UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO, UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ALUMNOS DE SECUNDARIA INCORPORANDO MATERIAL DIDÁCTICO MANIPULABLE

Tesis que para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta

LESEM Roxana Hernández Castruita

Directores de tesis

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Dr. Plácido Hernández Sánchez

Dra. María Mercedes Palarea Medina

Zacatecas, Zacatecas Diciembre 2016

Este trabajo ha sido realizado gracias al
apoyo financiero otorgado por el
Consejo Nacional de Ciencia y
Tecnología (CONACyT) de
Septiembre de 2014 a Julio de 2016.

No. de Becaria: **331893**

Dedicatoria

"El presente proyecto lo dedico especialmente a mis padres, que hicieron todo lo posible para darme la oportunidad de superarme, a mis hermanos por su apoyo moral a lo largo de mi carrera y a Everardo, que me dio la motivación, sustento y amor que necesitaba para lograr con éxito esta importante meta en el ámbito profesional y personal. Gracias a todos ellos, que me dan confianza, seguridad y que me inspiran para seguir adelante."

Agradecimientos

A mis padres

Por todo su apoyo y gran esfuerzo para

que cumpliera mi meta profesional

A Everardo

por su amor incondicional

y motivación para seguir adelante

A la M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Por ser guía y soporte en este proyecto

Al Dr. Plácido Hernández Sánchez, Dra. Mercedes Palarea, Dr. Martín Socas Robayna,

MTI. Mónica del Rocío Torres Ibarra y Dra. Carolina Carrillo

por su aportación, orientación, sugerencias y paciencia

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 10 del mes de noviembre del año 2016, la que suscribe LESEM Roxana Hernández Castruita, alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 34155822; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado titulado *"La desigualdad del triángulo, una secuencia didáctica para alumnos de secundaria incorporando material didáctico manipulable"* bajo la dirección de la M en C Nancy Janeth Calvillo Guevara, el Dr. Plácido Hernández Sánchez y la Dra. María Mercedes Palarea Medina.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Roxana Hernández Castruita

Zacatecas, Zac., Diciembre de 2016

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre ***“La desigualdad del triángulo, una secuencia didáctica para alumnos de secundaria incorporando material didáctico manipulable”*** y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la **C. Roxana Hernández Castruita**, egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, por lo que se **encuentra listo para su presentación y defensa**.

Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Dr. Plácido Hernández Sánchez

Dra. María Mercedes Palarea Medina

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tablas

RESUMEN

En este documento se aborda una de las problemáticas que tienen los estudiantes de secundaria referente a la dificultad en el aprendizaje de algunos conceptos y propiedades geométricas. Para atender dicha problemática se propone el rediseño de una secuencia didáctica (Espinoza, H., García, S. y García, M. A., 2000, pp. 94-95) para el estudio de la desigualdad del triángulo. Dicha secuencia incorpora material didáctico manipulable, procurando que éste actúe como mediador entre el concepto y el aprendizaje de los estudiantes. El marco teórico en el cual se encuentra sustentada nuestra investigación, es la Teoria de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau durante los años setenta. La metodología que se utiliza es la Ingeniería Didáctica desarrollada por Artigue, la cual propone cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación. Se concluye que la implemetación de material didáctico para el tema de la desigualdad del triángulo tuvo un impacto positivo en el en proceso de aprendizaje de los alumnos, ya que se logró que la mayoría del grupo aprendiera el tópico matemático y que mediante éste, pudieran comprobar sus respuestas y dar argumentos.

Palabras Clave: Secuencia didáctica, material didáctico manipulable, desigualdad del triángulo.

ABSTRACT

In this document one of the problems with high school students regarding the difficulty in learning concepts and geometrical properties addressed. To address this problem the redesign of a didactic sequence for the study of the proposed triangle inequality. This sequence includes manipulatives, ensuring that it acts as a mediator between the concept and student learning. The theoretical framework which is underpinned our research, is the theory of didactic situations developed by Brousseau during the seventies. The methodology we use is developed by the Engineering Teaching Artigue, which proposes four phases: preliminary analysis, design and a priori analysis, experimentation and subsequent analysis and validation. Further we conclude that the implemetation of teaching materials for the subject of the triangle inequality had a positive impact on the learning process of students, as it was achieved that most of the group to learn the mathematical topic and that through this, could prove your answers and give arguments.

Key words: Teaching sequence, manipulatives, triangle inequality.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de la geometría son procesos importantes que se podrían considerar como una oportunidad tanto para los alumnos como para los profesores al momento de encontrarse en el contexto escolar. Permiten la implementación de diversas estrategias que contribuyen al desarrollo de las clases y que pueden ser enriquecidas mediante la utilización de materiales didácticos manipulables, logrando de esa forma que los alumnos manejen los tópicos matemáticos.

Nuestro problema de investigación tiene que ver con el hecho de que existe dificultad en el aprendizaje de la geometría y a pesar de reconocer la importancia de implementar el material didáctico en las clases, por lo general, se deja de lado su uso, por ejemplo, Gamboa y Ballesteros (2010) concluyen en su investigación que la enseñanza de la geometría regularmente se presenta de manera tradicional, lo que significa que sus tópicos son vistos como una serie de definiciones, ejemplos y fórmulas.

Por lo anterior, el principal objetivo planteado es implementar una secuencia didáctica para alumnos de secundaria que incorpore material didáctico manipulable en el tema de la desigualdad del triángulo, de donde surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué efecto tendrá el material didáctico en el aprendizaje de la desigualdad del triángulo en alumnos de secundaria?

El contenido de este trabajo está organizado en seis apartados, en los cuales se describen puntualmente las definiciones que ayudan a entender lo que se realizó en el mismo, así como los pasos que se siguieron para el rediseño de la situación didáctica, desde los análisis a priori hasta la validación de los datos.

El capítulo I "Planteamiento del problema" consta de tres subtemas: la motivación del estudio, la justificación del mismo, los antecedentes y el planteamiento del problema de investigación. El primero tiene la intención de expresar los motivos por los cuales se tomó la decisión de trabajar en la implementación de una secuencia didáctica con alumnos de secundaria, y las razones por las que se consideró importante la implementación de material didáctico manipulable, esto como consecuencia de la experiencia de la autora. El segundo muestra la revisión de antecedentes que se realizó, con la finalidad de dar cuenta de las investigaciones que se han hecho en torno al tema que se desarrolló. Por ultimo, el tercero contiene aspectos importantes de la problemática encontrada en los antecedentes revisados, de los cuales surge nuestro problema pregunta de investigación, el objetivo general, los objetivos particulares y la hipótesis.

En el capítulo II “Fundamentos teóricos”, se describen las definiciones de la Teoría de Situaciones Didácticas consideradas importantes para poder desarrollar nuestra investigación, por ejemplo, situación didáctica y a-didáctica, devolución, variable didáctica, situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, entre otras, además se presenta un ejemplo en el que se describen éstas últimas. El segundo de los subtemas, es el de material didáctico manipulable, en el que se explican los materiales didácticos que serán utilizados en este trabajo. Tenemos por último, el tercer subtema, los fundamentos matemáticos, en los que se define la desigualdad del triángulo y se presenta su demostración.

El siguiente capítulo, “Metodología”, se presenta la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, y se divide en cuatro secciones, análisis preliminares, la concepción y el análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación. En este mismo sentido se presenta una planeación respecto a las sesiones que fueron destinadas para la puesta en marcha y análisis de la situación didáctica.

El capítulo IV “Análisis preliminares, concepción y análisis a priori”, contiene dos subtemas, el primero, análisis preliminares, cuyo contenido son los resultados obtenidos del análisis didáctico, epistemológico y cognitivo, realizados para el rediseño de la situación didáctica y el análisis a priori en el que se consideran los supuestos y los probables en torno a la experimentación de la situación didáctica; es decir, se prevé lo que los alumnos realizarán en su proceso de aprendizaje y lo que la profesora-investigadora realizará para la enseñanza de la desigualdad del triángulo.

El contenido del capítulo V “Análisis a posteriori y validación”, muestra los datos obtenidos de la experimentación de la situación didáctica y su validación, haciendo una confrontación entre el análisis preliminar y el análisis a posteriori.

Por último en las “Conclusiones”, se presenta la interpretación de la autora sobre los datos que se obtuvieron durante el desarrollo del trabajo, desde el diseño hasta el momento de la experimentación y obtención de resultados, así como una reflexión en cuanto a la experiencia de haber estudiado la Maestría en Matemática Educativa.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Motivación del estudio

El interés por los materiales didácticos y la importancia de utilizarlos en las clases de Matemáticas surgió desde mi preparación como docente en la Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de Durango. En la práctica docente que se realiza en las escuelas secundarias, en diversas situaciones y dependiendo del tema impartido que realicé, observé en los alumnos cierta indiferencia hacia la clase de Matemáticas; fue de esa experiencia de donde surgió la inquietud acerca del impacto que tendría en ellos la incorporación de materiales didácticos en el tema de la desigualdad del triángulo para complementar la clase y para lograr que los educandos llegaran a comprender este tema.

La experiencia que tuve en esos momentos me permite decir que en la mayoría de las situaciones en las que además del libro de texto y las actividades impresas, incorporaba materiales didácticos manipulables, los alumnos se interesaban y tenían la curiosidad de saber para qué se utilizarían en clase esos materiales, permitiendo en primer lugar, llamar su atención para luego adentrarlos en el tema matemático.

Por ejemplo en las clases de geometría utilizaba palillos de madera para la elaboración de figuras tridimensionales (cuerpos geométricos). Éstas también eran construidas con cartoncillo. Cuando se disponía de tiempo los alumnos ayudaban, pero cuando no era posible, los elaboraba personalmente prevío a presentarlos en clase, de forma que los alumnos pudieran simplemente manipularlos.

Esta experimentación me permitió ver en la geometría un escenario natural para incorporar materiales didácticos manipulables, puesto que podemos tener una representación visual de varios de sus conceptos, ésta es la razón por la que se pretende utilizar materiales didácticos manipulables en el estudio de la desigualdad del triángulo. Para ello se retoman algunas secuencias didácticas que favorecen para lograr el objetivo del aprendizaje y así se mejore la enseñanza del conocimiento matemático.

1.2 Antecedentes

En esta sección se presenta una revisión de investigaciones relacionadas con algunos conceptos geométricos en el nivel de secundaria. La organización de estos antecedentes se realiza iniciando con las investigaciones referidas a la utilización de software en geometría, luego con las relacionadas con las percepciones de los estudiantes respecto a la enseñanza de la geometría, continuando con las que consideran que es conveniente centrar la atención en la formación de futuros profesores en el área de geometría y por último con las referentes a la utilización de materiales didácticos en las clases de geometría.

En la investigación de Alemán (2009) titulada "La geometría con Cabri: una visualización de las propiedades de los triángulos", en educación secundaria, el objetivo fue explorar las propiedades de los triángulos favoreciendo la visualización, experimentación y descubrimiento de nuevas relaciones geométricas a través del programa de geometría dinámica Cabri. La metodología consistió en cuatro fases; en la primera de ellas, donde aplicaron un examen diágnostico, el autor concluyó que la escasa noción de los alumnos sobre triángulos (conceptos como vértices, lados, ángulos, medidas y su clasificación) no les permitió llevar a cabo el proceso de visualización en el problema que se les planteó, por lo que tuvieron que retomar dichos conceptos durante el desarrollo de actividades posteriores.

En la segunda fase se realizó un taller en el que se introdujo el programa Cabri (utilización de comandos básicos), para luego continuar con la tercera fase, que fue la de implementación. Para ello, proporcionaron a los alumnos guías de laboratorio con actividades sobre construcciones, con las que pudieron hacer mediciones, rotaciones, etc., El autor concluyó que la utilización del programa Cabri fue de interés general y ayudó a los alumnos a manipular las propiedades mediante la vizualización y el uso del programa. La cuarta fase consistió en retroalimentar y evaluar los conocimientos que los alumnos adquirieron, mediante construcciones hechas en Cabri.

En el estudio realizado por Castellanos (2010) sobre geometría dinámica aplicada a la visualización y razonamiento sobre construcciones geométricas, se reportó que el razonamiento de los estudiantes no es el apropiado y que esto se debe a que en geometría ellos no se enfrentan a situaciones problemáticas. Estos estudiantes de educación magisterial con ayuda del software GeoGebra, lograron desarrollar habilidades visuales.

Así, la importancia de la percepción de los estudiantes de educación secundaria respecto a la enseñanza de la geometría, es un foco importante que permite tener una visión general sobre lo que en realidad se les está trasmitiendo a los alumnos dentro del salón de clases. En este sentido, Gamboa y Ballesteros (2010), concluyen en su investigación que dichas percepciones muestran que la enseñanza de la geometría se presenta de manera tradicional, lo que significa que sus tópicos son vistos como una serie de definiciones, ejemplos y fórmulas, conduciendo a los estudiantes a no encontrar la relación de su estudio, con su contexto.

La importancia de centrar la atención en los futuros profesores fue considerada por Godino, Gonzato y Fernández (2010), quienes realizaron un estudio sobre los conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática (¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?). Ellos encontraron que los estudiantes daban respuestas deficientes que revelan que no hay un razonamiento adecuado que les permita justificar.

Por su parte, Valenzuela (2012), mediante una encuesta realizada a los profesores en la que pretendía indagar sobre el dominio de los materiales manipulables para la enseñanza de la geometría, su utilización en la clase y el conocimiento de los mismos, obtuvo que los profesores utilizan materiales sin estar preparados para hacerlo, pero que tienen el conocimiento de que dichos materiales ayudan a la comprensión del tema.

En este mismo sentido, Villarroel y Sgreccia (2011), en su artículo sobre los materiales didácticos concretos en primer año de Secundaria, realizan como primer paso, la identificación de los materiales didácticos y, después, una carcaterización para encontrar las habilidades geométricas que permiten desarrollar, esto con ayuda del modelo de Van Hiele. Concluyen que el uso responsable de los materiales didácticos los vuelve facilitadores de las habilidades geométricas.

1.3 Planteamiento del problema de investigación

1.3.1 Problemática

La problemática de la enseñanza de la geometría está relacionada con varios aspectos. Por una parte, de manera epistemológica, desde los griegos, la naturaleza dual de la geometría ha sido afirmada y discutida: ¿La geometría estuvo o está relacionada con lo que nuestros sentidos perciben o con ideas intelectuales? (Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer, 2006).

Las necesidades de la sociedad han estado involucradas con el desarrollo de esta área de las Matemáticas; por ejemplo, ha sido utilizada en la arquitectura, la agricultura y en las artes, pero, algunas culturas se han enfocado en estudiar sus conceptos y relaciones lógicas.

Esta dualidad empírica-teórica de la geometría lleva a un rol problemático en su enseñanza. Por ejemplo, Duval (1988, 1998, 2000 citado por Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer, 2006) señala que el problema básico de la enseñanza de la geometría es porque ésta involucra tres clases de procesos cognitivos: visualización, razonamiento y construcción. Cada uno de estos cumple una función epistemológica específica, pero ellos debieran estar conectados para el aprendizaje de la geometría.

No obstante, después de algunos años de experiencia docente, Alemán (2009) advierte que la enseñanza de la geometría en el nivel de educación secundaria, queda en segundo plano. Al respecto, Gamboa y Ballesteros (2010) señalan que algunos profesores priorizan la enseñanza de las Matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos geométricos hacia el final del curso, lo que implica en varios casos la exclusión de estos temas y su atención de manera superficial.

Puesto que la enseñanza de esta disciplina se ha limitado a reconocer figuras y dibujarlas en el papel (Gamboa y Ballesteros, 2010), es notorio que existe el desconocimiento o dificultad en la comprensión de algunos conceptos y propiedades geométricas cuando los estudiantes llegan a la educación secundaria (Alemán, 2009), incluso, en un estudio realizado con estudiantes para profesor de Matemáticas (Godino, Gonzato y Fernández, 2010) se encontró que aunque todos reconocieron que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era igual a 180°, casi la mitad de ellos no da ninguna justificación.

Es por esta razón que reconocemos que el estudio de las propiedades de los triángulos es una oportunidad para mejorar el aprendizaje de la geometría con alumnos de secundaria. En particular nos enfocaremos en el estudio de la desigualdad del triángulo, ya que al considerar este tema como un núcleo importante, permitirá que los estudiantes no sólo reconozcan dicha propiedad, sino que logren comprenderla y apropiarse del conocimiento.

Para lograr que los alumnos se apropien del conocimiento es conveniente la utilización de materiales didácticos como mediadores entre los alumnos y el profesor (Área, Parcerisa y Rodríguez, 2010, citados en Valenzuela, 2012), por lo anterior se puede decir que es importante que los profesores incorporen este tipo de materiales para que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje y de esa forma tratar de evitar que los alumnos tengan dificultades al apropiarse de los conceptos.

Las investigaciones expresan que los profesores deben conocer acerca de qué materiales se pueden utilizar, cómo y con qué fin; es decir, el docente debe primero saber incorporarlo a las actividades cuidando que cumpla las expectativas de la clase y tratando de ligar los conceptos involucrados, para que de esa forma diversifique sus estrategias de enseñanza.

Además, coincidimos con Cascallana (1988, p. 29) que sostiene que “las explicaciones verbales a toda la clase sobre conocimientos matemáticos no son el recurso didáctico idóneo”. Con esto consideramos necesario que el profesor utilice otras estrategias de enseñanza que estén orientadas a potenciar el aprendizaje de los alumnos.

En este mismo sentido, Barrantes (2002) sugiere que al considerar al alumno como el sujeto central de su aprendizaje, el libro de texto se revela como un recurso insuficiente por su concepción estática, es por esto que se deberían incluir otro tipo de materiales para el estudio de la geometría.

1.3.2 Problema

La enseñanza de la geometría se ha limitado a reconocer figuras y dibujarlas en el papel (Gamboa y Ballesteros, 2010) y es notorio que existe el desconocimiento o dificultad en la comprensión de algunos conceptos y propiedades geométricas cuando los estudiantes llegan a la educación secundaria (Alemán, 2009).

Algunos profesores toman como recursos principales para la enseñanza de la geometría el libro de texto y las explicaciones verbales, recursos que se revelan insuficientes para el aprendizaje según Cascallana (1988) y Barrantes (2002). Es decir, se deja de lado el uso de material didáctico manipulable, en particular, para el estudio de la desigualdad del triángulo.

Por lo anterior nuestro problema de investigación revela que existe dificultad para el aprendizaje de la geometría, y a pesar de reconocer el valor del material didáctico como mediador entre el concepto y el aprendizaje, se deja de lado su uso.

- **Pregunta de investigación**

¿Qué efecto tendrá el material didáctico para el aprendizaje de la desigualdad del triángulo en alumnos de secundaria?

- **Objetivo general**

Implementar una secuencia didáctica que incorpore material didáctico manipulable para favorecer el aprendizaje de la desigualdad del triángulo en el nivel Secundaria.

- **Objetivos particulares**
  - Rediseñar una secuencia didáctica para el estudio de la desigualdad del triángulo, utilizando material didáctico manipulable.
  - Seleccionar o diseñar el material didáctico que se utilizará en la situación didáctica.
  - Realizar un análisis preliminar en el que se rescaten elementos para ser tomados en cuenta para el rediseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de la desigualdad del triángulo, utilizando material didáctico manipulable.
  - Experimentar la secuencia didáctica con la utilización de material didáctico manipulable en el tema de la desigualdad del triángulo.
  - Analizar y validar la secuencia didáctica aplicada.
- **Hipótesis**

La puesta en marcha de una secuencia didáctica con material didáctico manipulable podría ayudar a que los alumnos de secundaria aprendan la desigualdad del triángulo.

1.3.3 Justificación

La importancia de utilizar los materiales didácticos en la enseñanza, ha sido un aspecto importante a considerar en las investigaciones, entre ellas, tenemos las de Pérez (1994) y Socas (1999), (citados por Barrantes, 2002, p. 86) quienes consideran que las tareas en el aula deben tener un comienzo basado en el uso de los recursos y del material didáctico:

> (…) la manipulación de objetos, la visualización de ciertas imágenes, la construcción de formas etc. son un rico manantial de conjeturas y una

> herramienta de diagnóstico de las ideas y conocimientos previos que los estudiantes tienen ante una determinada tarea (Pérez, 1994, p. 76).

