento de ver exponentes racionales, pues no es posible decirles que es la cantidad de veces que se multiplica la base. Por otra parte, los números negativos siempre han sido un problema y más cuando se ven como exponentes pues es muy común que omitan el signo, lo mismo pasa al aplicar las propiedades de los exponentes cuando ellos son negativos. El **profesor E** dice que los estudiantes cometen los errores que reporta la literatura de matemática educativa.

Los **profesores F y G** no mencionan abiertamente que el contenido sí es difícil para sus estudiantes, sin embargo, el **profesor F** indicó que se tiene que ser muy insistente con las propiedades a través de la formación del alumno para que poco a poco las vayan asimilando. Una gran ventaja que identifica este profesor, es que desde al inicio de aritmética y álgebra (no siendo tema específicamente de exponentes), se ve la necesidad de comenzar a trabajar con ello y eso facilita que cuando se ve el tema como tal, los estudiantes ya tienen una noción media del contenido. El **profesor G** opinó que las partes que causan mayor confusión en los estudiantes son las siguientes:

- Cuando el exponente es negativo porque lo primero que imaginan es que el resultado será un número negativo.
- Pasar de la notación con exponente racional a notación de radicales, se confunden al identificar el índice del radical y del exponente.

Por otra parte, el **profesor H** señaló que no considera difícil el contenido para sus estudiantes, ya que éste y las propiedades las entienden, sin embargo, las fallas vienen con los símbolos de agrupación y las propiedades de campo, por ejemplo, la distributividad no aplica para los exponentes $(a+b)^n \neq a^n + b^n$.

Finalmente, el **profesor I** comentó que para algunos estudiantes resulta realmente complicado entender el contenido, pero para otros no lo es tanto. Menciona que, en su experiencia, los estudiantes ya vienen con un rechazo al álgebra, en particular al contenido de exponentes. Dice que le da la impresión que los estudiantes tuvieron una experiencia muy negativa en la secundaria donde vieron por primera vez dicho contenido. Afortunadamente, en la mayoría de los casos se logra que el estudiante comprenda la teoría correspondiente a los exponentes.

Para concluir con esta sección de la dimensión didáctica, es importante mencionar algunos aspectos que se notaron relevantes en el análisis de los cuestionarios que respondieron los profesores. Estos aspectos son los siguientes:

- Todos los profesores (secundaria y bachillerato) que respondieron el cuestionario, coinciden en que el exponente natural lo definen como: el número de veces que se multiplica la base por ella misma.
- Los profesores **A, B, C, F, G** e **I** muestran el valor que tiene un número elevado al exponente cero mediante la propiedad de la división. Por ejemplo, los profesores de secundaria (**A, B** y **C**), lo muestran de la siguiente manera:

$$\frac{5^4}{5^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{625}{625} = 1$$

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$$

Por lo que $5^0 = 1$

Los profesores de bachillerato (**F** y **G**), lo hacen de la siguiente manera:

$$\frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{a}{a} = 1, a \neq 0$$

$$\frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0 = 1$$

El **profesor I,** aunque lo hace mediante la propiedad de la división, varía un poco porque él muestra el proceso de forma algebraica

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Aunque aparentemente los profesores de secundaria y bachillerato hacen lo mismo, no es así, pues los profesores de secundaria muestran exponentes mayores a uno para poder evidenciar con mayor claridad, porque la base elevada al exponente cero es igual a uno.

El resto de los profesores no se mencionan aquí, porque sus técnicas son diferentes y no por ello menos interesantes, sin embargo, en este análisis se está rescatando aquello en lo que coinciden los profesores.

- Los profesores **A, B, E y G** explican el exponente negativo mediante la propiedad de la división, por ejemplo:

$$\frac{3^2}{3^5} = \frac{3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^3}$$

$$\frac{3^2}{3^5} = 3^{-3}$$

Entonces, $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

- Los profesores **C, D, F, H** e **I** definen el exponente negativo mediante la propiedad, es decir, mencionan que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

De los dos resultados anteriores se puede concluir que los profesores de bachillerato tienden a mostrar el exponente negativo como una propiedad sin explicar mucho acerca de ésta. Mientras que los profesores de secundaria muestran una tendencia a explicar con más detalle el porqué de tales igualdades. Otro aspecto relevante que puede notarse, es que los profesores de secundaria muestran ejemplos numéricos, sin llegar a la notación algebraica (generalización), mientras que los profesores de bachillerato utilizan más esta notación.

- Respecto al exponente $\frac{1}{n}$, los profesores **B, D, F, G, H** e **I** enuncian la propiedad $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. El profesor **E** no menciona que muestre la propiedad a sus alumnos de manera explícita, lo hace con ejemplos como el siguiente: $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1$. Sin embargo, aunque éste profesor no menciona la propiedad de manera explícita, lo está haciendo de manera implícita, pues en algún momento tiene que justificar el paso $\sqrt[2]{2^2} = 2^{\frac{2}{2}}$.

  Por otra parte, los profesores **A** y **C** dicen que este tipo de exponente no se ve en secundaria, pues el programa no lo indica.

- Para enseñar el exponente de la forma $\frac{m}{n}$ los profesores **B, D, F, G, H,** e **I** lo hacen mediante la propiedad que es: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. El profesor **E** muestra ejemplos numéricos de raíces exactas como en el punto anterior.
  Los profesores **A** y **C** no enseñan este tipo de exponente pues no está incluido en el programa.
- Finalmente, para el exponente de la forma $-\frac{m}{n}$ los profesores **F, G, H** e **I** mencionan la propiedad que es: $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$. Los profesores **D** y **E** no contestaron y los profesores **A, B** y **C** dijeron que tal exponente no se ve en secundaria.

Los profesores de ambos niveles educativos hacen hincapié en que los estudiantes presentan mayores dificultades respecto al contenido de exponentes, cuando éstos son negativos y fraccionarios, sin embargo, esto no significa que los exponentes naturales los entienden bien, pues siguen cometiendo errores, ya que multiplican la base por el exponente (profesor **A**).

Entonces, respecto a los exponentes $\frac{1}{n}, \frac{m}{n}$ y $-\frac{m}{n}$ se puede notar que los profesores que los enseñan lo hacen mediante la propiedad, la digan o no explícitamente, de todos modos la utilizan. Algo relevante de todo esto es que utilizan dicha propiedad sin dar más explicación porque no hay una demostración que pueda ayudar a que los estudiantes comprendan por qué la veracidad de tal igualdad. Es por ello que en esta investigación se considera de suma importancia abordar este tipo de exponentes, para poder diseñar una situación didáctica que sirva como alternativa para la enseñanza de tales exponentes en el nivel bachillerato, para que los profesores tengan una forma diferente de enseñarlos y para que los estudiantes comprendan por qué es verdad la propiedad, ya que si los estudiantes no comprenden el porqué de las cosas, difícilmente podrán aprenderlo y seguirán cometiendo los mismos errores de siempre, como por ejemplo: multiplicar la base por el exponente (errores que fueron mostrados en la sección de antecedentes, este tipo de error es mostrado por Lezama (1999)).

Esta información recopilada de las respuestas que proporcionaron los profesores en los cuestionarios, es de suma importancia, pues puede corroborarse que tal y como lo indican los antecedentes los alumnos tienen dificultades para entender los exponentes, lo cual da sustento a la presente investigación. Además, muestra el camino que hay que seguir para elaborar el diseño, pues éste irá principalmente enfocado a los exponentes naturales, cero y racionales $\left(\frac{1}{2}\right)$.

3.3.2 Análisis de los programas de estudio del nivel bachillerato

A continuación, se muestra el análisis de dos programas de estudio del nivel bachillerato, éstos fueron elegidos debido a que el análisis cognitivo se llevó a cabo en la Unidad

Académica de Preparatorias de la Universidad Autónoma de Zacatecas programa V y en el Colegio Santa Elena de la Universidad de la Vera-Cruz (UVC). Enseguida, se muestran más especificaciones de las instituciones, así como de sus programas de estudio.

- Pública: El programa V de la Unidad Académica de Preparatorias de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAPUAZ), se encuentra ubicado en Jerez de García Salinas, Zacatecas. Cabe destacar que el programa utilizado es autónomo, es decir, no se rige por el de la Dirección General de Bachillerato (DGB) como otras instituciones.
- Privada: El Colegio Santa Elena de la Universidad de la Vera-Cruz (UVC), se encuentra ubicado en Guadalupe, Zacatecas. Es importante destacar que el programa que utilizan en esta institución es el de la DGB.

3.3.2.1 Programa de estudio de la Universidad Autónoma de Zacatecas

En los anexos, se muestran algunas figuras tomadas del programa de estudios de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), correspondiente al año 2013, esto se hace con la finalidad de que el lector pueda ver que el contenido de exponentes se encuentra en el primer semestre del bachillerato (Matemáticas I), además, se muestra la importancia de tal contenido, lo cual da sustento a esta investigación.

En el Anexo 2, se muestra la ubicación del curso (Matemáticas I), en la presentación de la asignatura dice que éste primer curso está enfocado a la revisión y estudio de conocimientos básicos de aritmética y álgebra. Esto con el propósito de favorecer el tránsito de la aritmética al álgebra, para lo cual se revisan de manera reflexiva los números reales, además, se pide a los alumnos que apliquen los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación), su jerarquía y símbolos de agrupación.

Con lo anterior, se puede notar que es importante que los estudiantes aprendan el contenido de exponentes, ya que en el programa se marca que los estudiantes deben saber aplicar los algoritmos de las operaciones aritméticas (en este caso, interesa la potenciación). Sin embargo, para este estudio se considera que no basta que los alumnos puedan aplicar los algoritmos, sino que también deben comprenderlos.

Por otra parte, el programa de estudios también menciona que es de suma importancia que los estudiantes comprendan completamente la aritmética, esto para que se puedan desempeñar de manera adecuada en el estudio del álgebra y otras ramas de la matemática (véase el Anexo 3). Este hecho, también es mencionado por Socas (1997), el cual dice que los errores que cometen los estudiantes en el álgebra, provienen desde la aritmética, ya que no la tienen completamente clara y los procedimientos erróneos que cometen en ésta se los llevan al álgebra de la misma manera, por ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1+1}{3+5}=\frac{2}{8} \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1+1}{x+y}=\frac{2}{x+y}$$

Esto indica que esta investigación es pertinente, pues se quiere incidir principalmente en la parte aritmética, ya que los errores que se cometen en el contenido de exponentes provienen del manejo aritmético, lo cual se arrastra posteriormente a lo algebraico y a otras áreas de la matemática en donde se utiliza dicho contenido.

A continuación, se muestran las cuatro unidades temáticas que son vistas en primer semestre de bachillerato (véase el Anexo 4), es importante destacar que el profesor entrevistado comunicó que él aborda el contenido de exponentes en la unidad II, pues necesita verlo antes de trabajar con polinomios. También mencionó que en las unidades temáticas no se menciona de manera explícita tal contenido, sin embargo, con la revisión que hicieron los investigadores del presente trabajo al programa de estudios, notaron que el contenido sí es mencionado en la unidad II, solo que lo mencionan en los objetivos específicos y en las actividades de aprendizaje, por lo tanto, este contenido debe abordarse en la unidad II (tal y como lo hace el profesor), esto se mostrará en las figuras posteriores.

De acuerdo a lo que el profesor comentó y a lo que se observa en el Anexo 5, Anexo 6 y Anexo 7 se puede suponer que el profesor enseña el contenido de exponentes entre el contenido 2.4 y 2.5, es decir, antes de comenzar el contenido de adición y sustracción de polinomios, sin embargo, esto es solamente una suposición, pues ni el profesor ni el programa de estudios muestran exactamente el momento de la enseñanza de tal contenido.

Por otra parte, en el Anexo 6 se puede notar que en los objetivos específicos (segunda columna) que menciona el programa, se encuentra como objetivo para los estudiantes el siguiente: analiza el concepto de exponente y leyes de los exponentes. Resuelve ejercicios de multiplicación, división y potencias de potencias con monomios.

En las actividades de aprendizaje (tercera columna), se tiene que: el profesor explica los conceptos de exponente y ley. Propone a los alumnos que revisen ejercicios resueltos en la antología y resuelvan los propuestos; pide elaboren una ficha descriptiva del exponente cero y las leyes de los exponentes.

De acuerdo con lo anterior, se evidencia que efectivamente el contenido es trabajado en esta unidad temática (tal y como lo hace el profesor), además, se nota que abordan el exponente cero, así como sus leyes o propiedades.

En el Anexo 7 en las actividades de aprendizaje (tercera columna), se concluye el tema asociando ejercicios y leyes de los exponentes y pide que resuelvan los ejercicios de multiplicación, división y potencias de potencias con monomios, propuestos en la antología.

Lo anterior va de acuerdo con lo que menciona el profesor, pues él comentó que tenía que enseñar el contenido de exponentes antes de enseñar el de polinomios, pues en éste último se requiere del primero.

Entonces, este programa analizado muestra que, así como lo mencionaron los profesores entrevistados a través del cuestionario que se mostró en la sección anterior, el contenido de exponentes se encuentra en primer semestre del nivel bachillerato. Además, en el programa se muestra la importancia del contenido, pues es utilizado en otros. Luego, se resalta también en el programa que es de suma importancia que los estudiantes aprendan bien lo aritmético, pues de lo contrario, no lograrán comprender el álgebra, es en esa parte donde la presente investigación tiene su importancia.

3.3.2.2 Programa de estudios de la Universidad de la Vera-Cruz

Enseguida se muestra el análisis que se hizo del programa de estudios de la Dirección General de Bachillerato (DGB), se analizó dicho programa porque éste es el que utilizan en la Universidad de la Vera-Cruz (UVC).

En el Anexo 8 y Anexo 9 se muestra la relación que tiene la asignatura de matemáticas I con otras, por ejemplo, el tema de interés para esta investigación son los exponentes, por tal motivo es importante observar que este programa de estudios relaciona la asignatura de matemáticas I con el cálculo integral, pues se aplican las reglas básicas del álgebra, simplificación de expresiones, elaboración de gráficas de funciones y reglas de los exponentes.

Por tal motivo, se puede notar que los exponentes son de suma importancia en el nivel bachillerato, pues éstos se siguen utilizando en otras materias, por ejemplo: en el cálculo integral, también puede pensarse que en las materias de Temas Selectos de Física I y II (véase el Anexo 9), pues el programa menciona que se utilizan las reglas básicas de la solución de problemas aritméticos y algebraicos.

Entonces, si éste contenido no queda claro para los estudiantes desde la parte aritmética, por tal motivo cometen errores y lo seguirán haciendo de la misma manera en otros contenidos donde requieran de ellos.

En el Anexo 10 se muestran los bloques que se ven en el primer semestre del bachillerato, aunque el programa no menciona claramente en cuál bloque se aborda el contenido de exponentes, se sospecha que éste se encuentra en el Bloque I o Bloque II.

Con base en los desempeños que debe tener el estudiante (véase el Anexo 11) al concluir el bloque, se piensa que el contenido de exponentes puede encontrarse en: jerarquiza operaciones numéricas al realizarlas y en realiza operaciones aritméticas, siguiendo el orden jerárquico al efectuarlas. Pues, en la jerarquía de operaciones se deben ver los exponentes, ya que es parte de este contenido. Sin embargo, no se tiene la certeza de que el profesor enseñe tal contenido en este momento, pues, no fue posible preguntarle al profesor de la UVC, en qué momento lo aborda.

Además, el programa de estudios no es muy específico respecto a los contenidos, el profesor puede darse una idea al momento de ver los desempeños que se espera adquiera el estudiante qué es lo que debe enseñar, pero dependiendo del profesor que enseñe pueden variar los contenidos, ya que el programa tampoco es muy explícito en las actividades de aprendizaje y enseñanza.

Por la misma situación, que el programa de estudios no es muy específico, es que se tiene la duda si el contenido de exponentes se trabaja en el Bloque I o en el Bloque II, pues en éste último en los desempeños que se espera adquiera el estudiante al finalizar el bloque, se puede notar que se espera de los alumnos: sean capaces de combinar cálculos de porcentajes, descuentos, intereses, capitales, ganancias, pérdidas, ingresos, amortizaciones, utilizando distintas representaciones, operaciones y propiedades de los números reales (véase el Anexo 11).

Entonces, como se espera que los estudiantes aprendan las propiedades de los números reales, se puede pensar que en este momento se introduce el contenido de exponentes, pues éste forma parte de las propiedades de los números reales, sin embargo, no se puede asegurar que el contenido aparezca en ese momento.

Como conclusión referente a este programa de estudios, se puede mencionar que aunque no se sabe específicamente el momento de enseñanza del contenido: exponentes, se sospecha que es en el Bloque I o en el II, o incluso podría ser en ambos, en otros bloques no se considera que se encuentre porque los que le siguen son contenidos de: sucesiones, ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuación cuadrática, sin embargo, no se descarta que se pueda utilizar el contenido, pero si así fuera, es porque ya ha sido enseñado con anterioridad.

Por otra parte, un hecho que sí se puede asegurar es que el contenido debe ser enseñado en primer semestre, pues en el Anexo 9, se menciona que la materia de matemáticas I está relacionada con la de cálculo integral, en específico, dicha relación se da mediante el contenido de exponentes.

3.3.3 Análisis de los apuntes de los estudiantes

A continuación, se muestran los escaneos de algunas páginas de los cuadernos de cuatro alumnos que estudian el primer semestre del nivel bachillerato en el programa V de la Universidad Autónoma de Zacatecas, ubicado en Jerez de García Salinas, Zacatecas. Además, es importante señalar que dichos estudiantes participaron también en el cuestionario que se aplicó en dicha institución para la realización de la componente cognitiva.

La notación mediante la que se denotará a cada uno de los estudiantes es la siguiente:

- Estudiante 1: E_1
- Estudiante 2: E_2
- Estudiante 3: E_3
- Estudiante 4: E_4

Los escaneos que se muestran en la Figura 16-Figura 21 son con la finalidad de observar cómo imparte el contenido de exponentes el **profesor I.** Pues la aplicación del diseño se llevará a cabo con estos estudiantes y el **profesor I** es el que imparte la materia.

El profesor, antes de explicar las leyes de los exponentes, explica que hay signos de operación, menciona que éstos son: suma, resta, multiplicación, división, elevación de potencia y extracción de raíces. Luego, muestra los signos que representan a cada operación. Cuando llega a la elevación de potencia y extracción de raíces, da las definiciones que se muestran en la Figura 16. Por supuesto, las definiciones, son las mismas en los diferentes apuntes, lo que varía en ocasiones son los ejemplos que los estudiantes anotan, ya que algunos tal vez escriben todos los ejemplos proporcionados por el profesor, otros no escriben ninguno y otros solamente algunos.

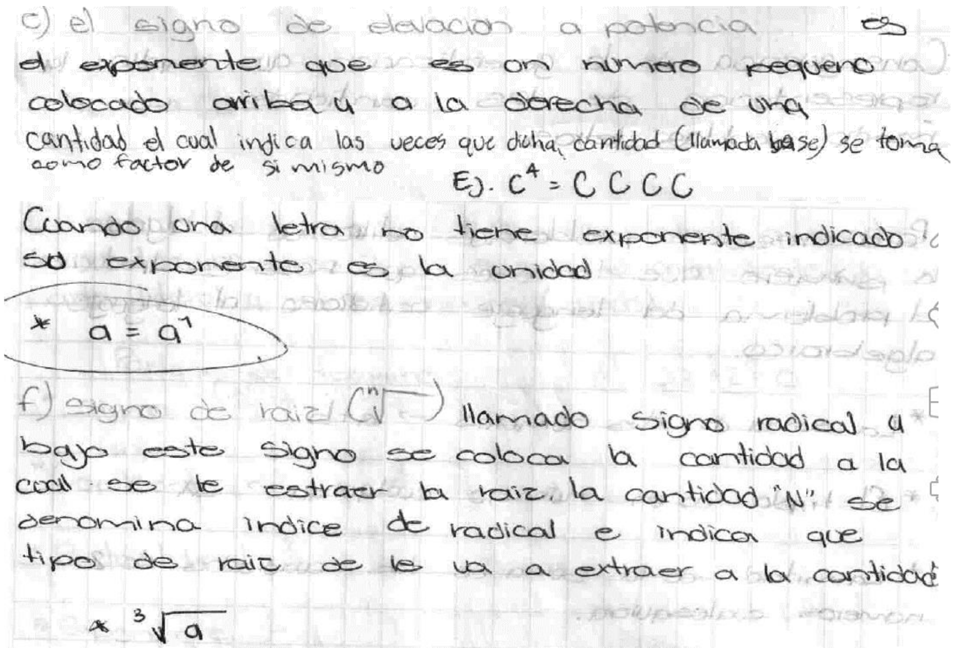

c) el signo de elevación a potencia es
el exponente que es un número pequeño
colocado arriba y a la derecha de una
cantidad el cual indica las veces que dicha cantidad (llamada base) se toma
como factor de si mismo
Ej. $C^4 = CCCC$
Cuando una letra no tiene exponente indicado
su exponente es la unidad
* $a = a^1$
f) signo de raíz ($\sqrt[n]{\ }$) llamado signo radical y
bajo este signo se coloca la cantidad a la
cual se le extrae la raíz. la cantidad "N" se
denomina índice de radical e indica que
tipo de raíz se le va a extraer a la cantidad
* $\sqrt[3]{a}$

Figura 16: Escaneo de E_4

Con base en lo anterior, se puede decir, que el profesor introduce los exponentes mediante su notación, es decir, les dice lo que es una base y un exponente, también menciona que cuando una cantidad no tiene exponente, éste es uno. En la Figura 16, se puede apreciar que el profesor da ejemplos de las definiciones, pues, en los apuntes de E_4 se encuentran los ejemplos $c^4 = cccc,\ a^1 = a$ y $\sqrt[3]{a}$. Con esto, empieza en cierta forma a introducir algunas propiedades, en específico, la del exponente natural.

Respecto al signo de raíz $(\sqrt{\ })$, el profesor muestra el signo radical y que bajo ese signo se escribe la cantidad a la cual se le va a extraer la raíz, también menciona el índice radical y comenta que éste indica el tipo de raíz que se le va a extraer a la cantidad, véase la Figura 16, pues, el alumno E_4 tiene un ejemplo en su cuaderno el cual es $\sqrt[3]{a}.$ Sin embargo, en este momento, el profesor aún no menciona que un radical puede escribirse también como exponente.

Posteriormente, el profesor muestra los signos de relación y agrupación, enseguida imparte el contenido de exponentes, a éste le llama: leyes de los exponentes tal y como se puede observar en la Figura 17.

Después, el profesor proporciona las primeras tres propiedades que son: exponente natural, multiplicación de potencias con misma base y potencia elevada a otra potencia, mostrándolas de manera algebraica, es decir:

1. $a^n = a * a * a * \ldots n\ veces,$
2. $a^n * a^m = a^{n+m}$ y
3. $(a^n)^m = a^{nm}$

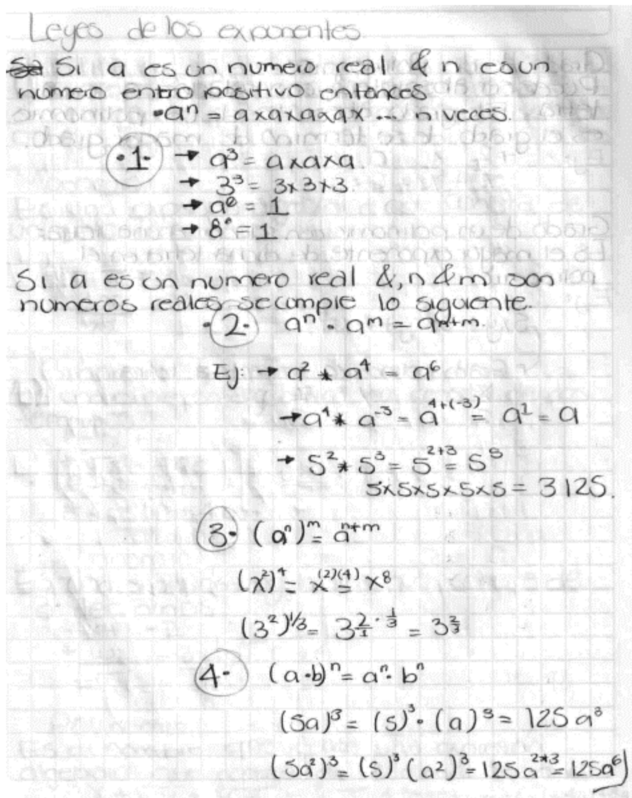


Figura 17: Leyes de los exponentes E_1, parte 1.

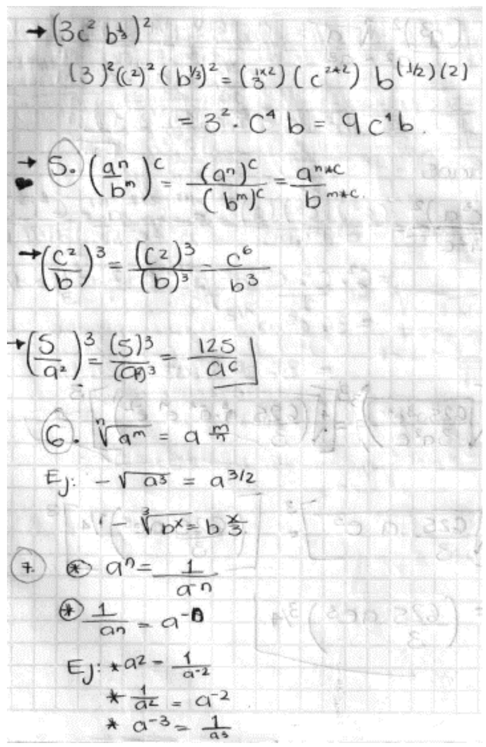
Luego, en la Figura 17 también puede apreciarse que el profesor proporciona un ejemplo algebraico y otro numérico para cada una de las propiedades. Algo más que se puede identificar, es que el profesor introduce el exponente cero de manera algebraica y luego provee un ejemplo.

El resto de las propiedades (que pueden observarse en la Figura 17 y Figura 18), las enuncia de manera algebraica, en ninguna de éstas lo hace en lenguaje natural, sin embargo, la propiedad enunciada en este lenguaje no quedó escrita en el cuaderno en ninguna de ellas. Las propiedades de la 4-7 que enunció fueron:

4. $(a * b)^n = a^n * b^n$

5. $\left(\frac{a^n}{b^m}\right)^c = \frac{a^{n*c}}{b^{m*c}}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
7. $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ y $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Nótese que el profesor ya no proporcionó ejemplos numéricos, únicamente mostró algebraicos, se cree que esto puede deberse a que en la unidad II del programa de estudios de la UAZ los contenidos son algebraicos.


$(3c^2 b^{1/3})^2$

$(3)^2(c^2)^2(b^{1/3})^2 = (3^{1\times2})(c^{2\times2})\, b^{(1/2)(2)}$

$= 3^2 \cdot c^4 b = 9c^4 b.$

5. $\left(\frac{a^n}{b^m}\right)^c = \frac{(a^n)^c}{(b^m)^c} = \frac{a^{n*c}}{b^{m*c}}$

$\left(\frac{c^2}{b}\right)^3 = \frac{(c^2)^3}{(b)^3} = \frac{c^6}{b^3}$

$\left(\frac{5}{a^2}\right)^3 = \frac{(5)^3}{(a^2)^3} = \frac{125}{a^6}$

6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ej: $\sqrt{a^3} = a^{3/2}$

$\sqrt[3]{b^x} = b^{\frac{x}{3}}$

7. $a^n = \frac{1}{a^n}$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Ej: $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$

$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

Figura 18: Leyes de los exponentes E_1, parte 2

Otro aspecto relevante, es que el profesor no mostró la propiedad del exponente cero como tal, por el contrario, lo que hizo fue introducirla en la propiedad del exponente natural como un caso particular.

Por otra parte, se muestra en la Figura 19 y Figura 20 los ejercicios que el profesor solicitó a los alumnos que resolvieran, respecto a éstos y a los ejemplos que dio el profesor después de cada propiedad enunciada, se puede decir lo siguiente: cada uno de éstos necesita varias propiedades para ser simplificado, éstas son: 2, 3, 6 y 7. También, puede notarse que en ninguno de los ejemplos y ejercicios que se muestran en: Figura 18, Figura 19, Figura 20 y Figura 21se utiliza la propiedad del exponente cero.

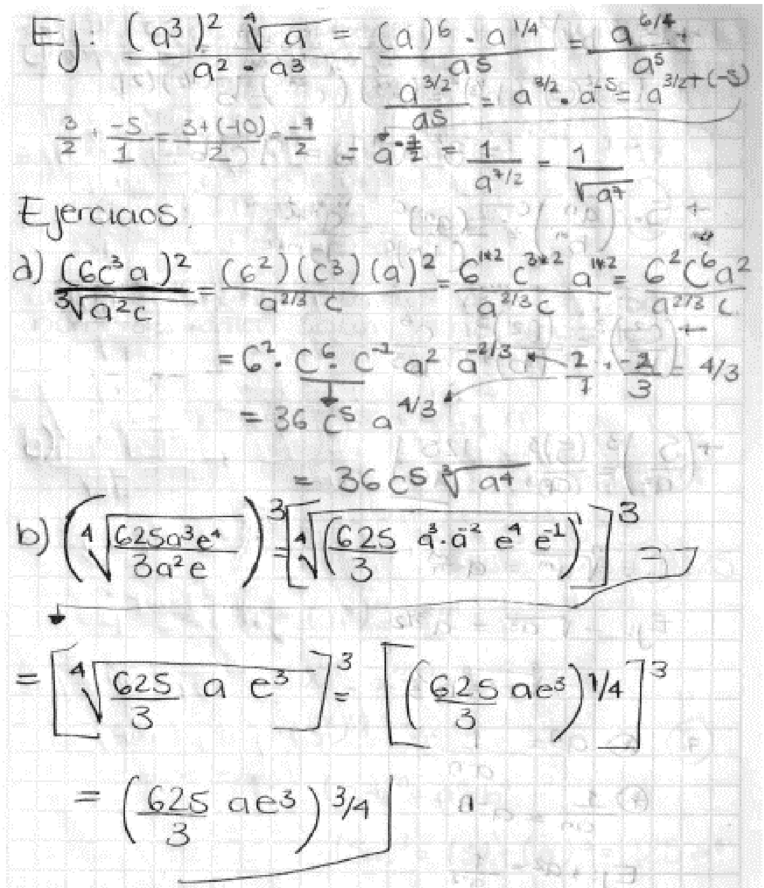


Figura 19:Ejercicios de leyes de los exponentes E_1, parte 1

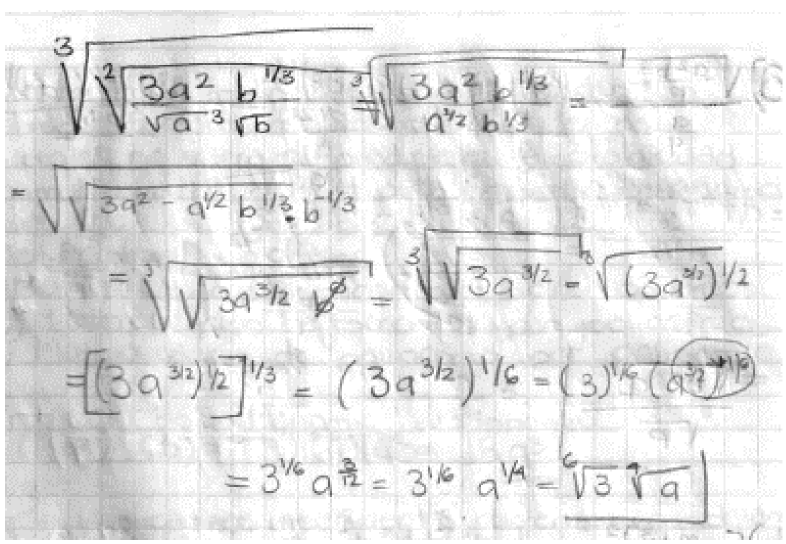


Figura 20: Ejercicios de leyes de los exponentes E_1, parte 2

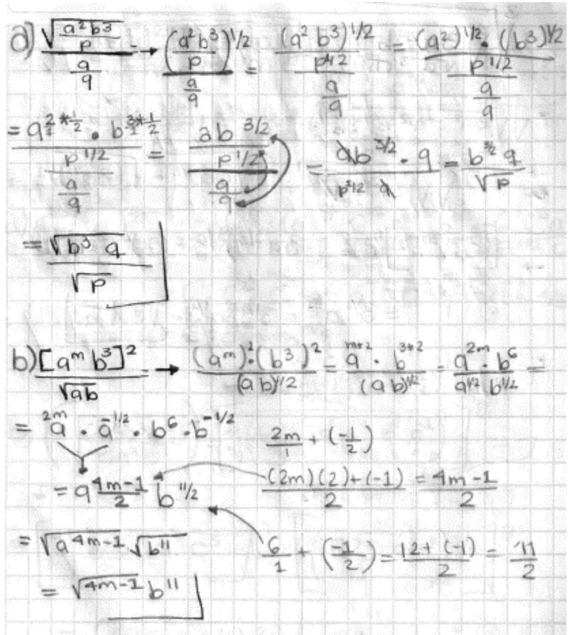
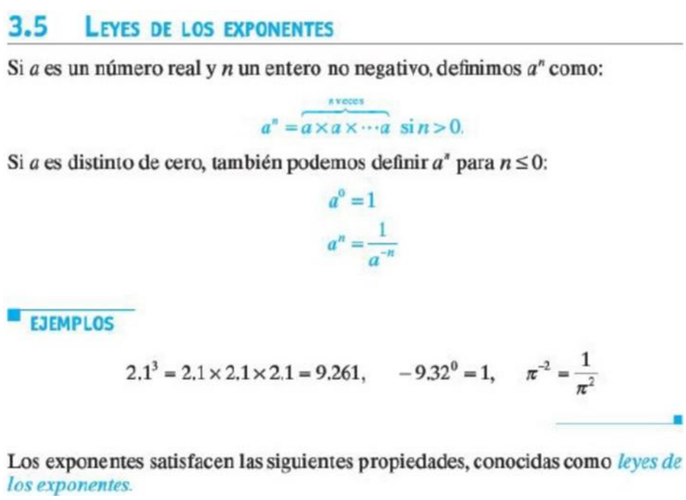


Figura 21: Ejercicios de leyes de los exponentes E_1, parte 3

3.3.4 Análisis de libros de texto

3.3.4.1 Oteyza, et al. (2007)

En este libro de texto, se muestra el contenido con el título: leyes de los exponentes, éste comienza con la definición de exponente natural, tal y como se muestra en la Figura 22, posteriormente, muestra la definición para un número distinto de cero elevado al exponente cero y luego, se da la definición para un número elevado a exponente negativo.



3.5 LEYES DE LOS EXPONENTES

Si a es un número real y n un entero no negativo, definimos a^n como:

$$a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots a}^{n\text{ veces}} \quad \text{si } n > 0.$$

Si a es distinto de cero, también podemos definir a^n para $n \leq 0$:

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

EJEMPLOS

$$2.1^3 = 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 9.261, \qquad -9.32^0 = 1, \qquad \pi^{-2} = \frac{1}{\pi^2}$$

Los exponentes satisfacen las siguientes propiedades, conocidas como *leyes de los exponentes*.

Figura 22: Definición de un número elevado a exponente natural, cero y negativo

Luego, las que son tomadas como leyes de los exponentes son las que se muestran en la Figura 23, en ella se aprecia que enuncian primero la ley de multiplicación de potencias con misma base, luego, se encuentra la propiedad de potencia de una potencia, posteriormente la multiplicación de dos números elevados a una potencia y finalmente, un cociente elevado a una potencia.

- Si a es un número real y n, m son números enteros, entonces $a^n a^m = a^{n+m}$.
- Si a es un número real y n, m son números enteros, entonces $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$.
- Si a y b son números reales y n es un número entero, entonces $(ab)^n = a^n b^n$.
- Si a y b son números reales, $b \neq 0$ y n es un número entero, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Figura 23: Leyes de los exponentes

De lo anterior, llama la atención identificar que no se encuentra la propiedad de la división de potencias con misma base, pues esta propiedad es muy común que se encuentre en otros libros de texto, además, forma parte de las leyes de los exponentes.

Posteriormente, en el libro de texto, se encuentran algunos ejemplos como los que se muestran en la Figura 24, el ejemplo que llama la atención es el 5, pues, solicita que comparen $(2^3)^2$ y $2^{(3^2)}$, este ejemplo se considera que es bueno, pues los alumnos podrían pensar que se utiliza la propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$ para ambos casos.

1. Simplificar $5^7 \cdot 5^3$.

Solución:

$$5^7 \cdot 5^3 = 5^{10}.$$

2. Simplificar $\left(8^9\right)^3$.

Solución:

$$\left(8^9\right)^3 = 8^{27}.$$

3. Simplificar $(2 \cdot 6)^{15}$.

Solución:

$$(2 \cdot 6)^{15} = 2^{15} \cdot 6^{15}$$

4. Simplificar $\left(\frac{1}{20}\right)^4$.

Solución:

$$\left(\frac{1}{20}\right)^4 = \frac{1^4}{20^4} = \frac{1}{20^4}.$$

5. Comparar $\left(2^3\right)^2$ y $2^{\left(3^2\right)}$.

Solución:

$$\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64 \qquad \text{y} \qquad 2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512,$$

Figura 24: Ejemplos que propone el libro Oteyza, et al. (2007)

En la Figura 25 se muestra un problema contextualizado como ejemplo, para la resolución de éste, se necesita el uso de exponentes. Es bueno ver que los autores de este libro se preocupan por mostrar aplicaciones de las leyes de los exponentes, sin embargo, lo hacen únicamente para el exponente natural, sería bueno ver ejemplos contextualizados para exponentes negativos por ejemplo o para el cero.

así que, $\left(2^3\right)^2 \neq 2^{\left(3^2\right)}$, por lo que debe tenerse cuidado en el orden en que se efectúan las potencias; la expresión 2^{3^2} es ambigua y debe evitarse pues podría dar origen a cualquiera de las dos interpretaciones anteriores.

6. ¿Cuál es la cantidad que se obtiene al invertir \$1 000 a un interés compuesto de 3% bimestral durante 2 años?

Solución: Al terminar el primer bimestre la ganancia será

$$1000(0.03)$$

que agregado al capital inicial, da al término del primer bimestre:

$$1000 + 1\,000(0.03) = 1\,000(1 + 0.03).$$

Para el segundo bimestre, la cantidad anterior se invierte al 3%, con lo que se obtiene como ganancia:

$$1000(1 + 0.03)(0.03).$$

Agregando esta cantidad a la que se tenía al inicio del segundo bimestre, se tiene:

$$1\,000(1 + 0.03) + 1000(1 + 0.03)(0.03) = 1\,000(1 + 0.03)(1 + 0.03) = 1\,000(1 + 0.03)^2.$$

Siguiendo este procedimiento, puesto que en un año hay seis periodos bimestrales, el capital más los intereses correspondientes serán:

$$1\,000(1 + 0.03)^6.$$

Al finalizar el segundo año:

$$1\,000\left((1 + 0.03)^6\right)^2 = 1000(1 + 0.03)^{12} = 1\,000(1.03)^{12} \approx 1425.76.$$

La cantidad que se obtiene es aproximadamente \$1 425.76.

Figura 25: Problema contextualizado propuesto en Oteyza, et al. (2007)

Finalmente, para concluir con el contenido de leyes de exponentes, se propone en el libro una serie de ejercicios (véase la Figura 26) para que el alumno resuelva y al final vienen cuatro problemas contextualizados, sin embargo, no es muy agradable ver que todos tratan sobre interés compuesto.

3.5.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 12, simplifica las siguientes expresiones.

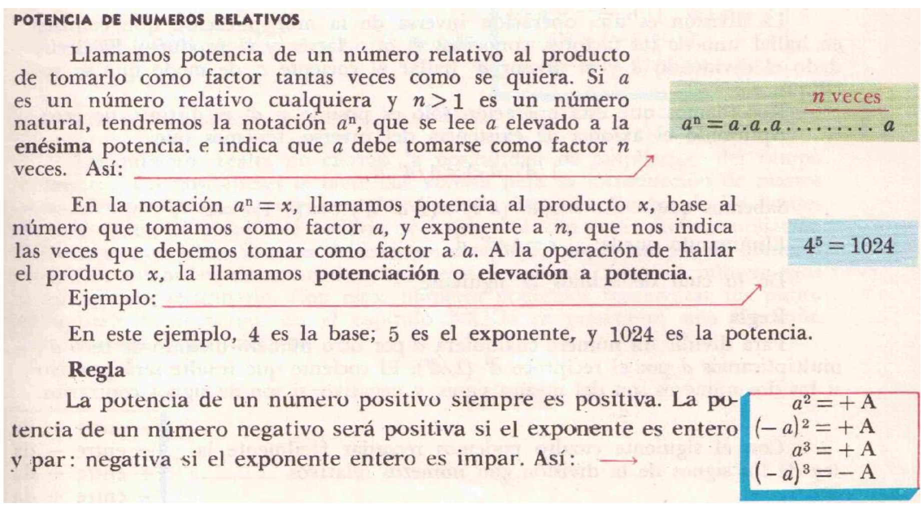
1. $(-2)^2(-2)^5$
2. $\left(7^3\right)\left(7^8\right)\left(7^4\right)$
3. $8(-1)^7\left(2(-1)^2\right)(-1)$
4. $\left(2^8\right)^7$
5. $(-8)^{12}(-8)^6$
6. $-1.5\left(4^5\right)^2$
7. $7(5)\left(\frac{5^{11}}{14}\right)6\left(5^2\right)$
8. $8(-3(-9))\left(\frac{5}{18}(-9)\right)\left(\frac{(-9)^{17}}{10}\right)$
9. $\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(-12\left(\frac{1}{3}\right)^9\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4$
10. $4\left(\frac{2}{7}\right)^8\left(3\left(\frac{2}{7}\right)^7\right)^4$
11. $-7\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\left(\frac{5}{6}\right)^6\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$
12. $\left((0.5)\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^5$
13. ¿Cuánto recibe un empleado que guarda \$700 en una caja de ahorros durante un año, si el interés que se le aplica es del 1.5% bimestral?
14. ¿Cuál es el rédito que se obtendrá al invertir un capital de \$1000 a una tasa de interés compuesto de 3% al cuatrimestre durante un periodo de 2 años? ¿Conviene más hacer la inversión durante el mismo periodo si la tasa de interés compuesto que se ofrece es de 10% anual?
15. Si se invierte \$10000 a un interés compuesto de 2% bimestral, ¿cuál será el capital al cabo de tres años?
16. ¿Qué rendimiento produce invertir \$125000 a un interés compuesto de 2.5% cuatrimestral, invertido a un periodo de seis años?

Figura 26: Ejercicios propuestos en Oteyza, et al. (2007)

3.3.4.2 Baldor (1980)

En este libro de texto el contenido se llama: Potencia de números relativos, en la Figura 27, se puede observar que definen a^n, como $a^n = a \times a \times ... \times a$ n veces, en esta expresión, después de definirla, el autor dice el nombre de cada una de las partes que la componen a^n, es decir, expresa que a es llamada base, n es el exponente, el resultado que se obtiene de la expresión se llama potencia el resultado que se obtiene de elevar a la n-ésima potencia el número y finalmente, se denomina potenciación o elevación a potencia a las operaciones que se hacen para obtener el resultado.

Entonces, en este libro llaman al contenido de exponentes potenciación, además, nombran al exponente de las dos formas, como exponente y como potencia, pero más como exponente, pues, potencia se llama al resultado que se obtiene al hacer las multiplicaciones correspondientes. Esto es interesante ya que no todos los libros hacen tal distinción, entre exponente y potencia, incluso varios profesores llaman potencia al exponente, sin embargo, tampoco está mal porque en este libro nombran de las dos formas al índice, es decir, lo nombran exponente y potencia lo que confunde es que también se llame potencia al resultado.



POTENCIA DE NUMEROS RELATIVOS

Llamamos potencia de un número relativo al producto de tomarlo como factor tantas veces como se quiera. Si a es un número relativo cualquiera y $n > 1$ es un número natural, tendremos la notación a^n, que se lee a elevado a la **enésima** potencia, e indica que a debe tomarse como factor n veces. Así:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.........a}_{n \text{ veces}}$$

En la notación $a^n = x$, llamamos potencia al producto x, base al número que tomamos como factor a, y exponente a n, que nos indica las veces que debemos tomar como factor a a. A la operación de hallar el producto x, la llamamos **potenciación** o **elevación a potencia**.

Ejemplo:

$$4^5 = 1024$$

En este ejemplo, 4 es la base; 5 es el exponente, y 1024 es la potencia.

Regla

La potencia de un número positivo siempre es positiva. La potencia de un número negativo será positiva si el exponente es entero y par: negativa si el exponente entero es impar. Así:

$$a^2 = +A$$
$$(-a)^2 = +A$$
$$a^3 = +A$$
$$(-a)^3 = -A$$

Figura 27: Número elevado al exponente n propuesto en Baldor (1980)

Las propiedades que se muestran en este libro son las que se pueden apreciar en la Figura 28 y Figura 29, sin embargo, para las propiedades de multiplicación de potencias de igual base y para potencia de una potencia este libro las nombra reglas, y para las que se muestran en la Figura 29 el autor los denomina casos de elevación a potencia de un número cualquiera, es curioso ver esto, debido a que en otros libros (véase el de Oteyza (2007)) nombran a estas propiedades leyes de los exponentes y en éste no se hace tal nombramiento.

Por otra parte, en Baldor (1980) sí se incluye la propiedad de la división de potencias de igual base, mientras que en Oteyza (2007) esta propiedad no es enunciada. Además, en este libro, se muestra la propiedad en general y un ejemplo para cada una de ellas y no hay ejercicios para que resuelva el lector como en el caso de Oteyza (2007).

PRODUCTO DE DOS POTENCIAS DE IGUAL BASE

Regla

Para multiplicar dos potencias de igual base, se eleva dicha base a la potencia que resulte de la suma de los exponentes respectivos. Ejemplo:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(3)^2\,(3)^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Regla

Para hallar la potencia de una potencia se multiplican los exponentes y se mantiene la base primitiva. Ejemplo:

$(a^n)^m = a^{n \times m} = a^{nm}$

$(-2^2)^3 = -2^{2\times 3} = -2^6 - 64$

Hay que poner especial cuidado en no confundir la potencia de una potencia, con la elevación de un número a una potencia cuyo exponente, a la vez esté afectado por otro exponente. Así, no es lo mismo $(4^2)^3$ que (4^{2^3}). Ejemplo:

$(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6 = 4096$

$(4^{2^3}) = 4^{2\times 2\times 2} = 4^8 = 65536$

Figura 28: Producto de dos potencias y potencia de una potencia

Ahora que estudiamos la división, podemos enunciar tres casos de la elevación a potencia de un número cualquiera.

1) Si un número cualquiera $a \neq 0$, se eleva a la potencia 0 es igual a $+1$. Así:

$a^0 = +1$

$3^0 = +1$

2) Si un número cualquiera $a \neq 0$, se eleva a un exponente negativo cualquiera $-m$ es igual al recíproco de la potencia a^m, de exponente positivo. Así:

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

3) La división de dos potencias de igual base es igual a la base elevada a la potencia que dé la diferencia de ambos exponentes. Así:

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$

Figura 29: Propiedad para la potencia cero, negativa y división de potencias

Capítulo 4

Concepción y análisis a priori

Capítulo 4: Concepción y análisis a priori

Siguiendo la metodología de la ingeniería didáctica, se muestra la concepción que se encuentra en el Anexo B y Anexo C, el análisis a priori de las actividades 1 y 2 que se muestran a continuación:

4.1 Actividad 1

Situación de acción: Recordando, esta situación se da cuando hay una interacción entre los alumnos y el medio físico, por ello, ésta se logrará cuando los estudiantes acepten por convicción propia resolver el problema, es decir, el profesor entregará las hojas de trabajo y el material didáctico (tablero y conejos), leerá junto con los alumnos el problema y posteriormente, se espera que los alumnos interactúen con el medio (problema y material didáctico) para familiarizarse con él. Enseguida se espera que los alumnos inicien tomando decisiones, para contestar las siguientes cuatro preguntas del instrumento, cuando ellos hagan esto, se encontrarán en la situación de acción, pues se estará dando la devolución (aceptación del problema propuesto por el profesor). Se espera que la devolución se dé, ya que se considera que el material didáctico es lo suficientemente atractivo para que los alumnos se "enganchen" con el problema.

En esta situación, se espera que los alumnos comprendan la redacción del problema, por ejemplo: que entiendan que cada conejo contagia a otros tres cada hora y que la pregunta es: ¿Los conejos de la hora 1 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 2)? Y de esos que se contagiarán en la hora 2 a cuántos conejos contagiarán, y así sucesivamente. Se espera que entiendan lo anterior y no ¿Cuántos conejos contagiados habrá en la hora 1, 2, 3 y 4?, ya que las preguntas son muy diferentes, pues ésta última estaría pidiendo la suma de los conejos contagiados en las horas anteriores y posteriormente, se multiplicaría por 3 para obtener el resultado de la siguiente hora. Las posibles respuestas serán entonces:

a) Después de transcurrida una hora se contagiaron 3 conejos, en la hora 2 hay un total de 9 conejos contagiados, en la hora 3 hay 27 y en la hora 4, 81 conejos con el virus. Se considera que los estudiantes serán capaces de contestar de manera correcta la parte I del instrumento, pues tienen el material didáctico a su disposición y como saben que cada conejo contagia a otros tres cada hora, si tienen alguna dificultad para hacer los cálculos, se piensa que van a tomar, por ejemplo, los 3 conejos de la hora 1 y a cada uno de ellos podrán asignarle otros 3, por lo cual obtendrán como resultado 9. Luego, de estos últimos pueden tomar cada conejo y asignarle otros 3 para obtener la cantidad solicitada para la hora 3 y pueden hacer esto mismo para la hora 4, o bien, notar que tienen que multiplicar por 3 el resultado anterior para obtener la cantidad de conejos solicitada en la siguiente hora.
b) Después de transcurrida una hora, los estudiantes pueden contestar que hay 4 conejos contagiados, en la hora 2 hay 12, pues están sumando la cantidad de conejos contagiados en las horas anteriores (0 y 1) y después multiplican esta cantidad por 3.

