UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

De lo verbal a lo algebraico: Las ecuaciones lineales en alumnos de primero de secundaria

Tesis para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

María Goretti Robles Cháirez

Directores del trabajo de grado:

M. en TI. Mónica del Rocío Torres Ibarra

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Zacatecas, Zac., Febrero, 2017

Este trabajo ha sido realizado gracias al
apoyo financiero otorgado por el
Consejo Nacional de Ciencia y
Tecnología (CONACyT) de
Septiembre de 2014 a Julio de 2016.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 17 del mes de Noviembre del año 2016, el (la) que suscribe **María Goretti Robles Cháirez** alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel secundaria con número de matrícula **23400869**; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado intitulado "**De lo verba a lo algebraico: Las ecuaciones lineales en alumnos de primero de secundaria**" bajo la dirección de M.TI. Mónica del Rocío Torres Ibarra y como coasesora la Dra. Leticia Sosa Guerrero.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

María Goretti Robles Cháirez

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara
Responsable del Programa de Maestría en Matemática Educativa
Presente

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre **"De lo verbal a lo algebraico: Las ecuaciones lineales en alumnos de primero de secundaria"** y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la **C. María Goretti Robles Cháirez**, egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; cumple con los requisitos de calidad académica para ser sometido a su revisión. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,
Zacatecas, Zac., a 16 de Noviembre del 2016.

MATI. Mónica del Rocío Torres Tbarra | Dra. Leticia Sosa Guerrero

Asesoras

Índice

Índice de ilustraciones

Resumen

El presente trabajo de investigación detalla la adaptación, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica orientada a estimular en los estudiantes de primer grado de secundaria, el desarrollo de la capacidad de resolver problemas con ecuaciones lineales de primer grado, para que ellos opten por un planteamiento algebraico.

La secuencia didáctica fue rediseñada teniendo como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, donde se propusieron actividades de modo que el estudiante pase por situaciones de acción, formulación y validación, al resolver problemas que involucren ecuaciones lineales. Para llevar acabo este trabajo se utilizó la metodología de la Ingeniería Didáctica.

El objetivo de este trabajo consiste en que los estudiantes de primero de secundaria vean como alternativa de solución el planteamiento algebraico a problemas expresados en forma verbal, para llevar acabo lo anterior, la secuencia se planteó primero mediante un juego.

En cuento a los resultados arrojados por la investigación, los alumnos lograron encontrar algunos planteamientos algebraicos para la solución del problema. Por lo anterior se puede decir que los estudiantes lograron dar señales de utilizar el álgebra para plantear problemas que involucren ecuaciones lineales de primer grado.

Palabras clave: Secuencia Didáctica, ecuaciones lineales, incógnita, problemas verbales.

Abstract

The present study details the adaptation, application and analysis of the results of a didactic sequence aimed at stimulating in first grade students the development of problem solving skills with linear equations of first degree, so that they opt for An algebraic approach.

The didactic sequence was redesigned with Brousseau's Theory of Educational Situations (TSD) as a theoretical framework, where activities were proposed so that the student undergoes situations of action, formulation and validation, when solving problems involving linear equations. To carry out this work was used the methodology of Didactic Engineering.

The objective of this work is that the students of the first high school see as an alternative solution algebraic approach to problems expressed verbally, to carry out the above, the sequence was first raised by a game.

Regarding the results of the research, the students were able to find some algebraic approaches to solve the problem. From the above it is possible to be said that the students were able to give signs of using the algebra to pose problems that involve linear equations of first degree.

Key words: Didactic sequence, linear equations, incognito, verbal problems.

Introducción

El presente trabajo de investigación surge a raíz de la experiencia de la investigadora en el aula, al observar que ellos presentaban algunas dificultades al usar las ecuaciones lineales para resolver problemas verbales. Están más propensos a realizarlo de manera aritmética y de forma mecánica o algorítmica sin darle sentido lógico a lo que están resolviendo.

Es relevante el trabajo del docente al momento de realizar propuestas de enseñanza, ya que es importante que se busque que el alumno participe de manera activa en su proceso de aprendizaje. Por lo anterior se optó por tomar como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, para de esta manera permitir al alumno conectarse con los contenidos de manera más agradable.

Se ha decidido estudiar las ecuaciones lineales de primer grado debido a su utilidad en otras asignaturas, por ejemplo en física y química.

El trabajo consta de siete capítulos en los cuales se aborda la parte de aspectos teóricos, los detalles de la metodología y la recogida de resultados.

En el capítulo 1 se desarrollan los aspectos teóricos de la investigación donde se plantean el problema de investigación, que incluyen los antecedentes, la justificación del problema y los objetivos.

En el capítulo 2 se abordan los aspectos matemáticos que vamos a utilizar y los aspectos más importantes de la Teoría de Situaciones Didácticas.

En el capítulo 3 se presentan los aspectos de la ingeniería didáctica, tales como los análisis preliminares, los cuales comprenden las componentes epistemológicas, didácticas y cognitivas, también se menciona el análisis a priori y el a posteriori y por último la validación.

En el capítulo 4 se desarrollan los análisis preliminares, en los cuales se abordan las componentes epistemológicas, cognitivas y didácticas, relacionadas con los procesos de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones lineales con una incógnita. También se presenta el campo de restricciones el cual se refiere a las características de donde se va aplicar la secuencia.

En el capítulo 5 se realiza la concepción y el análisis a priori, donde se lleva a cabo un análisis de lo que creemos que va a pasar con nuestra secuencia.

En el capítulo 6 se presenta la fase experimental del trabajo y se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de la secuencia, se describe de manera detallada todo lo ocurrido durante la aplicación, como: las acciones, comportamientos, logros y dificultades de los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

En el capítulo 7, comprende el cierre de la investigación con las conclusiones obtenidas en relación a los objetivos planteados y se proponen algunas recomendaciones y perspectivas para investigaciones futuras.

Antecedentes

La incorporación de un lenguaje algebraico en los estudiantes de secundaria es uno de los temas que sigue teniendo gran impacto entre los investigadores, como se evidencia en las investigaciones que a continuación se mencionan, las cuales se rescatan tanto por la temática como por el marco teórico y la metodología tienen relación con el presente trabajo.

García (2014), comenta que uno de los problemas a los que se enfrenta el profesor de matemáticas en el nivel secundaria es que es aquí donde el estudiante se ve obligado a generalizar las operaciones de dominio aritmético al lenguaje algebraico.

En su investigación ella utiliza la ingeniería didáctica tomando como eje fundamental el diseño, experimentación y evaluación de una secuencia didáctica que integra el uso del software geogebra para la enseñanza de ecuaciones lineales.

Una de las conclusiones a las que llega es que la elaboración de una secuencia mediada por los diferentes registros de representaciones semióticas le permite al estudiante generar la construcción del concepto de ecuación, desde la fundamentación epistemológica, didáctica y cognitiva del concepto mismo, y esto ayuda al estudiante en la génesis de su propio aprendizaje.

Por su parte Arenas (2014) menciona que el tema de ecuaciones lineales es un eje transversal con otras ciencias del conocimiento y es por esto que la propuesta de trabajo que propone pretende apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes y toma como referente teórico el constructivismo.

Para cumplir el objetivo elabora diferentes instrumentos que permitan al educador ver la concepción que tiene el estudiante de los conceptos de variable, igualdad, ecuación y solución de ecuaciones, posteriormente propone iniciar una transcripción del lenguaje cotidiano al simbolismo matemático donde se evidencie si el estudiante logra identificar la importancia de cada uno de los conceptos a trabajar para finalmente entrar en la solución de la ecuación siendo enfáticos en la viabilidad de la solución.

Ella concluye que, al implementar en la enseñanza de las matemáticas, diferentes herramientas didácticas, esto le permite a los estudiantes visualizar, manipular y sobre todo participar activamente de su propio proceso de enseñanza aprendizaje, se potencializa no sólo un aprendizaje significativo, sino la construcción de valores, la comunicación, la aceptación por la diferencia y la autonomía. De la misma manera menciona que la realización de esta propuesta fortaleció la adquisición de conocimientos científicos en los estudiantes, en tanto que se logró involucrar en el contexto de los estudiantes, herramientas tecnológicas (TIC's) cambiando la predisposición de los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas.

Por su parte Monroy y García (2011) en su trabajo mencionan que los alumnos no son solo receptores que acumulan información, sino que aprenden al modificar sus representaciones mentales previas, al hacerlos interactuar con situaciones problema nuevas. Su investigación pretendía reconocer y analizar cómo el alumno comprende y conceptualiza la solución de ecuaciones lineales.

Ellos concluyen que es posible contextualizar situaciones problemáticas en el salón para fomentar la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones lineales y el presentar problemas contextualizados o reales (de ecuaciones lineales) al estudiante, constituyen una herramienta para la enseñanza de las matemáticas.

Por otra parte, la falta de coordinación de los registros de representaciones, pueden explicar varias de las dificultades presentes en álgebra y las cuales se manifiestan en errores que tienen su origen en la ausencia de significado y que están relacionados con las dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático. (Palarea, 1998)

Por su parte Erazo y Ospina (2013) reportaron lo realizado durante un proyecto de investigación que tenía como propósito desarrollar la capacidad para interpretar, argumentar y proponer desde el concepto de ecuación lineal con una incógnita, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica en el marco de la pedagogía conceptual. Los resultados reflejaron que al abordar el tema con la estrategia propuesta los estudiantes mostraron mayor motivación, interés y disposición hacia el aprendizaje de las ecuaciones lineales con una incógnita, lo que se observó en la presentación de la historia del álgebra y la utilización de material visual y manipulativo: como videos, balanzas y fichas.

En Díaz-Levicoy (2010) se menciona que la resolución de problemas es fundamental en las matemáticas ya que esto le permite al alumno experimentar la potencia y utilidad de los mismos en diferentes contextos y situaciones.

Por esto presenta una propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales mediante la resolución de problemas de contexto, con el objetivo de lograr que los estudiantes aprendan a trabajar los contenidos matemáticos con problemas y logrando que este se haga parte esencial de su proceso de enseñanza y aprendizaje.

Él detecta varias problemáticas que se viven en la educación matemática y estas las usó para abordar y crear problemas, algunas de estas problemáticas son: el paso del registro verbal al algebraico (Segura, 2004, citado en Díaz- Levicoy, 2010, p.436), el rechazo a la asignatura, rechazo a la resolución de problemas debido a cómo se les enseñó y a que están fuera de la realidad. Para la realización de esta investigación él usa el marco teórico del modelo de Polya (1957) para la resolución de problemas y la clasificación de Díaz- Levicoy y Poblete (1994) de acuerdo a la naturaleza de los problemas.

Por su parte Vlassis (2002), en su investigación examina el modelo de la balanza, para realizar esto primero enseñó con el método formal, el cual implicaba que se realizaran las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación utilizando, en particular, el método de la balanza.

Al analizar lo sucedido durante la investigación se observó que los números negativos en las ecuaciones dieron lugar a muchos errores.

Ella concluyó, que de acuerdo a lo observado el modelo de la balanza, puede ayudar a los estudiantes a aprender el método formal de la aplicación de la misma operación en los dos miembros de la ecuación. La observación que se hizo de los estudiantes mostró que este efecto es de larga duración, ya que ocho meses después de la experimentación, los estudiantes continuaban utilizando el principio correctamente.

Por su parte Rojano y Martínez (2009), estudiaron el pasaje del modelo a la sintaxis algebraica y adaptaron la perspectiva de los sistemas de signos matemáticos (Filloy, Rojano y Puig, 2008), que incorporan producciones de signo del estudiante en el análisis, como parte de la interacción entre los sistemas de signos del álgebra, aritmética y el modelo.

Ellas están interesadas en investigar si los estudiantes son capaces de generalizar el método de "hacer lo mismo en ambos lados de la ecuación" a ecuaciones cada vez más complejas.

Ellas concluyen que cuando la enseñanza se inicia con un modelo concreto es importante entender las acciones ejecutadas, así como para descubrir los elementos de sintaxis implícitas en las acciones. Este proceso conduce a la abstracción de las operaciones; es decir, los procesos de recuperación en el nivel sintáctico.

Las investigaciones antes mencionadas dejan evidencia que los alumnos tienen dificultad en este eje transversal que es pasar de un lenguaje verbal a uno algebraico, por lo que se hace evidente la necesidad e importancia de estudiar esta problemática, con la finalidad de proponer nuevas estrategias de tratamiento como se describe en el siguiente capítulo.

Capítulo 1 Planteamiento del problema

1.1 Problemática

Centrando la atención en el tema de ecuaciones lineales debido a que varios investigadores como Segura (2004), Kieran (2007, citado en Rodríguez-Domingo y Molina, 2013), Maffey (2006) y García (2014) consideran que este tema constituye una de las temáticas centrales en la educación básica, debido a su relación con las demás áreas del conocimiento como por ejemplo en física y química.

Por tal motivo tiene una gran relevancia en el estudio de las matemáticas y son un foco importante en las investigaciones de matemática educativa.

Diversos investigadores se han centrado en estudiar la conversión que debe de hacer el alumno del lenguaje verbal al lenguaje algebraico que lo lleva a enfrentarse con el concepto de variable o incógnita al momento de resolver o plantear ecuaciones.

Por lo anterior se considera que los estudiantes deben de ser capaces de utilizar el simbolismo algebraico como parte del lenguaje matemático, para poder expresar ideas matemáticas de una forma más precisa, analizar y evaluar pensamientos matemáticos, resolver problemas y modelizar e interpretar fenómenos de las matemáticas y otras ciencias. (Rodríguez-Domingo y Molina, 2013).

Muñoz y Ríos (2008, citados en Chavarría, 2014) mencionan que el paso de la aritmética al álgebra produce, en la mayoría de estudiantes, dificultades de aprendizaje, las cuales se agudizan en el tema de resolución de problemas cuando aplican ecuaciones lineales, ya que interviene un mayor análisis y no solo la repetición de un proceso mecánico. Por lo anterior consideramos que es un tema importante dentro de nuestra investigación.

Koedinger, Alibali y Nathan (1999) mencionan que, de los problemas verbales de álgebra, se puede afirmar que los alumnos no solucionan estos problemas convirtiéndolos en ecuaciones para luego solucionar la ecuación; en lugar de esto, emplean más a menudo estrategias informales que no involucran símbolos algebraicos, de modo que en ocasiones emplean los procedimientos de ensayo y error para encontrar la respuesta.

Relacionado con lo anterior Kieran (2007, citado en Rodríguez-Domingo y Molina, 2013), también señala que existe una resistencia por parte de los alumnos a hacer uso del simbolismo algebraico, prefiriendo utilizar razonamientos de tipo aritmético en problemas verbales de álgebra.

Puig (2013, citado en Quintero, Moreno y Barrios, 2014) hace mención que la dificultad de los estudiantes al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, se debe a que los mismos no logran identificar con propiedad las cantidades conocidas (datos) o desconocidas (incógnitas), como también las operaciones que se deban realizar entre esas cantidades, así como las relaciones entre ellas.

En Segura (2004) se menciona que unas de las dificultades que presentan los alumnos es el uso de las operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones, aun cuando saben perfectamente los algoritmos de resolución.

Por su parte Maffey (2006) expresa que:

> Los alumnos promedio del nivel medio superior pocas veces logran dominar el empleo de las ecuaciones de primer grado para la resolución de problemas concretos y de extender las técnicas de resolución a otros contextos, tales como el manejo de fórmulas en física o química, o bien, la resolución de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales; mucho menos aún, visualizar la necesidad de emplear una ecuación para resolver un problema fuera de un contexto escolar, lo que es síntoma de que el trabajo realizado al

respecto en los cursos de álgebra no ha sido suficiente para lograr un aprendizaje real del tema.(Maffey, 2006, p.14)

Debido a que los problemas son persistentes dentro del estudio de las ecuaciones lineales, es por esto que la investigación al respecto es pertinente, en este caso se va a centrar en el paso de lo verbal a lo algebraico.

1.2 Problema/Pregunta

Una vez que analizamos los antecedentes y la problemática que plantean diferentes investigadores, nos damos cuenta que el problema que se sigue manifestando en los alumnos es:

Los alumnos de primer grado de secundaria no ven como alternativa de solución un planteamiento algebraico en problemas verbales en el tema de ecuaciones lineales. Se seleccionó este nivel porque es donde tienen su primer acercamiento con el álgebra.

Por esta razón nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Cómo la implementación de una secuencia didáctica diseñada para que el alumno identifique incógnitas puede ayudarlo formular expresiones matemáticas en la resolución de problemas?

1.3 Justificación

Muchas veces la traducción del sistema verbal al simbólico recibe una atención intermedia por parte de los profesores, debido a que se centran en la traducción de lo simbólico a lo tabular y gráfico y entre lo gráfico y lo tabular.

Kieran, (2007, citado en Rodríguez-Domingo y Molina, 2013, p.113) dice que los estudios que atienden a los procesos de traducción en contextos algebraicos consideran en su mayoría los sistemas de representación tabular, gráfico y simbólico. Dichos estudios evidencian que los estudiantes tienen dificultades para mantener la congruencia semántica que caracteriza estos procesos, aunque muestren comprensión de las representaciones inicial y final. Son escasas las investigaciones que centran su atención en la traducción entre el sistema de representación verbal y el simbolismo algebraico. La mayoría de ellas se localizan en el contexto de la resolución de problemas dado que una de las acciones a realizar al abordar un problema algebraico es pasar del enunciado verbal a su modelización con símbolos.

Relacionado con lo anterior Sinitsky (2003, citado en Chavarría, 2014), comenta que la resolución de problemas algebraicos debe verse (desde la perspectiva del educador) como una herramienta que permite acercar el álgebra al contexto en que se desenvuelve el estudiante, y no como un tema aislado al final de la unidad. En este sentido, Cardona (2007, citado en Chavarría, 2014) añade que la resolución de problemas introduce al estudiante en la modelación matemática, promoviendo la curiosidad e inventiva.

Es necesario que los profesores busquen nuevas alternativas de enseñanza, y de esta manera se pueda lograr un interés en el alumno, al involucrar temas de su interés y relacionados con su vida diaria y para que pueda construir un verdadero significado del tema o contenido estudiado y se genere así un interés por la materia.

1.4 Objetivo general

Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación se plantea el siguiente objetivo:

Adaptar e implementar una secuencia didáctica en la que los estudiantes de primero de secundaria por medio de un juego formulen expresiones matemáticas en la resolución de problemas verbales que implican la identificación de incógnitas.

1.5 Objetivos particulares.

1. Realizar un análisis que me permita tener un panorama completo de las propuestas de trabajo del tema de ecuaciones lineales, por medio de la revisión de actividades en libros de texto, objetivos planteados en los planes de estudio y estudios previos del tema, para tomar elementos que deban intervenir en la secuencia planteada.
2. Seleccionar, adaptar y aplicar una secuencia que concentre los elementos encontrados en el análisis anterior para facilitar la identificación de variables en el tránsito del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.
3. Aplicar la nueva secuencia a un grupo de primer año de secundaria.
4. Contrastar los resultados esperados con los obtenidos para valorar si los alumnos logran formular expresiones matemáticas en la resolución de problemas verbales.

1.6 Hipótesis.

La implementación de una secuencia didáctica que usa estrategias como el juego y la identificación de incógnitas, permitirá al alumno formular expresiones algebraicas y de esta manera puedan implementar éste como alternativa de solución en un problema verbal.

Para llevar a cabo nuestros objetivos y corroborar nuestra hipótesis, nuestro trabajo estará sustentado en la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual explicaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2 Marco Teórico

En este capítulo, se presenta la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual se usará como marco teórico en nuestra investigación. También se incluyen los elementos teórico-matemático que sustentan nuestro trabajo.

2.1 Marco Matemático

En este apartado se enuncia el contenido matemático que vamos abordar dentro de nuestro trabajo. Y todo lo que se va abordar se tomó de Caballero, Martínez y Bernárdez, (1996)

Para poder entender lo que es una ecuación lineal se debe de considerar términos como la igualdad la cual vamos a definir a continuación

Igualdad: Es un caso particular de la relación de equivalencia. La igualdad se establece entre dos símbolos que representan el mismo número.

Ejemplo:

$$a + b = c$$

Es decir, la suma de los números que representan a y b deben ser igual al número representado por c.

La parte izquierda del signo =, se llama *primer miembro* de la igualdad; y la de la derecha de dicho signo, recibe el nombre de *segundo miembro.*

Otro concepto que es necesario mencionar para nuestro trabajo es la identidad, la cual se describe a continuación.

Identidad: La igualdad que es cierta para cualquier valor que se dé a sus variables, recibe el nombre de identidad.

Ejemplo:

La igualdad

$$m + m = 2m$$

Es una identidad, ya que se satisface para cualesquiera valores de m. en efecto, si hacemos $m=3$, se tiene

$$3 + 3 = 2(3)$$

$$6 = 6$$

Se puede comprobar fácilmente que, si a m se les da otros valores, también se satisface la igualdad, pues es obvio que la suma de dos sumandos iguales es igual al doble de uno de ellos.

Las igualdades que expresan las propiedades de las operaciones son *identidades,* porque son igualdades ciertas para todos los valores que demos a las variables:

$$ab = ba$$

$$(Propiedad\ conmutativa\ de\ la\ multiplicación)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

$$(Propiedad\ del\ inverso\ multiplicativo)$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(Propiedad\ distributiva\ de\ la\ multiplicación)$$

Los términos anteriormente mencionados son importantes para poder llegar al concepto de nuestro interés.

Ecuación: Es una igualdad que sólo se satisface para determinado o determinados valores de la variable o variables que en ella intervienen, es decir, que cuando se sustituye la variable o variables por esos valores, se obtiene para los dos miembros el mismo valor numérico.

Ejemplo:

$$2x + 5 = 13$$

es una ecuación en la que x sólo puede tener el valor de 4 para que se cumpla la igualdad.

En efecto, sustituyendo la variable x por 4, los dos miembros adquieren un mismo valor numérico:

$$2(4) + 5 = 13$$

$$8 + 5 = 13$$

$$13 = 13$$

Se llaman ***incógnitas,*** en una ecuación, a las variables cuyo valor se desea obtener. Los valores numéricos de las incógnitas que satisfacen la ecuación, se llaman *soluciones* o *raíces* de la ecuación. Las incógnitas se suelen representar por las últimas letras del alfabeto.(p.143)

Hay dos tipos de ecuaciones que son:

Ecuaciones numéricas: Son cuando no tienen más letras que las que representan a las incógnitas.

Ecuaciones literales: Son cuando, además de las incógnitas, figuran otras letras.

Existen ecuaciones ***enteras*** y ***fraccionarias***, las primeras son cuando la incógnita no esta en ningún denominador, mientras que las fraccionarias son todo lo contrario.

Ejemplo:

- $4x + y = 14$ (ecuación numérica)
- $ax + by = c$ (ecuación literal)
- $3y - 2z = 7$ (ecuación entera)
- $\frac{5}{x} + y = 4$ (ecuación fraccionaria)

Las ecuaciones también se pueden clasificar de acuerdo con el número de sus incógnitas, y así se dice pues *ecuación con una incógnita, con dos, con tres,* etcétera.

Ejemplo:

- $2x + 3 = 13$ (ecuación con una incógnita)
- $3x + 2y = 8$ (ecuación con dos incógnitas)

Las ecuaciones enteras pueden clasificarse atendiendo al mayor exponente de la incógnita o incógnitas que en ella intervienen.

Ejemplo:

- $3x - 7 = 8 + y$ (ecuación de primer grado con dos incógnitas o lineal)
- $2x^2 - 4x + 3 = 0$ (ecuación de segundo grado con una incógnita)
- $x^2 - 3y = x + 7$ (ecuación con dos incógnitas, de segundo grado en *x* y de primer grado en *y*.)

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen una sola raíz; es decir, existe un solo valor que satisface a la ecuación.