La función mediadora de los materiales didácticos podría ayudar en la apropiación de los conceptos facilitando el proceso de enseñanza-aprendizaje, el profesor seleccionará el material adecuado que permita al estudiante comprender los temas que se le están presentando (Area, Parcerisa y Rodríguez, 2010, citados en Valenzuela, 2012). También fomentan la interpretación y socialización de información (Villarroel y Sgreccia, 2011 p. 73).

Los materiales, como se menciona, podrían motivar a los alumnos y ayudar al profesor a cambiar sus estrategias de enseñanza, por lo tanto, al utilizarlos de manera que sea un mediador entre en concepto y el aprendizaje y elegir los adecuados, podría contribuir al buen desarrollo de las clases y se podrían lograr los objetivos de aprendizaje respecto al tema estudiado.

Se considera que la importancia de diseñar y experimentar secuencias didácticas orientadas hacia el logro del aprendizaje de los alumnos, debiera ser una preocupación de los docentes, por lo cual se sugiere que se haga uso de las investigaciones disponibles y que brindan los medios para planear respecto a ciertos aspectos que permitirán obtener resultados favorables en la práctica.

CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El contenido de este capítulo está dividido en dos secciones. La primera contiene las bases y fundamentos referentes a la Teoría de Situaciones Didácticas, que es el marco teórico que utilizamos en nuestra investigación. La segunda parte es el Material didáctico manipulable y en la tercera, están los Fundamentos Matemáticos referentes a la desigualdad del triángulo "en un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia". Se mencionan las propiedades de los triángulos, así como los conceptos que se involucran en dicha propiedad y la demostración de la misma.

2.1 Teoría de Situaciones Didácticas

El saber matemático sufre una serie de transformaciones para llegar a ser un saber enseñado. Al constituirse como saber sabio, difícilmente puede ser comprendido por otras personas. Para llegar hasta las aulas y considerar el concepto como tal, se dejan a un lado los aspectos que dieron paso a su surgimiento, por qué, para qué, cómo, qué se quería resolver y qué preguntas dieron paso a su origen. En este mismo sentido Brousseau (1986) sostiene que:

> esta presentación enmascara el "verdadero" funcionamiento de la ciencia, imposible de comunicar y de describir fielmente desde el exterior, para poner en su lugar una génesis ficticia. Para hacer más fácil su enseñanza, aísla ciertas nociones y propiedades del tejido de actividades en el cual tuvieron su origen, su sentido, su motivación y su empleo. Las transpone al contexto escolar (p. 5).

Así, el matemático realiza una despersonalización y descontextualización del saber, dejando a un lado sus reflexiones, pensamientos y procedimientos, con el fin de que las demás personas conozcan los resultados obtenidos. Estas personas a su vez, realizan una interpretación con el fin de utilizarlos. Para Brousseau:

> Ésta no cesa, a su vez, de ser modificada por los mismos motivos, hasta el punto de que su sentido cambia profundamente: la transposición didáctica se desarrolla en gran parte en la comunidad científica y se prosigue en los medios cultos (más exactamente, en la noosfera) (Brousseau, 1986, p. 6).

Estas transformaciones que sufre un saber, del saber sabio al saber a enseñar y del saber a enseñar al saber enseñado, en muchas ocasiones pareciera que se está jugando al teléfono descompuesto, ya que cuando un saber a enseñar se convierte en un saber enseñado (el que llega a las aulas), se aleja de sus orígenes e inicios, por lo que la trasposición didáctica busca que se haga notar que existe una brecha que en realidad separa considerablemente el saber sabio del saber enseñado, buscando también que los profesores sean conscientes de ello.

Para determinar los contenidos matemáticos que llegarán al aula, el saber sabio está influenciado por muchos actores que contribuyen en la elección de los mismos, esto se lleva a cabo en la noosfera, que es definida por Chevallard (1998, p. 9 citado en De Faria, 2006, s.p.) como:

> El conjunto de las fuentes de influencias que actúan en la selección de los contenidos que serán parte de los programas escolares y que determinan todo el funcionamiento del proceso didáctico… Forman parte de la noosfera: científicos, profesores, especialistas, políticos, escritores de textos y otros agentes de la educación.

Por otro lado, el profesor realiza un trabajo complementario al del matemático: "producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos. Estos van a convertirse en conocimientos del alumno; es decir, una respuesta natural, en unas condiciones relativamente particulares, condiciones indispensables para que tengan un sentido para él" (Brousseau, 1986, p. 7).

Por esta razón es frecuente que los profesores busquen estrategias de enseñanza que les permitan crear las condiciones necesarias para que los estudiantes construyan su conocimiento. Quizá se puede llegar a pensar que la Teoría de Situaciones Didácticas podría estar alejada de la realidad, pero ésta consigue brindar los medios necesarios para describir fenómenos que tienen lugar en las aulas; en ese sentido, puede considerarse como un apoyo para el docente, ya que el proceso de enseñanza-aprendizaje es difícil y requiere de un mayor esfuerzo y sobre todo de la comunicación entre el investigador y el profesor. Los esfuerzos por describir los fenómenos relacionados con la construcción del conocimiento dan lugar a dicha teoría.

Guy Brousseau desarrolla la Teoría de Situaciones Didácticas dentro de la Didáctica de la Matemática de la escuela francesa, como un intento por crear las condiciones necesarias para lograr construir una génesis artificial de los conceptos, que permita a los estudiantes construir y darle sentido a dicho conocimiento, considerando que no se construyen de manera espontánea.

Peres (1982, citado por Gálvez, 2002, p. 6) define esta génesis artificial de la siguiente manera:

> El camino que hemos seguido consiste en construir un proceso de aprendizaje en el que el conocimiento no es ni directa ni indirectamente enseñado por el maestro, sino que debe aparecer progresivamente en el niño a partir de múltiples condicionantes estructurales: es el resultado de confrontaciones con cierto tipo de obstáculos encontrados durante la actividad. Son las múltiples interacciones en el seno de la situación las que deben provocar las modificaciones en el alumno y favorecer la aparición de los conceptos deseados... Si el conocimiento que se quiere que los alumnos aprendan debe aparecer en la exacta medida en que llega a ser un instrumento necesario para adaptarse a una situación problemática (las estrategias utilizadas espontáneamente se revelan ineficaces), todo el esfuerzo del análisis en didáctica debe

> concentrarse en esta situación.

En esta génesis artificial, el profesor crea las condiciones necesarias que permita a los estudiantes construir su conocimiento. Estas condiciones no se refieren a los orígenes epistemológicos de los conceptos, sino que se trata de crear de manera artificial esas condiciones considerando los principios del conocimiento que se requiere que los alumnos aprendan, partiendo de lo que para ellos es de apoyo para llevar a cabo esa construcción, ya que este conocimiento debe responder a los cuestionamientos de los alumnos, permitiendo que ellos le encuentren un sentido.

Esta teoría como menciona Brousseau (1999, citado en Panizza, 2004, pp. 60-61):

> aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir, finalmente, un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores.

La importancia de trabajar con esta teoría, radica en el hecho de que considera importante esa relación que se construye entre el estudiante, el profesor y el medio, todo esto alrededor de un saber. La teoría permite crear esas condiciones que se asemejan a la realidad que se vive en las aulas y además su intención es que alguien aprenda algo. Esto último es lo que la mayoría de los profesores quisieran lograr en sus clases, ya que todo lo que preparan para lograrlo está orientado a ello.

Además, el enfoque constructivista de la Teoría de Situaciones Didácticas considera que:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986, citado por Panizza, 2004, p. 61).

Entonces, se puede decir que el medio es el escenario que prepara el profesor con intenciones didácticas que se dirigen al alumno. Este medio puede estar acercado a la realidad. La interacción entre el alumno y el profesor se lleva a cabo en dicho medio, el cual puede incluir un problema, un texto, un ejercicio o el material didáctico utilizado, cuyo objetivo es crear esas condiciones necesarias que el alumno requiere para construir el conocimiento.

2.1.1 Situación didáctica. Situación a-didáctica

La situación didáctica, es definida por Brousseau (1982b, citado por Gálvez, 2002, p. 42) como

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o

> un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor), con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Dentro de la situación didáctica surgen momentos en los que el profesor se aparta de la situación, dejando al alumno que resuelva un determinado problema, responsabilizándose de su propio aprendizaje; no quiere decir que el profesor se deslinde de la responsabilidad de enseñar, sino que es cuando debe estar pendiente para observar los procedimientos de sus alumnos. Tampoco quiere decir que se quede callado, sino que el profesor debe hablar, pero cuidando lo que dirá, de tal forma que sus comentarios permitan a los alumnos realizar por sí solos la actividad, sin darles pistas o indicaciones sobre lo que deben hacer. La situación a-didáctica es considerada como un momento de aprendizaje y no de enseñanza. Estos momentos son llamados por Brousseau (1986, citado por Panizza, 2004. p. 62) situaciones a-didácticas:

> El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

La situación a-didáctica considera tres aspectos importantes que son parte fundamental de dichas situaciones (Panizza, 2004, pp. 63-65):

1. El carácter de **necesidad** de los conocimientos: la “situación” se organiza de manera tal que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución; la situación “(...) no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende (...)”. La comprensión de esta idea es fundamental para el análisis didáctico de una situación, y en particular para identificar en una secuencia de enseñanza los distintos aspectos a los que se apunta en cada etapa (…).
2. La noción de “**sanción**”: no debe entenderse como “castigo” por una “culpa, o equivocación”. La idea es que la situación debe estar organizada de manera tal que el alumno interactúe con un medio que le ofrezca información sobre su producción. Que el alumno pueda juzgar por sí mismo los resultados de su acción, y que tenga posibilidad de intentar nuevas resoluciones son criterios fundamentales para que -por sí mismo- establezca relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtiene.
3. La “**no intervención**” del maestro con relación al saber.

Esta última está relacionada con la situación a-didáctica, ya que en este momento se requiere que el profesor intervenga, pero cuidando lo que dice.

Como bien se menciona, estos tres aspectos pueden ser considerados en el análisis didáctico, ya que el profesor debería ser conciente de que la situación planteada a sus estudiantes habría de estar encaminada a lograr que ellos tengan esa necesidad de utilizar el conocimiento que se quiere que construyan, para ello requerirá movilizar sus conocimientos previos.

Además la situación planteada con ciertas restricciones, puede evitar la posibilidad de que se dirijan o apliquen otras estrategias o posibles procedimientos que los desvién del objetivo planteado por el profesor.

La importancia de lograr que los alumnos tengan esa capacidad de autocrítica, permite que se cuestionen sobre la elección del procedimiento que decidieron usar y el resultado obtenido, para que puedan analizar si es necesario cambiar de procedimiento o si lograron obtener el resultado correcto.

2.1.2 La devolución

Una vez establecida la importancia y el significado de la no intervención del maestro en la situación a-didáctica, queda aún por comprender que la entrada en una fase a-didáctica es algo que debe gestionar el mismo maestro. Esto dio lugar al concepto de “devolución” desarrollado por Brousseau (1998, citado en Panniza, p. 65):

> La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.

Margolinas (1993, citado por Panizza, 2004, p. 65), realizando un análisis con relación a la participación del maestro en las fases a-didácticas y a la devolución, señala una interpretación falsa de la noción de situación a-didáctica:

> En efecto, no es el silencio del maestro lo que caracteriza las fases a-didácticas, sino lo que él dice. (…) En la devolución el maestro se despoja de la parte de responsabilidad que es específica del saber a enseñar (...).

Destaca que esto no significa que el maestro se retire o se transforme en un espectador. Concluye:

> la devolución parece ser un proceso que se desarrolla durante toda la situación a-didáctica, y no solamente en la fase de establecimiento (...). El maestro es entonces responsable no solamente de una simple disciplina aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del alumno en una relación a-didáctica

> con el problema (...).
>
> (Panizza, 2004, p. 65)

Como bien menciona Brousseau (1986, pp. 16-17) la devolución puede pasar por varias etapas, y no se da solamente al inicio de la situación. Así en la primera de ellas (acercamiento puramente lúdico) el profesor permite que el alumno interactúe con el medio, manipulando los objetos que están a su disposición. Éste aún no se da cuenta que es necesario encontrar esas características que le permiten deducir qué está haciendo de manera correcta y qué es incorrecto, ya que él solo quiere generar una consecuencia, no importa como sea.

En la segunda etapa (devolución de una preferencia), los alumnos comprenden que para todo efecto existe una causa, por lo que si ellos manipulan un objeto, habrá una causa para esa acción; es decir, un resultado.

La tercera etapa (evolución de una responsabilidad y una causalidad) consiste en que de todos los posibles procedimientos ensayados, el alumno elije uno, por lo que debe aceptar que fue responsable de esa elección y sobre todo que ello arrojó un resultado que él mismo causó. También es donde los alumnos piensan sobre el hecho de que hubieran podido elegir otro procedimiento, ya que el que ellos elijieron es una posibilidad de varias para llegar al resultado, así como pensar en cada una de las acciones que siguió, en cómo mejorarlas o sustituirlas. Es entonces cuando se logra que el alumno acepte que es el responsable de ese resultado.

En una cuarta etapa (devolución de la anticipación), es en la que el alumno se da a la tarea de pensar antes de actuar, considerando la relación que existirá entre la decisión que él pueda tomar y el resultado, lo cual tiene que ver con aspectos cognitivos.

Por último en la quinta etapa (devolución de la situación a-didáctica), el alumno debe poder identificar las situaciones en las cuales lo que aprendió le puede ser útil, pero también debe considerar que hay diversas posibilidades de resolverlas, por lo que "la devolución no se hace sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que los caracterizan" (p. 17).

2.1.3 Variable didáctica

Otra noción importante de la teoría es la de **variable didáctica**. Bartolomé y Fregona (s.f, citados por Panizza, 2004 , p. 66): presentan así esta noción en su artículo:

> La noción de variable didáctica, surgida en el marco de la teoría de las Situaciones Didácticas, fue definida a comienzos de la década de los 80, y redefinida más tarde por diferentes autores, entre ellos el mismo Brousseau, (...) Las Situaciones Didácticas son

objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propios de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación. El docente (Brousseau, 1995) "puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, o un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes.

Estas variables didácticas permiten controlar hasta qué punto quiere el profesor que sus alumnos utilicen los conocimientos; es decir, primero presentar las condiciones necesarias para que los alumnos puedan resolver un problema con ayuda de sus conocimientos previos, pero luego, modificar las variables didácticas, propiciar que el problema sea más complejo (o más sencillo) y logra que sus conocimientos sean reestructurados de tal manera que permitan enfrentar dicho problema.

Pueden ser ejemplos de variables didácticas, las cantidades involucradas en un problema y la redacción (la cual puede modificarse con el fin de considerar que los alumnos tengan la necesidad de dejar a un lado los procedimientos anteriores que ahora no resulten convenientes para la resolución).

2.1.4 Tipos de Situaciones

Brousseau (s. f. citado por Gálvez, 2002, pp. 43-44) distingue cuatro tipos de situaciones didácticas, cuya secuencia, en los procesos didácticos que organiza, es la siguiente:

1. Las **situaciones de acción**, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

2. Las **situaciones de formulación**, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

3. Las **situaciones de validación**, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.

4. Las **situaciones de institucionalización**, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Estas situaciones didácticas no necesariamente deben aparecer en ese orden, sino que pueden aparecer en diferentes momentos de la clase, considerando que no son secuenciales, porque puede que después de que los alumnos estén en una situación de validación, pasen de nuevo a una situación de formulación, para comunicar a otros (otros equipos, otro alumno, etc.,) lo que ellos hicieron.

Consideremos un ejemplo que ayude a comprender las implicaciones de cada una de estas situaciones involucradas en la construcción del conocimiento:

Actividad: "¿Cuántos triángulos se pueden construir?"

1. Corten popotes (o tiras de papel) con las longitudes indicadas en la figura y, tomando al azar de tres en tres, formen siete triángulos diferentes. Anoten las longitudes en la **Tabla 1.**

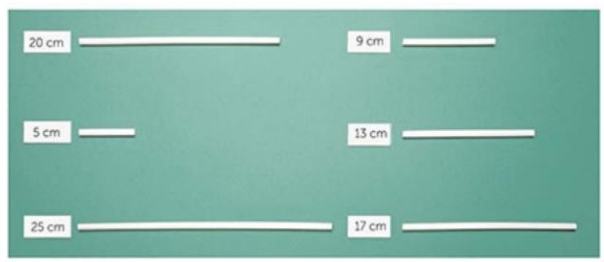


Figura 1. ¿Cuántos triángulos se pueden construir?

Tabla 1. Formando triángulos

Triángulo	Lado M	Lado N	Lado L
1			
2			
3			
4			
5			
6			

7			

Para iniciar con el desarrollo de la actividad, se les proporciona el material a los alumnos, para que de esa forma se logre que los alumnos inicien con la manipulación del material didáctico (los popotes de diversas medidas), observen las herramientas que tienen y exploren el material; es decir, que interactúen con el medio, es entonces cuando ellos se encuentran en una situación de acción.

Luego de lo anterior se lee lo que indica dicha actividad (en este caso "¿Cuántos triángulos se pueden construir?") para que ellos elijan la estrategia que van a utilizar para empezar a resolverla; es decir, cuando elijen una estrategia de resolución, la plasman en su hoja y explican a otro compañero, en ese momento están en la situación de formulación. Por ejemplo algunos podrían anotar números en la tabla, los cuales representarían la medida de los lados, y además se apoyarían con los popotes, con la finalidad de comprobar que dichas medidas son correctas; otros podrían limitarse a solo anotar números en la tabla, sin ponerse a pensar si en realidad dichas medidas son las correctas para formar un triángulo (por ejemplo podrían elegir 5, 3 y 2). Lo anterior muestra que pueden presentarse formulaciones buenas y equivocadas.

En la situación de validación, los alumnos después de haber resuelto la actividad, deben convencer a los demás (compañeros y profesor) de que sus respuestas son correctas, con argumentos y explicaciones válidas que le permitan sustentar su respuesta.

Después de pasar por los tres tipos de situaciones (de acción, de formulación y de validación) el profesor debe dar a conocer a los alumnos el nombre matemático que recibe el concepto con el que han trabajado durante el desarrollo de la clase (En un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia), es entonces cuando se llega a la situación de institucionalización, ya que es muy importante que el alumno pueda identificar dicho concepto independientemente de la situación planteada.

El contrato didáctico es la regla de juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena. Pero la evolución de la situación modifica el contrato, que permite entonces obtener situaciones nuevas (Brousseau,1986, p. 15).

La importancia de que el profesor establezca las reglas que giran en torno a una situación didáctica y en relación a un conocimiento matemático puesto en juego, es porque deben cumplir tanto lo que el profesor espera que los alumnos realicen, como también las pruebas que los alumnos esperan del profesor, esto porque se considera que dicho contrato didáctico ayuda a que cada personaje involucrado se haga responsable de sus actuaciones.

Los alumnos por su parte pueden dar buenas respuestas y también podrían cometer algunos errores, todo esto apoya al profesor en el desarrollo de la clase. Él por su parte debe aprovechar todas estas respuestas de la mejor manera posible, proporcionando a los alumnos algunas libertades que hagan ver de manera explícita, que gracias a esas respuestas, se lo han ganado.

También es importante mencionar que el contrato didáctico puede ser modificado por el profesor, esto respecto a las intenciones que tenga con relación a un saber específico.

2.2 Material didáctico manipulable

Existen diversas definiciones sobre material didáctico manipulable. A continuación mencionaremos algunas de ellas y especificaremos lo que se entiende por tales en nuestro trabajo.

Álvarez (1996, citado en Villarroel y Sgreccia, 2011, p. 78) define material didáctico como "todo objeto, juego, medio técnico, etc., capaz de ayudar al alumno a suscitar preguntas, sugerir conceptos o materializar ideas abstractas" (p.13).

En este mismo sentido, Alsina, Burgués y Fortuny (1988, p. 13) refiriéndose a material didáctico manipulable, afirman que "bajo la palabra material se agrupan todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje".

Por su parte, para Villarroel y Sgreccia (2011), los materiales didácticos concretos son:

> todos aquellos objetos usados por el profesor y/o los alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática con el fin de lograr ciertos objetivos específicos. Es decir, aquellos objetos que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases de sus procesos de aprendizaje (p. 79).