Siguiendo con esta idea, pueden contestar que en la hora 3 habrá $(1 + 3 + 12)(3) = 48$ y en la hora 4 habrá 192 conejos contagiados.

c) Cabe la posibilidad de que el alumno conteste con solo sumas, por ejemplo: que a la hora 1 haya 4 $(1 + 3)$ conejos contagiados, que a la hora 2 haya 7 $(4 + 3)$ conejos contagiados, en la hora 3 haya 10 $(7 + 3)$ conejos y en la hora 4 haya 13 $(10 + 3)$ conejos contagiados.

Por todo lo anterior, se cree que los alumnos no tendrán dificultad para dar respuesta a esta primera parte del instrumento, pues tienen el material didáctico al alcance y ello ayudará a que respondan de manera correcta.

Situación de formulación: Ésta se dará cuando los alumnos estén colocando los conejos en el tablero, y en el resto del instrumento cuando estén escribiendo sus respuestas. Todas las operaciones y anotaciones que hagan tanto en el instrumento como en las hojas blancas que se les proporcionarán forman parte de la formulación. Además, todo lo que comenten entre ellos forma parte de esta situación.

Figura 30: Situación de formulación

Figura 31: Respuesta esperada por parte de los estudiantes en esta etapa.

En la parte II de este instrumento, se piensa que los estudiantes pueden dar alguna de las siguientes respuestas:

a) Para la hora 1 escribirán: 1×3=3, hora 2: $1 \times 3 \times 3$=9, hora 3: $1 \times 3 \times 3 \times 3$=27, hora 4: $1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$=81.
b) Hora 1: 1+3, hora 2: 4×3, hora 3: $(12 + 4)(3)$, hora 4: $(48 + 12 + 4)(3)$.
c) Hora 1: $1 + 3$, hora 2: 4+3, hora 3: 7+3, hora 4: 10+3.
d) Hora 1: 1×3=3, hora 2: $3 \times 3 = 9$, hora 3: $9 \times 3 = 27$, hora 4: $27 \times 3 = 81$.
e) Hora 1: 1×3, hora 2: $3 + 6$, hora 3: $3 + 6 + 18$, hora 4: $3 + 6 + 18 + 54$.
f) Hacer diagramas de árbol.

Para la pregunta: ¿Conoces alguna expresión que represente o simplifique las operaciones que realizaste anteriormente?

En esta pregunta se considera que los estudiantes van a dar como respuesta un sí o un no.

Para las preguntas: ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación de los incisos a), b), c) y d)?

Las posibles respuestas que podrían proporcionar los estudiantes son las siguientes:

a) 3^1, 3^2, 3^3 y 3^4.
b) 4, 12, 48 y 192.
c) 4, 7, 10 y 13.
d) $3 \times 1, 3 \times 3, 9 \times 3, 27 \times 3$.
e) $3, 3 + 6 = 9, 9 + 18 = 27, 27 + 54 = 81$

Sí se considera la posibilidad de que algunos de los equipos contesten con la primer respuesta, pues, en el análisis cognitivo se identificó que los alumnos son capaces de simplificar expresiones como: $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$, es decir, sí proporcionan la expresión 5^{11}.

En la parte III, se considera que las respuestas pueden ser las siguientes:

a) 6561 conejos infectados, pues en esta parte se espera que los equipos hayan identificado ya que hay que multiplicar 8 veces el 3.
b) 16384, pues los estudiantes pueden seguir pensando que hay que sumar todos los conejos de las horas anteriores y multiplicar ese resultado por 3.
c) 25 conejos infectados, ya que es probable que en este momento continúen con la idea de sumar los conejos de la hora 0 (1) con la hora 1 (3) y después sumarle 3 conejos a cada hora que pase.

En la parte IV se esperan las siguientes respuestas:

a) 3^{20}, 3^{70} y 3^{100}.
b) Escribir la multiplicación de 20 veces el 3, 70 veces el 3 y 100 veces el 3.
c) Seguir cometiendo los errores reportados por Lezama (1999) y Abrate, et al. (2006) que sería: multiplicar la base por el exponente, es decir, 3×20, 3×70 y 3×100.

Para la parte V, se considera que pueden aparecer las siguientes respuestas:

a) 3^n.
b) $3 \times 3 \times ... \times 3$ *n veces.*
c) $3n$, es decir, que estén sumando en lugar de multiplicar.
d) No contestar.

En la parte VI, se esperan las siguientes respuestas:

a) $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 3 \times 3 = 9$, $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$, $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$. Es importante señalar que se piensa que algunos equipos solamente darán el resultado de la expresión sin hacer los cálculos o bien, podrían mostrar los cálculos y no escribir el resultado.
b) $3^0 = 3 \times 0 = 0$ ó $3^0 = 3$, $3^1 = 3 \times 1 = 3$, $3^2 = 3 \times 2 = 6$, $3^3 = 3 \times 3 = 9$, $3^4 = 3 \times 4 = 12$, $3^5 = 3 \times 5 = 15$. Multiplicar la base por el exponente tal y como lo reportan Lezama (1999) y Abrate, et al. (2006) y el error del exponente cero reportado por Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), es decir, pueden contestar que $3^0 = 0$ o bien, $3^0 = 3$.

En la parte VII se considera que los equipos responderán de manera correcta a los primeros dos incisos, sin embargo, podrían tener dificultades para los incisos con exponente *n*, pues la generalización es algo que suele causar confusión a los estudiantes según la experiencia de la autora de este trabajo.

Finalmente, para la parte VIII, se piensa que la mayoría de los equipos serán capaces de responder de manera correcta a los incisos, pues los alumnos suelen tomar en cuenta lo que ya aprendieron (en este caso para la base 3) para proceder de la misma manera con expresiones similares.

Por otra parte, no se descarta la posibilidad de que algunos equipos multipliquen la base por el exponente y en el caso de 6^0, contesten que el resultado es 0 o 6, cometiendo los errores reportados por Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007).

Situación de validación: Ésta se dará al interior de cada equipo y de manera grupal.

- **Equipo:** Cuando los estudiantes tengan respuestas diferentes para la pregunta que estén contestando, en ese momento tendrán que ponerse de acuerdo para tomar una de las dos respuestas, un alumno tiene que convencer a otro mediante sus argumentos para poder llegar de común acuerdo a una respuesta. También, puede ocurrir que alguno de los alumnos no tenga idea de cómo resolver el problema, en ese caso, el que sí la tiene puede apoyar al otro estudiante para que entienda qué hay que hacer y por qué debe ser así.
- **Grupal:** El profesor pasará a 2 o 3 integrantes de diferentes equipos para que muestren cómo resolvieron algunos de los problemas del instrumento, no elegirá al azar a dichos equipos, el profesor escogerá uno donde la respuesta que tengan no sea la correcta, a otro que sí tenga la correcta y posiblemente a alguno que tenga una estrategia diferente a los anteriores. Después, preguntará a los equipos que no pasaron al pizarrón si están de acuerdo con la respuesta del primer equipo que pasó al pizarrón y se hará un debate de ¿por qué sí o por qué no es correcta esa respuesta? Luego, se pasarán algunos otros integrantes que tengan respuestas alternativas y se harán las mismas preguntas al resto del grupo. Finalmente, el profesor les dirá: ¿cuál es la respuesta con la que se quedan? Con ello, se pretende que el grupo llegue a la respuesta correcta.

Las preguntas que se van a validar son las siguientes:

Parte I y II (al finalizar la parte II).

¿Cuántos conejos se contagiarán del virus en la hora 2 y en la hora 4? Explica por favor a tus compañeros el procedimiento que realizaste.

Con este ejercicio se espera que, si algunos estudiantes no han logrado obtener el resultado correcto, ya sea debido a la falta de comprensión del problema, es decir, que entiendan otra cosa diferente a lo que se les pide, al ver la respuesta de sus compañeros podrían comprender aquello que no habían logrado y reformular su respuesta para las siguientes actividades. (Al finalizar la parte I).

¿Qué operaciones realizaste para obtener la cantidad de conejos que hay en la hora 3, es decir, cuál fue tu respuesta para el inciso c)? (Al finalizar la parte II).

Se espera que los estudiantes que no han logrado obtener $3 \times 3 \times 3$ puedan hacerlo con la ayuda de sus compañeros que lograron ver esto, pues esto es de suma importancia para las siguientes preguntas, ya que si no llegaron a este tipo de operaciones difícilmente llegarán a la notación exponencial.

Parte V (al finalizar)

¿Podrías dar una expresión que simplifique la operación del inciso c)?

Se espera que todos los equipos o por lo menos la mayoría logren ver que $3 \times 3 \times 3 = 3^3$.

¿Cómo obtendrías la cantidad de conejos que se van a infectar del virus "atacón" en la hora 70? ¿Y en la hora n?

El objetivo de esto es que los estudiantes logren la notación exponencial y que aquellos que no lo han logrado lo hagan mediante la enseñanza de sus compañeros que ya lo hicieron.

Parte VIII (al finalizar)

¿Cuál es el resultado de 2^5 y 6^0?

Se espera que la mayoría de los estudiantes noten que el exponente representa la cantidad de veces que hay que multiplicar la base y que cualquier base (excepto el cero) elevada al exponente cero da como resultado 1.

Situación de institucionalización: En esta situación el profesor da la definición formal del concepto en juego que en este caso se trata de los exponentes naturales y el cero. Para ello el profesor dirá lo siguiente:

Recordemos que cada conejo infecta con el virus a otros 3 cada hora, así, en la hora cero había un conejo infectado, en la hora 1 se infectaron 3 conejitos, éstos infectaron a otros tres conejitos cada uno lo cual hace que en la hora 2 se infectaran 9 conejos, para esto se hará una tabla (obsérvese la Tabla 4) en el pizarrón que muestre lo siguiente:

Hora	Cantidad de conejos que infectaron los conejos de la hora anterior	Expresión que representa la cantidad de conejos infectados según la hora
0	1	3^0
1	$1 \times 3 = 3$	3^1
2	$1 \times 3 \times 3 = 9$	3^2
3	$1 \times 3 \times 3 \times 3 = 27$	3^3
4	$1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$	3^4

Tabla 4:Síntesis de la Actividad 1

Con base en lo anterior ahora imaginen que el virus "atacón" se ha hecho más potente y cada conejo contagia a otros cuatro cada hora. En la hora cero ¿cuántos conejos infectados habrá en la granja? La respuesta de esta pregunta se espera que sea 1, sin embargo, los estudiantes pueden quedarse pensando y no responder a lo que el profesor tiene que hacer una analogía con la actividad 1.

¿Cuál es el resultado de 4^0? Se espera que la respuesta de los estudiantes sea 1, pero se piensa que pueden responder que es 0, pues la tendencia a multiplicar 4×0 es demasiado fuerte.

¿A cuántos conejos contagiará en la hora 1? Se piensa que responderán que, a 4 conejos, pues no se cree que en esta hora haya alguna dificultad.

También el profesor preguntará ¿Cuál es la expresión que representa esto? Los estudiantes pueden responder 4^1 o 1×4 pues los estudiantes piensan primero en multiplicar que en la notación exponencial

¿Éstos a cuántos contagiarán en la hora 2?

Se cree que responderán que son 16, pues saben que hay que multiplicar el resultado anterior por 4, incluso es probable que si no están seguros utilicen el material didáctico para tener mayor certeza, en éste lo que probablemente harán es que a cada uno de los conejos contagiados en la hora 1 se asigna otros cuatro y finalmente suma para obtener el resultado.

¿Con qué expresión podrían representar la cantidad de conejos infectados que hay en la hora 2? Y ¿En la hora 50?

Si se fijan en ambos problemas tanto en el conejo que infecta a otros 3 cada hora como en el que cada conejo infecta a otros 4 aparecen los exponentes, y ¿qué indica un exponente? Si yo por ejemplo les pongo 7^3, ¿qué harían para obtener el resultado? Se espera que los estudiantes respondan multiplicar $7 \times 7 \times 7$, también podrían contestar que hay que multiplicar 7×3. Con la primera respuesta el profesor comentará:

Muy bien, entonces el exponente indica la cantidad de veces que hay que multiplicar la base ¿cierto? A lo cual se espera que los estudiantes digan que sí.

¿Entonces, podemos decir que esa propiedad se cumple para cualquier base?

Se espera que los estudiantes digan que sí a lo cual el profesor dirá muy bien, entonces, la propiedad la podemos escribir de la siguiente manera:

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \quad n\ veces$$

Donde a se llama base y n se llama exponente, el cual se escribe en la parte superior derecha de la base y es un número más pequeño que la base.

También, existe la propiedad del exponente cero la cual dice que cualquier número elevado al exponente o potencia cero da como resultado 1, sea cual sea la base (excepto el cero).

4.2 Actividad 2

Situación de acción: Recordando, esta situación se da cuando hay una interacción entre los alumnos y el medio físico. Dicho medio se organizará de la siguiente manera: La profesora acomodará las butacas antes de que lleguen los muchachos, esto con la finalidad de que cada equipo quede lo suficientemente separado del otro, cada equipo estará formado por dos personas, por lo cual se acomodarán las butacas de tal manera que los integrantes del equipo estén frente a frente. Luego, la profesora pondrá el material encima de una de las butacas de cada equipo, éste consiste en lo siguiente: 1 juego de hojas de la actividad 2, 3 hojas milimétricas, 3 plumas (1 negra, 1 roja y 1 azul), 1 compás, 1 regla graduada y 1 cuadrito de cartulina con el número de equipo. Este material irá en una carpeta de plástico, el cual llevará preparado la profesora ya solo para ponerlo en las butacas.

Posteriormente, cuando hayan llegado los alumnos al salón, la profesora se presentará y les pedirá que formen equipos de 2 personas, con la siguiente especificación: que haya 1 hombre y 1 mujer en cada equipo y que se reúnan con personas diferentes a las de la actividad pasada. Después de esto, se les indicará que por equipo tomen asiento en las butacas que están acomodadas. También, se les aclarará que únicamente pueden comentar sobre la actividad con los integrantes de su equipo, no con los demás, pues deben recordar que los equipos son de 2 personas, no de 4, 6, etc.

Además, en este momento también se les pedirá que cuiden mucho el material que se les acaba de entregar, pues éste es prestado y deben entregarlo tal y como se les proporcionó. Luego, para comenzar con la actividad, la profesora pedirá a los estudiantes que coloquen los nombres de los integrantes del equipo en la parte de arriba, así como su género y grado.

Enseguida, la profesora dirá lo siguiente: En esta actividad, trabajaremos con algo de geometría, por ello es importante que les comente que ésta es una rama de la matemática, la cual significa geo (tierra) y metría (medida), por lo que geometría es: medida de la tierra. Luego, la geometría surgió en Egipto, con la necesidad de medir áreas de terrenos, pues el Río Nilo al desbordarse barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada quien. Entonces, la geometría es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, áreas y perímetros de cuadrados, rectángulos, entre otras figuras. Luego, estos conocimientos que fueron desarrollando los egipcios se fueron distribuyendo en otros lugares como Grecia que es donde surgió el Teorema de Pitágoras, el cual se utiliza para encontrar alguna medida de un triángulo rectángulo, es decir, ya sea de alguno de los catetos o la hipotenusa. Posteriormente, los pitagóricos (una escuela formada por Pitágoras) mediante la geometría, calculaban la multiplicación de números, como por ejemplo: 2×5, y raíces cuadradas de algunos números.

Hablando de raíces cuadradas ¿Alguien puede decirme cuánto es $\sqrt{4}$?, se espera que la mayoría de los estudiantes responda que es 2, ¿Cuánto es $\sqrt{9}$?, se espera que los estudiantes contesten que el valor es 3 y ¿ $\sqrt{5}$?, se espera que aquí no contesten o saquen la calculadora para obtener el valor. ¿Cómo saben estos resultados?, ¿Pueden hacerlo sin calculadora? Se espera que para estas preguntas algunos contesten que se saben las raíces cuadradas de memoria (para el caso de $\sqrt{4}\ y\ \sqrt{9}$) y para $\sqrt{5}$ se espera que digan que obtuvieron el resultado con la calculadora o que no saben cuánto es el valor. Esto fue nada más un poco de historia acerca de la Geometría, pues trabajaremos con ella en esta sesión y es necesario que sepan para qué se utiliza esta rama de las matemáticas.

Luego, la situación de acción se logrará cuando los estudiantes acepten por convicción propia resolver el problema. Se destaca en este momento que la construcción 1 la hará la profesora en Geogebra, ésta se estará proyectando en el cañón para que todos los estudiantes logren ver lo que se está haciendo, la finalidad de utilizar Geogebra es que el plano cartesiano se puede mostrar de manera cuadriculado y esto es de gran ayuda, pues hay una gran similitud con las hojas milimétricas que se le proporcionarán al estudiante. Al realizar dicha construcción en las hojas milimétricas, los estudiantes se encontrarán ya en situación de acción, ésta continuará desarrollándose en cada uno de los equipos hasta la construcción 3. Enseguida, se describe cómo hará la profesora la construcción 1 a la par con los alumnos.

Ahora, para entrar con la actividad quiero que leamos lo que se pide en la construcción 1, iremos haciendo toda esa construcción, yo la haré en Geogebra y ustedes en las hojas milimétricas, un integrante del equipo haga la construcción 1, otro hará la 2 y así sucesivamente se irán alternando, por supuesto el que en este momento no esté con la regla y el compás puede ayudar a su compañero, pues recuerden que es trabajo en equipo.

A ver equipo 1 ¿Qué dice el inciso a)? En este momento leerán lo que solicita dicho inciso, luego la profesora preguntará a todo el grupo ¿Qué es un segmento?, para esto la profesora ya tendrá la computadora encendida y conectada al cañón, se espera que los estudiantes digan que es una línea determinada por dos puntos, otra respuesta podría ser: una línea recta, de cualquier forma, la profesora mostrará en Geogebra el segmento que solicita el inciso a) (véase la Figura 32) y dará la definición de éste.

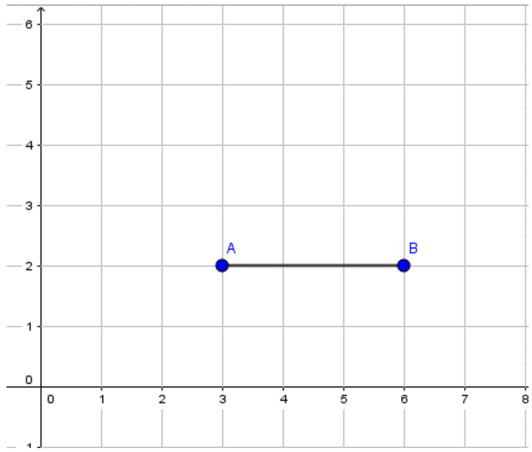


Figura 32: Segmento AB

Luego, la profesora pedirá a otro equipo que lea el inciso b) y preguntará al grupo ¿Cómo se encuentra el punto medio de un segmento? Se espera que digan que se mide el segmento y la mitad de éste es el punto medio, para respuestas distintas a éstas preguntará a los demás compañeros del grupo si están de acuerdo para hacer la validación de tal definición y finalmente la profesora dirá la definición para que todo el grupo trabaje con ésta a lo largo de la actividad y mostrará dicho punto en Geogebra tal y como se muestra en la Figura 33.

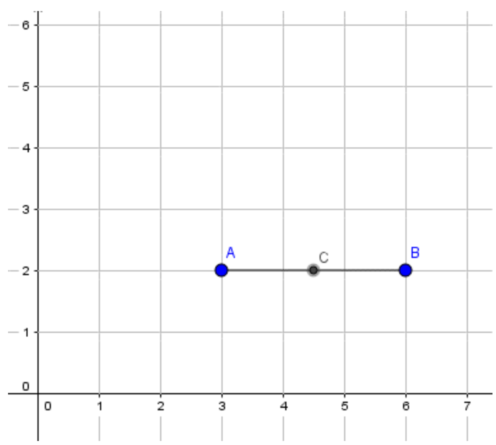


Figura 33: Punto medio

Después, la profesora pedirá a otro equipo que lea el inciso c) y colocará el punto D en Geogebra (Figura 34) pues se cree que los alumnos no tendrán dificultad para colocar este punto en el segmento AB.

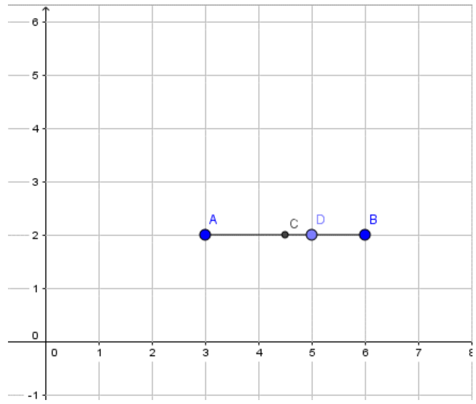


Figura 34: Punto D a 2 cm de A

Posteriormente, la profesora pedirá a otro equipo que lea el inciso d) y preguntará ¿Qué es una semicircunferencia? A esto se espera que los alumnos digan que es la mitad de una circunferencia, luego, la profesora trazará la semicircunferencia en Geogebra (Figura 35) y los alumnos en su hoja milimétrica.

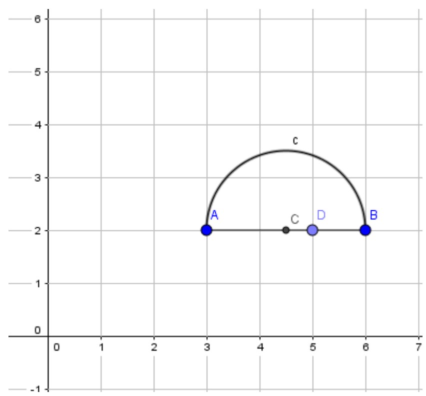


Figura 35: Semicircunferencia

En este momento, la profesora leerá el inciso e) y preguntará ¿Qué es una recta perpendicular?, luego dará a definición y trazará la recta en Geogebra (Figura 36) para que los alumnos la tracen en su hoja milimétrica.

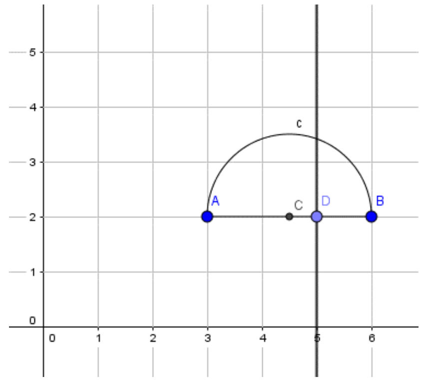


Figura 36: Recta perpendicular que pasa por el punto D

Después, leerá el inciso e) y preguntará a los alumnos ¿Cuál creen que es la intersección de la recta que acabamos de trazar y la semicircunferencia?, luego, la profesora de acuerdo a la respuesta de los alumnos colocará el punto E (véase la Figura 37), si los estudiantes no lograran identificar cuál es ese punto, la profesora se los dirá.

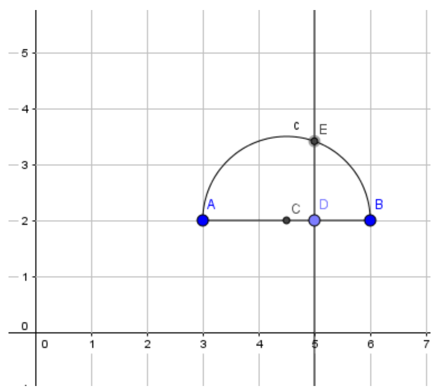


Figura 37: Intersección de la recta perpendicular y la semicircunferencia

Finalmente, leerá el inciso f) y medirá en Geogebra el segmento DE (Figura 38) y pedirá a los alumnos que midan el segmento que ellos tienen. Aquí puede ocurrir que algunos alumnos digan que no obtuvieron 1.4 cm sino 1.5 o 1.3 u otros valores, a esto la profesora les dirá que dejen el valor que ellos obtuvieron y que tengan cuidado en las construcciones posteriores de medir con mucha exactitud lo que se pide y de abrir el compás exactamente a la medida AC.

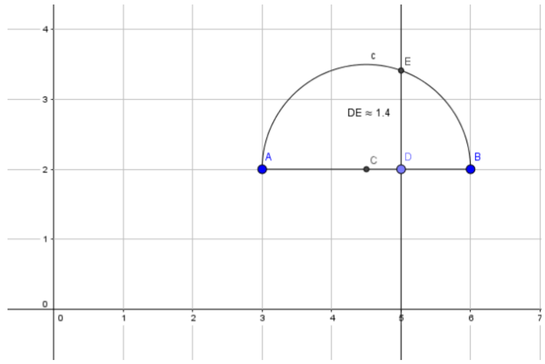


Figura 38: Longitud DE

Posteriormente, se espera que los estudiantes hagan la construcción 2 solos, lo cual se cree que no generará dificultades,0 pues los pasos son los mismos que en la construcción 1, cuando ellos logren hacer la construcción 2 sin la guía directa del profesor estarán entrando en el juego y se estará dando la devolución, pues los estudiantes ya habrán tomado la decisión de hacer la construcción por convicción propia, esto justamente forma parte de la situación de acción.

Respecto a la construcción 3, aunque se está en la misma situación que las otras construcciones a parte de lo que se mencionó anteriormente los estudiantes se enfrentan a un nuevo reto, pues se les da la medida del segmento AD que es AD= 4cm y se les pide que proporcionen la medida de AB y DE. Para esta construcción se prevee un tiempo máximo de 10 minutos, pues pueden dudar acerca del valor de AB, para lo cual verán las construcciones anteriores para lograr deducir dicho valor.

Luego, se espera que las primeras tres construcciones estén terminadas en un máximo de 25 minutos, ya que la primera construcción puede llevar un tiempo de 10 minutos debido a las preguntas que hará la profesora a los estudiantes, para la segunda se estima un tiempo de 5 minutos y para la tercera 10 minutos.

Entonces, las tres construcciones forman parte de la situación de acción, las posibles respuestas se muestran a continuación en la situación de formulación.

Situación de formulación: En esta situación se considera todo aquello que los estudiantes escriben en las hojas de trabajo, las construcciones que van a realizar en las hojas milimétricas y también todo lo que dicen al interior del equipo o al exterior (de manera grupal), sin embargo, esto último es difícil de recopilar.

Entonces, todo el instrumento (actividad 2) es parte de la situación de formulación, a continuación, se muestra lo que se espera que los estudiantes contesten en cada una de las preguntas:

Las posibles longitudes que los alumnos pondrán a DE en la construcción 1 y 2 son:

a) 1.4 cm. y 1.7 cm.

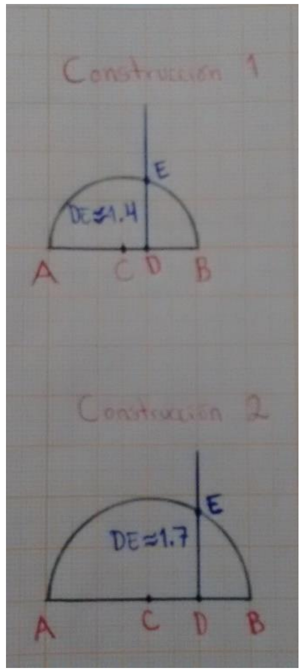


Figura 39: Trazos y longitudes esperados.

b) 1.5 cm. y 1.8 cm.

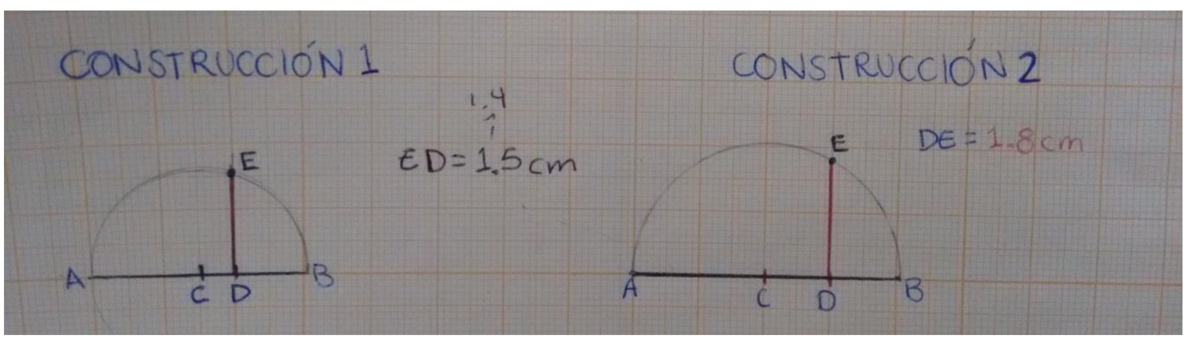


Figura 40: Longitud de AB y apertura del compás 1 mm mayor de lo que debería

c) 1.3 cm. y 1.6 cm.

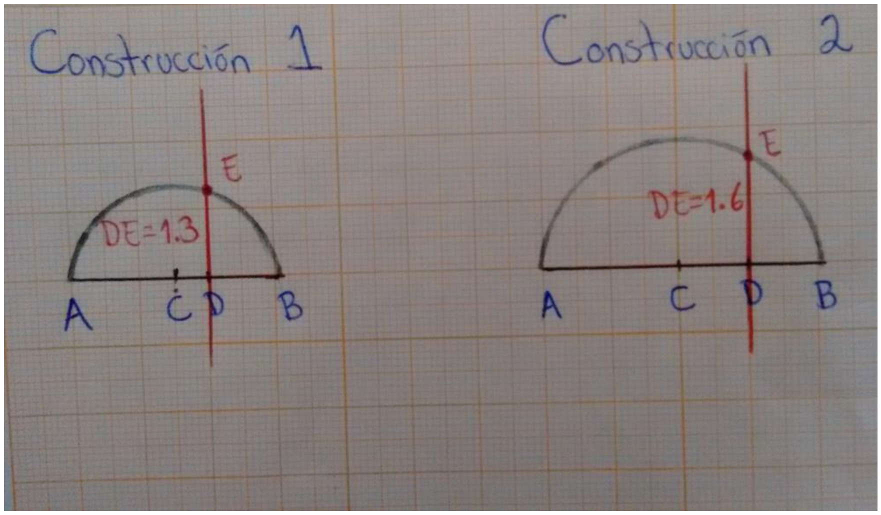


Figura 41: Centro 2 mm abajo del punto C

d) La combinación de los casos anteriores, es decir, que en algunas construcciones resulte la longitud deseada que es la del inciso a) y en otras resulte una longitud mayor o menor de lo que se espera como en los incisos del b) y c). Sin embargo, las longitudes mencionadas anteriormente, se consideran una buena aproximación de la raíz cuadrada considerando que se está calculando de manera geométrica. El inciso a) es considerada la respuesta óptima.

e) No conteste.

La variación en dicha longitud se deberá probablemente a que trazarán la semicircunferencia con un radio ligeramente mayor o menor a la mitad del segmento AB en cada una de las construcciones mencionadas anteriormente, esto puede deberse a errores en el uso del compás y la regla, tales como:

- El segmento AB lo están considerando mayor o menor con algunos milímetros (1-2 hacia arriba o 1-2 hacia abajo).

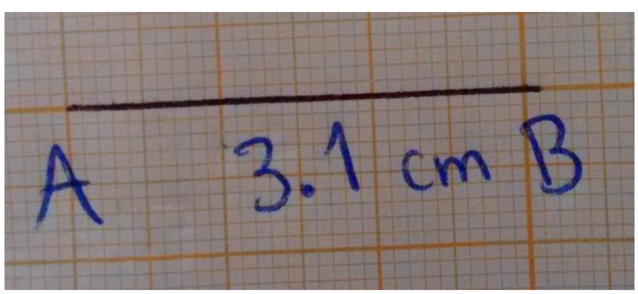


Figura 42: 1 mm mayor

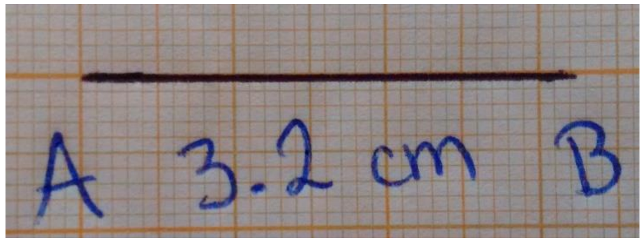


Figura 43: 2 mm mayor

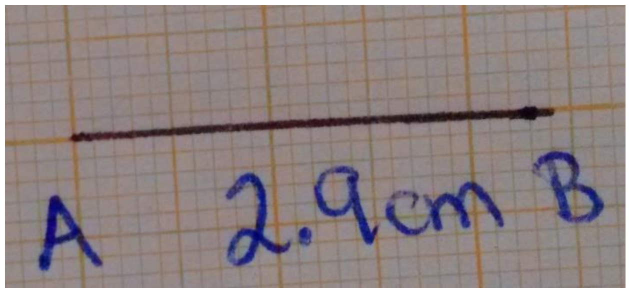


Figura 44: 1 mm menor

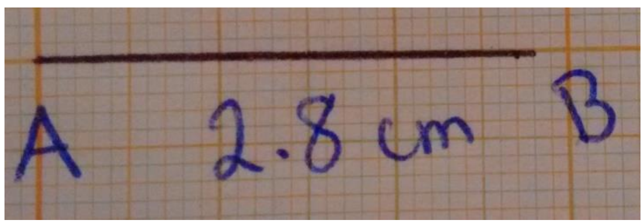


Figura 45: 2 mm menor

- Que no abran el compás exactamente a la mitad del segmento AB (véase la Figura 46 y Figura 47).

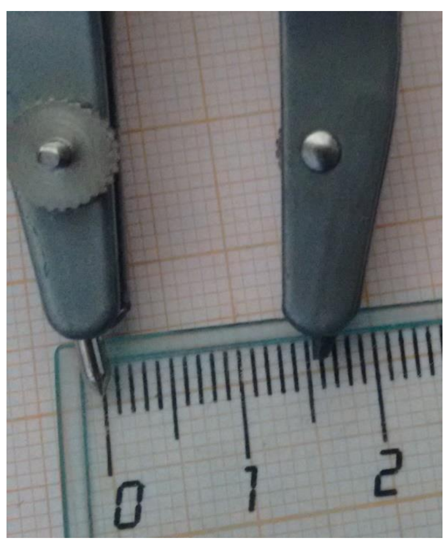


Figura 46: Radio de la semicircunferencia mayor a AC

Figura 47: Radio de la semicircunferencia menor a AC

- Que abran el compás exactamente a la medida, pero se les mueva la punta del compás del punto C.

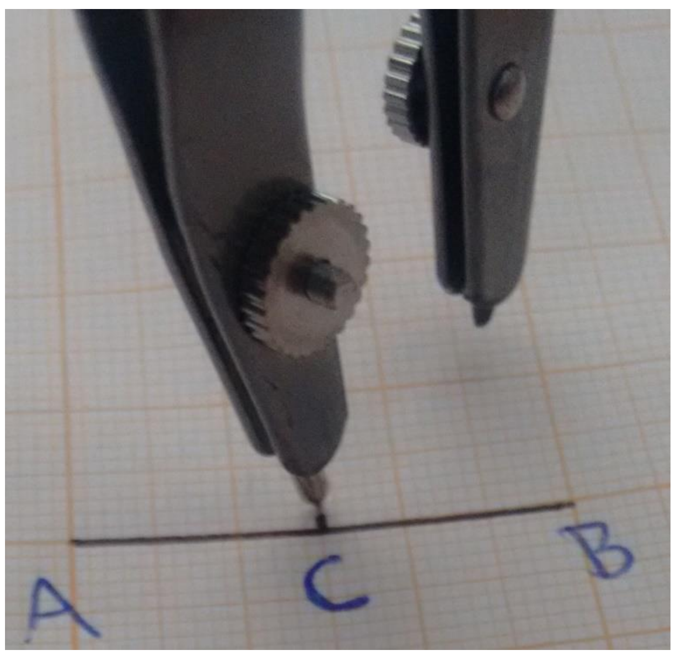


Figura 48: Punta del compás fuera del punto C

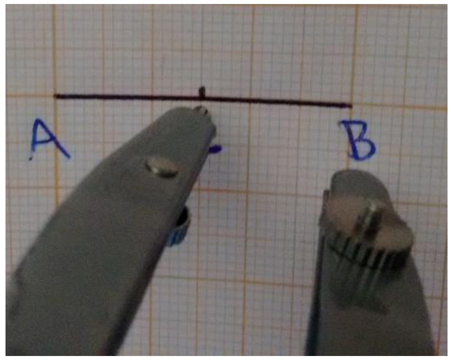


Figura 49: Punta del compás abajo del punto C

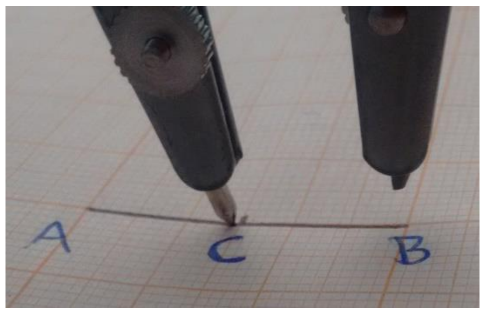


Figura 50: Punta del compás a un lado del punto C

- Que no midan bien con la regla.

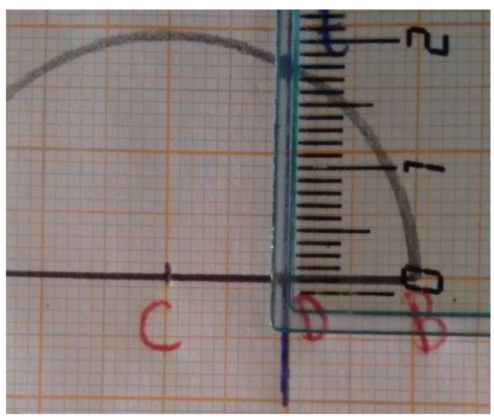


Figura 51: El 0 fuera del punto D

Respecto a la construcción 3, se espera que proporcionen las respuestas que se muestran a continuación:

a) AB=5 cm. y DE=2 cm.
b) AB= 5 cm. y DE=2.1 cm.
c) AB=5 cm. y DE=2.2 cm.
d) AB= 5 cm. y DE=1.9 cm.

e) AB=5 cm. y DE=1.8 cm.
f) AB=4 cm. y DE= 1.7 cm.
g) No conteste.

Las respuestas desde el inciso b) hasta el e.) son consideradas buenas aproximaciones para esta construcción, esto considerando que la construcción es en papel y es difícil para los alumnos ser muy precisos debido a que no están muy acostumbrados al uso del compás. El inciso a) es considerado la respuesta óptima.

Luego, cuando se da la indicación de que eleven al cuadrado la longitud del segmento DE y se pregunta: ¿A qué valor se aproxima?, ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?, ¿Cuál?, se espera que contesten lo siguiente:

a) Construcción 1: 2, sí, es igual o se aproxima a AD, construcción 2: 3, sí, es igual o se aproxima a AD y construcción 3: 4, sí, es igual o se aproxima a AD.
b) Construcción 1: 2, ED^2=AD ED elevado al cuadrado es igual a AD, construcción 2: 3, ED^2=AD, ED elevado al cuadrado es igual a AD, construcción 3: 4 $ED^2 = AD$, ED elevado al cuadrado es igual a AD.
c) Construcción 1: 2, sí, son de la misma medida si lo redondeamos, construcción 2: 3, sí, son de la misma medida si lo redondeamos, construcción 3: 4, sí, son de la misma medida si lo redondeamos.
d) Construcción 1: 2, sí, se aproxima a AD, construcción 2: 3, sí, se aproxima a AD, construcción 3: 4, sí, se aproxima a AD.
e) Construcción 1, 2 y 3: No redondear, dejar el valor exacto que les da al elevar al cuadrado, no contestar las otras preguntas. Es importante destacar que estos valores pueden variar, pues, recuerde que los estudiantes pueden estar dando valores para DE 2 ml mayor o menor que el número esperado.
f) No contestar ninguna de las preguntas.

Para la pregunta: ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE? Se esperan las siguientes respuestas:

a) Sacando raíz cuadrada a AD.
b) , ED^2=AD ED
c) Dividiendo AD entre 2.
d) Restarle 2 a AD.
e) No contestar.

Se espera que en la parte II de la actividad, los estudiantes proporcionen los siguientes valores mediante las construcciones solicitadas para: $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{13}\ y\ \sqrt{17}$.

a) 2.2 cm, 2.6 cm, 3.6 cm y 4.1 cm.
b) 2.3 cm, 2.7 cm, 3.7 cm y 4.2 cm.
c) 2.4 cm, 2.8 cm, 3.8 cm y 4.3 cm.

d) 2.1 cm, 2.5 cm, 3.5 cm y 4 cm.
e) 2 cm, 2.4 cm, 3.4 cm y 3.9 cm.
f) La combinación de las opciones anteriores, es decir, la medida de algunas construcciones sean las del inciso a) y la de otras cualquiera de las opciones de los incisos b) al e).
g) No contestar.

De igual manera, como en la construcción 3, desde el inciso b) hasta el f) se consideran buenas aproximaciones, por lo que ya se comentó anteriormente, el inciso a) nuevamente es la respuesta óptima.

Finalmente, en la parte III se espera que los estudiantes contesten lo siguiente:

a) $\sqrt{5} = 2.236067977$
b) $5^{\frac{1}{2}} = 2.236067977$
c) $\sqrt{7} = 2.645751311$
d) $7^{\frac{1}{2}} = 2.645751311$
e) $\sqrt{13} = 3.605551275$
f) $13^{\frac{1}{2}} = 3.605551275$
g) $\sqrt{17} = 4.123105626$
h) $17^{\frac{1}{2}} = 4.123105626$

En la pregunta que dice: ¿Qué observas en estos dos valores? Se espera que los estudiantes respondan que son iguales.

Situación de validación: Ésta se dará al interior de cada equipo y de manera grupal.

- **Equipo:** Cuando los estudiantes tengan respuestas diferentes para la pregunta que estén contestando, en ese momento tendrán que ponerse de acuerdo para tomar una de las dos respuestas, un alumno tiene que convencer a otro mediante sus argumentos para poder llegar de común acuerdo a una respuesta. También, puede ocurrir que alguno de los alumnos no tenga idea de cómo resolver el problema, en ese caso, el que sí la tiene puede apoyar al otro estudiante para que entienda qué hay que hacer y por qué debe ser así.
- **Grupal:** El profesor pasará a 2 o 3 integrantes de diferentes equipos para que muestren cómo resolvieron algunos de los problemas del instrumento, no elegirá al azar a dichos equipos, el profesor escogerá uno donde la respuesta que tengan no sea correcta, a otro que sí tenga la correcta y posiblemente a alguno que tenga una estrategia diferente a los anteriores. Después, preguntará a los equipos que no pasaron al pizarrón si están de acuerdo con la respuesta del primer equipo que pasó al pizarrón y se hará un debate de ¿por qué sí o por qué no es correcta esa respuesta? Luego, se pasarán algunos otros integrantes que tengan respuestas alternativas y se harán las mismas preguntas al resto del grupo. Finalmente, el profesor les dirá: ¿cuál es la

respuesta con la que se quedan? Con ello, se pretende que el grupo llegue a la respuesta correcta.

Las preguntas que se validarán son:

Realiza lo mismo que en los casos anteriores, pero ahora con AD= 4 cm. ¿Cuál será la longitud del segmento AB y DE?

Se validará esta pregunta, porque debe quedar claro que el segmento AB debe medir 1 cm. más que el segmento AD, dicha validación se hará cuando la mayoría de los estudiantes hayan terminado la construcción 3, es decir, aproximadamente en el minuto 25 después de que inició la clase.

¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE?

Esta pregunta se validará en el momento en el que la mayoría de los equipos hayan terminado de responder a esta pregunta. Se espera que sea aproximadamente en el minuto 40 después de que inició la clase, para validar esta pregunta se espera que se haga en un máximo de 5 minutos.

Si en este momento tuvieras que calcular $\sqrt{5}$, ¿Cómo lo harías?, ¿Podrías apoyarte de las construcciones anteriores?

Esta pregunta se validará aproximadamente 10 minutos después de la anterior, es decir, más o menos en el minuto 50, pues son preguntas consecutivas y se hará de esta manera porque éstas son las preguntas más importantes de esta actividad, sin la respuesta correcta a estas preguntas no podrán contestar lo siguiente.

Se validarán éstas preguntas debido a que es el momento en el que se pone en jaque al alumno, pues necesita saber que el segmento DE es la raíz cuadrada del segmento AD, porque de lo contrario no podrá resolver lo que se pide a continuación de manera adecuada, al validar en este momento, se espera que aquellos estudiantes que no han logrado identificar lo que se mencionó lo hagan mediante la enseñanza de sus compañeros que pasarán al pizarrón.

Situación de institucionalización: En esta situación el profesor es el que toma el control y da la definición formal del concepto que se está trabajando, en este caso, la institucionalización se hará de la siguiente manera:

El profesor sugerirá a los estudiantes que comparen los resultados que obtuvieron con la construcción geométrica que ellos realizaron y el valor que obtienen en la calculadora, les preguntará si ¿Encuentran alguna relación?, a esto se espera que la respuesta sea: sí, tiene el primer decimal que da en la calculadora o se aproxima a dicho resultado.

Luego, el profesor preguntará: ¿Qué relación encontraron entre los valores de $\sqrt{5}$, $5^{\frac{1}{2}}$, etc.? A lo cual él espera que respondan: Son iguales, después el profesor dirá que efectivamente así es y esto es porque hay una propiedad de los exponentes que es:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

También preguntará si están de acuerdo en que los valores obtenidos para DE, es la raíz cuadrada de AD, a lo cual se espera que respondan que sí, luego les dirá que les va a mostrar esa misma construcción en un programa llamado Geogebra, el cual permitirá calcular las raíces con mayor exactitud, incluso saldrán los mismos decimales que en la calculadora o posiblemente más (véase la Figura 52)

[Cierre actividad 2.ggb]

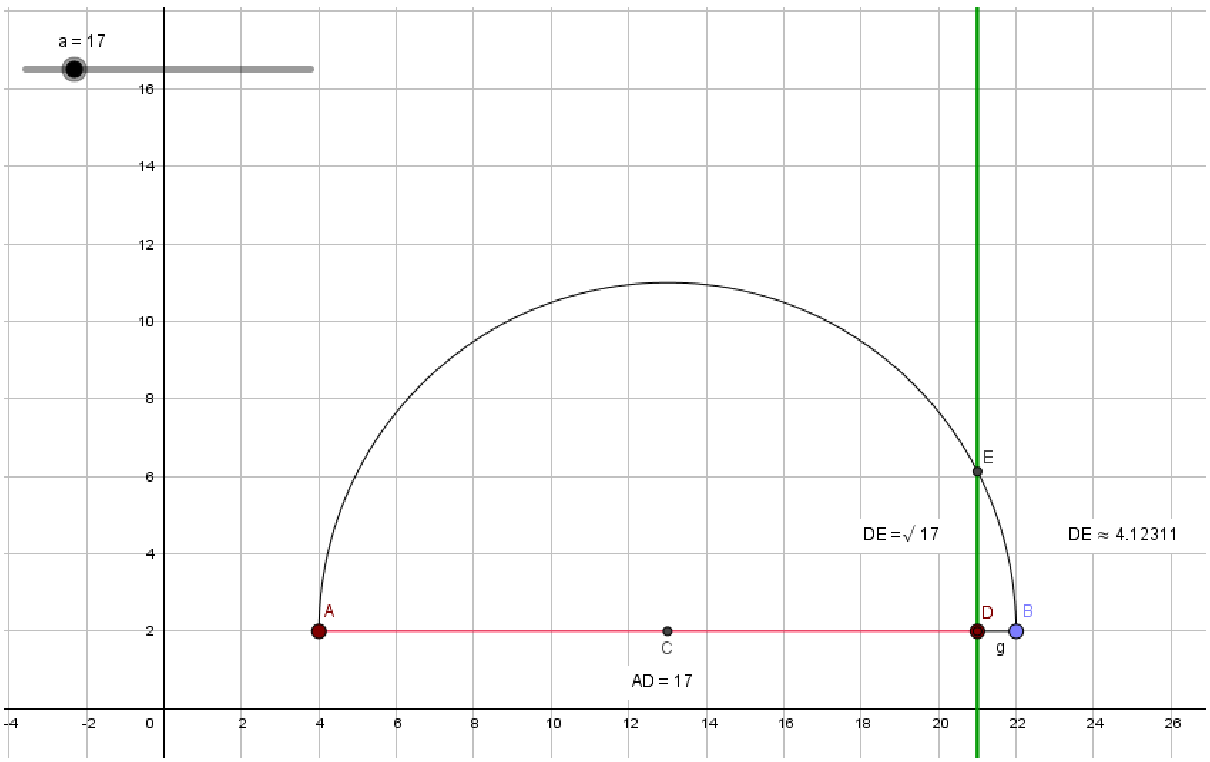


Figura 52: Raíz cuadrada de 17

Capítulo 5

Análisis a posteriori y validación

Capítulo 5: Análisis a posteriori y validación

Esta es la última fase de la ingeniería didáctica. Se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación; es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella.