2.1.1 Propiedades de la igualdad

1. **Propiedad de identidad o reflexiva:** *Todo número es igual a sí mismo.*

$$a = a$$

2. **Propiedad simétrica:** *Si un número es igual a otro, éste es igual al primero.*

$$si\ a = b, \text{entonces}\ b = a.$$

También se puede enunciar de la siguiente manera:

Los miembros de una igualdad pueden permutar sus lugares.

$$\text{Si}\ a + b = c, \text{entonces}\ c = a + b$$

3. **Propiedad transitiva:** *Si un número es igual a otro y éste, a su vez, es igual a un tercero, entonces el primero es igual al tercero.*

$$\text{Si}\ a = b\ \text{y}\ b = c, \text{entonces}\ a = c$$

4. **Propiedad aditiva:** *Si a los dos números de una igualdad se les suma el mismo número, la igualdad subsiste.*

Sea la igualdad

$$8 + 5 = 13$$

a) Si sumamos 4 a los dos miembros de la misma, se tiene

$$8 + 5 + 4 = 13 + 4$$

$$17 = 17$$

b) Si a los dos miembros de la igualdad

$$8 + 5 + 4 = 13 + 4$$

Les sumamos el *inverso aditivo* de 4 (que es -4), se tiene

$$8 + 5 + 4 + (-4) = 13 + 4 + (-4)$$

$$8 + 5 + (4 - 4) = 13 + (4 - 4)$$

$$8 + 5 = 13$$

5. **Propiedad multiplicativa:** *Si los dos miembros de una igualdad se multiplican por un mismo número, distinto de cero, la igualdad subsiste.*

   a) La igualdad

$$9 = 6 + 3$$

Si multiplicamos por 3 los dos miembros de la misma, tenemos:

$$9(3) = (6 + 3)3$$

$$27 = 27$$

   b) Si los dos miembros de la igualdad

$$9(3) = (6 + 3)3$$

Se multiplican por el inverso multiplicativo (o reciproco) de 3, se tiene

$$(9 \times 3)\frac{1}{3} = [(6 + 3)3]\frac{1}{3}$$

$$9\left(3 \times \frac{1}{3}\right) = (6 + 3)\left(3 \times \frac{1}{3}\right)$$

$$9 \times 1 = (6 + 3) \times 1$$

$$9 = 6 + 3.$$

6. **Propiedad cancelativa para la adición:** *Si en los dos miembros de una igualdad se suprimen sumandos iguales, la igualdad subsiste.*

Sea la igualdad

$$a + c = b + c$$

Si a los dos miembros les sumamos el inverso aditivo de c, tenemos

$$a + c + (-c) = b + c + (-c)$$

$$a + (c - c) = b + (c - c)$$

$$a = b$$

o sea, $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

En la misma forma, dada la igualdad

$$a - c = b - c$$

Si sumamos a cada miembro el inverso aditivo de $-c$, obtenemos:

$$a - c + (+c) = b - c + (+c)$$

$$a + (-c + c) = b + (-c + c)$$

$$a = b$$

o sea,

$$a - c = b - c \Rightarrow a = b$$

7. **Propiedad cancelativa para el producto:** *Si en los dos miembros de la igualdad se suprimen factores iguales, la igualdad subsiste.*

   a) Sea la igualdad

$$a \cdot c = b \cdot c$$

$$a \cdot c\left(\frac{1}{c}\right) = b \cdot c\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$a \cdot \left(c\frac{1}{c}\right) = b \cdot \left(c\frac{1}{c}\right)$$

$$a \cdot 1 = b \cdot 1$$

$$a = b$$

$$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b, \text{siendo } c \neq 0$$

   b) Sea la igualdad

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

$$a \cdot \frac{1}{c} = b \cdot \frac{1}{c}$$

$$a \cdot \frac{1}{c}(c) = b \cdot \frac{1}{c}(c)$$

$$a \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot c\right) = b \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot c\right)$$

$$a \cdot 1 = b \cdot 1$$

$$a = b$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = b, \text{siendo } c \neq 0$$

2.1.2 Propiedades de las ecuaciones

Las propiedades que a continuación se enuncian son necesarias para que se puedan resolver las ecuaciones lineales.

Ecuaciones equivalentes: dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución.

Ejemplo

$$3x - 1 = 8$$

$$\text{y } 2x + 6 = 12$$

son equivalentes, porque tienen la misma solución: *x=3.*

Como las ecuaciones son un caso particular de las igualdades, todas las propiedades, de éstas tienen validez para las ecuaciones. Podemos, por lo tanto, aplicar las siguientes propiedades:

1. *Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta el mismo número, se obtiene otra ecuación equivalente.*

   Ejemplo:

   La ecuación es *x-3=8* en la cual la solución es *x=11*, ya que

   $$11 - 3 = 8$$

   Si a los dos miembros de la ecuación les sumamos 5, resulta

   $$x - 3 + 5 = 8 + 5$$

   cuya solución es también *x=11*, puesto que:

   $$11 - 3 + 5 = 8 + 5$$

2. *Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mimo número, distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.*

   Ejemplo:

   La ecuación $3x + 5 = 17$ en la cual la solución es *x*=4, ya que

   $$3(4) + 5 = 17$$

   Si los dos miembros de la ecuación se multiplican por 2, tenemos

   $$2(3x + 5) = 2(17)$$

   o sea,

   $$6x + 10 = 34$$

Estas propiedades que acabamos de ver, se aplican para deducir las dos reglas siguientes, que son de utilidad en la resolución de las ecuaciones:

1. *Un término de una ecuación puede pasar de un miembro a otro, con signo contrario.*

2. *Un factor o divisor de todo miembro de una ecuación puede pasar al otro miembro con la operación contraria, es decir, como divisor o factor, respectivamente, de todo miembro.*

2.2 Teoría de Situaciones didácticas (TDS)

En la década de los sesenta Guy Brousseau propone la Teoría de Situaciones Didácticas. Esta teoría considera que la enseñanza es un proceso que se centra en la producción de los conocimientos matemáticos.

El principio metodológico de la teoría de situaciones es el de definir un conocimiento matemático mediante una situación, esto es, por un autómata que modela los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima. (Brousseau, 1994, citado en Lezama, 2003)

Según Panizza (2003) "es una teoría de enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea." (Panizza, 2003, p. 2)

Por su parte, Brousseau (1999) dice:

> (…) La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían prácticamente tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos.
>
> La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y los profesores. (p.8)

La teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista en el sentido piagetiano del aprendizaje, Brousseau (1986) caracterizó esta concepción de la siguiente manera:

> "El alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho

la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.” (p.14)

Este tipo de aprendizaje por adaptación se produce mediante la interacción del sujeto (alumno) con el medio (instrumentos u objetos) sin la intervención del profesor. Mediante esta interacción se pretende que el alumno se apropie del saber. Por lo anterior es necesario que el profesor intervenga en el diseño de la situación didáctica.

A continuación, se presentan algunas definiciones relacionadas con la teoría de situaciones didácticas.

2.2.1 Medio

Son los recursos que dispone el estudiante para provocar un aprendizaje nuevo, incluyendo el espacio, el profesor, los materiales y la presencia o ausencia de otros estudiantes. (Figueroa, 2013)

Chavarría (2006) nos dice que el medio constituye el espacio donde se desenvuelven los elementos. El medio no representa por ello una dimensión pasiva, sino que es “sujeto” dentro de las situaciones didácticas

2.2.2 Situación

Brousseau (1999) describe la situación como:

Un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”.

Notemos que la misma palabra “situación” sirve, en su sentido ordinario, para describir tanto al conjunto (no necesariamente determinado) de condiciones

> que enmarcan una acción, como al modelo teórico y eventualmente formal que sirve para estudiarla. (p.8)

2.2.3 Contrato didáctico

El contrato didáctico son las reglas de juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena. Pero la evolución de la situación modifica el contrato, que permite entonces obtener situaciones nuevas. De igual forma, el conocimiento es lo que se expresa por las reglas de la situación a-didáctica y por las estrategias. La evolución de estas estrategias requiere producciones de conocimientos que permiten a su vez la concepción de nuevas situaciones a-didácticas. (Brousseau, 1986, p. 15)

2.2.4 Variable Didáctica

Bartolomé y Fregona (Citados en Panizza, 2004) definen la noción de variable didáctica como:

> Las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación. (p.10)

2.2.5 Devolución

La devolución de acuerdo a Brousseau es:

> "Es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia." (Brousseau, 1998, citado en Panizza, 2003, p. 8)

Margolinas (1993, citado en Panizza, 2003) realiza un análisis en relación a la participación del maestro en las fases a-didácticas y a la devolución, y señala que:

> “(...) la devolución parece ser un proceso que se desarrolla durante toda la situación a-didáctica, y no solamente en la fase de establecimiento (...). El maestro es entonces responsable no solamente de una simple disciplina aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del alumno en una relación a-didáctica con el problema (...)” (p.9)

2.2.6 Situación Didáctica

Chavarría (2006) dice que al referirse a Situaciones Didácticas se debe hacer primeramente una distinción entre dos enfoques uno tradicional y otro, mediante el enfoque planteado en la Teoría de Situaciones didácticas de Brousseau. En el primero de ellos se tiene una relación estudiante-profesor, en esta el profesor solo provee los contenidos, instruye al estudiante, el cual solo captura dichos conceptos y los reproduce tal cual como se le enseñaron. En este enfoque no se contextualiza el conocimiento, no se tiene un aprendizaje significativo.

Por otro lado, en el enfoque basado en la teoría de Brousseau, Chavarría (2006) nos dice que aquí intervienen tres elementos fundamentales que son el alumno, el profesor y el medio. En esta terna el profesor es el que proporciona o facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento.

De acuerdo con Chavarría (2006) la *Situación Didáctica* se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio.

En Panizza (2003) dice que una situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado.

Brousseau (1982, citados en Gálvez, 1994) la define como:

> Un conjunto de relaciones establecidas implicita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado

> por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber construido o en vías de constitución.

2.2.7 Situación A-Didáctica

La situación a-didáctica, según Chavarría (2006), es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar, además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido.

Brousseau (1986, citado en Panizza, 2003) define la situación a-didáctica de la siguiente manera:

> Es toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (bueno o malo) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (p. 4)

Es posible al comienzo confundirse con la interpretación de los términos “didáctica” y “a-didáctica”. La situación didáctica es una situación que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución.

2.2.8 Tipología de las situaciones

Al momento en que el sujeto intenta controlar su entorno, no todas sus acciones manifiestan sus conocimientos de la misma manera. Las relaciones de un alumno con el medio pueden ser clasificadas, al menos, en tres grandes categorías (Brousseau, 2007, p. 23):

- Intercambios de informaciones no codificadas o sin lenguaje (acciones y decisiones);
- Intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (mensajes);
- Intercambios de juicios (sentencias que se refieren a un conjunto de enunciados que tienen un rol de teoría).

La teoría de Brousseau plantea una tipología de situaciones didácticas. Cada una de ellas debería desembocar en una situación a-didáctica, es decir, en un proceso de confrontación del estudiante ante un problema dado, en el cual construirá su conocimiento. Dentro de las situaciones didácticas tenemos (Chavarría, 2006):

Situación de acción

Esta situación consiste básicamente en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber. Es decir, el estudiante individualmente interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos.

Dentro de las condiciones que una *situación acción* debería reunir para desembocar en una situación a-didáctica tenemos, por ejemplo, la formulación del problema: éste debe ser del interés del estudiante, además el tipo de pregunta formulada debe ser tal que no tenga respuesta inmediata, de modo que represente realmente un problema para el estudiante.

Este comportamiento debe darse sin la intervención del docente. Pero, si bien el proceso se lleva a cabo sin la intervención del docente, no implica que éste se aísle del proceso. Pues es el docente quien prepara el medio didáctico, plantea los problemas y enfrenta al estudiante a ese medio didáctico.

Situación de formulación

Consiste en un trabajo en grupo, donde se requiere la comunicación de los estudiantes, compartir experiencias en la construcción del conocimiento. Por lo que en este proceso es importante el control de la comunicación de las ideas.

La situación formulación es básicamente enfrentar a un grupo de estudiantes con un problema dado. En ese sentido hay un elemento que menciona Brousseau, esto es, la necesidad de que cada integrante del grupo participe del proceso, es decir, que todos se vean forzados a comunicar las ideas e interactuar con el medio didáctico.

Situación de validación

Esta situación es donde, una vez que los estudiantes han interactuado de forma individual o de forma grupal con el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción. Es decir, se valida lo que se ha trabajado, se discute con el docente acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es correcto.

Situaciones de institucionalización

Finalmente, a pesar de no constituir una situación a-didáctica, la *institucionalización del saber*, representa una actividad de suma importante en el cierre de una situación didáctica**.** En ésta los estudiantes ya han construido su conocimiento y, simplemente, el docente en este punto retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos ante los cuales en la situación a-didáctica se tuvo problemas. Es presentar los resultados, presentar todo en orden, y todo lo que estuvo detrás de la construcción de ese conocimiento (situaciones didácticas anteriores).

2.2.9 Efectos en la Situación Didáctica

Dentro de las interacciones que acontecen en la Situación Didáctica, Brousseau identifica algunos efectos que pueden inhibir o interrumpir la construcción de conocimiento que lleva a cabo el estudiante dentro del medio didáctico que el profesor elabora. Básicamente, son actitudes que generan efectos negativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, o bien, en la definición de contrato didáctico. Brousseau indica los siguientes efectos (Chavarría, 2006, p.3):

Efecto Topaze

Brousseau lo identifica como aquella circunstancia en donde el estudiante llega a la solución de un problema, pero no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema. Éste último ve las dificultades que tiene un grupo para llegar a la resolución de un problema, por lo cual se ve en la necesidad de indicar cuál es el procedimiento que deben seguir. Con ello no permite la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes.

Efecto Jourdain

Consiste en la actitud que toma el profesor cuando un estudiante da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no desilusionarlo le dice que "está bien", que es la respuesta correcta. Entonces, un comportamiento banal del alumno es asumido como un conocimiento válido. (Chavarría, 2006, p.4)

Deslizamiento Meta-Cognitivo

Cuando una actividad de enseñanza fracasa, puede que el profesor intente justificarse y, para continuar su acción, tome como objetos de estudio sus propias explicaciones y sus medios heurísticos en lugar del conocimiento matemático. Este reemplazo de un objeto de enseñanza por otro es frecuente. El proceso comienza, por ejemplo, cuando un profesor inicia un curso de lógica para "explicar" un error de razonamiento.

No es un error didáctico en sí, siempre que la sustituci6n sea provisoria y no se reitere. Si la tentativa de explicaci6n fracasa, se puede producir un nuevo deslizamiento: para explicar la lógica, por ejemplo, va a recurrir a un dibujito, que a su vez le va a exigir explicaciones y un vocabulario específico, etc. EI fenómeno puede producirse repetidas veces, afectar a toda una comunidad y constituir un verdadero proceso que escape al control de sus actores. (Brousseau, 2007, p.78)

Uso Abusivo de la Analogía

La analogía es una excelente herramienta heurística cuando se utiliza bajo la responsabilidad de quien la usa. Pero su utilización en la relación didáctica es, en realidad, una temible manera de producir efectos Topaze. Sin embargo, es una práctica natural: si los alumnos fracasan en su aprendizaje, hay que darles una nueva oportunidad en el mismo tema. Ellos lo saben. Aunque el profesor disimule el hecho de que el nuevo problema se parece al anterior, los alumnos van a buscar –y es legítimo- la solución que ya les dieron. Esta respuesta no significa que la encuentren idónea para la pregunta planteada sino solamente que reconocieron indicios, tal vez totalmente exógenos y no controlados, de que el profesor quería que ellos la produjeran.

De este modo, obtienen la solución leyendo las indicaciones didácticas y no gracias a un compromiso con el problema. Tienen interés en realizar dicha lectura, porque después de varios fracasos en problemas semejantes, pero no justificados, no reconocidos, el profesor se apoyará en estas analogías, regularmente renovadas, para poner en ridículo al alumno por su tenaz resistencia.

En este trabajo tomamos como base la Teoría de Situaciones Didácticas debido a que lo que se pretende es que el alumno mediante una secuencia llegue a identificar incógnitas y con eso pueda comenzar a familiarizarse con el uso de simbolismo algebraico en la resolución de problemas verbales y pretendemos que él lo encuentre de manera autónoma sin que el profesor le presente de antemano el tema y que solo comience con la resolución de problemas de manera mecánica.

En los capítulos siguientes se va a presentar la metodología de nuestra investigación, en los cuales se indica el cómo se va a llevar acabo lo antes mencionado.

Capítulo 3 Metodología

Esta investigación se realiza bajo el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica, la cual es una metodología cualitativa, que se divide en cuatro fases que nos permite analizar cada una de las situaciones que se ponen en juego en el salón de clases.

3.1 Ingeniería Didáctica

La noción de la ingeniería didáctica nace en la didáctica de las matemáticas de la escuela francesa, a principios de la década de los ochenta. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Artigue, Douady, Moreno & Gómez, (1995):

> "Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo." (Artigue et al, 1995, p.33)

La ingeniería didáctica tiene una doble función dentro de la didáctica de las matemáticas:

- Las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza
- El papel que conviene hacerle tomar a las "realizaciones didácticas" en la clase dentro de las metodologías de la investigación en didáctica. (Artigue et al, 1995, p.34)

Lo anterior quiere decir que la ingeniería didáctica puede utilizarse tanto en producciones para la enseñanza, las cuales van a estar basadas en investigaciones previas, como metodología de investigación, esta última es como se va a utilizar en este trabajo de investigación.

A continuación se describe la ingeniería didáctica como metodología de investigación.

Según Artigue et al (1995) la ingeniería didáctica como metodología de la investigación se caracteriza en primer lugar, por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en la clase, esto es, la concepción, la realización, la observación y un análisis de secuencias de enseñanza.

También se caracteriza en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

El proceso experimental de la metodología de la ingeniería didáctica delimita cuatro fases:

- Análisis preliminar.
- Concepciones y análisis a priori.
- Experimentación.
- Análisis a posteriori y evaluación.

A continuación, se describen dichas fases.

3.1.1 Análisis preliminar

Para llevar acabo la ingeniería didáctica es necesario realizar los análisis preliminares respecto al objeto matemático. Esta fase tiene como objetivo identificar y describir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los análisis preliminares están constituidos por un conjunto de estudios relacionados con el objeto matemático:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

Para Artigue et al. (1995, p. 40) el análisis de esta fase es necesario hacerlo bajo tres dimensiones:

- **Epistemológica**: Aquí se analizará las características del saber en juego, una reseña histórica y los aspectos teóricos del objeto matemático en estudio, que en nuestro caso son las ecuaciones lineales con una incógnita, de la cual se realizó una investigación no profunda de como surgieron a lo largo de la historia.
- **Cognitiva:** Aquí se analizan las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza. Se analizará la forma como los alumnos interpretan el conocimiento matemático en cuestión y sus dificultades teniendo en cuenta sus conocimientos acumulados anteriormente.
- **Didáctica**: Aquí se analizarán las características del funcionamiento del sistema de enseñanza, la forma cómo se desarrolla el proceso de enseñanza del objeto matemático, así como los recursos didácticos (libros, guías, etc.) que utilizan los profesores donde se está realizando el estudio. Para nuestro caso solo vamos analizar de manera no exhaustiva algunos libros de texto que se usan en diferentes secundarias y los programas de estudios vigentes.

Análisis del campo de las restricciones

Aquí se va a situar la realización didáctica, describiendo al grupo de estudiantes con los que se experimentará la situación diseñada. Implica tener información correspondiente en cuanto a la edad de los alumnos, sexo, conocimiento anteriores sobre el tema y los recursos que presenta la institución donde se está realizando la investigación. Esta información no puede ser modificada por el maestro y por ende no se consideran variables didácticas de la situación, sin embargo, juegan un papel muy importante para el diseño de la situación didáctica.

3.1.2 Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Esta fase, tiene dos objetivos: El primero, concerniente a la concepción, que es diseñar situaciones o actividades que nos ayuden a analizar los procesos de construcción y comunicación del saber. Además, para la construcción de las actividades debe tener en cuenta lo siguiente:

- En un primer momento, el alumno tiene que tener estrategias de solución que les permitan abordar el problema con sus conocimientos disponibles.
- Las actividades deben ser diseñadas teniendo en cuenta los resultados de estudios previos. Este se realizará con base en lo encontrado en los análisis preliminares.

El segundo objetivo, concerniente al análisis a priori, que es señalar cómo la manipulación de las variables didácticas permitirá controlar los comportamientos de los alumnos antes de la experimentación. Se debe considerar dos aspectos: el análisis matemático y el análisis didáctico del objeto matemático, y para ello debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Los resultados que se esperan de los alumnos.
- Planificar las intervenciones del profesor.
- Identificar las variables del estudio.
- Prever y analizar las dificultades que los alumnos podrían enfrentar en la resolución de las actividades.

La validación en ingeniería didáctica es esencialmente interna. Desde la fase de concepción se inicia el proceso de validación, por medio del análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería.

Por lo tanto, el objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar pos-comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de las mismas está indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la fase cuatro, entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

Artigue et al, (1995) argumenta que tradicionalmente este análisis *a priori* comprende una parte descriptiva y una predictiva se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que va a tratar de llevar a los alumnos a:

- Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.

- Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.

- Prever los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

En el análisis a priori el estudiante es tomado en cuenta en ambos niveles, descriptivo y predictivo, mientras que el profesor no interviene sino en un nivel descriptivo. Así, el estudiante es el actor principal del sistema y el profesor está poco presente en el análisis a priori, excepto durante las situaciones de devolución y de institucionalización. Artigue menciona que, de alguna forma, la noción de contrato didáctico permite recuperar en parte el papel del profesor, pero que no se puede negar que hasta el momento el profesor ocupa siempre un papel marginal en la teorización didáctica. (De Faria, 2006).

3.1.3 Experimentación

Esta fase es la puesta en marcha de las actividades diseñadas. Inicia en el momento en que el investigador, profesor y observador entra en contacto con la población de estudiantes.

De Faria (2006), señala que consta de las siguientes etapas:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Si la experimentación se lleva a cabo en más de una sesión, se recomienda hacer un análisis a posteriori parcial, para realizar las correcciones necesarias y continuar con la siguiente sesión de clase.

3.1.4 Análisis a posteriori y evaluación

Esta es la última fase de la ingeniería didáctica. Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc.

En cuanto a la validación, Artigue et al. (1995) sostienen: *"la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación"* (p. 48). Esta comparación es entre los comportamientos esperados, con los que sucedieron realmente durante la clase.

En los siguientes capítulos se hace una descripción de cada una de las etapas de la ingeniería didáctica del presente trabajo.

Capítulo 4 Análisis Preliminar

Este apartado tiene como objetivo describir las tres dimensiones con las cuales se realiza este análisis y están enfocadas al objeto matemático en cuestión. En un primer sub apartado se describe el análisis epistemológico donde se realizó una investigación de cómo surgió el objeto matemático que se va abordar. Posteriormente se enuncian algunas dificultades que presentan los estudiantes tanto en álgebra en general como en ecuaciones de primer grado con una incógnita. Por último se presenta el análisis que se realizó de algunos libros de texto que se llevan en diferentes escuelas secundarias, para observar cómo se trabaja el tema en cuestión.

4.1 Dimensión epistemológica

Para efecto de este trabajo en esta dimensión se toma como referencia el trabajo de Malissani (1999) acerca de cómo ha ido evolucionando el lenguaje simbólico dentro del álgebra.

Historia de las ecuaciones

La forma de escribir y resolver las ecuaciones es bastante moderna, pero el origen de los problemas matemáticos y de las ecuaciones es antiquísimo.

El uso de un simbolismo adecuado favorece el desarrollo del pensamiento algebraico, por este motivo en la historia del álgebra tiene importancia no sólo la historia de los conceptos sino también el sistema de símbolos utilizados para poder expresarlos (Arzarello et al., pág. 10-11, citado en Malisani, 1999). Según Nesselman (s.f. citado en Malisani, 1999) se pueden determinar tres períodos distintos:

1- **Fase Retórica:** anterior a Diofanto de Alejandría (250 d.C.), en la cual se usa exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo;
2- **Fase Sincopada**: desde Diofanto hasta fines del Siglo XVI, en la cual se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural.