Como se puede observar, los autores coinciden en que los materiales didácticos son objetos que ayudan a los alumnos a entender conceptos facilitando su aprendizaje. Sin embargo, en nuestra investigación se entiende por materiales didácticos "todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico (estructurado), que el alumno pueda tocar directamente con sus manos, además de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones" (Valenzuela, 2012, p. 24).

Se eligió la definición antes mencionada porque consideramos que describe de una manera clara las características del material que se diseñó, y se incluye la palabra "estructurado", la cual es utilizada en una de las clasificaciones que se hacen del material didáctico (la hecha por Cascallana, 1988). Esta denominación engloba a todos esos objetos que son diseñados principalmente para facilitar conceptos matemáticos.

Además, existen diversas formas de clasificar los materiales didácticos que se utilizan en el aprendizaje de los contenidos matemáticos en geometría; entre ellos encontramos que Cascallana (1988, pp. 30-32) los clasifica en:

- El material no estructurado, que es cualquier objeto tomado del entorno del/la niño/a.
- El material estructurado, que está diseñado especialmente para facilitar y desarrollar determinados conceptos matemáticos.

Por su parte, Alsina, C. Burgués, C. y Fortuny, J. (1998, pp. 14-16), clasifican los materiales didácticos de acuerdo a su funcionalidad:

1. Materiales dedicados a la comunicación audiovisual: pizarra, diapositivas, cine, retropoyector y videos.
2. Materiales para dibujar. Aquí podemos considerar todos los instrumentos de dibujo: reglas, compases, escuadras, cartabones, etc.
3. Materiales para leer. Tradicionalmente los libros, cuentos o cómics…, se han presentado como elementos autosuficientes, alternativos y a veces complementarios, respecto a los materiales de otro tipo.
4. Materiales para hacer medidas directas o indirectas: reglas graduadas, metros… que tienen como finalidad hacer medidas de todo tipo.
5. Materiales que son modelos. La simple presentación de los modelos como poliedros, polígonos, mosaicos, constituyen una actividad de interesante para concretar conceptos y estudiar propiedades.
6. Materiales para el descubrimiento de conceptos. Aquí podemos considerar todos los materiales estructurados que están elaborados para trabajar conceptos o relaciones matemáticas, por ejemplo: bloques lógicos, regletas, geoplanos…
7. Materiales para mostrar aplicaciones. Son aquellos instrumentos que permiten hacer evidentes nuevas aplicaciones de conceptos ya asumidos, consolidando con esto los propios conceptos previos, así como sus posibilidades. Sirvan como ejemplo los diversos juegos planos y espaciales, en donde las figuras y las transformaciones son protagonistas.
8. Materiales para resolver problemas: los clásicos rompecabezas, las piezas de mecano, el plegado de papel, llevan a resolver problemas interesantes.

9. Materiales para resolver demostraciones y comprobaciones. Usados principalmente en Geometría, ayudan a presentar teoremas relativos a áreas de polígonos, el teorema de Pitágoras…

Es conveniente tener en cuenta los siguientes cuatro principios de Dienes (1970, citado en Lobo, 2012, pp. 19-20), los cuales están relacionados con las acciones sobre las que reflexionan los alumnos dirigidas por el profesor y contribuyen a la adquisición y consolidación de conceptos:

1.° Principio dinámico. Se propone a los niños juegos preliminares, juegos estructurados y juegos de práctica, que les sirvan de experiencias para que, puedan formar conceptos matemáticos en la medida en que cada tipo de juego es introducido en el momento oportuno.

- **Juegos preliminares.** A los que corresponde una actividad más bien desordenada sin objetivo aparente; el niño se lanza a esta actividad y encuentra satisfacción en la actividad misma. Esta primera fase de juego libre sirve para que el niño se adapte y se familiarice con el material.
- **Juegos estructurados.** En los que es deseable una actividad ya estructurada, aunque tal estructuración no llegue demasiado lejos. En cuanto al modo de conseguirlo, dependerá tanto de la estructura del concepto como de los modos de pensamiento particulares de la persona; lo más seguro será acumular muchas experiencias con materiales distintos pero que conduzcan todas al mismo concepto.
- **Juegos de práctica.** Con el fin de proporcionar al niño la adecuada práctica para aplicar y fijar los conceptos que han sido formados.

2.° Principio de constructividad. En la estructuración de los juegos la construcción precederá siempre al análisis, por cuanto este último se encuentra prácticamente ausente del aprendizaje mientras el niño no tenga doce años.

3° Principio de la variabilidad matemática. Los conceptos que encierran más de una variable deben ser estudiados mediante experiencias que supongan el manejo del mayor número posible de aquellas variables. Si se quiere proporcionar el mayor número posible de experiencias, estructuradas de manera que faciliten el desarrollo del concepto, parece deseable, a priori, que varíen todos los parámetros posibles, siempre y cuando dejen intacto el concepto.

4.° Principio de la variabilidad perceptiva. Tanto para que puedan manifestarse las diferencias individuales en la formación de los conceptos, como para que los niños vayan adquiriendo el sentido matemático de una abstracción, la misma estructura conceptual debe ser presentada en tantas formas perceptivas equivalentes como podamos. Es decir, proponer trabajos que parezcan muy distintos, pero que esencialmente tengan la misma estructura conceptual.

Estos cuatro principios permiten ver cierta relación con la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual es el marco teórico utilizado en nuestra investigación. Primeramente el principio dinámico, que puede verse relacionado con la situación de acción en la que los alumnos inician una exploración del material didáctico, lo observan y manipulan, esto con la finalidad de adentrarlos a la actividad; también entran las situaciones de formulación en la que los alumnos deciden para qué les podría servir el material didáctico dentro de la actividad y de esa forma pasar a la situación de validación, donde defiendan sus procedimientos y justifiquen sus resultados respecto de la utilización de los materiales didácticos manipulables.

El principio de constructividad tiene que ver con las consideraciones que se tengan en el diseño de los materiales, respecto del nivel educativo en el cual se implementará la situación didáctica; de esa forma se puede tomar en cuenta cuál será el grado de dificultad que tenga el uso de los materiales didácticos para los alumnos.

Respecto al principio de la variabilidad matemática, se encuentra una relación con las variables didácticas que pueden ser modificadas por el profesor, con la finalidad de que el alumno se encuentre con un problema que puede resolver con sus conocimientos previos, pero que después tenga la necesidad de utilizar un nuevo conocimiento construido con base en los conocimientos que él ya tenía.

El último de los principios, la variabilidad perceptiva , puede ir de la mano con el momento en el que se presentan las situaciones de validación, en la que los alumnos dan a conocer sus procedimientos y respuestas con la finalidad de que se resalte el hecho de que no hay un solo procedimiento para llegar a un resultado, y también este principio tiene que ver con darle sentido al concepto que se pretende enseñar, y lo podemos empatar con la creación de la génesis artificial del concepto que caracteriza a la Teoría de Situaciones Didácticas, ya que el hecho de crear dichas condiciones permite al alumno dar sentido a un concepto.

Asimismo, según Lobo (2012, p. 20), los materiales didácticos se emplean en Matemáticas con tres objetivos diferentes:

1. Para favorecer la adquisición de rutinas. Existe un tipo de material didáctico que está diseñado para cumplir una función muy específica, principalmente de consolidación de conceptos o ejercitación de procedimientos.
2. Para modelizar ideas y conceptos matemáticos. Los materiales didácticos permiten una presentación sobre soporte físico de determinados conceptos. Es el caso del geoplano que ofrece un modelo para el estudio de algunas propiedades geométricas de las figuras planas.

3. Para plantear y resolver problemas. El tangram y el plegado de papel son ejemplos de materiales didácticos generadores de cuestiones, problemas abiertos y actividades de investigación. Alsina et al. (1988) señalan que en algunos casos el propio material puede ser el problema. Lo usual es que casi todos los materiales sean utilizados como "planteadores" de problemas.

   Por lo tanto el material tiene una doble función:

- Por una parte se espera posibilite el aprendizaje real de los conceptos, puesto que el alumnado puede elaborarlos por sí mismo o con la orientación o ayuda del profesorado.
- Por otra parte, sea motivador, si se sabe crear situaciones interesantes para el/la niño/a, en las que sea un sujeto activo.

(Lobo, 2012, pp. 20-21)

Las definiciones y clasificaciones antes mencionadas son consideradas en nuestra investigación debido a que es importante tratar de englobar lo que nos permita brindar un panorama general sobre el material didáctico, así como describir lo que consideramos como material didáctico manipulable y las características que tendrá el material didáctico diseñado.

El material didáctico manipulable que elaboramos, pertenece a los materiales estructurados, la cual es la clasificación propuesta por Cascallana (1988, pp. 30-32). La finalidad por la que creemos que es importante la utilización de material didáctico, es el aprendizaje, puesto que las situaciones didácticas son propuestas con el fin de que alguien aprenda algo, en este caso serán los alumnos.

2.3 Fundamentos matemáticos

Este apartado esta constituido por los conceptos involucrados en la propiedad de la desigualdad del triángulo, la cual es la que establece que "en un triángulo, cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia". Así como la clasificación de los triángulos, las propiedades de los triángulos, la demostración y por último, un ejemplo.

2.3.1 Definiciones fundamentales

Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB},\ \overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama un triángulo, y se indica con $\Delta\, ABC$. Los puntos A, B

y C se llaman vértices, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman lados. Todo triángulo $\Delta\, ABC$ determina tres ángulos: $\angle ABC, \angle ABC$ y $\angle ACB$.

A estos los llamamos los ángulos del $\Delta\, ABC$. Si está claro a qué triángulo nos referimos, frecuentemente podemos designarlos por $\angle A, \angle B$ y $\angle C$.

Moise (1986, p. 76)

2.3.2 Demostración de la desigualdad del trriángulo

Corolario 7-2.1

Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces los otros ángulos son agudos.

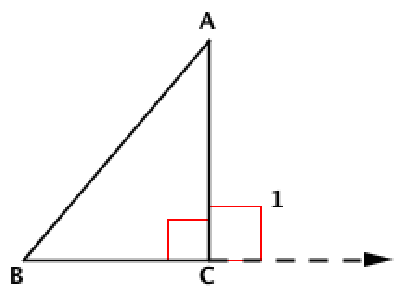


Figura 2. . Triángulo ABC

(Si el $\angle BCA$, es un ángulo recto, entonces también lo es el $\angle 1$. El teorema del ángulo externo nos dice que $\angle 1\ \ \angle CBA$ y $\angle 1\ \angle BAC$. Por tanto, $m\angle CBA < 90$ y $m\angle CAB < 90$.)

Moise (1986, p. 189)

Teorema 7-6

Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes y el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.

O de otro modo: En un triángulo cualquiera ΔABC, si $\angle C > \angle B$, entonces $A\,B > A\,C$.

Demostración: Hay solo tres posibilidades para los números $A\,B$ y $A\,C$:

$$(1)\ \ AB < AC,$$

$$(2)\ \ AB = AC,$$

$$(3)\ \ AB > AC.$$

Si el enunciado (1) fuera cierto, entonces se deduciría del teorema anterior que $\angle C > \angle B$, y esto es falso. Por consiguiente, (1) es imposible.

Si el enunciado (2) fuera cierto, entonces $\angle B$ y $\angle C$ resultarían los ángulos en la base de un triángulo isósceles y, en consecuencia, $\angle B \cong \angle C$, lo cual es falso. Por tanto, (2) es imposible.

La única posibilidad restante es el enunciado (3). Esto es lo que queríamos demostrar.

Moise (1986, p. 196)

La distancia entre una recta y un punto. La desigualdad del triángulo

Teorema 7-7

El primer teorema de mínima distancia

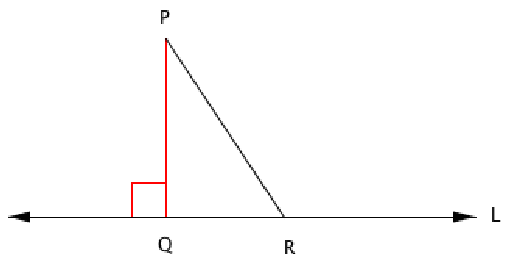


Figura 3. Triángulo PQR

El segmento más corto que une un punto a un recta es el segmento perpendicular a la recta.

O de otro modo: Se dan una recta L y un punto P fuera de ella, si $\overline{PQ} \perp L$ en Q, y R es otro punto cualquiera de L, entonces PQ $<$ PR.

Demostración: Por hipótesis, $m\angle Q = 90$. En virtud del corolario 7-2.1, el $\angle R$ es agudo. Así, $m\angle R < m\angle Q$. Por el teorema 7-6, $PR > PQ$.

La distancia entre un punto P y una recta L debe ser la *mínima* distancia entre P y los puntos de L. En virtud del teorema anterior, sabemos que existe una tal mínima distancia y sabemos dónde ocurre. Por tanto, enunciamos nuestra definición así:

Definición

La *distancia* entre una recta y un punto fuera de ella es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta. La distancia entre un recta y un punto de la misma se define como cero.

El siguiente teorema nos dice que, como es de esperar, ningún desvío resulta ser un antojo:

Teorema 7-8

La desigualdad del triángulo

La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

O de otro modo: En un triángulo $\Delta\, ABC$ cualquiera, tenemos

$AB + BC + AC.$

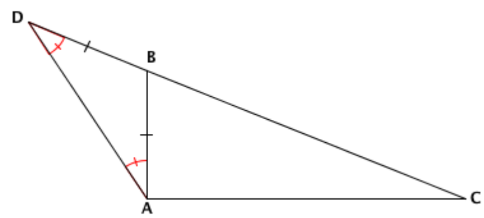


Figura 4. Triángulo ACD

Demostración: Sea D un punto del rayo opuesto a $\overrightarrow{BC}$, tal que $BD = BA$, como se indica en la figura, entonces,

$$DC = DB + BC,$$

porque B está entre D y C. Por tanto,

$$(1) \quad DC = DB + BC.$$

Ahora,

$$m\angle DAC = m\angle DAB + m\angle BAC,$$

porque B está en el interior del $\angle DAC$. En consecuencia,

$$m\angle DAC > m\angle DAB.$$

Pero: $$m\angle D = m\angle DAB,$$

puesto que $BD = BA$. Por consiguiente,

$$(2) \quad m\angle DAC > m\angle D.$$

Aplicando el teorema 7-6 al ΔADC, obtenemos

$$(3) \quad DC > AC.$$

Combinando (1) y (3), tenemos $AB + BC > AC$, como queríamos demostrar.

Moise (1986, pp. 200-201)

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología que utilizamos en la investigación, se explica la forma en la que se pretende llevar a cabo las fases de la Ingeniería Didáctica, así como también se presenta una primera propuesta sobre la planeación que se tiene prevista.

La Teoría de Situaciones Didácticas utiliza como metodología la Ingeniería Didáctica, que, al igual que esta teoría, surgió en la Didáctica de las Matemáticas en la escuela francesa. Los años ochenta representaron el inicio de esta metodología, la cual se nombró de esa forma debido a la similitud con el trabajo de un ingeniero.

En este mismo sentido Douady (1995, p.61), caracteriza la Ingeniería Didáctica de la siguiente manera:

> Designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la Ingeniería Didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase.

Esta metodología permite considerar los aspectos necesarios antes de elaborar la secuencia didáctica, da las pautas para hacerlo de la mejor manera, permite preparar el medio adecuado para orientar al alumno en la construcción de su conocimiento.

La Ingeniería Didáctica en su proceso experimental se caracteriza por tener cuatro fases, las cuales son análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación.

3.1 Análisis preliminares

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes (Artigue, 1995, p. 36):

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (Didáctico).
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (Congnitivo).
- El análisis del campo de restricciones en las que se va a situar la realización didáctica efectiva.

- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

3.1.1 Epistemológico

El análisis epistemológico, considera dar un paso por la historia referente a las propiedades de los triángulos, para indagar en lo que respecta al resurgir de dicho contenido matemático, explicar cómo surgió y qué necesidades o problemas de nuestros antepasados dieron paso a la contrución de este conocimiento. Se consultaron algunos documentos entre los cuales encontramos las tesis de Castañeda (2011), y Gamba y Bogotá (2013); así como el libro de Collette (1986); y además algunas páginas de Internet.

3.1.2 Didáctico

Este análisis engloba lo relacionado con el proceso de eseñanza-aprendizaje del contenido matemático específico al que está orientado el estudio. Para llevarlo a cabo, en primer lugar se ubica el tema de la desigualdad del triángulo en el programa de estudios propuesto por la Secretaría de Educación Pública (2011), luego se analiza el libro de texto que utilizaban en la escuela secundaria Técnica #73, en segundo grado, para ubicar el tema, las sesiones destinadas para abordarlo y la estructura utilizada por el libro de texto para el desarrollo de las actividades. Por último se describe específicamente la actividad considerada en el libro para abordar el tema de la desigualdad del triángulo.

3.1.3 Cognitivo

En la dimensión cognitiva, se deben considerar los posibles obstáculos, dificultades y concepciones que enfrentan los estudiantes respecto al conocimiento que construyen con la implementación de la secuencia didáctica. Este análisis pretende acercarse lo más posible a los conocimientos previos que puede llegar a tener el estudiante sobre el tema, lo cual arroja ciertos datos que pueden ser considerados por el profesor antes de implementar la situación didáctica con los estudiantes.

3.2 La concepción y el análisis a priori

En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Nos parece útil, para facilitar el análisis de una ingeniería, distinguir dos tipos de variables de comando (Artigue, 1995, p. 42):

- Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería, y

- Las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería; es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

Las variables didácticas a considerar deben modificar la situación de tal forma que los alumnos hagan una reestructuración sobre sus conocimientos, para que de esa forma apliquen nuevos procedimientos que los orienten hacia el concepto que se quiere construir. En esta investigación las variables podrían ser el tipo de materiales didácticos manipulables que se utilizarán, el contexto del problema planteado y los datos que se proporcionen en dicho problema.

> (…) el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (Artigue, 1995, p. 45).

El análisis a priori esta estructurado por una parte descriptiva y por otra, predictiva; se enfoca en las especificidades de una situación a-didáctica que se pretende diseñar y que será presentada a los alumnos:

- Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprende.
- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Se proporcionan los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

(Artigue, 1995, p. 45)

La importancia de realizar el análisis a priori, radica en el hecho de que permite tener una visión general sobre el concepto. Esto respecto a su surgimiento y construcción, así como de la manera en la que es abordado en el contexto escolar.Permite saber cuáles son los conocimientos previos que tienen los alumnos con los que se aplica la situación o situaciones didácticas consideradas, los posibles errores, dificultades y obstáculos que puedan poseer. Esto contribuye para poder tomar en cuenta lo que se obtuvo del análisis al momento de elegir la situación didáctica más adecuada para los alumnos y poder ayudarlos a que construyan su conocimiento.

3.3 Experimentación

Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contrato investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes de la investigación. La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

(De Faria, 2006, p.52)

La experimentación se llevó a cabo en la Escuela Secundaria Técnica #73, ubicada en el Estado de Durango, en la que el nivel socioeconómico de la población estudiantil es medio-alto. La secuencia se aplicó con alumnos de segundo grado cuyas edades oscilan entre los 12 y 13 años. Como es una escuela que atiende a un gran número de estudiantes, generalmente los grupos están conformados entre 40 y 45 alumnos.

Para llevar a cabo la experimentación, fue necesario realizar una planeación respecto de las sesiones que se destinarán para tal fin, en las que se consideraron a grandes rasgos cada una de las actividades, así como su duración.

Sesión 1.

Fecha: 7 de abril de 2016 **Horario:** 10:40 a. m. - 12:10 p. m. **Duración:** 90 min

Escuela Secundaria Técnica #73 **Grado:** 2.° **Eje temático:** Forma, Espacio y Medida

Contenido: Construcción de triángulos con base en ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.

Materiales didácticos: Hojas de trabajo, palos de madera y figuras articuladas con escala.