Experimentación

Los estudiantes con los que se aplicó este diseño estudian en el plantel V de la Unidad Académica de Preparatorias (UAP) de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), que se encuentra ubicado en Jerez de García Salinas, Zacatecas en la colonia Las Quintas. El grupo es el 2°A. En éste hay 29 alumnos de los cuales 17 son mujeres y 12 hombres. Además, 15 estudiantes tienen la edad de 15 años, 12 tienen 16 años, 1 tiene 17 años y otro más 19 años.

En el Anexo 13 y Anexo 14 se muestra la planeación de las actividades, que contienen el tiempo en el que se planeó que se llevaran a cabo cada una de las partes de cada actividad (Actividad 1 y Actividad 2).

Por otra parte, en este capítulo se examinan los datos obtenidos en la experimentación, en este análisis, se hace una clasificación de datos, es decir, sí por ejemplo, varios equipos dieron la misma respuesta a una determinada pregunta, únicamente se muestra la respuesta de uno de ellos y se menciona cuáles equipos dieron dicha respuesta. Además, en caso de que los hubiera, se procura mencionar cuáles son los errores que cometieron los alumnos.

También, se realizan transcripciones de algunos momentos que se consideran importantes durante la experimentación, estas transcripciones se hacen con la finalidad de mostrar al lector el tipo de situaciones que surgieron durante toda esta fase de experimentación, pues, algunas, son sumamente interesantes.

A continuación, se muestra la Tabla 5 en la cual se aprecia la simbología que es utilizada en este capítulo.

Símbolo	Significado
PI	Profesora-investigadora
A1, A2, A3,…	Alumno 1, alumno 2, alumno 3, etcétera
A	Varios alumnos
()	Comentarios de la autora
Miji	Equipo “miji”
Dos	Equipo “dos”
Cristas	Equipo “cristas”
Arremangados	Equipo “arremangados”
NoManchesFrida	Equipo “no manches Frida”
Grey	Equipo “Grey”
Amigos	Equipo “amigos”

Bombones	Equipo “bombones”
Zitro	Equipo “zitro”
Chiquis	Equipo “chiquis”
Conejitos	Equipo “conejitos”

Tabla 5: Simbología

5.1 Análisis de la actividad 1 “Propagación de un virus”

El propósito de la actividad 1 es que los alumnos lleguen a la notación exponencial a través de la multiplicación reiterada, y viceversa, que de la notación exponencial obtengan la multiplicación reiterada y su resultado. Esto se va a lograr a través de algunas preguntas estratégicamente planteadas acerca de un problema de virus en la población de conejos. La Actividad 1 puede verse en el Anexo 15.

5.1.1 Situación de acción

Antes de comenzar con esta situación, es importante recordar que la situación de acción según Brousseau (s.f., citado en Santaló, et al., 1994) es: La interacción que se da entre los alumnos y el medio físico, además, parte de esta situación también son las decisiones que toman los alumnos para resolver un determinado problema.

Para iniciar con la situación de acción, la profesora-investigadora se presentó diciendo lo siguiente:

1 PI: Soy estudiante de la maestría en Matemática Educativa y vengo a aplicarles una actividad que ustedes me van a hacer el favor de contestar, de una vez les digo que si por ejemplo, al ir contestando la actividad cada uno de los integrantes del equipo tiene una respuesta diferente, tendrán que ponerse de acuerdo en cuál respuesta tomarán, no quiero que me pregunten a mí ¿cuál respuesta es?, ¿la de mi compañero o la mía?

Enseguida, solicitó al grupo se organizaran en equipos de 2 personas y que se reunieran como ellos quisieran. Algo que solicitó la profesora-investigadora de manera especial, es que una vez que estuvieran formados los equipos, acomodaran sus butacas de tal manera que un integrante del equipo estuviera de frente al otro; es decir, en filas, como ese día asistieron 22 alumnos, resultaron 11 equipos.

Figura 53: Formando equipos

Una vez que se formaron los equipos, la profesora-investigadora comenzó a repartir el material: 1 juego de hojas de trabajo de la actividad 1, 1 tablero de 16 celdas enumeradas del 0-15, 150 conejos de 1 cm cada uno, 1 pluma negra, 2 hojas blancas y 1 rectángulo de cartulina para cada equipo.

Figura 54: Repartiendo material

Al momento de entregar el material didáctico, se pudo notar que fue del gusto de los alumnos, pues, como los conejos son tan pequeños hubo expresiones como:

2 A1Miji: ¡Ay! mira ¡qué bonitos!

Esto originó motivación, dándose la devolución en su etapa de: acercamiento puramente lúdico, pues los alumnos comenzaron a explorar el material.

Enseguida, la profesora-investigadora solicitó a todo el grupo que escribieran los nombres de los integrantes del equipo y el género de cada uno de ellos en las hojas de trabajo que se les entregaron, esto se hizo como respuesta a un alumno que preguntó: ¿Ponemos nada más el nombre de uno de nosotros o los dos? En este momento, también pidió a los alumnos que escogieran un nombre para su equipo y lo escribieran en un rectángulo de cartulina que se les proporcionó.

Una vez que estuvieron formados todos los equipos y que éstos se pusieron un nombre, la profesora-investigadora comenzó leyendo el planteamiento del problema, las instrucciones y dio indicaciones generales, como se muestra en los siguientes registros:

3	PI:	Vamos a leer el problema, yo lo voy a leer y ustedes van a ir leyendo ahí en su hoja. Dice: Planteamiento del problema. En una granja de conejos llamada: "el conejo alegre", los dueños introducen un conejo nuevo (hora cero) con la finalidad de mejorar la producción, sin embargo, resulta todo lo contrario, pues éste posee el virus "atacón". Respecto a este virus se sabe que está afectando a la población de conejos muy rápidamente. Además, se transmite mediante contacto físico y cada conejo contagia a otros tres cada hora. Con base en este problema, van a resolver las preguntas que vienen en las siguientes hojas. Aquí vienen las primeras instrucciones que dice: Contesta con pluma lo que se solicita a continuación, si te equivocas, encierra en un círculo la respuesta que quieres eliminar y táchala. No utilices corrector ni rayes nada ¿ok?
4	Todos:	Sí.
5	PI:	Tienen las hojas blancas que les proporcioné para que hagan todas las operaciones que necesiten, aquí, en el instrumento, pongan las respuestas por favor sólo con pluma, nada de lápiz, pluma negra por favor. Por eso se les proporcionó la pluma negra. Entonces, ahora sí, pónganse a trabajar, utilicen el material que se les entregó que es el tablero y los conejitos y hagan lo que se les pide aquí //señala las hojas de trabajo//, por favor.

Figura 55: Leyendo el planteamiento del problema

Después de que la profesora-investigadora leyó el planteamiento del problema, los estudiantes comenzaron inmediatamente a trabajar con el material didáctico y las hojas de trabajo, en este momento, se pudo observar la devolución de la situación a-didáctica, pues los alumnos comenzaron a trabajar en la actividad.

Por todo lo anterior, se puede decir que se dio la situación de acción de manera favorable, pues los alumnos empezaron a interactuar con el medio (material didáctico, planteamiento del problema y preguntas), razonaron el problema, comentaron con su compañero de equipo acerca de la respuesta que creían era la correcta y tomaron decisiones, pues, el llegar a acomodar los conejos de cierta manera y escribir en las hojas de trabajo la respuesta (situación de formulación), indica que han llegado a un acuerdo los integrantes del equipo (situación de validación) y han tomado una estrategia para resolver el problema (situación de acción).

Figura 56: Comenzando la situación de acción

5.1.2 Situación de Formulación. Parte I

La situación de formulación según Brousseau (s.f., citado en Santaló, et al., 1994) trata de la comunicación de informaciones entre alumnos, para esto, ellos deben modificar el lenguaje que utilizan cotidianamente, para comunicar la información que ellos quieren.

Las autoras de este trabajo lo interpretan de la siguiente manera: La situación de formulación, es aquella en la que los alumnos comunican de manera verbal o escrita algunas informaciones a sus compañeros, como en este caso, el contenido es matemático, los alumnos deben modificar su lenguaje cotidiano al matemático para poder comunicar la información deseada y los demás puedan comprenderla.

Todo lo que se muestra a continuación, forma parte de la situación de formulación, pues, los alumnos escribieron en sus hojas de trabajo la información que quieren comunicar, algunos equipos escribieron los resultados con letra, otros con número, pero finalmente, todos lograron la situación de formulación para ésta y para todas las partes que componen la actividad.

Ahora, la parte I de esta actividad, solicita lo siguiente:

I.- De acuerdo a lo anterior (problema) y con ayuda del material que se te acaba de proporcionar, realiza y contesta lo que se pide a continuación.

Ojo: No quites los conejos que vas a ir colocando en el tablero en cada una de las celdas que se te pide.

1. Coloca un conejo en el tablero en la celda que tiene marcada la hora cero.
2. ¿Cuántos conejos se contagiarán del virus después de una hora (hora 1)?
3. ¿Los conejos de la hora 1 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 2)?
4. ¿Los conejos de la hora 2 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 3)?
5. ¿Los conejos de la hora 3 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 4)?

Se identificaron diversos razonamientos por parte de los alumnos, pues, interpretaron el problema de diferentes formas, esto se puede ver en las figuras que se muestran a continuación, ya que, se muestran diversas cantidades de conejos para las mismas preguntas.

La Figura 57 exhibe la respuesta que se considera la óptima y que proporcionaron ocho equipos ("bombones", "miji", "arremangados", "amigos", "Grey", "chiquis", "zitro" y "no manches Frida"). La respuesta se describe a continuación: Para conocer el número de conejos infectados en cierta hora, multiplicaron la cantidad de conejos infectados en la hora anterior por 3.

Figura 57: Respuesta 1. Solución óptima

La segunda respuesta, que se puede ver en la Figura 58, por cierto, incorrecta, la dio el equipo "conejitos", ellos, en lugar de multiplicar por 3 la cantidad de conejos infectados la hora anterior, sumaron, es decir, para la hora 1 dijeron que había 3 conejos, sin embargo, para encontrar la cantidad de conejos infectados en la hora 2 sumaron 3 a los que había en la hora 1, obteniendo 6 para la hora 2. Con este mismo razonamiento, obtuvieron los conejos infectados en las horas 3 y 4. Se observa que, con esta respuesta, los alumnos cometen el error que reportan Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), en estas investigaciones se concluye que los estudiantes cometen el error de multiplicar la base por el exponente, debido a que consideran que la notación exponencial indica sumar la base la cantidad de veces que revela el exponente.

Figura 58: Respuesta 2. Incorrecta

La tercera respuesta, que se muestra en la Figura 59, surgió en el equipo de los “Cristas”, pues, en el video puede observarse que uno de los integrantes explica a otro lo siguiente: como cada conejo contagia a otros 3, entonces el conejo de la celda 0 contagiará a otros 3, por eso hay que poner 1 conejo en la celda 1, otro en la celda 2 y otro en la 3. Se considera que esto lo hizo porque no había entendido que el número de las celdas del tablero indica la cantidad de horas transcurridas desde que se presentó el primer conejo infectado.

Figura 59: Respuesta 3. Incorrecta

En el momento en el que la profesora-investigadora se percató de tal respuesta, hizo un comentario a todo el grupo diciendo:

6	PI:	Los números que están en el tablero indican las horas que han transcurrido desde que entró el conejo infectado en la granja.

Debido a este comentario, el equipo “cristas” modificó su estrategia logrando obtener la respuesta 1.

Finalmente, la respuesta 4 que es errónea para los últimos dos incisos, se llevó a cabo por parte del equipo "dos", de ésta no hay evidencia, pues, los alumnos no utilizaron el tablero. Para la primera y segunda hora, este equipo contestó que hay 3 y 9 conejos infectados, lo cual es correcto, sin embargo, para dar respuesta de los conejos infectados en la hora 3, se cree que multiplicaron 9×2, pues su respuesta fue 18. Luego, se considera que para obtener la cantidad de conejos infectados en la hora 4 multiplicaron 9×3. Al parecer, estos alumnos encontraron cierto patrón con el 9 y no con el 3.

5.1.3 Situación de Validación. Parte I

La situación de Validación según Brousseau (s.f., citado en Santaló, et al., 1994), es aquella en la que los alumnos tienen que convencer a uno o varios interlocutores que una afirmación es verdadera, esto debe comprobarse, es decir, el alumno que quiere persuadir de la validez de una afirmación, deberá demostrar que ésta es cierta para poder contribuir a que sus compañeros opten por su respuesta y no por la que ellos tenían, es decir, no basta con decir tal respuesta es correcta, hay que explicar por qué es así.

Al cabo de aproximadamente 10 minutos transcurridos desde que los alumnos comenzaron la parte I de esta actividad, la profesora-investigadora se percató de que la mayoría de los equipos había concluido con esta parte, por lo que consideró oportuno propiciar un momento de validación.

Las preguntas que se validaron fueron las siguientes: ¿Cuántos conejos infectados hay en la hora 2?, ¿Cuántos conejos infectados hay en la hora 4?

Se decidió validar estas preguntas debido a que se considera que es donde se pueden notar los errores si es que los hay, pues, por ejemplo la hora 1 no se considera un momento de conflicto en los estudiantes, ya que como el planteamiento del problema dice que un conejo contagia a otros tres cada hora, se tiene la idea de que los estudiantes podrán dar rápidamente y sin complicaciones la respuesta para la hora 1, sin embargo, no es así para las siguientes horas, en especial para la hora 4, pues no se puede obtener el resultado correcto para ésta sin tener el algoritmo correcto, por ello, se decidió validar esta hora. Luego, se decidió validar la hora 2, porque como la hora 1 es muy simple, no tenía caso que fuera ésta y la hora 3 tampoco, porque no se quiso hacer la validación de dos horas consecutivas.

Los equipos que fueron pasados al pizarrón fueron: el equipo "dos" y los "chiquis". Se eligieron éstos, debido a que la profesora-investigadora observó a los equipos mientras respondían las preguntas y logró identificar que el equipo "dos" tenía la respuesta óptima para la hora 2, pero no para la hora 4, el otro equipo fue elegido por tener las respuestas óptimas para ambas horas.

A continuación, se muestra el diálogo que se dio entre los alumnos y la profesora-investigadora para la situación de validación.

7	PI:	A ver, nada más van a escribir los resultados de la hora 2 y la hora 4. En la hora 2 ¿Cuántos conejos va a haber? //se dirige a A1Dos//

8	Todos (excepto A1 Dos)	9.
9	PI:	O sea los de la hora 1, ¿A cuántos conejos contagiaron en la hora 2?
10	A1Dos:	9, // este resultado lo escribe, no lo dice//.
11	PI:	¿Y en la hora 4?
12	A1Dos:	27, //este resultado lo escribe, su compañera A2Dos, dice esta cantidad desde su lugar//.
13	PI:	¿Cómo le hicieron para obtener estas respuestas? Explícales a tus compañeros por favor.
14	A1Dos:	$9x3$ da 27 //señalando el 27 en el pizarrón//.
15	PI:	¿Cómo le hicieron para obtener el resultado de la hora 2?
16	A1Dos:	3 por 3.
17	PI:	Pregunta al resto del grupo ¿Están de acuerdo con lo que dice su compañero?
18	Todos:	No.

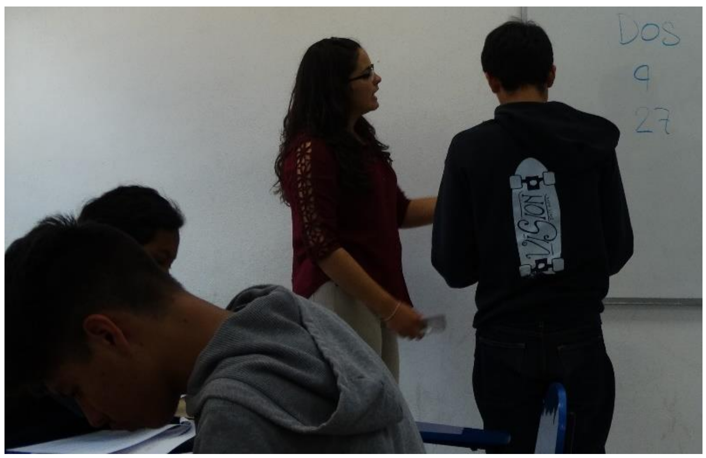


Figura 60: Momento de validación equipo "dos"

En este momento, cuando la profesora-investigadora preguntó al resto del grupo si estaban de acuerdo con lo que dijo su compañero (véase la Figura 60) y ellos dijeron que no, se referían a que no estaban de acuerdo con que hay 27 conejos infectados en la hora 4, pues, todos los equipos, excepto los "conejitos" tenían como respuesta para la hora 4, 81 conejos. Continuando con la validación, se muestran a continuación los del equipo "chiquis".

19	PI:	Ok. Pase el equipo de los chiquis por favor. Es igual, escribe el resultado para la hora 2 y para la hora 4 nada más.
20	A1Chiquis:	Escribe en el pizarrón 9 y 81.
21	PI:	A ver, fíjense en algo, //señala el número 9 en el pizarrón y pregunta a A1Chiquis// ¿Qué hicieron para obtener este resultado?
22	A1Chiquis:	Pues, multiplicamos lo de la hora 1 que eran 3 por 3.
23	PI:	¿Y para encontrar éste //señala el 81 en el pizarrón// el de la hora 4?
24	A1Chiquis:	Sacamos después, 9 por 3 y nos salió 27 //señala el 27 que escribió A1Dos//, después 27 por 3 y nos dio 81.
25	PI:	Pero 27 les da a ustedes ¿en qué hora?
26	A1Chiquis:	En la tercera.

27	PI:	En la tercera, ok y 81 les da en la cuarta. A ver, ¿Ustedes //todos// están de acuerdo con el resultado de su compañero?
28	Todos:	Sí.
29	PI:	Bueno, muy bien, pueden continuar con la actividad.

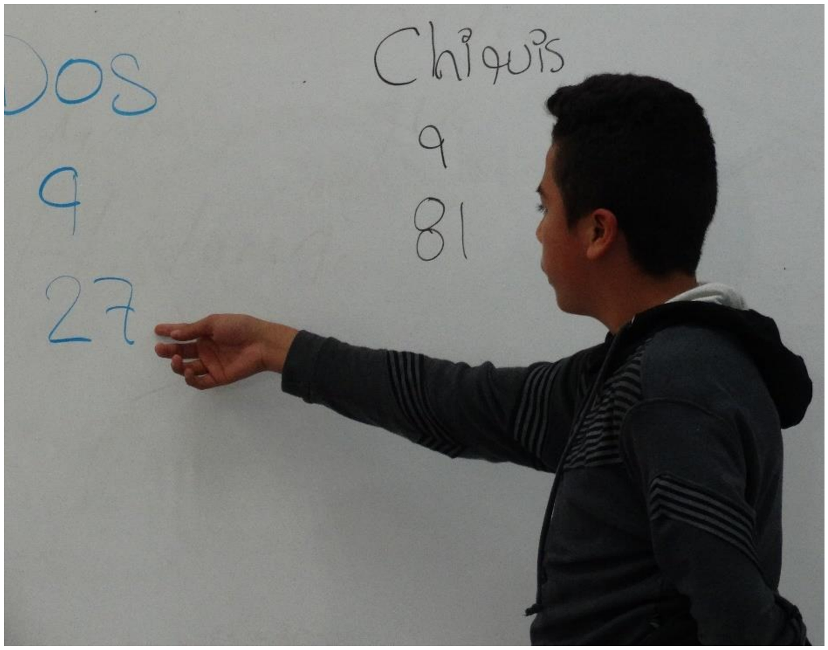
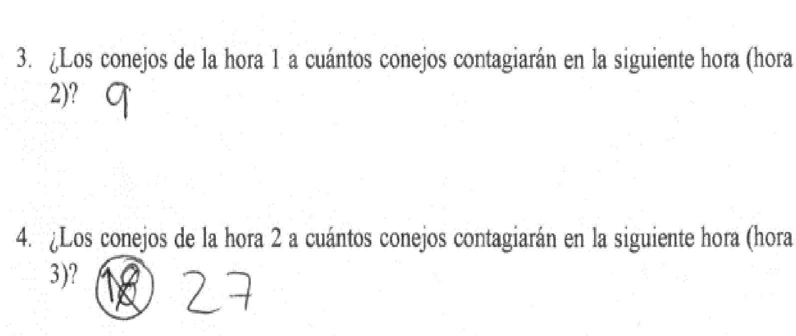


Figura 61: Momento de validación equipo "chiquis"

Esta validación se considera que fue buena, pues, aunque el equipo “dos” cuando pasó al pizarrón dijo que en la hora 4 había 27 conejos infectados, después de que pasó el equipo “chiquis” al pizarrón (véase la Figura 61), explicó su respuesta y además, el resto del grupo lo apoyó, el equipo “dos” modificó sus respuestas tanto para la hora 3 como para la hora 4 (tal y como se muestra en la Figura 62), es decir, el equipo “chiquis” realmente convenció al equipo “dos” de que su respuesta era la correcta.


3. ¿Los conejos de la hora 1 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 2)? 9

4. ¿Los conejos de la hora 2 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 3)? ~~18~~ 27

Figura 62: Equipo "dos" modificó sus respuestas

También, el equipo “conejitos” tenía otras respuestas, tal y como se vio en la situación de formulación, sin embargo, ellos no lograron cambiar sus respuestas mediante la validación, aunque sí los dejó pensando, cuando la profesora-investigadora se percató de esto, se acercó para explicar un poco más el problema, la intervención de ella se dio de la siguiente manera:

30	PI:	A ver, ustedes platíquenme ¿Qué están haciendo?
31	A1Conejitos:	Pues, los sumamos todos los conejos.
32	PI:	¿Están sumando todos los conejos?
33	Conejitos:	Sí.
34	PI:	O sea, ¿Aquí //señala la celda 1 del tablero// qué sumaste?
35	A1Conejitos:	Pues 3, porque un conejo //señala el de la celda 0// estaba contagiando a otros 3.
36	PI:	De aquí //señala la celda 1// ¿Cómo pasaron a aquí //señala la celda 2//?
37	A1Conejitos:	Sumando tres.
38	PI:	El problema no dice: ¿Un conejo contagia a otros 3?
39	A1Conejitos:	Ah, entonces sería 4 aquí //señala la celda 1// porque sería el contagiado y otros 3.
40	PI:	Pero, fíjate lo que dice la pregunta. Quiero que lean bien la pregunta. //Toma las hojas de trabajo de los estudiantes y lee lo siguiente: Coloca un conejo en el tablero en la celda que tiene marcada la hora cero//. Entonces ¿Aquí está el conejito verdad //señala el conejo de la celda 0//?
41	Conejitos:	Asienten con la cabeza.
42	PI:	¿Cuántos conejos se contagiarán del virus después de una hora? O sea, este conejito ¿A cuántos va a contagiar?
43	A1Conejitos:	A tres.
44	PI:	¿Los conejos de la hora 1 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora?, es decir, en la hora 2. Éstos //señala los conejos de la celda 1// ¿A cuántos van a contagiar en esta hora //señala la celda 2//?
45	A1Conejitos:	¡Oh!
46	PI:	¿Sí? ¿A cuántos van a contagiar?
47	A1Conejitos:	A 3 cada uno.
48	PI:	¿Entonces, cuántos serían aquí //señala la celda 2//?
49	A1Conejitos:	Eh, 9.
50	PI:	Ok, entonces ustedes pueden continuar haciendo eso, ¿verdad?
51	Conejitos:	Sí.

Se considera que los alumnos no estaban pensando de manera exponencial, ya que sumaban 3 conejos cada hora que pasaba, en lugar de multiplicar. Posterior a este pensamiento, uno de los alumnos recurrió a una estrategia acumulativa, pues, estaba sumando el primer conejo (hora 0) con los 3 a los que contagió dando como resultado 4 conejos infectados para la hora 1. La profesora-investigadora los sacó de su error haciéndoles preguntas hasta que lograron comprender el problema, porque puede notarse en los registros que ella en ningún momento dio la respuesta, solamente los hizo reflexionar a través de las preguntas que ella formuló y leyendo nuevamente las de las hojas de trabajo.

Entonces, al finalizar la parte I, después de la validación, todos los estudiantes tuvieron las mismas respuestas para cada una de las preguntas de dicha parte. Sin embargo, en la situación de formulación de la parte II, se podrá observar que los equipos “dos” y “conejitos” tacharon algunas respuestas, pues, cuando se hizo la validación de la parte I, dichos equipos ya estaban contestando la parte II.

5.1.4 Situación de Formulación. Parte II

Esta tarea consiste en lo siguiente:

Sección I

II.- Enseguida, escribe las operaciones que se solicitan, <u>sin el resultado</u>.

a) Escribe la operación matemática que realizaste para conocer la cantidad de conejos que se infectaron en la hora 1 a partir del conejo infectado que había en la hora cero.
b) Escribe la operación anterior **<u>sin el resultado.</u>** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 2? Modifícale lo que consideres necesario.
c) Escribe la operación anterior **<u>sin el resultado.</u>** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 3? Modifícale lo que consideres necesario.
d) Escribe la operación anterior **<u>sin el resultado.</u>** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 4? Modifícale lo que consideres necesario.

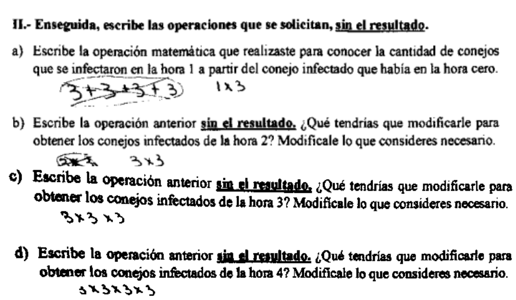
Sección II

¿Conoces alguna expresión que represente o simplifique las operaciones que realizaste en los incisos anteriores?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso a)?
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso b)?
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso c)?
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso d)?
- ¿Respecto a las expresiones anteriores puedes proporcionar alguna que arroje la cantidad de conejos infectados que hay en la hora cero? ¿Cuál?

Los resultados de esta tarea serán analizados en dos secciones (sección I y II), es decir, primero se analizará del inciso a)-d) y posteriormente se analizarán la pregunta que se encuentra en negritas y las de las viñetas.

Para la sección I se encontraron cuatro respuestas diferentes. La respuesta 1 fue realizada por 1/11 equipos ("conejitos"), ésta es considerada la óptima y consiste en lo siguiente: El equipo primeramente hizo todo tal y como se lo pedía la instrucción, es decir, a partir de la operación del inciso anterior agregaron lo que faltaba para obtener el resultado de la hora solicitada (2, 3 o 4). Luego, a cada operación del inciso anterior agregaron una multiplicación por 3 (véase la Figura 63), lo cual es correcto.



II.- Enseguida, escribe las operaciones que se solicitan, <u>sin el resultado</u>.

a) Escribe la operación matemática que realizaste para conocer la cantidad de conejos que se infectaron en la hora 1 a partir del conejo infectado que había en la hora cero.
~~3+3+3+3~~ 1x3

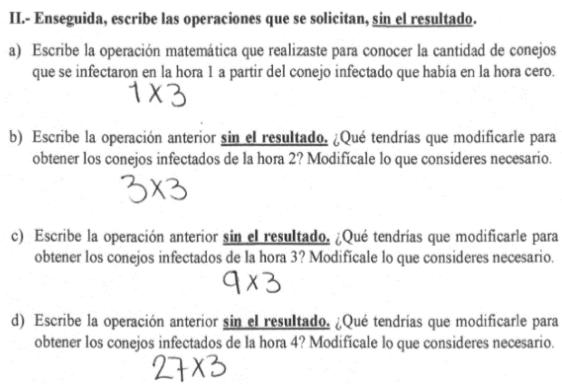
b) Escribe la operación anterior **<u>sin el resultado.</u>** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 2? Modifícale lo que consideres necesario.
3x3

c) Escribe la operación anterior **<u>sin el resultado.</u>** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 3? Modifícale lo que consideres necesario.
3x3 x3

d) Escribe la operación anterior **<u>sin el resultado.</u>** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 4? Modifícale lo que consideres necesario.
3x3x3x3

Figura 63: Respuesta 1. Solución óptima

La segunda respuesta que se muestra en la Figura 64 fue la más socorrida, pues 8/11 equipos la utilizaron, dichos equipos llevan por nombre “no manches Frida”, “Grey”, “amigos”, “arremangados”, “bombones”, “miji”, “chiquis” y “cristas”. La respuesta de estos equipos consistió en lo siguiente: Multiplicaron el resultado de la hora anterior por 3 (se esperaba que no tomaran el resultado, pues la instrucción decía escribe la operación anterior sin el resultado), aunque ésta no es la respuesta óptima es correcta.


II.- Enseguida, escribe las operaciones que se solicitan, sin el resultado.

a) Escribe la operación matemática que realizaste para conocer la cantidad de conejos que se infectaron en la hora 1 a partir del conejo infectado que había en la hora cero.

1x3

b) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 2? Modifícale lo que consideres necesario.

3x3

c) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 3? Modifícale lo que consideres necesario.

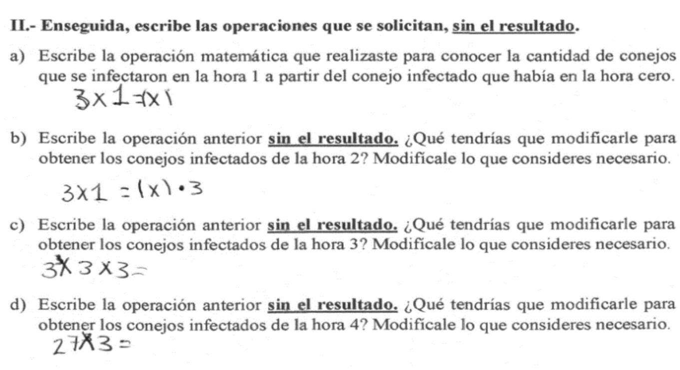
9x3

d) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 4? Modifícale lo que consideres necesario.

27x3

Figura 64: Respuesta 2. Correcta

La tercera respuesta fue realizada por 1/11 equipos (“zitro”). En esta respuesta tal y como se ve en la Figura 65 es curioso ver que para la hora 1, las alumnas nombraron *x* al resultado de la multiplicación 3×1. Luego, utilizan este resultado para escribir la operación que proporciona la cantidad de conejos infectados en la hora 2. Esto no se puede decir que es incorrecto, pues, aunque están poniendo *x* como resultado de la multiplicación 3×1, las alumnas saben que su valor es 3, esto se afirma porque en el inciso c) se observa como dejan de utilizar la *x* y ahora escriben la operación como una multiplicación reiterada $(3 \times 3 \times 3)$, entonces la solución que otorgan estas alumnas para el inciso c) es la respuesta 1, luego, para dar solución al inciso d) utilizan la respuesta 2.


II.- Enseguida, escribe las operaciones que se solicitan, sin el resultado.

a) Escribe la operación matemática que realizaste para conocer la cantidad de conejos que se infectaron en la hora 1 a partir del conejo infectado que había en la hora cero.

3x1=(x)

b) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 2? Modifícale lo que consideres necesario.

3x1 =(x)•3

c) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 3? Modifícale lo que consideres necesario.

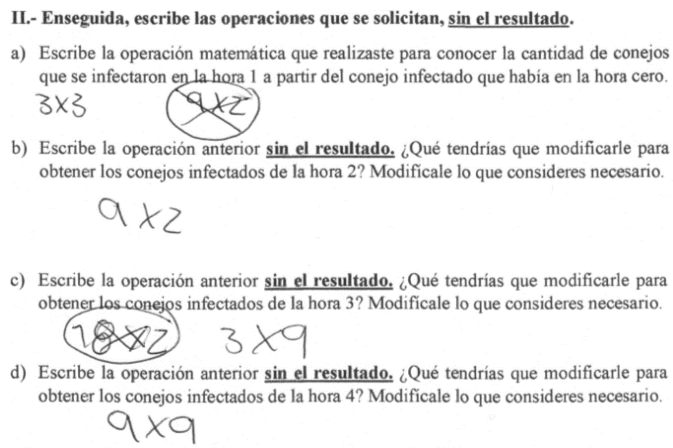
3x3x3=

d) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 4? Modifícale lo que consideres necesario.

27x3 =

Figura 65: Respuesta 3. Combinación de estrategia 1, 2 y propia

Por último, la cuarta respuesta (véase la Figura 66) es la utilizada por 1/11 equipos (“dos”), ésta consiste en lo siguiente: Aunque en la tarea 1 pusieron que en la hora 1 habría 3 conejos infectados, aquí escriben que es 3×3 lo cual es incorrecto. Luego, para la hora 2, se considera que su respuesta se debe a que multiplican el 9 que es el número que ellos encuentran como patrón por 2 (hora por la que se les pregunta), dicha solución también es incorrecta, razonamientos similares utilizan para la hora 3 y aunque éste no es el correcto, llegan a la respuesta correcta. Por otra parte, para la hora 4, escriben que hay 9×9 conejos, se piensa que en esta tarea consideraron 81 conejos porque en la validación de la tarea 1 ellos habían dicho que habría 27 conejos en esta hora, pero el otro equipo dijo que 81 y el resto del grupo los apoyó, por ello se considera que modificaron su respuesta para esta pregunta, en esta respuesta se sigue viendo el patrón con el 9, pues no escriben 27×3 como otros equipos.



II.- Enseguida, escribe las operaciones que se solicitan, sin el resultado.

a) Escribe la operación matemática que realizaste para conocer la cantidad de conejos que se infectaron en la hora 1 a partir del conejo infectado que había en la hora cero.

3x3 ~~9x2~~

b) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 2? Modifícale lo que consideres necesario.

9x2

c) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 3? Modifícale lo que consideres necesario.

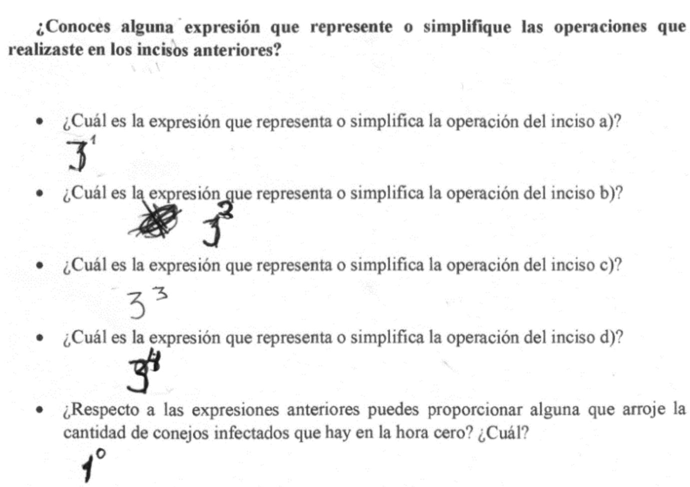
~~18x2~~ 3x9

d) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 4? Modifícale lo que consideres necesario.

9x9

Figura 66: Respuesta 4. Solución incorrecta para inciso a) y b)

Para la sección II se encontraron cinco respuestas diferentes. La respuesta 1 (véase la Figura 67) que es la solución óptima, fue utilizada por 3/11 equipos (“bombones”, “zitro” y “miji”). En ésta, los equipos dieron la expresión exponencial que se esperaba excepto para la hora 0, sin embargo, aunque no utilizaron la base 3 para dicha hora tampoco se puede decir que su solución es incorrecta, pues $1^0 = 1$.



¿Conoces alguna expresión que represente o simplifique las operaciones que realizaste en los incisos anteriores?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso a)?

3^1

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso b)?

3^2

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso c)?

3^3

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso d)?

3^4

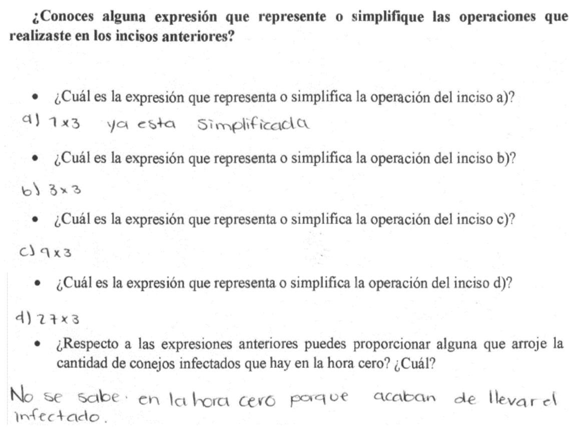
- ¿Respecto a las expresiones anteriores puedes proporcionar alguna que arroje la cantidad de conejos infectados que hay en la hora cero? ¿Cuál?

1^0

Figura 67: Respuesta 1. Solución óptima

La segunda respuesta (véase la Figura 68) fue utilizada por 3/11 equipos (“chiquis”, “conejitos” y “cristas”). Ésta muestra que en el caso del equipo “conejitos”, aunque los alumnos en la sección I contestaron con multiplicación reiterada $(3,\ 3\times 3,\ 3\times 3\times 3\ \ y\, 3\times 3\times 3\times 3)$ no pudieron llegar a la notación exponencial. Es curioso ver esto, pues las investigadoras pensaron que el hecho de que los alumnos lograran mostrar los cálculos como multiplicación reiterada, les ayudaría para que posteriormente obtuvieran la notación exponencial, sin embargo, no fue así, pues este equipo mostró la simplificación de sus cálculos como la respuesta 2 que se mostró en la sección I.

Luego, el resto de los equipos que dieron esta solución escribieron lo mismo que en la sección I, pues ellos consideraron que ya no se podía simplificar más la expresión, incluso uno de los equipos comenta lo que se ve en la Figura 68, dice que ya está simplificada.


¿Conoces alguna expresión que represente o simplifique las operaciones que realizaste en los incisos anteriores?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso a)?

a) 1×3 ya esta Simplificada

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso b)?

b) 3×3

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso c)?

c) 9×3

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso d)?

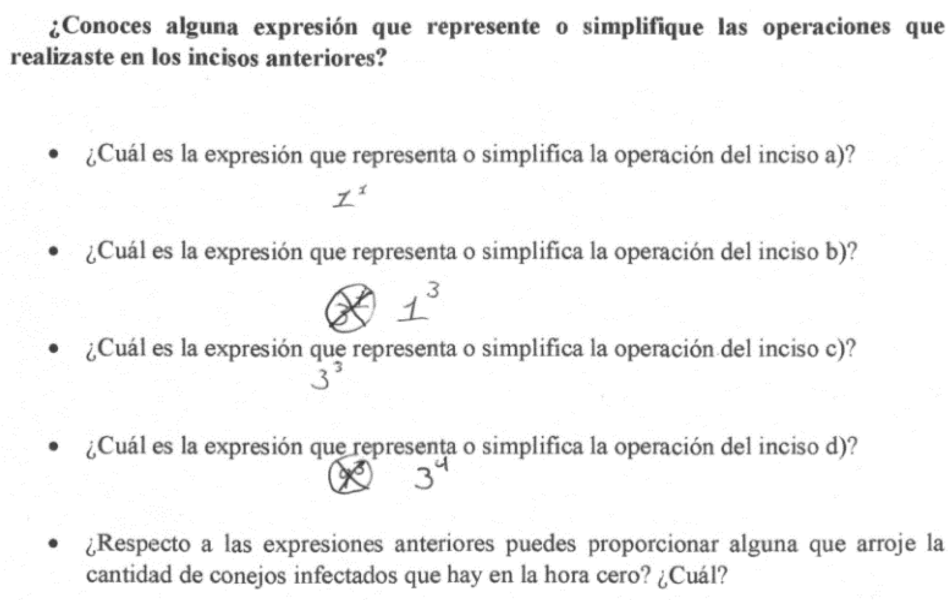
d) 27×3

- ¿Respecto a las expresiones anteriores puedes proporcionar alguna que arroje la cantidad de conejos infectados que hay en la hora cero? ¿Cuál?

No se sabe. en la hora cero porque acaban de llevar el infectado.

Figura 68: Respuesta 2. Correcta pero no exponencial

La tercera respuesta (véase la Figura 69) corresponde a los equipos: “amigos”, “no manches Frida” y “Grey”. En ésta se puede observar que para la hora 1 dan una expresión de 1^1, para la hora 2 proporcionan la expresión 1^3 se cree que esta respuesta se debe a que están pensando que se les pregunta por los conejos de la hora 0 en lugar de la 1, pues, la expresión que ponen al multiplicar la base por el exponente da como resultado 1 (conejo infectado en la hora 0), luego, para la hora 2 se cree que están pensando que se les pregunta por la hora 1, pues también si multiplicaran la base por el exponente les daría como resultado 3 (conejos infectados en la hora 1), sin embargo, las respuestas para la hora 3 y 4 son correctas.



¿Conoces alguna expresión que represente o simplifique las operaciones que realizaste en los incisos anteriores?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso a)?

  1^1

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso b)?

  X 1^3

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso c)?

  3^3

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso d)?

  X 3^4

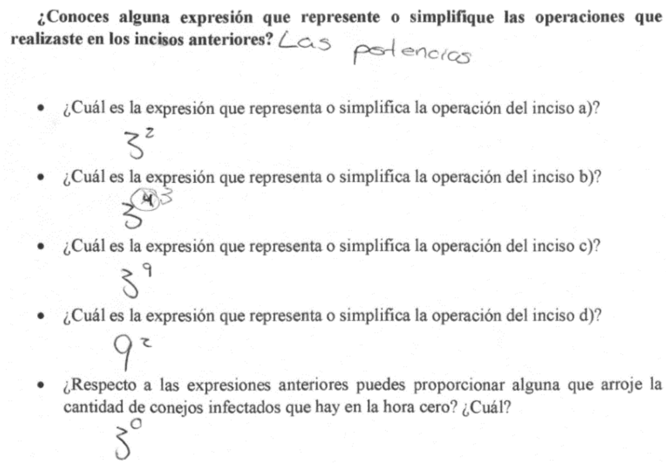
- ¿Respecto a las expresiones anteriores puedes proporcionar alguna que arroje la cantidad de conejos infectados que hay en la hora cero? ¿Cuál?

Figura 69: Respuesta 3. Correcta para la hora 3 y 4

La cuarta solución que se encontró (véase la Figura 70), la realizó el equipo “dos” y consiste en lo siguiente: La primera respuesta, aunque no es la correcta, es congruente con la respuesta del inciso a (sección I), la solución de la pregunta 2, no es congruente con la respuesta del inciso b) (sección I), sin embargo, se cree que concuerda con la de la tarea 1, pues en ella, este equipo determinó que en la hora 2 había 9 conejos infectados con el virus, de acuerdo a la notación de simplificación que dieron para la hora 2 en esta tarea, se observa que están cometiendo el error de multiplicar la base por el exponente (Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007)), pues si se hace esto, se obtiene como resultado 9.

Luego, hacen algo similar para dar respuesta a la pregunta 3, es decir, cometen nuevamente el error de multiplicar la base por el exponente, esto se puede notar porque si se hace esto, su respuesta es congruente con el inciso c y la pregunta 4 de la tarea 1. Luego, se observa que en la pregunta 4 responden con una expresión correcta, aunque no es la óptima, es decir, en este caso ya no cometen el error de multiplicar la base por el exponente, en este momento utilizan la notación exponencial de manera correcta.

Finalmente, para la última pregunta los alumnos proporcionan la respuesta óptima y es el único equipo que lo logró, pues aún en la respuesta 1 que es considerada la óptima, los alumnos no lograron dar esta respuesta para la última pregunta. Por otra parte, los resultados de este equipo llaman la atención porque no en todas sus respuestas utilizan el mismo razonamiento, en algunas utilizan las potencias como multiplicación de la base por el exponente y en otras las utilizan de manera adecuada, esto tal vez se deba a una confusión y tienen dudas acerca de cuál es el desarrollo correcto de la notación exponencial, por ello, en algunas ocasiones lo utilizan como la multiplicación de la base por el exponente y en otras como multiplicación reiterada.



¿Conoces alguna expresión que represente o simplifique las operaciones que realizaste en los incisos anteriores? Las potencias

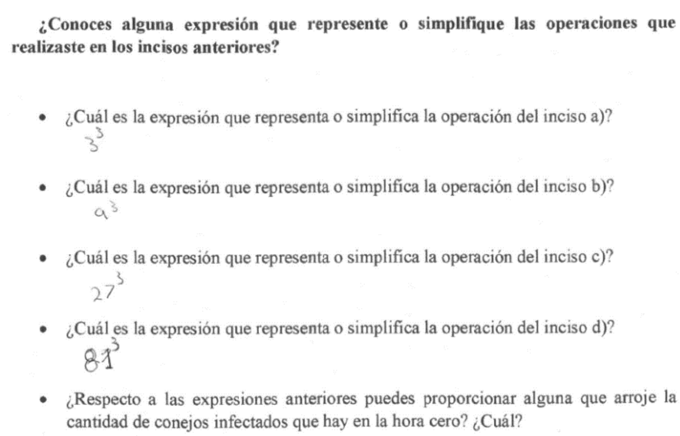
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso a)?
  3^2
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso b)?
  $3^{4\,3}$
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso c)?
  3^9
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso d)?
  9^2
- ¿Respecto a las expresiones anteriores puedes proporcionar alguna que arroje la cantidad de conejos infectados que hay en la hora cero? ¿Cuál?
  3^0

Figura 70: Respuesta 4. Óptima para la última

pregunta y correcta para la penúltima

Finalmente, la quinta respuesta fue proporcionada por el equipo "arremangados", ésta es incorrecta, sin embargo, puede notarse que tenían la idea de que la expresión que simplificaría las operaciones de los incisos anteriores eran las potencias.

Además, se puede identificar en la Figura 71 que utilizan la cantidad de conejos que obtuvieron en la tarea 1, sin embargo, cada una de esas cantidades la elevaron al exponente 3, se cree que esto se debe a que ellos encontraron un patrón con el 3 pero no supieron cómo utilizar este conocimiento en notación exponencial.



¿Conoces alguna expresión que represente o simplifique las operaciones que realizaste en los incisos anteriores?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso a)?
  3^3
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso b)?
  9^3
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso c)?
  27^3
- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso d)?
  81^3
- ¿Respecto a las expresiones anteriores puedes proporcionar alguna que arroje la cantidad de conejos infectados que hay en la hora cero? ¿Cuál?

Figura 71: Respuesta 5. Incorrecta

5.1.5 Situación de Validación. Parte II

Una vez que la profesora-investigadora percibió que la mayoría de los equipos habían concluido la parte II de esta actividad, inició otro momento de validación para ésta, es importante que se hiciera nuevamente una validación, debido a que este apartado es de los más importantes de la actividad, pues, en ella se pretende que los alumnos lleguen a la multiplicación reiterada y, posteriormente a la notación exponencial.

Las preguntas que se validaron fueron las siguientes: c) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 3? Modifícale lo que consideres necesario y ¿Podrías dar una expresión que simplifique la operación del inciso c)?

Luego, se decidió que se validaran estas preguntas, debido a que es donde puede notarse claramente si lograron obtener la multiplicación reiterada (véase la Figura 63) o no, pues, la pregunta referente a la hora 2 (inciso b)) seguro arrojaría respuestas como: $1 \times 3 \times 3$ (valor óptimo) ó 3×3 (aún tomando el resultado y no la operación del inciso anterior). Por otra parte, se decidió tomar la pregunta ¿Podrías dar una expresión que simplifique la operación del inciso c)? porque está relacionada con la pregunta de validación anterior.

Los equipos que fueron pasados al pizarrón para hacer la validación son: “amigos” y “conejitos”. Se escogieron éstos debido a que el primero de los mencionados anteriormente, tenía la respuesta óptima para la segunda pregunta de validación y se pasó al segundo nuevamente, porque es el único equipo que logró obtener la multiplicación reiterada, es decir, dio la respuesta óptima para la primera pregunta de validación. Entonces, ambas respuestas se complementan tal y como se puede observar en la Figura 72.

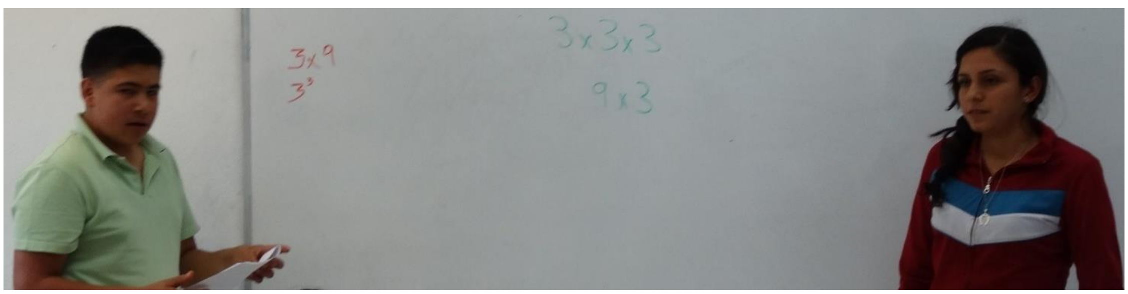


Figura 72: Validación parte II, "amigos" y "conejitos"

A continuación, se muestran los registros que evidencian cómo se intentó dar la validación en esta parte:

52	PI:	Quiero que me digan por favor (dirigiéndose a A1Amigos y A2Conejitos) qué resultados obtuvieron para el inciso c) y para la pregunta ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso c)? Escriban en el pizarrón sus respuestas.
53	A1Amigos y A2Conejitos:	//Escriben sus respuestas en el pizarrón de manera simultánea//.
54	PI:	Expliquen cómo hicieron eso ustedes (dirigiéndose a A1Amigos)
55	A1Amigos:	Lo hicimos multiplicando, llegamos a que eran nueve en la hora 2, ya nada más multiplicamos nueve por tres y nos daba lo de la hora 3 y pos así me dio (señala la expresión 3^3).
56	PI:	Te dio tres al cubo, ok. ¿Y a ustedes (preguntando a A2Conejitos)?
57	A2Conejitos:	Multiplicamos tres por tres, nueve, nueve por tres, veintisiete. Entonces, para simplificar escribimos nueve por tres y ya salió.
58	PI:	Ok. ¿Entonces, ustedes están de acuerdo con eso que dice su compañero? (señala la respuesta de A1Amigos)

59	Todos:	Sí
60	PI:	¿Será la simplificación tres al cubo?
61	Todos:	Sí.
62	PI:	Ok, gracias. Pasen a sentarse.

Se pudo observar que esta "validación" en realidad no ayudó mucho, pues, ninguno de los equipos (sentados y los que pasaron al pizarrón) modificó sus respuestas para las preguntas que se validaron, esto se cree que se debe a que ninguno de los equipos que pasaron al pizarrón resultó muy convincente. Además, también se considera que hizo falta que la profesora-investigadora hiciera más preguntas para que todos los equipos lograran ver que el equipo "conejitos" tenía la respuesta óptima para el inciso c) y el equipo "amigos" la tenía para la otra pregunta.