3- **Fase Simbólica**: introducida por Viète (1540-1603), en la cual se usan letras para todas las cantidades y signos para representar las operaciones, se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para demostrar reglas generales.

El análisis del desarrollo histórico del álgebra muestra claramente que la construcción del lenguaje simbólico ha sido muy lenta y dificultosa, se alternan períodos de mejoras progresivas con otros de regresión y parálisis. Así, por ejemplo, los babilonios (»2000 a.C.), los egipcios (»1700 a.C.), los griegos (600-200 a.C.) y los chinos (300 a.C.-300 d.C.) utilizaban exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo. Se registraron intentos aislados de introducir algún nombre o alguna abreviatura para representar la incógnita, pero estas pruebas no fueron efectuadas de manera sistemática.

Diofanto (250 d.C.) introdujo, por primera vez en la Historia de las Matemáticas, abreviaturas (letras griegas) para indicar la incógnita de una ecuación y sus potencias. Sin embargo, los cálculos los realizaba usando el lenguaje natural y escribían las soluciones en un texto continuo.

A partir del siglo VII los hindúes crearon un simbolismo algebraico bastante eficiente que les permitió desarrollar nuevos procedimientos de resolución de ecuaciones. Cuando en un problema aparecían varias incógnitas, una de ellas se representaba con la sílaba *ya* y las otras con objetos de diversos colores: en general, usaban la primera sílaba de la palabra relativa al respectivo color. Este simbolismo, si bien rudimental, resulta suficiente para catalogar el álgebra hindú como "casi-simbólica", es decir, de un nivel superior al álgebra sincopada de Diofanto.

Por otro lado, los árabes (»800-1300 d.C.), herederos de las obras griegas e hindúes, no utilizaban símbolos. Algunos empleaban ciertos nombres particulares para representar la incógnita y sus potencias, pero en general ellos desarrollaban un álgebra íntegramente retórica y esto representa un paso atrás respecto al álgebra diofantina e hindú.

En el siglo XII, Leonardo Pisano introdujo en Occidente los procedimientos aritméticos utilizados por los árabes y como consecuencia de ello, las características del álgebra árabe se transmitieron en Europa y tuvieron una fuerte influencia durante más de tres siglos. En las obras de Leonardo y en el tratado de ábaco llamado *Trattato d'Algibra* (Anónimo del Siglo XIV), se puede observar que los desarrollos algebraicos utilizaban fundamentalmente el lenguaje natural.

Con Bombelli (»1526-»1572) se produjo una verdadera transformación del lenguaje algebraico, con la introducción de símbolos especiales para representar la incógnita y sus potencias: una *semicircunferencia* sobre la cual escribía un número para indicar el exponente de la potencia (en este artículo la circunferencia reemplazará la semicircunferencia para simplificar la notación).

Esto representa una gran evolución en el uso del lenguaje simbólico, porque la mayor parte de los cambios efectuados hasta ese momento eran fundamentalmente abreviaturas de palabras del lenguaje natural. Bombelli utilizaba un lenguaje *Sincopado-Avanzado*, resultante de una combinación entre *lenguaje natural* y *simbolismo algebraico*. Este simbolismo comparte precisamente con el álgebra de Viète (1540-1603) la característica de ser *auto-explicativo*; aunque Bombelli necesite siempre acompañar los desarrollos efectuados con su versión retórica y demuestre la validez de las igualdades implicadas en diversos tipos de ecuaciones mediante la construcción geométrica. Esto demuestra que este lenguaje sincopado-avanzado *no era autosuficiente* porque necesitaba recurrir a otros lenguajes, natural o geométrico, que son semánticamente más ricos, para completar la comunicación.

Es importante observar que, muchos de los cambios de notación realizados hasta el 1500 fueron efectuados accidentalmente y con frecuencia los estudiosos de esa época no eran capaces de apreciar lo que el simbolismo podía significar para el álgebra. Entre el 1500 y el 1600 fueron introducidos casi todos los símbolos conocidos en la actualidad, pero fue un proceso lento, el álgebra simbólica no suplantó de golpe al álgebra sincopada.

Con Viète se produjo el cambio más significativo en la construcción del lenguaje simbólico. Este autor fue el primero que utilizó sistemáticamente las letras para todas las cantidades (la incógnita, sus potencias y los coeficientes genéricos) y los signos para las operaciones, empleaba este lenguaje simbólico tanto en los procedimientos resolutivos como en la demostración de reglas generales. Viète llamaba a su álgebra simbólica *logística especiosa* en oposición a la *logística numerosa*: consideraba el *álgebra* como un método para operar sobre las especies o las formas de las cosas, y la *aritmética,* la *numerosa,* como una técnica que se ocupaba de los números. De este modo el *álgebra* se transformó en el estudio de los tipos generales de formas y de ecuaciones, porque lo que es aplicable al caso general es válido para los infinitos casos particulares.

Todo lo anterior se extrajo de Malissani (1999).

4.2 Dimensión Cognitiva

En esta dimensión se realiza un análisis de los errores y dificultades en cuanto al tema de ecuaciones lineales.

Las investigaciones que han indagado en la traducción del sistema de representación verbal al simbólico en estudiantes de secundaria y bachillerato, han reportado un alto porcentaje de fracaso en el desarrollo de esta tarea. (Cerdán, 2008, 2010; MacGregor y Stacey, 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Weinberg, 2007, citado en Rodríguez-Domingo y Molina, 2013).

4.2.1 Errores

Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos, sobre todo cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Como señala Matz (1980, citado en Ruano, Socas y Palarea, 2008, p.62.), "los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación". Así, entendemos que el error va a tener distintas procedencias, pero siempre, se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de la falta de conocimiento o de un despiste. (Ruano et al, 2008, p.62)

Uno de los errores más referidos es el denominado *error de inversión*, que consiste en representar la relación opuesta a la indicada. Este error presenta una gran persistencia, siendo más frecuente cuando las variables implicadas tienen coeficientes diferentes a uno y cuando las letras utilizadas corresponden a las iniciales de las cantidades referidas en el enunciado verbal (Weinberg, 2007, citado en Rodríguez-Domingo y Molina, 2013). También se ha identificado en enunciados con estructura aditiva (MacGregor y Stacey, 1993, citado en Rodríguez-Domingo y Molina, 2013).

Por ejemplo

"Hay 6 veces tantos estudiantes como profesores" lo traducen como $6S = P$, utilizando la variable S para referir a los estudiantes y P para los profesores.

Por otro lado, Cerdán (2008), Ruano, Socas y Palarea (2008) y Rodríguez-Domingo (2011) identifican otros errores partiendo de enunciados algebraicos representados verbalmente como son:

- Errores de carácter aritmético como la confusión de operaciones o el uso inadecuado de paréntesis.
- Errores en la completitud del enunciado construido (incompletos vs desmedidos).
- Errores derivados de las características propias del lenguaje algebraicos entre los que destacan errores en el uso de las letras.
- Errores de particularización o generalización de algunos de los términos, y errores en la construcción de las expresiones debidos a la complejidad estructural de las mismas.

Algunos de los errores que cometen los alumnos en el tema de ecuaciones lineales son los siguientes:

- Comprensión y manipulación de expresiones algebraicas (Díaz, Martínez y Soto, 2007)
- Comprensión inadecuada de la situación (Díaz, Martínez y Soto, 2007)
- Formulación inadecuada de las estrategias (Díaz, Martínez y Soto, 2007)
- Falla en la construcción de un plan de resolución de problemas (Bennett y Martin, 1996 citado en Díaz, Martínez y Soto, 2007)

4.2.2 Dificultades

Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. (Socas, 1997)

Estas dificultades que se dan en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas son de naturaleza diferente y se pueden abordar, obviamente, desde perspectivas distintas. Las dificultades pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos. Un problema del lenguaje en Matemáticas es el originado por el vocabulario común. Palabras como, por ejemplo, raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, semejante, índice, función, etc., tienen significados diferentes en Matemáticas y en el lenguaje habitual, de modo que el uso de tales palabras puede producir dificultades a causa de la confusión semántica implicada. (Socas, 1997, p.125-154)

Las dificultades presentes en álgebra y sobre todo en ecuaciones lineales son:

- El empleo de literales (González y Diez, 2002)
- Comprensión de la ecuación (Díaz, Martínez y Soto, 2007)
- Construcción de la representación algebraica del problema (Díaz, Martínez y Soto, 2007)
- Los niños perciben el signo igual desde un punto de vista operativo, es decir como una señal para hacer algo y no como un símbolo de equidad y de equilibrio. Palarea (1998)
- Dificultades en el área de la lectura (García, 1998, citado en Chavarría, 2014).

4.3 Dimensión Didáctica

Esta parte de la dimensión didáctica se llevó acabo en dos fases, la primera consta de la revisión de tres libros de texto usados en primero de secundaria y la segunda fase trata de revisar los planes y programas para ver qué es lo que nos dice acerca del tema matemático en cuestión.

En la primera fase se realizó un análisis de tres libros de texto que se utilizan en primer grado de secundaria, con el objetivo de ver cómo se trabaja el tema de ecuaciones lineales de primer grado, es decir cómo abordan el tema, cómo se definen las ecuaciones lineales, qué tipo de actividades se plantean, qué dificultad tienen los problemas y las diferentes representaciones que se hacen. De esa manera se identificará cómo se propone su abordaje, y con base en ello generar una propuesta para promover la conversión del lenguaje verbal al algebraico.

En la segunda fase se analizaron los planes de estudio para ver qué aprendizaje se espera que tenga el alumno y qué habilidades debe de generarse en él.

4.3.1 Ecuaciones lineales en libros de texto.

En esta sección se llevó acabo una descripción de tres libros que se están utilizando en el estado de Zacatecas, para observar cómo se presenta el objeto matemático que se quiere estudiar. Los libros que analizaremos son los siguientes:

Tabla 1: libros de texto que se revisaron

Texto	**Título**	**Referencia**
1	Matemáticas 1	*Ramírez, Castillo, Vergara, Flores y Azpeitia (2015)*
2	Matemáticas 1	*Trigueros, Lozano, Schulmaister, Sandoval, Jinich y Cortés2 (2013)*
3	Matemáticas 1	*Vargas, Barquera, García y García. (2013)*

Para realizar este análisis, se ha puesto énfasis en cómo los autores de estos libros introducen el tema, cómo lo abordan y qué tipo de ejercicios y problemas utilizan.

Análisis texto 1

En este libro los autores abordan el objeto matemático de nuestro interés en el bloque tres, en el eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico, en la página 122. El bloque comienza mencionando las competencias que se favorecerán y los aprendizajes esperados durante este bloque, posteriormente se plantea una evaluación diagnóstica, la cual de acuerdo a los autores va ayudar a identificar el dominio que tienen los alumnos de los conocimientos básicos y de esta forma poder aprovechar mejor el contenido.

El tema de ecuaciones lineales de primer grado en este libro se desarrolla a lo largo de tres lecciones las cuales se van a describir a continuación.

La primera lección con nombre *¿cómo adivinan los números?* comienza esbozando una situación relacionada con el acto de un mentalista, posteriormente plantea un problema relacionado con la respuesta que puede dar un mentalista a una pregunta hecha por una persona del público y se le pide al alumno que de respuesta al mismo, inmediatamente después se expone lo que el mentalista escribió en el cuaderno y ahí se observa que el mentalista pone un ovalo donde va el valor desconocido, como se puede observar en la ilustración 1.

Posterior a esto se les menciona a los alumnos que se pueden utilizar letras para simbolizar el número que no se conoce y sugieren que se le pregunte al profesor cuales son las letras más utilizadas para esto.

A continuación, se le propone un problema similar, nada más que aquí se le pide al alumno que plante la ecuación que corresponda a cada pregunta que le realizan al mentalista.

Todo lo anterior plantean los autores que se trabaje en parejas para después discutir de manera grupal los procedimientos que realizaron.

Después plantean un problema con el uso de la balanza, para que los alumnos puedan plantear la ecuación correspondiente a cada inciso.

Posteriormente se menciona lo que es una ecuación *"una ecuación es una igualdad donde, por lo menos, hay un número desconocido llamado incógnita o variable" (p.124)*

Después se enuncia la propiedad de la igualdad

"si se le suma o se le resta el mismo número a ambos lados de la ecuación, entonces la igualdad no se altera" (p.124)

A continuación, se explica el primer problema de la lección, pero esta vez lo resuelven con la propiedad de la igualdad. En seguida se les pide a los alumnos que de manera grupal y con ayuda del profesor resuelvan seis ecuaciones, para que posteriormente se reúnan en parejas y planteen la ecuación y la resuelvan.

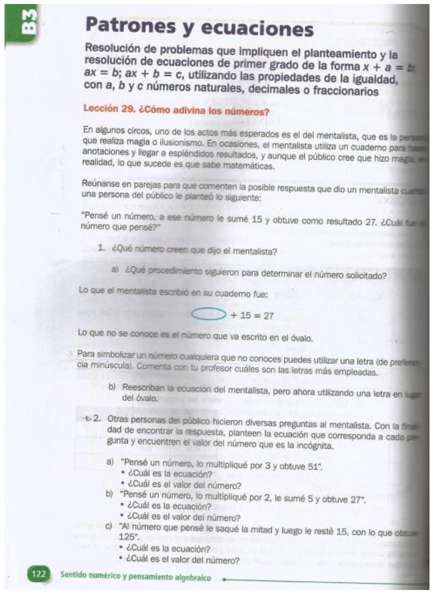
Al final de esta lección se plantea un reto para los alumnos donde tienen que plantear la ecuación a partir de ciertas figuras, para después resolverlas.

La segunda lección llamada *"La Cava"* comienza describiendo lo que es una cava y como se tienen que acomodar los vinos dentro de ella. Posteriormente se les plantea un problema donde tienen que encontrar la separación que debe haber entre cada botella para esto se les pide que expresen como se va a representar las separaciones que van a estar en total en la tira de madera, también cuanto de esta madera va a estar ocupado por la base de las botellas y que por último planten y resuelvan la ecuación.

A continuación, se les pide que comparen su procedimiento anterior con lo que se les plantea a partir de que les dan la ecuación del problema anterior, en este problema se les pide que sumen el inverso aditivo a la ecuación y después que multipliquen por el inverso multiplicativo a cada uno de los miembros de la ecuación. En esta parte se les da otra propiedad que es la conmutativa. Se les pregunta si el resultado obtenido por este método es el mismo que obtuvieron ellos, y que comenten que ventajas y desventajas le ven a este método de resolución.

Después se les plantean dos ejercicios más para practicar el procedimiento anterior y dos más para que planten las ecuaciones y las resuelvan. Por último en la sección se plantea un reto para que los alumnos lo resuelvan en equipo y tiene que ver con el cálculo del lado de una figura geométrica conociendo el perímetro de la misma.

La última lección que aborda el tema en cuestión se llama *"la comida rápida"*, en esta lección se realizan problemas para repasar lo aprendido durante las dos lecciones anteriores.



B3

Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a =$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios

Lección 29. ¿Cómo adivina los números?

En algunos circos, uno de los actos más esperados es el del mentalista, que es la que realiza magia o ilusionismo. En ocasiones, el mentalista utiliza un cuaderno para anotaciones y llegar a espléndidos resultados, y aunque el público cree que hizo magia, realidad, lo que sucede es que sabe matemáticas.

Reúnanse en parejas para que comenten la posible respuesta que dio un mentalista una persona del público le planteó lo siguiente:

"Pensé un número, a ese número le sumé 15 y obtuve como resultado 27. ¿Cuál número que pensé?"

1. ¿Qué número creen que dijo el mentalista?

a) ¿Qué procedimiento siguieron para determinar el número solicitado?

Lo que el mentalista escribió en su cuaderno fue:

$$\bigcirc + 15 = 27$$

Lo que no se conoce es el número que va escrito en el óvalo.

Para simbolizar un número cualquiera que no conoces puedes utilizar una letra (de prefere- cia minúscula). Comenta con tu profesor cuáles son las letras más empleadas.

b) Reescriban la ecuación del mentalista, pero ahora utilizando una letra en del óvalo.

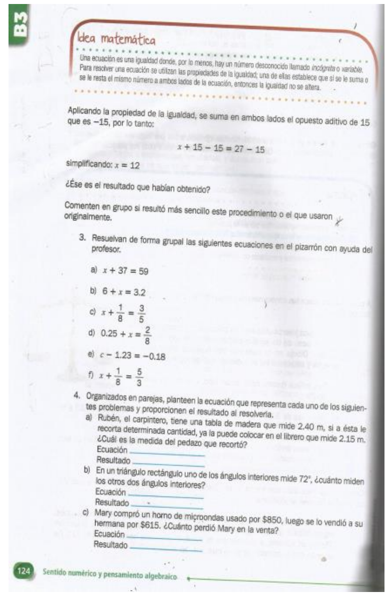
2. Otras personas del público hicieron diversas preguntas al mentalista. Con la fina- dad de encontrar la respuesta, planteen la ecuación que corresponda a cada pre- gunta y encuentren el valor del número que es la incógnita.

a) "Pensé un número, lo multipliqué por 3 y obtuve 51".
- ¿Cuál es la ecuación?
- ¿Cuál es el valor del número?

b) "Pensé un número, lo multipliqué por 2, le sumé 5 y obtuve 27".
- ¿Cuál es la ecuación?
- ¿Cuál es el valor del número?

c) "Al número que pensé le saqué la mitad y luego le resté 15, con lo que obtuve 125".
- ¿Cuál es la ecuación?
- ¿Cuál es el valor del número?

122 Sentido numérico y pensamiento algebraico



B3

Idea matemática

Una ecuación es una igualdad donde, por lo menos, hay un número desconocido llamado *incógnita* o *variable*. Para resolver una ecuación se utilizan las propiedades de la igualdad; una de ellas establece que si se le suma o se le resta el mismo número a ambos lados de la ecuación, entonces la igualdad no se altera.

Aplicando la propiedad de la igualdad, se suma en ambos lados el opuesto aditivo de 15 que es −15, por lo tanto:

$$x + 15 - 15 = 27 - 15$$

simplificando: $x = 12$

¿Ése es el resultado que habían obtenido?

Comenten en grupo si resultó más sencillo este procedimiento o el que usaron originalmente.

3. Resuelvan de forma grupal las siguientes ecuaciones en el pizarrón con ayuda del profesor.

a) $x + 37 = 59$

b) $6 + x = 3.2$

c) $x + \frac{1}{8} = \frac{3}{5}$

d) $0.25 + x = \frac{2}{8}$

e) $c - 1.23 = -0.18$

f) $x + \frac{1}{8} = \frac{5}{3}$

4. Organizados en parejas, planteen la ecuación que representa cada uno de los siguien- tes problemas y proporcionen el resultado al resolverla.

a) Rubén, el carpintero, tiene una tabla de madera que mide 2.40 m, si a ésta le recorta determinada cantidad, ya la puede colocar en el librero que mide 2.15 m. ¿Cuál es la medida del pedazo que recortó?
Ecuación ______
Resultado ______

b) En un triángulo rectángulo uno de los ángulos interiores mide 72°, ¿cuánto miden los otros dos ángulos interiores?
Ecuación ______
Resultado ______

c) Mary compró un horno de microondas usado por $850, luego se lo vendió a su hermana por $615. ¿Cuánto perdió Mary en la venta?
Ecuación ______
Resultado ______

124 Sentido numérico y pensamiento algebraico

Ilustración 1: Libro de texto 1

Análisis texto 2

En este libro los autores abordan el objeto matemático de nuestro interés en el bloque tres, en el eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico, en la página 144. El bloque comienza mencionando los aprendizajes esperados durante el mismo. Las lecciones en este libro se presentan con cuatro apartados que son el inicio, planeación, desarrollo y cierre, cada uno tiene un propósito para que el alumno aprenda el tema en cuestión.

Por ejemplo, en el inicio se plantean situaciones que se deben analizar con detalle para ver el tipo de estrategias que pueden utilizar para resolverla. Esta situación va a tener preguntas las cuales permiten que el alumno reflexione acerca de lo que tiene pensado realizar y sirve también como introducción al tema a tratar.

En la planeación se aborda un apartado llamado "*Nuestro Trabajo*" en el cual se plantea un problema que será resuelto a lo largo de la lección y se dan sugerencias de cómo se puede trabajar dicho problema ya sea individual, en parejas o equipos y el material que se puede utilizar para resolverlo.

Mientras que en la etapa de desarrollo se realizan actividades que ayudarán al alumno a adquirir nuevos conocimientos y desarrollar las competencias matemáticas. En la etapa de cierre se presenta el producto obtenido del apartado nuestro trabajo.

Por lo tanto, la lección comienza planteando la situación de un taxista que tiene que cobrar el pasaje de acuerdo con los kilómetros que recorre, se les realizan algunas preguntas a los alumnos relacionas con lo que cobra el taxista y los kilómetros que recorrió, se les pide que comenten los procedimientos que utilizaron y que planteen situaciones similares a la del taxista.

Después se les presenta un problema que se va a ir resolviendo a lo largo del tema, en parejas, en este van a plantear las ecuaciones y a explicar como se utilizan las mismas.

Posteriormente se proponen una serie de ejercicios a manera de juego para que lo escriban en lenguaje algebraico y se les explica que significa escriban en lenguaje algebraico. Más adelante se les pide que ellos escriban un texto o un problema para una serie de ecuaciones.

Después de esto se da la definición de ecuación (como se muestra en la ilustración 2) donde dice que *las igualdades que se vieron se llaman ecuaciones; en cada una, el número representado del lado izquierdo del signo (=) es el mismo que el representado del lado derecho. La literal que representa el número desconocido se llama incógnita.* (p.145)

A continuación, les presentan una serie de problemas que tienen que resolver y les dicen que unos de los problemas planteados se resuelven de la forma $x+a=b$ y después les dan la definición de ecuación equivalente

> *Cuando la igualdad representa una ecuación y le sumas o restas el mismo término de los dos lados, su solución no cambia; a la nueva ecuación le llamamos* ***ecuación equivalente.***

Se les proponen algunos ejercicios para ver si las ecuaciones son equivalentes o no. Posteriormente se les plantea el ¿cómo se resuelven las ecuaciones del tipo $ax=b$? se les da una serie de pistas para que sean los alumnos los que diseñen sus procedimientos de como se resolverían este tipo de ecuaciones.

Después se les presentan dos situaciones más las cuales se pueden resolver con las ecuaciones de la forma $ax+b=c$ y se les pide a los alumnos que escriban un procedimiento para resolver ecuaciones de este tipo.

Posteriormente se plantea a los alumnos una serie de ejercicios a manera de repaso de la lección y por último se hace la exposición del problema que se les propuso en la sección de planeación y se evalúa lo que hizo cada equipo.

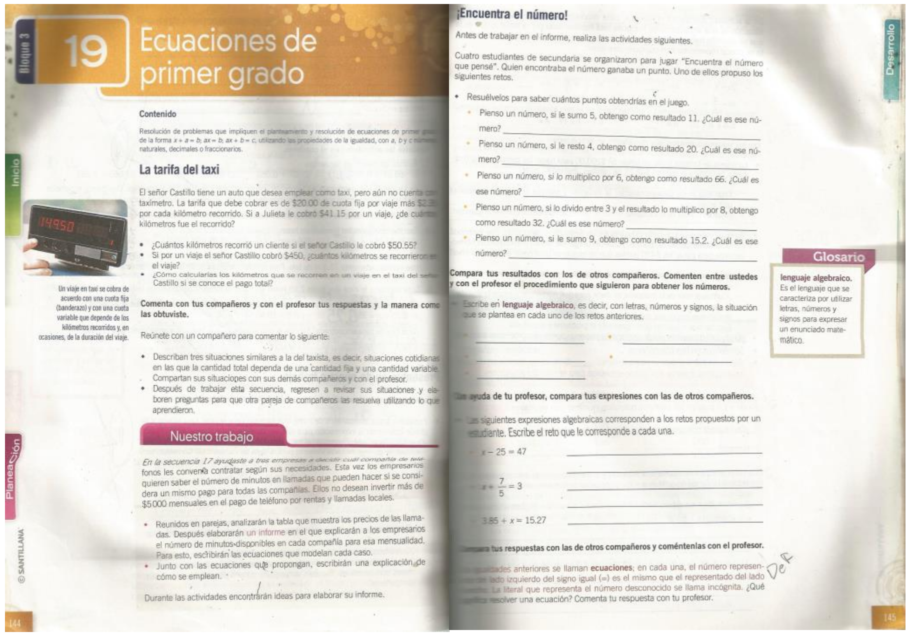


Ilustración 2: Libro de Texto 2

Análisis texto 3

En este libro el objeto matemático de nuestro interés se desarrolla a lo largo de cinco lecciones durante el bloque tres, comenzando en la página 154.