Tabla 2. Organización de las actividades de la primera sesión

	Descripción	**Tiempo estimado (minutos)**

Situación de acción	Los alumnos empezarán a manipular el material didáctico de palos de madera	5
Situación de formulación	Los alumnos elijen el procedimiento que van a utilizar y se hacen responsables de sus decisiones referentes a la resolución de la actividad	15
Situación de validación	Los alumnos en los equipos discuten y tratan de convencer a los demás integrantes, de sus respuestas, mediante argumentos, para después expresar ante los demás equipos sus respuestas y tratar de convencerlos de que su respuesta es la óptima	25
Situación de acción	Los estudiantes iniciarán la manipulación de los triángulos de varillas unidas por bisagras	5
Situación de formulación	Los alumnos anotarán las relaciones que encuentren entre los lados del triángulo y elegirán con qué medidas trabajarán y qué estrategias utilizarán para encontrar las diferentes relaciones entre los lados del triángulo	15
Situación de validación	Los estudiantes se pondrán de acuerdo con sus compañeros de equipo sobre lo que realizaron, además se apoyarán en el material didáctico para convencer a los demás equipos de que el procedimiento que siguieron es el correcto	15
Institucionalización	Mediante un contrato didáctico del tipo mayéutica socrática la profesora hará una serie de preguntas a los alumnos para que lleguen a la propiedad y les dirá que en Matemáticas se le conoce como la desigualdad del triángulo, la cual es una de las muchas propiedades que tienen los triángulos	10

Sesión 2.

Fecha: 8 de abril de 2016 **Horario:** 10:40 a. m. – 11:25 a. m. **Duración:** 45 min

Escuela Secundaria Técnica #73 **Grado:** 2.° **Eje temático:** Forma, Espacio y Medida

<u>Contenido:</u> Construcción de triángulos con base en ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.

<u>Materiales didácticos:</u> Hojas de trabajo, juego de geometría.

Tabla 3. Organización de las actividades de la segunda sesión

	Descripción	**Tiempo estimado (minutos)**
Situación de acción	Los alumnos empezarán por recordar cómo se utilizan la regla y el compás	5
Situación de formulación	Es probable que los alumnos realicen trazos utilizando solo la regla y que piensen que un triángulo se puede construir con medidas que no cumplen con la propiedad	20
Situación de validación	Los alumnos observarán sus construcciones y darán argumentos sobre las características de los segmentos con los que pudieron o no, construir un triángulo	5
Institucionalización (Ejercitación)	La profesora les propondrá dos ejercicios para que utilicen la propiedad de la desigualdad del triángulo	15

La planeación antes descrita fue una primera propuesta, por lo que estuvo sujeta a modificaciones, ya que dichos cambios se realizaron en cuanto se tuvieron definidos el o los problemas que formaron parte de la situación didáctica.

Para la recogida de datos, se utilizaron grabaciones en vídeo, para poder observar el contexto del aula mientras se desarrolla la secuencia de actividades planeada, lo cual mediante la observación y la transcripción de las clases, permitió rescatar momentos de los cuales la profesora no se percató en ese instante y de esa forma aprovecharlos de la mejor manera.

También se realizaron grabaciones en audio. Para ello, la profesora/investigadora traía consigo el celular, esto le permitió rescatar la mayor información posible al pasar por los equipos con la finalidad de recopilar algunas de las discusiones que se presentaron entre ellos.

Otro aspecto muy importante es que las grabaciones de la clase pueden mostrar las interacciones del alumno con el medio. También se tomaron fotografías para explicar algunos aspectos que lo requirieron, teniendo como apoyo las imágenes.

Además, se recogieron las soluciones de los problemas planteados a los alumnos en las hojas de trabajo, lo cual ofreció información sobre sus procedimientos y sus resultados.

El tipo de contrato didáctico que se estableció es el contrato constructivista, que es uno de los contratos que describe Ávila (2001):

> Aquí, las situaciones que conducen al alumno al aprendizaje no son “naturales”. El profesor debe organizar el medio. La organización deriva esencialmente del saber previsto y del conocimiento de los procesos de adquisición de los alumnos, a quienes se le delega la responsabilidad de la adquisición. Los saberes previos se manifiestan como prerrequisitos; es decir, como medios que permiten formular las condiciones iniciales de la situación. En estos contratos el alumno es considerado racional o al menos coherente y económico: se adapta al medio para minimizar sus esfuerzos o sus riesgos y para acrecentar su placer (p. 14).

Este tipo de contrato didáctico es el que sostiene la teoría de las Situaciones Didácticas, por lo que consideramos muy importante que las responsabilidades, tanto del profesor como del alumno, giren en torno a él.

3.4 Análisis a posteriori y validación

Esta es la última fase de la Ingeniería Didáctica:

> (…) se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se contemplan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante el transcurso. (…) en la confrontación de los dos análisis, el a priori y el a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación (Artigue, 1995, p. 48).

Lo que se realizó en esta fase al analizar los datos obtenidos después de la implementación de la situación didáctica, fue observar con detenimiento cada uno de esos datos, de tal manera que se trato de reflejar en ellos lo que realmente pasó, así como identificar cuáles fueron las factores que dieron lugar a esos resultados y por qué pasó de esa forma, contrastando los análisis (el a priori y el a posteriori). Por consiguiente la validación fue para aprobar nuestras hipótesis que fueron consideradas antes de experimentar la situación didáctica.

Para el análisis de los resultados obtenidos en la implementación, se realizaron transcripciones, pero no de todo lo que se discutió en todos los equipos, sino de momentos representativos que arrojaron datos que ayudaron a obtener conclusiones. Esto se llevó a cabo de esta manera, debido a que en ocasiones varios equipos llegaron a tener los mismos procedimientos y no fue conveniente que la transcripción sea repetitiva, sino que más bien se trató de elegir procedimientos diferentes para poder comparar al momento del análisis.

Para poder diferenciar en la transcripción los diversos comentarios, se utilizó la siguiente simbología:

Tabla 4. Simbología para la transcripción

Símbolo	Significado.
( )	Descripción o comentarios de la autora.
/ /	Lo que el alumno escribió en su hoja de trabajo.
(.)	Breve silencio durante los comentarios.
A1, A2, A3…	Alumnos
A	Varios alumnos
Ma	Maestra/investigadora

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS PRELIMINARES, CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

En este capítulo se presentan los análisis preliminares que se llevaron a cabo, el didáctico, epistemológico y el cognitivo, relacionando lo que pudimos rescatar de cada uno de ellos para el diseño de la secuencia didáctica. Además mostramos el análisis a priori de cada una de las actividades que forman parte de la situación didáctica, considerando los supuestos que pueden llegar a pasar durante la implementación.

4.1 Análisis preliminares

La Ingeniería Didáctica propone realizar los análisis preliminares con la finalidad de que se profundice para la obtención de aspectos específicos que permitan elegir la situación didáctica que se implementará, así como hacer modificaciones pertinenetes a dicha situación didáctica que esten orientadas hacia los objetivos que queremos lograr en nuestra investigación. Los análisis que realizamos son el didáctico, el epistemológico y el cognitivo.

4.1.1 Análisis Didáctico

Este análisis engloba lo relacionado con el proceso de eseñanza-aprendizaje del contenido matemático específico al que está orientado el estudio. Para llevarlo a cabo, en primer lugar se ubicó el tema de la desigualdad del triángulo en el programa de estudios propuesto por la SEP (2001), luego se analiza el libro de texto que utilizan en la Escuela Secundaria Técnia # 73, en segundo grado, para ubicar el tema, las sesiones destinadas para abordarlo y la estructura utilizada por el libro de texto para el desarrollo de las actividades. Por último se describe específicamente la actividad considerada en el libro de texto para abordar el tema de la desigualdad del triángulo.

El tema de la desigualdad del triángulo, es propuesto por la SEP (2011), en segundo grado, en el bloque I. Para dicho tema se destinan 5 clases, las cuales están indicadas en el libro de Matemáticas 2 (Baltazar, Ruiz y Ojeda, 2013). La estructura que se propone en el libro, es el planteamiento de una situación inicial en la que el alumno utilice los conocimientos previos para resolver lo que se le pide, en este caso, se presenta un problema referido a un terreno en forma triangular. Posteriormente se presentan en una tabla tres posibilidades para las medidas de los lados de dicho terreno; se espera que esto permita a los alumnos identificar cuándo es posible trazar un triángulo y que justifiquen su respuesta. Luego se tiene la parte de explorar y construir en la que el alumno se adentra en el tema, analiza y aplica diversos procesos de él, que le ayuden a comprenderlo, es el apartado en el que se aborda el contenido. Se les propone la utilización de popotes de diferentes medidas con los cuales los alumnos deben formar siete triángulos, con la medida de los lados de los triángulos, una tabla y responderán a algunos cuestionamientos. Por último está la etapa en la que los alumnos deben obtener concluciones con base en lo que se realizó con anterioridad.

Como se puede notar el libro de texto presenta un inicio, un desarrollo y un cierre del tema sobre la desigualdad del triángulo, además propone la utilización de material didáctico manipulable (popotes de diferentes medidas). Pero al platicar con la profesora titular, nos comentó que en realidad no se llevó a cabo dicha actividad en el salón de clase, puesto que a veces utiliza más tiempo para temas que los alumnos necesitan para comprender temas posteriores en tercer grado, y por ese motivo realizó solo uno o dos ejercicios referentes a ese tópico. La implementación del material didáctico propuesto en el libro de texto para la profesora titular carece de relevancia.

Lo que podemos rescatar del análisis anterior para la selección y modificación de la secuencia didáctica que implementamos, es que se cuenta con diversas actividades propuestas en materiales de apoyo (libro de texto y fichero de atividades) para los profesores, en las que se considera la utilización de materiales didácticos. Por lo que se retoma una de esas propuestas, pero con las modificaciones que consideremos convenientes, tratando de rescatar esa importancia de implementar en el aula actividades que interesen a los alumnos y que los lleve a aprender, además cambiamos el material didáctico propuesto para enriquecer nuestra secuencia didáctica.

4.1.2 Análisis Epistemológico

El análisis epistemológico, considera dar un paso por la historia referente a la geometría, enfocado a las propiedades de los triángulos, para indagar en lo que respecta al resurgir de dicho contenido matemático, explicar un poco cómo surgió y qué necesidades o problemas de nuestros antepasados dieron paso a la construción de este conocimiento. Por lo anterior se consultaron algunos documentos en los cuales ya se había realizado un análisis epistemológoco sobre esta área de las Matemáticas, para poder identificar momentos importantes en los que aparecen datos sobre esta propiedad de los triángulos, entre los cuales encontramos las tesis de Castañeda (2011), y Gamba y Bogotá (2013); así como el libro de Collette (1986); y además algunas páginas de Internet.

Desde la antigüedad las propiedades de los triángulos adquirieron un papel importante en la realización de actividades cotidianas que requerían de la aplicación de las mismas; por ejemplo los egipcios, en el año 2600 a. n. e. construyeron sus pirámides triángulares, los babilonios que describieron algunas características de los triángulos semejantes, en Grecia en el siglo VI a. n. e. se desarrollan los elementos de Euclides y el teorema de Pitágoras, la reflexión sobre el V postulado de dichos elementos dio paso a nuevas geometrías (geometrías no Euclidianas) en el siglo XIX. Todos estos acontecimientos mencionados, permiten observar la relevancia que ha tenido el estudio de los triángulos y su importancia para desarrollar ideas lógicas, además de actividades cotidianas.

Castañeda (2011, pp. 3-10), realiza un recorrido histórico de la trigonometria, en el que presenta algunas de las aportaciones que cada una de la civilizaciones hicieron respecto del surgimiento de la misma, explica las diferentes situaciones del contexto que dieron paso a su utilización. Las civilizaciones que se mencionan en ese recorrido histórico, son Egipto, Babilonia, Grecia, India, Arabia, así como su utilización en el occidente y en los tiempos actuales, aunque no encontramos detalle alguno sobre el uso de la desigualdad del triángulo.

Por su parte Gamba y Bogotá (2013, pp. 27-43) presentan en su escrito la evolución histórica de la astronomía y la trigonometría, así como el hecho de rescatar los momentos específicos que permitan el desarrollo de su trabajo, para ello mencionan algunas propiedades de los triángulos que de cierta forma son importantes para el surgimiento de la astronomía. Las antiguas civilizaciones como los egipcios, los babilonios, los griegos y los árabes son las mencionadas en este trabajo, en las que se observan la utilización que le dieron a sus descubrimientos y su importancia.

Con base en esta información podemos decir que la utilización de las propiedades de los triángulos aparecen por la necesidad de dar respuesta a los problemas con los que se enfrentaron nuestros antepasados, por ejemplo en tareas de astronomía, o bien, problemas dentro de la Matemática misma, como es el caso de los griegos. En general, las propiedades de los triángulos son estudiadas por Euclides en su tratado de 13 libros llamado "Los Elementos".

4.1.3 Análisis Cognitivo

En la dimensión cognitiva, se deben considerar los conocimientos previos que los alumnos necesitan para poder construir un nuevo concepto, de esa forma podrán ser considerados por la profesora antes de la implementación de la secuencia didáctica con los estudiantes. Este análisis se realiza mediante la aplicación de un examen diagnóstico, con la finalidad de obtener información pertinente que permitiera saber qué conoce el estudiante sobre el tema de la desigualdad del triángulo.

Para realizar el análisis cognitivo se elabora un examen diagnóstico que consta de 11 preguntas, que fueron elaboradas para un grupo de segundo grado de la Escuela Secundaria Técnica # 73. Para validar el examen, se aplica primeramente a un grupo de 7 estudiantes que no pertenecen al grupo con el que estaremos trabajando en la investigación.

A continuación tenemos las preguntas que fueron consideradas en el examen diagnóstico, así como el análisis de cada una de ellas. Para llevarlo a cabo se analizan detenidamente las respuestas que cada alumno dio a las preguntas, para así poder llegar a obtener datos que brinden pautas para la elaboración de la situación didáctica que se implementa.

1. ¿Qué es un triángulo?

De acuerdo a las definiciones que se proporcionan a los alumnos en el libro de texto, lo que se esperaba es que ellos respondieran que era una figura geométrica de tres lados, unidos por vértices y cuyos lados forman tres ángulos internos.

Como se pudo observar en las respuestas, la mayoría de los alumnos coinciden en que el triángulo es una figura geométrica de tres lados; algunos de ellos incluyen que tiene tres ángulos que suman 180° y que existen tres tipos de triángulos (equilátero, isósceles y escaleno), según sus lados.

Pocos alumnos confunden algunos términos usados para dar las características de los prismas, cubos y pirámides rectos (es el tema que acaban de ver en las clases anteriores) con los términos utilizados para describir un triángulo. Por ejemplo: en lugar de decir lados, mencionan que son aristas y también que es similar a una pirámide. Uno de los alumnos menciona la apotema, que podemos deducir lo relaciona con la altura del triángulo; esto puede ser debido a que en primer grado trabajaron con polígonos regulares.

2. Señala en la figura los elementos del triángulo

En el ejercicio dos, se presentó el siguiente triángulo, donde los alumnos debían señalar sus elementos:

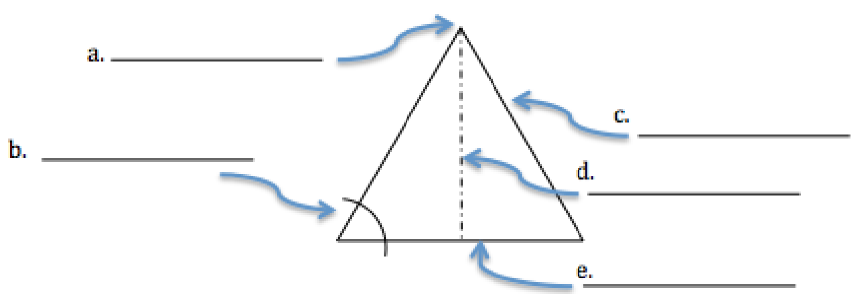


Figura 5. Elementos del triángulo

En esta actividad se esperaba que las respuestas a los incisos fueran en el orden siguiente: vértice, ángulo, lado, altura y base, pero las respuestas de los alumnos fueron un tanto diferentes.

Con base en las respuestas pudimos observar que en el inciso a, la mitad de ellos respondió correctamente, escribiendo que es el vértice, los demás indicaron que era la punta, la cúspide, la arista o la apotema.

En el inciso b, todos dieron la respuesta correcta que es ángulo. Las respuestas referentes al inciso c, fueron vértice, arista, línea y cara, a pesar de que lo correcto era lado.

En el inciso d, notamos que algunos alumnos no dieron respuesta dejando en blanco el espacio, los que respondieron indicaron que era mitad, arista, apotema o radio, consideramos que sus respuestas siguen influenciadas por los temas que vieron en clases anteriores.

Por último en el inciso e, todos dieron la respuesta correcta que era indicar la base del triángulo.

Lo importante de este ejercicio radica en el hecho de que los alumnos utilicen el lenguaje matemático adecuado para describir el triángulo.

3. Describe cómo se clasifican los triángulos

Lo que se pretendía en esta ocasión era que los alumnos pudieran decir que los triángulos se clasificaban de acuerdo a sus lados y de acuerdo a sus ángulos, pero sus conocimientos previos están relacionados sólo con la clasificación referente a los lados del triángulo, olvidando la de los ángulos.

Así, observamos que la mayoría de los alumnos coinciden en que los triángulos se clasifican en tres, isósceles, escaleno y equilátero; sólo un alumno indicó el triángulo rectángulo, el cual se llama de esa forma debido a que tiene un ángulo recto (90°).

4. ¿Cómo es un triángulo equilátero? Dibuja uno

Por lo que se puede observar en las respuestas, la mayoría de los alumnos tienen noción de cómo es un triángulo equilátero, a excepción de un alumno que confunde los lados con aristas, pero eso se podría aclarar al momento de compartir alguna respuesta, orientando a los alumnos para que el lenguaje que utilicen sea el propio de las Matemáticas y de esa forma evitar confusiones con temas anteriores.

Los dibujos que trazaron los alumnos, en su mayoría están relacionados con lo que describen en su respuesta; es decir, dibujaron un triángulo con tres lados iguales (equilátero); incluso uno de ellos indicó las medidas de los lados para dejar claro que sus tres lados medían lo mismo.

5. ¿Cómo es un triángulo isósceles? Dibuja uno

En esta ocasión la mayoría indicó que es un triángulo que tiene dos lados iguales, pero tienen dificultad para describir el tercer lado, ya que dicen que es más pequeño, que es más corto, que tiene un lado de sobra, uno irregular, uno diferente o que la base es de medidas más grandes. Un alumno dio como respuesta que era un triángulo con todas sus líneas iguales, lo cual nos deja pensar que tiene problemas para diferenciar los triángulos y anotar sus características.

A pesar de que en su mayoría, los alumnos representan la descripción que dan mediante el dibujo del triángulo isósceles, también hay otros que describen correctamente el triángulo isósceles, pero que dibujan un triángulo rectángulo, otros no escriben sus características pero sí lo dibujan de manera correcta.

Para proporcionar las características de este triángulo se nota que tienen cierta dificultad para describirlo y hacer un dibujo para representarlo.

6. ¿Cómo es un triángulo escaleno? Dibuja uno

La mitad de los alumnos coinciden en que es un triángulo que tiene sus tres lados de diferente medida, pero la otra mitad describe el triángulo dando diversas respuestas, una de ellas en que refiere a un triángulo rectángulo (lo observamos en el dibujo que trazaron), otros dicen que tiene todos sus lados iguales y un alumno dice que dos ángulos son iguales y uno desigual.

Con los dibujos la mayoría del grupo representó un triángulo escaleno dejando a la vista que todos sus lados tienen diferente medida.

7. ¿Qué propiedades de los triángulos conoces?

Las respuestas que los alumnos dieron en esta pregunta fueron similares a las respuestas del ejercicio dos, confunden los elementos del triángulo con sus propiedades, por lo que en conveniente aclararlo.

También pudimos observar que algunos alumnos mencionan una de las propiedades que es la de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y que solo uno tiene un conocimiento previo sobre la propiedad que nos interesa para nuestra investigación que es la referente a la desigualdad del triángulo.

8. Javier necesita encargarle, a un carpintero, por teléfono, la elaboración de varias piezas de madera para hacer un rompecabezas. Las formas y tamaños de las piezas son como se muestran a continuación. Anoten debajo de cada pieza la información que Javier tendría que darle (por teléfono) al carpintero, para que las haga iguales

Para los datos sobre el triángulo isósceles, observamos que la mayoría de los alumnos logran identificarlo como tal y que incluso dan algunas medidas que ellos consideran pueden ayudar al carpintero a elaborar las piezas, otras respuestas no tienen los datos suficientes para que el triángulo pueda ser elaborado; por ejemplo, mencionan que un triángulo que tenga la base más grande, pero no especifican cómo deben ser los otros dos lados.