5.1.6 Situación de formulación. Tarea 4

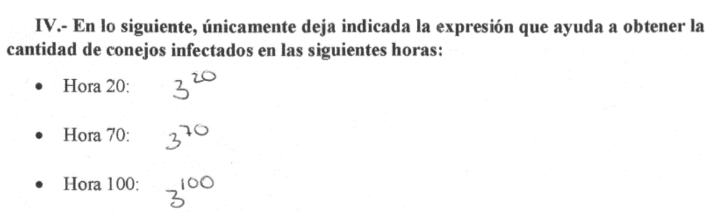
En esta tarea se pidió lo siguiente:

IV.- En lo siguiente, únicamente deja indicada la expresión que ayuda a obtener la cantidad de conejos infectados en las siguientes horas:

- Hora 20:
- Hora 70:
- Hora 100:

Para esta tarea se encontraron cuatro respuestas diferentes, éstas se muestran a continuación:

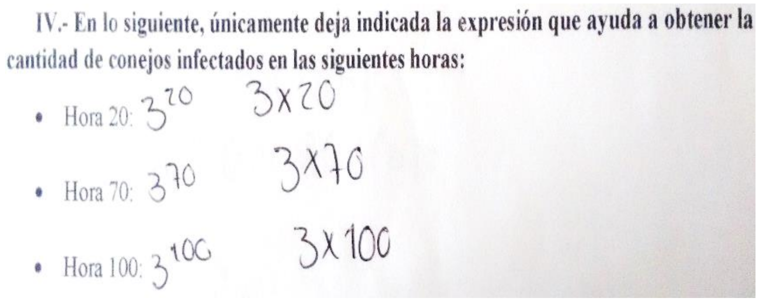
La primera respuesta, que es la óptima y además es la que proporcionó la mayoría de los equipos (7/11), se muestra en la Figura 73. En ella se puede notar que los equipos "Grey", "bombones", "zitro", "cristas", "dos", "arremangados" y "amigos" lograron obtener la expresión que representa la cantidad de conejos infectados en la hora solicitada.


IV.- En lo siguiente, únicamente deja indicada la expresión que ayuda a obtener la cantidad de conejos infectados en las siguientes horas:

- Hora 20: 3^{20}
- Hora 70: 3^{70}
- Hora 100: 3^{100}

Figura 73: Respuesta 1. Óptima

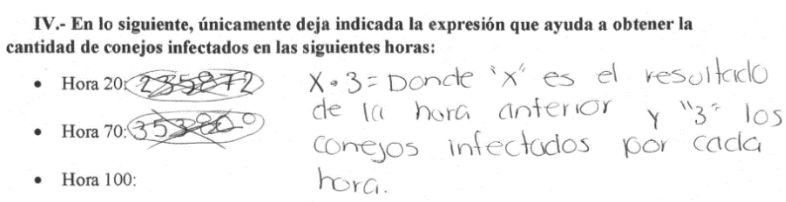
La segunda respuesta (véase la Figura 74) fue proporcionada por el equipo "no manches Frida", en esta se puede notar que aunque dan la notación exponencial correcta, siguen cometiendo el error reportado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), en el que enuncian que los alumnos piensan que esta expresión indica multiplicar la base por el exponente.


IV.- En lo siguiente, únicamente deja indicada la expresión que ayuda a obtener la cantidad de conejos infectados en las siguientes horas:

- Hora 20: 3^{20} 3x20
- Hora 70: 3^{70} 3x70
- Hora 100: 3^{100} 3x100

Figura 74: Respuesta 2. Error: Multiplica base por exponente

La tercera respuesta, fue proporcionada por 2/11 equipos (“chiquis” y “miji”), en la Figura 75 se puede observar que aunque no llegaron a la notación exponencial, su razonamiento lo es, pues, escribieron que la expresión es $x * 3$, donde x es el resultado de la hora anterior, sin embargo, aunque esto es cierto, no logaron identificar que hay una expresión concreta que arroja la cantidad de conejos infectados para cada una de las horas solicitadas.


IV.- En lo siguiente, únicamente deja indicada la expresión que ayuda a obtener la cantidad de conejos infectados en las siguientes horas:

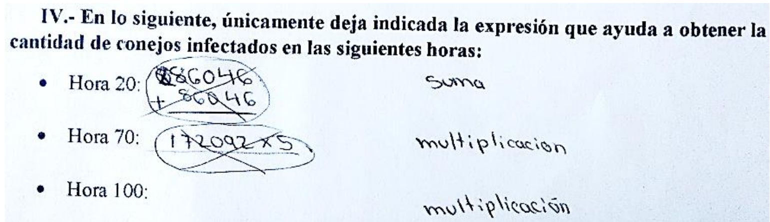
- Hora 20: ~~235872~~
- Hora 70: ~~353800~~
- Hora 100:

X * 3 = Donde ‘x’ es el resultado de la hora anterior y “3” los conejos infectados por cada hora.

Figura 75: Respuesta 3. Razonamiento exponencial correcto, expresión no exponencial

Por último para esta tarea, se tiene la cuarta respuesta, ésta la dio el equipo “conejitos”, en la Figura 76 se muestra que intentaron hacer operaciones para obtener el número de conejos infectados para esas horas, sin embargo, la profesora-investigadora se acercó a ellos y les comentó lo siguiente:

63	PI:	En lo siguiente, únicamente deja indicada la expresión que ayuda a obtener la cantidad de conejos infectados en las siguientes horas (dio lectura a la instrucción). Entonces, dice: Deja indicada la expresión, no dice que obtengan la cantidad de conejos que hay en esas horas ¿verdad?
64	A2Conejitos:	¡Ah!, o sea, podemos poner por ejemplo: Suma, multiplicación.
65	PI:	Pueden dejar la expresión que representa la cantidad de conejos infectados que habrá en esa hora, pero no hagan las operaciones.
66	A2Conejitos:	Entonces (cuando se fue la profesora-investigadora), es nada más escribir: suma, multiplicación, multiplicación ¿verdad? (pregunta a su compañero).
67	A1Conejitos:	Sí.



IV.- En lo siguiente, únicamente deja indicada la expresión que ayuda a obtener la cantidad de conejos infectados en las siguientes horas:

- Hora 20: ~~86046 + 86046~~ suma
- Hora 70: ~~172092 x 5~~ multiplicacion
- Hora 100: multiplicación

Figura 76: Respuesta 4. Muy general

Se puede notar en los registros que la intervención de la profesora-investigadora ayudó únicamente para que los alumnos dejaran de hacer tanta operación con la finalidad de encontrar la cantidad de conejos que habría en las horas solicitadas, sin embargo, no se logró que dieran una expresión adecuada, pues, su respuesta quedó muy general al sólo decir suma, multiplicación y multiplicación (véase la Figura 76), ya que, aunque es cierto que se tiene que multiplicar (hora 70 y hora 100) para encontrar la cantidad de conejos infectados en las horas solicitadas, no especifican qué se debe de multiplicar.

Por otra parte, se considera que en la hora 20 comentaron que se tenía que sumar porque ellos intentaron encontrar la cantidad de conejos infectados que habría en la hora 10 (véase la Figura 77), sin embargo, se equivocaron en las operaciones porque cuando tomaron el resultado de la hora 8, escribieron 9561 en lugar de 6561, posteriormente, sumaron la cantidad de conejos que obtuvieron para la hora 10 con ella misma, esto, para obtener el resultado de la hora 20.

Por otra parte, se supone que los alumnos no pudieron encontrar una expresión para estas horas, debido a que en la Tarea 2 no lograron llegar a la expresión exponencial, sin embargo, aunque los equipos “chiquis” y “miji” tampoco lograron obtener la notación exponencial para la tarea 2, lograron proporcionar una expresión correcta para la tarea 4, pues, aunque no lo hicieron con notación exponencial, su razonamiento es muy bueno (véase la Figura 75). Por lo anterior, se considera que el equipo “conejitos” pudo haber dado una mejor respuesta, pero la intervención de la profesora-investigadora no fue tan buena como la primera que hizo con este mismo equipo (ver los registros 30-51).

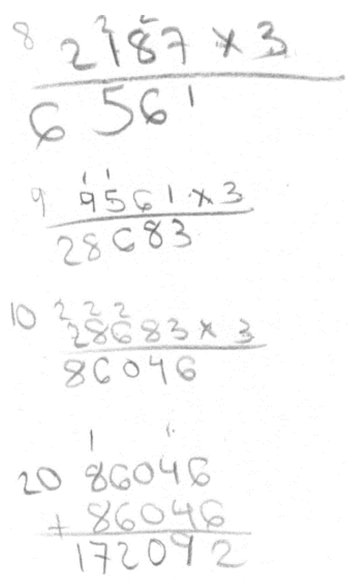


Figura 77: Operaciones para obtener la cantidad

de conejos infectados en la hora 20

5.1.7 Situación de validación. Parte IV

Una vez que la profesora-investigadora se percató de que la mayoría de los equipos habían concluido esta tarea, decidió iniciar otro momento de validación, en éste se validó lo siguiente: Deja indicada la expresión que ayuda a obtener la cantidad de conejos infectados en la hora 70.

Se decidió validar en este momento, debido a que, ya no es tan fácil para los estudiantes realizar cálculos para obtener la cantidad de conejos infectados para la hora 70, entonces, esto los obliga a buscar una expresión y es en este instante cuando se hace necesario el contenido matemático de exponentes.

Luego, se eligió a dos equipos para que pasaran al pizarrón a escribir su respuesta, éstos fueron: “Grey” y “chiquis”, se escogió a estos equipos debido a que el primero tenía la respuesta óptima (véase la Figura 78), el segundo, aunque su respuesta no fue la óptima es muy interesante (véase la Figura 79), pues, su razonamiento es exponencial aunque no lo escriben de esa manera, enseguida, se muestran los registros de cómo se llevó a cabo la validación grupal.

68	A1Grey:	Yo digo que como en el tablero que nos prestaron, ¡eh! en la hora cero comenzó con un conejito, entonces éste, y en la hora uno pues van tres conejitos, así que en la hora uno la expresión es uno a la tres, y así pues sucesivamente, yo pienso que por lógica, es tres a la setenta.

69	PI:	Osea que si por ejemplo desarrolláramos eso, tres a la setenta, ¿qué operación obtendríamos ahí?
70	A1Grey:	Es que eso no nos pedía.
71	PI:	Sí, pero si yo les dijera hagan la operación para calcular la cantidad de conejos ¿qué tendrían qué hacer ahí?
72	A1:	Tres por setenta (comentó otro alumno)
73	A1Grey:	Pues así tres por tres (escribe en el pizarrón 3×3), setenta veces así.
74	PI:	¡Ah! ok muy bien, gracias. A ver ahora tú (señalando a A1Chiquis), nos puedes decir tu procedimiento.
75	A1Chiquis:	Sí, se sabe que el número de horas es "*x*", entonces la hora se va multiplicando por tres sucesivamente, por ejemplo, en la primera hora se sabe que es uno por tres.
76	PI:	A ver, fíjense lo que dice su compañero (dirigiéndose al grupo), "*x*" es el número de horas, entonces dice que la hora uno, se va a multiplicar por tres (escribe en el pizarrón 1×3) y que ahí vamos a obtener tres conejos. ¿Eso es cierto?
77	A1Chiquis y A2:	Sí.
78	PI:	Luego dice, en la hora dos hay que multiplicar por tres (escribe en el pizarrón 2×3) y vamos a obtener, ¿cuántos conejos?
79	A1Chiquis:	Nueve.
80	A3:	Seis (porque la multiplicación es 2×3).
81	PI:	¿Nueve? (dirigiéndose a A2Chiquis).
82	A1Chiquis:	Sí porque si son tres.
83	A1Grey:	Pero tres por dos es seis.
84	A2Chiquis:	Pero o sea es el resultado que sale de la segunda hora, no como de la hora.
85	PI:	Pero aquí dice: donde "*x*" es igual al número de horas (señala el pizarrón donde escribió eso A1Chiquis).
86	A1Chiquis:	Ajá, y luego lo que da el resultado, pero si en la primera hora salió tres, pues el número que sale por tres (para obtener el resultado de la segunda hora).
87	A1Cristas:	¡Ah! no pero si es cierto esto está mal, porque "*x*" lo representamos por el número de horas que es dos.
88	A2Chiquis:	Más bien sería representar "*x*" como el resultado del anterior.
89	A4:	Ajá.
90	A1Chiquis:	¡Oh!, ok.
91	A5:	Sí es cierto.

Figura 78: Expresión exponencial (óptima)

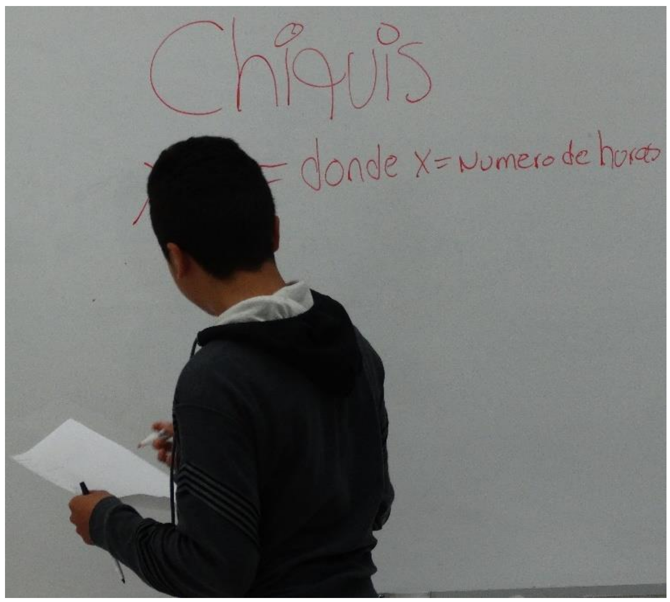


Figura 79: Razonamiento exponencial, expresión no exponencial

De la transcripción anterior, se puede notar que el equipo "chiquis" dio una expresión no exponencial, sin embargo, su razonamiento es exponencial, pues saben que hay que multiplicar el resultado de la hora anterior por tres, sin embargo, primero, en su expresión dijeron que "*x*" representa el número de horas y que eso había que multiplicarlo por tres, pero con la intervención de la profesora-investigadora y la de sus compañeros, se dieron cuenta que había que modificar lo que representa la "*x*", por: El resultado de la hora anterior, en lugar de tener que era el número de horas, pues ellos querían decir eso desde un principio, su razonamiento lo dejó muy claro.

Esta validación ayudó a que el equipo "chiquis" modificara su respuesta, sin embargo, el equipo "Grey" no logró convencerlos de que su respuesta es correcta, pues se quedaron con la suya, sólo modificaron lo que representa la "*x*", además, se detectó que el equipo "chiquis" convenció al equipo "miji" para que escribieran su respuesta, pues, en las hojas de trabajo tienen la misma respuesta ambos equipos, esto se considera que no es simple casualidad.

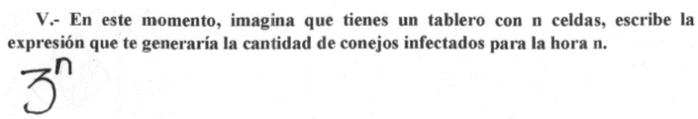
5.1.8 Situación de formulación. Tarea 5

Esta tarea solicita lo siguiente:

V.- En este momento, imagina que tienes un tablero con n celdas, escribe la expresión que te generaría la cantidad de conejos infectados para la hora n.

En esta tarea, se encontraron cinco respuestas diferentes, éstas, se muestran a continuación:

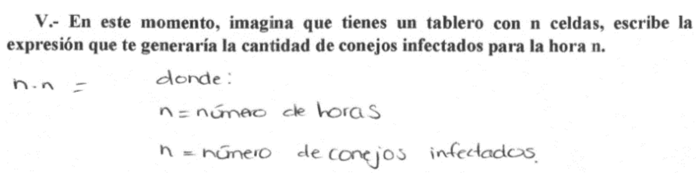
La primera respuesta, que es la óptima, la dieron 4/11 equipos ("bombones", "no manches Frida", "Grey" y "amigos"), ésta se muestra en la Figura 80.


V.- En este momento, imagina que tienes un tablero con n celdas, escribe la expresión que te generaría la cantidad de conejos infectados para la hora n.

3^n

Figura 80: Respuesta 1. Óptima

La segunda respuesta (véase la Figura 81), que es incorrecta, fue dada por el equipo "chiquis". En ella se puede observar que aunque dicen que *n* es igual al número de horas, no logran obtener la expresión 3^n.


V.- En este momento, imagina que tienes un tablero con n celdas, escribe la expresión que te generaría la cantidad de conejos infectados para la hora n.

n·n = donde:

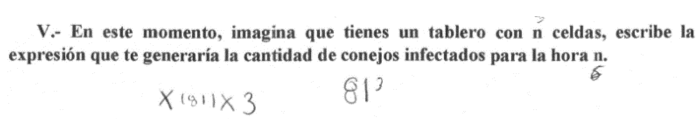
n = número de horas

n = número de conejos infectados.

Figura 81:Respuesta 2. Incorrecta

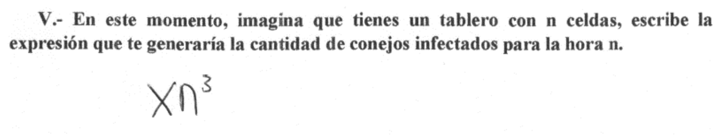
Luego, en la tercera, cuarta y quinta respuesta que fueron proporcionadas por los equipos "miji", "dos" y "cristas", se puede observar en la Figura 82, Figura 83 y Figura 84 respectivamente, que los alumnos al parecer no tenían idea de qué expresión escribir, pues, sus respuestas son muy variadas y escriben dos variables (Figura 82 y Figura 83).

Por otra parte, el equipo "cristas" es el único que identificó que la base era 3, sin embargo, no logró ver que el exponente es *n* y no 2 como ellos escribieron, esto, tal vez puede deberse a que los alumnos no relacionaron que el exponente indica el número de horas.


V.- En este momento, imagina que tienes un tablero con n celdas, escribe la expresión que te generaría la cantidad de conejos infectados para la hora n.

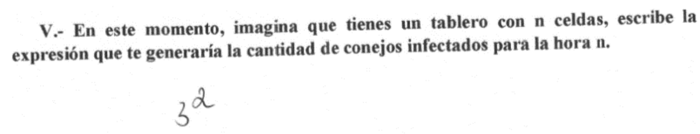
X(81)X 3 81^3

Figura 82: Respuesta 3. Incorrecta


V.- En este momento, imagina que tienes un tablero con n celdas, escribe la expresión que te generaría la cantidad de conejos infectados para la hora n.

xn^3

Figura 83: Respuesta 4. Incorrecta


V.- En este momento, imagina que tienes un tablero con n celdas, escribe la expresión que te generaría la cantidad de conejos infectados para la hora n.

3^2

Figura 84: Respuesta 5. Incorrecta

El resto de los equipos, es decir, 3/11 (“conejitos”, “arremangados” y “zitro”), no contestaron a esta tarea.

5.1.9 Situación de formulación. Tarea 6

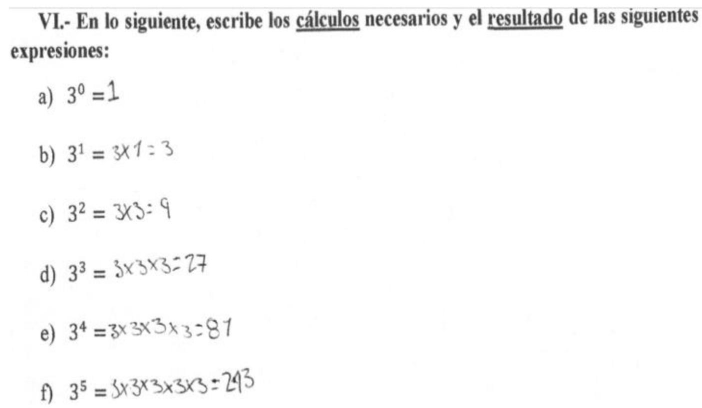
Esta tarea solicitó lo que se muestra a continuación:

VI.- En lo siguiente, escribe los <u>cálculos</u> necesarios y el <u>resultado</u> de las siguientes expresiones:

a) $3^0 =$
b) $3^1 =$
c) $3^2 =$
d) $3^3 =$
e) $3^4 =$
f) $3^5 =$

Para esta tarea, surgieron cuatro respuestas diferentes. Éstas se muestran a continuación:

La primera respuesta (véase la Figura 85), fue dada por 2/11 equipos (“zitro” y “conejitos”), ésta es considerada la solución óptima, sin embargo, el cálculo realizado para el inciso b) no lo es, pues cometen el error de multiplicar la base por el exponente (Lezama, Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007)). Entonces, no hay un cálculo para realizar para este inciso, únicamente debieron escribir el resultado como en el inciso a), sin embargo, se considera que como la instrucción pide que muestren los cálculos, ellos tratan de proporcionarlos en la mayoría de los incisos lo que provoca un error.



VI.- En lo siguiente, escribe los cálculos necesarios y el resultado de las siguientes expresiones:

a) $3^0 = 1$

b) $3^1 = 3\times 1 = 3$

c) $3^2 = 3\times 3 = 9$

d) $3^3 = 3\times 3\times 3 = 27$

e) $3^4 = 3\times 3\times 3\times 3 = 81$

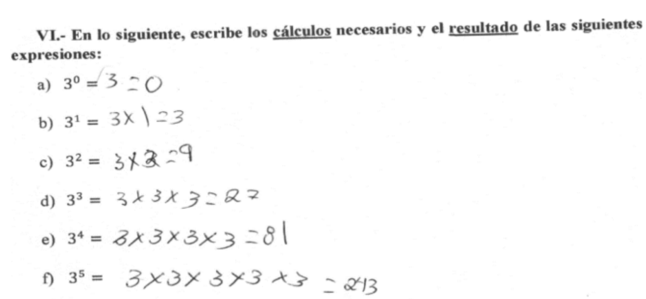
f) $3^5 = 3\times 3\times 3\times 3\times 3 = 243$

Figura 85: Respuesta 1. Solución óptima excepto el cálculo realizado en el inciso b)

Por otra parte, la segunda respuesta (Figura 87), fue proporcionada por 5/11 equipos ("chiquis", "dos", "arremangados", "miji" y "bombones"), éstos utilizaron un razonamiento como el que se muestra en la Figura 86, es decir, utilizaron la multiplicación reiterada para los incisos b)-d). Luego, para el inciso a), se cree que realizaron la operación 3×0 o bien, creen que la respuesta es cero porque éste indica que el 3 no se está multiplicando ninguna vez y queda nada (Martínez, 2007). Para el inciso b), cometen el error de realizar el producto nuevamente de la base por el exponente (Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007)).

Luego, el equipo cristas (observe la Figura 86) puso dos respuestas para 3^0, es decir, dieron la respuesta 0 y 3, esto se puede interpretar como que estaban inseguros y no sabían cuál respuesta era la correcta y por eso pusieron las dos, sin embargo, las dos respuestas son incorrectas y además, son los errores que reportan Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007).

Entonces, ambas respuestas (Figura 86 y Figura 87), son consideradas las óptimas, excepto para el inciso a). Se muestran las dos respuestas, porque en una está el desarrollo de la expresión y su respuesta (Figura 86) que era lo que se pedía en la instrucción, sin embargo, la respuesta de la Figura 87 también es correcta aunque no tenga el desarrollo, pero se considera que el razonamiento utilizado fue similar al de la Figura 86.



VI.- En lo siguiente, escribe los cálculos necesarios y el resultado de las siguientes expresiones:

a) $3^0 = 3 = 0$

b) $3^1 = 3\times 1 = 3$

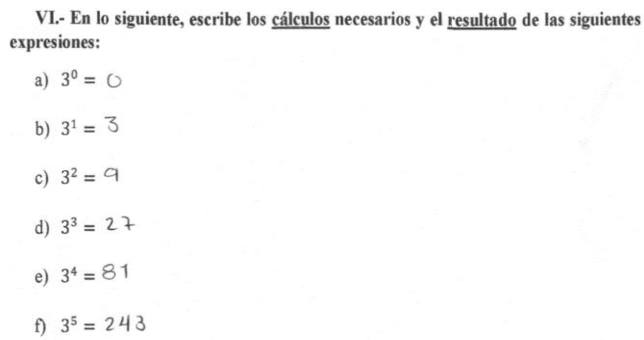
c) $3^2 = 3\times 3 = 9$

d) $3^3 = 3\times 3\times 3 = 27$

e) $3^4 = 3\times 3\times 3\times 3 = 81$

f) $3^5 = 3\times 3\times 3\times 3\times 3 = 243$

Figura 86: Respuesta 2. Solución óptima excepto para el inciso a)



VI.- En lo siguiente, escribe los __cálculos__ necesarios y el __resultado__ de las siguientes expresiones:

a) $3^0 = 0$

b) $3^1 = 3$

c) $3^2 = 9$

d) $3^3 = 27$

e) $3^4 = 81$

f) $3^5 = 243$

Figura 87: Respuesta 2. Óptima excepto para el inciso a)

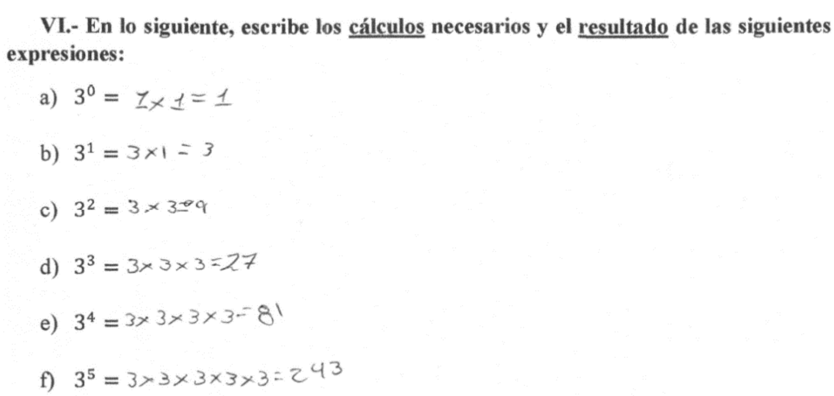
pero sin cálculos

La tercera respuesta, fue proporcionada por 2/11 equipos ("amigos" y "Grey"), es importante señalar que éstos estaban comentando sus respuestas entre ellos, es decir, en lugar de ser los equipos de 2 personas, éste se convirtió en uno de 4.

Al parecer, ellos saben que la respuesta para el inciso a) es 1, sin embargo, como la instrucción solicitó que escribieran los cálculos y la respuesta, los alumnos escribieron 1×1, para poder justificar su respuesta, y aunque esto no es correcto, tampoco puede decirse que está mal, pues no hay cálculos para esta expresión debido a que es una convención matemática (Martínez, 2007).

Por otra parte, se observa la tendencia a multiplicar la base por el exponente en el inciso b), cometiendo el error mencionado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007).

Entonces, las respuestas para estas preguntas se consideran óptimas, aunque los cálculos para el inciso a) y b) no.



VI.- En lo siguiente, escribe los __cálculos__ necesarios y el __resultado__ de las siguientes expresiones:

a) $3^0 = 1 \times 1 = 1$

b) $3^1 = 3 \times 1 = 3$

c) $3^2 = 3 \times 3 = 9$

d) $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

e) $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

f) $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

Figura 88: Respuesta 3. Solución óptima, no así para los

cálculos del inciso a) y b)

Finalmente, la cuarta respuesta se encontró en el equipo “no manches Frida”. Éste dejó expresadas las operaciones, no dio el resultado, debido a esto no se sabe si conocen el valor de las expresiones o no, pues en las tareas anteriores, aunque dieran la expresión exponencial correcta el resultado lo interpretaban como multiplicar la base por el exponente.

Además, se puede observar en la Figura 89 que para el inciso a) cometen el error de multiplicar la base por el exponente (Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007)), luego para el inciso b) multiplican 2 veces el 3, esto se cree que se debe a que no consideran que una vez la base ya es 3^1, ellas, al parecer, consideran 3×3 como una vez la multiplicación. Unos razonamientos similares utilizan para el resto de los incisos, pues siempre, colocaron un 3 más de lo que decía el exponente.

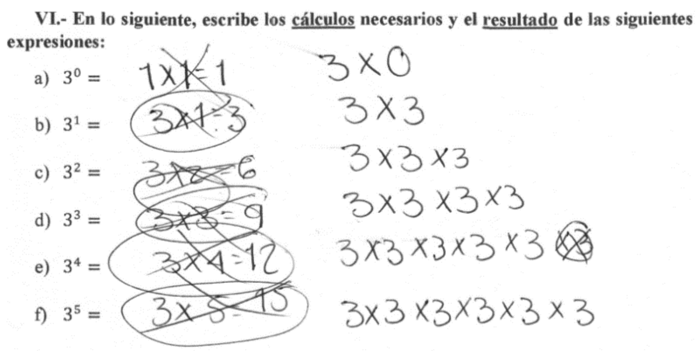


Figura 89: Respuesta 4. Incorrecta

5.1.10 Situación de formulación. Tarea 7

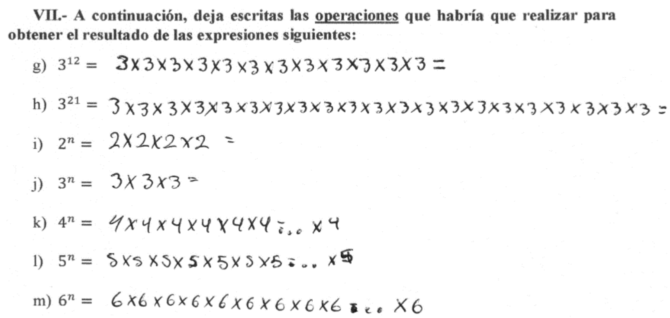
La tarea pidió lo siguiente:

VII.- A continuación, deja escritas las <u>operaciones</u> que habría que realizar para obtener el resultado de las expresiones siguientes:

a) $3^{12} =$
b) $3^{21} =$
c) $2^n =$
d) $3^n =$
e) $4^n =$
f) $5^n =$
g) $6^n =$

Para esta tarea, hubo diversas respuestas, aunque en algunos casos son similares, es importante mencionar las seis diferentes que surgieron, pues, en algunos casos, un equipo logró dar la solución óptima para algunos incisos, pero para otros no. Esta diversidad se muestra a continuación:

La primera respuesta (véase la Figura 90), fue dada por el equipo “bombones”, ésta es considerada la óptima, pues, obtuvieron la respuesta correcta para todos los incisos.



VII.- A continuación, deja escritas las <u>operaciones</u> que habría que realizar para obtener el resultado de las expresiones siguientes:

g) 3^{12} = 3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3 =

h) 3^{21} = 3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3 =

i) 2^n = 2x2x2x2 =

j) 3^n = 3x3x3 =

k) 4^n = 4x4x4x4x4x4x4 ... x4

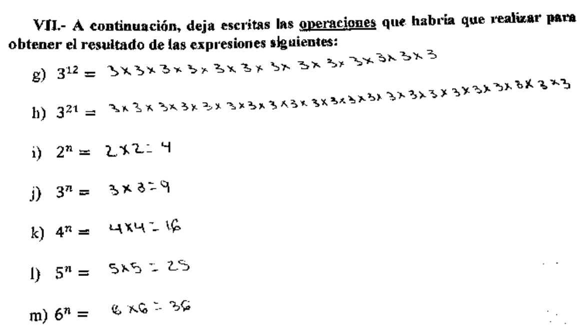
l) 5^n = 5x5x5x5x5x5x5 ... x5

m) 6^n = 6x6x6x6x6x6x6x6 ... x6

Figura 90: Respuesta 1. Solución óptima

La segunda respuesta, se obtuvo en 2/11 equipos (“conejitos” y “cristas”), el equipo “conejitos”, al parecer cuenta 12 veces el 3 aparte de la base, por ello escribe 13 veces el 3 lo cual es incorrecto (véase la Figura 91), lo mismo hace para el inciso h), pues escribe 22 veces el 3 en lugar de 21.

Por otra parte, en el caso del equipo cristas, la respuesta para los primeros dos incisos es diferente a la de los conejitos, pues ésta es la óptima (véase la Figura 90). Luego, para el resto de los incisos, ambos equipos toman el exponente *n* como un 2, pues en todos los incisos restantes escriben la multiplicación de la base por ella misma (véase la Figura 91).



VII.- A continuación, deja escritas las <u>operaciones</u> que habría que realizar para obtener el resultado de las expresiones siguientes:

g) 3^{12} = 3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3

h) 3^{21} = 3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3

i) 2^n = 2x2= 4

j) 3^n = 3x3=9

k) 4^n = 4x4= 16

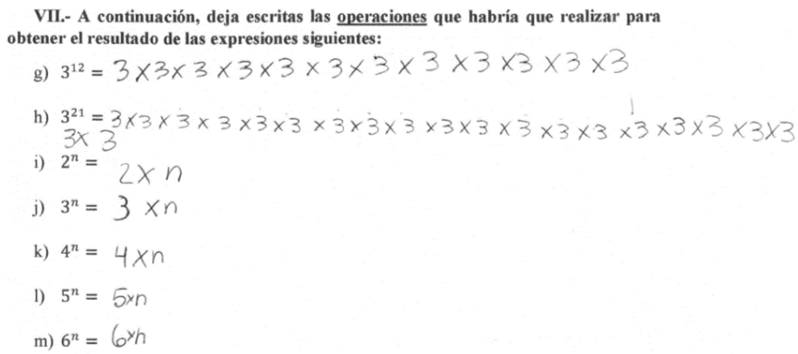
l) 5^n = 5x5 = 25

m) 6^n = 6x6 = 36

Figura 91: Respuesta 2. Solución incorrecta en todos los incisos

La tercera respuesta (véase la Figura 92), la cual fue proporcionada por 2/11 equipos (“dos” y “arremangados”). De esta respuesta se puede decir lo siguiente: Aunque las operaciones que escribieron los 2 equipos para los incisos g) y h) son óptimas, es importante señalar que el equipo de “arremangados” escribió debajo de cada operación la “simplificación de las operaciones” que en este caso serían: 3×12 y 3×21, lo cual no es correcto, pues ellos siguen pensando que para expresiones como estas hay que multiplicar la base por el exponente, error que es mencionado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007).

Por otra parte, aunque el equipo “dos” no expresó esto en esos incisos, lo expresa en los siguientes, pues los dos equipos escribieron las operaciones como la multiplicación de la base por el exponente, cometiendo nuevamente el error identificado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007).



VII.- A continuación, deja escritas las operaciones que habría que realizar para obtener el resultado de las expresiones siguientes:

g) 3^{12} = 3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3

h) 3^{21} = 3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3 3x 3

i) 2^n = 2x n

j) 3^n = 3 xn

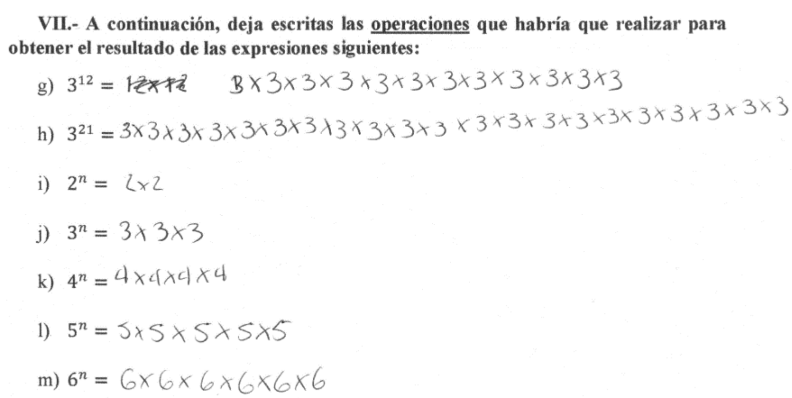
k) 4^n = 4xn

l) 5^n = 5xn

m) 6^n = 6xn

Figura 92: Respuesta 3. Error mencionado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007)

La cuarta (véase la Figura 93) fue dada por el equipo "miji", en esta se puede notar que para el caso de los incisos g) y h) las respuestas proporcionadas por el equipo son las óptimas, sin embargo, los incisos de la i)-m) son incorrectos, pues las alumnas interpretan la base como la cantidad de veces que hay que multiplicar ese número por el mismo.



VII.- A continuación, deja escritas las operaciones que habría que realizar para obtener el resultado de las expresiones siguientes:

g) 3^{12} = ~~12x12~~ 3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3

h) 3^{21} = 3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3

i) 2^n = 2x2

j) 3^n = 3x3x3

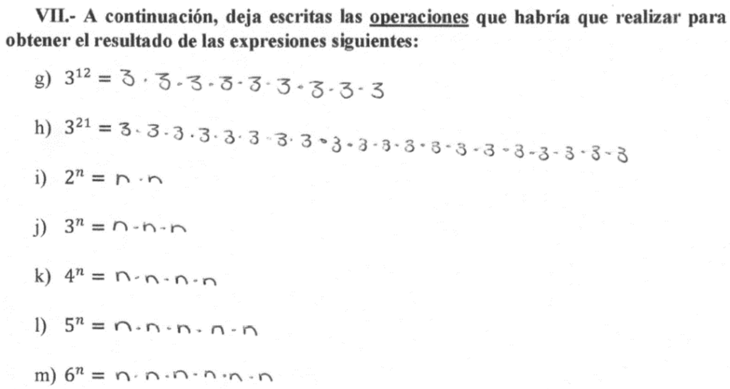
k) 4^n = 4x4x4x4

l) 5^n = 5x5x5x5x5

m) 6^n = 6x6x6x6x6x6

Figura 93: Respuesta 4. Óptima para los incisos g) y h)

La quinta respuesta (véase la Figura 94) la dio el equipo "chiquis". En este caso, no se logró identificar por qué dieron esa respuesta para los primeros dos incisos, sin embargo, para los incisos restantes se puede observar que la *n* (exponente) la toman como la base y a la *base* la toman como el exponente.



VII.- A continuación, deja escritas las <u>operaciones</u> que habría que realizar para obtener el resultado de las expresiones siguientes:

g) $3^{12} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

h) $3^{21} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

i) $2^n = n \cdot n$

j) $3^n = n \cdot n \cdot n$

k) $4^n = n \cdot n \cdot n \cdot n$

l) $5^n = n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$

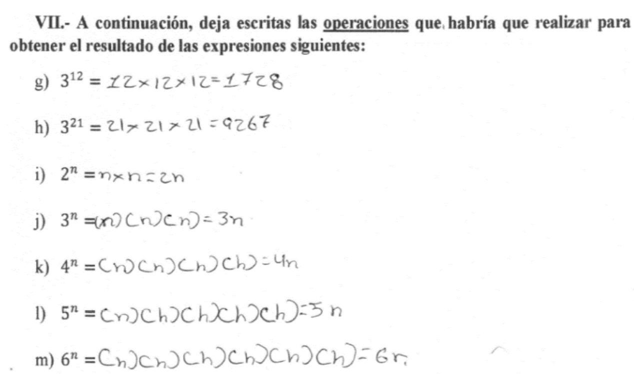
m) $6^n = n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$

Figura 94: Respuesta 5. Incorrecta, toman el exponente

como base y la base como exponente

La sexta respuesta fue dada por 3/11 equipos (“amigos”, “no manches Frida” y “Grey”). Es importante mencionar que los 3 equipos en esta tarea, ya estaban unidos en uno solo, es decir, ya era un equipo de 6 personas, pues entre todos estaban comentando la respuesta.

Luego, puede observarse en la Figura 95, que toman en todos los incisos el exponente como si fuera la base y la base como si fuera el exponente, posteriormente, hacen el desarrollo como multiplicación reiterada. Además, en los incisos i)-m) aparte de desarrollar como se comentó anteriormente, luego suman las *n* en lugar de multiplicarlas, por lo que se obtiene el resultado *3n, 4n, 5n,* este es un error que no se encontró en los antecedentes, pues, aunque el resultado aparenta que multiplicaron la base por el exponente, no es así.



VII.- A continuación, deja escritas las <u>operaciones</u> que habría que realizar para obtener el resultado de las expresiones siguientes:

g) $3^{12} = 12 \times 12 \times 12 = 1728$

h) $3^{21} = 21 \times 21 \times 21 = 9267$

i) $2^n = n \times n = 2n$

j) $3^n = (n)(n)(n) = 3n$

k) $4^n = (n)(n)(n)(n) = 4n$

l) $5^n = (n)(n)(n)(n)(n) = 5n$

m) $6^n = (n)(n)(n)(n)(n)(n) = 6n$

Figura 95: Respuesta 5. Incorrecta, toma la base

como exponente y viceversa

Finalmente, el equipo zitro no contestó esta tarea, únicamente dio respuesta para el inciso a) y lo hizo con la respuesta óptima (véase la Figura 90).

5.1.11 Situación de formulación. Tarea 8

VIII.- Finalmente, indica el resultado para las expresiones siguientes:

a) $2^5 =$
b) $4^2 =$
c) $4^4 =$
d) $5^1 =$
e) $5^3 =$
f) $6^0 =$
g) $6^3 =$

Para esta tarea, surgieron tres respuestas diferentes, aunque éstas fueron las que se seleccionaron, en realidad surgieron más, esto podrá notarse en la descripción que se encuentra antes de cada figura, pues, se comenta la variedad de respuestas otorgadas por cada equipo, es decir, algunos cometieron errores en unos incisos y otros en otros. Las respuestas se muestran a continuación:

La primera respuesta, que es la óptima, fue dada por 6/11 equipos ("chiquis", "cristas", "dos", "bombones", "miji" y "arremangados"). En la Figura 96, se puede notar que los resultados obtenidos por el equipo "chiquis" son los óptimos excepto para el inciso s), ya que siguen cometiendo el error de pensar que el resultado es 0 (error detectado por Lezama(1999), Abrate, et al (2006) y Martínez (2007)).

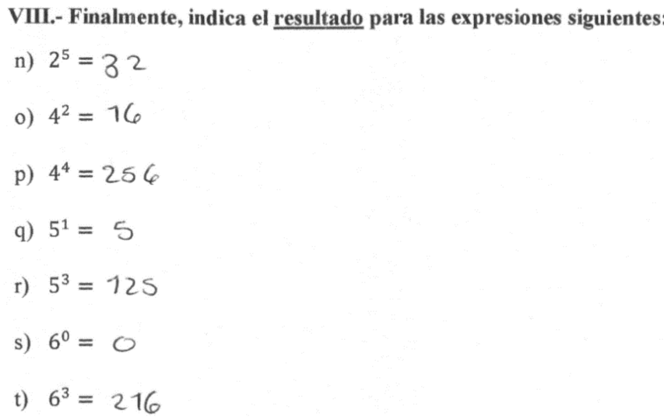
Luego, el equipo "cristas" obtuvo resultados óptimos también para todos los incisos excepto para el p) y s), pues en el p) obtuvieron como resultado 128, al parecer hicieron la multiplicación $4 \times 4 \times 4 = 64$ y luego multiplicaron ese resultado por 2. Para el inciso s) obtuvieron como resultado 0, cometiendo nuevamente el error detectado por Lezama (1999), Abrate, et al (2006) y Martínez (2007). Por lo cual esos resultados son incorrectos.

Posteriormente, el equipo "dos" también obtuvo resultados óptimos para todos los incisos excepto para el p) y s), para el p) dieron como resultado 64, éste se cree que fue obtenido al multiplicar $4 \times 4 \times 4 = 64$. Para el inciso s) de la misma manera que los otros equipos obtuvieron 0 como resultado.

De manera subsiguiente, el equipo "bombones", también obtuvo resultados óptimos para todos los incisos excepto para el q) y s), pues dieron como resultado 25 y 0 respectivamente, el 25 se piensa que lo obtuvieron multiplicando 5×5, pues consideran que esta multiplicación indica apenas una vez en lugar de dos.

Por otra parte, el equipo "miji" también dio resultados óptimos a todos los incisos excepto para el o) y s), pues sus resultados fueron 8 y 0 respectivamente, el 8 seguramente lo obtuvieron al multiplicar la base por el exponente (4×2), cometiendo nuevamente el error identificado en los antecedentes de los trabajos de Lezama(1999), Abrate, et al (2006) y Martínez (2007).

Finalmente, el equipo de los arremangados también obtuvo las respuestas óptimas excepto para los incisos p) y s), pues dieron como respuesta 64 y 6 respectivamente, para el 64 se considera que multiplicaron 3 veces el 4 en lugar de 4 y para el s) cometieron otro de los errores reportados en los antecedentes, pues los alumnos tienen la idea de que no se multiplica ninguna vez y queda la base (Lezama (1999), Abrate, et al (2006) y Martínez (2007)).



VIII.- Finalmente, indica el resultado para las expresiones siguientes:

n) $2^5 =$ 32

o) $4^2 =$ 16

p) $4^4 =$ 256

q) $5^1 =$ 5

r) $5^3 =$ 125

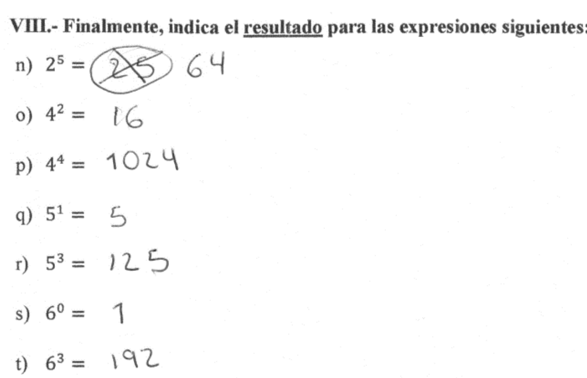
s) $6^0 =$ 0

t) $6^3 =$ 216

Figura 96: Respuesta 1. Solución óptima excepto para el inciso s)

También, se obtuvo la segunda respuesta que fue proporcionada por los equipos “Grey” y “amigos”, ésta se muestra en la Figura 97. La estrategia que utilizaron en los incisos n) y p) fue multiplicar la base una vez más de lo que dice el exponente, esto se cree que se debe a que piensan que 2×2 es apenas una vez en lugar de dos. Por ello, esta estrategia no es correcta.

Sin embargo, la estrategia utilizada en los incisos o), q), r), s) y t) es la óptima, aunque para este último inciso la respuesta no es correcta, la estrategia sí. Puede notarse en la Figura 98 que el equipo Grey se equivocó al realizar la multiplicación.



VIII.- Finalmente, indica el resultado para las expresiones siguientes:

n) $2^5 =$ ~~25~~ 64

o) $4^2 =$ 16

p) $4^4 =$ 1024

q) $5^1 =$ 5

r) $5^3 =$ 125

s) $6^0 =$ 1

t) $6^3 =$ 192

Figura 97: Respuesta 2. Solución óptima para incisos

o), q), r) y s) y para n), p), y t) la solución es incorrecta

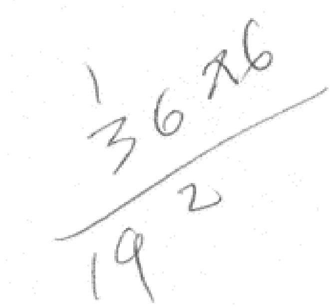


Figura 98: Multiplicación realizada por el equipo Grey para obtener el resultado del inciso t)

Otra respuesta que se encontró para esta tarea, es la que proporcionó el equipo "no manches Frida", esta es la tercera respuesta (véase la Figura 99) y se observó lo siguiente: Este equipo al parecer, se equivocó en el inciso n) al hacer la multiplicación, pues sí tiene indicada la multiplicación de 5 veces el 2 tal y como se muestra en la Figura 100.

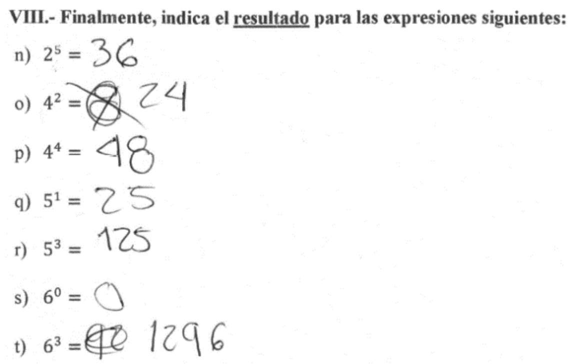
Para el inciso o) y p) no se identifica qué es lo que hicieron para dar esa respuesta, pues, para el inciso o) primero habían dado como respuesta 8, lo que indica que multiplicaron la base por el exponente, cometiendo el error mencionado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), sin embargo, posteriormente escribieron 24 y se desconoce cómo obtuvieron dicho resultado.

Por otra parte, para el inciso q), se considera que multiplicaron 5×5, lo cual es incorrecto, esto lo hacen debido a que consideran que tal multiplicación representa el 1 que indica el exponente.