El tema se desarrolla de la siguiente manera: comienza proponiendo una serie de adivinanza en las cuales se les pide a los alumnos que encuentren el número que pensaron, después de esto se les plantean las ecuaciones de las adivinanzas y ellos tiene que determinar que ecuación corresponde con que adivinanza, posteriormente se les pide que ahora sean los alumnos los que elaboren una adivinanza para cuatro ecuaciones que se les plantea (como se muestra en la ilustración 3).

A continuación se les presenta una manera de cómo se pueden expresar las adivinanzas que es en forma de esquema y se les sugiere que comiencen del resultado y que de ahí sigan el camino pero de regreso, para de esta manera poder llegar al número que se pensó y se les da un ejemplo de como hacerlo, posterior a esto se les plantea una serie de ejercicios donde los alumnos tiene que resolverlos por medio del esquema.

En esta parte se les da una pista donde les mencionan que hacer el camino de regreso implica hacer uso de las operaciones inversas, por ejemplo, si dice que se sumó nueve hay que restar 9; si se multiplica por tres hay que dividir entre tres.

En la siguiente lección se sigue con los problemas en forma de adivinanzas y después se les plantea unas ecuaciones donde los alumnos tienen que determinar el valor de x. también se les menciona a los alumnos que, al sustituir el valor encontrado para x, se obtiene una igualdad y se les pide determinar el valor de x y verificar que se obtenga la igualdad.

Después mencionan que el resolver una ecuación es encontrar el valor de x con el cual la igualdad se conserva. Y que la letra x o la que se utilice para el valor desconocido recibe el nombre de incógnita.

Posteriormente se plantean más ejercicios para determinar la incógnita y verificar la igualdad. Enseguida se les pide que discutan con sus compañeros que métodos utilizaron para resolver las ecuaciones.

Con base en lo anterior se les pide que completen una tabla donde le tienen que dar diferentes valores a x para determinar el valor de la misma.

Se les plantean más ejercicios para encontrar el valor de x con la intención de que sigan repasando los procedimientos, posterior a esto se les pide que completen otra tabla en la cual deben escribir la ecuación o el enunciado para obtener el valor de x.

La tercera sección relacionada con el tema comienza con ejercicios relacionados con las balanzas en los cuales tienen que determinar el valor que va de un lado de la balanza para que esta se encuentre en equilibrio.

Después hacen la analogía entre la balanza y la ecuación, dicen que la ecuación es una igualdad que se comporta como una balanza en equilibrio y también mencionan que la expresión que se encuentra del lado izquierdo del signo igual se llama **primer miembro de la ecuación**; la expresión que está a la derecha se llama **segundo miembro de la ecuación**.

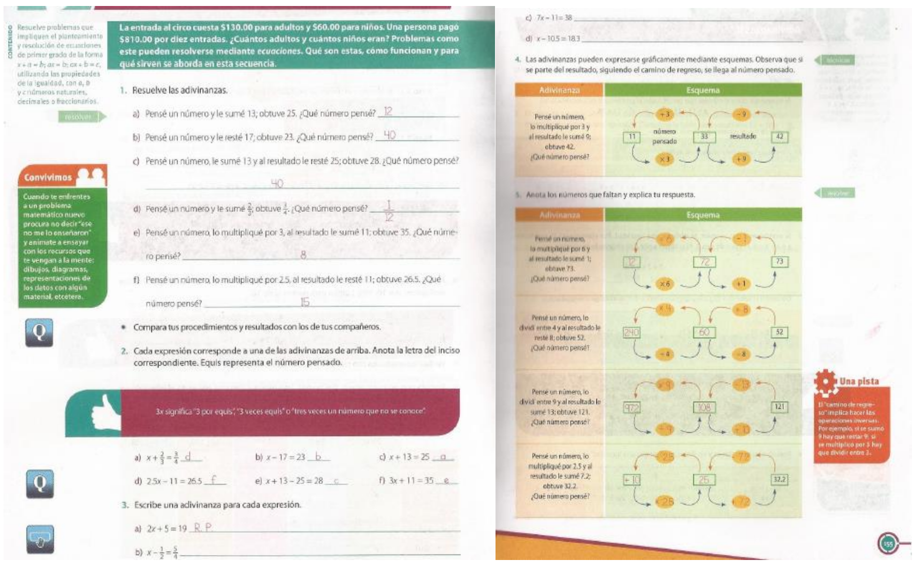
Posteriormente se les plantean un ejercicio para determinar los valores que tiene que tener la balanza en cada uno de sus lados para que este en equilibrio. A continuación, se le presenta una tabla donde tienen que determinar si cada enunciado conserva el equilibrio y debe de anotar la expresión correspondiente.

La cuarta lección comienza ejemplificando que pueden existir dos o más ecuaciones equivalentes, esto es que el valor de x es igual y da una serie de ejemplos.

Posterior a esto se les plantea un ejercicio donde dada una ecuación se pretende que encuentren la ecuación equivalente, pero le van dando los pasos y los alumnos tienen que anotar que se está haciendo en cada paso de la ecuación, para al final resolver la ecuación, a continuación se les plantea un ejercicio similar solo que ahora se les dan los pasos de lo que se hizo y los alumnos tratan de ir resolviendo la ecuación.

Los ejercicios siguientes son muy parecidos a los anteriores y sirven como refuerzo y para que entiendan la manera de resolver cierto tipo de ecuaciones.

La última lección del libro plantea problemas para que el alumno repase los procedimientos aprendidos durante el tema en cuestión y son para reforzar lo aprendido.



CONTENIDO

Resuelve problemas que impliquen el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios.

La entrada al circo cuesta \$130.00 para adultos y \$60.00 para niños. Una persona pagó \$810.00 por diez entradas. ¿Cuántos adultos y cuántos niños eran? Problemas como este pueden resolverse mediante *ecuaciones*. Qué son estas, cómo funcionan y para qué sirven se aborda en esta secuencia.

1. Resuelve las adivinanzas.
   a) Pensé un número y le sumé 13; obtuve 25. ¿Qué número pensé? 12
   b) Pensé un número y le resté 17; obtuve 23. ¿Qué número pensé? 40
   c) Pensé un número, le sumé 13 y al resultado le resté 25; obtuve 28. ¿Qué número pensé? 40
   d) Pensé un número y le sumé $\frac{2}{3}$; obtuve $\frac{3}{4}$. ¿Qué número pensé? $\frac{1}{12}$
   e) Pensé un número, lo multipliqué por 3, al resultado le sumé 11; obtuve 35. ¿Qué número pensé? 8
   f) Pensé un número, lo multipliqué por 2.5, al resultado le resté 11; obtuve 26.5. ¿Qué número pensé? 15

Convivimos

Cuando te enfrentes a un problema matemático nuevo procura no decir "ese no me lo enseñaron" y anímate a ensayar con los recursos que te vengan a la mente: dibujos, diagramas, representaciones de los datos con algún material, etcétera.

- Compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros.

2. Cada expresión corresponde a una de las adivinanzas de arriba. Anota la letra del inciso correspondiente. Equis representa el número pensado.

3x significa "3 por equis", "3 veces equis" o "tres veces un número que no se conoce".

a) $x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ d   b) $x - 17 = 23$ b   c) $x + 13 = 25$ a
d) $2.5x - 11 = 26.5$ f   e) $x + 13 - 25 = 28$ c   f) $3x + 11 = 35$ e

3. Escribe una adivinanza para cada expresión.
   a) $2x + 5 = 19$ R. P.
   b) $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
   c) $7x - 11 = 38$
   d) $x - 10.5 = 18.3$

4. Las adivinanzas pueden expresarse gráficamente mediante esquemas. Observa que si se parte del resultado, siguiendo el camino de regreso, se llega al número pensado.

Adivinanza	Esquema
Pensé un número, lo multipliqué por 3 y al resultado le sumé 9; obtuve 42. ¿Qué número pensé?	11 (número pensado) ×3 → 33 +9 → 42 (resultado); ÷3, −9

5. Anota los números que faltan y explica tu respuesta.

Adivinanza	Esquema
Pensé un número, lo multipliqué por 6 y al resultado le sumé 1; obtuve 73. ¿Qué número pensé?	12 ×6 → 72 +1 → 73
Pensé un número, lo dividí entre 4 y al resultado le resté 8; obtuve 52. ¿Qué número pensé?	240 ÷4 → 60 −8 → 52
Pensé un número, lo dividí entre 9 y al resultado le sumé 13; obtuve 121. ¿Qué número pensé?	972 → 108 → 121
Pensé un número, lo multipliqué por 2.5 y al resultado le sumé 7.2; obtuve 32.2. ¿Qué número pensé?	10 → 25 → 32.2

Una pista

El "camino de regreso" implica hacer las operaciones inversas. Por ejemplo, si se sumó 9 hay que restar 9; si se multiplicó por 3 hay que dividir entre 3.

155

Ilustración 3: Libro de Texto 3

4.3.2 Ecuaciones lineales en los programas de estudio 2011

En el programa de estudio SEP 2011 nos dice lo siguiente en relación con el tema de ecuaciones lineales de primer grado:

La estructura del plan de estudios está dividida en 3 ejes…, el tema de ecuaciones se aborda en el primer eje, en el cual se promueven las siguientes competencias…

La estructura del plan de estudios está dividida en tres ejes temáticos que son:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- Forma, espacio y medida.

- Manejo de la información.

El tema de ecuaciones lineales se aborda en el primer eje temático, en el cual se espera que se promuevan las siguientes competencias:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientes.

Los aprendizajes que se esperan respecto al tema de ecuaciones lineales en este bloque son:

- Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, donde a, b y c son números naturales y/o decimales.

- Resuelve problemas que implican el cálculo de cualquiera de las variables de las fórmulas para calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares. Explica la relación que existe entre el perímetro y el área de las figuras.

Es el primero de ellos donde se aborda el objeto matemático de nuestro interés en el tema Patrones y Ecuaciones donde nos dice que se va abordar mediante la resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; ax = b; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios.

En conclusión en estos libros, a pesar que de que en los dos primeros tratan de plantear situaciones para llevar al niño a que descubra el concepto que se quiere enseñar, creo que no se logra ya que inmediatamente se les pide que planteen ecuaciones a pesar de que los niños no tienen una idea de que es eso y de todos modos se les proporciona una manera de resolver cada tipo de ecuación que se quieren enseñar y se considera que los ejercicios son muy repetitivos y se vuelven otra vez más algorítmicos.

Por otra parte, en cuanto al plan de estudios se puede observar que lo que se pretende es que los estudiantes comiencen a utilizar estrategias algebraicas para darle solución a los problemas planteados.

Por lo tanto, pretendo que con la secuencia se pueda llevar al alumno a que sea él el que descubra esos procedimientos mediante la identificación de las variables y que de esta manera el alumno intente plantear una ecuación par el problema verbal planteado.

Capítulo 5 Concepción y Análisis a priori

En este capítulo se describe los fundamentos que propiciaron la elección y modificación de la secuencia, así como la justificación de las reestructuraciones que sufrió a lo largo del proceso, por último, se describe un análisis de los resultados que se esperan tener con la secuencia.

5.1 Diseño de la secuencia didáctica

De acuerdo a los resultados del análisis preliminar que se realizó, existen varios conflictos en el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema de ecuaciones lineales, de entre los que se rescata que la propuesta debe tomar en cuenta:

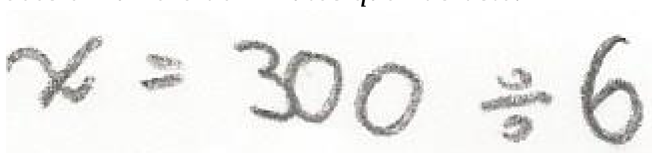
1. El transito del lenguaje común al lenguaje algebraico implica que los estudiantes que se enfrentan a un problema traten de encontrar una solución aritmética.
2. Uso de operaciones aritméticas en problemas verbales que involucran ecuaciones.
3. El álgebra se ve como abstracto fuera de contexto y de aplicabilidad inmediata.
4. Las propuestas didácticas de los libros fomentan particularmente el tratamiento algorítmico.

Por esta razón, se elige primeramente, la secuencia propuesta por Contreras (2004), la cual tiene como nombre “Lo tuyo y lo mío” (ver anexo 1), la cual consistía en un juego este se llevó acabo en una sesión de 50 minutos, y una segunda parte se tomó la secuencia de Cedillo, Cruz, Vega, Díaz y Kieran (2006), en la cual se planteó un problema relacionado con una compañía telefónica, esta parte se llevó acabo en dos sesiones de 50 minutos cada una (ver anexo 2).

Esta se aplicó con un grupo de primer grado de secundaria, con niños entre 11 y 12 años de edad, de la secundaria técnica No. 34 del municipio de Zacatecas, Zac.

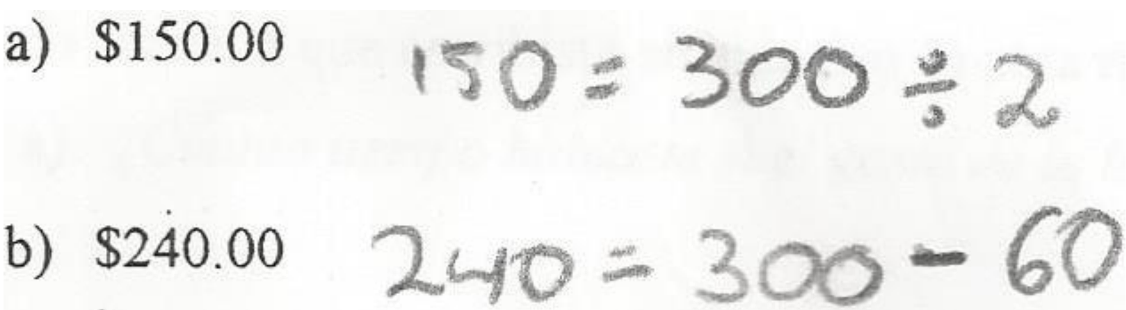
El planteamiento de los problemas, arrojó que la mayor parte de los estudiantes buscaran únicamente resultados aritméticos, sin que su razonamiento algebraico se viera favorecido, como se muestra en las siguientes imágenes.

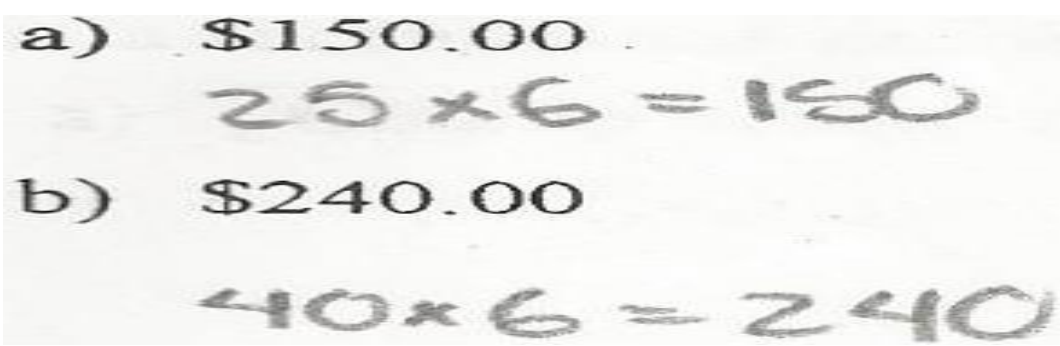
Construye una fórmula que permita determinar cuánto gastaste de tu crédito en una llamada si conoces el número de minutos que hablaste.



Reescribe la fórmula que construiste en el inciso anterior, considerando que el gasto por la llamada fue de:

a) $150.00
b) $240.00





Con base en estos resultados, se optó por una nueva propuesta, el fundamento principal de este cambio es que su estructura guía a los estudiantes a transitar por diferentes etapas de la teoría de situaciones didácticas de manera natural, es decir, permite distribuir los tiempos dedicados a cada una de ellas, sin dejar el objetivo que se tenía en un primer momento, que era el de plantear las situaciones que conduzcan a la identificación de las variables que intervienen en el problema.

Así, la secuencia final consiste de un problema que va a llevar al alumno a realizar planteamientos algebraicos a problemas verbales que involucren ecuaciones lineales de primer grado mediante la identificación de las variables. La secuencia tomó como base la propuesta de Espinoza, García y García, (2000, pág. 58), llamada "Las ventanas del calendario", que se propone para el tema de ecuaciones lineales: uso de la incógnita (primeros ejemplos) que se encuentra dentro del fichero de actividades, en la cual se realizaron algunas modificaciones como, el acomodo de las actividades para que pudieran llevarse a cabo en el tiempo destinado, otra cosa que se modificó fue que algunas de las actividades se plantearon a manera de juego, en total quedaron cuatro actividades, las cuales tienen como objetivo llevar a los estudiantes a plantear expresiones algebraicas.

Para efectos de esta investigación la secuencia piloto se aplicó con un grupo de primer grado de secundaria en el cual los niños rondaban en las edades de 11 y 12 años. La secundaria en la que se aplicó la secuencia fue en la secundaria técnica no. 34 del municipio de Zacatecas, Zac. Mientras que la secuencia final se llevó acabo en la Telesecundaria Leobardo C. Ruiz del municipio de Zacatecas, Zac.

5.1.2 Descripción de las actividades

Secuencia piloto

La secuencia se realizó en tres sesiones de 50 min cada una. Y se llevó a cabo en dos fases, la primera fue un juego, el cual se realizara durante una sesión.

La segunda fase se llevó a cabo en dos sesiones y constó de plantearles problemas a los alumnos, la cual va a llevar a los niños a que planteen como resolución al problema ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Durante la resolución de los problemas se pretende que los alumnos pasen por las cuatro fases de las situaciones didácticas (acción, formulación, validación e institucionalización).

Primera Sesión

Actividad	**Fase de la situación**	**Objetivo**
Juego (lo tuyo y lo mío) El juego fue tomado de "*las matemáticas de eso y bachillerato a través de los juegos*" (Contreras, 2004). A este se le realizaran algunas modificaciones como son que el alumno plateé la ecuación y que no sea solo el que busque solución al enunciado de manera aritmética.	Acción Formulación (Equipo)	En esta primera etapa se llevó a cabo durante una sesión, se espera que en esta actividad el alumno pase por la fase de acción y formulación. El objetivo es que comience a tratar de plantear una ecuación para cada enunciado y entre los integrantes del equipo discutan si está bien o no lo que se planteó.

Las siguientes actividades fueron tomadas de Cedillo, Cruz, Vega, Díaz & Kieran. (2006).

Segunda y tercera Sesión

Actividad	Fase de la situación	Objetivo	Comportamientos esperados
Primero se les plantea una situación la cual es la siguiente: Una compañía teléfonos ofrece celulares que operan con tarjetas de diferentes precios, y cobra $ 6.00 pesos por minuto (o fracción). Si te regalan un teléfono celular de dicha compañía con una tarjeta de $ 200.00, que te da un crédito de $ 300.00: 1. ¿A lo más cuántos minutos puedes hablar con este crédito? 2. ¿Cuánto gastas de tu crédito de $ 300.00 si haces una llamada de 5 minutos? 3. ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300.00 si hablas 17 minutos? 4. Si tu crédito está en $ 120.00, ¿a lo más	Fase de acción (trabajo individual)	El objetivo es que el alumno en esta primera parte comience a relacionarse con el problema y comience a tratar de relacionarlo. En esta parte se espera que el alumno conteste de manera aritmética el problema ya que es de esta manera como se les va a ser más fácil resolverlo.	Se espera que el alumno identifique los datos conocidos y desconocidos. También se espera que conteste de manera aritmética esta primera parte y para esto se espera que el alumno identifique las operaciones que le va ayudar a resolver las cuestiones propuestas en la actividad. Por ejemplo En la pregunta 1 se espera que el alumno divida el crédito que tiene entre lo que cobran el minuto. Uno de los errores que

cuántos minutos has usado de tu crédito de $ 300.00?			pueden cometer los alumnos es que no realicen bien las operaciones ya sea porque no identifican las partes de una división o porque no recuerdan el algoritmo para resolverlas.
Se les plantean unas preguntas relacionadas con lo anterior. 5. Construye una fórmula que te permita determinar cuánto gastaste de tu crédito en una llamada si conoces el número de minutos que hablaste. 6. Reescribe la fórmula que construiste en el inciso anterior, considerando que el gasto por la llamada fue de: a) $150.00 b) $240.00	Situación de acción y formulación (trabajo en equipo)	El objetivo en esta actividad es que el alumno comience a plantear ecuación pero sin llamarlas ecuaciones, para que les pueda facilitar más el proceso, ya que ese concepto les es más familiar a los alumnos por que lo han trabajado anteriormente.	En esta parte se espera que el alumno intente o comience a plantear una ecuación. El alumno no va a escribir la fórmula introduciendo la literal *x*, más bien se espera que la escriba anotando las letras con que comienza lo que se le pide, por ejemplo m (minutos) o la c de (crédito).
7. Completa la siguiente tabla: <table><tr><th>Minutos hablados</th><th>Crédito que queda de los 300 pesos (S)</th></tr></table>	Situación de acción y formulación (trabajo	Esta parte tiene el mismo objetivo que la anterior, el que el alumno formule ecuaciones pero esta vez se les plantea que a la	En esta parte se espera que el alumno vuelva a resolver de manera aritmética, aunque también es probable que alguno

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$ 60.00</td></tr>
<tr><td></td><td>$ 30.00</td></tr>
</table>
8. Construye una fórmula que te permita determinar cuánto crédito te queda de los $ 300.00 si conoces el número de minutos que hablaste.
9. Reescribe la expresión algebraica que construiste en el inciso anterior, considerando que el crédito que te queda de $ 300.00 es de:
a) $30.00
b) $252.00
</td>
<td>en equipo)</td>
<td>ecuación que tienen les modifiquen algo.</td>
<td>utilice lo planteado en los ejercicios anteriores, esto para la tabla.
En las preguntas 8 y 9 se espera que el alumno planteé más ecuaciones y que sepa que es lo que tiene modificar de acuerdo a lo que se le pide.</td>
</tr>
<tr>
<td>Exposición del trabajo realizado.</td>
<td>Fase de validación</td>
<td>El objetivo es que el alumno explique y defienda lo realizado durante las actividades planteadas delante de sus compañeros. También se</td>
<td>Se espera que los alumnos confronten sus respuestas y que las defiendan, pero que las expresen matemáticamente.</td>
</tr>
</table>

		pretende confrontar a equipos que respondieran de diferentes maneras para que de esta forma les pueda quedar más claro lo que se realizó.	
Se modifica el problema que se planteó al principio: *La compañía ha cambiado las condiciones del cobro de las llamadas, y ahora cobrará por el tiempo que dure la llamada, es decir, las fracciones de minuto las va a cobrar por lo que corresponda, manteniendo la tarifa de $6.00 por minuto.* Los alumnos trabajan en equipo para responder las siguientes preguntas: 10. Usa la fórmula que escribiste en el inciso 5) para responder las siguientes preguntas: a) *¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de $ 45.00?* b) *¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto*	Fase de formulación (trabajo en equipo)	El objetivo es que los alumnos sigan reformulando y reforzando lo trabajado hasta el momento.	En esta parte se espera que el alumno utilice lo planteado anteriormente, pero que sepa como y donde se tiene que modificar y porque se está modificando esa parte.

de la llamada fue de $ 69.00? c) *¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de $ 31.50?* 11. Usa la fórmula que escribiste en el inciso 8), para contestar las siguientes preguntas: *a) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan $ 243.00 de mi crédito de $ 300.00?* *b) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan $ 165.00 de mi crédito de $ 300.00?* *c) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan $ 7.50 de mi crédito de $ 300.00?*			
Exposición de la actividad anterior	Fase de validación (trabajo en grupo)	El objetivo es el de confrontar las respuestas de algunos de los equipos para ver como lo trabajaron y observar los errores y los aciertos de los alumnos.	Se espera que se vea un avance en cuanto al leguaje que utilicen los alumnos y el como expliquen los procedimientos realizados.
Se les plantea a los alumnos una	Situación	Esta es la última	En esta parte se espera

ecuación $$4.5x + 30 = 156$$ Y se les pide que formulen un problema con base en la ecuación anterior Se exponen algunos de los problemas planteados por los alumnos.	de formulación y validación (trabajo en equipo)	actividad planteada para los alumnos y en esta parte el objetivo es que el alumno trate de crear un problema basado en una ecuación, para ver si pueden dar el paso de la ecuación al enunciado y que ya están comprendiendo las partes de una ecuación	que los alumnos den un esbozo de un problema de acuerdo a la ecuación que se les plantea, pero se piensa que no del todo van a relacionar el problema con los datos de la ecuación.
Revisión de las sesiones.	Fase de institucionalización	En esta parte el objetivo es que el profesor de formalismo a lo trabajado durante las sesiones, esto es que defina que es una ecuación y que es el grado de una ecuación, cual es la incógnita, etc.	En esta parte se espera que el alumno tenga más claro como plantear una ecuación para un problema y que entiendan las definiciones que les proporcione el profesor.