Para el triángulo equilátero, la mayoría escribe que tiene tres lados iguales, el resto no logra identificarlo de esa manera y proporcionan otra información que no deja claro lo que le piden al carpintero; un ejemplo de esto lo podemos encontrar en la respuesta que proporciona uno de los alumnos en la que escribe que es un triángulo equilátero, una base pequeña y lados más grandes que la base.

Y por último tenemos el trapecio, el cual causó duda en los alumnos, puesto que no sabían cómo describirlo, solo uno escribió que se podría dividir en dos triángulos, otros dieron datos insuficientes, por ejemplo algunos trataron de dar medidas de los lados pero no de su altura.

9. Empezaremos con el siguiente mensaje: "Se trata de construir un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 3 cm y sus lados iguales miden 5 cm cada uno" Antes de hacer los trazos contesten: ¿Consideran que todos deberían obtener el mismo triángulo?

Más de la mitad de los alumnos llegan a la respuesta correcta y tratan de explicar que el triángulo que se forma es uno, ya que nos proporcionan las medidas de los tres lados, y lo único que podría cambiar es la posición, pero que seguiría siendo el mismo triángulo. Y los que dicen que no, lo relacionan con los ángulos, por ejemplo, escriben que tienen diferentes ángulos o que dos ángulos son iguales pero uno no.

10. Dadas las siguientes medidas: 5 cm, 6 cm y 7 cm, que corresponden a los lados de un triángulo, construyan todos los triángulos diferentes que sea posible y escriban por qué son diferentes los triángulos dibujados.

En lo que se refiere a este ejercicio, los alumnos se confunden, porque a pesar de que en la pregunta anterior, que era similar, la mitad del grupo dio la respuesta correcta, aquí no lograron relacionar ambos ejercicios y deducir que solo se puede formar un triángulo pero con diferente posición.

11. Con la medida de los segmentos AB = 6 cm y BC = 9 cm, tracen un triángulo y digan cuál es la medida del tercer lado. Consideras que si compararas el trazo del triángulo con el de tus compañeros, ¿todos los triángulos trazados serían iguales? ¿Por qué?

Las respuestas de los alumnos son muy variadas y algunas no tienen que ver con el por qué proporcionado, pero tenemos dos alumnos que logran deducir que los triángulos serán diferentes debido a la medida del ángulo, por lo que interpretamos que se refieren al ángulo comprendido entre los lados de los cuales se proporcionó la medida.

Este análisis nos brinda información importante del conocimiento de los alumnos sobre el tema de la desigualdad del triángulo, así que permite darnos cuenta que a pesar de que es un tema que ya se vió en el bloque uno de segundo grado, los alumnos no lograron recordarlo, por lo que podemos decir que no le han dado sentido a ese conocimiento. Por esa razón las actividades que se proponen estarán organizadas de tal manera que ayuden al alumno a darle sentido. También se encontró que los alumnos no utilizan el lenguaje matemático para indicar los lados o vértices del triángulo, por lo que en las actividades se utilizará dicho lenguaje para lograr que ellos se vayan apropiando de él.

4.2 Concepción de la Situación Didáctica y Análisis a priori

A continuación presentamos los aspectos relacionados con el diseño de la situación didáctica, considerando el material didáctico manipulable que se utilizará durante el desarrollo de las actividades, además se prevén las posibles respuestas de los almnos y las estrategias de enseñanza que implementará la profesora-investigadora.

4.2.1 Actividad 1: "Existencia de triángulos"

Propósito: Ayudar a que los alumnos construyan su conocimiento, manipulando el material didáctico proporcionado (palos de madera), para que de esa forma con el desarrollo de la actividad puedan darle sentido al tópico matemático, desigualdad del triángulo.

- **Material didáctico**

Alumnos

Como la actividad requiere que la organización del grupo sea en equipos de tres integrantes, cada uno de los quipos contará con:

- 18 palos de madera de las siguiente medidas: 8 de 10 cm, 1 de 11 cm, 1 de 14 cm, 1 de 15 cm, 1 de 20 cm, 2 de 25 cm, 1 de 30 cm, 2 de 40 cm y 1 de 50 cm.
- Un triángulo elaborado con reglas graduadas unidas por broches latonados (dos de los lados estarán fijos y medirán 20 cm y 10 cm y el lado que podrá modificarse será de 40 cm).
- Hoja de trabajo, esta última contendrá la actividad y se les proporcionará de manera individual.

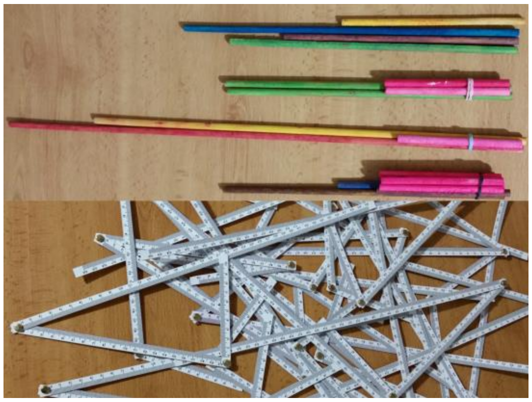


Figura 6. Material didáctico de los alumnos.

Profesor

- Palos de madera con post (dicho material ayudará a fijar los palos en el pintarrón para formar algunos triángulos)
- Un triángulo elaborado con reglas graduadas unidas por broches latonados (dos de los lados estarán fijos y medirán 20 cm y 10 cm y el lado que podrá modificarse será de 40 cm)..
- Hoja de trabajo con la tabla en papel bond.

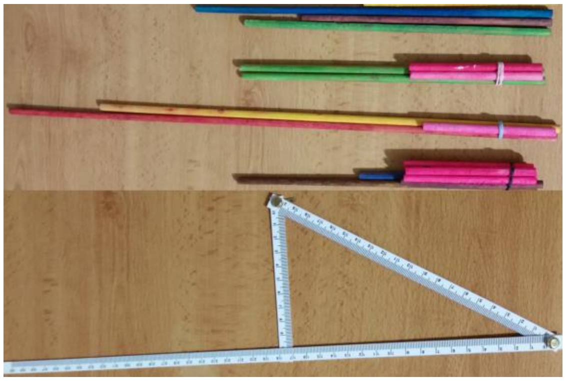


Figura 7. Material didáctico para la profesora.

Para el desarrollo de la actividad, la profesora contará con material didáctico, en este caso serán una hoja de papel bond que contendrá la tabla, así como diversos palos de madera de colores iguales a los que utilizarán los alumnos.

Es importante señalar que yo, la investigadora, seré la profesora que implementará la secuencia didáctica en la Escuela Secundaria Técnica # 73 en el Estado de Durango, con el grupo 2° "F", el cual está conformado por 34 alumnos.

Tabla 5. Variables macrodidácticas

	Descripción	**Tiempo estimado (minutos)**
Situación de acción	Los alumnos empezarán a manipular el material didáctico (palos de madera)	5
Situación de formulación	Los alumnos elijen el procedimiento que van a utilizar y se hacen responsables de sus decisiones referentes a la resolución de la actividad	15
Situación de validación	Los alumnos en los equipos discuten y tratan de convencer a los demás integrantes de sus respuestas, esto mediante argumentos, para después expresar ante los demás equipos sus respuestas y tratar de convencerlos de que su respuesta es la óptima	25
Situación de acción	Los estudiantes se iniciarán con la manipulación de los triángulos elaborados con reglas graduadas unidas por broches latonados	5
Situación de formulación	Los alumnos anotarán las relaciones que encuentren entre los lados del triángulo y elegirán con qué medidas trabajarán y qué estrategias utilizarán para encontrar las diferentes relaciones entre los lados del triángulo	15
Situación de validación	Los estudiantes se pondrán de acuerdo con sus compañeros de equipo sobre lo que realizaron, además se apoyarán en el material didáctico para convencer a los demás equipos de que el procedimiento que siguieron es el correcto	15
Institucionalización	Mediante un contrato didáctico del tipo mayéutica socrática la profesora-investigadora hará una serie de preguntas a los alumnos para que lleguen a la propiedad y les dirá que en Matemáticas se le conoce como la desigualdad del triángulo, la cual es una de muchas propiedades que tienen los triángulos	10

- **Variables didácticas**

La primera variable que se utiliza es el tipo de material didáctico, que en este caso se elige a los palos de madera, los cuales representarán el objeto matemático, ya que tienen medidas específicas que posiblemente ayuden a que los estudiantes puedan establecer relaciones aditivas con las medidas de los lados, con lo cual pueden argumentar si se puede o no formar un triángulo, se eligen medidas en las que se abordan los tres tipos de triángulos que existen de acuerdo a la medida de sus lados.

La segunda variable a utilizar son las figuras articuladas con escala, este material tiene dos lados fijos y miden 20 cm y 10 cm, el tercero de los lados puede modificarse y medirá 40 cm. Cabe señalar que este material didáctico se construyó en el Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas en Zacatecas.

Los números con los que trabajamos son los enteros positivos, ya que debido al material que se utiliza es difícil cortar los palos de madera con números decimales, además primero interesa ver la propiedad de manera general para luego introducir otra actividad en la que los alumnos puedan trabajar con los números decimales.

La actividad está conformada por dos incisos, en el primero se utiliza el material didáctico de los palos de madera y en el segundo, las figuras articuladas con escala; es decir, se pretende que cuando los alumnos hayan terminado de resolverla, ellos puedan expresar con sus palabras la desigualdad del triángulo.

También es conveniente mencionar que no queremos que se presente el efecto del contrato didáctico conocido como “deslizamiento metacognitivo”, en el que el propósito de la situación didáctica podría desviarse, ya que es posible que algunos de los alumnos tengan problemas para realizar operaciones con números decimales.

Así las medidas que se eligieron son las siguientes:

Tabla 6. Variable didáctica

Medida de los palos de madera			Intención
a	**b**	**c**	
10	10	10	El triángulo que se forma con estas medidas es uno equilátero. Se espera que los alumnos asocien ese conocimiento previo para decir mucho antes de representarlo con los palos de madera, si se podrá o no formar un triángulo

25	15	30	Con estas medidas se forma un triángulo escaleno. Esto posiblemente lleve a los estudiantes a pensar que sí se puede formar un triángulo con medidas distintas en cada lado
25	25	40	Aquí se trata de un triángulo isósceles, al igual que con el triángulo equilátero se espera que esto lleve a pensar a los alumnos que si se tienen dos medidas de los lados iguales y una diferente, siempre se podrá formar un triángulo
10	40	50	En este caso los estudiantes podrían pensar que se trata de un triángulo escaleno, pero al intentar formarlo con los palos de madera se darán cuenta que no es posible. Aquí se formará una línea
10	10	20	En este caso los estudiantes podrían pensar que se trata de un triángulo isósceles, pero al intentar formarlo con los palos de madera se darán cuenta que no es posible. Aquí también se formará una línea
10	10	30	En este caso los estudiantes podrían pensar que se trata de un triángulo isósceles, pero al intentar formarlo con los palos de madera se darán cuenta que no es posible. En este caso no podrán cerrar el triángulo, o lo cerrarán antes de los 30cm (hasta menos de 20cm)
11	14	25	En este caso los estudiantes podrían pensar que se trata de un triángulo escaleno, pero al intentar formarlo con los palos de madera se darán cuenta que no es posible. Aquí se formará una línea

La tabla anterior constituye el inciso “a”. El orden de las medidas proporcionadas tiene los propósitos antes indicados, y se quiere que los alumnos puedan reorganizar su conocimiento al observar que la situación no requiere solo de utilizar sus conocimientos previos sobre las características de los triángulos según sus lados, puesto que en un determinado momento de la situación didáctica, deben cambiar de estrategia para dar paso a nuevas relaciones.

Se espera que esto ayude a los alumnos a construir el conocimiento, y a organizar la socialización de respuestas en el momento de compartirlas con sus compañeros, ya que esto evitará que las respuestas sean diferentes y así que no haya distracciones del tópico abordado.

El material didáctico les permitirá a los alumnos la manipulación para poder representar los segmentos con las medidas indicadas en la tabla; estas medidas son diversas, ya que esto les permitirá ir de lo sencillo hasta llegar a expresar por qué es posible que exista, o no, un triángulo con ciertas medidas.

Para el inciso "b", se optó por utilizar figuras articuladas con escala, de medidas $\overline{AB} = 20$ cm, $\overline{AC1} = 40$ cm y $\overline{BC} = 10$ cm, uno para cada equipo, los vértices A y B es donde se unieron las tiras graduadas (permitiendo que se pudieran manipular), el vértice C, no se unirá, ya que de esa forma deslizando el vértice C por el segmento $\overline{AC}$ los alumnos podrán manipular la medida del lado $\overline{AC}$.

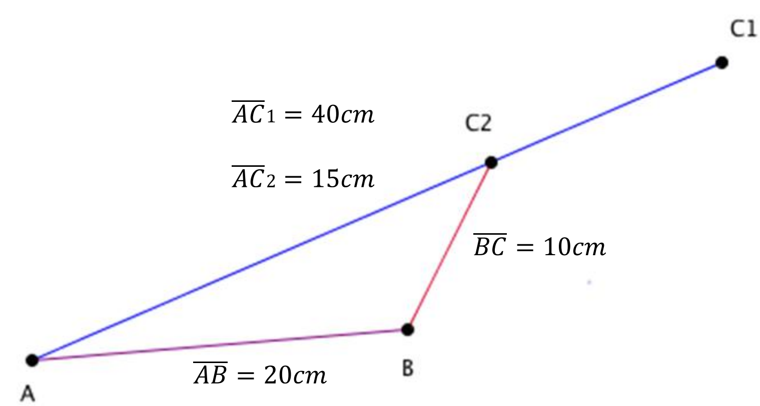


Figura 8. Material didáctico (figuras articuladas con escala)

En este caso los alumnos podrán utilizar nuevas formas de razonamiento, por ejemplo, utilizarán el ensayo y error con las figuras articuladas con escala, ya que ellos decidirán la medida de uno de los lados y esto les permitirá manipularlas y encontrar relaciones al observar el triángulo que decidieron formar.

Tanto los palos de madera como las figuras articuladas con escala son un material económico y puede aprovecharse en gran medida para realizar esta actividad, su manipulación representa un medio entre el concepto y el aprendizaje de los alumnos, lo cual les permitirá ir de la representación con materiales didácticos, a las representaciones numéricas y algebraicas; es decir, ellos podrán expresar la propiedad mediante desigualdades (menor o mayor que) entre las medidas proporcionadas y en el mejor de los casos, serán capaces de expresar las desigualdades utilizando literales.

- **Situación de acción (inciso a)**

Sesión 1

La organización del grupo será en equipos de tres integrantes, cada uno será elegido por la profesora-titular, considerando que el rendimiento académico de los alumnos del mismo equipo sea homogéneo. Se optó por esta opción debido a que la profesora-titular del grupo tiene la oportunidad de convivir con ellos durante todo el ciclo escolar, por lo que sabe cuál sería lo organización adecuada y pertinente para que se logre un ambiente de colaboración y de discusión en el momento de realizar la actividad.

En la primera de las actividades se intentará establecer un contrato constructivista, que corresponde a los contratos fuertemente didácticos, mencionados por Ávila (2001) y descritos de la siguiente forma:

> Aquí, las situaciones que conducen al alumno al aprendizaje no son "naturales". El profesor debe organizar el medio. La organización deriva esencialmente del saber previsto y del conocimiento de los procesos de adquisición de los alumnos, a quienes se le delega la responsabilidad de la adquisición. Los saberes previos se manifiestan como prerrequisitos; es decir, como medios que permiten formular las condiciones iniciales de la situación. En estos contratos el alumno es considerado racional o al menos coherente y económico: se adapta al medio para minimizar sus esfuerzos o sus riesgos y para acrecentar su placer (Ávila, 2001, p. 14).

Así, se procurará que los alumnos se apropien de la situación didáctica planteada. Se pretende implementar este tipo de contrato para que los alumnos acepten la devolución, y así empiecen a actuar, de esa manera se pretende lograr que entren en la situación de acción.

Para iniciar con la actividad, se les proporcionará a los alumnos la hoja de trabajo de manera individual y se les pedirá que formen los equipos.

Luego la profesora-investigadora pedirá a uno de los alumnos que lea en voz alta la primera pregunta de la hoja de trabajo: "¿Se puede construir siempre un triángulo con tres segmentos de cualquier longitud?"

Es probable que si se les pide a los alumnos que la respondan, ellos no puedan dar muchas explicaciones, ya que no conocen el tema. Por esa razón la pregunta servirá de apoyo a la profesora-investigadora en el momento de dar algunos ejemplos que les permitan reflexionar y analizar la situación, antes de trabajar con la tabla, no para que respondan la pregunta en ese momento, sino para que durante el desarrollo de la actividad puedan construir sus argumentos.

Un escenario que podría presentarse es el siguiente, la profesora-investigadora les dirá:

- Si tenemos 3 palos de madera que miden 10 cm cada uno, ¿podrá existir un triángulo cuyos lados tengan esas medidas?, o, si tenemos, por ejemplo, palos de madera de 20 cm, 20 cm y 40 cm, ¿podrá existir un triángulo cuyos lados tengan esas medidas? Es posible que las respuestas de los alumnos surjan de manera espontánea y digan que sí es posible, aquí todavía no se les permitirá utilizar el material didáctico.

Después de dar oportunidad a algunos de los alumnos para que expresen su respuesta, la profesora-investigadora les dirá que es muy rápido para responder esa pregunta, pero que al trabajar con la siguiente tabla y los palos de madera, ellos podrán construir argumentos. Luego le pedirá a otro alumno que lea en voz alta lo siguiente en la hoja de trabajo: “Para saberlo, van a construir triángulos con palos de madera y llenar la siguiente tabla. Los palos tendrán medidas específicas y serán usados para formar los lados del triángulo” (Actividad tomada y rediseñada de Espinosa, García y García, 1999).

Para que los alumnos puedan empezar a trabajar en la actividad, se les proporcionará el materia didáctico (palos de madera) para que puedan manipularlos y formar o no los triángulos. Se le proporcionará a cada equipo 18 palos de madera con las medidas que contiene la tabla, esto para representar los segmentos con los que intentarán formar los triángulos. Luego se les permitirá experimentar con los palos de madera, para que los manipulen sin que la profesora-investigadora les haya dado indicación alguna; es decir, los alumnos entrarán en la primera etapa de la devolución, el acercamiento puramente lúdico (Brousseau, 1986).

Después la profesora-investigadora les dirá que para tener mayores argumentos ellos utilizarán los palos de madera para experimentar y tratarán de formar los triángulos cuyas medidas están indicadas en la tabla.

Luego pedirá que de forma grupal se lean las instrucciones para completar la tabla y después lograr que relacionen el material proporcionado con la actividad propuesta; es entonces como se pretende que transiten a la segunda etapa (devolución de una preferencia). Ellos probablemente empiecen a analizar la información que se les ha indicado, identificando los datos que necesitan encontrar para llegar a resolverla, intercambiando ideas con sus compañeros, observando y manipulando el material didáctico que se les ha dado, así como organizando su actividad de resolución del problema.

Lo que se quiere lograr es que los alumnos empiecen a formar los triángulos con los palos de madera, que los exploren y los manipulen, como ya se habrán leído las instrucciones, ellos actuarán en la situación. Primero tomarán en cuenta los datos faltantes en la tabla que deben completar, y además formarán los triángulos con los palos de madera de la medida indicada en la primera columna. En la segunda indicarán si es posible o no formar el triángulo, en la tercera argumentarán por qué sí o por qué no y por último en la cuarta, indicarán qué tipo de triángulo es.

Cuando los alumnos empiecen a leer la actividad y a comentar cuáles serán los posibles procedimientos que servirían para resolverla, se puede decir que ya están actuando. Lo que nos puede proporcionar una evidencia de ello, serían los comentarios de los alumnos con sus compañeros, y cuando ellos hayan elegido una manera para resolver la actividad.