Para el inciso r) aunque la respuesta es la correcta, la estrategia utilizada no lo es, pues, multiplican 5×5 y el resultado lo multiplican no por 5, sino por el resultado que les arroja esta multiplicación, entonces hacen, 25×25 (véase la Figura 101), sin embargo, al realizar la multiplicación únicamente multiplican el 5×25 y olvidan multiplicar el 2×25, por eso, les da el resultado correcto.

En el inciso s), es probable que multiplicaran la base por el exponente, pues en la tarea 6 (véase la Figura 89) es lo que hicieron. De manera similar, en el inciso t), utilizan la misma estrategia que para el inciso r), pues multiplican 6×6 y como eso es igual a 36, luego, hacen la multiplicación de 36×36 tal y como se muestra en la Figura 102.

Por lo tanto, este equipo utilizó diversas estrategias para dar respuesta a los incisos, sin embargo, todas sus estrategias son incorrectas.



VIII.- Finalmente, indica el <u>resultado</u> para las expresiones siguientes:

n) 2^5 = 36

o) 4^2 = ~~8~~ 24

p) 4^4 = 48

q) 5^1 = 25

r) 5^3 = 125

s) 6^0 = 0

t) 6^3 = ~~42~~ 1296

Figura 99: Respuesta 3. Incorrecta

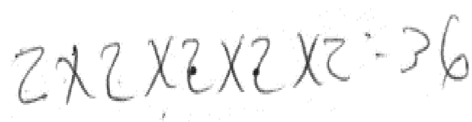


Figura 100: Multiplicación reiterada.

Resultado incorrecto

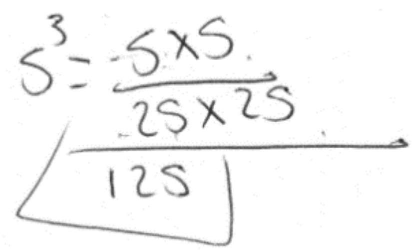


Figura 101:Respuesta para el inciso r)

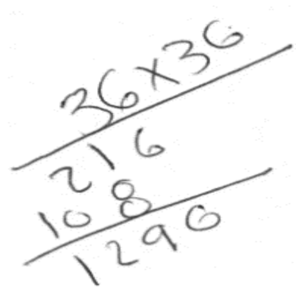


Figura 102: Respuesta para el inciso t)

Finalmente, para esta tarea, resta comentar que el equipo “conejitos”, únicamente contestó los primeros dos incisos y lo hicieron de manera adecuada, es decir, proporcionaron la solución óptima que se muestra en la Figura 96. El equipo zitro, no contestó ninguno de los incisos.

5.1.12 Situación de institucionalización

En este momento, es importante recordar lo que es la situación de institucionalización, ésta, según Brousseau (s.f., citado en Santaló, et al., 1984) tiene la finalidad de dar a conocer convenciones sociales, es decir, se pretende que los alumnos conozcan formalmente el contenido que estuvieron trabajando en las situaciones de acción, formulación y validación. Esta situación está a cargo del profesor, mientras que las otras están a cargo de los alumnos.

Después que todos los alumnos lograron concluir con la actividad 1, la profesora comenzó la situación de institucionalización, en ésta, se dio a conocer la propiedad del exponente natural y del exponente cero, primero, la profesora-investigadora comenzó con un recuento de lo más importante de la actividad, en éste solicitó a los alumnos que le ayudaran a llenar la tabla (véase la Figura 103). A continuación, se muestran los registros que resultaron de esta situación.

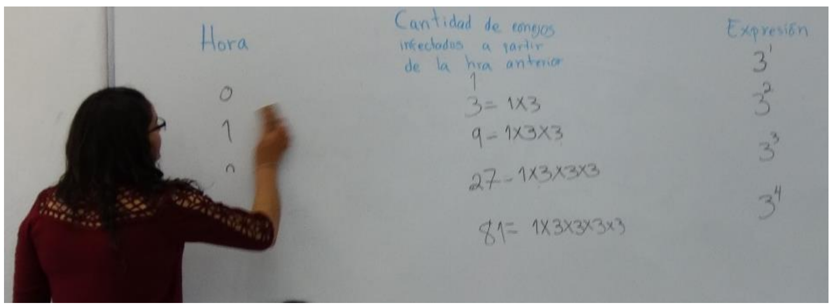


Figura 103: Aspectos relevantes de la actividad 1

92	PI:	A ver, ya (llamando la atención al grupo), ya vamos a terminar, nada más quiero que me ayuden a llenar esta tabla. Donde dice la hora, se refiere a la hora que indicaba en los tableros, que es la hora cero, uno, dos, tres y cuatro. Aquí tenemos las horas (señalando la tabla) y acá (señalando la tabla) la columna que indica la cantidad de conejos infectados a partir de la hora anterior (sin llenar), nada más quiero que me digan pues en qué quedamos, así como un acuerdo en el grupo. ¿Cuántos conejos había en la hora cero?
93	Todos:	Uno.
94	PI:	Muy bien.
95	PI:	¿Cuántos conejos infectados había en la hora uno?
96	Todos:	Tres.
97	PI:	¿Y en la hora dos?
98	Todos:	Nueve.
99	PI:	¿En la hora tres?
100	Todos:	Veintisiete.
101	PI:	¿Y en la hora cuatro?
102	Todos:	Ochenta y uno.
103	PI:	¿Y cuál es la expresión? Bueno, antes, esto lo podríamos escribir (señalando en el pizarrón la cantidad de conejos infectados cada hora), se ¿acuerdan? como uno por tres (eso lo escribe enseguida del 3), ¿verdad?
104	Todos:	Sí.

105	PI:	¿Y éste (refiriéndose al 9)? Bueno, la instrucción que les di en el cuadernillo, se refería a que tomaran el anterior (1×3) y lo modificaran y quedaría así $1 \times 3 \times 3$ ¿verdad?
106	Todos:	Sí.
107	PI:	Y luego, tomando el anterior, sería $(1 \times 3 \times 3 \times 3)$, para el 27. Ahora, para el ochenta y uno ¿cómo nos quedaría?
108	A1:	Uno por tres (la profesora-investigadora escribe esto en el pizarrón), por veintisiete (sigue con la idea de multiplicar por el resultado de la hora anterior).
109	A1Cristas:	Tres por veintisiete (sigue con la idea de multiplicar el 3 por el resultado de la hora anterior).
110	PI:	Termina de escribir $(1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$. ¿De acuerdo?
111	PI:	O sea, estábamos tomando el anterior y luego lo modificamos. ¿De acuerdo?
112	Todos:	Sí.
113	PI:	Ahora, a partir de esto (señala las multiplicaciones reiteradas) ¿qué expresión podemos encontrar para que las simplifique?
114	A1Cristas:	El número del resultado anterior multiplicado por tres.
115	PI:	Ok. ¿Pero alguien encontró otra expresión que me simplifique esto (señala las multiplicaciones reiteradas)? A ver, por ejemplo para éste (señala 1×3).
116	A2Dos:	Tres a la uno.
117	PI:	Ok (escribe en el pizarrón 3^1). ¿Aquí cuánto es? (en los nueve conejitos)
118	A:	Tres a la dos.
119	PI:	Escribe en el pizarrón 3^2. ¿Sí? o ¿no? (dirigiéndose a todo el grupo).
120	Todos:	Sí.
121	A1NoManches Frida:	Sí, ya.
122	PI:	Tres a la dos porque es tres por tres (señala la multiplicación reiterada).
123	A1NoManches Frida:	¡Ah!, sí, va.
124	PI:	Y luego aquí (para el 27) ¿qué va?
125	A1NoManches Frida:	Tres a la tres.
126	PI:	La profesora-investigadora escribe 3^3 en el pizarrón.
127	A:	Tres a la cuatro (sin que la profesora-investigadora pregunte para el 81).
128	PI:	Escribe en el pizarrón 3^4 en la línea de los 81 conejos infectados.
129	PI:	Entonces, ¿qué ocurrirá para un número en general? Sí yo, por ejemplo: Tengo un número al que le vamos a llamar a, y lo elevo a la potencia n. Si yo tengo a^n pues, donde a es la base y n es el exponente (escribe en el pizarrón $a^n = a \times a \times ... \times a$ n-veces) ¿Cómo me quedaría a mí esto? Ésta es, la propiedad de los exponentes naturales. ¿Qué tendría que hacer yo aquí (señala en el pizarrón la expresión a^n) para encontrar este resultado? Bueno pues entonces sería, a por a por a, n-veces, ¿sí?
130	Todos:	Sí.
131	PI:	Esto es lo que les pedía en el cuadernito. Bueno, en éste se les pedía Tres a la n (escribe en el pizarrón 3^n), ¿cómo desarrollaríamos eso?
132	A1:	Tres por n por n

133	PI:	No.
134	A1:	¿Sí, no?
135	PI:	No, es tres por tres por tres, n-veces; o sea la cantidad que indica el exponente. Si por ejemplo, el exponente es tres, sería tres veces, si el exponente es diez sería diez veces el tres ¿Si?
136	Todos:	Nosotros lo representamos solo con enes (en lugar de tres pusieron n), es lo mismo, pero así le pusimos
137	PI:	Ok, Muy bien. Para el exponente cero su compañera hace ratito señaló la propiedad. Comentó que a^0 es igual a uno, para cualquier a distinto de cero (escribe en el pizarrón $a^0 = 1,\ a \neq 0$).

De esta manera se concluyó la clase, se considera que fue bueno que la profesora-investigadora antes de dar a conocer la propiedad del exponente natural y cero pidiera a los alumnos que le ayudaran a llenar la tabla, pues así, si los alumnos aún tenían dudas acerca de los resultados que debieron obtener, con esto se cree que pudo quedar más claro.

5.2 Análisis de la actividad 2 “aproximación de raíces cuadradas mediante el método geométrico”

El propósito que tenía esta actividad, era que los alumnos aproximaran el valor de algunas raíces cuadradas mediante construcciones geométricas y que lograran identificar que el valor que se obtiene de extraer la cuadrada de un número, es el mismo que resulta de elevar ese mismo número al exponente $\frac{1}{2}$, es decir, que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. La Actividad 2 puede verse en el Anexo 16.

5.2.1 Situación de acción. Construcción 1 y 2

Antes de que llegaran los alumnos al salón de clase, la profesora-investigadora se encargó de acomodar las butacas en pares, una enfrente de la otra. Posteriormente, colocó una carpeta de plástico en cada par de butacas con el material que se utilizaría en la actividad (véase la Figura 104), la carpeta contenía:

- 1 Juego de hojas de trabajo.
- 3 hojas milimétricas.
- 1 compás.
- 1 regla.
- 1 pluma negra.
- 1 pluma azul.
- 1 pluma roja.
- 1 Cuadro de cartulina con un número, éste indicaba el número de equipo.

Una vez que llegaron los alumnos de la clase de computación, la profesora les solicitó que se reunieran un hombre y una mujer y se sentaran en algún par de butacas. Como hay más mujeres que hombres en el grupo, una vez que quedaban puras mujeres, la profesora señaló a una mujer para que se sentara con otra, es decir, ella terminó de formar los equipos. Un equipo quedó de 3 personas.

Figura 104: Antes de que llegaran los alumnos

Inmediatamente después de que estuvo reunido todo el grupo en equipos, la profesora comenzó recordándoles su nombre, les mencionó el material que contenían las carpetas que tenían en sus butacas y posteriormente comenzó dando una pequeña explicación sobre ¿Qué es Geometría? Y también les platicó a los alumnos que antiguamente los egipcios y otras culturas calculaban las multiplicaciones y raíces cuadradas de manera geométrica, una vez dicho esto, la profesora dio las instrucciones de lo que había que realizar, a continuación, se muestran algunas transcripciones de lo ocurrido para la construcción 1.

158	PI:	Vamos a empezar con la construcción 1 y la vamos a hacer todos juntos ¿de acuerdo? A ver vamos a ir leyendo, equipo 1, puede leer el inciso a).
163	Al1-1	Traza un segmento en una hoja milimétrica que mida 3 cm. En el extremo izquierdo del segmento coloca la letra A y en el extremo derecho la letra B, éste segmento será llamado AB.
164	PI:	Ok. A ver, ¿quién sabe qué es un segmento?
165	Al2-2:	Es un trozo ¿no?
166	PI:	Ok.
167	Al:	Una recta.
168	PI:	Bueno, sí es una recta, pero está delimitada por dos puntos ¿verdad? A ver, todos observen acá al pizarrón (todos los alumnos voltean), vamos a trazar el segmento que está delimitado por dos puntos que en este caso va a ser A y B y mide tres centímetros.

		Por ejemplo, en las hojas milimétricas cada cuadro mide un centímetro igual que en Geogebra. Entonces, tracen todos el segmento AB.
169	Al:	¿En cualquier parte?
170	PI:	Sí. En cualquier parte está bien.
171	PI:	Después de unos minutos ¿ya todos tienen el segmento AB?
172	Als:	Sí.
173	PI:	Ok. Entonces ahora, lean ustedes (señalando al equipo 2) el equipo 2, el inciso b).
174	Al2-1	Coloca un punto a la mitad del segmento AB y nómbralo C.
175	PI:	Entonces, ¿cuál será la mitad del segmento AB?
176	Als:	Uno punto cinco centímetros.
177	PI:	Uno punto cinco centímetros ¿verdad? Vamos a encontrar pues el punto medio aquí en Geogebra. Entonces, ustedes en uno punto 5 centímetros, marquen el punto C.
180	PI:	Lean el inciso c) (señalando al equipo seis).
181	Al6-2:	Coloca un punto sobre el mismo segmento a 2 cm de distancia desde el punto A y llámalo D.
182	PI:	Ok. Entonces ¿dónde irá el punto D?
183	PI:	¿Dónde marcaremos el punto D?
184	Al:	¿Adelantito de la C?
185	Al:	En dos centímetros.
186	PI:	Ok. Entonces, aquí (señala con el puntero de la computadora el punto D en Geogebra) ¿verdad? ¿Ahí estamos de acuerdo todos?
187	Al2-2:	¿En dos centímetros?
188	PI:	¿Sí verdad? (vuelve a leer el inciso c)). Entonces es el que tenemos aquí (vuelve a señalar el punto D en Geogebra) ¿verdad?
189	Als:	Sí.
190	PI:	Ahora el inciso d) dice: Abre el compás a la medida del segmento AC y traza una semicircunferencia. A ver, ¿queda claro? Abran el compás a la medida del segmento AC ¿a qué medida van a abrir el compás?
191	Al:	A tres (titubeando).
192	Als:	A 1.5.
193	PI:	A 1.5, muy bien.
194	PI:	Después de unos segundos. Cuando tengan el compás abierto a uno punto cinco centímetros, colocan la punta del compás en el punto C y trazan la semicircunferencia. ¿Qué es una semicircunferencia?
195	Al2-2	¿La mitad de un círculo?
196	PI:	Ok. Muy bien.
197	PI:	¿Alguien me hace el favor de leer el inciso e)?
198	Al2-2:	Yo.
		Traza una recta perpendicular que pase por el punto D y prolóngala hasta que toque la semicircunferencia.
202	PI:	[…] ¿Qué es una recta perpendicular?
203	Al14-1:	Dos líneas que se cruzan y forman un ángulo de noventa grados.

204	PI:	Muy bien. Ahora voy a trazar la línea perpendicular en Geogebra (pulsa el ícono) pasa por el punto D (da clic en el punto D) y es perpendicular al segmento AB (da clic en dicho segmento). Una vez que aparece la recta perpedicular en Geogebra, pregunta: ¿estamos de acuerdo?
205	Al:	Sí.
206	PI:	Tomen en cuenta que esa recta, va a pasar justamente por la línea de los cuadritos, o sea, en donde está el punto D, hacia arriba.
207	Al:	¿Hasta dónde la prolongamos?
208	PI:	Hasta donde ustedes quieran.
209	PI:	Ahora el inciso f) dice: Coloca un punto en la semicircunferencia de tal manera que sea la intersección de la recta perpendicular y la semicircunferencia y llama E a este punto. Tenemos que poner el punto E, en la intersección de la recta perpendicular y de la semicircunferencia ¿dónde irá a quedar ese punto?
210	Al:	Donde chocan.
211	Al:	Donde chocan la semicircunferencia y la recta.
212	PI:	Ok. Entonces, están de acuerdo que sería ¿aquí? (señala con el dedo la proyección de Geogebra aún sin el punto).
213	Todos:	Sí.
216	PI:	Ahora, fíjense lo que dice el inciso g). Mide el segmento DE y escribe la medida en la construcción que acabas de realizar. A ver, hagan eso por favor.
217	Todos:	Están midiendo y algunos vuelven a decir la instrucción.
218	PI:	Por favor, sean muy precisos en sus medidas eh.
219	Al6-1:	¿Dónde anotamos la medida?
220	PI:	La medida del segmento pueden anotarla a un ladito del segmento.
221	PI:	¿Cuánto les dio la medida del segmento DE?
222	Al:	Uno punto cuarenta y cinco.
223	Al:	Uno.
224	Al:	Uno punto cinco.
225	PI:	Ok. Entonces, vamos a ver cuánto mide aquí en Geogebra ¿qué les parece?
226	Al:	¡Ah!, pues mejor.
227	PI:	Vamos a tomar la distancia de D a E (todos observan el pizarrón y aparece la longitud 1.41). No significa que ustedes estén mal eh, lo que pasa es que Geogebra es un poco más preciso que hacerlo manual ¿verdad? De todos modos, el resultado que obtuvieron como uno punto cuatro y uno punto cinco, está perfecto ¿ok? Aquí solamente, a ver, pongan atención, que quede claro que es un aproximado la medida del segmento DE, entonces, mide aproximadamente uno punto cuarenta y uno ¿sí?
228	Al1-2:	Sí.
229	PI:	Las medidas que ustedes tienen no las borren eh, o sea como les dije, no está mal. ¿A todos les quedó claro cómo se hizo la construcción?

230 Todos: Sí.
231 PI: Bueno, ahora van a hacer ustedes solos la construcción 2 y 3. Tienen 10 minutos para eso.
232 Al2-1: ¡Ay! (renegando).

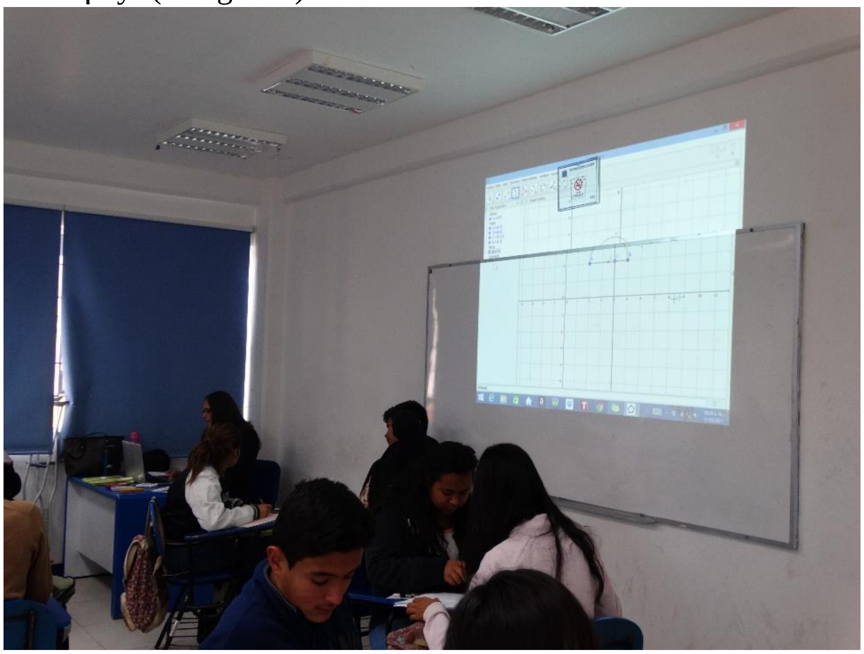


Figura 105: Situación de acción. Construcción 1

Todo lo anterior, forma parte de la situación de acción, pues, aunque los alumnos están realizando la construcción 1 en sus hojas milimétricas, lo están haciendo con la ayuda de la profesora-investigadora (véase la Figura 105). Otro aspecto importante, es que la devolución también aparece en las transcripciones anteriores, pues, se puede notar que los alumnos han aceptado resolver la actividad, ya que están participando respondiendo a las preguntas que hace la profesora y además, están realizando la construcción en sus hojas milimétricas por voluntad propia no porque la profesora lo haya solicitado.

A continuación, se muestran dos figuras en las que se puede notar los valores que dieron los equipos para la longitud del segmento DE, también, se puede ver que esos valores son muy aproximados al resultado que se obtiene en la calculadora para $\sqrt{2}$.

La primera respuesta (véase la Figura 106), fue proporcionada por 9/12 equipos (1, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13 y 14) y es considerada la óptima, sin embargo, es importante aclarar que 2 de estos equipos (6 y 9) dieron el valor 1.41, al segmento DE, se considera que el 1 lo agregaron después de ver el resultado en Geogebra, pues, se cree que al principio tenían 1.4.

Algo sorprendente es que el equipo 14, desde antes de conocer el valor que se obtuvo en Geogebra, dijeron que el segmento DE medía 1.45, este resultado se cree que lo dieron debido a que la profesora-investigadora solicitó que fueran muy precisos en sus medidas y como seguramente notaron que la longitud pasaba de 1.4, decidieron hacer una aproximación de cuánto sería la longitud. Esto es bueno, pues deja ver que los alumnos se interesaron en hacer la actividad lo mejor posible.

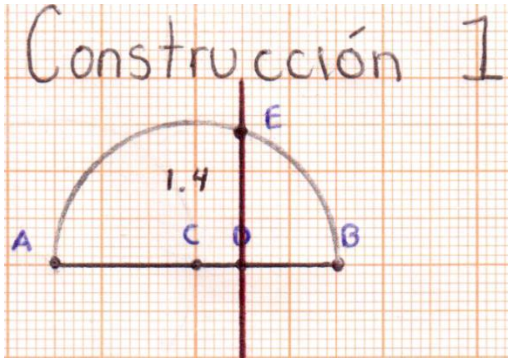


Figura 106: Respuesta 1. Valor óptimo

La segunda respuesta (Figura 107), la proporcionaron 3/12 equipos (2, 5 y 8), aunque esta no es la óptima, es correcta, pues como se ha comentado, lo que se quiso lograr con esta actividad es que los alumnos aproximaran el valor de la raíz cuadrada y ésta es una buena aproximación para $\sqrt{2}$, tal y como se mencionó en el análisis a priori, sin embargo, ellos en ese momento, aún no sabían que los valores obtenidos correspondían a la $\sqrt{2}$.

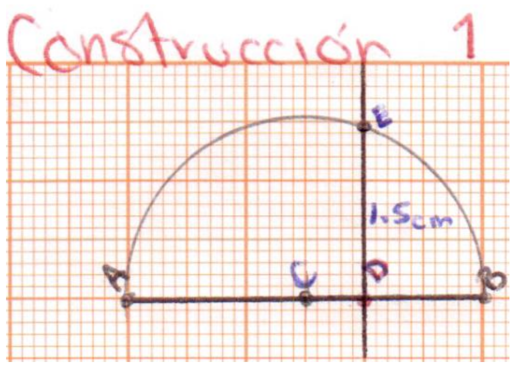


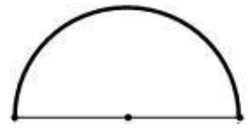
Figura 107: Respuesta 2. Buena aproximación

La construcción 2, se sigue considerando dentro de la situación de acción, pues los pasos para realizarla son exactamente los mismos que para la construcción 1, únicamente varían las medidas. A continuación, se muestra lo que pide ésta.

Construcción 2.

a) Traza un segmento en una hoja milimétrica que mida 4 cm. En el extremo izquierdo del segmento coloca la letra A y en el extremo derecho la letra B, éste segmento será llamado AB.
b) Coloca un punto a la mitad del segmento AB y nómbralo C.
c) Coloca un punto sobre el mismo segmento a 3 cm de distancia desde el punto A y llámalo D.

d) Abre el compás a la medida del segmento AC y traza una semicircunferencia.



e) Traza una recta perpendicular que pase por el punto D y prolóngala hasta que toque la semicircunferencia.
f) Coloca un punto en la semicircunferencia de tal manera que sea la intersección de la recta perpendicular y la semicircunferencia y a llama E a este punto.
g) Mide el segmento DE y escribe la medida en la construcción que acabas de realizar.

Ésta tiene el propósito de que los estudiantes encuentren la $\sqrt{3}$, aún sin que ellos lo sepan, más adelante lograrán verlo mediante una serie de preguntas, por lo pronto, se muestran a continuación las cuatro respuestas diferentes que proporcionaron los alumnos para el valor del segmento DE.

La primera respuesta (véase la Figura 108), fue dada por 7/12 equipos (5, 6, 7, 8, 9, 12 y 13), ésta se considera la respuesta óptima debido a que $\sqrt{3} \approx 1.7320508076$, al considerar que la regla tiene como medida mínima el milímetro, se pensó que el valor más aproximado al que podrían llegar es 1.7. Entonces, puede notarse que la mayoría de los equipos logró obtener dicho valor, lo cual significa que su construcción está muy bien hecha, es decir, las medidas de todos los segmentos fueron muy precisas, por eso lograron obtener este resultado.

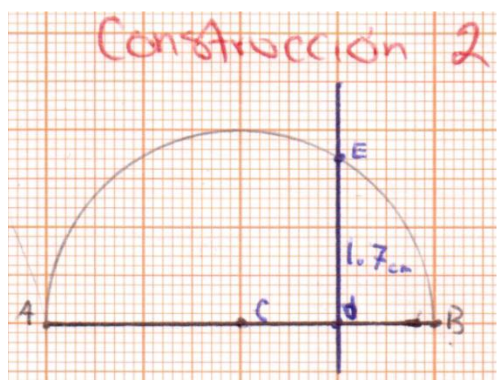


Figura 108: Respuesta 1. Valor óptimo

Por otra parte, 2/12 equipos (1 y 2) obtuvieron la segunda respuesta (véase la Figura 109), ésta aunque no es el valor óptimo, está bien, pues 1.8, es una aproximación muy buena para $\sqrt{3}$, considerando que se está haciendo a lápiz y papel.

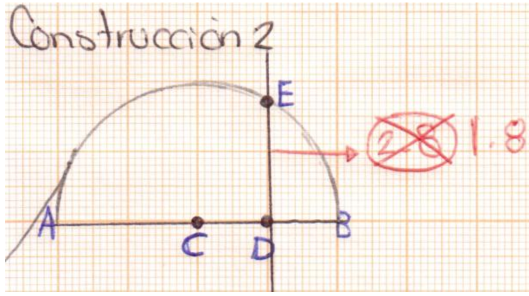


Figura 109: Respuesta 2. Muy buena aproximación

Enseguida, se muestra la tercera respuesta, la cual fue dada por 2/12 equipos (14 y 10), aquí se agruparon dos respuestas, éstas, tienen en común que ambas dan dos cifras decimales para la longitud del segmento DE. La respuesta del equipo 14, se muestra en la imagen de la izquierda de la Figura 110, mientras que la del equipo 10 se muestra en el lado derecho de la misma figura. Entonces, estas respuestas son realmente interesantes, pues se logra ver que quisieron ser lo más exactos posibles en sus medidas y aunque su respuesta no es la óptima, es también una buena aproximación para $\sqrt{3}$.

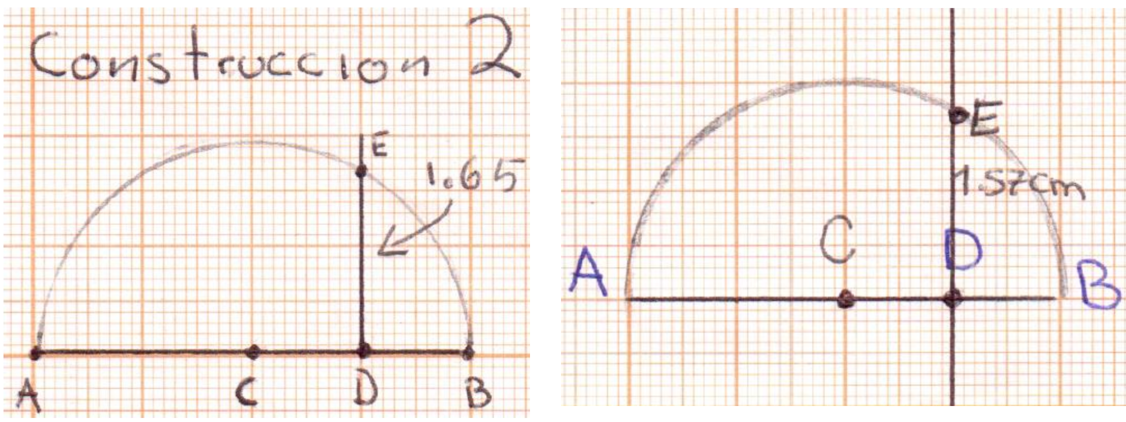


Figura 110: Respuesta 3. Dos cifras decimales, buena aproximación

Por último, la cuarta respuesta (véase la Figura 111), se encuentra a cargo del equipo 11, en ésta, el equipo dio el valor de 1.6 al segmento DE, el cual es bueno, igual que en las respuestas 2 y 3, pues aunque no dieron el valor óptimo, es muy cercano a éste, es decir, es una buena aproximación tal y como se comentó en el análisis a priori.

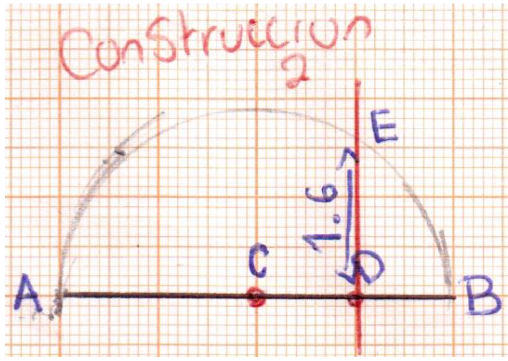


Figura 111: Respuesta 4. Valor cercano al óptimo

5.2.2 Situación de formulación. Construcción 3

En esta situación se muestra el resto de la actividad 2, se comienza con la construcción 3, pues ésta ya no es igual que la construcción 1 y 2, por ello, se considera que en este momento, los alumnos entran en situación de formulación. Lo solicitado por la construcción 3 se muestra a continuación:

Construcción 3.

Realiza lo mismo que en los casos anteriores pero ahora con $\overline{AD} = 4\ cm.$ ¿Cuál será la longitud del segmento AB y DE?

Esta construcción, pretende que los alumnos logren identificar a partir de las construcciones 1 y 2 que el segmento AB debe medir 1 cm más que el segmento AD.

Luego, las respuestas que surgieron para el segmento DE, fueron muy diversas, en algunas se puede notar que los alumnos no lograron identificar que el segmento AB debe medir 1 cm más que $\overline{AD}$, mientras que otros, aunque sí notaron eso, tal vez abrieron el compás a una longitud un poco mayor a la longitud de $\overline{AC}$ y otros lograron el valor óptimo. A continuación, se muestran las cinco respuestas diferentes que dieron algunos equipos.

La primera respuesta, que fue dada por 5/12 equipos (5, 6, 7, 13 y 14) es la óptima, en la Figura 112, se puede ver que la construcción tiene medidas muy precisas, además, estos equipos lograron identificar que la longitud del segmento AB debe ser mayor 1 cm que la longitud de $\overline{AD}$, encontrando así que la longitud del segmento DE es $2\ cm.$

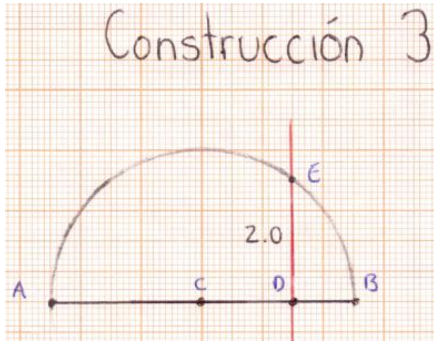


Figura 112: Respuesta 1. Valor óptimo

Por otra parte, se encuentra la segunda respuesta que fue proporcionada por 4/12 equipos (1, 10, 11 y 12), en ella se puede notar que aunque los alumnos lograron identificar cuál sería la longitud del segmento AB, al parecer, la longitud a la que abrieron el compás fue un poco menor que $\overline{AC}$, pues, en la Figura 113 se puede apreciar que la semicircunferencia no toca el punto B. Por lo anterior, se puede decir que se acercaron bastante al valor de $\sqrt{4}$, aunque no es el óptimo.

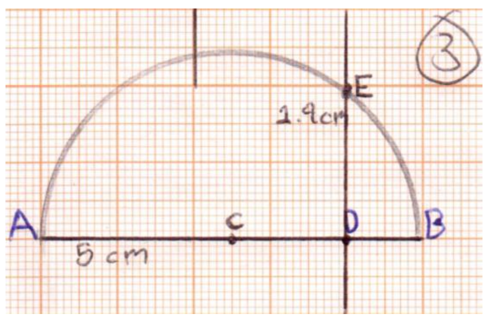


Figura 113: Respuesta 2. Radio de la

semicircunferencia menor al $\overline{AC}$

También, se encontró la tercera respuesta, que fue dada por el equipo 8. En la Figura 114 se puede apreciar que la semicircunferencia no pasa exactamente por el punto B, pasa ligeramente a la derecha de éste, por ello, se cree que este equipo, obtuvo una longitud mayor al valor óptimo, sin embargo, la aproximación se considera buena.

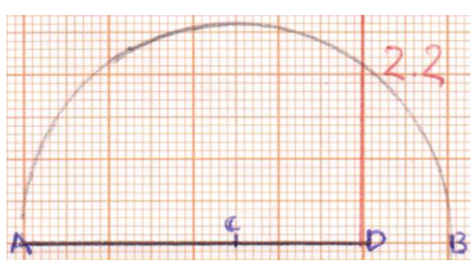


Figura 114: Radio de la semicircunferencia

mayor al $\overline{AC}$

La cuarta respuesta, se encuentra a cargo del equipo 2. En la Figura 115, se puede observar que la longitud de $\overline{\mathrm{AB}}$ es mayor a $5\ cm$, por consiguiente, la semicircunferencia también es mayor de lo que debería y por ello, resulta $\overline{DE}$ con una longitud de $2.3\ cm$, lo cual no es muy cercano al valor óptimo (véase la Figura 112).

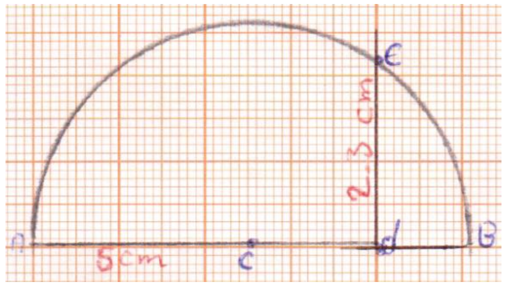


Figura 115: Respuesta 4. Longitud del $\overline{AB}$

mayor a 5

Por último para esta construcción, se encontró la quinta respuesta (véase la Figura 116) que fue dada por el equipo 9, enseguida se encuentra una conversación entre este equipo y la profesora-investigadora, pues los alumnos le hablaron porque no sabían cómo hacer la construcción.

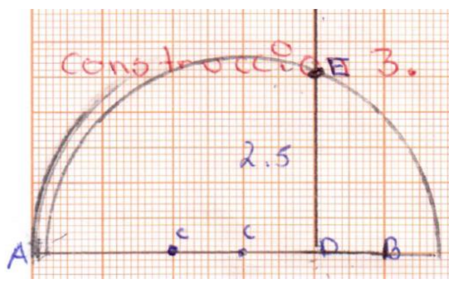


Figura 116: Respuesta 5. $\overline{AB}$ mayor de lo que debería

De acuerdo a la conversación anterior, se puede notar que los alumnos comprendieron que $\overline{\mathrm{AB}}$ debe medir 5 cm., sin embargo, en otros videos se logró identificar que tuvieron problemas con el compás, pues se le hundía la punta, pero la profesora-investigadora se los cambió, una vez que tuvieron el otro compás hicieron el trazo de la semicircunferencia pero se desesperaron porque ya iban un poco atrás y no tomaron bien la medida a la que debían abrir el compás, por ello, en la Figura 116 se observa que $\overline{\mathrm{AB}}$ es mayor a 5 cm.

Una vez que la profesora se dio cuenta que la mayoría de los equipos había concluido la construcción 3, preguntó lo siguiente:

233	PI:	¿Cuánto mide la longitud del segmento AB?
234	A:	Cinco.
235	PI:	¿A todos les da el mismo valor?
236	A:	Sí.

237	PI:	Bueno, entonces continúen con las preguntas y contéstenlas ahí en las hojas que les di.
238	A1-9:	Es que no le entendemos maestra. Ya pusimos el punto C a la mitad del segmento AD.
239	PI:	Pero fíjate, aquí (señala la construcción 1), $\overline{AD}$ es diferente. $\overline{AB}$ mide tres centímetros y marca el punto D a dos centímetros de A.
240	A1-9:	Ajá y aquí no nos dice $\overline{AB}$.
241	PI:	Y aquí en la construcción 2 (la señala) les dice que $\overline{AB}$ mide cuatro centímetros y marquen D a tres centímetros de distancia.
242	A1-9:	Entonces, sería hasta acá ¿no? el C (señala la construcción 3, en ella tiene el segmento AD de cuatro centímetros e indica que el punto C iría en tres centímetros), bueno porque sería como a tres centímetros.
243	PI:	Es que $\overline{AD}$ es el que les está dando aquí (señala la construcción 2) por ejemplo, o sea aquí $\overline{AD}$ media dos, en la construcción uno medía dos y $\overline{AB}$ medía tres ¿verdad?
244	A1-9:	Ajá.
245	PI:	Entonces tienen que tomar en cuenta eso, como ¿cuánta diferencia hay de D a B?
246	A1-9:	Es como un centímetro más o menos en cada uno. Entonces, le tendríamos que marcar (señala la construcción 3) solamente un centímetro ¡ah! y ponerle AB.
247	PI:	Ajá.
248	A1-9:	¡Ah! ok. Gracias.

Dado que la mayoría de los equipos, logró identificar que la longitud del segmento AB es 5 cm, la profesora decidió hacer nada más una pregunta de manera grupal para corroborar que todos dieron la misma longitud al segmento AB.

5.2.3 Situación de formulación. Preguntas sobre la construcción 1

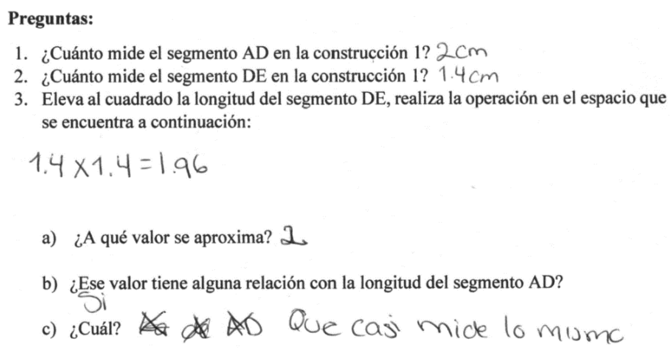
1. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 1?
2. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 1?
3. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

   a) ¿A qué valor se aproxima?
   b) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
   c) ¿Cuál?

Estas preguntas tienen como objetivo que los alumnos logren ver que al elevar al cuadrado la longitud del segmento DE, este resultado se aproxima a la longitud del segmento AB.

De estas preguntas surgieron tres respuestas diferentes, en ellas se puede notar que la mayoría de los equipos supo elevar al cuadrado (excepto uno) y además identificaron que ese valor se aproxima a la longitud del $\overline{\mathrm{AD}}$. Las respuestas se muestran a continuación:

La primera respuesta (véase la Figura 117) fue dada por 8/12 equipos (6, 7, 9, 10, 11, 12, 13 y 14), ésta es la respuesta óptima, pues obtuvieron como longitud para el $\overline{\mathrm{DE}}$ 1.4 cm, además, supieron perfectamente cómo elevar al cuadrado y obtuvieron el valor correcto. También, lograron identificar que ese resultado se aproxima 2 y en general, se aproxima a la longitud del $\overline{\mathrm{AD}}$.


Preguntas:

1. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 1? 2cm
2. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 1? 1.4cm
3. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

1.4 x 1.4 = 1.96

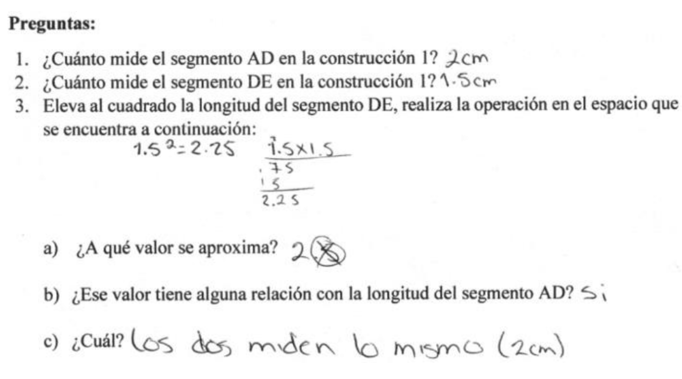
a) ¿A qué valor se aproxima? 2

b) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? Si

c) ¿Cuál? ~~AD~~ ~~AD~~ AD Que casi mide lo mismo

Figura 117: Respuesta 1. Solución óptima

La segunda respuesta (véase la Figura 118) se encuentra a cargo de 3/12 equipos (1, 2 y 5), en la Figura 118 se puede notar que los equipos elevaron bien al cuadrado y obtuvieron el resultado correcto. También, es curioso notar que el equipo 1 en la construcción 1 dijo que la longitud del $\overline{\mathrm{DE}}$ es 1.4, sin embargo, en las preguntas escribió que el $\overline{\mathrm{DE}}$ es 1.5. Por otra parte, se nota que los alumnos que proporcionaron esta respuesta, también fueron capaces de identificar que la longitud del $\overline{\mathrm{DE}}$ al cuadrado se aproxima a la longitud del $\overline{\mathrm{AD}}$.


Preguntas:

1. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 1? 2cm
2. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 1? 1.5cm
3. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

$1.5^2 = 2.25$ 1.5x1.5 .75 15 2.25

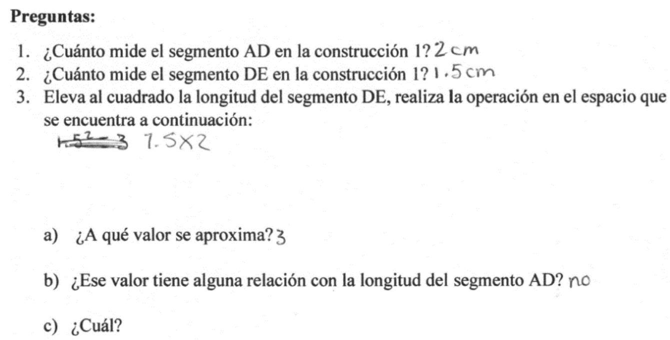
a) ¿A qué valor se aproxima? 2 ~~8~~

b) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? Si

c) ¿Cuál? Los dos miden lo mismo (2cm)

Figura 118: Respuesta 2. Solución correcta

La otra respuesta que resultó, es la tercera, la cual fue proporcionada por el equipo 8, ésta se muestra en la Figura 119, en ella se aprecia que este equipo multiplicó la base por el exponente, cometiendo nuevamente el error que reportan Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007). Por tal motivo, los alumnos no encontraron relación alguna entre el valor resultante de “elevar al cuadrado” y la longitud del segmento AD. Entonces, la respuesta que proporcionó este equipo no es la adecuada.



Preguntas:

1. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 1? 2 cm
2. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 1? 1.5 cm
3. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

~~1.5² = 3~~ 1.5x2

a) ¿A qué valor se aproxima? 3

b) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? no

c) ¿Cuál?

Figura 119: Respuesta 3. Al elevar al cuadrado cometen

el error de multiplicar la base por el exponente

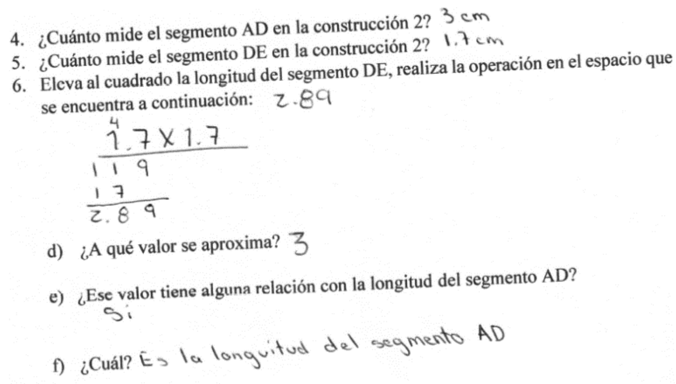
5.2.4 Situación de formulación. Preguntas sobre la construcción 2

4. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 2?
5. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 2?
6. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

   d) ¿A qué valor se aproxima?
   e) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
   f) ¿Cuál?

Las respuestas a las preguntas que se hicieron acerca de la construcción 2, son tan variadas como las longitudes que encontraron los alumnos para el $\overline{DE}$, a continuación, se muestran las cinco respuestas diferentes que surgieron para estas preguntas.

La primera respuesta (véase la Figura 120) que es la óptima, fue dada por 6/12 equipos (5, 6, 7, 9, 12 y 13), en ésta se muestra que los alumnos lograron elevar al cuadrado de manera adecuada, además, dijeron que la aproximación del resultado de tal operación (elevar al cuadrado) es la longitud del segmento AD.



4. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 2? 3 cm
5. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 2? 1.7 cm
6. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación: 2.89

1.7 X 1.7
119
17
2.89

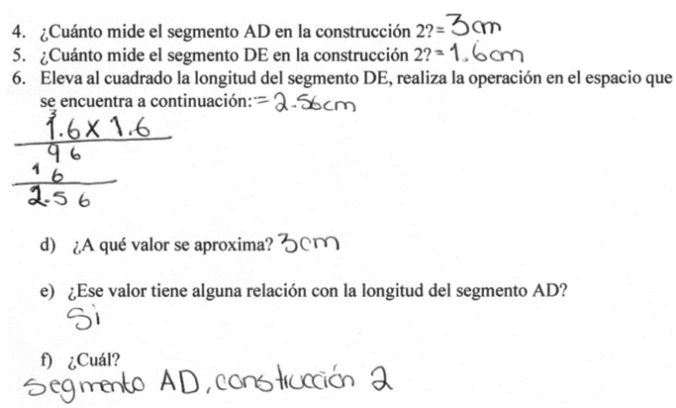
d) ¿A qué valor se aproxima? 3

e) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
Si

f) ¿Cuál? Es la longuitud del segmento AD

Figura 120: Respuesta 1. Solución óptima

Por otra parte, la segunda respuesta (véase la Figura 121) fue proporcionada por 2/12 equipos (11 y 14), ésta también es correcta en cuanto al procedimiento utilizado, pues elevaron al cuadrado de manera adecuada, aproximaron bien el resultado y dijeron que tal aproximación es igual a la longitud del segmento AD. El equipo 14, como obtuvo 1.65 para la longitud del $\overline{\mathrm{DE}}$, hizo el procedimiento para tal resultado y obtuvo al elevar al cuadrado 2.7225, dicho valor es mejor que el de la Figura 121, pues el primero se aproxima más a 3.



4. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 2? = 3cm
5. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 2? = 1.6cm
6. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación: = 2.56cm

1.6 X 1.6
96
16
2.56

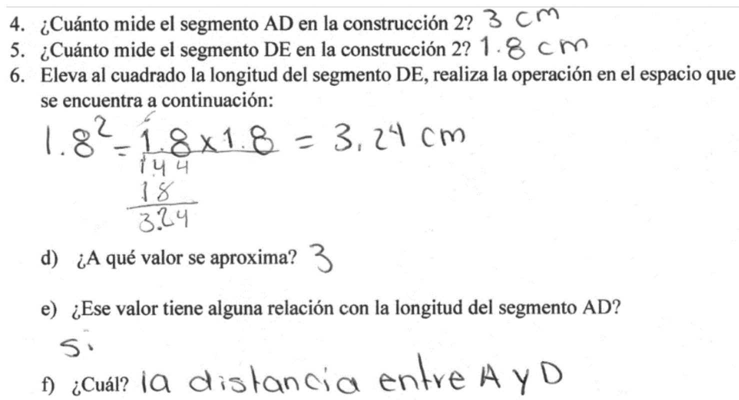
d) ¿A qué valor se aproxima? 3cm

e) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
Si

f) ¿Cuál?
Segmento AD, constiucción 2

Figura 121: Respuesta 2. Procedimiento adecuado, valor obtenido al elevar al cuadrado no muy cercano a 3

Otra de las respuestas encontradas es la tercera (véase la Figura 122), ésta fue proporcionada por 2/12 equipos (1 y 2) y de la misma manera que las otras es correcta, pues, elevaron de manera adecuada al cuadrado, aproximaron bien y comentaron que dicha aproximación es igual a la longitud del segmento AD.



4. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 2? 3 cm
5. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 2? 1.8 cm
6. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

1.8² = 1.8 x 1.8 = 3.24 cm
144
18
3.24

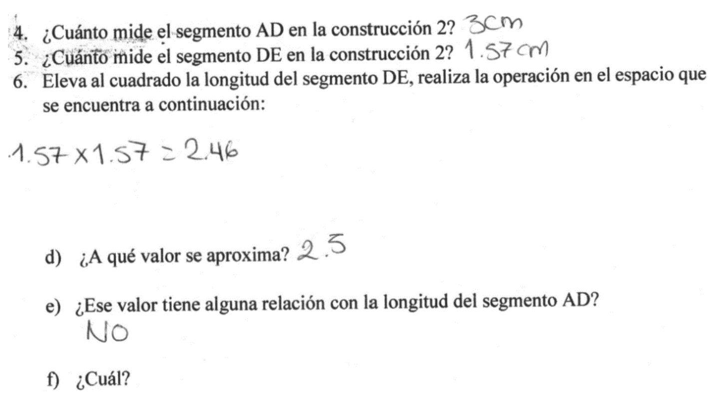
d) ¿A qué valor se aproxima? 3

e) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
Si

f) ¿Cuál? la distancia entre A y D

Figura 122: Respuesta 3. Procedimiento correcto

Ahora, se tiene la cuarta respuesta (véase la Figura 123) que fue proporcionada por el equipo 10, como este equipo obtuvo el valor de 1.57 para el segmento DE, al elevar al cuadrado aunque lo hicieron bien, les dio como resultado 2.46, por esto, cuando se les pidió que aproximaran el valor, ellos lo aproximaron a 2.5 en lugar de 3. Entonces, como la longitud que dieron para el $\overline{DE}$ no es la óptima ni muy cercana a ella, no lograron identificar que elevar al cuadrado la longitud del $\overline{DE}$, da como resultado aproximadamente la longitud del $\overline{AD}$.



4. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 2? 3cm
5. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 2? 1.57 cm
6. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

1.57 x 1.57 = 2.46

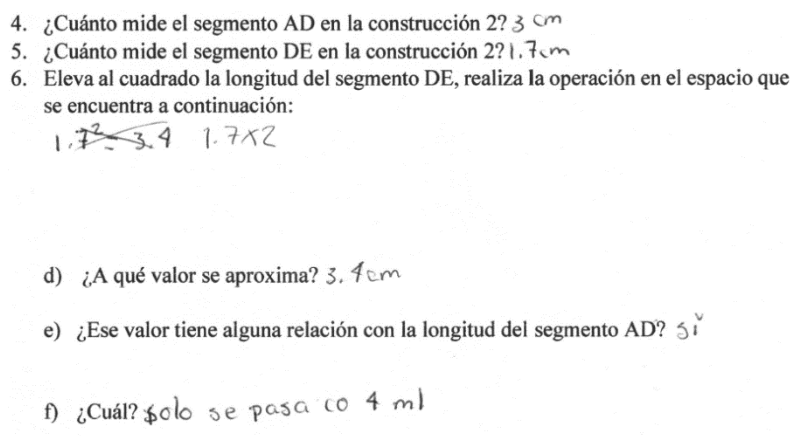
d) ¿A qué valor se aproxima? 2.5

e) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
NO

f) ¿Cuál?

Figura 123: Respuesta 4. No lograron el objetivo

Finalmente, la quinta respuesta (véase la Figura 124) se obtuvo por parte del equipo 8. Este equipo no logró elevar al cuadrado de manera correcta, pues, multiplicaron la base por el exponente, cometiendo el error reportado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007). Aun cometiendo este error, los alumnos logran ver cierta relación entre el resultado de "elevar al cuadrado" y la longitud del segmento AD, pues, comentan que el resultado de "elevar al cuadrado" se pasa sólo por 4 milímetros de la longitud del segmento AD.



4. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 2? 3 cm
5. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 2? 1.7cm
6. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

$1.7^2 = 3.4$ 1.7×2

d) ¿A qué valor se aproxima? 3.4cm

e) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? si

f) ¿Cuál? solo se pasa co 4 ml

Figura 124: Respuesta 5. Multiplica base por exponente

al elevar al cuadrado

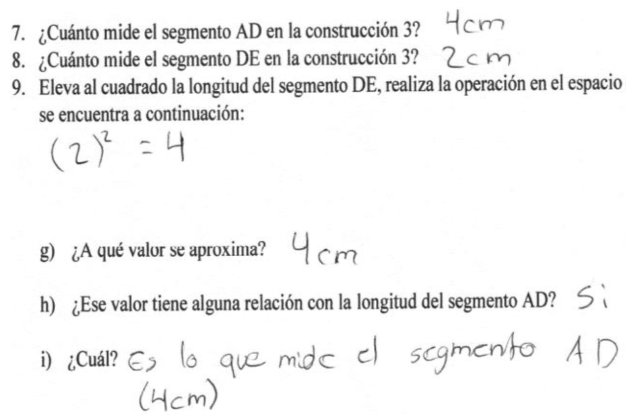
5.2.5 Situación de formulación. Preguntas sobre la construcción 3

7. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 3?
8. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 3?
9. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

g) ¿A qué valor se aproxima?
h) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
i) ¿Cuál?

Las respuestas que surgieron para las preguntas respecto a la construcción 3 fueron cuatro diferentes, en 2 de ellas se puede identificar que los alumnos ven con claridad que hay una relación entre elevar al cuadrado la longitud del segmento DE y la longitud del segmento AD, en otra de las respuestas los alumnos no identifican con tanta claridad dicha relación y en la última no ven la relación que hay debido a que la longitud del $\overline{\mathrm{DE}}$ con la que trabajan no es muy cercana al valor óptimo (2). Enseguida, se muestran dichas respuestas.

La primera respuesta, que fue dada por 5/12 equipos (5, 6, 7, 13 y 14), se muestra en la Figura 125, en ella se pude apreciar que los alumnos elevaron al cuadrado de manera correcta y además logran establecer una relación entre el resultado obtenido de esta operación y la longitud del segmento AD, pues comentan que la relación que hay es que ese resultado es lo que mide el segmento AD.



7. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 3? 4cm
8. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 3? 2cm
9. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

$(2)^2 = 4$

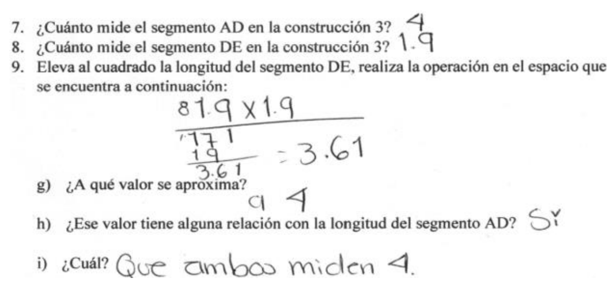
g) ¿A qué valor se aproxima? 4cm

h) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? Si

i) ¿Cuál? Es lo que mide el segmento AD (4cm)

Figura 125: Respuesta 1. Solución óptima

Por otra parte, la segunda respuesta que también es correcta, fue dada por 4/12 equipos (1, 10, 11 y 12), en esta, igual que la anterior, los alumnos elevaron de manera correcta al cuadrado, luego, con la aproximación de ese resultado lograron establecer una relación entre ese valor y la longitud del segmento AD, pues comentaron que ambos miden lo mismo. Esto puede apreciarse en la Figura 126.



7. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 3? 4
8. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 3? 1.9
9. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

1.9 x 1.9 = 3.61

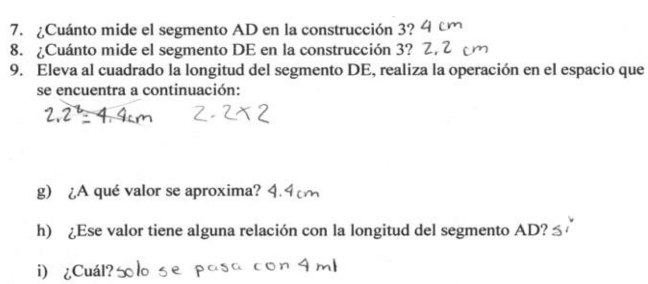
g) ¿A qué valor se aproxima? 4

h) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? Sí

i) ¿Cuál? Que ambos miden 4.

Figura 126: Respuesta 2. Solución correcta

Ahora, se muestra la respuesta 3 que se obtuvo del equipo 8. En ella se aprecia, que los alumnos, para elevar al cuadrado, hacen la multiplicación de la base por el exponente y como ellos dieron la longitud 2.2 para el segmento DE en la construcción 2, el resultado que obtienen es 4.4, sin embargo, aunque obtienen un valor mayor a 4 cm, saben que éste tiene una relación con la longitud del segmento AD, pues dicen que sólo se pasa por 4 milímetros.



7. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 3? 4 cm
8. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 3? 2.2 cm
9. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

$2.2^2 = 4.4$cm   2.2x2

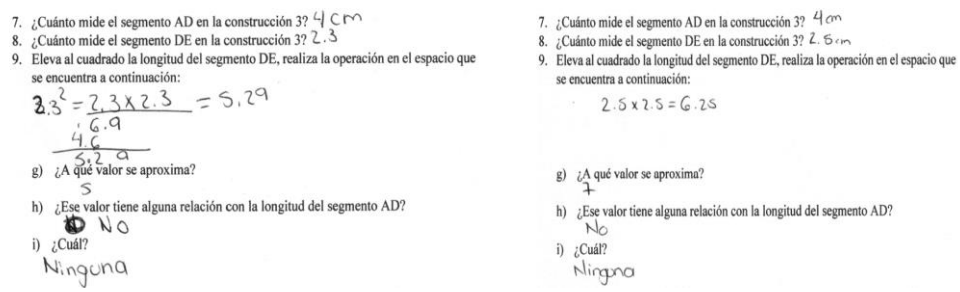
g) ¿A qué valor se aproxima? 4.4cm

h) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? sí

i) ¿Cuál? solo se pasa con 4 ml

Figura 127: Respuesta 3. Multiplicación de base por exponente al elevar al cuadrado

Por último, la cuarta respuesta (véase la Figura 128) la dieron 2/12 equipos (2 y 9), en ésta se muestra que el valor aproximado está bastante alejado del 4, esto se debe a que la longitud que dieron estos equipos para el segmento DE, está algo alejado del valor óptimo que es 2, por ello, al elevar al cuadrado esas longitudes, 2.3 y 2.5, se obtiene 5.29 y 6.25 respectivamente, además, como proximidad se obtienen 5 y 7, ésta última no es correcta, pues, el número más cercano es 6. Por tal motivo, estos equipos no encontraron ninguna relación con la aproximación del resultado obtenido de elevar al cuadrado la longitud del segmento DE y la longitud del segmento AD, pues los valores 5 y 6 están algo alejados del 4.


7. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 3? 4 cm
8. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 3? 2.3
9. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:
$2.3^2 = 2.3 \times 2.3 = 5.29$
6.9
4.6
5.29
g) ¿A qué valor se aproxima?
5
h) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
No
i) ¿Cuál?
Ninguna

7. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 3? 4 cm
8. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 3? 2.5 cm
9. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:
$2.5 \times 2.5 = 6.25$
g) ¿A qué valor se aproxima?
7
h) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
No
i) ¿Cuál?
Ninguna

Figura 128: Respuesta 4. Valor aproximado 5 y 6, muy alejado del óptimo que es 4

5

La pregunta 10 dice lo siguiente:

Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE?

Para esta pregunta, surgieron 5 respuestas diferentes, éstas se muestran a continuación:

La respuesta 1 (véase la Figura 129), que es la óptima, fue dada por 6/12 equipos (1, 7, 8, 10, 11 y 13), para ésta, se muestra que los alumnos llegaron a la conclusión de que extrayendo la raíz cuadrada a la longitud del segmento AD, se obtiene la longitud del segmento DE, sin embargo, solamente dos equipos lograron llegar a tal conclusión, los demás, la obtuvieron después de la situación de validación.

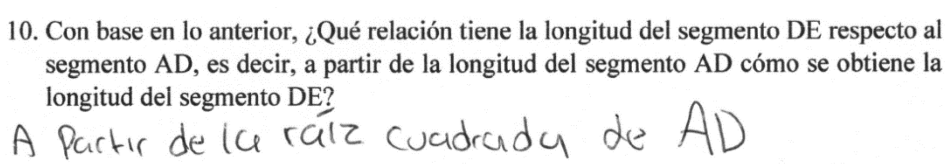

10. Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE?
A Partir de la raíz cuadrada de AD

Figura 129: Respuesta 1. Solución óptima

Luego, la respuesta 2, la obtuvieron 3/12 equipos (2, 6 y 9). En la Figura 130 se puede observar que la respuesta es correcta, pues es verdad la afirmación que hacen, sin embargo, no es la mejor respuesta porque la pregunta decía: ¿a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE? Y los alumnos contestaron como si la pregunta fuera: ¿a partir de la longitud del segmento DE cómo se obtiene la longitud del $\overline{AD}$? Por ello, aunque la respuesta es correcta, no es la óptima.

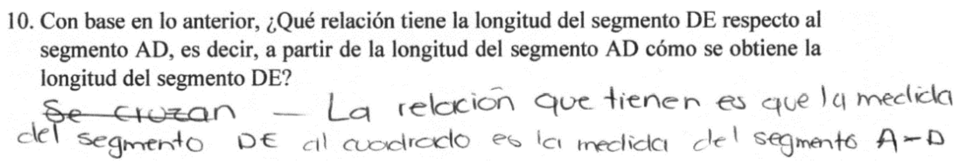

10. Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE?
~~Se cruzan~~ — La relación que tienen es que la medida del segmento DE al cuadrado es la medida del segmento A-D

Figura 130: Respuesta 2. Solución correcta pero no óptima

También, 1/12 equipos (5) proporcionó la respuesta que se aprecia en la Figura 131, los alumnos de ese equipo dijeron que DE es la mitad del segmento AD, seguramente, se dejaron llevar por los resultados de la construcción 3, pues, en ese único caso el segmento DE es la mitad del segmento AD.

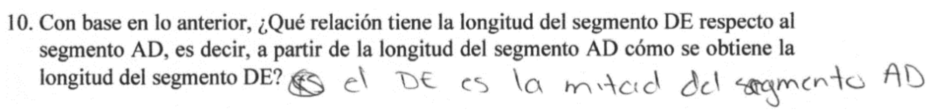

10. Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE? (5) el DE es la mitad del segmento AD

Figura 131: Respuesta 3. Errada

Otra de las respuestas, que es la cuarta (véase la Figura 132), se considera que tiene que ver con la respuesta 3, sin embargo, se cree que se equivocaron al escribirla, pues, en lugar de escribir que DE es la mitad del segmento AD, escribieron que el $\overline{AD}$ es la mitad del segmento DE (tal y como se muestra en la Figura 132), lo cual, no es verdad y no hay motivos para pensar en tal afirmación.

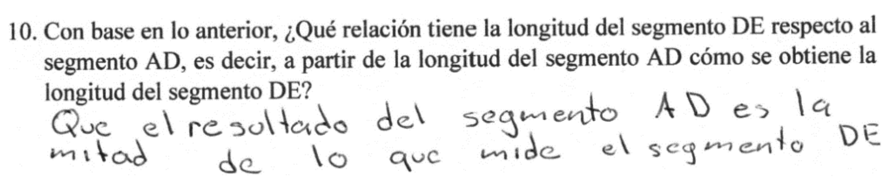

10. Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE?
Que el resoltado del segmento AD es la mitad de lo que mide el segmento DE

Figura 132: Respuesta 4. Relacionada con la 3, error en la escritura

Por último, la quinta respuesta la obtuvo el equipo 12 (véase la Figura 133), ellos, al parecer no encontraron relación alguna entre la longitud de los segmentos, sin embargo, tienen razón al decir que la longitud del $\overline{DE}$ se obtiene midiendo, pues es lo que lograron ver hasta el momento con las construcciones realizadas.

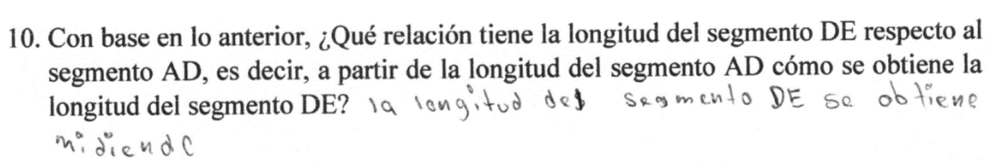

10. Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE? la longitud del segmento DE se obtiene midiendo

Figura 133: Respuesta 5. No encontraron relación entre los segmentos.

5.2.7 Situación de validación. Pregunta 10

Inmediatamente después de que la profesora-investigadora identificó que la mayoría de los equipos había dado respuesta a la pregunta 10, decidió pasar a tres equipos al pizarrón, éstos fueron: el equipo 1, 9 y 13, sin embargo, el equipo 2 manifestó que quería pasar al pizarrón a compartir su respuesta y la profesora-investigadora, por supuesto, les dijo que lo hicieran.

La pregunta que se decidió validar es la 10 y dice lo siguiente: Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE?

Esta es la pregunta que se eligió para hacer un momento de validación grupal, debido a que se considera la pregunta principal de la actividad 2, pues, es importante que todos o al menos la mayoría de los alumnos logren identificar que $DE = \sqrt{AD}$, de lo contrario, difícilmente podrán resolver las siguientes actividades, ya que solicitan que calculen la raíz cuadrada de 5, 7, 13 y 17. A continuación, se muestran los registros de cómo se llevó a cabo el momento de validación.

249	PI:	Pase al pizarrón por favor un integrante del equipo 13, equipo 9 y equipo 1. A ver (dirigiéndose a todo el grupo), sus compañeros van a escribir en el pizarrón lo que encontraron para la pregunta diez, ésta dice: Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene el segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE? Escriban en el pizarrón, los tres, qué pusieron como respuesta a esta pregunta.
250	A1-2:	¡Eh!, nosotros queremos.
251	A2-2:	Maestra, nosotros queremos pasar.
252	PI:	Pásenle.
253	A1-6:	¿Qué están haciendo maestra?
254	PI:	Van a escribir. A ver, otra vez va la instrucción: Van a escribir la respuesta de la pregunta diez (vuelve a leer la pregunta 10). Esta pregunta es para ver si todos tenemos la misma respuesta, sí no, ver por qué no. A ver, vamos a empezar con la respuesta de su compañera (señalando a A1-13), ella dice que se saca la raíz cuadrada al valor del segmento AD para obtener DE ¿están de acuerdo?, ¿todos tienen eso, que se saca la raíz cuadrada?
255	A:	No.
256	PI:	Levante la mano quien tenga el mismo resultado que su compañera (un equipo levantó la mano). Ok, nada más ustedes.
257	A:	¡Eh!, se copiaron.
258	PI:	A ver, el equipo 9 dice que se cruzan.
259	A1:	¿Qué se cruza?

260	PI:	Dice su compañero que ¿qué se cruza?
261	A2-9	El AD y DE.
262	PI:	Ok, pero aquí (en las hojas de trabajo) dice: ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD?
263	A2-9:	Es que todavía no lo acabábamos.
264	PI:	¡Ah!, está bien. El equipo uno puso que es la mitad, ¿la mitad de qué (pregunta a A1-1)?
265	A2:	La mitad del número.
266	PI:	¿La mitad de cuál número?
267	A1-6:	Del segmento AD.
268	PI:	A ver, ¿alguien tiene esa respuesta?
269	A1-7:	Sí, nosotros (levanta la mano).
270	PI:	Vamos a ver sí es cierto. Por ejemplo, en la construcción 1 ¿cuánto vale AD?, siéntense por favor (le dice a los alumnos que están en el pizarrón).
271	A1-6:	Dos centímetros.
272	A3:	Tres centímetros.
273	A1-6:	Pero dijo de AD.
274	PI:	Construcción 1 (escribe en el pizarrón), AD mide dos centímetros (escribe en el pizarrón $AD = 2\ cm$) y luego, ¿cuánto mide el segmento DE?
275	A4:	Mucho.
276	A1-6:	1.4.
277	A5:	1.45.
278	PI:	1.4, 1.5, les varió el valor ¿verdad? (escribe en el pizarrón $DE = 1.4\ cm$). ¿Si yo saco la mitad de dos me da uno punto cuatro?
279	A:	No.
280	PI:	¿Cuánto es la mitad?
281	A:	Uno.
282	PI:	Entonces, ¿podrá ser esta respuesta (señala lo que escribió el equipo 1: es la mitad)?
283	A:	¡No!.
284	PI:	Porque tiene que aplicar para todas las construcciones ¿eh?, a lo mejor aplica para la construcción tres, pero no para la uno y la dos.
285	A1-6:	Pero, a partir de que hacemos el cuadrado de uno punto cuatro y luego dice a qué número se aproxima pues da dos. Entonces, por eso decimos que es la mitad.
286	PI:	Escribe en el pizarrón $(1.4)^2 \approx 2$
287	A1-6:	¡Ah! (ve a su compañera y le da risa).
288	PI:	Pero fíjate, tú lo acabas de decir, aquí se está elevando al cuadrado ¿verdad? No multiplicando por dos.
289	A1-6:	No, al cuadrado.
290	PI:	Entonces, si fuera por dos, otra cosa sería pero aquí estamos elevando al cuadrado y se aproxima al valor, esto ($\approx$), significa aproximar. Entonces, fíjense ¿puede ser la mitad o no?

291	A1-6:	Sí.
292	PI:	¿Sí?
293	A1-6:	No.
294	A1-6:	Puede ser la mitad de dos.
295	PI:	No, porque DE es uno punto cuatro y eso no es la mitad de dos.
296	A1-6:	Entonces, va a ser la de la raíz cuadrada.
297	PI:	La de la raíz cuadrada ¿será? ¿Entonces sí es la de la raíz cuadrada, estamos todos de acuerdo?
298	A1-6:	Pero la respuesta dice: DE, es la mitad de la construcción AD cuando se saca el cuadrado de DE y vale lo mismo que AD (se ríe).
299	A2-2:	¿Entones la de nosotros está mal? (hasta este momento la profesora-investigadora había olvidado la respuesta de este equipo).
300	PI:	A ver, no hemos revisado todas las respuestas, ésta (señalando la respuesta del equipo dos) dice: La relación que tienen es que la medida del segmento DE al cuadrado es la longitud de AD. No, no está mal, sí es verdad. Estamos diciendo que: $(DE)^2 = AD$ (escribe en el pizarrón). Eso dicen ellos, pero ahora, si yo tengo este (señala AD en el pizarrón), ¿cómo obtengo éste (señala DE en el pizarrón)?
301	A2-2:	¡Eh!, ¿Dividiendo entre dos?
302	PI:	A ver, dividiendo entre dos quitamos éste (señalando el exponente dos)
303	A:	Más bien sería la raíz cuadrada de AD.
304	A2-2:	Aaaaa sí, raíz cuadrada.
305	PI:	A ver, ¿aquí (señala en el pizarrón $\sqrt{DE^2} = \sqrt{AD}$) estamos de acuerdo?
306	A6:	Sí.
307	A2-2:	No, pero ¿por qué?
308	A1-6:	Pero ¿por qué la raíz cuadrada?
309	PI:	Porque la raíz cuadrada es la operación inversa del cuadrado
310	A1-6:	¡Ah!, sí.
311	PI:	Por eso, $DE = \sqrt{AD}$ (escribe en el pizarrón). ¿De acuerdo o no?
312	A:	Sí.

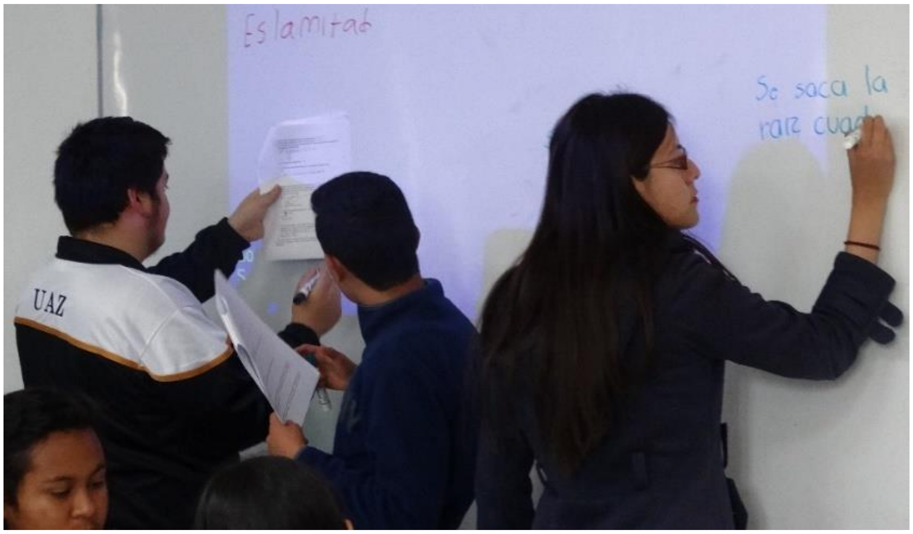


Figura 134: Diferentes equipos escribiendo sus respuestas

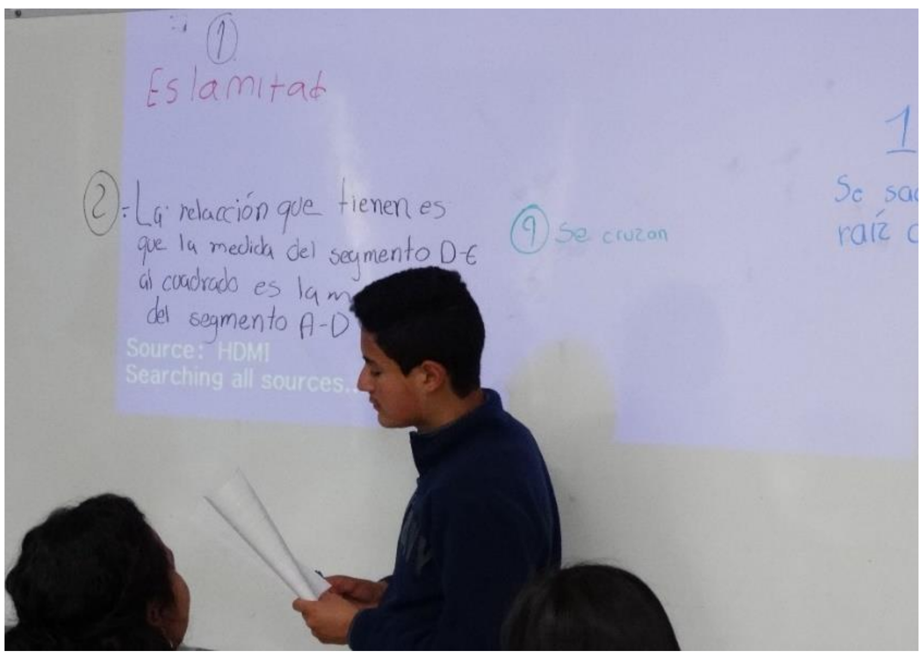


Figura 135: Momento de validación

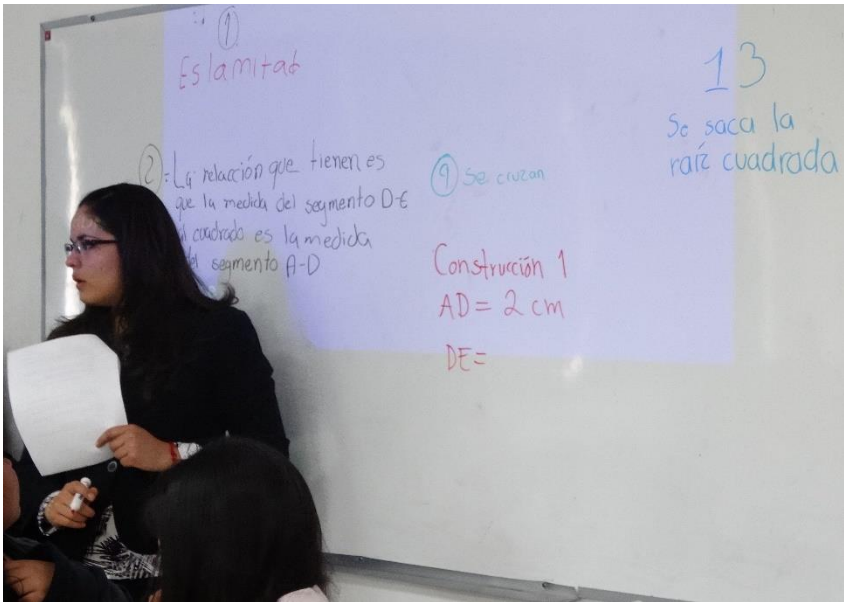


Figura 136: Intervención de la profesora en el momento de validación

De los registros anteriores se puede observar que no fue suficiente la explicación de los alumnos que pasaron al pizarrón, pues, la profesora-investigadora tuvo que intervenir debido a que pudo observar que la mayoría de los equipos estaban de acuerdo con la repuesta: DE es la mitad de AD, esto no podía permitir que quedara así porque no podrían contestar las siguientes actividades, entonces, aunque no les dijo la respuesta, los hizo reflexionar mediante preguntas, poniendo como ejemplo la construcción 1 para que los alumnos se dieran cuenta que DE no era la mitad de AD, sin embargo, la alumna A1-6 no estaba convencida todavía que esa no fuera la respuesta, pero como la profesora le hizo varias preguntas, finalmente, ella dijo: entonces la respuesta es la de la raíz cuadrada, sin embargo, cuando se comentó la respuesta del equipo 2, el equipo 6 se inclinó por esa respuesta y no por la de se saca la raíz cuadrada.

También, fue muy interesante ver que el equipo 2 decidió pasar a compartir su respuesta, esto deja ver que los alumnos estaban interesados en la actividad y que estaban muy seguros de su respuesta y aunque es correcto lo que dicen, la pregunta decía: a partir de la longitud del segmento AD ¿cómo se obtiene la longitud del segmento DE? Y aunque en el pizarrón se llegó a que $DE = \sqrt{AD}$ este equipo no complementó su respuesta, siguió dejando la que tenía cuando pasó al pizarrón, además, otros dos equipos aparte de éste escribieron esta respuesta, incluido el equipo 9 que había escrito se cruzan, cuando pasó al pizarrón.

Finalmente, la respuesta óptima la dieron 6/12 equipos, esto es bueno, porque al principio solamente 2/12 equipos la habían dado, esto significa que el momento de validación fue importante, pues, algunos equipos cambiaron su respuesta por la óptima, otros, aunque no dieron la óptima, dieron la del equipo 2, lo cual también es correcto y únicamente 3/12 equipos dieron una respuesta incorrecta.

5.2.8 Situación de formulación. Calcular raíz de 5

Esta actividad pedía lo siguiente:

Si en este momento tuvieras que calcular $\sqrt{5}$, ¿Cómo lo harías? ¿Podrías apoyarte de las construcciones anteriores? Hazlo en una hoja milimétrica y escribe el resultado a continuación:

$\sqrt{5} =$

Las respuestas que surgieron para este cálculo fueron 4, entre ellas, se encuentra el valor óptimo, el resto corresponde a valores cercanos al óptimo. También, es importante aclarar desde ahora, que 2/12 equipos (10 y 12) no contestaron a esta actividad. Las respuestas se muestran a continuación:

La respuesta 1 (véase la Figura 137), que es la óptima, fue dada por 5/12 equipos (2, 7, 11, 13 y 14), en ésta, se puede notar que los alumnos dieron las medidas adecuadas a cada uno de los segmentos, es decir, $\overline{\text{AB}} = 6\ cm,\ \overline{\text{AD}} = 5\ cm$, el radio de la semicircunferencia es 3 cm y $\overline{\text{DE}} = 2.2\ cm$. Esto deja ver la precisión en las medidas que tomaron estos equipos, pues, $\sqrt{5} \approx 2.2360679775$, de esto, se desprende que el valor más aproximado que se puede obtener en lápiz y papel es 2.2, por ello, este es el valor óptimo.

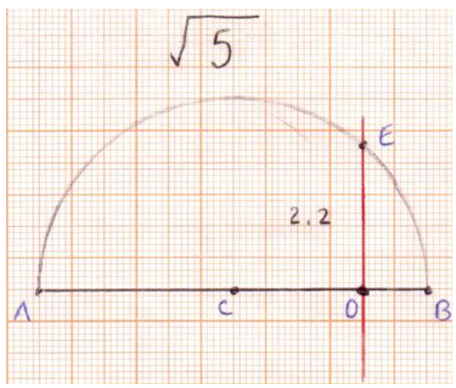


Figura 137: Respuesta 1. Valor óptimo

Por otra parte, la respuesta 2 (véase la Figura 138), fue proporcionada por 3/12 equipos (1, 5 y 6), en ésta, se puede observar que la semicircunferencia no toca los puntos A y B, pues pasa ligeramente a la izquierda de A y ligeramente a la derecha de B, por ello, el valor que se obtiene para el $\overline{\text{DE}}$ es un milímetro mayor que el valor óptimo. Sin embargo, la respuesta es correcta porque no debe de olvidarse en ningún momento que es una **aproximación** a la $\sqrt{5}$, si bien, hay unas aproximaciones mejores que otras, todas son correctas. Además, es muy interesante ver que estos equipos escribieron $\sqrt{5} \approx 2.3$, se cree que esto lo escribieron porque la profesora-investigadora usó tal símbolo en Geogebra, pero no deja de ser interesante que los alumnos tomaron en cuenta esto para dar su respuesta, pues, otros equipos utilizaron el símbolo de igualdad.

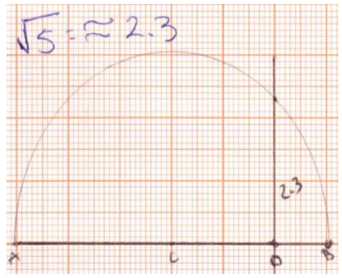


Figura 138: Respuesta 2. 1 mm mayor

que el valor óptimo

Luego, la respuesta 3 fue proporcionada por el equipo 9, en ella, se puede notar que los alumnos tomaron $\overline{\text{AB}} = 5\ cm,$ en lugar de $6\ cm$, es decir, no identificaron que el segmento que debe medir 5 cm es AD. Por otra parte, en la Figura 139 se puede observar que la longitud AB es un poco mayor a 5, pero la idea principal aquí es que los alumnos no lograron identificar que el $\overline{\text{AB}}$ debe medir 1 cm más que $\overline{\text{AD}}$. Por tal motivo, obtuvieron un valor para el $\overline{\text{DE}}$ cercano al óptimo pero no éste, sin embargo, se considera muy bueno, porque se debe recordar que es una **aproximación** al valor de la $\sqrt{5}$.

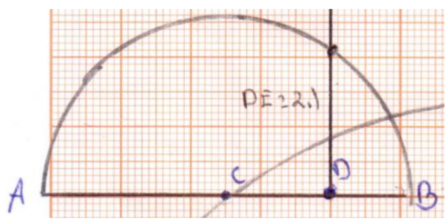


Figura 139: Respuesta 3. 1 mm menor

que el valor óptimo

Finalmente, la respuesta 4 fue dada por el equipo 8, en la Figura 140 se puede observar que aunque este equipo logró identificar que el $\overline{\text{AD}}$ debe medir 5 cm, $\overline{\text{AB}}$, 6 cm y aunque al parecer abrieron el compás a 3 cm, en dicha figura se observa que la semicircunferencia no toca los puntos A y B, pues pasa ligeramente a la derecha de ambos puntos, por ello se considera que el valor que obtuvo este equipo para el $\overline{\text{DE}}$ es 2 mm mayor al valor óptimo (2.2), es decir, la estrategia fue buena, pero hubo errores de trazo, sin embargo, aunque no es el mejor resultado que pudieron obtener, no está mal, pues recuerde que es una **aproximación** a la raíz cuadrada.

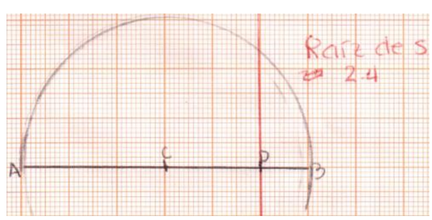


Figura 140: Respuesta 4. 2 mm mayor que el valor óptimo

5.2.9 Situación de formulación. Calcular raíz de 13

Esta actividad solicitó lo siguiente:

II.- Instrucciones: Con base en lo anterior, calcula el valor de lo siguiente en las hojas milimétricas y escribe el resultado a continuación:

a) $\sqrt{7} =$

b) $\sqrt{13} =$

c) $\sqrt{17} =$

Es importante mencionar que de esta actividad se analizará únicamente lo que hicieron los equipos para calcular el valor $\sqrt{13}$, los otros no serán analizados (pero los puede ver en los anexos D y E) debido a que hicieron cosas similares y lo que se muestra a continuación es un ejemplo, para dar cuenta al lector de lo que hicieron los alumnos. También se comenta desde ahora que nuevamente 2/12 equipos (10 y 12) no contestaron a esta actividad, esto tal vez se debe a que no supieron cómo hacerla. Luego, surgieron 5 respuestas diferentes para el cálculo de esta raíz cuadrada, éstas se muestran a continuación:

La respuesta 1 fue proporcionada por 6/12 equipos (2, 5, 6, 7, 11 y 13), es decir, la mitad del grupo, esta respuesta es considerada la óptima, pues, la $\sqrt{13} \approx 3.6055512755$, entonces, el valor al que más se podían acercar en lápiz y papel es 3.6, por ello, este valor es considerado la solución óptima. En la Figura 141, se muestra que las medidas fueron muy precisas, incluso en la apertura del compás que utilizaron, pues en la misma figura se puede notar que la semicircunferencia toca los puntos A y B. Por otra parte, los equipos lograron identificar que el $\overline{AD}$ debe medir 13 cm y el $\overline{AB}$, 14 cm, por todo ello, lograron obtener el valor óptimo.

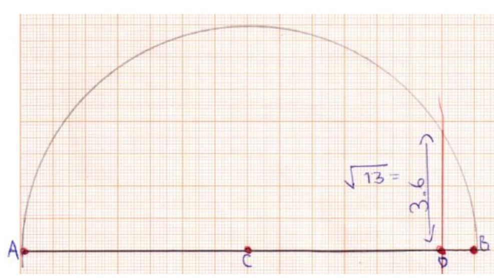


Figura 141: Respuesta 1. Valor óptimo

Luego, la respuesta 2 fue dada por el equipo 8, este valor es muy aproximado al óptimo, sin embargo, es 1 mm menor que el valor óptimo debido a que la apertura del compás fue menor a 7 cm, esto se puede observar en la Figura 142, pues se aprecia que la semicircunferencia toca al punto A, pero no al B (pasa ligeramente a la izquierda de este), por tal motivo, la longitud del segmento DE fue 1 mm menor al valor óptimo. De cualquier forma, este valor es considerado excelente pues recuerde que se está **aproximando** la raíz cuadrada mediante lápiz y papel.

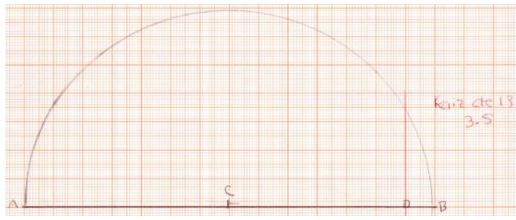


Figura 142: Respuesta 2. 1 mm menor

que el valor óptimo

También, se obtuvo la respuesta 3 por parte del equipo 14, ésta se puede observar en la Figura 143 y, aunque no escribieron la longitud en la construcción, en las hojas de trabajo dijeron que $\sqrt{13} = 3.4$, es decir, 2 mm menor que el valor óptimo, este valor no se logra identificar porque fue menor al óptimo, pues al parecer, la construcción está muy bien realizada, ya que, todos los segmentos miden lo que deben de medir, y la semicircunferencia toca tanto el punto A como el B, tal longitud puede deberse entonces a que no midieron bien el segmento DE, sin embargo, la **aproximación** a la $\sqrt{13}$ sigue siendo muy buena.

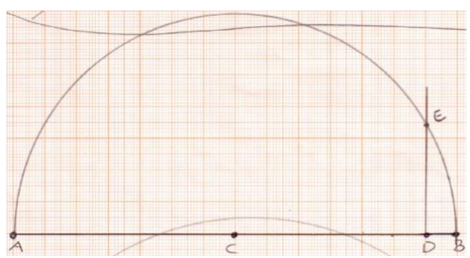


Figura 143: Respuesta 3. 2 mm menor

que el valor óptimo

Por otra parte, se obtuvo la respuesta 4 (véase la Figura 144), que fue dada por el equipo 1, si bien esta aproximación es buena, no es tanto como las anteriores, pues en esta respuesta hay 4 mm de diferencia del valor óptimo, sin embargo, igual que la respuesta anterior, se desconoce por qué este equipo obtuvo como longitud para el $\overline{\text{DE}}$ 3.2 cm, ya que su construcción es muy buena, las medidas son tal y como deben de ser y la semicircunferencia pasa por los puntos A y B, tal vez, ese resultado se deba a que tampoco midieron bien el segmento DE, probablemente, comenzaron a medir con el punto D a la izquierda del cero, o algo así.

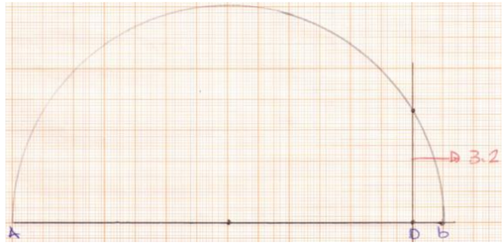


Figura 144: Respuesta 4. Valor alejado

del óptimo, 4mm menor

Finalmente, la respuesta 5 que dio el equipo 9, se muestra en la Figura 145, en ella se aprecia que este equipo otorga el valor de 13 cm al segmento $\overline{AB}$, en lugar de dárselo al segmento AD, luego, toman el segmento AD como 11 cm, sin embargo, el valor que obtienen no es nisiquiera la $\sqrt{11}$, pues, de D a B hay aproximadamente 2 cm de distancia, mientras que debería ser 1 cm. Por ello, el valor que obtienen es $\overline{DE}$=4.6 cm.

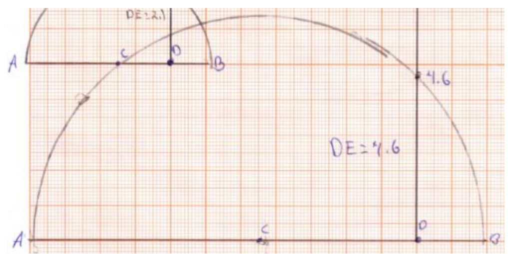


Figura 145: Respuesta 5. Valor muy alejado del óptimo,

1 cm mayor

5.2.10 Situación de formulación. Obtener valores mediante el uso de la calculadora

La actividad solicitó lo siguiente:

III.- Instrucciones: Por medio de la calculadora obtén los valores para las siguientes expresiones (escribe todos los decimales que salgan en la calculadora).

a) $\sqrt{5} =$
b) $5^{\frac{1}{2}} =$

¿Qué observas en estos dos valores?

c) $\sqrt{7}$=
d) $7^{\frac{1}{2}} =$

¿Qué observas en estos dos valores?

e) $\sqrt{13} =$

f) $13^{\frac{1}{2}} =$

¿Qué observas en estos dos valores?

g) $\sqrt{17} =$

h) $17^{\frac{1}{2}} =$

¿Qué observas en estos dos valores?

Para esta actividad se analizarán los incisos d) y e) a manera de ejemplo, pues, para los demás incisos, las respuestas encontradas son muy similares. También, se analizará la pregunta que dice: ¿Qué observas en estos dos valores? Las respuestas que se encontraron para esta parte son 3 diferentes y se muestran a continuación:

La respuesta 1, que es la óptima, se encontró en 9/12 equipos (1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11), ésta se muestra en la Figura 146, en ella se puede notar que los alumnos encontraron que el valor es el mismo y además, dicen que son formas distintas pero dan el mismo resultado.

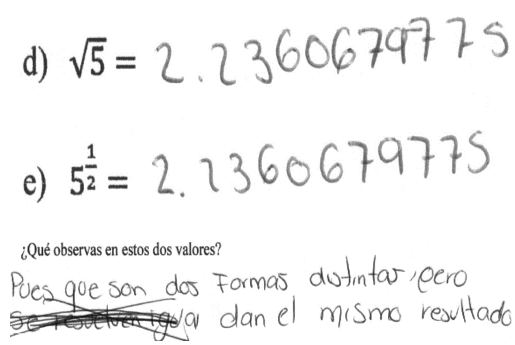


Figura 146: Respuesta 1. Solución óptima

Luego, la respuesta 2 (véase la Figura 147) fue obtenida por los equipos 12 y 14, en ésta, se puede apreciar que los alumnos dan la respuesta óptima para el inciso d), sin embargo, para el inciso e) no lo hacen, en ese inciso se puede observar que al parecer, los equipos pensaron que $5^{\frac{1}{2}}$, es una fracción mixta, pues suman $5 + \frac{1}{2}$ lo cual da como resultado 5.5. La pregunta no la contestaron, por ello no se muestra la figura.

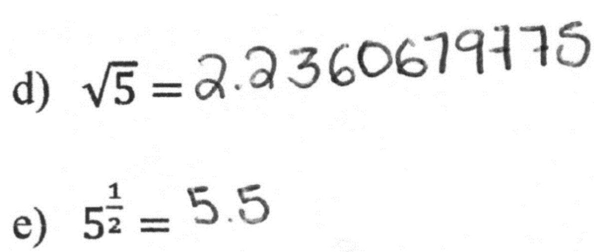
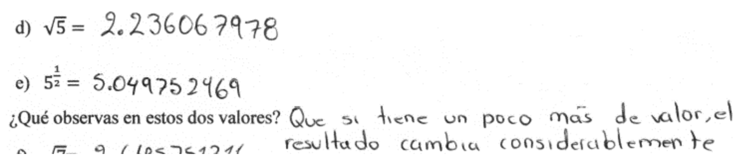


Figura 147: Respuesta 2. Suma de base y exponente

Finalmente, la respuesta 3 se obtuvo del equipo 13, en la

Figura 148 se puede observar que la respuesta para el inciso d) es la óptima, sin embargo, para el inciso e) no lo es, ésta respuesta no se sabe cómo la obtuvieron los alumnos, pues no sumaron la base y el exponente, tampoco multiplicaron, no restaron, entonces, no se logró identificar qué hicieron para obtener tal respuesta. Luego, debido a esto, en la pregunta contestaron que el valor del inciso e), cambia considerablemente respecto al del inciso d), esto es lógico, debido a que los valores que ellos obtuvieron efectivamente son muy diferentes.


d) $\sqrt{5}$ = 2.236067978

e) $5^{\frac{1}{2}}$ = 5.049752469

¿Qué observas en estos dos valores? Que si tiene un poco más de valor, el resultado cambia considerablemente

Figura 148: Respuesta 3. Valor erróneo para el inciso e),

se desconoce su procedencia

5.2.11 Situación de institucionalización

Finalmente, la situación de institucionalización, se llevó a cabo por parte de la profesora-investigadora, de manera similar a como se hizo en la actividad 1, la profesora, decidió retomar algunos aspectos de la actividad 2 para poder dar la definición de exponente racional (en específico 1/2), es decir, tomó la parte III de la actividad 2, preguntó a los alumnos qué resultados obtuvieron para $\sqrt{5}$, $5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{7}$ y $7^{\frac{1}{2}}$, una alumna comentó que daba el mismo resultado en $\sqrt{5}$ y $5^{\frac{1}{2}}$ debido a que es lo mismo sólo que se representa de diferente manera, esto justamente, dio pie a que la profesora-investigadora enunciara la propiedad $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ y finalmente mostró en Geogebra la construcción para raíz de cinco y agregó más decimales para que notaran que el resultado es el mismo que el de la calculadora. La actividad 2 concluyó como se muestra en los siguientes registros.

313	PI:	Raíz cuadrada de 5 ¿Cuánto les da?
314	A1:	¿En la calculadora o en la construcción?
315	PI:	En la calculadora
316	A1:	2.23620798
317	PI:	¿Y en cinco a la un medio?
318	A1-9:	Era lo mismo, nada más se representaba de diferente manera.
319	PI:	¡Ah! ok, muy bien.
320	A1-2:	¿Sí es lo mismo?

321 PI: Sí, es lo mismo. Su compañera dice que porque se representa de diferente manera. Por eso, raíz cuadrada de cinco y cinco a la un medio es igual ¿verdad?, según lo que ustedes encontraron en la calculadora, ¿estamos de acuerdo?

322 A: Sí.

323 PI: Entonces, raíz cuadrada de siete ¿a qué va a ser igual? O sea, por ejemplo, raíz cuadrada de cinco es igual a cinco a la un medio ¿aquí (señala raíz cuadrada de 7) a qué es igual ?.

324 A2: A siete a la un medio.

325 PI: Ok, ¿sí obtuvieron eso en la calculadora?

326 Todos: Siiiii.

327 PI: Entonces, raíz cuadrada de trece también es igual a trece a un medio ¿verdad? Bueno así también con raíz cuadrada de diecisiete.

328 A: ¡Sí!.

329 PI: Esto es una propiedad de los exponentes: La raíz cuadrada de a, donde a es un número natural, es igual a a a la un medio $\left(\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}\right)$ donde a pertenece a los naturales ¿sí?, ¿estamos de acuerdo?, ¿sí habían visto esa propiedad ustedes?

330 A1-6: No, pero ya la conozco.

331 PI: Ok, muy bien, ahora ya nada más para finalizar quiero mostrar algo en Geogebra.

332 PI: Aquí (en Geogebra) nada más quiero que observen algo, por ejemplo, nosotros sacamos la raíz cuadrada de cinco ¿verdad?

333 A: Sí.

334 PI: Ahí (en Geogebra) tenemos raíz cuadrada de cinco y nos da que es aproximadamente 2.23, ¿sí se ve?

335 A1-2: Sí lo que nos dio en la calculadora.

336 PI: Ajá, ¡ah! ok, les dio lo mismo aquí que en la calculadora porque obtuvimos muchos decimales ¿verdad?

337 A: Sí.

338 PI: Entonces, nada más quiero que les quede claro que esta construcción fue para sacar raíces cuadradas, por ejemplo aquí, sacamos la raíz cuadrada de cinco, que es aproximadamente 2.23 y todo eso que les da en la calculadora ¿verdad?