Secuencia final

La secuencia se llevó acabo en dos sesiones de 50 min cada una. Durante la resolución de los problemas se pretende que los alumnos pasen por las cuatro fases de las situaciones didácticas (acción, formulación, validación e institucionalización). A continuación, se presenta el análisis a priori de cada una de las actividades.

Fase de acción

La primera parte tiene una estructura de juego, dentro de la fase de acción se entrega a los alumnos el problema, se les pide que lo lean y se pregunta si queda claro lo que se está buscando, posteriormente cada alumno busca estrategias para encontrar el resultado; consecutivamente se comparten los resultados con sus compañeros, de la siguiente manera:

a) El jugador 1 dice cuál es la suma de los números, y los demás jugadores tratan de averiguar los números del jugador 1.

b) Luego el jugador 2 hace lo mismo y los demás averiguan cuales números son y así cada uno de los integrantes del equipo.

Las respuestas de los alumnos quedan plasmadas en una tabla como la que se muestra en la tabla 2

Jugador	**Suma**	**Números**

Tabla 2: Concentrado de respuestas

El profesor va a leer las instrucciones del juego frente a todo el grupo y posteriormente se harán preguntas para corroborar que quedó claro y si existen dudas en algún equipo se procederá a dar un ejemplo de como se va a llevar acabo la actividad (jugar).

El objetivo de esta actividad es que el alumno comience a buscar estrategias para poder dar con los números que están escondidos dentro de la ventana. Se espera que conforme avance el juego los niños encuentren la relación entre los números de la ventana, aunque se prevé que habrá quienes lo hagan mediante prueba y error.

Fase de formulación

Esta parte abarca las actividades 2 y 3, y se realizó también en equipos los cuales serán los mismos que en la actividad anterior y consistirá en lo siguiente: se realiza una serie de preguntas (ver la ilustración 4) en las que se espera obtener una reflexión por parte de los alumnos en cuanto a los procedimientos realizados

2. ¿Cómo averiguarías los números del jugador 1 si la suma fuera 54? Explícalo

____

- Si el menor de los tres números se denota con *x*, ¿cómo expresarías el siguiente número?

  ____

- ¿y el mayor de los tres?

  ____

- ¿Cuál sería la expresión matemática para encontrar la suma de tres números cualesquiera del calendario?

Ilustración 4: preguntas de la fase de formulación

En primer lugar, la investigadora explicara lo que van a realizar los alumnos.

El objetivo de esta actividad es que los alumnos intenten generalizar como calcular los números debajo de la ventana independientemente de su ubicación

Por lo tanto, lo que se espera en esta actividad es que el alumno proponga estrategias aritméticas las cuales pueden conducir a la aplicación del álgebra. Se espera que algunos alumnos puedan encontrar relaciones entre los números. Por ejemplo, se darán cuenta que si colocan de manera vertical la ventana y conocen el número superior los otros dos se pueden obtener a partir de que al número conocido le sumen 7 y 14; de la misma manera si colocan la ventana de manera horizontal pueden obtener los otros dos números sumándole 1 y 2.

Con esto se espera que en los incisos a-c el alumno logre plantear las expresiones matemáticas correspondientes, esto es que:

Para el inciso a) el alumno escriba $x + 7$

Para el b): $x + 14$

Y con esto pueda llegar a expresar la suma de los tres números, que sería:

$$x + (x + 7) + (x + 14)$$

A continuación, el análisis del ejercicio 3 que se muestra en la ilustración 5:

3. Coloquen ahora la ventana 2 y observen que abarca 5 números. Si sólo conocieran uno de ellos, encuentren la manera de obtener la suma de los cinco números mediante una multiplicación y una suma

   a) Escriban una expresión algebraica para obtener la suma de los cinco números, si conocen sólo uno de ellos.

Ilustración 5: Preguntas del ejercicio 3

El objetivo de esta actividad es que utilice lo anterior para que pueda expresar lo que se le plantea y que pueda llegar a plantear una ecuación para el ejercicio 4 (ver ilustración 6).

En el ejercicio tres se espera que el alumno proceda de manera similar a lo anterior. Una de las dificultades previstas que se pueden encontrar es que el alumno nombre x no al número superior si no al inferior por ejemplo y con esto el alumno se toparía con que tiene que trabajar con números negativos y esto le puede dificultar un poco la generalización de la expresión matemática que se les pide.

Otra cosa que también puede pasar es que algunos estudiantes utilicen la expresión encontrada en el ejercicio 2 en el inciso c) y de esta manera ahora solo tienen que calcular los dos números faltantes para completar la expresión.

4. El número 59 corresponde al resultado de una suma. ¿Cómo puedes saber cuál ventana se utilizó?

____

Ilustración 6: Pregunta 4 de la secuencia

En el ejercicio 4 (ilustración 6) lo que se espera es que algunos equipos resuelvan el problema mediante ensayo y error, es decir, tomarán cada una de las ventanas y las colocarán sobre el calendario hasta localizar la que sume 59. Otros equipos pondrán en práctica las expresiones algebraicas obtenidas y empezarán a probar con cada una, esto es, tomarán valores y los sustituirán en las expresiones hasta encontrar aquella en la que resulta 59. Y esperamos que por lo menos un equipo se dé cuenta de que cada expresión se puede igualar a 59 y obtener en consecuencia las ecuaciones correspondientes, para que de esta manera puedan obtener de manera más rápida la ventana correcta.

Fase de validación

Esta fase se realizará al interior de cada equipo y al terminar la secuencia, posteriormente al concluir la actividad 4, después de que los equipos terminen de contestar las actividades y se dará mediante la exposición frente al grupo. Pasaran dos equipos al pizarrón a explicar que es lo que realizaron en el ejercicio, cuáles fueron las estrategias que utilizaron.

Con esto se espera que los estudiantes reflexionen acerca de cómo plantear las expresiones matemáticas que se les piden y si alguno no logró llegar a estas que vea cómo se pueden resolver.

Institucionalización

Esta fase se va a llevar acabo al término de la exposición de la actividad 4 y esta se tomará para realizar esta fase, tomando como base los argumentos proporcionados por los alumnos.

Si en la actividad 4 ningún equipo llega a igualar la expresión con el resultado el profesor les dirá que pasa si se realiza esto y conforme les vaya explicando el procedimiento, les dirá que es una igualdad, una incógnita, una ecuación y como se resuelve.

Y si algún equipo llega a plantear la ecuación el profesor tomará lo realizado por este equipo para definir los conceptos antes mencionados.

La siguiente tabla muestra el análisis a priori de la situación planteada.

Tabla 3: Concentrado del análisis a priori

Fase	**Actividad**	**Objetivo**	**Aprendizajes esperados**
Acción	1	Que el alumno comience a buscar estrategias para encontrar los números desconocidos.	Que los alumnos encuentren la relación que existe entre los números en la ventana. Lo anterior es que ellos relacionen que cada ventana estos siete números después que la anterior si esta de manera vertical y que son números consecutivos si la ventana esta de manera horizontal. Se prevé que algunos lo harán a prueba y error.
Formulación	2,3,4	Que comience a generalizar procedimientos.	Propongan estrategias con base en sus conocimientos previos que posteriormente puedan conducirlos a la aplicación del álgebra. En estas actividades se pretende que el alumno comience a utilizar su lógica para encontrar como se relacionan los números desconocidos. También se espera que una vez que tengan planteada su expresión algebraica la utilicen para dar respuesta a la actividad 4 al convertirla en una ecuación lineal de primer grado.

Validación	2,3,4	Que reflexione acerca de sus estrategias.	Plantee expresiones matemáticas. Se pretende que los alumnos discutan en equipo la expresión que ellos crean más conveniente para representar lo solicitado en los ejercicios. Posteriormente se seleccionarán dos equipos para que pasen a exponer sus resultados y así se discuta de manera grupal lo que se realizó durante la actividad, para que de esta manera se llegue a un consenso de cuál sería la mejor manera de escribir la expresión algebraica que representó lo solicitado. También en esta fase se espera que los alumnos puedan plantear y resolver una ecuación lineal de primer grado.
Institucionalización	4	Que el alumno exprese los números desconocidos en forma de literales	Que plantee una ecuación y conozca las partes que conforman la misma. Esta fase se dará de manera grupal y por el profesor con la intervención de los alumnos, aquí es donde se presenta la forma de una ecuación y como está representada.

Capítulo 6 Experimentación y Análisis a posteriori

6.1: Experimentación

La experimentación se llevó acabo el día 18 del mes de abril del 2016 en la escuela telesecundaria Leobardo C. Ruiz del municipio de Zacatecas, con alumnos de primer grado, los cuales tienen entre 11 y 12 años de edad. El grupo constaba de 17 alumnos de los cuales 7 eran niñas y 10 niños.

La actividad se llevó acabo en dos sesiones de 50 min, durante la implementación no estuvo presente el profesor titular del grupo. Las actividades se distribuyeron de la siguiente manera:

Tabla 4: Distribución del tiempo para las actividades

Actividad	**Duración**
Ejercicio 1	20 min
Ejercicio 2	20 min
Exposición del ejercicio 2	10 min
Ejercicio 3	10 min
Ejercicio 4	15 min
Exposición del ejercicio 3 y 4	10 min
Institucionalización	15

Durante esta fase se llevó acabo la puesta en escena de las actividades diseñadas y se realizó la recogida de datos. Para esto se utilizó los instrumentos diseñados por la investigadora y fotografías.

Durante la puesta en marcha de las actividades el grupo colaboró muy bien, en general la mayoría tenía la disposición de realizar las actividades, a excepción de dos niños, que no se comprometieron con la actividad y se la pasaron jugando, mientras sus compañeros de equipo trabajaban y en ocasiones lograban que sus compañeros de equipo también se distrajeran. Por otra parte tenía una niña que no quería trabajar con nadie, pero como las actividades eran en equipo para que pudieran discutir las respuestas, se tuvo que proceder a integrarla a un equipo.

6.2: Resultados de la experimentación

En este análisis vamos a revisar las respuestas dadas por los alumnos a las actividades planteadas para posteriormente contrastar este análisis con el análisis apriori.

6.2.1: Fase de acción

Como el investigador no es el maestro del grupo, los equipos se formaron por afinidad de los alumnos. La investigadora se dio cuenta que una niña no se quería integrar a ningún equipo puesto que ella decía que ningún equipo la quería, para esto el profesor tuvo que intervenir e integrarla en un equipo ya que la actividad no la iba a poder hacer ella sola.

Una vez formados los equipos el investigador procedió a la lectura de las instrucciones de la actividad que iban a desarrollar los alumnos, una vez terminada la explicación el profesor (investigador) preguntó si había alguna duda y los alumnos comentaron que no y procedieron a comenzar con la actividad.

En la fase de acción todos los equipos comenzaron a realizar la actividad argumentando que estaba clara, como se muestra en la ilustración 7, sin embargo, cuando la investigadora hizo un recorrido para monitorear el trabajo de cada uno, se dio cuenta que en uno de los equipos la mitad de los integrantes estaban jugando, mientras que el resto contestaba el instrumento, por tal motivo se trató de interesar a estos alumnos a participar en la actividad, pero solo trabajaban cuando veían a la investigadora cerca.

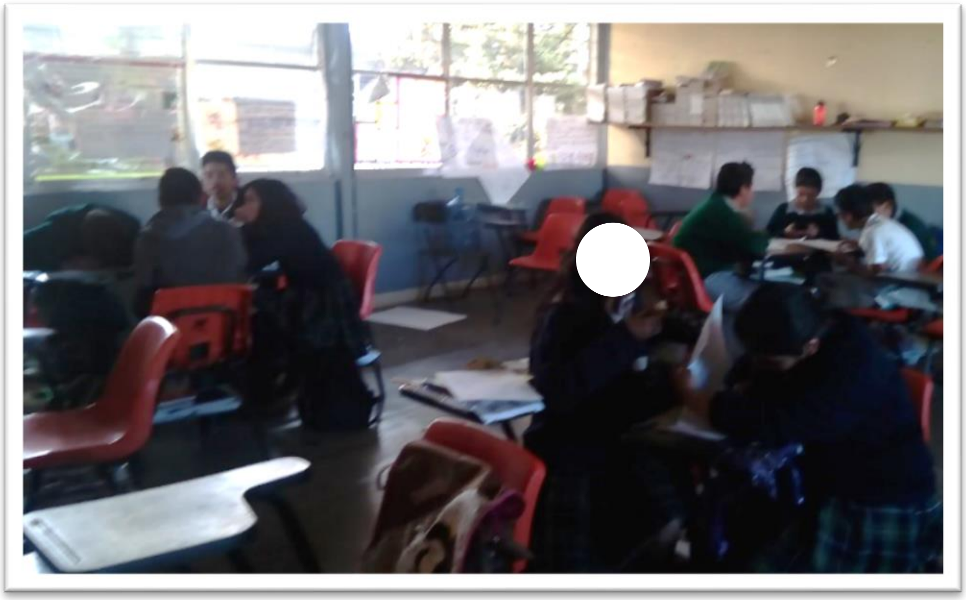


Ilustración 7: Fase de Acción

El equipo tres tenía algunas dificultades para sacar los resultados así que ellos optaron por sacar una calculadora para realizar las operaciones más rápidas, este equipo a pesar de que era uno de los que tenía menos integrantes se tardó más en contestar la actividad.

Los otros tres equipos se encontraban realizando la actividad por lo tanto se puede decir que estos equipos si se hicieron responsables del problema e intentaron resolverlo.

Jugador	Suma	Números
Mario	24	18,15
Marcos	57	12+19+26
Brayan	69	30+23 16
Dena	90	29+30+31

Ilustración 8: Respuesta del equipo 2

Por ejemplo en la ilustración 8 se muestra el equipo donde solo dos del integrantes estaban trabajando y dos jugando, entonces se puede ver que los dos primeros anotaron mal la respuesta y ninguno de sus compañeros dijo nada ya que no se corrigió la respuesta y está mal no porque la suma de los números no de lo que tiene que dar, sino más bien porque con la ventana no se puede poner esos números, ya que en primer lugar la ventana abarca tres números y la primera respuesta solo da dos números y en segundo lugar porque los números pueden ser solo seguidos o respecto al primero se le tiene que ir sumando 7 y 14 para que den los siguientes números, y como se puede ver las respuestas 1 y 2 no cumplen con esto.

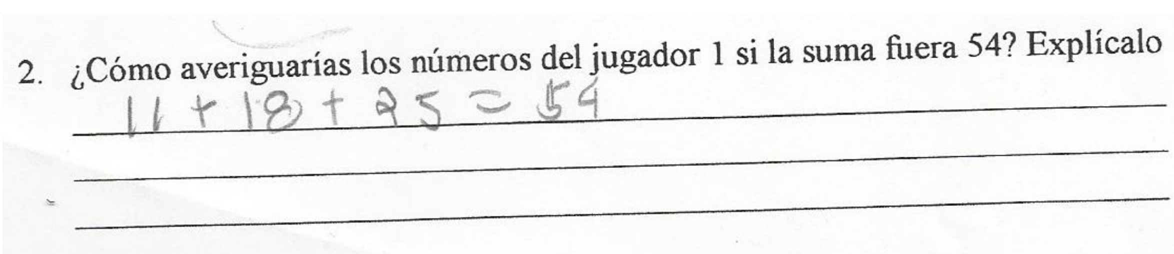
En general los equipos contestaron esta parte mediante prueba y error, lo que ellos hacían era ir colocando la ventana sobre números al azar y veían que cantidad les daba y si era muy lejos de lo que la suma les pedía pues regresaban a números más pequeños.

Lo anterior cumple con lo predicho en el análisis a priori ya que se esperaba que los alumnos contestaran de esta manera, porque va a ser el primer acercamiento que ellos tienen con el problema y esto nos lo dice la teoría, ya que en ella se dice que el primer acercamiento el alumno va a tener con el problemas es con base en sus conocimientos previos.

6.2.2: Fase de formulación

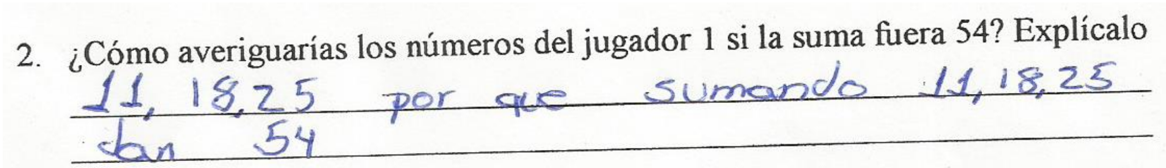
En esta parte lo primero que se realizó fue explicarles a los alumnos la siguiente parte de la actividad y que entendieran lo que se les pedía. Los alumnos comenzaron a contestarlo y en esta parte ellos tuvieron más dudas. La investigadora pasó equipo por equipo a resolver dudas.

Por ejemplo, para la pregunta dos, algunos equipos dieron la respuesta numérica ellos buscaron que números les daban la suma de 54 (prueba y error), como se muestra en la ilustración 9 y 10.


2. ¿Cómo averiguarías los números del jugador 1 si la suma fuera 54? Explícalo

11 + 18 + 25 = 54

Ilustración 9: Respuesta del equipo 3



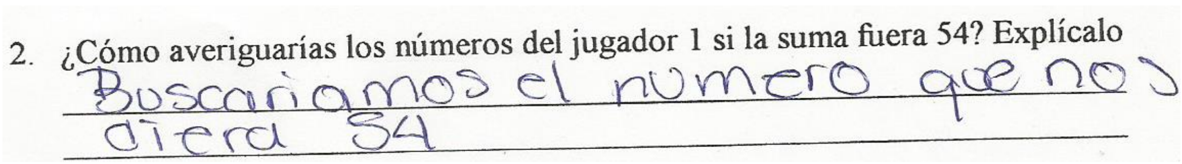
2. ¿Cómo averiguarías los números del jugador 1 si la suma fuera 54? Explícalo

11, 18,25 por que sumando 11, 18,25 dan 54

Ilustración 10: Respuesta del equipo 5

Este tipo de respuestas corroboran lo dicho por Koedinger, Alibali y Nathan (1999) los alumnos emplean estrategias informales que no involucran símbolos algebraicos, como procedimientos de ensayo y error para encontrar la respuesta.

Por su parte los otros equipos solo lo pusieron de manera más general como por ejemplo como se puede ver en la ilustración 11:



2. ¿Cómo averiguarías los números del jugador 1 si la suma fuera 54? Explícalo

Buscariamos el numero que nos diera 54

Ilustración 11: Respuesta del equipo 4

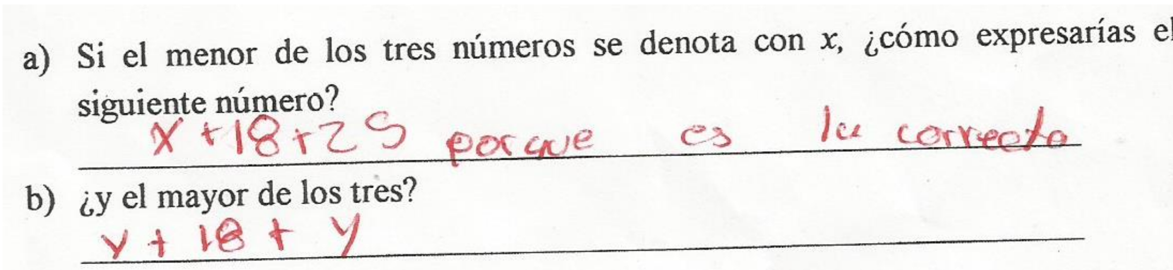
Para las siguientes tres preguntas los alumnos batallaron más ya que hasta este momento no habían logrado hacer una generalización de como calcular los números. La investigadora tuvo que hace una intervención haciendo uso de la fase de acción nuevamente, pero esta vez de equipo en equipo para corroborar que tienen que hacer.

Una de las preguntas más frecuentes que realizaron los alumnos fue ¿Cómo podían saber qué número seguía si no tenían ningún número inicial?, a pesar de que en la pregunta se les decía que el primer número se denotaba por *x,* ellos no comprendían eso y por esta razón la investigadora optó por dar un ejemplo más sencillo para que de esta manera comprendieran lo que se les estaba pidiendo.

Si tuvieras que el primer número fuera 3 y pones la ventana vertical como sabrías ¿cuál sería el siguiente número? O que operación le pueden hacer al 3 para saber cuál es el número siguiente.

Las respuestas que dieron fueron que tendrían que sumar 7 para saber cuál sería el siguiente número, el profesor le contestaba entonces como expresarías eso matemáticamente, en eso un alumno pregunta lo que quiere es que lo anotemos como una ecuación y el profesor contesta pues si algo así.

Pero aun así muchos alumnos utilizaron la pregunta anterior para dale respuesta a esta, como se puede observar en las ilustraciones 12 y 13:

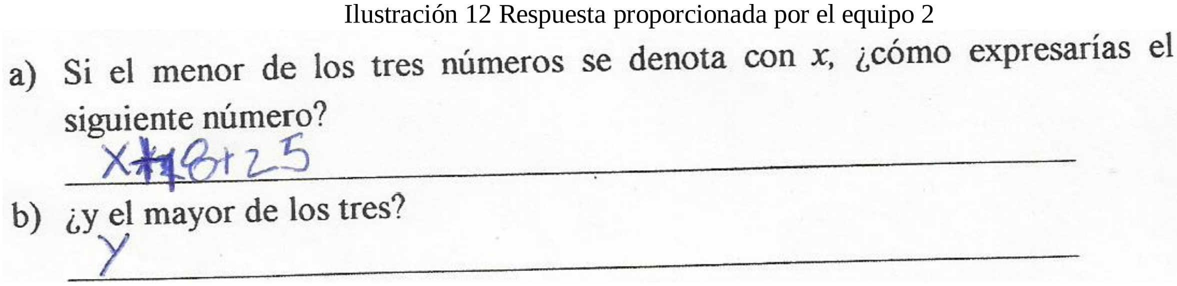

a) Si el menor de los tres números se denota con x, ¿cómo expresarías el siguiente número?

X+18+25 porque es lo correcto

b) ¿y el mayor de los tres?

y + 18 + y

Ilustración 12 Respuesta proporcionada por el equipo 2


a) Si el menor de los tres números se denota con x, ¿cómo expresarías el siguiente número?