- **Situación de formulación (inciso a)**

Para la segunda de las filas en la que las medidas de los lados son 10 cm, 10 cm y 10 cm, alguno de los alumnos probablemente se imagine un triángulo equilátero y lo exprese de inmediato a los compañeros, pero habrá otro que quiera formar el triángulo con ayuda de los palos de madera para asegurarse que se forma y es probable que anoten que sí es posible formar el triángulo. Su justificación podría ser que es posible formarlo porque es un triángulo equilátero o porque con los palos de madera de esas medidas sí lo lograron construir, luego en la tercera de las filas se pretende generar curiosidad, puesto que deben dar argumentos que justifiquen su respuesta y en cierta manera se intenta que el alumno modifique su conocimiento y argumente por qué es posible que exista un triángulo con esas medidas.

Además de que los alumnos representen los triángulos con los palos de madera, la organización de la tabla les permitirá reflexionar sobre el por qué de la respuesta que están dando en la segunda de las filas, lo cual puede generar que ellos realicen algunas operaciones con las medidas proporcionadas en la primera de las columnas, es decir que utilicen una representación numérica, incluso es posible que empleen una representación gráfica en el plano; es decir, que hagan un dibujo del triángulo. Además es probable que consideren una representación algebraica (asignando literales a los tres lados y relacionándolos entre sí mediante operaciones aditivas).

La solución óptima de la tabla es la siguiente:

Tabla 7. Solución óptima

Medida de los lados (cm)			**¿Genera triángulo?**		**¿Por qué?**	**¿Qué tipo de triángulo es?**
a	**b**	**c**	**Sí**	**No**		
10	10	10	✔		Es posible formarlo porque con los palos de madera de esas medidas sí se logró construir	Equilátero

25	15	30	✔		Porque los palos con esas medidas permiten formar el triángulo	Escaleno
25	25	40	✔		Si se pudo construir el triángulo con los palos	Isósceles
10	40	50		✔	Porque cuando tratamos de unir los palos de madera, lo que se forma son dos segmentos juntos	
10	10	20		✔	Porque las medidas de dos de los lados son la mitad de la tercera medida y lo que se forma son dos segmentos unidos	
10	10	30		✔	No alcanza a cerrar el triángulo, los palos de 10 cm, deberían ser más grandes	
11	14	25		✔	Porque también forman dos segmentos juntos	

En el mejor de los casos los alumnos completarán la tabla y las argumentaciones que hagan servirán para poder llegar a expresar cuáles son las condiciones que deben cumplir las medidas de los segmentos de un triángulo para que pueda existir.

Después el alumno debe elegir de qué manera puede actuar frente a la situación planteada, para que se pueda volver el único responsable de sus acciones y que esté consciente de que puede haber otras opciones de resolución, que él decidió no seguir (tercera etapa: devolución de una responsabilidad y de una causalidad).

Es posible que algunos de los equipos propongan respuestas equivocadas, por ejemplo que anoten que con palos de medidas 10 cm, 10 cm y 20 cm, se puede formar un triángulo, dichas medidas no cumplen con la propiedad de la desigualdad, pero ellos deben comprobarlo mediante la representación con los palos de madera, y así cerciorarse de que no es posible formarlo.

- **Situación de validación (inciso a)**

Es importante mencionar que se destinara a la situación de validación, dos momentos durante el desarrollo de la clase, uno será en los equipos y otro en el grupo.

Cuando los equipos estén completando la tabla, es posible que discutan entre ellos y probablemente se convenzan de que con las medidas de ciertos segmentos sí puede existir un triángulo y cuándo no es posible que exista.

Luego al pasar por los equipos para observar sus respuestas, la profesora-investigadora con ayuda de una tabla irá registrando de manera discreta las argumentaciones de la columna en la que deben indicar por qué existe o no el triángulo, y ver a cuáles equipos les falta por proponer respuesta, esto para elegir los que pasarán a llenar la fila correspondiente, y cuando haya resultados diferentes los equipos implicados validarán su solución ante el grupo.

Primero pasarán a llenar en el pizarrón las filas que la mayoría de los equipos tienen bien, después se continuará pasando a los equipos en los que se observe que alguna de las filas les faltaban argumentos. La profesora-investigadora preguntará ¿están todos de acuerdo? Se espera que los equipos que no estén de acuerdo digan por qué, esto con la finalidad de que se validen las respuestas y se convenzan todos los quipos de cuáles medidas de los segmentos permiten la existencia de un triángulo y cuáles no.

- **Situación de acción (inciso b)**

Luego que los alumnos terminen de completar la tabla y de socializar las respuestas ante el grupo, la profesora-investigadora recogerá los palos de madera y les proporcionará el material didáctico de las figuras articuladas con escala (solo dos de los tres vértices del triángulo estarán unidos por boches latonados, lo cual permitirá modificar la medida de uno de los lados), las cuales son otra forma de representación del objeto matemático, y que permiten que los alumnos puedan manipular el material y así obtener argumentaciones de por qué será posible que exista un triángulo dados tres segmentos de determinadas medidas.

Serán catorce triángulos iguales, y el hecho de que se unan dos de los tres vértices con broches latonados, permitirá que los alumnos los manipulen y puedan experimentar la existencia del triángulo, el tercero de los vértices no se unirá permitiendo modificar la medida uno de los lados (más adelante se explicará con detalle el material).

Para ello trabajaremos con el triángulo de medidas $\overline{AB} = 20$ cm, $\overline{AC}1 = 40$ cm y $\overline{BC} = 10$ cm, uno para cada equipo, los vértices A y B es donde se colocarán los broches latonados, el vértice C, no se unirá, ya que de esa forma deslizando el vértice C por el segmento $\overline{AC}$ los alumnos podrán manipular la medida del lado $\overline{AC}$. Primero se permitirá a los alumnos que se familiaricen con el material. De esa forma iniciarán con la situación de acción.

Para asegurarse de que las reglas del juego han sido comprendidas, la profesora-investigadora podrá utilizar preguntas como las siguientes:

Piensen bien qué medidas quieren utilizar, dichas medidas deben ser elegidas de manera estratégica para que ustedes logren encontrar la relación entre las medidas de los lados del triángulo, además es conveniente elegir medidas como las de la tabla donde no se puede formar un triángulo, ya que esto les ayudará a encontrar deducciones. La profesora-investigadora les preguntará: ¿Para qué será necesario modificar uno de lados del triángulo? ¿Por qué eligieron esas medidas? ¿Qué pueden decir sobre la existencia o no de los triángulos?

Aunque las preguntas que haga, dependerán en gran medida de lo que los alumnos respondan.

Luego pedirá a los alumnos que encuentren las relaciones entre las medidas de los lados de los triángulos que eligieron y las anoten en la parte de atrás de su hoja de trabajo (mediante una representación numérica), para que ellos puedan llegar a realizar operaciones aditivas entre las medidas de los lados de los triángulos, esto considerando que la medida de uno de los lados puede ser modificada.

Después darán respuesta a la pregunta que se les planteará: ¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?, con ella se pretende que los alumnos enuncien con sus propias palabras que en todo triángulo cualquiera de sus lados es menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia.

También se prevé que los alumnos utilizarán diferentes representaciones, la primera es el material didáctico (palos de madera y figuras articuladas con escala), otro sería la representación numérica (establecer relaciones aditivas entre las medidas de los lados del triángulo, así como desigualdades), la representación algebraica (asignar una literal a cada uno de los lados del triángulo y relacionar los lados). Una sesión de 90 minutos será destinada para trabajar en la primera de las actividades.

Mientras los alumnos realizan las actividades, la profesora-investigadora recorrerá el salón, con la finalidad de observar el trabajo que estarán ejecutando, esto con la intención de percibir si hay alguna duda o si lo están realizando de manera correcta, si en realidad están trabajando en equipo o para ver qué posibles procedimientos están siguiendo para llegar al resultado.

- **Situación de formulación (inciso b)**

Podría ser que los alumnos tomen la decisión de trabajar con diversas medidas, para ello es conveniente que reflexionen y decidan qué procedimiento van a seguir para resolver la situación, se trata de que elijan la que para ellos es la más conveniente y que les permita aprovechar el material didáctico (figuras articuladas con escala). A continuación tenemos la figura que representa el material didáctico.

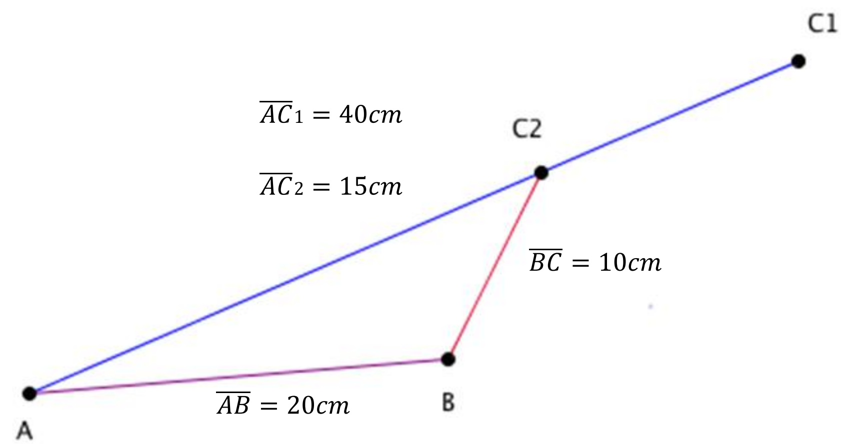


Figura 9. Material didáctico (figuras articuladas con escala).

Por ejemplo, si elijen la medida del lado $\overline{AC}_2 = 15$ cm, sumamos $\overline{AB} + \overline{AC}$ y al sustituir los valores de los segmentos para que ellos realicen operaciones aditivas, tenemos 20 cm $+ 15$ cm $= 35$ cm, puede observarse que 35 cm > 10 cm, ahora sumamos los segmentos $\overline{AC} + \overline{BC}$, sustituyendo los valores tenemos 15 cm $+10$ cm $= 25$ cm, 25 cm > 10 cm, por último $\overline{AB} + \overline{BC}$, sustituimos los valores 20 cm+10 cm = 30 cm, 30 cm $>$ 15 cm.

La profesora-investigadora les preguntará a los alumnos ¿qué podemos decir de los resultados de cada una de las sumas que realizamos con respecto al tercer lado? ¿qué otras relaciones se pueden encontrar con estos datos obtenidos? Es importante que solo se planteen preguntas estratégicas; es decir, que no se les diga directamente lo que se debe hacer, sino que lo importante es orientarlos a que ellos lo descubran.

Otra operación que se puede realizar entre las medidas de los segmentos, es la sustracción, entonces se haría lo siguiente: seguimos considerando que la medida del lado $\overline{AC} = 15$ cm, restamos $\overline{AB} - \overline{AC}$ y al sustituir los valores de los segmentos, tenemos 20 cm -15 cm = 5 cm, puede observarse que 10 cm $>$ 5 cm, ahora restamos los segmentos $\overline{AC} - \overline{BC}$, sustituyendo los valores tenemos 15 cm -10 cm = 5 cm, 20 cm$>$ 5 cm, por último $\overline{AB} - \overline{BC}$, sustituimos los valores 20 cm-10 cm= 10 cm, 15 cm $>$ 10 cm.

Esperamos que la representación mediante el material didáctico pueda provocar en los alumnos un razonamiento aditivo (realización de operaciones de adición y sustracción), de esa forma ellos lograrán mediante el ensayo y error, manipular las relaciones que encuentren entre las medidas elegidas para poder obtener argumentos que los respalden en el momento de dar a conocer sus respuestas ante el grupo.

- **Situación de validación (inciso b)**

Tal vez los equipos puedan llegar a encontrar las relaciones aditivas entre las medidas de los lados de cada uno de los triángulos; para ello es conveniente que se pongan de acuerdo y decidan si en realidad el procedimiento que utilizaron es el que los lleva a encontrar el resultado, para esto, la validación de las respuestas obtenidas es muy importante y podrán demostrarlo con apoyo del material didáctico, de tal manera que les ayude a convencer a los demás que su respuesta es la óptima.

También se validarán las respuestas que los equipos den a la pregunta ¿qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos que se forman con palos de madera para servir como lados de un triángulo?, para rescatar los elementos que lleven a observar la medida de los lados y mediante la validación, los alumnos convenzan a sus compañeros para que acepten sus respuestas, pero con argumentos y pruebas.

Algunas de las respuestas de los alumnos a la pregunta pueden ser: no se puede construir un triángulo con segmentos de medida pequeña, con segmentos de medidas más grandes se puede construir un triángulo, un lado debe ser menor que la suma de los otros dos lados, etc.

Hasta este punto de la actividad, los alumnos ya están trabajando para poder indagar sobre el tópico matemático que estamos trabajando, por lo que sus respuestas a la pregunta ¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?, permitirán dar cuenta si en realidad lograron construir ese conocimiento. Por ello consideramos que es probable que es aquí donde con sus propias palabras, los alumnos podrían llegar a enunciar que en cada triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Por ejemplo podrán argumentar algunos, que su respuesta es correcta porque intentaron formar los triángulos con los palos de madera y que no fue posible, incluso pueden explicarlo con el material que tendrá la profesora el cual se podrá mantener en el pizarrón, debido a los post que se les colocarán en la parte de atrás; esto facilitará que los alumnos formen los triángulos y se los muestren al resto del grupo.

- **Institucionalización**

La profesora-investigadora dirá a los alumnos que el tópico que estuvieron trabajando es conocido en Matemáticas como la desigualdad del triángulo, el cual mediante la actividad se pudo llegar a que esta propiedad de los triángulos sostiene que en todo triángulo, cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Luego trazará un triángulo ABC, para expresar la desigualdad del triángulo, en términos de las medidas de sus lados:

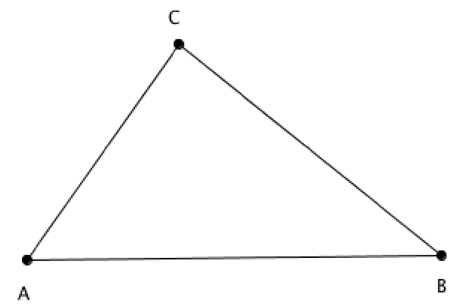


Figura 10. Triángulo ABC.

4.2.2 Actividad 2. "Regla y compás"

Propósito: Que los alumnos mediante los trazos con regla y compás comprueben que un triángulo existe cuando cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia y que al trazar los triángulos puedan experimentar con diferentes datos y aprender la desigualdad del triángulo.

- **Material didáctico**

Alumnos

La organización del grupo será de manera individual y cada uno de los estudiantes contará con:

- Regla y compás
- Hoja de trabajo

Profesor

- Regla y compás
- Hoja de trabajo en papel bond

El tiempo destinado para esta actividad, será una sesión de 45 minutos.

Tabla 8. Variables macrodidácticas

	Descripción	**Tiempo estimado (minutos)**
Situación de acción	Los alumnos empezarán por recordar cómo se utilizan la regla y el compás	5
Situación de formulación	Es probable que los alumnos realicen trazos utilizando solo la regla y que piensen que un triángulo se puede construir con medidas que no cumplen con la propiedad	25
Situación de validación	Los alumnos observarán sus construcciones y darán argumentos sobre las características de los segmentos con los que pudieron o no construir un triángulo	15

- **Variables didácticas**

En este caso las variables didácticas, serán las medidas de los lados del triángulo, ya que éstas les permitirán analizar si es posible o no la existencia de un triángulo.

Las medidas que se les proporcionan a los alumnos en la tabla, son para que ellos puedan observar que la propiedad no solo se cumple con números enteros positivos, sino que también es posible con los números decimales, por ello se consideró conveniente que el contenido de la tabla fuera con medidas diversas, esto para que no solo trabajen con un solo conjunto de números, sino que se toman en cuenta de los dos.

Sesión 2

- **Situación de acción**

Aquí se les proporcionará a los alumnos una hoja de trabajo con la actividad que van a realizar de manera individual y con ayuda de la regla y el compás. La unidad de medida que utilizarán será los centímetros, ya que los alumnos los han manipulado a lo largo de su educación y en su vida cotidiana. Las medidas de los segmentos de cada una de las filas permitirán a los alumnos realizar las construcciones utilizando la regla y el compás, de esa forma podrán observar la existencia o no de un triángulo utilizando números decimales.

La profesora-investigadora les dirá a los alumnos que la siguiente actividad la realizarán de manera individual y que es conveniente que observen la tabla con los datos proporcionados.

Tabla 9. Contenido de la hoja de trabajo de los alumnos

Triángulo	**Medida de los segmentos (cm)**		
	a	**b**	**c**
1	2.5	2.5	5
2	5.3	6.3	7.5
3	3	6	4
4	8.6	9.7	5.4
5	6	4	13

Luego le pedirá a uno de los alumnos que lea las instrucciones de los incisos a y b: a) Traza cinco triángulos con las medidas anteriores utilizando regla y compás, la unidad de medida que utilizarás son los centímetros; b) Observa en tus construcciones sí es posible o no, que existan triángulos con esas medidas.

Después la profesora-investigadora les preguntará si es claro lo que acaba de leer el compañero, en caso de que digan que no, les dará una explicación:

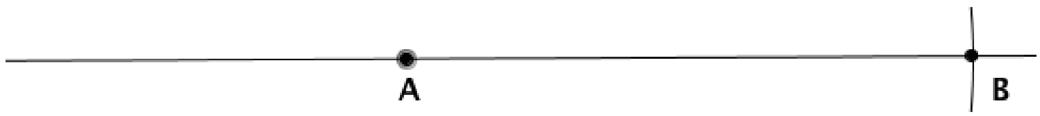
- Tenemos las siguientes medidas 4 cm, 5 cm y 6 cm, con las que nos interesa saber sí existe o no un triángulo, por lo que con ayuda de la regla y compás lo construiremos.

Con las medidas anteriores, la profesora-investigadora aprovechará el momento para dar un repaso sobre cómo construir un triángulo. Les dirá que utilizando las medidas anteriores iniciarán la construcción del triángulo ($4\text{ cm}, 5\text{ cm}$ y 6 cm). Para ello primeramente les preguntará si alguien sabe cómo hacerlo, en caso de que alguien responda de manera afirmativa, se le pedirá que pase a hacerlo, en caso contrario ella lo explicará de la siguiente manera:

Paso 1: Traza una recta y señala en ella el punto A.

Figura 11. Señala el punto A.

Paso 2: Abre tu compás con la medida del lado más largo del triángulo a trazar (6 cm) y marca con ella el punto B.



$$\overline{AB} = 6\text{cm}$$

Figura 12. Marca el punto B

Paso 3: Con tu compás, toma la medida de cualquiera de los otros dos lados (ya sea 4 cm o 5 cm) y traza un arco apoyándote en el punto A. Elegiremos 5 cm.

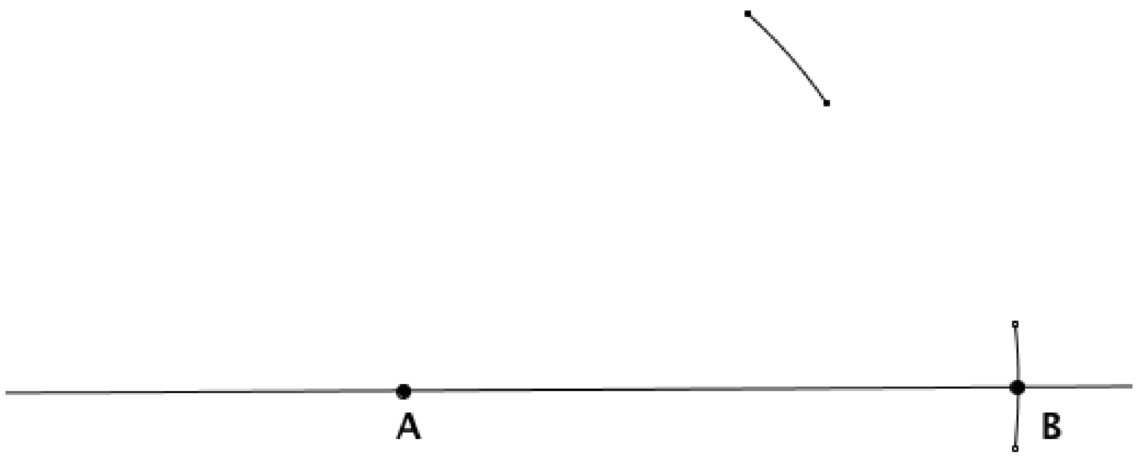


Figura 13. Traza un arco apoyándote en A.