339 A: SÍ.

340 PI: Nos da lo mismo aquí, aquí Geogebra nos da exactamente igual que en la calculadora, porque Geogebra calcula con mucha precisión, pero nosotros en la hoja de papel no podemos ser tan precisos, pues, sólo podemos encontrar un decimal, por ejemplo, si encontraron que era 2.2 o 2.3 está bien porque lo que encontraron es una aproximación de la raíz cuadrada, ¿sí?

De todas maneras aunque lo hagamos en Geogebra sigue siendo aproximación, porque los números irracionales tienen una cantidad infinita de decimales, o sea, nunca terminan los decimales, por eso, le ponemos el símbolo de aproximado ¿sí?

341 A: Sí.

342 PI: Entonces, calculamos hoy la raíz cuadrada de manera geométrica, bueno una aproximación, entonces, por ejemplo, si un día les preguntan, a ver, ¿ustedes saben calcular la raíz cuadrada sin calculadora? Pues ya saben un método ¿verdad?

343 A: Sí.

5.3 Etapa de validación de la ingeniería didáctica

5.3.1 Actividad 1

5.3.1.1 Situación de acción Actividad 1

Lo esperado para esta situación se modificó en el momento en el que se empezaron a analizar los datos, pues, dentro del análisis a priori, se tomó la parte I de esta actividad como parte de la situación de acción, sin embargo, al comenzar a analizar los datos obtenidos en la experimentación, las autoras de este trabajo se dieron cuenta de que la parte I pertenece más a la situación de formulación que a la de acción.

Respecto a lo que siguió igual dentro de la situación de acción, todo se llevó a cabo tal y como se consideró en el análisis a priori, pues, se formaron los equipos, se repartió el material didáctico, el cual resultó atractivo para los alumnos, la profesora-investigadora leyó el planteamiento del problema, el cual la mayoría de los alumnos comprendió tal y como se esperaba, posterior a ello, los alumnos empezaron a interactuar con el material didáctico dándose la devolución, lo cual también fue planteado en el análisis a priori.

5.3.1.2 Situación de formulación parte I

En el análisis a priori la parte I de esta actividad, se había considerado ésta dentro de la situación de acción, sin embargo, al realizar el análisis de datos, se identificó que es parte de ambas situaciones, es decir, de la situación de acción y de formulación debido a que están pensando en una estrategia para resolver el problema, están tomando decisiones (situación de acción) pero también están formulando, pues, están colocando los conejitos en el tablero y escribiendo sus respuestas en las hojas de trabajo, por ello, se decidió que esta parte encaja más en esta situación.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede decir que la mayoría de los equipos contestó a las preguntas tal y como se tenía pensado en el análisis a priori, es decir, dieron la solución óptima, pues, contestaron que en la hora 1 hay 3 conejos infectados, en la hora 2 hay 9, en la hora 3, 27 y en la hora 4, 81, no obstante, 2/11 equipos no lograron dar las respuestas ideales desde el inicio, pues, uno de esos equipos dio la solución correcta para la hora 1 y 2 pero para el resto dio otras, luego, el otro equipo dio respuestas no óptimas para todas las horas, sin embargo, ambos equipos lograron modificarlas en la etapa de validación.

Por otra parte, se puede decir que el material didáctico que se implementó para esta parte fue bueno, pues, los alumnos se motivaron al verlo y además les ayudó a dar las soluciones óptimas para cada una de las preguntas, pues, se pudo identificar que agrupaban conejitos, por ejemplo, para pasar de la hora 1 (3 conejitos con el virus) a la hora 2 (9 conejitos), los alumnos tomaron cada uno de los conejitos de la hora 1 y le asignaron 3 a cada uno de ellos, y así lograron obtener la respuesta óptima, un razonamiento similar se utilizó para obtener la cantidad de conejos de la hora siguiente. Entonces, el material didáctico cumplió el objetivo que era justamente que los alumnos obtuvieran las respuestas óptimas y se motivaran para contestar la actividad, se cree que no se hubieran obtenido los mismos resultados sin tal material didáctico empleado.

5.3.1.3 Situación de validación parte I

En esta situación, se esperaba que los alumnos fueran capaces de argumentar sus respuestas, es decir, que pasaran al pizarrón, las compartieran y además trataran de convencer a los demás equipos de que esa era la correcta. Las preguntas que se validaron son: ¿Cuántos conejos se contagiarán del virus en la hora 2? y ¿En la hora 4? Esto resultó tal y como se había planeado en el análisis a priori.

También, la profesora-investigadora pasó a dos alumnos al pizarrón, éstos fueron de equipos diferentes, se consideró a un equipo que dio las dos respuestas correctas y a otro que no, este último únicamente tenía la respuesta correcta para la primera pregunta y para la otra no, ya que tenía 27 en lugar de 81 conejitos.

En esta validación, el equipo "chiquis" que dio las respuestas correctas, logró convencer al equipo "dos" de que cambiaran su respuesta, pues, posteriormente se pudo notar en las hojas de trabajo, que este equipo cambió su respuesta para la hora 3 y 4, ya que ambas las tenían incorrectas, y aunque en el pizarrón únicamente se validaron las preguntas para la hora 2 y 4, cuando el equipo "chiquis" explicó que ellos tenían 81 conejitos como respuesta para la hora 4, debido a que multiplicaron por 3 los 9 conejitos de la hora 2, por lo que obtuvieron 27 para la hora 3 y luego multiplicaron 27×3 lo cual les dio como resultado 81 conejitos para la hora 4.

Entonces, esta situación de validación salió tal y como se esperaba en el análisis a priori, sin embargo, el equipo "conejitos" que tenía respuestas no óptimas no logró cambiar sus respuestas con la explicación de sus compañeros, para que lograran hacerlo necesitaron de la intervención de la profesora-investigadora en su equipo, pues, con las preguntas que ella les hizo, lograron obtener la respuesta óptima.

5.3.1.4 Situación de formulación parte II

Esta parte fue dividida en dos secciones para el análisis de datos ya que es extensa y además las preguntas son diferentes en cada una de ellas, por ello, para esta etapa de validación se hará de la misma manera, es decir, por sección.

Sección I

Para esta sección, se consideraron como respuestas óptimas dentro del análisis a priori las siguientes:

a) $1 \times 3 = 3$
b) $1 \times 3 \times 3$=9
c) $1 \times 3 \times 3 \times 3$=27
d) $1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$=81

Estas respuestas solamente las proporcionó uno de los equipos, sin embargo, los demás equipos que fue la mayoría (8/11 equipos) respondieron:

a) 1×3=3
b) $3 \times 3 = 9$
c) $9 \times 3 = 27$
d) $27 \times 3 = 81$

Es importante aclarar que estas respuestas, aunque no son las óptimas, son correctas y además estaban consideradas como hipótesis dentro del análisis a priori.

Sección II

Respecto a esta sección, las respuestas fueron muy variadas, pues, únicamente, 3/11 equipos lograron dar la respuesta óptima para todas las preguntas (excepto para la última), otros 3/11 equipos dieron como solución: 1×3, 3×3, 9×3 y 27×3, éstas aunque no son las óptimas fueron consideradas dentro del análisis a priori, respecto al resto de los equipos, se puede decir que sus respuestas son algo diversas y no consideradas dentro del análisis a priori, pues, por ejemplo, un equipo aunque sabía que la simplificación era la notación exponencial, no supieron cómo escribir dicha expresión, pues, colocaron la cantidad de conejos que obtuvieron para la parte I y como exponente pusieron el 3, es decir, $3^3, 9^3, 27^3$ y 81^3.

Respecto a lo anterior, se puede comentar que otros 3/11 equipos dieron la respuesta óptima para los incisos c) y d) pero para el inciso a) y b) expresaron 1^1 y 1^3, por último, el equipo restante también sabía que la notación exponencial simplificaba las expresiones, pero como tenían respuestas incorrectas en la sección I, esto afectó para que no pudieran dar las respuestas óptimas, sin embargo, es el único equipo que logró proporcionar la respuesta ideal para la última pregunta, es decir, dijo que la expresión que representa la cantidad de conejos infectados para la hora 0 es 3^0.

5.3.1.5 Situación de validación parte II

En el análisis a priori se comentó que se validarían las preguntas: ¿Qué operaciones realizaste para obtener la cantidad de conejos que hay en la hora 3, es decir, ¿cuál fue tu respuesta para el inciso c)? y ¿Podrías dar una expresión que simplifique la operación del inciso c)? Además, se pidió a los integrantes de dos equipos que pasaran al pizarrón para que compartieran su respuesta con sus compañeros, se eligió a un equipo que tenía la respuesta óptima "amigos" y a uno que no la tenía "conejitos". Por lo anterior, se puede decir que esto se dio tal y como se tenía previsto en el análisis a priori.

Por otra parte, lo que no se cumplió es que ninguno de los integrantes de los equipos fue capaz de convencer a sus compañeros, de cambiar sus respuestas. Por ejemplo, la integrante de "conejitos" tenía la solución óptima para la primera pregunta de la validación y este momento era para que la profesora hubiera aprovechado para hacer preguntas a todo el grupo como: ¿Con cuál respuesta están de acuerdo? A lo que se considera que la mayoría de los equipos habría contestado que con la de “amigos”, pues, 7/11 equipos dieron la misma solución que ellos.

Otra pregunta podría haber sido: ¿Qué decía la pregunta (dirigida a todo el grupo)?, después de que alguien le diera lectura, la profesora podría haber indagado ¿Cuál es el resultado de la operación anterior?, incluso, podría haberse regresado a la pregunta referente a la hora 2 y cuestionar a partir de la operación anterior (hora 1) sin el resultado ¿cómo obtendrían la cantidad de conejos para la hora 2?, sin embargo, no lo hizo y se cree que por eso ninguno de los equipos cambió su respuesta, pues no se hizo reflexionar a los alumnos respecto a ésta.

Después, el integrante del equipo “amigos” tampoco hizo cambiar de opinión a sus compañeros, él tenía la respuesta óptima, sin embargo, la profesora-investigadora tampoco hizo más preguntas, solamente dejó a los alumnos que expusieran su respuesta y que explicaran porque la obtuvieron pero no cuestionó al resto del grupo, por ejemplo: ¿Cuál creen ustedes que es la respuesta más simplificada ?, ¿Por qué?, ¿Están de acuerdo con la solución de alguno de sus compañeros?, ¿Alguien tiene algo diferente?, etc.

Entonces, se considera que no se cumplió la hipótesis del análisis a priori, ya que se esperaba que los alumnos que tenían respuestas diferentes tomaran alguna de sus compañeros, pero esto no ocurrió.

5.3.1.6 Situación de formulación parte IV

Para esta parte, la mayoría de los equipos (7/11) dio la respuesta óptima, es decir, escribieron como respuestas: $3^{20}, 3^{70}$ y 3^{100}, otro equipo, aunque dio esta respuesta, adelante escribió: $3 \times 20, 3 \times 70$ y 3×100, lo cual indica que siguen cometiendo el error reportado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007) de multiplicar la base por el exponente. Otros 2/11 equipos escribieron: $x * 3$, “donde *x* es el resultado de la hora anterior y 3 los conejos infectados por cada hora”.

Únicamente 1/11 equipos respondió de manera muy general, pues dijeron que la respuesta era suma para el inciso a) y multiplicación para los incisos b) y c).

En general, se puede decir que se cumplió la hipótesis del análisis a priori, pues, la mayoría de los equipos dio la respuesta óptima, y aunque 2/11 equipo no dieron una expresión exponencial, su razonamiento lo es, lo cual indica que tuvieron un gran acercamiento a la respuesta esperada.

5.3.1.7 Situación de validación parte IV

Para esta situación, se tenía previsto validar las preguntas: ¿Cómo obtendrías la cantidad de conejos que se van a infectar del virus “atacón” en la hora 70?, ¿Y en la hora n? Sin embargo, la segunda no fue validada por cuestiones de tiempo, ya que en este momento había algunos equipos que ya habían terminado toda la actividad y estaban desesperados por salir.

Para la validación de la primer pregunta, se pasó al pizarrón a un integrante de dos equipos diferentes para que compartieran su respuesta con el resto del grupo, para ello, la profesora-investigadora previamente se encargó de ubicarlos, luego, pidió que pasarán: "Grey" (respuesta óptima) y "chiquis", debido a que la respuesta de este último llamó su atención, porque tenían escrito $x * 3$ "donde *x* es el número de horas".

Aunque esta última respuesta parece que nuevamente exhibe el error de multiplicar la base por el exponente reportado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007) no es así, pues, la idea de los alumnos no era ésta, ya que contestaron a la parte I de esta actividad de manera correcta y cuando el integrante de este equipo explicó la respuesta, decía que para la hora 2 iba a haber 9 conejos con el virus, a pesar de tener la fórmula que se mencionó anteriormente, sin embargo, la profesora-investigadora dijo: "pero si *x* representa el número de horas, eso indica que la cantidad de conejos para la hora 2 sería 2×3 y eso ¿cuánto es?" Algunos alumnos contestaron que seis, pero el integrante de "chiquis" dijo que nueve, la profesora preguntó ¿Por qué nueve? A lo que el alumno contestó que era porque se tomaban los conejos de la hora anterior y luego multiplicaban por 3.

Entonces, la compañera de equipo sugirió que *x* debe representar la cantidad de la hora anterior, a lo que el resto del grupo dijo que sí. Posterior a esto, otro equipo ("miji") puso como respuesta la que dijeron sus compañeros ("chiquis"), ya con el entendido de que *x* representa la cantidad de la hora anterior. Esto indica que la validación fue buena, ya que uno de los equipos logró convencer a otro para que pusieran su respuesta, sin embargo, no se logró que los que tenían otras soluciones la cambiaran por la óptima, pero, por lo menos el equipo "chiquis" corrigió su error.

5.3.1.8 Situación de formulación parte V

En esta actividad, se tenía contemplado dentro del análisis a priori que la respuesta óptima es: 3^n, sin embargo, únicamente 4/11 equipos la dieron, 3/11 no contestaron y el resto proporcionó respuestas que no estuvieron contempladas dentro del análisis a priori, por ejemplo, un equipo escribió 3^2, otro xn^3, entre otras respuestas.

Lo anterior deja ver que, aunque los alumnos son capaces de generalizar, pues lo hicieron en la parte IV, no pueden hacerlo todavía al grado de imaginar una cantidad desconocida de horas.

5.3.1.9 Situación de formulación parte VI

Las respuestas óptimas para esta parte de la Actividad 1 son: $3^{12} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, $3^{21} = 3 \times 3$, $2^n = 2 \times 2 \times ... \times 2$, $3^n = 3 \times 3 \times ... \times 3$, $4^n = 4 \times 4 \times ... \times 4$, $5^n = 5 \times 5 \times ... \times 5$ y $6^n = 6 \times 6 \times ... \times 6$. Únicamente 1/11 equipos logró dar la respuesta correcta para todas las preguntas.

Respecto a los demás equipos, 3/11 dieron la respuesta correcta para las primeras dos expresiones, 2/11 aunque escribieron el desarrollo como el que se muestra en la solución óptima, uno de ellos expresó el resultado como la multiplicación de la base por el exponente y el otro aunque no lo dejó escrito, lo estaba pensando, porque para dar solución a las expresiones con exponente *n* multiplicaron la base por el exponente.

El resto de las expresiones proporcionadas por otros equipos fue muy variada, pues, algunos de ellos tomaron el exponente como si fuera la base y la base como si fuera el exponente, porque por ejemplo, para desarrollar 3^{12} escribieron $12 \times 12 \times 12$, otros escribieron 13 veces el 3 para la primera expresión y 22 veces el 3 para la segunda, entre otras respuestas.

Para las expresiones con exponente *n* también se obtuvo una gran diversidad de soluciones, pues, por ejemplo, 2/11 equipos multiplicaron la base por ella misma, es decir, tomaron el exponente *n* como si fuera un dos. Otro equipo, multiplicó la base por ella misma la cantidad de veces que dijera la base, por ejemplo, para 2^n dio como respuesta 2×2, para 3^n dijo que el resultado era $3 \times 3 \times 3$ y así sucesivamente. Por otra parte, otros 2/11 contestaron a cada una de las expresiones con exponente *n* que el resultado es la multiplicación de la base por el exponente, mientras que 4/11 tomó la base como el exponente y el exponente como la base, ya que por ejemplo, para 4^n dieron como respuesta $n \times n \times n \times n$ y más aún, tres de esos equipos simplificaron esas expresiones como la suma de las *n*, es decir, por ejemplo, para $5^n = n \times n \times n \times n \times n$ dijeron que la solución es $5n$.

En el último resultado se muestra nuevamente el error de multiplicar la base por el exponente reportado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), sin embargo, el origen de este error es diferente, ya que para empezar toman la base como exponente y el exponente como base.

Finalmente, se puede decir que para esta parte se cumplió el análisis a priori respecto al exponente *n*, debido a que la mayoría de los equipos presentó errores al mostrar el desarrollo para estas expresiones. Por otra parte, se pudo observar que la mayoría de los equipos tampoco logró mostrar de manera correcta el desarrollo para los dos primeros ejercicios, lo cual indica que no se cumplió la hipótesis para esta parte.

5.3.1.10 Situación de formulación parte VIII

Dentro del análisis a priori se consideró que la mayoría de los alumnos lograrían dar la respuesta óptima para todos los incisos, sin embargo, no se descartó la posibilidad de que cometieran nuevamente el error de multiplicar la base por el exponente o que dieran como respuesta para 6^0, seis o cero, ya que son los errores más recurrentes y que además, están reportados en las investigaciones de Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007).

La respuesta óptima fue proporcionada por 6/11 equipos, sin embargo, no fue así para la expresión 6^0, ya que dieron como resultado cero (error reportado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007)). Luego, de los equipos restantes, 1/11 no dio solución a ninguna de las expresiones, otro contestó únicamente a las primeras dos (respuesta óptima) y los demás equipos proporcionaron las respuestas correctas para algunos incisos y para otros no, es importante destacar que dos de esos equipos dieron la respuesta idónea para 6^0, pues dieron como resultado uno.

De lo anterior, se desprende que la mayoría de los equipos obtuvo respuestas óptimas para la mayoría de los incisos, para la expresión en la que hubo mayor incidencia de error es 6^0 y se cometió el mencionado en el análisis a priori que es el reportado en las investigaciones de Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), éste consiste en dar como respuesta cero para las expresiones con exponente cero. Por todo ello, se concluye que los resultados obtenidos fueron muy cercanos a lo que se esperó desde el análisis a priori.

5.3.1.11 Situación de institucionalización

Esta situación se dio en parte como se había planeado, pero no se dio tal cual, porque no se alcanzó de tiempo debido a que los alumnos ya estaban desesperados por salir, entonces, la parte en la que la profesora había planeado preguntar ¿Qué pasa si ahora en lugar de que un conejo contagie a otros tres cada hora, ahora contagia a cuatro? Ya no se pudo hacer, pero lo demás se dio tal y como se planeó.

Por otra parte, es importante mencionar que se considera que los objetivos que se tenían para este instrumento se cumplieron en cierta medida, pues, se pretendía que los alumnos lograran identificar por ejemplo, que $3^{12} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, lo cual se obtuvo en algunos equipos, sin embargo, aunque en algunos escribieron bien el desarrollo, más adelante escribieron la multiplicación de la base por el exponente, lo cual deja ver que siguen cometiendo el error mencionado por Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), sin embargo, esto es curioso, porque en la parte VIII del instrumento se pedía que encontraran el valor para expresiones tales como: 5^3 y la mayoría de los equipos logró dar la respuesta correcta. Es decir, cuando se les preguntó el valor para expresiones exponenciales con base diferente a 3, sí lograron responder de manera correcta, lo cual deja ver que el instrumento definitivamente ayudó para que lograran obtener tales valores.

Respecto a los exponentes cero y *n*, se puede decir que no se logró mucho, ya que los alumnos siguen dando resultados de cero o de la misma base cuando el exponente es cero, solamente dos equipos lograron dar el valor de uno para las expresiones con dicho exponente, lo cual, por supuesto es avance, pero no se logró que todos los equipos respondieran de tal manera. El desarrollo para el exponente *n* fue aún más difícil de alcanzar, pues, los alumnos no lograron percibir que *n* es un número cualquiera, es decir, aunque lograron generalizar, por ejemplo, cuando se les pidió una expresión que represente la cantidad de conejos infectados en la hora 20, no lograron hacerlo para la hora *n*, pues para ellos, es difícil imaginar una hora de la cual no tienen un valor numérico. Eso mismo pasa cuando ven $3^n, 4^n, 5^n$, etc., es decir, no logran generalizar hasta ese punto.

5.3.2 Actividad 2

5.3.2.1 Situación de acción

La situación de acción se llevó a cabo tal y como se tenía planeada en el análisis a priori, pues, la profesora-investigadora, acomodó las butacas antes de que llegaran los alumnos al salón, colocó una carpeta con material en cada una de las butacas, cuando llegaron los alumnos les pidió que se formaran en equipos de dos personas y que fuera un hombre y una mujer. Posteriormente se presentó y pidió a los alumnos que cuidaran mucho el material pues éste únicamente se les prestaría.

Después, la profesora-investigadora dio un pequeño discurso acerca de lo que es geometría, luego, dentro de éste mencionó la raíz cuadrada, preguntó a los alumnos cuánto es la raíz cuadra de 4, 9 y 5. Posterior a ello, dio inicio con la Actividad 2, y la desarrolló tal y como la había planeado, pues, comenzó con la construcción 1 y después, fue solicitando a equipos diferentes que dieran lectura a uno de los incisos, por ejemplo, cuando un equipo leyó el inciso a) ella preguntó a los alumnos ¿Qué es un segmento?, luego ellos respondieron y después la profesora dio la definición formal y realizó el trazo en Geogebra, enseguida, pidió a ellos que lo hicieran en sus hojas.

Esto lo hizo para cada uno de los incisos de la misma manera como se había planeado con anterioridad. Finalmente, cuando estuvo terminada la construcción 1, la profesora-investigadora solicitó a los alumnos que realizaran ellos solos la construcción 2, la cual se llevó a cabo por los alumnos de manera favorable. A continuación, se muestran los resultados obtenidos para estas construcciones.

5.3.2.2 Situación de acción Construcción 1

La solución óptima para esta construcción es el valor: 1.4, sin embargo, dentro del análisis a priori se consideró que los alumnos podrían dar un valor entre 1.3-1.5, lo cual es aceptable, pues, recuerde que es una aproximación a la raíz cuadrada.

Entonces, las hipótesis para esta actividad se cumplen, ya que 9/12 equipos dieron un valor para DE igual a 1.4 y el resto dio el valor de 1.5, como estos valores se encuentran dentro de lo que se estimó en el análisis a priori, por ello se afirma que se cumplió la hipótesis.

5.3.2.3 Situación de acción Construcción 2

Respecto a esta construcción, se consideró como solución óptima el valor 1.7, sin embargo, también se mencionó que los valores que podrían dar los estudiantes estarían en el rango 1.6-1.8.

Lo que ocurrió en la experimentación fue que 7/12 equipos dieron la respuesta óptima, 2/12 proporcionaron como solución el valor 1.8 y el resto, expresó el valor 1.6, lo cual indica que todos los valores están dentro de los valores que se estimaron como respuesta probable. Esto, significa que la hipótesis en este caso también se cumplió.

5.3.2.4 Situación de formulación Construcción 3

En el análisis a priori se consideró como respuesta óptima el valor AB=5 y DE=2, sin embargo, también se consideró que los alumnos podrían otorgar el valor de 4 para AB y 1.7-2.2 para DE.

Los resultados que se obtuvieron de la experimentación son: 5/12 equipos dieron la respuesta óptima para las dos longitudes solicitadas, 4/12 equipos dieron el valor AB= 5 y DE=1.9, este último no es el valor óptimo, pero es muy cercano a él. Luego, un equipo trazó AB=5 y DE=2.2. Por otra parte, 2/12 equipos no dieron ninguna de las cantidades estimadas en el análisis a priori para DE, pues uno de ellos obtuvo DE=2.3, éste se cree que surgió debido a que el compás tenía una apertura mayor a la que debería.

El otro equipo, obtuvo DE=2.5, éste había tomado un valor óptimo para AB, sin embargo, abrieron el compás a una longitud mucho mayor de la que deberían, esto provocó que el resultado fuera mucho mayor de lo esperado en la hipótesis. Entonces, se puede decir que la hipótesis se cumplió para la mayoría de los equipos, pues únicamente 2/11 equipos dieron valores fuera del rango previsto.

5.3.2.5 Situación de formulación. Preguntas sobre la construcción 1

Las respuestas óptimas para esta construcción son: ¿A qué valor se aproxima? 2, ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? Sí, ¿Cuál? es igual o se aproxima a AD. Los resultados obtenidos para estas preguntas fueron muy buenos, pues, 11/12 equipos lograron dar la respuesta óptima, el equipo restante no la dio debido a que para elevar al cuadrado multiplica la base por el exponente, cometiendo el error reportado en las investigaciones de Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007). Por lo anterior, se puede decir que se cumplió la hipótesis para estas preguntas, pues solamente un equipo contestó diferente a como se pensó.

5.3.2.6 Situación de formulación. Preguntas sobre la construcción 2

Las respuestas óptimas para las preguntas ¿A qué valor se aproxima?, ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? y ¿Cuál? Son: 3, sí y es igual o se aproxima a AD. Para estas preguntas 10/12 equipos dieron la respuesta óptima mientras que 2/12 equipos no lo hicieron.

Uno de ellos expresó que la cantidad a la que se aproxima elevar al cuadrado el valor del segmento DE es 3.4, este resultado lo obtuvieron porque fue el equipo que dio como longitud para DE 1.7 y al elevarlo al cuadrado multiplican por dos, ya que cometen el error reportado en las investigaciones de Lezama (1999), Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), luego, comentaron que esta cifra sí tiene relación con el segmento AD, ya que sólo se pasa por cuatro milímetros.

El equipo restante, no encontró relación alguna con el valor obtenido de elevar al cuadrado la longitud del segmento DE, pues éste les dio la longitud 1.57, por lo cual, al elevarlo al cuadrado obtienen como respuesta 2.46, al redondearlo les resulta 2.5 y por tal motivo no pueden encontrar una relación con esa longitud y la del segmento AD. Finalmente, se puede considerar que la hipótesis que se tenía se cumplió, pues, la mayoría de los equipos (10/12) lograron obtener la respuesta óptima, lo cual es muy bueno.

5.3.2.7 Situación de formulación. Preguntas sobre la construcción 3

Las respuestas óptimas para las preguntas ¿A qué valor se aproxima?, ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? y ¿Cuál? Son: 4, sí, es igual o se aproxima a AD. En este caso, 9/12 equipos lograron dar la respuesta óptima, el resto, no lo hicieron, a continuación, se describe por qué no lograron obtener la respuesta óptima.

Uno de los equipos dijo que la longitud del segmento DE es 2.2 cm, pero al elevarlo al cuadrado obtiene 4.4, ya que multiplican la base por el exponente, entonces, contestaron que ese valor se aproxima a 4.4 y dijeron que sí tiene relación con el segmento AD, ya que sólo se pasa por cuatro milímetros. Entonces, ésta no es la respuesta óptima.

Otro de los equipos, obtuvo 2.3 cm para la longitud del segmento DE, por ello, cuando elevaron al cuadrado obtuvieron como respuesta 5.29, por tal motivo no encontraron relación alguna con el segmento AD. Con el último de los equipos ocurrió algo similar al anterior, pues, obtuvieron 2.5 para la longitud del segmento DE, lo cual al elevarlo al cuadrado arroja el valor 6.25 y por ello tampoco encontraron relación alguna entre este valor y el de la longitud del segmento AD. Por todo lo anterior, se considera que la hipótesis para estas preguntas también se cumplió, pues 9/12 equipos dieron la respuesta deseada.

5.3.2.8 Situación de formulación. Pregunta 10

La respuesta óptima para esta pregunta es: Sacando raíz cuadrada a AD, aunque en el análisis a priori también se consideraron las siguientes opciones: $DE^2 = AD$, dividiendo AD entre dos, restarle dos a AD o no contestar.

Los datos que se obtuvieron de la experimentación son: 6/12 equipos dieron la respuesta óptima, 3/12 contestaron: “la relación que tienen es que la medida del segmento DE al cuadrado es la medida del segmento AD”, esta respuesta es la misma que se consideró en el análisis a priori, sólo que los alumnos la expresaron en lenguaje común y no algebraico. Por otra parte, uno de los equipos escribió: “el DE es la mitad del segmento AD”. Otro expresó: “AD es la mitad del segmento DE”, esta respuesta no se consideró dentro del análisis a priori y tampoco la que dio el último de los equipos, pues éste contestó: La longitud del segmento DE se obtiene midiendo. De lo anterior, se desprende que 10/12 equipos dieron las respuestas que se esperaban en el análisis a priori, por ello, se considera que se cumplió lo esperado dentro del análisis a priori.

5.3.2.9 Situación de validación. Pregunta 10

La validación para esta pregunta resultó tal y como se esperaba, pues, se pasó a tres alumnos de diferentes equipos al pizarrón, éstos fueron elegidos de acuerdo a la respuesta que tenían, por ejemplo, la profesora-investigadora pasó a un equipo que tenía la respuesta óptima, a otro que tenía la respuesta: “DE es la mitad del segmento AD”, otro más que dio como respuesta "se cruzan" y finalmente, otro de los equipos quiso pasar voluntariamente a compartir su respuesta, ésta dice: "la relación que tienen es que la medida del segmento DE al cuadrado es la medida del segmento AD".

Una vez que todos los equipos escribieron su respuesta en el pizarrón la profesora-investigadora comenzó a cuestionar cada una de ellas, pidiendo opinión al resto del grupo, esto con la finalidad de que lograran identificar cuál es la respuesta óptima.

Se considera que esta situación fue buena, pues, al principio, nada más 2/12 equipos lograron dar la respuesta esperada, después de la validación, 6/12 dieron tal respuesta, otros más cambiaron a la respuesta "la relación que tienen es que la medida del segmento DE al cuadrado es la medida del segmento AD" y otros se quedaron con la que tenían. Es importante señalar en este momento, que al inicio de la situación de validación, varios equipos tenían como respuesta: "DE es la mitad del segmento AD" y al final únicamente uno de éstos se quedó con dicha respuesta y no fue el que pasó al pizarrón.

5.3.2.10 Situación de formulación. Calcular raíz de 5

La respuesta óptima para esta raíz es 2.2, sin embargo, se consideró que los alumnos podrían dar soluciones que se encuentran dentro del rango: 2-2.4. Luego, 5/12 equipos dieron la respuesta óptima, 3/12 escribieron el valor 2.3, uno dio como solución 2.1 y otro más obtuvo la respuesta 2.4, los dos equipos restantes no contestaron nada.

Como todas las respuestas obtenidas se encuentran dentro del rango que se dio en el análisis a priori, por ello, se considera que la hipótesis para el cálculo de este valor se cumplió, sin embargo, aunque todas las respuestas fueron buenas aproximaciones, no cabe duda que la mejor es el valor 2.2.

5.3.2.11 Situación de formulación. Calcular raíz de 13

El valor óptimo para esta respuesta es 3.6, sin embargo, dentro del análisis a priori, se pensó que las respuestas que podrían proporcionar los alumnos se encuentran dentro del rango 3.4-3.8, es decir, 2 mm hacia arriba o hacia abajo del valor esperado.

Los resultados que realmente se obtuvieron son: 6/12 equipos dieron la respuesta óptima (3.6), 1/12 proporcionó el valor 3.5, 3/12 obtuvieron como respuestas: 3.4, 3.2 y 4.6, este último sin lugar a dudas está muy alejado del esperado, pues, los alumnos consideraron AB=13 cm y AD=11 cm, por ello obtuvieron la longitud mencionada.

El resto de los equipos (2/11) no dieron respuesta alguna para tal raíz. De lo anterior, se puede observar que todos, excepto uno de los equipos, dieron valores dentro del rango dado en el análisis a priori, por tal motivo se considera que la hipótesis nuevamente se cumplió.

5.3.2.12 Situación de formulación. Uso de calculadora para obtener valores

Para esta parte de la actividad, se solicitó a los estudiantes que dieran los valores obtenidos en la calculadora para las expresiones $\sqrt{5}$ y $5^{\frac{1}{2}}$. La respuesta óptima para éstas se consideran las siguientes: $\sqrt{5} = 2.236067977,\ 5^{\frac{1}{2}} = 2.236067977,$ luego, en la pregunta que dice: ¿Qué observas en estos dos valores? Se esperaba que los estudiantes dijeran que son iguales.

Las respuestas que realmente se obtuvieron de la experimentación son: 9/12 equipos proporcionó la respuesta óptima para todo, luego, 2/12 dieron la respuesta óptima para $\sqrt{5}$ pero no para $5^{\frac{1}{2}}$, ya que para ésta escribieron 5.5, pues, al parecer están sumando $5 + \frac{1}{2} = 5.5$, el equipo restante, aunque también proporcionó el valor óptimo para $\sqrt{5}$, para $5^{\frac{1}{2}}$ dio como resultado 5.049752469, éste se desconoce cómo fue obtenido. Por tal motivo, los tres equipos que no dieron la respuesta esperada para dichas expresiones, dijeron que variaba el resultado para $\sqrt{5}$ y $5^{\frac{1}{2}}$, lo cual es lógico debido a los valores que dieron.

Finalmente, se puede concluir, que la hipótesis que se dio en el análisis a priori se sigue cumpliendo, pues la mayoría de los equipos obtuvieron el resultado esperado.

5.3.2.13 Situación de institucionalización

Finalmente, se puede concluir que también la situación de institucionalización se cumplió tal y como se planeó en el análisis a priori, pues, la profesora-investigadora cerró la actividad preguntando ¿Qué observan en los valores que arrojó la calculadora para $\sqrt{5}$ y $5^{\frac{1}{2}}$? A esto, los alumnos contestaron que son iguales y una de las alumnas dijo que era lo mismo, pero se representaba de diferente manera. Después de esto, la profesora-investigadora pudo enunciar la propiedad $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Luego, se mostró en Geogebra la construcción y se obtuvo el valor para $\sqrt{5}$, éste dio las mismas cifras que en la calculadora, pues la profesora-investigadora puso en Geogebra que diera 10 decimales y se le comentó a los alumnos que entonces esas construcciones servían para calcular la raíz cuadrada de un número. Por todo lo anterior, se considera que se cumplió de manera favorable la hipótesis que se dio en el análisis a priori.

Por otra parte, respecto a este instrumento se puede decir que se logró que los alumnos aprendieran a obtener la raíz cuadrada de un número natural a partir del método geométrico, más aún, es importante destacar que ellos mismos se percataron de que lo que estaban haciendo era obtener la raíz cuadrada de un número, pues, las preguntas que se hicieron después de haber realizado las tres construcciones solicitadas, ayudaron para que los alumnos encontraran una relación entre el valor del segmento AD y el DE, es importante señalar que esto era parte de los objetivos de la actividad.

También, lograron identificar que $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$, y en general pudieron concluir que el valor de la raíz cuadrada de un número es igual que el obtenido de elevar ese mismo número al exponente $\frac{1}{2}$. Una vez que los alumnos se dieron cuenta de esto, la profesora-investigadora pudo enunciar la propiedad $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, que era justamente el objetivo principal de la actividad, ya que se quería que los alumnos notaran que es lo mismo solo expresado de manera diferente, y esas mismas palabras son las que una alumna dijo, por lo tanto se considera que se cumplieron los objetivos de esta actividad.

Conclusiones

Conclusiones

Para dar inicio con las conclusiones de esta investigación, es necesario mencionar que este trabajo no habría sido posible sin la Teoría de Situaciones Didácticas (Brouseeau, 1986) y sin la Ingeniería Didáctica como metodología (Artigue, 1995), ya que éstas son las que orientaron este trabajo en todo momento, con el seguimiento de las fases de la metodología se cumplieron todos los objetivos específicos y la Teoría de Situaciones Didácticas ayudó principalmente al logro del objetivo general de esta investigación, a continuación se muestran las conclusiones generales de lo que se realizó en esta práctica de desarrollo profesional.

En primer instante, referente a los objetivos específicos, se puede decir que se cumplieron tal y como se planeó, por ejemplo, ubicándonos en la primera fase de la Ingeniería Didáctica que es el análisis preliminar, para el primer objetivo planteado (realizar un análisis epistemológico de los exponentes) se puede comentar que se cumplió en su totalidad, ya que se analizaron diferentes investigaciones como la de Dennis y Confrey (2000), entre otras, para poder conocer cómo es que surgió el exponente.

Posteriormente, para el segundo objetivo (analizar la forma en que abordan algunos profesores de secundaria y bachillerato el contenido de exponentes), se realizó un cuestionario dentro de la dimensión didáctica que se aplicó a profesores de Secundaria y Bachillerato con la finalidad de conocer cómo abordan el contenido de exponentes. De esto, resultó que los docentes, generalmente lo que hacen en este contenido es dar las propiedades y posteriormente, un ejemplo numérico de cada una de éstas.

Por otra parte, siguiendo dentro de la misma fase de la metodología, en específico dentro de la dimensión cognitiva, se tuvo como objetivo: Detectar los conocimientos previos de los estudiantes de primer semestre de bachillerato respecto al contenido de exponentes. Para lograr el cumplimiento de éste, se llevó a cabo el diseño y aplicación de un cuestionario, del cual, resultaron los errores que reportan los investigadores Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), aunque en ocasiones resultaron también otros diferentes como por ejemplo: $2^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$, ya que suman la base y el exponente como si fuera una fracción mixta.

Respecto a la fase de concepción y análisis a priori, se tenía como objetivo: Diseñar dos situaciones didácticas para exponentes cero, natural y racional $\left(\frac{1}{2}\right)$, dicho objetivo, también se cumplió, pues dichas situaciones, son las Actividades 1 y 2 que fueron experimentadas con alumnos de segundo semestre de bachillerato.

Concerniente al último de los objetivos específicos, se puede comentar que también se logró, pues, se refería a analizar los resultados obtenidos de la experimentación. Esto se logró mediante la fase de análisis a posteriori y validación de la Ingeniería Didáctica tal y como se expuso en el capítulo anterior.

Lo anterior, fue la base para poder desarrollar de manera adecuada el objetivo general, pues, lo obtenido de los objetivos específicos dio una mejor idea de lo que era necesario para el diseño de las secuencias didácticas, por ello, se diseñaron dos situaciones didácticas sobre el contenido de exponentes naturales, cero y racional $\left(\frac{1}{2}\right)$ tal y como se tenía pensado y se desarrollaron dentro de la fase: Concepción y análisis a priori de la metodología de este trabajo, sin embargo, hubo ciertas limitantes con el exponente cero, ya que éste no fue abordado a gran profundidad en ninguna de las actividades.

Por otra parte, algo que no se expresó dentro de los objetivos fue la generalización, es decir, que los alumnos concluyeran que en la hora *n* habría 3^n conejos infectados y aunque no se logró esto en todos los equipos, sí en algunos. Además, en la mayoría de los equipos se consiguió, por ejemplo, que expresaran que $3^{70} = 3 \times 3 \times 3 \times \ldots \times 3$ (70 veces). Con lo anterior, puede notarse que incluso se fue un poco más allá de lo propuesto en los objetivos.

Ahora, respecto a los resultados que se obtuvieron después de la fase: Experimentación de la Ingeniería Didáctica y con el análisis que se hizo de éstos a través de la fase: Análisis a posteriori y validación de la metodología mencionada, se quiere hacer algunas sugerencias generales de modificación, para las secuencias didácticas en futuras investigaciones, pues, aunque los resultados obtenidos fueron buenos, podrían ser aún mejores si por ejemplo, para la actividad uno se incluyen más preguntas que involucren al exponente cero, ya que, en la que se realizó en esta investigación únicamente se incluyó una pregunta, lo cual se considera que no es suficiente para inducir al alumno a escribir $3^0 = 1$. Además, podrían modificarse las instrucciones de algunas de las partes de la actividad y juntar algunas de éstas en una sola, por ejemplo, la parte IV y V unirlas y agregar más incisos.

También, se puede concluir de esta actividad, que se logró realizar un instrumento con una base diferente al 2, pues, la mayoría de las actividades revisadas en los antecedentes mostraban instrumentos en los cuales se trabajaba con dicha base, por eso mimo, en esta investigación se quiso hacer algo diferente, por lo cual se decidió cambiar de base, esto se considera que es novedoso y además atractivo, ya que se utilizó un material didáctico, éste, por cierto, fue del gusto de los alumnos, ya que, se logró la devolución, pues, los alumnos estaban sumamente interesados en la actividad, porque querían manipular el material didáctico y también porque el contexto fue de su interés. Lo anterior, es algo que no muchos investigadores han hecho en el contenido de exponentes y se considera relevante porque poniendo un contexto al problema y más aun utilizando un material adaptado a éste, los alumnos se verán más interesados en resolver la actividad.

Ahora, referente a la actividad dos, se considera que dio los resultados esperados en el análisis a priori, ya que se pretendía que los alumnos aprendieran a calcular la raíz cuadrada de manera geométrica y además que lograran identificar que $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$, y de manera general, que el resultado de calcular la raíz cuadrada de un número es igual a elevar el número al exponente $\frac{1}{2}$, lo anterior fue logrado por la mayoría de los equipos, puesto que pudieron obtener la raíz cuadrada de: 7, 13 y 17 de manera geométrica. Además, en la situación de institucionalización una alumna comentó que $\sqrt{5}$ es igual que $5^{\frac{1}{2}}$, solo que se escriben diferente. Dicho comentario deja ver que sí se lograron los objetivos para esta actividad, pues se obtuvieron los resultados esperados.

De acuerdo a los resultados obtenidos de esta actividad, se propone para futuras investigaciones poner primero construcciones para raíces exactas, por ejemplo, en lugar de poner la construcción para $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$, mejor que sea: $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$ y enseguida de esas que calculen ahora sí por ejemplo: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ y ya después que se les hagan las preguntas que vienen en la actividad tal y como se pusieron, ya que se considera que éstas sí ayudaron para que los alumnos se dieran cuenta de que el segmento DE es la raíz cuadrada del segmento AD. Del resto de la actividad, no cambiaría nada, pues considero que todo lo demás dio los resultados esperados en el análisis a priori.

A parte de todo lo anterior, de manera muy general para ambas actividades, se puede concluir que los alumnos pasaron por todas las etapas o situaciones que según Brousseau (1986) son necesarias para adquirir un conocimiento, éstas son: Acción, formulación, validación e institucionalización y es importante señalar, que no necesariamente se pasa por ese orden. Es posible afirmar que los equipos pasaron por tales situaciones, pues con la videograbación, se puede identificar que aparte de la situación de acción y formulación se presentó la validación al interior del equipo, cuando por ejemplo, los alumnos discutían entre ellos las diferentes soluciones que tenían para un determinado problema y terminaban eligiendo únicamente una.

Además, se dio la validación de manera grupal, ya que algunos equipos de los que pasaron al pizarrón lograron convencer a sus compañeros para que cambiaran su respuesta, sin embargo, en esta parte de validación grupal para la actividad uno, se considera que hizo falta que la profesora-investigadora hiciera preguntas para que los alumnos reflexionaran y eligieran la respuesta correcta, ya que en algunos casos la cambiaron por una incorrecta, sin embargo, en la actividad dos, la profesora mejoró esta parte, ya que, se pudo notar que hizo preguntas para que los alumnos reflexionaran sobre la respuesta correcta. Finalmente, aunque también se presentó la situación de institucionalización, ésta no fue tal y como se esperaba para la actividad uno, ya que la profesora-investigadora tuvo que hacerla de manera muy rápida porque los alumnos ya estaban desesperados por irse a sus casas. Respecto a la actividad dos, la institucionalización resultó tal y como se había planeado.

Reflexión de Desarrollo Profesional

La Maestría en Matemática Educativa ayudó en mi práctica profesional en varios aspectos: Primeramente, puedo decir que gracias a ella conocí algunas teorías sobre la enseñanza-aprendizaje, por ejemplo, la Teoría de Situaciones Didácticas, APOE, Representaciones semióticas, etc. considero esto de gran importancia debido a que el conocer de ellas me lleva a tomar lo mejor de cada una para diferentes situaciones que se presentan en mi vida profesional.

También aprendí sobre algunas teorías de la educación, fue muy relevante conocer acerca de los paradigmas como el conductista, humanista, constructivismo, etc. pues estos, considero que me ayudan en cada una de mis clases como maestra para saber que debo tener la parte humana con ellos, en algunas ocasiones sacar la parte conductista y siempre el constructivismo, lo anterior lo comento porque siempre procuro que en mis clases haya algo de constructivismo y de Teoría de Situaciones Didácticas. Otro aspecto muy importante que considero en mis clases son los errores, ya que éstos son importantes porque se pueden aprovechar para generar conocimiento, es decir, no hay que evitarlos, más bien hay que provocarlos para que surjan y sacar lo mejor de ellos para la construcción de un aprendizaje.

Así como lo anterior, podría decir muchas cosas más, sin embargo, ahora me enfocaré en describir en qué me ayudó la investigación que realicé durante la maestría para mi práctica profesional. En primera instancia, considero que fue de gran utilidad como persona porque aprendí a escuchar opiniones de otras personas sobre mi trabajo y sus sugerencias sin molestarme ni tomarlo personal, pues aprendí a ver que todos los comentarios son constructivos e importantes para que mi trabajo resultara de la mejor manera, luego, también me ayudó a pensar en actividades novedosas y atractivas para los estudiantes, que aunque la concepción de éstas llevó su tiempo, me di cuenta que se pueden diseñar otro tipo de instrumentos para la enseñanza-aprendizajede temas tan complicados como exponentes: natural, cero y racional.

Una experiencia que me gustó mucho es estar frente a un grupo numeroso de alumnos, pues, yo antes no había vivido tal situación. Esta experiencia fue muy agradable, ya que cuando se aplicó el primer instrumento perdí mucho tiempo entregando el material a los alumnos, pues en ese momento, pedí que formaran equipos le pusieran un nombre a éste, sin embargo, en ese momento se hizo un caos porque los alumnos no sabían cómo ponerle a su equipo, luego, pedí que pasara un representante de cada equipo por su material y en ese momento yo estuve entregando las hojas con la actividad, el tablero y los conejitos en unas pequeñas cajitas de plástico, pero eso tardó alrededor de 20 minutos.

Lo interesante de lo anterior, es que para la segunda actividad ya no cometí el mismo error, es decir, en la aplicación de dicha actividad lo que se hizo fue llevar el material en carpetas de plástico, éstas contenían ya un número en un cuadro de cartulina para poder identificar los equipos, previo a que los alumnos llegaran al salón lo que se hizo fue acomodar las butacas una frente a otra para formar equipos de dos integrantes y en una de ellas se puso el material, esto evitó que hubiera pérdida de tiempo porque cuando los alumnos llegaron ya todo estaba listo para comenzar con la actividad. Entonces, se puede ver el cambio que hubo de una actividad a otra en la organización que tuve para repartir el material, ésta es una gran experiencia que me dio la maestría y en particular el hecho de haber realizado una práctica de desarrollo profesional, pues, de una actividad a otra pude cambiar algunos aspectos como la organización y es ahí donde se puede encontrar un verdadero desarrollo profesional.

Continuando con la aplicación de los instrumentos, puedo comentar que también crecí profesionalmente en la forma de implementar las actividades, ya que por ejemplo, en la actividad uno no supe aprovechar de manera adecuada las situaciones de validación grupal, mientras que en la actividad dos considero que sí se logró, pues, en la primera actividad pregunté qué respuestas dieron a las preguntas que se establecieron como parte de la validación grupal desde el análisis a priori, algunos equipos previamente seleccionados pasaron al pizarrón a compartir sus respuestas pero yo no hice las preguntas correctas para que reflexionaran y pudieran elegir la correcta. Sin embargo, en la segunda actividad fue diferente, ya que ahí sí hice preguntas para que reflexionaran los alumnos y pudieran elegir la respuesta correcta.

REFERENCIAS

Abrate, R. S., Pochulu, M. D. y Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en matemática, análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barrios, L. (2015). Los números impares y las potencias de los números naturales. *Números*, *88*(1). 55-74.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York, Estados Unidos: Wiley International Edition.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la escuela de educación de la Universidad de los Andes. *ORBIS*, (6). 68-84.

Cajori, F. (1913). History of exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly*, *20*(3), 75-84.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*, *42*(1), 1-22.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática*, *1*(2), 1-9.

Dennis, D. y Confrey, J. (2000). La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 5-31.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

González de Santiago, R. D. (2010). *"Análisis de una situación didáctica de la función exponencial* $f(x) = 2^x$ *en alumnos de Bachillerato".* (Tesis inédita de licenciatura). Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial.* (Tesis inédita de Maestría). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

López, J. y Lezama, J. (2005). Análisis del Desarrollo de la Puesta en Escena de una Situación Didáctica “La función Exponencial 2^x” con Estudiantes de Bachillerato. 363-368.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales.* (Tesis de maestría). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2007). Sobre la naturaleza y significados de los exponentes. Un caso de los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). *Matemática Educativa, algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 123-167). México: Ediciones Díaz de Santos.

Mora, A. I. (2005). Guía para elaborar una propuesta de investigación. *Revista educación, 29*(2). 77-97.

Panizza, M. (2003). II Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. 1-17.

Rico, L., Ruíz, J. F., Fernández, J. A., Castro, E., Martín, E. y Vílchez, M. (2015). Concepciones y significados en una tarea matemática escolar. *Suma.* 67-76.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra, 311-322.

Santaló, L., Gálvez, G., Chrismay, R., Brousseau, G. y Sadovsky, P. (1994). *Didáctica de las matemáticas.* Buenos Aires, Argentina: Paidós Educador.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* 125-154.