X+18+25

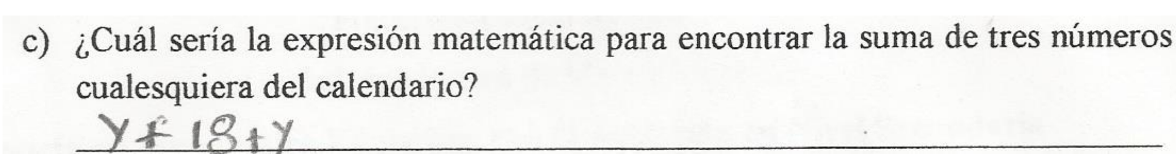
b) ¿y el mayor de los tres?

Y

Ilustración 13. Respuesta proporcionada por el equipo 5

Lo anterior concuerda con lo dicho por González y Diez (2002) que los alumnos tienen problemas con el uso de la literales, ya que solo lo utilizan porque se les está pidiendo que lo hagan. También se puede observar que los alumnos tienen dificultad en realizar la representación algebraica del enunciado como nos lo dice Díaz, Martínez y Soto (2007). Esto se justifica porque los alumnos no pudieron llegar a una generalización del cómo obtener los números que nos van a dar la suma que se pide.

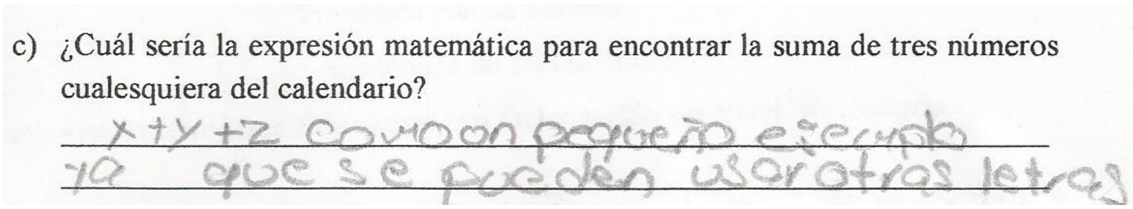
La ultima pregunta del ejercicio 2 referente a la generalización, fueron pocos los alumnos los que lograron hacer algún bosquejo de lo que se pedía, como se muestra en las ilustraciones 14 y 15.


c) ¿Cuál sería la expresión matemática para encontrar la suma de tres números cualesquiera del calendario?

Y+18+Y

Ilustración 14 Respuesta proporcionada por el equipo 2

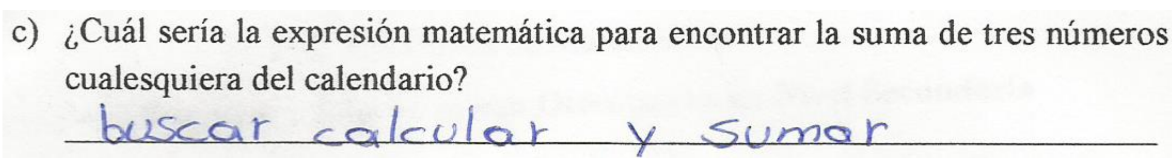
Por ejemplo, este equipo continúo utilizando lo anterior que era lo que se esperaba, pero lo malo es que como no generalizó bien lo anterior pues en esta parte no pudo llegar a la respuesta correcta.


c) ¿Cuál sería la expresión matemática para encontrar la suma de tres números cualesquiera del calendario?

x+y+z como un pequeño ejemplo ya que se pueden usar otras letras

Ilustración 15 Respuesta proporcionada por el equipo 1

La ilustración 15 nos muestra que este equipo logro identificar que podía utilizar literales para nombrar números que no conociera independientemente de qué número sea. Pero aun así no se ve plasmado el procedimiento que tiene que tener la expresión para poder localizar los números dentro de la ventana y que estos concuerden con el resultado de la suma que se les pide.

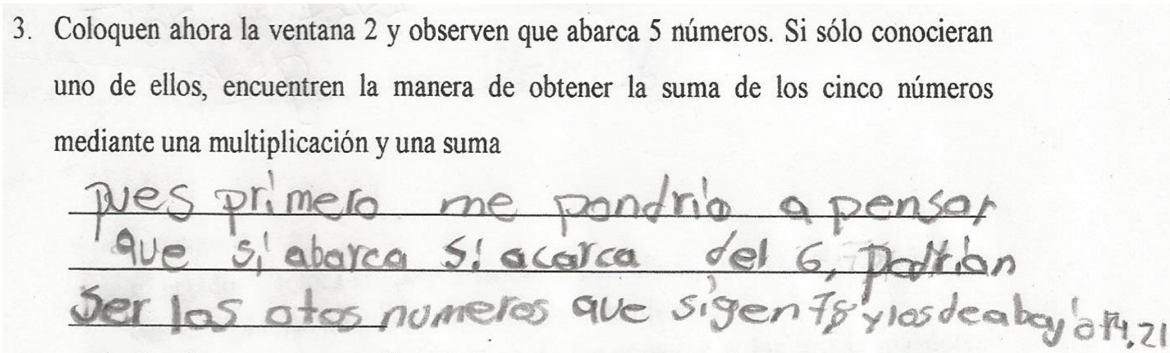

c) ¿Cuál sería la expresión matemática para encontrar la suma de tres números cualesquiera del calendario?

buscar calcular y sumar

Ilustración 16 Respuesta proporcionada por el equipo 5

La ilustración 16 muestra que el equipo sabía lo que tenía que realizar, pero de manera aritmética y no logró llegar a generalizar el proceso para cualquier número. Y esto concuerda con lo que dice Kieran (2007, citado en Rodríguez-Domingo y Molina, 2013) donde señala que los alumnos optan por realizar procedimientos aritméticos antes que algebraicos.

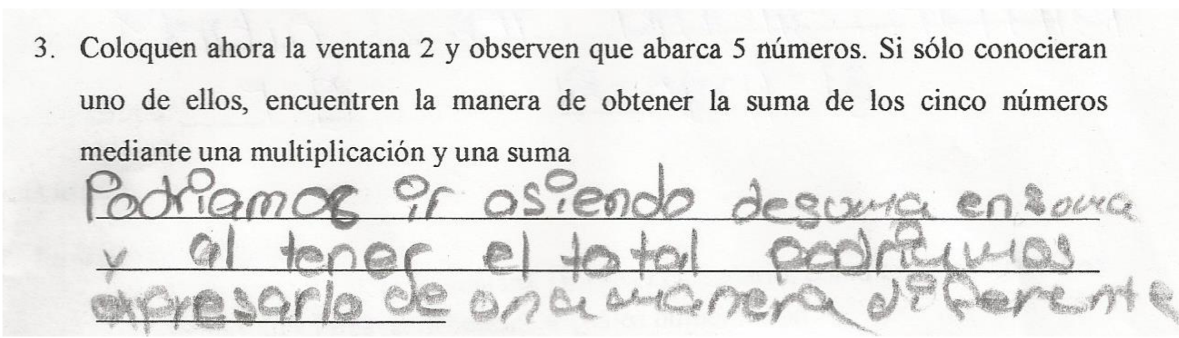
La dificultad de la falta de generalización se vio reflejada cuando se incrementó el número de ventanas como se muestra en la actividad 3 y 4 (ilustraciones 17 y 18).


3. Coloquen ahora la ventana 2 y observen que abarca 5 números. Si sólo conocieran uno de ellos, encuentren la manera de obtener la suma de los cinco números mediante una multiplicación y una suma

pues primero me pondrio a pensar
que si abarca si acarca del 6, podrian
ser los otos numeros que sigen 7 8 y los de abajo o 14, 21

Ilustración 17: Respuesta del equipo 5

Este equipo los alumnos, sintieron la necesidad de explicar lo que harían con un ejemplo en concreto, pero en si no se explica claramente lo que se tiene que hacer y esto puede deberse a lo que dicen Ruano, Socas y Palarea (2008) que los alumnos no encuentran sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, esto es que el alumno no sabe como trabajar con letras o que no les encuentra significado y por esto busca respuestas en el lenguaje numérico particularizando las expresiones.


3. Coloquen ahora la ventana 2 y observen que abarca 5 números. Si sólo conocieran uno de ellos, encuentren la manera de obtener la suma de los cinco números mediante una multiplicación y una suma

Podriamos ir asiendo de suma en suma
y al tener el total podriamos
expresarlo de una manera diferente

Ilustración 18: Respuesta del equipo 1

Por ejemplo, en la ilustración 18 vemos que este equipo solo dijo de manera muy general que es lo que se tenía que hacer, pero sin llegar a explicitarlo de manera más formal y esto se puede deber a que los alumnos no comprendieron el enunciado, esto es dificultad en el área de la lectura como lo dice García (1998, citado en Chavarría, 2014). En general los demás equipos contestaron de manera similar.

En la parte donde se solicitaba que escribieran una expresión, la mayoría de los equipos planteo una expresión matemática como la que se muestra en la ilustración 19.

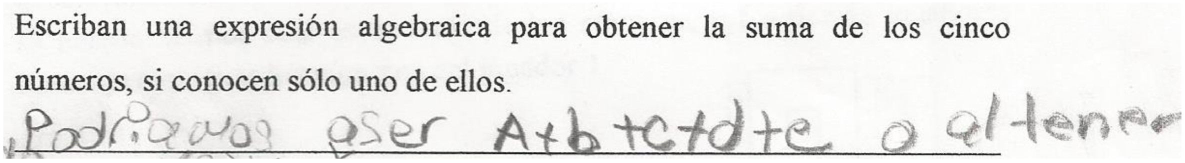

Escriban una expresión algebraica para obtener la suma de los cinco números, si conocen sólo uno de ellos.
Podríamos aser A+b+c+d+e o al tener

Ilustración 19: Respuesta del equipo 1

Podemos ver en la ilustración 19 que este equipo intento expresar la suma de los cinco números de la ventana, pero la expresión no nos dice nada acerca de cómo se van relacionando las letras para que concuerden con la forma de la ventana.

En las ilustraciones 20 y 21 se puede ver que los alumnos necesitan igualar su expresión a algo, esto puede deberse en parte a que los alumnos ya vieron el tema de ecuaciones, por tal motivo, al plantear la expresión ven la necesidad de igualarla con algo.

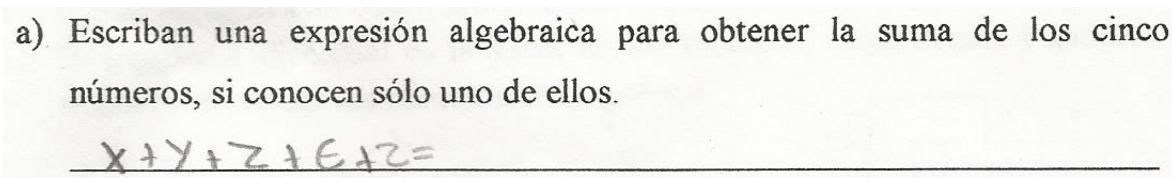

a) Escriban una expresión algebraica para obtener la suma de los cinco números, si conocen sólo uno de ellos.
x+y+z+E+z=

Ilustración 20: Respuesta del equipo 2

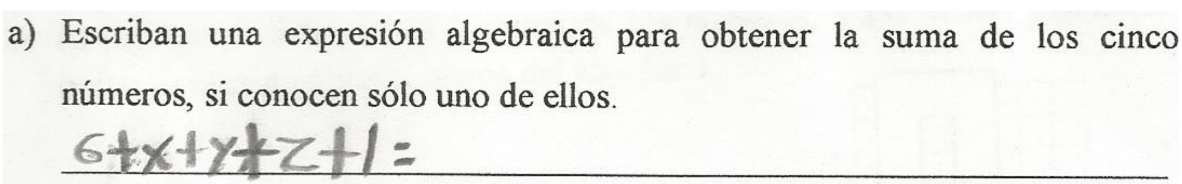

a) Escriban una expresión algebraica para obtener la suma de los cinco números, si conocen sólo uno de ellos.
6+x+y+z+1=

Ilustración 21: Respuesta del equipo 5

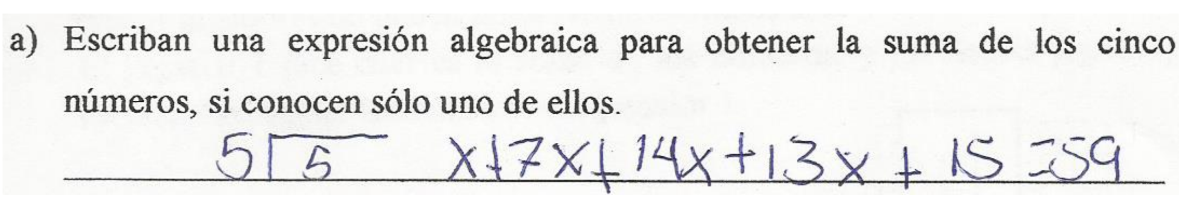

a) Escriban una expresión algebraica para obtener la suma de los cinco números, si conocen sólo uno de ellos.
5Γ5 x+7x+14x+13x+15=59

Ilustración 22: Respuesta del equipo 4

Por ejemplo, la ilustración 17 y 18 se corrobora lo que dice Ruano, Socas y Palarea (2008) acerca de la necesidad de clausura en los estudiantes, esto es, que ellos no aceptan que una expresión no pueda cerrarse y que no tenga un número como resultado. Mientras que la ilustración 22 nos muestra que lo que planteo este equipo puede deberse a que copió la respuesta que la investigadora dio para el ejercicio cuatro cuando explicó lo que se había hecho o como lo pudieron realizar, ya que con estos ejercicios se dio la institucionalización. Y también se piensa esto ya que el equipo tiene una respuesta antes de la expresión algebraica.

Por último en la pregunta 4 solo un equipo logró dar respuesta, aunque lo realizó de manera aritmética y no algebraica como se esperaba. En cuanto a los demás equipos algunos contestaron que no se podía y otros solo expresaron que para encontrar la respuesta se tenía que ir poniendo la ventana en el calendario y hacer la suma de los números y de esta manera poder decir que ventana da el resultado.

4. El número 59 corresponde al resultado de una suma. ¿Cómo puedes saber cuál ventana se utilizó?

la de 5

Ilustración 23: Respuesta del equipo 5

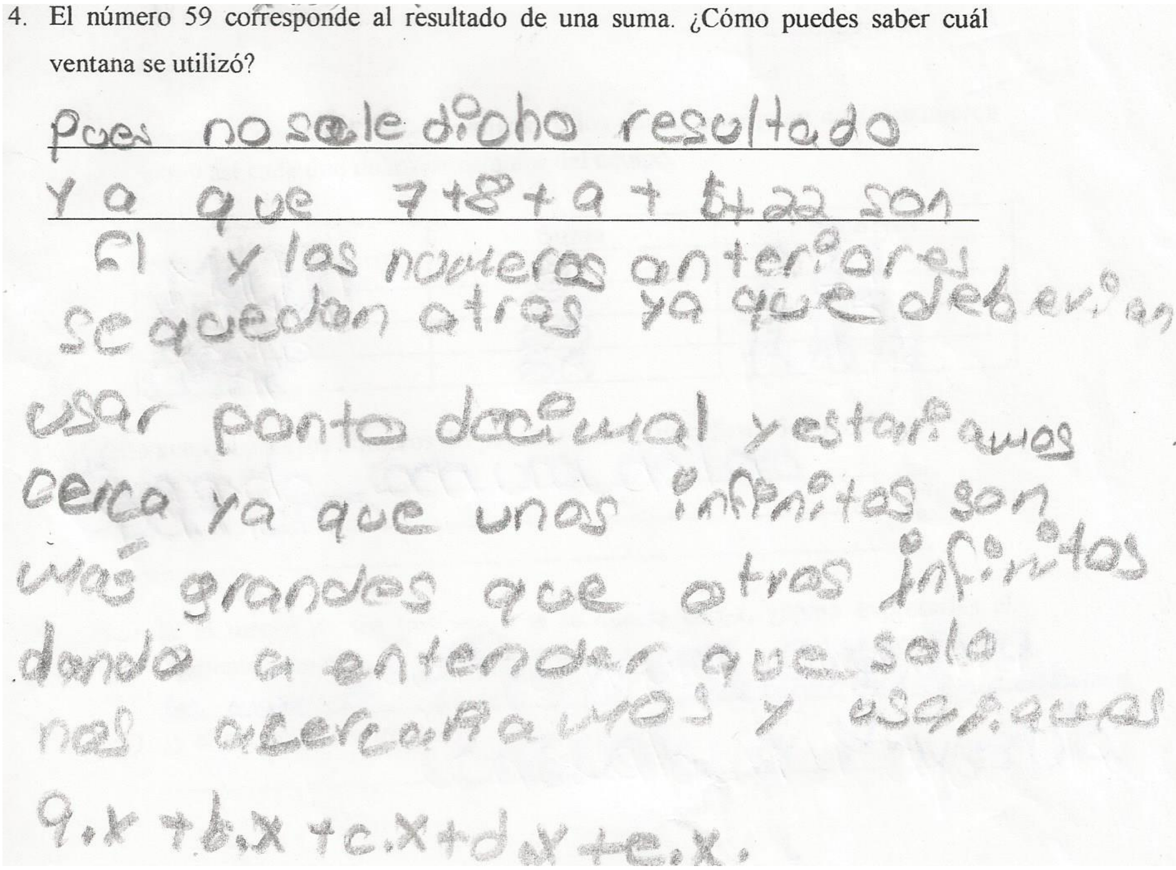
La ilustración 23 nos muestra al único equipo que encontró con que ventana da el resultado de 59, llegaron a este resultado por prueba y error, con lo cual podemos corroborar lo dicho por Koedinger, Alibali y Nathan 1999, que los alumnos frecuentemente optan por utilizar procedimientos informales, lo realizado por este equipo fue ir probando las ventanas en el calendario hasta que llegaron al resultado. No se esperaba que lo hicieran de esta manera, pero aún así fue el único que lo logró.

4. El número 59 corresponde al resultado de una suma. ¿Cómo puedes saber cuál ventana se utilizó?

Higera x+7 x+14 x+13 x+15=59

Ilustración 24: Respuesta del equipo 4

Aquí vemos otra vez que este equipo corrigió lo que antes habían contestado, cuando se dio la respuesta o el procedimiento para realizar lo que se pide en esta pregunta.



4. El número 59 corresponde al resultado de una suma. ¿Cómo puedes saber cuál ventana se utilizó?

Pues no sale dicho resultado
ya que 7+8+9+5+22 son
61 y los numeros anteriores
se quedan atras ya que deberíamos
usar punto decimal y estaríamos
cerca ya que unos infinitos son
más grandes que otros infinitos
dando a entender que solo
nos acercaríamos y usaríamos
a.x + b.x + c.x + d.x + e.x.

Ilustración 25: Respuesta del equipo 1

Este equipo llamó mucho la atención por el lenguaje que maneja, ya que se piensa que estaban muy influenciados por lo que están viendo en clase y trataron de relacionarlo con lo que estaban haciendo, pero como se puede ver, no usaron de manera adecuada los términos que mencionan y al final tratan de escribir una expresión algebraica, en la que ellos expresaban que se podía utilizar pero, la respuesta solo se podía dar con punto decimal.

En esta fase muchos de los equipos lograron dar una expresión algebraica para el la actividad planteada, pero les falto el ver como se relacionaban las literales entre sí.

A continuación, se presenta la tabla 5 en la cual se hace un concentrado de las respuestas que dieron los estudiantes en cada actividad.

Tabla 5: Concentrado de respuestas

Equipo	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4
1	2. sumando cada una de las operaciones. 2 a). Concualquier otra letra, las expresaria $x+7$ o $x+14$ para tener de dos expresiones. 2 b). Con cualquier mayuscula. 2 c). $x+y+z$ como un pequeño ejemplo ya que se pueden usar otras letras.	3. podríamos ir haciendo de suma en suma y al tener el total podríamos expresarlo de una manera diferente. 3 a). Podríamos hacer $A+B+C+D+E$ o al tener el resultado.	Pues no sale dicho resultado ya que $7+8+9+15+22$ son *61* y los números anteriores se quedan atrás ya que deberían usar punto decimal y estaríamos cerca ya que unos infinitos son más grandes que otros infinitos dando a entender que solo nos acercaríamos y usaríamos $a_1x+b_1x+c_1x+d_1x+e_1x$
2	$11+18+25$ sumándolos en hilera 2 a) $x+18+25$ porque es lo correcto. 2 b) $x+18+y$ 2 c) $x+18+y$	La buscaría de modo algebraico matemático. 3 a). $x+y+z+e+z=$	Sumando todos los números de cada ventanilla.
3	$11+18+25=54$ 2 a) 5 2 b) 4	45 3 a) si	

	2 c) suma		
4	2. Buscaríamos el número que nos diera 54 2 a) $x + 14 + 7 + 8$ 2 b) 14 2 c) sumarlo o multiplicarlo	Restarlos y dividirlos 3 a) $5\sqrt{5}$ $x + 7x + 14x + 13x + 15 = 59$	~~Ninguna~~ $x + 7 + 14x + 13x + 15 = 59$
5	11, 18, 25 porque sumándolos 11, 18, 25 dan 54 2 a) $x + 18 + 25$ 2 b) y 2 c) buscar calcular y sumar	Pues primero me pondrían a pensar que sí abarca del 6, podrían ser los otros números que siguen 7, 8 y los de abajó 14 y 21. 3 a) $6 + x + y + z + l =$	La de 5

Con base en los resultados que se muestran en la tabla anterior podemos detectar la forma en que contestaron los equipos. Se hace una interpretación de las respuestas de los alumnos, y se considera si influyó o no lo que están viendo en clase.

Se observa que en la respuesta a la pregunta 2, tres equipos buscaron que números les podrían dar 54 y dos equipos solo expresaron que buscarían que números al sumarlos les podría dar el resultado, pero ningún equipo expreso explícitamente qué es lo que realizaría para llegar a este resultado.

En la respuesta a la pregunta 2 inciso a), dos equipos utilizaron el ejemplo de la pregunta 2 para poder plantear lo que se les pide ya que como se menciona que el menor de los tres números los denotaremos con x, esto lo utilizaron los niños para plantear como quedaría la expresión y así lo que hicieron fue que quitaron el número menor y lo sustituyeron por la letra x, lo que podemos notar es que los estudiantes trataron de expresar lo que se les pedía, pero podemos percatarnos que necesitan de un ejemplo concreto para poder abordar lo que se les está pidiendo, así todavía no logran llegar a una generalización.

Otro equipo mencionó que se podía escoger cualquier letra para nombrar el número de en medio y posteriormente pone que lo podían expresar como $x + 7$ o $x + 14$, en esta parte se cree que el investigador influyó en la respuesta que dio el equipo ya que preguntó, pero cómo quedaría la expresión para el segundo número e intento hacer que generalizaran el procedimiento que hicieron para calcular los números.

Mientras que los otros dos equipos dieron respuestas que nos demuestran que no comprendieron lo que se les pedía y que tampoco preguntaron, con ellos la investigadora tuvo que tratar de ver como ayudarlos para que entendieran lo que tenían que hacer.

Para la pregunta 2 b) las respuestas estuvieron más variadas ya que por ejemplo ahora solo un equipo tomo el ejercicio dos para dar respuesta a esta pregunta y lo que hizo fue sustituir el número mayor por una letra dejando así el primero y el último número con una letra y el de en medio lo expreso con número. En este equipo a pesar de que no mencionan cómo se relacionaría este número con el primero o con el segundo número de la ventana, tienen la idea de como representar un número que no conocen.

Mientras que otro equipo solo mencionó que se puede expresar con cualquier literal y otro solo anotó una letra, estos equipos también conocen o tienen una idea de cómo representar un número que no conocen, pero aun así no expresan al igual que el otro equipo como estaría relacionado con el primer número para de esta manera generar los otros.

Otro equipo solo pone el número 14, esto se interpreta como que ellos lo ponen porque le preguntaron a la investigadora como era esa pregunta y la investigadora trato de que se dieran cuenta de cómo se podían ir generando los números partiendo de un número.

Para la pregunta 2 c) los alumnos contestaron de la siguiente manera dos equipos propusieron una expresión matemática, uno de ellos utilizó la respuesta que dio en las preguntas anteriores y otro solo la expresó con letras para cada número, mientras que los otros tres equipos solo pusieron las operaciones que se tienen que hacer. Lo anterior nos puede decir que ningún equipo logró llegar a explicar cómo se generan los números partiendo de uno, pero aún así dan tintes de identificar lo que es una incógnita y cómo presentarlo de manera algebraica.