Paso 4: Por último, toma la medida del lado restante (4 cm) y apoyado en el punto B traza un arco que cruce el arco anterior. Llama a este cruce C.

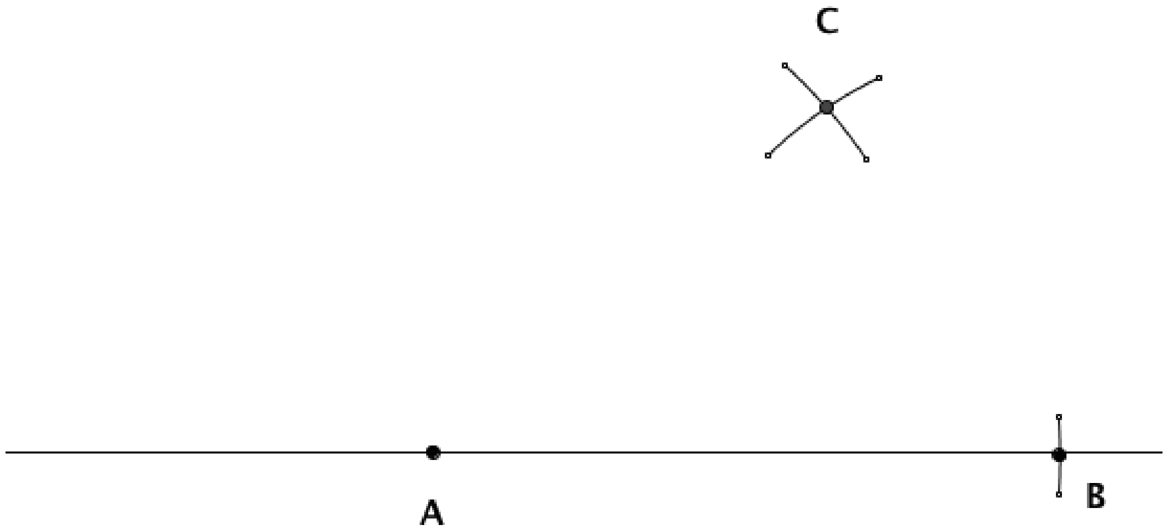


Figura 14. Apoyado en B traza un arco que cruce con el anterior.

Paso 5: Traza el segmento $\overline{AC}$ y el segmento $\overline{BC}$ para obtener el triángulo.

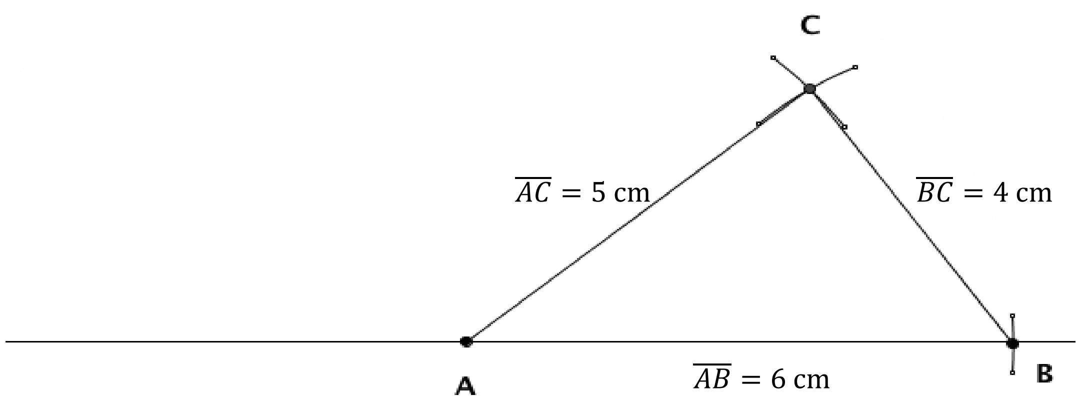


Figura 15. Traza segmentos para obtener el triángulo

En esta actividad se les pedirá a los alumnos, que utilizando regla y compás, tracen los 5 triángulos cuyas medidas de los lados se les proporcionan en la tabla. Para lograr la devolución se les plantearán las tareas a los alumnos de tal forma que sientan la necesidad de comprobar mediante las construcciones, la existencia de los triángulos, para que hagan suya la situación y empiecen a actuar en ella.

- **Situación de formulación**

Algunos alumnos pueden utilizar la regla y compás de manera no adecuada, por ejemplo, es probable que consideren que los triángulos con las medidas que no cumplen con la propiedad, sí los construyan, así como intentar usar solo regla para las construcciones. Al utilizar la regla y el compás, los alumnos podrán realizar representaciones en el plano, ya que con ello, será posible comprobar la existencia o no del triángulo con las medidas indicadas en cada fila.

- **Situación de validación**

Al observar las construcciones de los alumnos tal vez se detectará aquellos que utilizaron regla y compás para llevar a cabo la actividad, y los que utilizaron solo la regla. La profesora-investigadora les preguntará si todos lograron construir los triángulos y que si pudieron observar con detenimiento las características de los lados de los triángulos construidos, para que de esta forma mediante la socialización de las respuestas de los alumnos, se genere una lluvia de ideas que lleve a los estudiantes a expresar con mayores argumentos qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para que se pueda construir un triángulo.

En la lluvia de ideas algunos de los alumnos podrían llegar a decir que no se puede cerrar el triángulo, lo que da paso a que la profesora les pregunte ¿qué características deben tener esos segmentos para poder formar el triángulo?, ¿la abertura del compás es la misma que se indicó?, entonces, ¿cómo le haríamos para formar ese triángulo?, ¿por qué no se alcanzará a formar el triángulo?, si no tuvieran regla y compás ¿cómo podrían saber si con las medidas de determinados segmentos se puede formar un triángulo?

Algunas respuestas de los alumnos podrían ser que se necesitan segmentos más grandes, que es conveniente que la abertura del compás sea mayor, que la medida de uno de los lados debe ser mayor que la medida de la base, otros pueden decir que los otros dos lados deben ser mayor que la base. Con esto último, la profesora-investigadora puede aprovechar y tratar de trazar un triángulo donde los alumnos le proporcionen las medidas de los segmentos con las características que ellos dicen, por ejemplo, un triángulo con base de 10.5 cm, un lado de 16 cm y el otro lado de 5.5 cm, como este triángulo cumpliría con las características de una respuestas que alguno de los alumnos podría proporcionar, esto les puede ayudar a reflexionar. La profesora-investigadora puede intervenir preguntando ¿qué creen que falta describir para poder formar ese triángulo o cualquier triángulo?, con la finalidad de que expresen la propiedad.

En la lluvia de ideas que surja de la pregunta anterior, algunas de las respuestas de los alumnos podrían ser refiriéndose a lo que podría faltar, por ejemplo, encontrar una relación entre los lados de los triángulos, otros tal vez digan que se podrían sumar dos de los tres lados, algunos dirían que la suma de los otros dos lados no debe ser igual que la medida del lado mayor porque después el triángulo no se puede formar, es aquí donde la profesora-investigadora intervendría preguntando ¿esa suma no debe ser igual a la medida del tercer lado?, ¿qué característica deberá tener esa suma? Los alumnos podrían decir que el resultado de la suma debe ser mayor que la medida del tercer lado para poder formar el triángulo, ya que si no es así, no será posible construirlo. Incluso en este momento la profesora-investigadora podría pedir a alguno de los alumnos que pase a construir un triángulo con esas características, luego otro alumno un triángulo de diferente medida que el primero, para que observen que se puede construir un triángulo cuando la suma de dos de sus lados es mayor que el tercero, además se podrían construir triángulos con números decimales para que no se queden con la idea de que solo con números enteros se cumple la propiedad.

4.2.3 Aplicación preliminar de la situación didáctica.

Para validar nuestro instrumento (situación didáctica), se aplicó a tres estudiantes de la Escuela Secundaria técnica # 73, los cuales trabajaron en equipo para resolver la actividad propuesta; estos estudiantes fueron elegidos con la intención de tener un equipo homogéneo, para que de esta manera se pudiera observar específicamente sí la actividad alcanzaría el objetivo propuesto; es decir, ayudar a que los alumnos construyan el tópico matemático de la desigualdad del triángulo. Se les preguntó que si ellas consideraban que con tres segmentos de cualquier medida era posible que existiera un triángulo, las alumnas respondieron que sí, porque el triángulo tenía tres lados, luego de eso, se les dijo que para comprobar su respuesta, trabajaríamos con un material didáctico, que eran los palos de madera con las medidas proporcionadas en la tabla y que con ellos tratarían de construir los triángulos.

Cuando empezaron a formar el triángulo con los palos de madera de medidas 10 cm, 10 cm y 10 cm, al momento de dar la justificación de por qué se generaba el triángulo, ellas dijeron que se formaba debido a que las longitudes de los lados eran iguales, luego cuando utilizaron los palos de madera de medidas 25 cm, 15 cm y 30 cm, dos de las alumnas no supieron explicar por qué, pero una de ellas dijo que se formaba porque la suma de los lados con menor longitud, era mayor que la medida del lado mayor. Pero luego cuando utilizaron los palos de madera de medidas 10 cm, 40 cm y 50 cm, la explicación que dio la alumna, fue que sí se podía formar el triángulo porque la suma de las longitudes de los dos lados menores era igual a la longitud del lado mayor, aquí es donde pudimos observar que las alumnas recordaban algo del tema, pero que aún así no lograban identificar cuándo existía o no un triángulo.

Un inconveniente que tuvimos, fue que la medida de los palos de madera tenía errores mínimos, esto por descuidos en el momento de cortarlos, lo cual no permitió que las alumnas comprobaran que no era posible la existencia de un triángulo con esas medidas, sino que ellas lo querían formar de cualquier manera. Con los palos de madera de medidas 10 cm, 10 cm y 30 cm, fue donde explicaban que no existía triangulo porque no se alcanzaba a cerrar, o decían que era porque la suma de los lados de menor longitud no era mayor a la medida del lado con mayor longitud, en este momento la profesora-investigadora les preguntó que, qué relación encontraban entre las medidas de los lados de los triángulos que sí se podían formar y en los que no se podían formar, ellas respondieron que cuando la suma de los lados menores era mayor que la longitud del lado mayor, el triángulo sí existía, pero que cuando esto no se cumplía el triángulo no existía, además, cuando se restaban las medidas de los lados menores, la longitud del tercer lado era mayor a ese resultado.

Después en la segunda actividad, cuando se utilizó la regla y el compás para construir los triángulos con las medidas especificadas en la tabla, ellas pudieron observar en dichas construcciones, las condiciones que deben cumplir las medidas de los segmentos para que pueda existir un triángulo.

La aplicación de la actividad permitió darnos cuenta de que era conveniente tener más cuidado al cortar los palos de madera y que además era necesario organizarlos de tal manera que se logre el objetivo de cada una de las filas de la tabla.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

En este capítulo se presentan las características de la escuela y del grupo donde se llevó a cabo la experimentación, así como el análisis a posteriori donde se dan a conocer los datos obtenidos, explicando los momentos significativos de cada una de las sesiones que fueron destinadas para el desarrollo de las situaciones didácticas, se expresan las interacciones que surgieron entre los alumnos, el saber y el profesor. Además se realiza la validación de la situación, en la que confrontaremos el análisis a priori con el análisis a posteriori, lo cual permitirá reflexionar sobre los resultados obtenidos.

5.1 Experimentación

En este apartado se indican las particularidades de la población en donde se aplicó la secuencia didáctica; es decir, se describe el entorno sociocultural y las caracteristicas del grupo. Las sesiones fueron dos de 90 minutos cada una; la primera, el jueves 7 de abril de 2016, de las 10:40 a. m. a las 12:10 p. m. y la segunda el viernes 8 de abril de 9:35, a las 10:20 a. m.; como el receso es de 10:20 a 10: 40 a. m., volvimos a retomar la clase de 10:40 a 11:25 a. m.

5.1.1 Entorno sociocultural de los alumnos

La Escuela Secundaria Técnica #73, esta localizada al sureste de la ciudad de Durango, con domicilio en calle Paseo de las Águilas y Gaviota s/n, en el Fraccionamiento Real del Mezquital, está a 10 minutos del centro de la ciudad. La población en la que se encuentra ubicada la escuela, es de clase media y alta y tiene todos los servicios públicos necesarios para un buen funcionamiento como son el agua, drenaje, luz, calles pavimentadas y transporte, además se pueden encontrar cerca, misceláneas y centros comerciales de autoservicio.

Cuenta con turno matutino y vespertino en las clases, siendo el primero en el que se realizó la experimentación de la situación didáctica. La hora de entrada es a las 7:20 a. m. y la hora de salida 1:40 p. m.

Los alumnos de esta institución son aproximadamente 700 y provienen de los siguientes lugares, fraccionamientos: Real del Mezquital, Granja Graciela, Villa Dorada, Valle del Mezquital, Huizache II, las Milpas, Sta. Teresa, SEDUE, Loma Bonita, Nuevo Durango, Nogales, Benito Juárez, Niños Héroes, Camino Real, Domingo Arrieta, Madero, Benigno Montoya, 8 de Septiembre, Jardines de San Antonio, Juan de la Barrera; colonias: Morelos, Valle Verde, Azteca y Tierra Blanca.

5.1.2 Características del grupo de segundo “F”

El grupo esta conformado por 34 alumnos, cuyas edades oscilan entre los 13 y 14 años, es un grupo mixto y pertenecen a familias de nivel económico medio y alto. Les agrada trabajar en equipo, se apoyan en el momento de realizar las actividades y les gusta participar al socializar las respuestas; los conocimientos previos que tiene la mayoría del grupo, los utilizan en las diferentes situaciones donde sean necesarios, gracias a su interés por aprender. Lo anterior ayuda a que el proceso de enseñanza y aprendizaje se lleve a cabo mediante un ambiente positivo en el aula.

5.2 Análisis de la Actividad 1 "Existencia de triángulos"

El propósito de la primera de las actividades era ayudar a que los alumnos construyeran su conocimiento, manipulando el material didáctico proporcionado (palos de madera), para que de esa forma con el desarrollo de la actividad pudieran darle sentido al tópico matemático, desigualdad del triángulo.

5.2.1 Situación de acción (inciso a)

Antes de iniciar la clase, la profesora titular organizó a los alumnos en 10 equipos de 3 y 1 de 4; el criterio fundamental que utilizó para organizarlos, fue considerando que el desempeño académico fuera homogéneo entre los integrantes. La profesora-investigadora repartió las hojas de trabajo y luego inició la clase agradeciendo a los alumnos su participación en la aplicación del instrumento; les pidió que pusieran atención para evitar distraerse y de esa manera entender las instrucciones.

Luego les preguntó que si ya habían terminado de escribir los datos en su hoja de trabajo (Nombre completo, fecha, grado y grupo al que pertenecen y por último, el número del equipo del que forman parte); las alumnas del equipo 3, respondieron que ya habían terminado.

Aunque solo este equipo manifestó haber terminado, la profesora-investigadora percibió que la mayoría había concluido, por lo tanto decidió seguir con la actividad de la siguiente manera:

3 **Ma:** ¿Puede leer las instrucciones alguna de las tres, por favor, en voz alta para que los demás escuchen?

4 **A3:** Instrucciones. "En equipos de tres personas realicen la siguiente actividad. ¿Se puede construir siempre un triángulo con tres segmentos de cualquier longitud?"

5 **Ma:** Hasta ahí. Vamos a trabajar en esta actividad, con palos de madera de diferentes medidas. Por ejemplo, si yo les doy tres palos de madera de 10 cm cada uno ¿se podrá formar un triángulo?

Figura 16. Comenzando la situación de acción

Hasta este momento todavía no se les había proporcionado el material didáctico de los palos de madera. Y tal como se esperaba, todo el grupo responde de inmediato que sí, y la profesora-investigadora les hizo una pregunta, como se muestra a continuación en el diálogo:

6 **A:** Sí.
7 **Ma:** ¿Están seguros que se puede formar el triángulo?
8 **A:** Sí.

Como todos están de acuerdo la profesora-investigadora, continuó con la siguiente pregunta

9 **Ma:** Por ejemplo, si les doy tres palos de madera que miden 20 cm, otro 20 cm y otro 40 cm, ¿ se podrá formar?

En esta ocasión, se logra escuchar que la respuesta está dividida entre los alumnos, ya que unos dicen que sí y otros que no. Por lo que la profesora-investigadora le pide a la alumna del equipo 3 que continúe leyendo las instrucciones de la actividad, como se muestra en el siguiente registro:

13 **A3:** “Para saberlo, van a construir triángulos con palos de madera y llenar la siguiente tabla. Los palos tendrán medidas específicas y serán utilizados para formar los lados del triángulo”.
14 **Ma:** Hasta ahí por favor. Les voy a proporcionar los palos de madera (la profesora-investigadora y la maestra titular, reparten el material en los equipos. A cada uno de éstos se les proporcionó un juego de 21 palos, organizados de tres en tres, con respecto a las filas que estaban en la tabla).
Si se fijan, los palos están organizados con ligas, ¿esto por qué?, porque están acomodados de acuerdo a las medidas que les piden en la tabla, ¿ya la vieron?, ¿qué dice? (una alumna levanta la mano y la profesora-investigadora le sede la palabra).

15 **A8:** Medida de los lados (lee las medidas indicadas en la tabla), ¿genera triángulo?, ¿sí, o no?, ¿por qué? y, ¿qué tipo de triángulo es?

Figura 17. Fotografía del material

Se les preguntó a los alumnos, ¿qué medidas tiene el primer triángulo?, los alumnos respondieron:

17 **A:** 10 cm, 10 cm y 10 cm.

Como los palos de madera estaban organizados de tres en tres mediante ligas, para evitar que se confundieran al momento de comprobar la existencia o no de los triángulos, la profesora-investigadora les dijo a los alumnos que ya podían quitarle las ligas y buscar tres palos de color rosa con medida de 10 cm, ya que estas medidas estaban indicadas en la primera de las filas. También les señaló que donde decía ¿por qué?, primero pensaran bien qué iban a contestar, que platicaran entre los tres o cuatro integrantes y luego ya anotaran sus respuestas.

Para lograr la devolución, el material que se les proporcionó a los alumnos, en este caso los palos de madera, estaban pintados de colores, con lo cual se pretendía identificar las medidas de cada uno de ellos y también se quería que les fuera de interés para que entraran en la primera etapa de la devolución, mencionada por Brousseau (1986), la cual es el acercamiento puramente lúdico, en esta etapa los alumnos comienzan a manipular el material y a explorarlo.

Luego que los alumnos se familiarizaron con el material didáctico (el cual es una representación del objeto matemático), lo pudieron relacionar con la actividad que se les propuso en la hoja de trabajo; en ese momento entraron en la segunda de las etapas, la devolución de una preferencia, ya que ellos se dieron cuenta que si trataban de formar los triángulos con los palos de madera de medidas específicas, ellos podían comprobar si en realidad existía o no; es decir, al manipular el material, pudieron obtener un resultado.

Por ejemplo, algunos equipos, luego de escuchar las instrucciones, observaron la tabla, tomaron los palos de madera para representar el triángulo, ubicaron los de 10 cm y al observarlo mencionaron que era un equilátero.

Otros equipos, primero acomodaron los conjuntos de palos de madera, haciéndolos corresponder con las medidas que estaban indicadas en la tabla, posteriormente ubicaron los palos de medidas de 10 cm como indicaba la primera de las filas y de esa manera comenzaron a llenar la tabla.

Los demás equipos decidieron que primero formarían el de la fila uno, luego que escribirían el por qué y por último anotarían qué tipo de triángulo es.

En este momento ellos estaban actuando ante la situación planteada. Se observó que en la mayoría de los equipos, los integrantes se apoyaban y se ponían de acuerdo sobre las acciones que harían.

En seguida se muestra un fragmento (transcripciones de la 321 a la 326) del momento en el que las integrantes del equipo 6 empiezan a actuar sobre la situación planteada:

321 **A6.1:** Primero tomamos los palillos.
322 **A6.2:** A ver, éste… primer lado, 10, 10 y 10.
323 **A6.2:** Ok.
324 **A6.3:** ¿Genera triángulo?
325 **A6.1:** Pon los palillos.
326 (Todas repiten 10, 10 y 10, mientras acomodan los palos de madera para formar el triángulo).