Sosa, L., Huitrado, J. L., Hernández, J. A., Borjón, E. y Ribeiro, C. M. (2013). Uma oportunidade para o profesor aprender analizando os erros dos alunos - um exemplo de álgebra. *Atas XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat 2013).*

Anexos

Anexo 1: Dimensión cognitiva

Universidad Autónoma de Zacatecas

"Francisco García Salinas"

Unidad Académica de Matemática

Maestría en Matemática Educativa

Nivel: Bachillerato

Diseño sobre el conocimiento del tema de exponentes en estudiantes de bachillerato

Institución:____

Semestre que cursa:______________________________________

Materia:____

Género

Masculino Femenino

Fecha:____

¡Gracias por tu participación!

1. **Desarrolla las siguientes expresiones y escribe el resultado de la operación.**

   a) $2^3 =$

   b) $3^2 =$

   c) $4^1 =$

¿Tuviste alguna dificultad para hacer el cálculo? _____________ ¿Por qué?

2. **En cada una de las siguientes expresiones escribe una expresión que las simplifique.**

   d) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$

   e) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$

   f) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 =$

¿Tuviste alguna dificultad para encontrar la expresión? _____________ ¿Por qué?

Con base a la pregunta anterior, escribe una expresión que represente a $a \times a \times a \times ... \times a =$ ____ si a se repite *n* veces.

3. Escribe el procedimiento y resultado para calcular:

g) $2^0 =$

h) $3^0 =$

i) $4^0 =$

¿Tuviste alguna dificultad para hacer el cálculo? ____________ ¿Por qué?

Con base en lo anterior ¿cuál será el valor de a^0 si a representa cualquier número distinto de cero? Explica cómo llegaste a ese valor.

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones y explica tu procedimiento.

j) $2^{-1} =$

k) $3^{-2} =$

l) $4^{-3} =$

¿Tuviste alguna dificultad para hacer el cálculo? _____________ ¿Por qué?

¿Podrías escribir una expresión que generalice los casos anteriores j), k) y l)?

5. **Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones, describiendo ampliamente tu procedimiento.**

m) $2^{\frac{1}{2}} =$

n) $3^{\frac{2}{3}} =$

o) $4^{\frac{3}{4}} =$

¿Tuviste alguna dificultad para hacer el cálculo? _____________ ¿Por qué?

¿Podrías escribir una expresión que generalice los casos anteriores m), n) y o)?

6. **Indique el resultado de las siguientes operaciones, así como el procedimiento para obtenerlo.**

p) $3^2 \times 3^3 =$

q) $4^{-3} \times 4^4 =$

r) $\frac{3^4}{3^2} =$

s) $(2^4)^3 =$

t) $4^3 + 4^2 =$

¡¡Muchas gracias!!

Anexo 2: Ubicación del curso

Ubicación del curso
Presentación de la asignatura: Este primer curso está enfocado a la revisión y estudio de conocimientos básicos de aritmética y álgebra. Con el propósito de favorecer el tránsito de la aritmética al álgebra se revisan de manera reflexiva (descriptiva y operativa) los números Reales; además se pide al alumno que aplique los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación), su jerarquía y los símbolos de agrupación, para entender la construcción del Sistema de los números Reales, entendido este como un grupo ordenado, continuo y denso definido en dos operaciones (suma y multiplicación). Más que la mecanización se privilegia la reflexión y la construcción de los grupos numéricos conformados en sistemas. En el estudio del álgebra se orienta al estudiante para que considere situaciones del entorno y utilice como herramienta el sistema de los números reales, de esta forma se espera que su conocimiento evolucione, del estudio de los algoritmos de la aritmética al lenguaje algebraico, lo cual le permite construir los polinomios y realizar con estos las diferentes operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división) y resolución de productos notables, factorización y las fracciones algebraicas. Es importante que el estudiante comprenda las posibilidades de la estrategia algebraica al permitir establecer relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas. En coherencia con el enfoque en competencias, el programa de estudio enfatiza en el significado y reflexión de conceptos, más que en la memorización de contenidos aislados o la mecanización de algoritmos, en la promoción de valores y en el desarrollo de habilidades matemáticas. Es fundamental que los estudiantes interactúen con los contenidos específicos de la asignatura a fin de favorecer una mejor comprensión de la materia. **Objetivo de las Ciencias Exactas o campo disciplinar de las Matemáticas en el Plan de Estudios de la UAPUAZ:** Contribuye a desarrollar en los estudiantes las competencias disciplinares básicas de matemáticas, en los conocimientos de aritmética, algebra, geometría plana y analítica, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral. Hasta donde sea posible aplica correctamente los conocimientos adquiridos en el desarrollo de nuevos conceptos, así como en la solución de problemas de otras asignaturas afines, para que el alumno comprenda que las matemáticas son un lenguaje y una herramienta que lo vincula con su entorno social. Reconoce que a cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades. El desarrollo del perfil de los estudiantes se observa a través de las siguientes competencias disciplinarse básicas y genéricas, las que se considerarán en la evaluación de este programa: 1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales. 2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques. 3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático. 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea. 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. 9. Desarrollar la participación de los alumnos en concursos de Matemáticas que fomenten su superación académica. El despliegue de las competencias genéricas promoviendo diferentes valores y actitudes: En las categorías:

Anexo 3: Objetivo de la asignatura de Matemáticas I

Se expresa y comunica Piensa crítica y reflexivamente Trabaja en forma colaborativa y participa con responsabilidad en los equipos de trabajo. **Objetivo de la asignatura de Matemáticas I:** Reconoce que la comprensión plena de la aritmética, es de suma importancia para el estudio del álgebra y de las demás ramas de la matemática. En el desarrollo de la asignatura de Matemáticas I se pretende explicar de manera clara el álgebra a partir de la aritmética y sus operaciones en el sistema de los números Reales. Se encauza el contenido de la asignatura para que perciba, las ventajas que ofrecen los procesos algebraicos respecto a los aritméticos, puesto que con los métodos algebraicos se construyen modelos simples que resuelven ejercicios de carácter general. Logrando gradualmente los conocimientos necesarios y desarrolla la habilidad, para aplicarlos posteriormente en la solución de problemas con mayor grado de dificultad. Conoce y maneja los números Reales. Utiliza los conceptos y la aplicación de técnicas aprendidas en la resolución de problemas. Aplica los métodos algebraicos para solucionar una variedad de ejercicios de situaciones del entorno y contenidos en la antología de matemáticas I.

Anexo 4: Contenidos de la asignatura de Matemáticas I

UNIDAD I. ARITMÉTICA
1.1. Conjuntos numéricos
1.2. Propiedades de campo de los números Reales
1.3. Símbolos de agrupación
  1.3.1. Criterios de divisibilidad (2, 3, 5 y 7)
1.4. Clasificación y operaciones con fracciones
  1.4.1. Razones y proporciones
1.5. Series y sucesiones (noción algebraica y geométrica)

UNIDAD II. CARÁCTER DEL ÁLGEBRA Y OPERACIONES BÁSICAS
2.1. Carácter del Algebra y su diferencia con la Aritmética
2.2. Lenguaje algebraico
2.3 Notación Algebraica
2.4. Valor numérico de una expresión algebraica
2.5. Adición y sustracción de polinomios
26. Multiplicación de polinomios
2.7. División de expresiones algebraicas

UNIDAD III. PRODUCTOS NOTABLES, FACTORIZACIÓN Y FRACCIONES ALGEBRAICAS
3.1. Productos Notables
  3.1.1. Binomio elevado a la n potencia (noción)
  3.1.2. Binomios con término común
  3.1.3. Binomios conjugados
  3.1.4. Binomio por trinomio para obtener la suma o diferencia de cubos
3.2. Factorización de expresiones algebraicas
  3.2.1. Factorización encontrando término común
  3.2.2. Trinomio cuadrado de forma general
  3.2.3. Trinomio cuadrado de forma 〖ax〗^2+bx+c
  3.2.4. Diferencia de cuadrados y de cubos
3.3. Fracciones algebraicas
  3.3.1. Simplificación de fracciones con expresiones algebraicas
  3.3.2. Multiplicación y división de fracciones con expresiones algebraicas
  3.3.3. Suma y resta de fracciones con expresiones algebraicas

UNIDAD IV. NOCIONES DE ECUACIÓN
4.1. Concepto de ecuación
4.2. Ecuación condicional e idéntica
  4.1.2. Componentes de la ecuación
    4.1.2.1. Clasificación de las ecuaciones
  4.1.3. Teorema fundamental de las ecuaciones
  4.1.4. Solución de la ecuación lineal
  4.1.5. Operaciones inversas

Anexo 5: Secuencias didácticas de la Unidad II

Contenidos	Objetivos específicos	Secuencias didácticas		Evaluación
		Actividades de aprendizaje	**Actividades de enseñanza**	
Carácter del algebra y su diferencia con la aritmética. 2.1. Carácter del Algebra y su diferencia con la Aritmética 2.2. Lenguaje algebraico 2.3 Notación Algebraica 2.4. Valor numérico de una expresión algebraica 2.5. Adición y sustracción de polinomios 26. Multiplicación de polinomios 2.7. División de expresiones algebraicas Prueba objetiva	**Describe** la importancia del algebra con respecto a la aritmética. **Hace** una lista con los elementos que no son propios de la aritmética. **Realiza** la transferencia de enunciados hasta donde sea posible (de la vida real), del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa. **Integra** expresiones algebraicas a partir de señalar y describir las partes que conforman una expresión algebraica y viceversa. **Identifica** mediante un ejemplo de la vida real las partes de la expresión algebraica. Clasifica el tipo de la expresión algebraica **Calcula** el valor numérico de una expresión algebraica	Promueve participación oral a través de una situación generadora: Un ejemplo del entorno. Revisa de manera general las contestaciones de los alumnos. Da indicaciones para que lean en la antología el tema de lenguaje algebraico. Y pide a los alumnos que elaboren una lista de los elementos utilizados en el lenguaje algebraico. Solicita a los alumnos participación para elegir un tema de interés social, y partir de este él diseña enunciados. Explica cómo se transforma un enunciado escrito a lenguaje algebraico, y viceversa. Pide se conformen equipos de 2. Solicita que lean y subrayen los componentes de notación algebraica. Pide a los alumnos formar equipos, para construir rompecabezas, con los cuales formen expresiones algebraicas. Considera el rompecabezas más completo y lo asocia con algún enunciado construido con los temas sugeridos por los alumnos en el tema de lenguaje algebraico para clasificar	Registra en el cuaderno las contestaciones Y desarrolla el concepto propio para describir la importancia del álgebra. Lee el tema alusivo en la antología. En el cuaderno de forma individual presenta la lista de los componentes del lenguaje algébrico en el cuaderno. En equipo (2 alumnos) Transforman enunciados a lenguaje algebraico y viceversa. Leen y subrayan. Efectúa ejercicios en equipo. De manera individual, en el cuaderno de apuntes construye expresiones algebraicas y las clasifican. Presenta en el cuaderno la lista requerida. En equipos de dos alumnos (as) construyen rompecabezas para el tema de expresiones algebraicas.	**Formativa**: Revisar la integración de los elementos del tema. **Formativa**: Lista completa. Revisión de apuntes Revisión de rompecabezas, para la construcción de expresiones algebraicas de manera pertinente e imaginativa.

Anexo 6: Objetivos específicos y actividades de aprendizaje

	que represente una situación real escolar **Ordena** polinomios. Calcula el Grado relativo y absoluto de una expresión algebraica. **Resuelve** ejercicios que involucren reducción de términos semejantes. **Resuelve** operaciones de suma y resta con expresiones algebraicas las cuales aplica a situaciones reales. **Identifica** los símbolos de agrupamiento. **Aplica** el orden lógico algebraico para resolver ejercicios combinados de suma y resta. **Analiza** el concepto de exponente y leyes de los exponentes. **Resuelve** ejercicios de multiplicación, división y potencias de potencias con monomios. **Relaciona** la multiplicación aritmética con la algebraica.	una o varias expresiones algebraicas. Pide a los alumnos que construyan y clasifiquen 3 o más expresiones algebraicas. Les pide que realicen los ejercicios propuestos en la antología, escribe la respuesta de los ejercicios propuestos en la antología. En el pizarrón presenta el orden de varios polinomios y calcula el grado relativo y absoluto. Pide a los alumnos que resuelvan los ejercicios propuestos en la antología, para ordenar polinomios y calcular el grado absoluto y relativo. Mediante un ejemplo considerado de los temas sociales sugeridos por los alumnos construye y explica la reducción de términos semejantes. <u>Repasa con ejercicios las leyes de los signos en enteros.</u> Explica los conceptos de exponente y ley. Propone a los alumnos que revisen ejercicios resueltos en la antología y resuelvan los propuestos; pide elaboren una ficha descriptiva del exponente cero y las leyes de los exponentes. Les pide que pasen a pizarrón a resolver ejercicios alusivos al tema. Pide que de tarea realicen ejercicios	En forma individual resuelven los ejercicios propuestos en la antología, para reducir términos semejantes. Al azar pasan al pizarrón a presentar procedimiento y resultado. De tarea realizan ejercicios especiales para revisar ley de signos en enteros. En forma individual revisan los ejercicios para identificar los símbolos de agrupamiento. En equipos de 2, resuelvan los ejercicios para ordenar polinomios; reducción de términos semejantes. Revisan los ejercicios resueltos acerca de las leyes de los signos y de forma individual resuelven los ejercicios propuestos. En una ficha escriben el concepto de exponente entero y sus las leyes. Pasan al pizarrón. Entregan la tarea	Observación de ejercicios, y señalar los procesos no asertivos. Reconocimiento de tarea Observación y registro de la actividad en el aula. Registro de la participación colaborativa en los equipos de trabajo. Estima el cumplimiento de la actividad en el aula, y la tarea para casa. Revisión de la ficha. Registra y entrega la tarea revisada.

Anexo 7: Relación del contenido de exponentes con polinomios

	Resuelve ejercicios que involucren multiplicaciones de polinomios. Aplica los algoritmos a situaciones reales mediante multiplicaciones algebraicas. **Relaciona** la división aritmética con la algebraica. **Resuelve** ejercicios que involucren divisiones de polinomios. **Integrar el lenguaje** algebraico adquirido y las habilidades para resolver operaciones de suma, resta multiplicación y división con expresiones algebraicas.	especiales para revisar ley de signos en enteros. Mediante un ejemplo considerado de los temas sociales sugerido por el alumno, construye y explica la suma y resta de polinomios. Pide a los alumnos que revisen el subtema de los símbolos de agrupamiento, y ejercicios resueltos en la antología. Mediante un ejemplo de la vida real escolar (áreas de polinomios) explica el significado de multiplicación aritmética, algoritmos, multiplicaciones con expresiones algebraicas. Concluye el tema asociando ejercicios y leyes de los exponentes y pide que resuelvan los ejercicios de multiplicación, división y potencias de potencias con monomios, propuestos en la antología. Indica la formación de equipos para que resuelvan los ejercicios propuestos en la antología. Le pide que de tarea consulte páginas web, para revisar los ejercicios resueltos y procedimiento	Toma nota en el cuaderno de apuntes. Resuelvan los ejercicios propuestos en la antología. En forma individual calcula el valor numérico de expresiones algebraicas En forma individual resuelve los ejercicios propuestos en la antología, para ordenar polinomios. Al azar pasan al pizarrón a presentar el procedimiento y resultado. En equipo resuelven los ejercicios propuestos. Toma como base el algoritmo de la multiplicación en aritmética y desarrolla el de la algebraica mediante la resolución de ejercicios. En equipo Resuelven los ejercicios propuestos en la antología.	Registro del trabajo en el aula. Revisión de ejercicios contestados de forma veras.

Anexo 8: Relación de la asignatura de Matemáticas I con otras

Desde el punto de vista curricular, cada materia de un plan de estudios mantiene una relación vertical y horizontal con el resto, el enfoque por competencias reitera la importancia de establecer este tipo de relaciones al promover el trabajo disciplinario, en similitud a la forma como se presentan los hechos reales en la vida cotidiana. Matemáticas I, permite el trabajo interdisciplinario con las asignaturas de: Química I y II, en la aplicación de proporciones, mezclas; en Introducción a las Ciencias Sociales se retoman las proporciones y porcentajes; para Matemáticas II se relaciona con las proporciones de los triángulos y semejanza, en Matemáticas III se profundiza en el estudio de la Recta, propiedades de la

6 DGB/DCA/2013

Anexo 9: Relación del contenido de exponentes con otras materias

MATEMÁTICAS I

parábola y en general las operaciones algebraicas y desarrollo de ecuaciones. Para Matemáticas IV se vincula con la factorización, funciones, la ecuación lineal y cuadrática, etc. En las asignaturas de Física I y II se relaciona con los cálculos de movimiento, de fuerzas, transformaciones escalares, y en general aplicaciones de operaciones algebraicas. En Biología I y II aplicación de procedimientos aritméticos, en Cálculo Diferencial, se aplica la factorización, simplificación de expresiones algebraicas, elaboración de graficas; en Cálculo Integral se aplican las reglas básicas del álgebra, simplificación de expresiones, elaboración de graficas de funciones, reglas de los exponentes. Para las asignaturas del componente de formación propedéutico, que comprende a Temas Selectos de Biología I y II se aplican cálculos de tazas de variación, porcentajes, series numéricas y para Temas Selectos de Física I y II se utilizan las reglas básicas de la solución de problemas aritméticos y algebraicos. En la Capacitación de Contabilidad, es esencial el manejo óptimo de las operaciones aritméticas y en las actividades Paraescolares, en particular la Música, el conocimiento de las fracciones es muy importante para un buen desempeño.

Anexo 10: Distribución de bloques

DISTRIBUCIÓN DE BLOQUES

Los bloques que componen el programa de la asignatura son:

BLOQUE I: RESUELVES PROBLEMAS ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS.
En el Bloque I aprenderás el uso de variables y expresiones algebraicas en el contexto de los números positivos.

BLOQUE II: UTILIZAS MAGNITUDES Y NÚMEROS REALES.
En el Bloque II aprenderás el uso de variables y expresiones algebraicas en el contexto de los números reales, asimismo, sobre comparaciones con el uso de tasas, razones, proporciones y la variación proporcional como caso simple de relación lineal entre dos variables.

BLOQUE III: REALIZAS SUMAS Y SUCESIONES DE NÚMEROS.
En el Bloque III se estudiarán sucesiones y series (aritméticas y geométricas) de números, bosquejando funciones discretas (lineales y exponenciales).

BLOQUE IV: REALIZAS TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS I.
BLOQUE V: REALIZAS TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS II.
En los Bloques IV y V se estudiarán operaciones con polinomios en una variable y factorizaciones básicas y de trinomios (incluyendo productos notables y expresiones racionales).

BLOQUE VI: RESUELVES ECUACIONES LINEALES I.
BLOQUE VII: RESUELVES ECUACIONES LINEALES II.
BLOQUE VIII: RESUELVES ECUACIONES LINEALES III.
En los Bloques VI, VII y VIII se estudiarán, respectivamente, los sistemas de ecuaciones de 1x1, 2x2 y 3x3, en estrecha conexión con la función lineal.

BLOQUE IX: RESUELVES ECUACIONES CUADRÁTICAS I.
BLOQUE X: RESUELVES ECUACIONES CUADRÁTICAS II.
Finalmente en los Bloques IX y X se estudiarán las ecuaciones cuadráticas en una variable y su relación con la función cuadrática.

9 DGB/DCA/2013

Anexo 11: Contenidos del Bloque I

MATEMÁTICAS I

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
I	RESUELVES PROBLEMAS ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS	8 horas

Desempeños del estudiante al concluir el bloque
Identifica formas diferentes de representar números positivos, decimales en distintas formas (enteros, fracciones, porcentajes), y de los demás números reales. Jerarquiza operaciones numéricas al realizarlas. Realiza operaciones aritméticas, siguiendo el orden jerárquico al efectuarlas. Calcula porcentajes, descuentos e intereses en diversas situaciones. Emplea la calculadora como instrumento de exploración y verificación de resultados. Representa relaciones numéricas y algebraicas entre los elementos de diversas situaciones. Soluciona problemas aritméticos y algebraicos.

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Representación de relaciones entre magnitudes. Modelos aritméticos o algebraicos.	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Formula y resuelve problemas de porcentajes, descuentos e intereses, etc., e interpreta los resultados obtenidos. Analiza las relaciones entre dos o más variables de diferentes fórmulas matemáticas (área, volumen, etc.) para determinar su comportamiento y lo interpreta utilizando tablas y gráficas. Elabora modelos aritméticos o algebraicos sencillos de diversas situaciones, a través del trabajo colaborativo con una actitud constructiva y aportando sus puntos de vista. Resuelve los problemas aritméticos o algebraicos que el docente plantea proponiendo la manera de solucionarlos, utiliza como apoyo la calculadora.

Anexo 12: Contenidos del Bloque II

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
II	UTILIZAS MAGNITUDES Y NÚMEROS REALES	6 horas

Desempeños del estudiante al concluir el bloque
Ubica en la recta numérica números reales y sus respectivos simétricos. Combina cálculos de porcentajes, descuentos, intereses, capitales, ganancias, pérdidas, ingresos, amortizaciones, utilizando distintas representaciones, operaciones y propiedades de números reales. Utiliza razones, tasas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa. Construye modelos aritméticos, algebraicos o gráficos aplicando las propiedades de los números reales.

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Números reales: representación y operaciones. Tasas. Razones. Proporciones, y Variaciones.	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de tazas, razones proporciones y variaciones, situados en situaciones reales. Formula y resuelve problemas matemáticos relacionados con los números reales, aplicando diferentes enfoques. Interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con situaciones reales, tales como problemas sobre la discriminación en México. Analiza las relaciones entre los diferentes tipos de números. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos relacionados la representación y operación de los números reales. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades que emplea al trabajar en equipo para la elaboración de materiales didácticos en donde identifican los números reales.

Anexo 13: Tiempo estimado para cada una de las partes que componen la Actividad 1

Actividad 1			
Parte	**Situación**	**Tiempo**	**Justificación**
I	Acción	15 minutos	Los alumnos comenzarán a tomar decisiones para responder a la primera sección de preguntas. En ese momento, se encontrarán en la situación de acción, pues se estará dando la devolución (aceptación del problema propuesto por el profesor).
I-VIII	Formulación	1 hora (para responder a todo el cuestionario)	Ésta se dará cuando los alumnos coloquen los conejos en el tablero, y escriban sus respuestas. Todas las operaciones y anotaciones que harán tanto en el instrumento como en las hojas blancas que se les proporcionarán forman parte de la formulación. Además, todo lo que comentarán entre ellos forma parte de esta situación.
Al finalizar la sección I, II, V y VIII	Validación	5 minutos para cada sección	Con esta situación se espera que, si algunos estudiantes no lograran obtener el resultado correcto, ya sea debido a la falta de comprensión del problema, al analizar la respuesta de sus compañeros podrían comprender aquello que no habían logrado y así posiblemente reformularán su respuesta para las siguientes actividades.
Después de que los alumnos hayan concluido con todas las secciones	Institucionalización	15 minutos	Es donde interviene el profesor para dar la definición formal de exponente natural y exponente cero. Si algunos equipos no lograron ver en el transcurso de la actividad que la cantidad de conejos infectados en la hora 1, 2, 3, etc., podía representarse con notación exponencial éste es el momento de que lo hagan, además, notarán que para cualquier base elevada a un exponente n donde n es natural, dicho exponente indica la cantidad de veces que debe multiplicarse la base, así como también notarán que cualquier número distinto de cero elevado al exponente cero dará como resultado 1.

Anexo 14: Tiempo estimado para cada una de las partes que componen la Actividad 2

Actividad 2			
Secciones	**Situación**	**Tiempo**	**Justificación**
I (Construcción 1, 2 y 3)	Acción	25 minutos	Se da esta situación en esas construcciones debido a que el alumno empieza a interactuar con el problema y decide resolverlo.
I-III	Formulación	1 hora	Se da a lo largo de todo el instrumento porque en todo momento los estudiantes estarán haciendo sus construcciones, escribiendo los resultados y comentarán entre los integrantes del equipo.
I	Validación	10 minutos	Se validarán estas preguntas debido a que es el momento en el que se pone en conflicto al alumno, pues necesitará saber que el segmento DE es la raíz cuadrada del segmento AD, al validar en este momento, se espera que aquellos estudiantes que no han logrado identificar lo que se mencionó, lo hagan mediante la discusión y reflexión de sus compañeros que pasarán al pizarrón, pues ellos defenderán su punto de vista y tratarán de convencer al resto mediante el diálogo y la reflexión de que su argumento es correcto.
Al finalizar las secciones I, II y III	Institucionalización	15 minutos	Se da esta situación debido a que el profesor menciona formalmente que lo que realizaron en las hojas milimétricas es una aproximación de la raíz cuadrada. También dice que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, lo cual es algo a lo que se quiere llegar porque el contenido que se está trabajando es exponentes naturales y racionales. Finalmente, les dará un panorama más amplio con la tecnología, pues les mostrará que lo que ellos realizaron pueden obtenerlo de manera más exacta.

Actividad 1

Propagación de un virus

Nombre:____

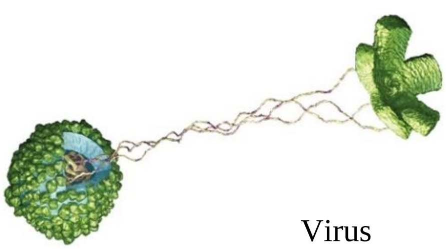
Género:________**Fecha:**_________ **Semestre o Grado que cursas:**________________

Nombre de tu escuela:____

Presentación: Esta actividad se realiza con el propósito de recoger información para la realización de la tesis de Maestría en Matemática Educativa de la Lic. Sandra García Quezada, la cual lleva por nombre “Una situación didáctica como alternativa para la enseñanza-aprendizaje de exponentes en bachillerato”.

Planteamiento del problema

En una granja de conejos llamada: “el conejo alegre”, los dueños introducen un conejo nuevo (hora cero) con la finalidad de mejorar la producción, sin embargo, resulta todo lo contrario, pues éste posee el virus “atacón”. Respecto a este virus se sabe que está afectando a la población de conejos muy rápidamente. Además, se transmite mediante contacto físico y cada conejo contagia a otros tres cada hora.



Virus

Instrucciones: Contesta con pluma lo que se solicita a continuación, si te equivocas, encierra en un círculo la respuesta que quieres eliminar y táchala. No utilices corrector ni rayes nada.

I.- De acuerdo a lo anterior y con ayuda del material que se te acaba de proporcionar, realiza y contesta lo que se pide a continuación.

Ojo: No quites los conejos que vas a ir colocando en el tablero en cada una de las celdas que se te pide.

6. Coloca un conejo en el tablero en la celda que tiene marcada la hora cero.

7. ¿Cuántos conejos se contagiarán del virus después de una hora (hora 1)?

8. ¿Los conejos de la hora 1 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 2)?

9. ¿Los conejos de la hora 2 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 3)?

10. ¿Los conejos de la hora 3 a cuántos conejos contagiarán en la siguiente hora (hora 4)?

II.- Enseguida, escribe las operaciones que se solicitan, <u>sin el resultado</u>.

e) Escribe la operación matemática que realizaste para conocer la cantidad de conejos que se infectaron en la hora 1 a partir del conejo infectado que había en la hora cero.

f) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 2? Modifícale lo que consideres necesario.

g) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 3? Modifícale lo que consideres necesario.

h) Escribe la operación anterior **sin el resultado.** ¿Qué tendrías que modificarle para obtener los conejos infectados de la hora 4? Modifícale lo que consideres necesario.

¿Conoces alguna expresión que represente o simplifique las operaciones que realizaste en los incisos anteriores?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso a)?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso b)?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso c)?

- ¿Cuál es la expresión que representa o simplifica la operación del inciso d)?

- ¿Respecto a las expresiones anteriores puedes proporcionar alguna que arroje la cantidad de conejos infectados que hay en la hora cero? ¿Cuál?

III.- Ahora, sin colocar conejos en el tablero, contesta la siguiente pregunta.

¿Cuántos conejos se infectarán en la hora 8?

IV.- En lo siguiente, únicamente deja indicada la expresión que ayuda a obtener la cantidad de conejos infectados en las siguientes horas:

- Hora 20:
- Hora 70:
- Hora 100:

V.- En este momento, imagina que tienes un tablero con n celdas, escribe la expresión que te generaría la cantidad de conejos infectados para la hora n.

VI.- En lo siguiente, escribe los <u>cálculos</u> necesarios y el <u>resultado</u> de las siguientes expresiones:

h) $3^0 =$

i) $3^1 =$

j) $3^2 =$

k) $3^3 =$

l) $3^4 =$

m) $3^5 =$

VII.- A continuación, deja escritas las <u>operaciones</u> que habría que realizar para obtener el resultado de las expresiones siguientes:

n) $3^{12} =$

o) $3^{21} =$

p) $2^{n} =$

q) $3^{n} =$

r) $4^{n} =$

s) $5^{n} =$

t) $6^{n} =$

VIII.- Finalmente, indica el <u>resultado</u> para las expresiones siguientes:

u) $2^{5} =$

v) $4^{2} =$

w) $4^{4} =$

x) $5^{1} =$

y) $5^{3} =$

z) $6^0 =$

aa) $6^3 =$

¡Gracias por tu participación!

Anexo 16: Actividad 2

Actividad 2

Nombres:____

Género: ________ **Fecha:**_________ **Semestre o Grado que cursan:**________________

Nombre de tu escuela:____

Presentación: Esta actividad se realiza con el propósito de recoger información para la realización de la tesis de Maestría en Matemática Educativa de la Lic. Sandra García Quezada, la cual lleva por nombre "Una situación didáctica como alternativa para la enseñanza-aprendizaje de exponentes en bachillerato".

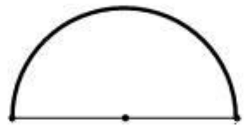
Instrucciones: Contesta con pluma lo que se solicita a continuación, si te equivocas, encierra en un círculo la respuesta que quieres eliminar y táchala. No utilices corrector ni rayes nada.

I.- Realiza los trazos que se piden a continuación, contesta las preguntas y utiliza las tres plumas de color que se te entregaron, de la siguiente manera:

- Para el segmento AB utiliza la pluma negra.
- Para escribir todas las letras (A, B, C, D y E) que van en la construcción utiliza la pluma azul.
- Para marcar los puntos que se solicitan y la recta DE hazlo con la pluma roja.

Construcción 1.

a) Traza un segmento en una hoja milimétrica que mida 3 cm. En el extremo izquierdo del segmento coloca la letra A y en el extremo derecho la letra B, éste segmento será llamado AB.
b) Coloca un punto a la mitad del segmento AB y nómbralo C.
c) Coloca un punto sobre el mismo segmento a 2 cm de distancia desde el punto A y llámalo D.
d) Abre el compás a la medida del segmento AC y traza una semicircunferencia.
e) Traza una recta perpendicular que pase por el punto D y prolóngala hasta que toque la semicircunferencia.

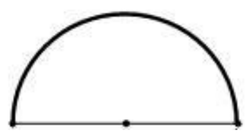


f) Coloca un punto en la semicircunferencia de tal manera que sea la intersección de la recta perpendicular y la semicircunferencia y llama E a éste punto.

g) Mide el segmento DE y escribe la medida en la construcción que acabas de realizar.

Construcción 2.

h) Traza un segmento en una hoja milimétrica que mida 4 cm. En el extremo izquierdo del segmento coloca la letra A y en el extremo derecho la letra B, éste segmento será llamado AB.
i) Coloca un punto a la mitad del segmento AB y nómbralo C.
j) Coloca un punto sobre el mismo segmento a 3 cm de distancia desde el punto A y llámalo D.
k) Abre el compás a la medida del segmento AC y traza una semicircunferencia.



l) Traza una recta perpendicular que pase por el punto D y prolóngala hasta que toque la semicircunferencia.
m) Coloca un punto en la semicircunferencia de tal manera que sea la intersección de la recta perpendicular y la semicircunferencia y a llama E a este punto.
n) Mide el segmento DE y escribe la medida en la construcción que acabas de realizar.

Construcción 3.

Realiza lo mismo que en los casos anteriores pero ahora con $AD = 4\ cm$. ¿Cuál será la longitud del segmento AB y DE?

Preguntas:

1. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 1?
2. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 1?
3. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

j) ¿A qué valor se aproxima?

k) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?

l) ¿Cuál?

4. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 2?
5. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 2?
6. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

m) ¿A qué valor se aproxima?

n) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?

o) ¿Cuál?

7. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 3?
8. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 3?
9. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

p) ¿A qué valor se aproxima?

q) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?

r) ¿Cuál?

10. Con base en lo anterior, ¿Qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AD, es decir, a partir de la longitud del segmento AD cómo se obtiene la longitud del segmento DE?

Si en este momento tuvieras que calcular $\sqrt{5}$, ¿Cómo lo harías? ¿Podrías apoyarte de las construcciones anteriores? Hazlo en una hoja milimétrica y escribe el resultado a continuación:

$\sqrt{5} =$

II.- Instrucciones: Con base en lo anterior, calcula el valor de lo siguiente en las hojas milimétricas y escribe el resultado a continuación:

d) $\sqrt{7} =$

e) $\sqrt{13} =$

f) $\sqrt{17} =$

III.- Instrucciones: Por medio de la calculadora obtén los valores para las siguientes expresiones (escribe todos los decimales que salgan en la calculadora).

g) $\sqrt{5} =$

h) $5^{\frac{1}{2}} =$

¿Qué observas en estos dos valores?

i) $\sqrt{7}=$

j) $7^{\frac{1}{2}} =$

¿Qué observas en estos dos valores?

k) $\sqrt{13} =$

l) $13^{\frac{1}{2}} =$

¿Qué observas en estos dos valores?

m) $\sqrt{17} =$

n) $17^{\frac{1}{2}} =$

¿Qué observas en estos dos valores?

1. ¿Te gustó la actividad?, ¿Por qué?

2. ¿Qué aprendiste?

3. ¿Te gustaría que tus clases de matemáticas fueran de esta forma?

¡Gracias por tu participación!

Anexo 17: Transcripción situación de acción. Actividad 2

138	PI:	Buenos días. Bueno, no sé si se acuerden de mí, vine la otra vez a aplicarles una actividad de los conejos ¿verdad? Me presento otra vez, soy Sandra García Quezada, estoy estudiando la Maestría en Matemática Educativa y vengo a aplicarles otra actividad que espero que les guste y cooperen, si todos cooperan, participan, se hace la clase dinámica, van a salir más temprano, sí no, hasta que terminemos ¿ok? Ustedes deciden. //Un alumno llegó tarde y en ese momento la profesora-investigadora deshizo un equipo de 3 integrantes para formar otro de 2//.
139	PI:	Bueno, en las carpetas que les di, a ver pongan atención. En las carpetas que les di viene un material que vamos a utilizar: es una hoja, bueno son varias hojas que dice actividad 2, viene el compás, la regla, el número de equipo y las plumas que van a utilizar. Quiero que todo lo contesten con pluma, ahí viene en las instrucciones que, si se equivocan, le van a hacer como la vez pasada, encierran en un círculo, tachan. No borren ni rayen nada. También quiero que vean el material que les estoy entregando, es el mismo que quiero de regreso, necesito que me lo entreguen cuidado porque es prestado nada más ¿sí?
140	Al2-1:	Sí.
141	PI:	Ok gracias. Bueno, vamos a iniciar la actividad comentándoles primero que vamos a tratar la clase hoy sobre geometría
142	Todos:	Ruido y plática entre ellos.
143	PI:	A ver, a ver, tranquilos. La geometría significa Geo, Tierra, metría, medida, o sea, medida de la Tierra. La geometría surgió con los egiptos, con los egipcios perdón (se ríe), en Egipto quería decir, entonces, surgió porque el río Nilo cuando se desbordaba, eliminaba las líneas de donde estaban las divisiones de los terrenos de cada persona, entonces surgió para saber qué área tenía cada terreno, de ahí viene el origen de la geometría. Pero también, a través de Egipto se fue regando a otras culturas como los griegos, que es donde surgió el teorema de Pitágoras, el teorema de Pitágoras no sé si alguien lo recuerde, lo han visto para calcular por ejemplo, el cateto de un triángulo rectángulo o la hipotenusa ¿sí?
144	Als:	Algunos alumnos asienten con la cabeza.
145	PI:	También lo utilizaron para calcular, por ejemplo, dos por cinco, ¿cuánto es dos por cinco?
146	Todos:	Diez
147	PI:	Diez, ok. Pero eso lo hacían de manera geométrica con triángulos y así. Entonces, también calculaban las raíces cuadradas de manera geométrica ¿sí? A ver, alguien puede decirme ¿cuánto es la raíz cuadrada de cuatro?
148	Als:	Algunos alumnos respondieron: Dos.
149	PI:	Ok, muy bien y ¿la raíz cuadrada de nueve?
150	Als:	Algunos alumnos respondieron: Tres.

151 PI: ¿Raíz cuadrada de cinco?

152 Al: Una alumna dijo: Dos punto y algo.

153 PI: Ok (asiente con la cabeza) pero de manera más precisa no sabemos ¿verdad? Entonces, sí se fijan, para eso más o menos utilizaban los pitagóricos hacer construcciones, para encontrar la raíz cuadrada. Bueno, pero eso solamente es para que conozcan un poco de historia de la geometría y ahora sí ya vamos a comenzar con la actividad.
A ver, quiero que pongan sus nombres en las hojas, el nombre de los dos integrantes del equipo ¿de acuerdo? También, ponen el sexo, sí están femenino y masculino o sí son los dos femeninos o los dos masculinos.

154 Al: Una alumna pregunta: ¿nada más el nombre o también los apellidos?

155 PI: Nada más el nombre, sin apellidos, pero de los dos integrantes.

156 PI: ¿Ya todos tienen su nombre?, ¿ya llenaron todos los datos que se les solicitan?

157 Todos: Sí.

158 PI: La profesora leyó en voz alta las instrucciones y les explicó lo siguiente: De todas maneras aquí vienen las instrucciones (señala la hoja) por si se les olvida qué color van a utilizar ahí revisen ¿sí? Atrás de estas hojas, vienen unas hojas milimétricas, las construcciones las vamos a hacer ahí.
Vamos a empezar con la construcción 1 y la vamos a hacer todos juntos ¿de acuerdo?
A ver vamos a ir leyendo, equipo 1, puede leer el inciso a).

159 Al2-2 Comenzó a leer un integrante del equipo 2.

160 PI: No. El equipo 1 es acá ¿verdad? (Señalando al equipo 1).

161 Al2-1 El equipo 1 (diciéndole a su compañero).

162 PI: Donde dice construcción 1 a ver todos ubíquense en construcción 1, inciso a), ¿Qué dice?

163 Al1-1 Traza un segmento en una hoja milimétrica que mida 3 cm. En el extremo izquierdo del segmento coloca la letra A y en el extremo derecho la letra B, éste segmento será llamado AB.

164 PI: Ok. A ver, ¿quién sabe qué es un segmento?

165 Al2-2: Es un trozo ¿no?

166 PI: Ok.

167 Al: Una recta.

168 PI: Bueno, sí es una recta, pero está delimitada por dos puntos ¿verdad? A ver, todos observen acá al pizarrón (todos los alumnos voltean), vamos a trazar el segmento que está delimitado por dos puntos que en este caso va a ser A y B y mide tres centímetros.
Por ejemplo, en las hojas milimétricas cada cuadro mide un centímetro igual que en Geogebra. Entonces, tracen todos el segmento AB.

169 Al: ¿En cualquier parte?

170 PI: Sí. En cualquier parte está bien.

171 PI: Después de unos minutos ¿ya todos tienen el segmento AB?

172	Als:	Sí.
173	PI:	Ok. Entonces ahora, lean ustedes (señalando al equipo 2) el equipo 2, el inciso b).
174	Al2-1	Coloca un punto a la mitad del segmento AB y nómbralo C.
175	PI:	Entonces, ¿cuál será la mitad del segmento AB?
176	Als:	Uno punto cinco centímetros.
177	PI:	Uno punto cinco centímetros ¿verdad? Vamos a encontrar pues el punto medio aquí en Geogebra. Entonces, ustedes en uno punto 5 centímetros, marquen el punto C.
178	PI:	Bueno, a ver ahora el equipo (señala a un equipo) ¿ustedes qué equipo son?
179	Al6-1:	El seis.
180	PI:	Lean el inciso c)
181	Al6-2:	Coloca un punto sobre el mismo segmento a 2 cm de distancia desde el punto A y llámalo D.
182	PI:	Ok. Entonces ¿dónde irá el punto D?
183	PI:	¿Dónde marcaremos el punto D?
184	Al:	¿Adelantito de la C?
185	Al:	En dos centímetros.
186	PI:	Ok. Entonces, aquí (señala con el puntero de la computadora el punto D en Geogebra) ¿verdad? ¿Ahí estamos de acuerdo todos?
187	Al2-2:	¿En dos centímetros?
188	PI:	¿Sí verdad? (vuelve a leer el inciso c)). Entonces es el que tenemos aquí (vuelve a señalar el punto D en Geogebra) ¿verdad?
189	Als:	Sí.
190	PI:	Ahora el inciso d) dice: Abre el compás a la medida del segmento AC y traza una semicircunferencia. A ver, ¿queda claro? Abran el compás a la medida del segmento AC ¿a qué medida van a abrir el compás?
191	Al:	A tres (titubeando).
192	Als:	A 1.5.
193	PI:	A 1.5, muy bien.
194	PI:	Después de unos segundos. Cuando tengan el compás abierto a uno punto cinco centímetros, colocan la punta del compás en el punto C y trazan la semicircunferencia. ¿Qué es una semicircunferencia?
195	Al2-2	¿La mitad de un círculo?
196	PI:	Ok. Muy bien.
197	PI:	¿Alguien me hace el favor de leer el inciso e)?
198	Al2-2:	Yo. Traza una recta perpendicular que pase por el punto D y prolóngala hasta que toque la semicircunferencia (los compañeros están haciendo ruido).
199	PI:	Ok. ¿Sí escucharon a su compañero?
200	Als:	No.
201	Als:	Sí.

202	PI:	A ver, dice: Traza una recta perpendicular que pase por el punto D y prolóngala hasta que toque la semicircunferencia. ¿Qué es una recta perpendicular?
203	Al14-1:	Dos líneas que se cruzan y forman un ángulo de noventa grados.
204	PI:	Muy bien. Ahora voy a trazar la línea perpendicular en Geogebra (pulsa el ícono) pasa por el punto D (da clic en el punto D) y es perpendicular al segmento AB (da clic en dicho segmento). Una vez que aparece la recta perpedicular en Geogebra, pregunta: ¿estamos de acuerdo?
205	Al:	Sí.
206	PI:	Tomen en cuenta que esa recta, va a pasar justamente por la línea de los cuadritos, o sea, en donde está el punto D, hacia arriba.
207	Al:	¿Hasta dónde la prolongamos?
208	PI:	Hasta donde ustedes quieran.
209	PI:	Ahora el inciso f) dice: Coloca un punto en la semicircunferencia de tal manera que sea la intersección de la recta perpendicular y la semicircunferencia y llama E a este punto. Tenemos que poner el punto E, en la intersección de la recta perpendicular y de la semicircunferencia ¿dónde irá a quedar ese punto?
210	Al:	Donde chocan.
211	Al:	Donde chocan la semicircunferencia y la recta.
212	PI:	Ok. Entonces, están de acuerdo que sería ¿aquí? (señala con el dedo la proyección de Geogebra aún sin el punto).
213	Todos:	Sí.
214	PI:	Luego, explica cómo colocar un punto de interescción en Geogebra, diciendo: Ponemos intersección, seleccionamos la semicircunferencia, luego la recta y se obtiene el punto.
215	Al:	¡Oh!.
216	PI:	Ahora, fíjense lo que dice el inciso g). Mide el segmento DE y escribe la medida en la construcción que acabas de realizar. A ver, hagan eso por favor.
217	Todos:	Están midiendo y algunos vuelven a decir la instrucción.
218	PI:	Por favor, sean muy precisos en sus medidas eh.
219	Al6-1:	¿Dónde anotamos la medida?
220	PI:	La medida del segmento pueden anotarla a un ladito del segmento.
221	PI:	¿Cuánto les dio la medida del segmento DE?
222	Al:	Uno punto cuarenta y cinco.
223	Al:	Uno.
224	Al:	Uno punto cinco.
225	PI:	Ok. Entonces, vamos a ver cuánto mide aquí en Geogebra ¿qué les parece?
226	Al:	¡Ah!, pues mejor.
227	PI:	Vamos a tomar la distancia de D a E (todos observan el pizarrón y aparece la longitud 1.41). No significa que ustedes estén mal eh, lo que pasa es que Geogebra es un poco más preciso que hacerlo manual

¿verdad? De todos modos, el resultado que obtuvieron como uno punto cuatro y uno punto cinco, está perfecto ¿ok?

Aquí solamente, a ver, pongan atención, que quede claro que es un aproximado la medida del segmento DE, entonces, mide aproximadamente uno punto cuarenta y uno ¿sí?

228 Al1-2: Sí.

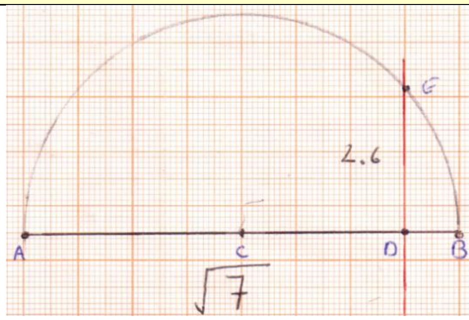
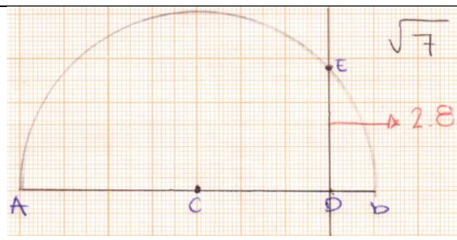
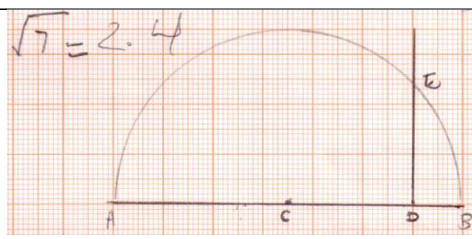
229 PI: Las medidas que ustedes tienen no las borren eh, o sea como les dije, no está mal. ¿A todos les quedó claro cómo se hizo la construcción?

230 Todos: Sí.

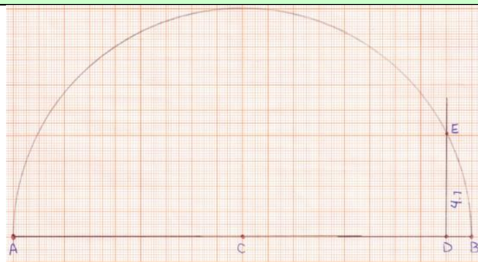
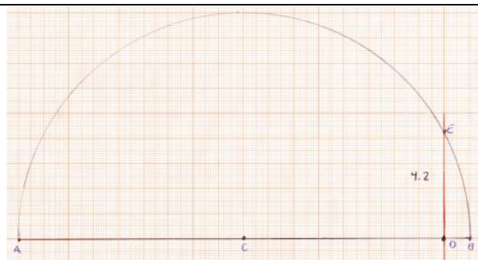
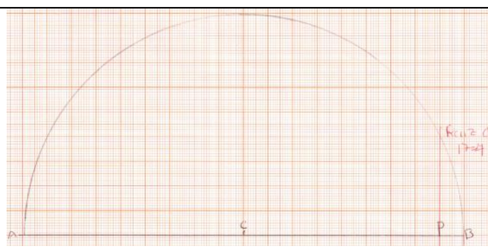
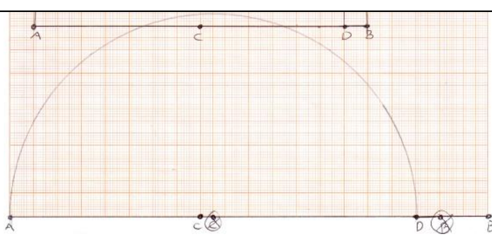
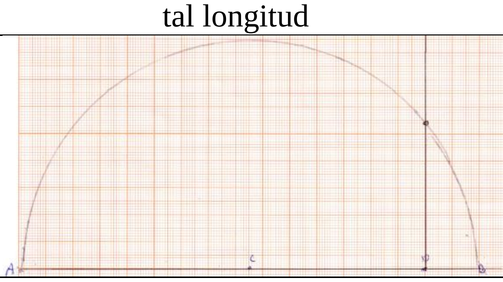
231 PI: Bueno, ahora van a hacer ustedes solos la construcción 2 y 3. Tienen 10 minutos para eso.

232 Al2-1: ¡Ay! (renegando).

Anexo 18: Construcción de la raíz de siete

Construcción $\sqrt{7}$		
Evidencia		Número de equipos que dieron esta respuesta
	Solución óptima	2, 5, 6, 8, 11, 13 y 14 7/12
	Buena solución, 2 mm mayor que la óptima	1 1/12
	Buena solución, 2 mm menor que la óptima	7 1/12
No contestó		9, 10 y 12 3/12

Anexo 19: Construcción de raíz de 17

Construcción $\sqrt{17}$		
Evidencia		Número de equipos que dieron esta respuesta
	Solución óptima	6, 7 y 11 3/12
	Buena solución, 1 mm mayor que la óptima	1, 5 y 13 3/12
	Buena aproximación, 1mm menor que la óptima	8 y 10 2/12
 Aunque en las hojas de trabajo dijeron que $\sqrt{17} = 4$, en la figura no se muestra tal longitud	No encontraron la longitud de manera geométrica	14 1/12
	Valor muy alejado del óptimo debido a que tomaron la longitud AB=17 y AD=15	9 1/12

En las hojas de trabajo dijeron que $\sqrt{17} = 5.4$		
No contestó		2 y 12 2/12