Para la pregunta 3, un equipo explicó como obtendría los 5 números, pero partiendo de un número en específico y no de cualquiera, mientras que otros tres equipos solo mencionaron como podrían hacerlo por ejemplo diciendo que sumarian número a número, creo que ningún equipo logro llegar a obtener el procedimiento que se tiene que hacer para obtener los números de la ventana.

Cuando se les pidió que expresaran de forma algebraica lo anterior, esto es, la suma de los cinco números, ellos anotaron cinco letras sumándose y dos de ellos expresaron el signo igual, pero no anotaron nada después de él, esto es porque ellos tienen la necesidad de que esa operación sea igual a algo, aunque no saben con qué.

Por otro lado, un equipo, como ya se había mencionado en el análisis pone una respuesta muy parecida a la que se esperaba, pero se cree que esto fue por que al finalizar las actividades la investigadora resolvió los problemas para la institucionalización.

Para la última pregunta solo un equipo llegó a dar la respuesta esperada, mientras que otro de los equipos dice que no se puede llegar a la respuesta y creo que es porque no consideraron que la ventana se podía poner de otra forma, mientras que otros equipos solo mencionaron que pondrían las ventanas para ver con cual da la respuesta, pero no dan una respuesta en concreto. Lo que paso en esta parte es que no se logró que los alumnos identificaran correctamente para que les pudieran servir las expresiones que encontraron y tampoco llegaron a comprender del todo cuál era su incógnita.

Lo que podemos ver acerca de las respuestas brindadas por los estudiantes, es que en algunos casos puede que las respuestas dadas estén influenciadas por lo que están viendo dentro del aula, pero también por comentarios o explicaciones que dio la investigadora.

6.2.3 Fase de Validación

Cuando terminó el tiempo programado para las actividades por equipo se procedió a pasar a la fase de validación, la cual consistía en que pasaran dos equipos al pizarrón y explicaran como resolvieron los ejercicios. Para esta fase pasaron los equipos 1 y 2.

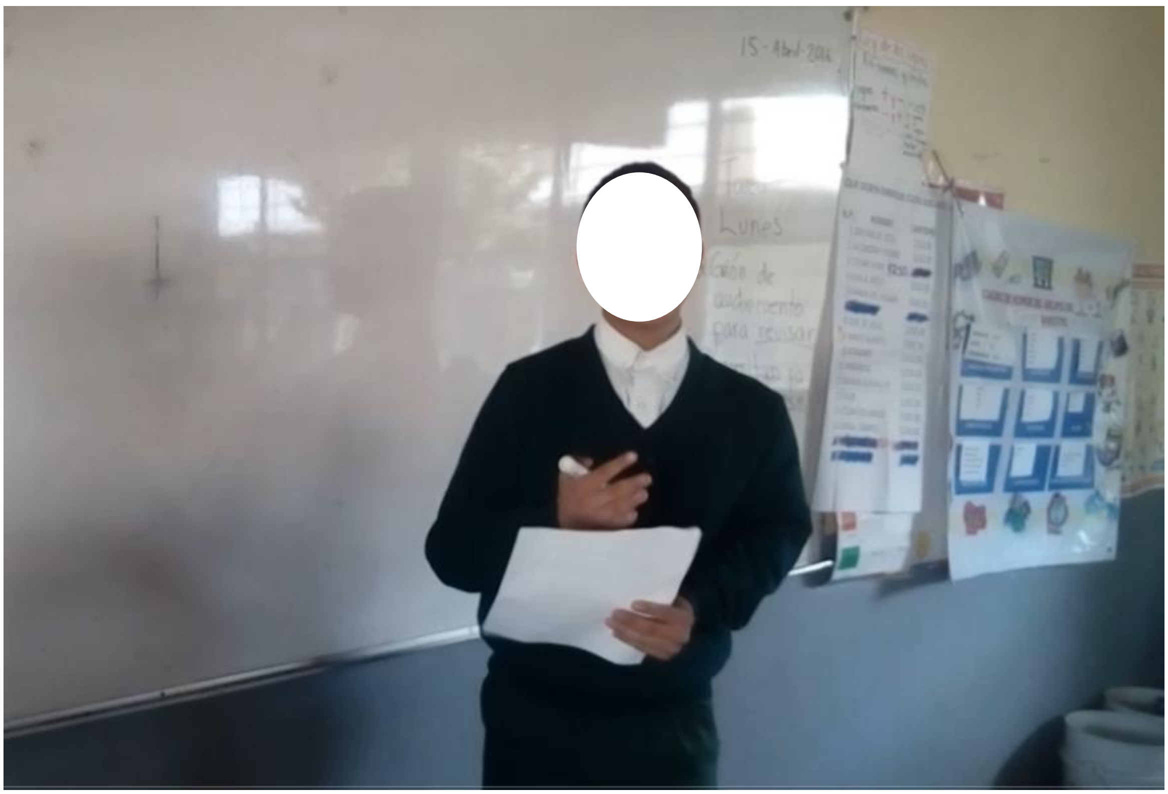


Ilustración 26: Alumno del equipo 1 exponiendo

En esta parte el integrante del equipo 1 acaparó la explicación y casi no dejó que su otro compañero explicara lo que ellos habían hecho, ya que casi siempre interrumpía a su compañero, para el dar su idea.

Para el ejercicio 2 ambos niños estuvieron de acuerdo en que los números que darían la suma serían 11, 18 y 25, pero el del equipo uno menciona que ellos comenzaron poniendo la ventana en los números que estaban entre el 20 y 30 y de esta manera fueron moviendo la ventanilla hasta llegar a la respuesta.

Mientras que para el ejercicio 2 a) el integrante del equipo 2 contestó lo siguiente:

- **Alumno Equipo 2 (AE2):** si el menor de los números se denota como x ¿cómo expresarías el siguiente número?, yo lo expresaría como mmm como en una ecuación (escribe su expresión en el pizarrón $x + 18 + 25$)

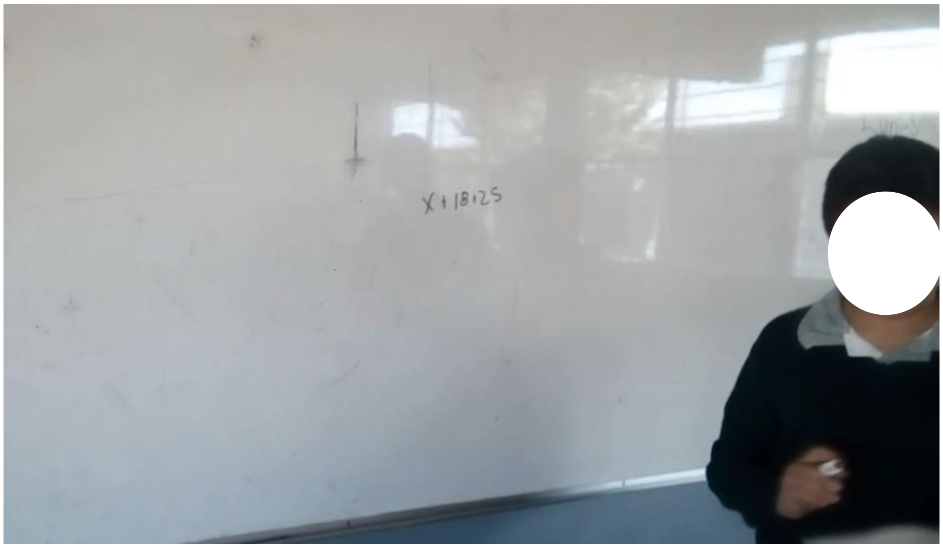


Ilustración 27: Alumno del equipo 2 exponiendo.

- **Investigadora:** y porque utilizaste esos números
- **AE2:** porque solo los fui sumando y aquí nos está diciendo que lo debemos representar como *x*.
- Mientras que el equipo 1 menciona lo siguiente:
- **AE1:** y también teníamos que tener en cuenta que por ejemplo tenemos aquí todo lo que viene siendo el calendario y el mes ¿verdad?, entonces lo que nos daría la suma de estos dos (señalando 18 y 25), vendría siendo *x+7* o *x+14* lo cual nos vendría dando lo que vendría siendo como *x+7* o elevado... a no… si más 7… o… *x+14* lo cual nos acercaría más al resultado final.

Con estos argumentos podemos darnos cuenta que el equipo 1 entendió como se obtendrían los demás números, pero de todos modos no logró generalizar el procedimiento ya que como vemos, cuando la investigadora le pregunta como quedaría la expresión general para realizar la suma él no supo qué hacer con las expresiones que proponía. Por otro lado, se puede ver que AE2 tenía la idea de que debía proponer una ecuación para tratar de llegar al resultado. Los procedimientos y razonamientos que utilizan, dan muestra de que los alumnos ven los procesos algebraicos como solución, sin embargo sus argumentos no son todavía muy maduros.

- **Investigadora:** y si quisieran sacar la suma de los tres números si ya tienen las tres expresiones como las anotarían
- **AE1:** pues
- **AE2**: como una ecuación
- **AE1:** pues se puede demostrar de diferentes maneras ya que no todas las maneras vendrían siendo de manera correcta, pero de todas formas serviría para expresarla tal como lo puede ser la manera algebraica como con las *x, y* de manera y así, también lo podemos expresar de manera he, de que otra manera lo podemos expresar (le pregunta AE2)
- **Investigadora**: pero por ejemplo si utilizan estas dos (refiriéndose a *x+7* y *x+14*) y la de *x* como sacarían la expresión total para sacar un número utilizando estas dos y *x* digamos que se tendría que hacer para sacar la suma de los tres bueno de lo que dan los tres, o sea ustedes saben que con estos pues nada más suman 8, 15 y 22 y les va a dar algún número, pero si no saben los números y nada más tienen las expresiones que es lo que se hace.

Con esto podemos observar que es posible que los alumnos utilicen el álgebra para operaciones sencillas, pero no para hacer combinaciones de números desconocidos.

- **AE1:** podríamos ir buscando de número en número aunque vendría siendo algo tardado, aunque también podríamos ir sacando lo que vendría siendo como uno lo que lógicamente no podría ser capaz ya que si lo hacemos 1más 7 vendría siendo 8 y si tenemos solamente el resultado vendría siendo más lógico no buscar en los números más bajos sino más bien ir buscando en la variación que podríamos sacar de todo esto, como lo podría ser con el 8 que si le sumamos 7 nos da 15 y si a 15 le sumamos 7 de nuevo tenemos 22 igual que aquí en el mes y si a 22 le sumamos 7 nos daría un total de 29 y nos daría el total del resultado.

Con todo lo anterior, podemos notar que el alumno entendió como se generaban los demás números partiendo de uno, sin embargo, no les es posible explicar la relación entre ellos de manera algebraica, pues los problemas propiciaron que vieran a cada número independiente del otro.

Para el ejercicio 3 realizaron diferentes intentos para encontrar la expresión matemática, utilizando letras para nombrar a los números desconocidos.

Para la última pregunta la investigadora le pidió a un equipo más que dijeran lo que les había dado de resultado, ya que fue este equipo el único que llego a la respuesta correcta.

El equipo 1 mencionó que la única forma de llegar a la respuesta es tomando números con punto decimal, pero es necesario recalcar que de todos modos tomaba la ventana con 5 espacios. Mientras que el equipo 2 también mencionó que sería la ventanilla 2, aunque cuando se les preguntó que cómo lo hicieron y qué números serían los que nos hicieran llegar al resultado no supieron que contestar.

- **Investigadora:** haber a ustedes que les dio (le pregunta al equipo 2) para que les diera 59, ¿qué hicieron?
- **Equipo 2:** pues sumamos los números de cada ventana
- **Investigadora:** que ventana les dio como resultado, entonces. (Uno de los integrantes del equipo hace con señales la forma de la ventana dos)
- **Investigadora:** ¿cuál la dos? ¿Y qué números fueron?

El niño que estaba contestando no sabía ni lo que estaba haciendo ya que era uno de los que no habían trabajado durante la actividad.

Mientras que el equipo 5, mencionó que era la ventanilla dos y nos dio los números, pero la manera en que lo determinaron, no era la que se esperaba ya que se quería que trataran de usar las expresiones que encontraron.

- **Investigadora:** a ustedes que ventanilla les dio (le pregunta al equipo 5) y que números les dio.
- **Equipo 5:** la de 5, y los números son el 15, 16, 17, 9 y 2
- **Investigadora:** ya ven si se pudo determinar que ventanilla era. Era la ventanilla 2, la que tenía los 5 espacios

El que no se llegara a un consenso por parte de los estudiantes, en la validación permitió retomar lo que cada equipo propuso para llevar acabo la institucionalización y la validación.

6.2.4 Institucionalización

La investigadora comienza planteándoles un ejemplo a los alumnos de cómo podrían "adivinar" el número que sigue, para la ventana 1, si solo se sabe el primero de ellos.

¿Qué harían si saben que el primer número es el 5 y quisieran saber cuáles serían los otros tres números?, a lo que un alumno contesto pues le sumaria 7 para obtener el segundo ¿y porque le sumarias 7? (pregunto la investigadora) porque son los números que se le tienen que sumar, para llegar al número que está abajo del 5.

¿Y para sacar el tercer número qué harían? o ¿cómo lo determinarían?, pues al segundo se le sumarían 7 por lo mismo del anterior, muy bien y respecto al primero cuanto se le sumaria. Pues sería sumar 14 por los 7+7.

Entonces si nombráramos a 5 como x, esto es que, no conocieran el número como lo expresarían, si ya dijeron que para calcular el segundo número se le tiene que sumar 7 al que ya se tiene, entonces cómo lo anotaríamos.

Un estudiante dice como lo que anotó Braulio hace rato en el pizarrón, con $x+7$, creó. Muy bien y ahora cómo sacarían el tercer número.

Pues a eso que tiene se le tiene que sumar otros 7, si, entonces cómo queda la expresión. Sería $x+7+7$, bueno sería $x+14$, muy bien.

Entonces para realizar la expresión general se tendrían que sumar las tres expresiones que ya se obtuvieron y esto no quedaría de la siguiente manera:

$$x + (x + 7) + (x + 14)$$

Maestra por que quedó eso, preguntó un niño. La investigadora le explica que es porque cada parte de esta expresión representa uno de los números de la suma, por ejemplo la x que no está dentro del paréntesis es el primer número de los tres que aparecen en la ventanilla, esto sería el 5 que mencionábamos anteriormente y el $x+7$ nos van a dar el segundo número, por ejemplo si sustituyen el 5 en la x vamos a ver que el resultado sería 12 que si vemos en el calendario este es el número que se encuentra bajo el 5 y por lo tanto el $x+14$ nos daría el tercer número de la ventanilla, igual que en el anterior se puede sustituir la x por el 5 para que verifiquen que si daría el tercer número dentro de la ventanilla.

Un niño pregunto y esto puede ser para cualquier número o solo para el 5, sí esto puede ser para cualquier número, si quieren podemos checarlo con otro número, por ejemplo, el 11, ……. si les funcionó, contestaron que sí.

Muy bien, ahora la expresión que obtuvimos también la podemos anotar de la siguiente manera:

$$3x + 21$$

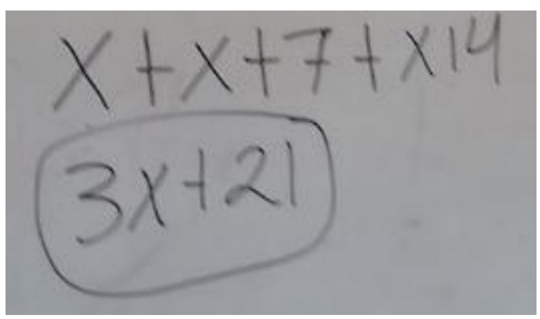


Ilustración 28: Expresión anotada por la investigadora

Lo anotamos así porque sumamos todas las x y también todos los números, ¿está bien? Esta va a ser nuestra expresión número 1, de acuerdo.

Ahora bien, vamos a ver cómo quedó la expresión del ejercicio 3. Entonces la investigadora les comienza a preguntar que como se va obteniendo cada número, hasta que se llegó a la siguiente expresión, esta parte ya fue más fácil porque la mayoría de los alumnos ya habían comprendido como sacar la expresión por el ejercicio anterior.

$$5x + 49$$

Muy bien ahora cómo creen ustedes que podemos saber con cuál de las dos ventanas vamos a obtener el resultado que nos pide el ejercicio 4.

Muchos niños dijeron que colocando las ventanas sobre el calendario y sumando los números, hasta llegar a los números que nos dan 59.

Esa es una forma les comentó la investigadora, pero hay otra manera, en la que nos vamos a tardar menos y es un poco más fácil.

Haber ustedes saben que es una igualdad y varios niños comentan que es que dos cosas sean iguales, muy bien y en matemáticas una igualdad es establecer una relación entre dos expresiones algebraicas que representan el mismo número. Entonces lo que vamos a realizar ahora es igualar las dos expresiones que obtuvimos con 59.

$$3x + 21 = 59$$

$$5x + 49 = 59$$

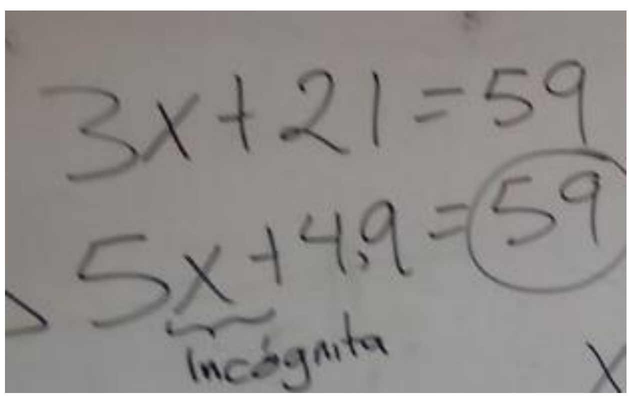


Ilustración 29: Expresión dada por la investigadora para el ejercicio 4

Lo anterior es una igualdad la cual se va a satisfacer solo para un determinado valor de la variable, esto es que cuando se sustituye la variable por ese valor se obtiene para los dos miembros el mismo valor. Lo anterior es a lo que llamamos ecuación.

La letra *x* dentro de la ecuación la llamaremos incógnita y es el valor que deseamos obtener. Para saber cuál de las dos ventanas es la correcta, lo primero que se tiene que hacer es resolver las ecuaciones anteriores y ver cuál de las dos nos da un número entero y la que nos proporcione esto es la ventana correcta.

Para corroborar lo anterior la investigadora procedió a resolver las ecuaciones.

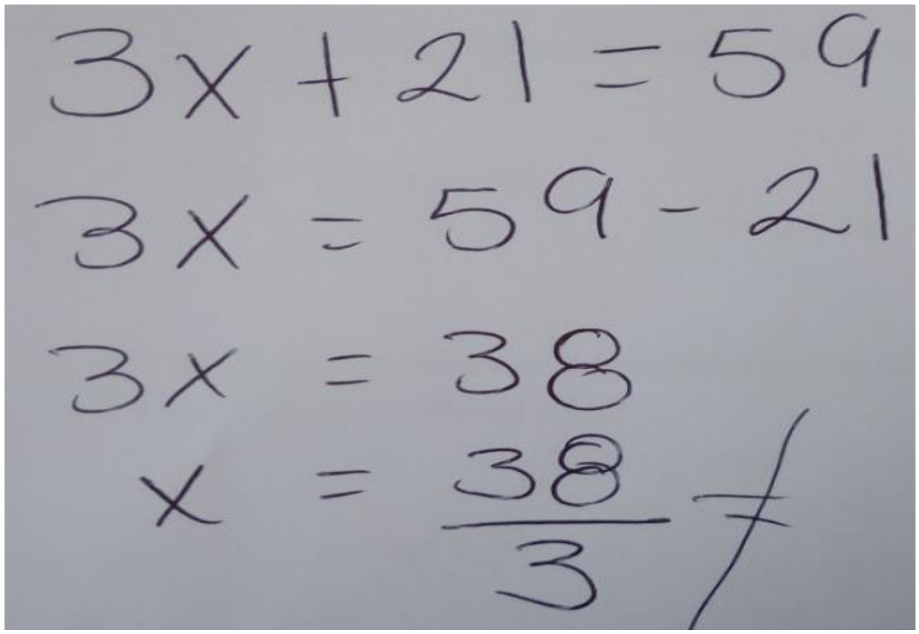


Ilustración 30: Resolución de las ecuaciones

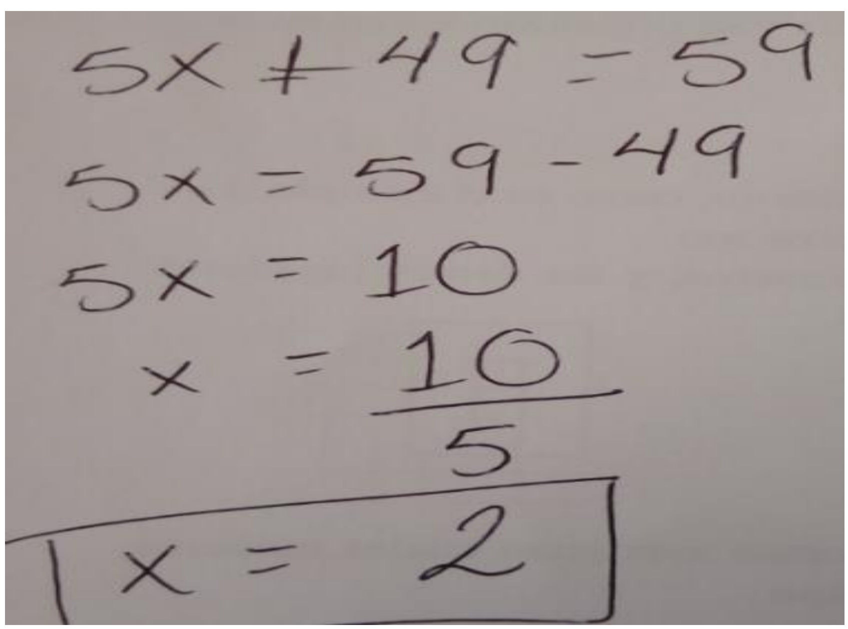


Ilustración 31: Resolución de ecuación

Las ecuaciones que vimos se llaman ecuaciones de primer grado con una incógnita y estas solo tienen un valor que va hacer que se cumpla la igualdad.

A manera de conclusión se observó que la mayoría de los estudiantes no contestaron de la manera que se tenía prevista en nuestro análisis a priori, aunque cabe resaltar que algunos si dieron señales de lo que se esperaba ya que lograron plasmar una expresión para lo que se pedía, pero no tenían una interpretación clara de cómo realizar o como expresar lo que se pedía, ya que si entendieron de manera aritmética el procedimiento.

Una de las limitantes que se tuvo en la aplicación de la secuencia fue el tiempo ya que como no era la investigadora la profesora titular del grupo se tuvo que adecuar a los tiempos que le permitió la institución.

Tabla 6: Confrontación del análisis a priori y a posteriori

Fase/Análisis	Acción	Formulación	Validación	Institucionalización
Análisis a priori	Que los alumnos encuentren la relación que existe entre los números en la ventana. Se prevé que algunos lo harán a prueba y error	Se espera en esta actividad que el alumno proponga estrategias aritméticas las cuales pueden conducir a la aplicación del álgebra. Se espera que algunos alumnos puedan encontrar relaciones entre los números. Por ejemplo, que se den cuenta que si colocan de manera vertical la ventana y conocen el número superior los otros dos se pueden obtener a partir de que al número conocido le sumen 7 y 14; de la misma manera si colocan la ventana de manera horizontal pueden obtener los otros dos números sumándole 1 y 2. También se espera que en el último de los ejercicios los alumnos intenten igualar las expresiones con el resultado de la suma, o que lo realicen mediante prueba y error.	Con esto se espera que los estudiantes reflexionen acerca de cómo plantear las expresiones matemáticas que se les piden y si alguno no logró llegar a estas que vea cómo se pueden resolver.	Si en la actividad 4 ningún equipo llega a igualar la expresión con el resultado el profesor les dirá que pasa si se realiza esto y conforme les vaya explicando el procedimiento, les dirá que es una igualdad, una incógnita, una ecuación y como se resuelve. Y si algún equipo llega a plantear la ecuación el profesor tomará lo realizado por este equipo para definir los conceptos antes mencionados.

Análisis a posteriori	Se observó que la mayoría de los estudiantes realizó el juego mediante prueba y error, a pesar de que era lo que se esperaba, también se esperaba que lograran entender como podían obtener los números que estaban dentro de la ventanilla	Los alumnos empezaron por emplear estrategias aritméticas, aunque en su mayoría los cálculos se hicieron mediante prueba y error.	Los estudiantes presentaron sus estrategias para la solución de las actividades, aunque sus argumentos no se basaron en métodos algebraicos.	Se retomaron los ejercicios trabajados con la finalidad de presentar una estrategia de solución alternativa a la empleada por los alumnos, resaltando la importancia del uso de las literales.
Mejora que se pueden realizar	Con este análisis se puede contemplar mejoras para futuras aplicaciones, tales como que se les explique que el primer número va a permitir encontrar el resto, así, si ven a ese primero como x , puedan plantear que los otros son $x(x+7)$ y no como dos números diferentes $x+y$.			

Capítulo 7 Conclusiones

Se van a enunciar las conclusiones a las que se llegó en este estudio con base en un análisis reflexivo a cerca de la secuencia planteada y de los resultados obtenidos de la misma.

Con las respuestas brindadas por los estudiantes podemos ver cuáles son los conocimientos previos que tenían, a los que logran llegar y también que tanto se ven reflejados los temas que están viendo en su curso.

En la secuencia se puede observar que faltaron algunas actividades intermedias entre la uno y la dos ya que no se logró que los alumnos reflexionaran profundamente acerca del procedimiento para encontrar los números que dieran el resultado de la suma que se les planteaba.

Se esperaba que les resultara más fácil el tema debido a que ya se había abordado el tema con anterioridad, pero nos dimos cuenta que hasta cierto punto resultó un inconveniente ya que estaban sugestionados por lo ya visto y la actividad no fluyó de la manera que se esperaba. Pero a pesar de eso se puede ver que algunos equipos dan nociones de expresar algebraicamente el problema planteado en la secuencia. Ellos lograron identificar que un número desconocido lo podían expresar mediante una literal. A pesar de esto los alumnos sentían la necesidad de que se les dieran los datos completos para poder resolver la situación planteada, por ejemplo, para generalizar o dar respuesta alguna de las preguntas planteadas ellos utilizaban la pregunta anterior o partían de algún número para de esta manera llegar a dar solución a lo planteado.

También se detectó que los alumnos están acostumbrados a trabajar de manera que el profesor les explica lo que van a realizar, da ejemplos y ellos solo repiten lo que el profesor les dio y muchas veces no tratan de buscar ellos solos la solución. Por esto el alumno no le da significado a lo que está haciendo ya que solo trabaja mecánicamente lo que el profesor les plantea. Lo anterior es que el alumno no siente o no ven la necesidad de utilizar el conocimiento que se les quiere enseñar para la resolución de la situación.

En cuanto a nuestra pregunta de investigación ¿Cómo la implementación de una secuencia didáctica diseñada para que el alumno identifique incógnitas puede ayudarlo a formular expresiones matemáticas en la resolución de problemas?, podemos ver que los alumnos si lograron identificar cual era la incógnita, pero no lograron plasmar una ecuación de manera apropiada, aunque sí lograron establecer algún simbolismo matemático para las actividades planteadas en la secuencia.

En cuanto a nuestros objetivos particulares es importante mencionar la prueba piloto que se aplicó, esta se llevó a cabo con alumnos diferentes a los que se presentó la secuencia final. Para esta prueba se tenían contempladas otras actividades diferentes, estas se tuvieron que cambiar debido a que durante la aplicación se observó que los alumnos tuvieron dificultades para entender los problemas planteados y por lo tanto no podían dar una solución viable.

Las actividades se intentaron modificar manteniendo los problemas base, y se les pidió a otros alumnos que lo leyeran para comprobar si ya los podían resolver, pero esto no pasó seguían teniendo dificultades para comprender lo planteado. Por lo anterior se decidió buscar otra secuencia y modificarla para así poderla aplicar.

Respecto al objetivo planteado "Adaptar e implementar una secuencia didáctica en la que los estudiantes de primero de secundaria por medio de un juego formulen expresiones matemáticas en la resolución de problemas verbales que implican la identificación de incógnitas", se obtuvo un resultado muy favorable, debido a que los alumnos pudieron formular alguna expresión matemática dentro de la situación planteada, aunque no lograron llegar a lo esperado muchos dieron muestra de que entendían lo que se les estaba pidiendo y tenían la idea de como obtenerlo. Lo anterior se puede observar al ver las respuestas que varios equipos dan, ya que ellos lograron plantear algunas expresiones algebraicas, en las cuales relacionaban las incógnitas. Por tal motivo se puede decir que los alumnos lograron plantear expresiones matemáticas.

Para futuras aplicaciones es necesario realizar algunas adecuaciones a la secuencia, para que de esta manera se dé el aprendizaje de manera más fluida y no tan forzada, sobre todo entre la actividad 1 y la 2.

Por otra parte, se tiene que tratar de realizar la secuencia en más tiempo, por eso es recomendable que la secuencia la aplique el profesor titular del grupo, para que así él pueda acomodarse de acuerdo a las sesiones que crea necesarias.

Los resultados de esta investigación podrían ayudar a los profesores, para que tengan una alternativa para enseñar el tema, aunque todavía se les realizaran más adecuaciones.

Reflexión

Este trabajo de investigación me dio la oportunidad de analizar mi práctica docente, de indagar, reflexionar y criticar la misma, y como resultado de esto explorar diferentes alternativas de enseñanza. Con esto también me pude dar cuenta que la investigación no solo es la herramienta del científico, sino que los profesores también pueden utilizarla para encontrar nuevas maneras de enseñar o de mejorar las ya existentes.

Por otro lado, me hizo darme cuenta que es muy complicado cambiar la manera de trabajar tanto del alumno como del maestro, pero con el tiempo y la práctica se puede hacer un instrumento de trabajo el reflexionar y tratar de mejorar lo que se hace.

A lo largo de mis cursos en la maestría, los maestros me hicieron ver que lo más importante es estar en constante preparación, para de esta manera estar siempre al día de lo que ocurre en la sociedad y en los avances en educación.

Referencias

Arenas, B. (2014). *Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas* (tesis doctoral). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Barnett, R, Ziegler, M y Byleen, K. (2000) *Álgebra*. México: McGraw-Hill, 2000

Brousseau (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*, (2), 33- 115.

Brousseau, G. (1999). Educación y Didáctica de las matemáticas, en Educación Matemática, México.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study* (Vol. 7). Editorial Libros del Zorzal.

Caballero, A., Martínez, L. y Bernárdez, J. (1996). *Matemáticas segundo curso.* México: Esfinge

Cardona, N. (2007). *Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de resolución de problemas.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Honduras

Cedillo Avalos, T. E., Cruz Oliva, V., Vega Ramírez, E., Díaz Barriga Casales, A., & Kieran, C. (2006). *Ecuaciones de primer grado*. Banco Interamericano de Desarrollo, 2006.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (2).

Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Revista Uniciencia*, 28(2), 15-44.

Contreras, M. (2004). Las matemáticas de ESO y Bachillerato a través de los juegos. *Extraído el*, *8*(04), 2013.

De Faria, E. (2006). *Ingeniería didáctica*, Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. 2, Universidad de Costa Rica.

Díaz, J. J., Martínez, A. L., & Soto, M. A. (2007). Comprensión de la función de dos variables en problemas verbales de álgebra. *Enseñanza e Investigación en Psicología*, *12*(2), 259-275.

Díaz-Levicoy, D. (2010). Sistema de ecuaciones y resolución de problemas: una propuesta de enseñanza y aprendizaje. *REPEM.* Recuperado de: *http://funes.uniandes.edu.co/4991/1/CB_39.pdf*

Erazo, J. y Ospina, L. (2013). *Una estrategia didáctica para la enseñanza de ecuaciones lineales con una incógnita en el marco de la pedagogía conceptual.* Recuperado de http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/229.pdf

Espinoza, H., García, S., & García, M. A. (2000). Fichero de Actividades Didácticas Matemáticas (secundaria).

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas* (tesis) Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4736

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones., C. Parra, I. Saiz (comp.), Buenos Aires, Paidós Educador*.

García, V. (2014) *Una secuencia didáctica que integra GeoGebra para la enseñanza de ecuaciones lineales en grado octavo* (Doctoral dissertation). Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira.

González, F. y Diez, M. (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en álgebra. Propuesta para la interacción didáctica. *Revista complutense de Educación*, *13*(1), 281-302.

Hernández, P., & Filloy, E. (2014). Dificultades en las ecuaciones lineales en segundo grado de educación secundaria.

Koedinger, K. R., Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (1999). A Developmental Model of Algebra Problem Solving: Trade-offs between Grounded and Abstract Representations.

Koedinger, K. R., Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2008). Trade-Offs Between Grounded and Abstract Representations: Evidence From Algebra Problem Solving. *Cognitive Science*, *32*(2), 366-397.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas* (Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México).

Maffey, S. (2006). *Estudio sobre la meta cognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de las ecuaciones lineales* (tesis doctoral).

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Dipartimento di Matematica ed Aplicación, Universisitá Palermo (Italia). Extraído el*, *22*.

Monroy, P. y García, J. (2011) *Comprensión y conceptualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones lineales*. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa. Recuperado de: http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_05/1959.pdf

Mosquera, W. (2014) *Diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método "Flipped Classroom" o aula invertida. Estudio de caso en el grado noveno de la Institución Educativa Guadalupe del municipio de Medellín* (tesis doctoral). Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (tesis doctoral), Universidad de La Laguna.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y Propuestas*. (p. 59-71). Buenos Aires: Paidós

Quintero, J. R. M., Moreno, G. A., & Barrios, A. A. A. (2014). Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación media general. *Educere*, *18*(59), 119-132.

Ramírez, M., Castillo, R., Vergara, D., Flores, M. y Azpeitia, J. (2015). *Matemáticas 1.* México: Fernández

Rodríguez-Domingo, S. y Molina, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 111-118). Granada, España: Editorial Comares.

Rojano, T., & Martínez, M. (2009). From concrete modeling to algebraic syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance. In *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University* (Vol. 5, pp. 235-243).

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2*(2), 61-74.

Segura, M. (2004) Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *RELIME*, *7*(1), 49-78 México D.F.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

Trigueros, M., Lozano, M., Schulmaister, M., Sandoval, I., Jinich, E. y Cortés, M. (2013). *Matemáticas 1*. México: Santillana.

Vargas, A., Barquera, E., García, E., y García, J. C. (2013). *Matemáticas 1*. México: SM

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 341-359.

Zarza, K. (2015). La computadora, amiga de las matemáticas. Una propuesta sobre como reforzar los conocimientos de ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones con Excel. *Congreso Virtual sobre Tecnología, Educación y Sociedad*.

Anexos 1

Juego

LO TUYO Y LO MIO

El problema de la falta de comprensión, por parte de los alumnos, de los enunciados verbales, es una de las primeras causas de los errores que se cometen en la resolución de problemas algebraicos. En este sentido, este juego contribuye a dar significado concreto a frases del tipo de las que aparecen en las 20 tarjetas del juego.

Las tarjetas que se presentan van, desde enunciados muy sencillos:

Tengo lo mismo

hasta otros, más complicados y de difícil comprensión para muchos alumnos:

No me quites 8, que entonces te quedas con 1 más que yo.

Material:

• Un tablero numerado del 1 al 49.

• Dos dados con 6 caras.

• 10 fichas de distinto color para cada jugador.

• Una colección de 20 tarjetas con enunciados verbales.

Desarrollo del juego:

Juego para tres o cuatro jugadores, que juegan por turno.

• Sale quien menor puntuación obtiene en la primera tirada.

• El primer jugador tira los dados y el siguiente saca una de las 20 tarjetas que permanecen dadas la vuelta en la mesa.

• Con el número obtenido con los dados por el otro, “lo tuyo”, el jugador que ha sacado la tarjeta calcula el número que corresponde a “lo mío”, utilizando la frase de la tarjeta, colocándose entonces ese resultado en el tablero y devolviendo la tarjeta al montón.

• Si el número obtenido no está en el tablero, el jugador pierde su turno.

• Si la casilla ya está ocupada, el jugador pierde su turno.

• Si el jugador contrario observa que la operación ha sido incorrecta, se anula la tirada y pasa el turno.

• Gana quien consiga colocar todas sus fichas.

Por ejemplo, un alumno tira los dos dados y obtiene 7 con ellos. El siguiente saca una tarjeta del montón que dice:

> **¡Vaya, lo tuyo es sólo**
> **la cuarta**
> **parte de lo mío!**

lee la tarjeta y razona, dirigiéndose al alumno que ha tirado los dados:

− Si LO TUYO ha sido 7, LO MIO será cuatro veces LO TUYO, es decir, 28. colocando, seguidamente, su ficha en la casilla 28 del tablero.

A continuación, tira los dados a su vez, sacando una tarjeta el siguiente y prosiguiéndose el juego de la misma forma.

Después de haber jugado varias veces con las 20 tarjetas del ejemplo, es interesante plantear, en una puesta en común, la simbolización de las expresiones que aparecen en las tarjetas.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

• **Contenido de las tarjetas:**

Tengo lo mismo	¡Vaya!, si tienes 4 veces menos que yo.	
Lo mismo es el doble de lo tuyo	Lo mio es 6 veces lo tuyo	Tengo el triple de lo tuyo, más 20
Entre los dos tenemos 47	Si te diera 25, tendríamos lo mismo	Tengo el doble de lo tuyo, más 15
Lo mío es el triple de lo tuyo	Te gano por 27	La diferencia entre lo Tuyo y lo mío es 45, pero yo te gano.

La diferencia entre lo tuyo y lo mío es 23, pero yo tengo más	Tienes la mitad que yo	Tengo 2 menos que 4 veces lo tuyo
Si te diera 15, tendríamos lo mismo	No me quites 8, que entonces te quedas con 1 más que yo	¡Vaya!, lo tuyo es sólo la cuarta parte de lo mío.
Si te consigues 6 más, tendrás el doble que yo.	Vamos a buscar 2 más cada uno, así tendré justo el doble que tú.	¡No me compares!. Tres veces lo tuyo sólo llega a la mitad de lo mío

Anexo 2

Una compañía teléfonos ofrece celulares que operan con tarjetas de diferentes precios, y cobra $ 6.00 pesos por minuto (o fracción).

Si te regalan un teléfono celular de dicha compañía con una tarjeta de $ 200.00, que te da un crédito de $ 300.00:

12. ¿A lo más cuántos minutos puedes hablar con este crédito?
13. ¿Cuánto gastas de tu crédito de $ 300.00 si haces una llamada de 5 minutos?
14. ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300.00 si hablas 17 minutos?
15. Si tu crédito está en $ 120.00, ¿a lo más cuántos minutos has usado de tu crédito de $ 300.00?
16. Construye una fórmula que te permita determinar cuánto gastaste de tu crédito en una llamada si conoces el número de minutos que hablaste.
17. Reescribe la fórmula que construiste en el inciso anterior, considerando que el gasto por la llamada fue de:
    c) $150.00
    d) $240.00
18. Completa la siguiente tabla:

Minutos hablados	**Crédito que queda de los 300 pesos (S)**
5	
10	
17	
	$ 60.00
	$ 30.00

19. Construye una fórmula que te permita determinar cuánto crédito te queda de los $ 300.00 si conoces el número de minutos que hablaste.
20. Reescribe la expresión algebraica que construiste en el inciso anterior, considerando que el crédito que te queda de $ 300.00 es de:
    c) $30.00

d) $252.00

La compañía ha cambiado las condiciones del cobro de las llamadas, y ahora cobrará por el tiempo que dure la llamada, es decir, las fracciones de minuto las va a cobrar por lo que corresponda, manteniendo la tarifa de $6.00 por minuto.

21. Usa la fórmula que escribiste en el inciso 5) para responder las siguientes preguntas:
    d) *¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de $ 45.00?*
    e) *¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de $ 69.00?*
    f) *¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de $ 31.50?*
22. Usa la fórmula que escribiste en el inciso 8), para contestar las siguientes preguntas:
    d) *¿Cuántos minutos hablé si me quedan $ 243.00 de mi crédito de $ 300.00?*
    e) *¿Cuántos minutos hablé si me quedan $ 165.00 de mi crédito de $ 300.00?*
    f) *¿Cuántos minutos hablé si me quedan $ 7.50 de mi crédito de $ 300.00?*
23. Inventa un problema con cada una de las siguientes fórmulas:

a) $4.5x + 30 = 156$

b) $900 - 5x = 717.50$

Anexo 3

Universidad Autónoma de Zacatecas

"Francisco García Salinas"

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemática Educativa con Orientación en Nivel Secundaria

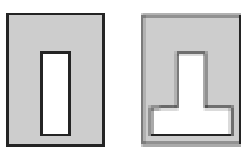
Nombres: ____

Escuela: ____

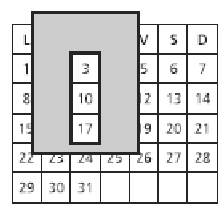
Grado y Grupo: _________________ Fecha: ____________

Actividad 1

1. Reúnete en equipo
   a) El jugador 1 coloca la ventana 1sobre el calendario, como en el ejemplo. Los demás jugadores no deben saber cuáles números son.
   b) El jugador 1 dice cuál es la suma de los números, y los demás jugadores tratan de averiguar los números del jugador 1.



I II



   c) Luego el jugador 2 hace lo mismo y los demás averiguan cuales números son y así cada uno de los integrantes del equipo.

Jugador	Suma	Números

2. ¿Cómo averiguarías los números del jugador 1 si la suma fuera 54? Explícalo

____

a) Si el menor de los tres números se denota con *x*, ¿cómo expresarías el siguiente número?

____

b) ¿y el mayor de los tres?

____

c) ¿Cuál sería la expresión matemática para encontrar la suma de tres números cualesquiera del calendario?

____

3. Coloquen ahora la ventana 2 y observen que abarca 5 números. Si sólo conocieran uno de ellos, encuentren la manera de obtener la suma de los cinco números mediante una multiplicación y una suma

____

____

a) Escriban una expresión algebraica para obtener la suma de los cinco números, si conocen sólo uno de ellos.

____

4. El número 59 corresponde al resultado de una suma. ¿Cómo puedes saber cuál ventana se utilizó?

____

____

Anexo 4

Transcripción de las exposiciones de los alumnos.

Alumno Equipo 1(AE1): pues posiblemente algunas de las posibilidades obviamente las que vendrían siendo las más cercanas como lo vendrían siendo el…por qué no los puse aquí

Otro alumno: el *x*

AE1: por ejemplo, también deberíamos haberlos puesto como empezamos por los 20´s hasta los irnos retrasando hasta los cuál era (fue a su lugar para ver que números había puesto) que sería 11, 18 y 25 lo cual nos dio la suma total de 54 y así.

Investigadora: pero ahora el dos donde sacaron… ¿cómo sacaran las expresiones matemáticas que se les pide?

AE1: ese te toca a ti

Investigadora: una y una

Alumno Equipo 2 (AE2): si el menor de los números se denota como *x* ¿cómo expresarías el siguiente número?, yo lo expresaría como mmm como en una ecuación (escribe su expresión en el pizarrón)

Investigadora: y porque utilizaste esos números

AE2: porque solo los fui sumando y aquí nos está diciendo que lo debemos representar como *x*

AE1: y también teníamos que tener en cuenta que por ejemplo tenemos aquí todo lo que viene siendo el calendario y el mes verdad, entonces lo que nos daría la suma de estos dos (señalando 18 y 25) vendría siendo $x+7$ o $x+14$ lo cual nos vendría dando lo que vendría siendo como $x+7$ o elevado a no si más 7 o $x+14$ lo cual nos acercaría más al resultado final.

Investigadora: y si quisieran sacar la suma de los tres números si ya tienen las tres expresiones como las anotarían

AE1: pues

AE2: como una ecuación

AE1: pues se puede demostrar de diferentes maneras ya que no todas las maneras vendrían siendo de manera correcta, pero de todas formas serviría para expresarla tal como lo puede ser la manera algebraica como con las *x, y* de manera y así, también lo podemos expresar de manera he, de que otra manera lo podemos expresar (le pregunta AE2)

Investigadora: pero por ejemplo si utilizan estas dos (refiriéndose a *x+7* y *x+14*) y la de *x* como como sacarían la expresión total para sacar un número utilizando estas dos y *x* digamos que se tendría que hacer para sacar la suma de los tres bueno de lo que dan los tres, o sea ustedes saben que con estos pues nada más suman 8, 15 y 22 y les va a dar algún número, pero si no saben los números y nada más tienen las expresiones que es lo que se hace.

AE1: podríamos ir buscando de número en número aunque vendría siendo algo tardado, aunque también podríamos ir sacando lo que vendría siendo como uno lo que lógicamente no podría ser capaz ya que si lo hacemos 1más 7 vendría siendo 8 y si tenemos solamente el resultado vendría siendo más lógico no buscar en los números más bajos sino más bien ir buscando en la variación que podríamos sacar de todo esto, como lo podría ser con el 8 que si le sumamos 7 nos da 15 y si a 15 le sumamos 7 de nuevo tenemos 22 igual que aquí en el mes y si a 22 le sumamos 7 nos daría un total de 29 y nos daría el total del resultado.

Investigadora: haber que pusieron en el inciso c) de respuesta en el c)

AE1: en el c) dice 7cual seria la expresión matemática para encontrar la suma de los tres números cualquiciera del calendario, por ejemplo mi equipo y yo hemos decidido que podríamos usarlo de manera algebraica como *x+y+z* (la investigadora les pide que anoten en el pizarrón la expresión que están diciendo), aunque también podríamos utilizarlo de manera algebraica que vendría siendo pues con cualquier letra del abecedario podría ser *b* pudiera ser *e, l m* y así tanto algebraicamente para sacar el área, formulas, etcétera.

Investigadora: y ustedes que pusieron (le pregunta al otro equipo)

AE2: también algebraicamente

Investigadora: y cómo lo expresaron ustedes

AE2: *x+18+y*

Investigadora: muy bien siéntense niños.

Investigadora: que contestaron en la pregunta 4

Equipo 1: pues dicho resultado no sale ya que 7+8+9+15+22nos dan el resultado de 61y los números anteriores se quedan atrás vendría siendo la combinación y nos daría un número que quedaría atrás que vendría siendo 56, además solamente estaríamos acercándonos ya que hay infinitos más cerca que otros infinitos, lo único que podríamos hacer es irnos acercándonos y de esta manera lo único que nos quedaría por hacer es usar $a \cdot x + b \cdot x + c \cdot x + d \cdot x + e \cdot x$ lo cual nos daría un resultado y así irnos acercando cada vez más e ir quitando algo de la variación y así acercarnos al total bueno al verdadero total que sería el resultado de toda la suma y de esa manera llegar al resultado de 59.

Investigadora: pero entonces no les dio ninguna ventana a ustedes

Equipo 1: no

Investigadora: haber a ustedes que les dio (le pregunta al equipo 2) para que les diera 59, ¿qué hicieron?

Equipo 2: pues sumamos los números de cada ventana

Investigadora: que ventana les dio como resultado, entonces

Uno de los integrantes del equipo hace con señales la forma de la ventana dos

Investigadora: ¿cuál la dos? Y que números fueron

El niño que estaba contestando no sabía ni lo que estaba haciendo ya que era uno de los que no habían trabajado durante la actividad.

Investigadora: a ustedes que ventanilla les dio (le pregunta al equipo 5) y que números les dio.

Equipo 5: la de 5, y los números son el 15, 16, 17, 9 y 2

Investigadora: ya ven sise puedo determinar que ventanilla era. Era la ventanilla 2, la que tenía los 5 espacios