Las alumnas lo primero que hicieron fue tomar los palos de madera para representar el triángulo, luego identificaron los de medida de 10 cm y para responder si genera triángulo o no, formaron el triángulo con los palos de madera.

5.2.2 Situación de formulación – validación (inciso a)

Describiremos las diferentes situaciones de formulación que se dieron entre los integrantes de cada uno de los equipos, así como las formas en las que ellos pudieron comunicarse y los procedimientos que utilizaron para resolver la primera de las actividades. Es importante mencionar que consideramos conveniente que en este análisis estuvieran juntas las situaciones de formulación y validación, debido a que mientras los alumnos estuvieron respondiendo la tabla de la actividad 1, para elegir las repuestas de cada una de las filas, primero formulaban; es decir, proponían procedimientos, pero luego los validaban con sus compañeros; la interacción era situación de formulación, situación de validación, y viceversa, hasta que cada equipo completó la tabla.

Luego que cada uno de los equipos organizó la forma en la que actuarían en el inciso “a”, la intención era que con las medidas (10 cm, 10 cm y 10 cm) de la primera fila ellos dijeran que era un triángulo equilátero y que asociaran ese conocimiento previo para decir si se podía formar o no un triángulo, mucho antes de armarlo con los palos de madera.

Como se puede observar a continuación, tanto en los diálogos de los equipos, como en sus respuestas, fue sencillo para ellos responder la primera de las filas, ya que el conocimiento previo que tenían sobre el triángulo equilátero, les permitió responder con facilidad que sí existía un triángulo con esas medidas.

Tal como se esperaba, las alumnas del Equipo 4, al ver en la tabla las medidas de los palos de madera para formar el primer triángulo, notan que sí es posible y lo relacionan con el equilátero. Sin embargo, utilizan los palos de madera para representar el triángulo y de esa forma comprobar su hipótesis.

Los siguientes diálogos reflejan que en la mayoría de los equipos se cumplió lo que habíamos considerado:

146 **A4.1:** Medida de los lados, 10, 10 y 10. ¿Se forma un triángulo? A ver, agarren los de 10.
147 **A4.2:** Sí se arma.
148 **A4.1:** ¿Genera un triángulo?
149 **A4.2 y A4.3:** Sí.
150 **A4.1:** ¿Por qué?
151 **A4.2:** Porque sus lados son iguales.
152 **A4.1:** Porque sus lados son iguales y equiláteros.
153 **A4.2:** ¿Qué tipo de triángulo es?
154 **A4.1 y A4.3:** Equilátero.

En el Equipo 5, uno de los alumnos recordó que con tres lados iguales sí se puede formar un triángulo equilátero y para que un triángulo pueda existir, es necesario que la suma de la medida de los dos lados menores sea mayor al tercer lado, pero a pesar de eso, les faltaba mencionar que al sumar dos lados cualquiera, el resultado debía ser mayor al tercero de los lados. Así, en el equipo hubo dos alumnos que estuvieron de acuerdo en que con tres lados iguales sí se podía formar un triángulo,

233 **A5.1:** Todos sabemos que sí es de 10, de 10, de 10, sí se puede.
234 **A5.2:** Sí se puede.
235 **A5.1:** ¿Por qué? porque es un triángulo equilátero.
236 **A5.3:** Pues sí.
237 **A5.2:** Porque sí se pueden formar sus ángulos, ¿no?
238 **A5.3:** Sí.

Por su parte, una de las integrantes del Equipo 8 recordó que con lados del mismo tamaño sí se puede formar un triángulo equilátero, hecho con el que las demás alumnas estuvieron de acuerdo. Otra de las alumnas comentaba que si el resultado de la suma de las medidas de los tres lados era un múltiplo de 3, entonces el triángulo sí se podría formar, aunque, posteriormente descarta esta propuesta al darse cuenta que las sumas de los lados de un triángulo cualquiera, no siempre da como resultado un múltiplo de tres.

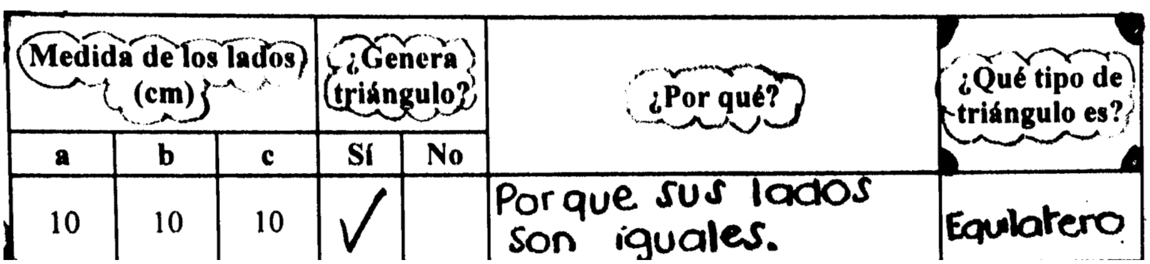
468 **A8.1:** Medida de lados 10, 10, 10, ¿Genera triángulo?, sí, ¿Por qué?
469 **A8.2:** Porque es un triángulo…
470 **A8.1:** Porque al ser del mismo tamaño se forma un triángulo equilátero.
471 **A8.2:** Del mismo tamaño.

A continuación se organizan las respuestas que anotaron los equipos para el inciso a, en la Fila 1: 10, 10, 10 (ver Tabla 7. Solución óptima):

Tabla 10. Resultados Fila 1

Medidas	**¿Se forma triángulo?**	**Justificación**	**Equipos**
Fila 1 (10, 10, 10)	Sí	Porque sus lados son iguales	Todos (11)

Como evidencia, se muestra lo que propone el Equipo 4 para la primera de las filas (ver Tabla 7. Solución óptima):



Medida de los lados (cm)			¿Genera triángulo?		¿Por qué?	¿Qué tipo de triángulo es?
a	b	c	Sí	No		
10	10	10	✓		Porque sus lados son iguales.	Equilatero

Figura 18. Respuesta del Equipo 4, Fila 1

Del siguiente fragmento (transcripción de la 239 a la 254), podemos rescatar que uno de los integrantes del Equipo 5 logra recordar la representación algebraica, y relaciona las medidas de los lados mediante una adición, esto debido a que indica mediante literales cada uno de los lados del triángulo para expresar su razonamiento:

239 **A5.1:** ¡Oye no!, porque $a + b > c$, y ya.
240 **A5.3:** Pero de todos modos ese cálculo es para… no sé.
241 **A5.1:** $a + b > c$
242 **A5.3:** ¿Por qué? Porque sí.
243 **A5.1:** No pero sí, porque tienen las mismas medidas.
244 **A5.2:** Sus ángulos sí coinciden, ¿no? Mejor.
245 **A5.2:** Es que no me acuerdo, se supone que $a + b > c$ y en este caso sí es. O sea que podríamos

decir que… y también (como está escribiendo la respuesta, algunas partes de ella no las dice verbalmente, sino que lo plasma en la hoja de trabajo).

246 **A5.3:** ¿Y qué más?

247 **A5.2:** Porque $a + b > c$.

248 **A5.1:** Es que no me acuerdo sí era menos o más.

249 **A5.3:** Bueno pues, ese es mayor y sí se pudo, el chiste es que los dos palos puedan conformar, sea tocar las dos puntas del otro sin tocar el otro, así, ¿me entiendes? (el alumno intenta explicar a sus compañeros apoyándose con los palos de madera).

250 **A5.2:** Sí.

251 **A5.3:** ¿ $a + b$ es qué?

252 **A5.1:** $a + b$ es mayor que c.

253 **A5.3:** A ok.

254 **A5.2:** Esa es la fórmula.

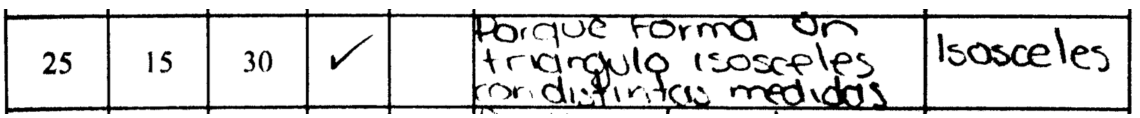
En la fila dos, cuya intención es que los alumnos relacionen las medidas con un triángulo escaleno, se puede observar que a pesar de que nuestra hipótesis era que lo responderían antes de utilizar el material didáctico, las respuestas de los equipos fueron diversas y en algunos casos antes de anotarla, primero discutieron un poco. A continuación se muestra la Tabla 9 con las diferentes respuestas que dieron los equipos para la Fila 2: 25, 15 y 30 (ver Tabla 7. Solución óptima):

Tabla 11. Resultados Fila 2

Medidas	¿Se forma triángulo?	Justificación	Equipos
Fila 2 (25, 15, 30)	Sí	Encajan en medidas y forman un triángulo	1
		Porque se forma un triángulo isósceles	2
		Porque los lados alcanzan las medidas de la base	3
		Porque sus lados son desiguales	4 y 7
		Porque la fórmula $a + b > c$ se cumple y los palos concuerdan	5
		Porque el de 25 y 15, forman un ángulo de 90°	6
		Sumando sus dos lados menores, dieron la suma del tercero	8
		Porque la base es más	9

		grande que los otros lados	
		Sumando sus lados menores	10
		Sumando sus dos lados menores dieron más que el tercero y así se pudo lograr	11

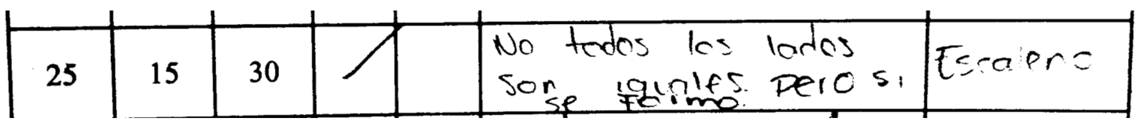
En los Equipos 2 y 3 se observa que aunque dicen que sí se puede formar un triángulo, señalan que éste es isósceles, lo cual es incorrecto:



25	15	30	✓		Porque forma un triángulo isosceles con distintas medidas	Isosceles

Figura 19. Respuesta del Equipo 2, Fila 2

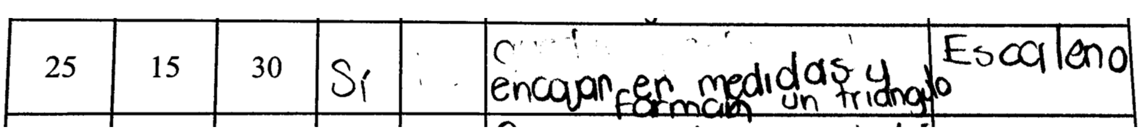
Otros equipos, como el 4 y 7, quienes dan la siguiente respuesta, se dan cuenta que aunque no todos los lados son iguales, sí se puede formar un triángulo escaleno:



25	15	30	✓		No todos los lados son iguales pero si se formo	Escaleno

Figura 20. Respuesta del Equipo 7, Fila 2

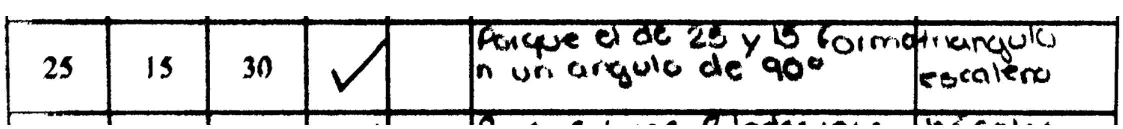
Algunos equipos, como el 1, respondieron mencionando algo relacionado con las medidas de los lados e identificaban la base del triángulo:



25	15	30	Sí		[illegible] encajan en medidas y forman un triángulo	Escaleno

Figura 21. Respuesta del Equipo 1, Fila 2

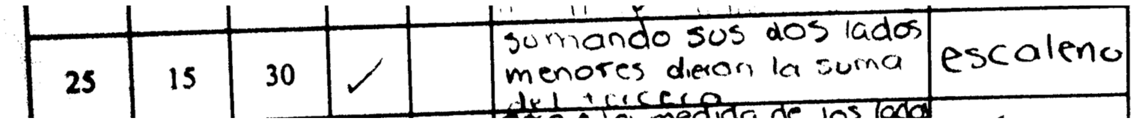
Por su parte, el Equipo 6, en el momento de explicar por qué existe un triángulo con esas medidas, dieron una respuesta incorrecta, ya que el triángulo no tiene un ángulo de 90°, pero sí mencionan que es un triángulo escaleno:



25	15	30	✓		Porque el de 25 y 15 forman un angulo de 90°	triangulo escaleno

Figura 22. Respuesta del Equipo 6, Fila 2

Otro caso particular, es el Equipo 8, quienes tienen como respuesta (la cual es incorrecta) en su hoja de trabajo la siguiente:



25	15	30	✓		sumando sus dos lados menores dieron la suma del tercero	escaleno

Figura 23. Respuesta del Equipo 8, Fila 2

Por lo tanto, del siguiente registro podemos rescatar dos momentos valiosos en el equipo 8, el primero de ellos es cuando la alumna 8.3, que había conjeturado que se podía formar un triángulo si la suma de sus lados era múltiplo de 3, se da cuenta que esto no siempre es válido. El segundo momento va ligado al anterior, pues esto les ayudó a cambiar su manera de justificar la posibilidad de formar triángulos, ahora observando las medidas de los lados. Cabe señalar que no encontramos relación alguna entre el diálogo y la respuesta en su hoja de trabajo.

502 **A8.2:** 25, 15 y 30.
503 **A8.1:** Son 44.
504 **A8.2:** 45.
505 **A8.3:** $35 + 25$, son 70.
506 **A8.1:** ¿Son 70? Vale y luego.
507 **A8.2:** Ése no es múltiplo de 3.
508 **A8.1:** 50, 70, sí.
509 (Luego de que realizan algunas sumas entre la medida de los lados proporcionadas en la tabla, ubican los palos de madera para intentar formar el triángulo).
510 **A8.1:** Sí, sí se forma.
511 **A8.2:** ¡Ah! es el isósceles.
512 **A8.1:** ¡Ah! es el escaleno.
513 **A8.2:** ¿Y sí lo pones así? No verdad.
514 **A8.3:** Es el escaleno.
515 **A8.1:** Bueno pongámosle escaleno, sí se forma.
516 **A8.2:** Sí, escaleno. ¿Por qué?
517 **A8.3:** Entonces espérense.
518 **A8.2:** Porque tiene una base…
519 **A8.3:** No, es que si no no tendría, si nos dio 70 no es múltiplo de 3, entonces a lo mejor lo de múltiplo de 3 no es. Yo digo, era lo que trataba de acordarme pero pues…
520 **A8.1:** Podemos ponerle, porque tienen una base mayor y ya no sé qué más.
521 **A8.2:** ¿Por qué?
522 **A8.3:** Tendríamos que borrar el otro y volverlo a...
523 **A8.2:** Sí pero primero ése.
524 **A8.1:** $25 + 15$ y 30… 70.
525 **A8.2:** 70.
526 **A8.3:** ¿Por qué puede formarse un triángulo?
527 **A8.1:** ¿Por qué se forma un triángulo?
528 **A8.2:** Porque las medidas de ¿las medidas de qué?
529 **A8.1:** De un escaleno son diferentes ¿no?

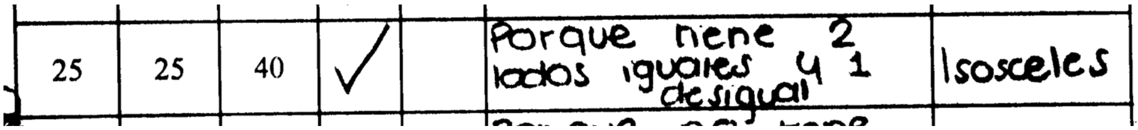
530 **A8.2:** No oigan pero en el escaleno la base… bueno no.

En la Fila 3: 25, 25 y 40 de la Tabla 7. Solución óptima, algunas de las respuestas que dieron los equipos están relacionadas con las características de un triángulo isósceles, como se observa a continuación:

Tabla 12. Resultados Fila 3

Medidas	¿Se forma triángulo?	Justificación	Equipos
Fila 3 (25, 25, 40)	Sí	Porque tiene dos lados iguales y uno desigual	1, 4 , 6
		Aunque no tenga las mismas medidas forman un triángulo	2
		Porque todos sus ángulos son de acuerdo a los de un triángulo	3
		Porque también la fórmula aplica a la perfección	5
		Queda exactamente.	7
		Porque la medida de los lados desiguales a la base es mayor a ella	8
		La tercera línea es mayor a las otras dos.	10
		Dos de sus lados son iguales y sumados suman más que el tercero	11
	No	Porque sus lados son menores a la base y sobro un tramo	9

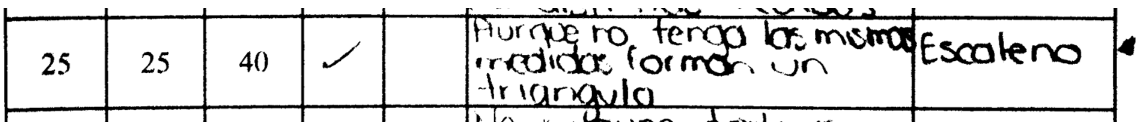
La respuesta de los Equipos, 1, 4 y 6, están relacionadas con las características de un triángulo isósceles, por lo que en este momento ellos todavía no encuentran una relación entre las medidas de los lados del triángulo:



25	25	40	✓		Porque tiene 2 lados iguales y 1 desigual	Isosceles

Figura 24. Respuesta del Equipo 4, Fila 3

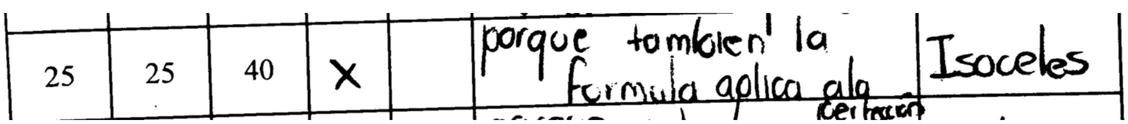
De esta manera también hubo respuestas incorrectas como las de los Equipos 2 y 3, que tratan de dar su justificación diciendo que los lados son diferentes o que los ángulos son de acuerdo a un triángulo:



25	25	40	✓		Porque no tenga los mismas medidas forman un triangulo	Escaleno

Figura 25. Respuesta del Equipo 2, Fila 3

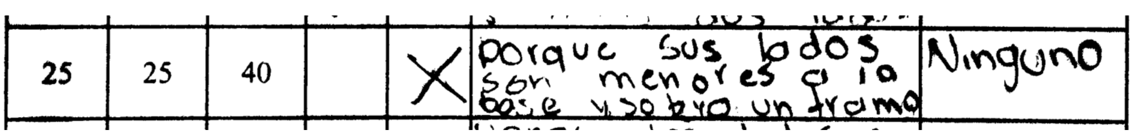
La respuesta que da el Equipo 5, la logramos relacionar con la respuesta que dieron en la primera de las filas (ver Tabla 7. Solución óptima), ya que se pudo confirmar que con su justificación se refieren a que $a + b > c$, pero ellos no quisieron anotar la misma justificación en esta ocasión:



25	25	40	X		porque tambien la formula aplica ala	Isoceles

Figura 26. Respuesta del Equipo 5, Fila 3

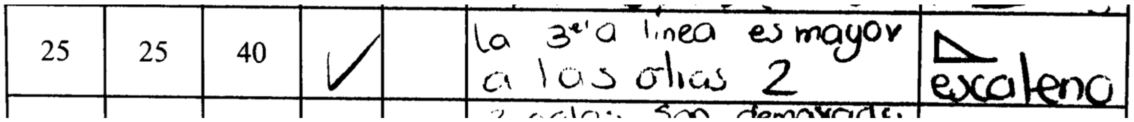
También está el caso del Equipo 9, cuyos integrantes anotaron que no existía un triángulo con esas medidas, y su justificación (incorrecta) es la siguiente:



25	25	40		X	Porque sus lados son menores a la base y sobra un tramo	Ninguno

Figura 27. Respuesta del Equipo 9, Fila 3

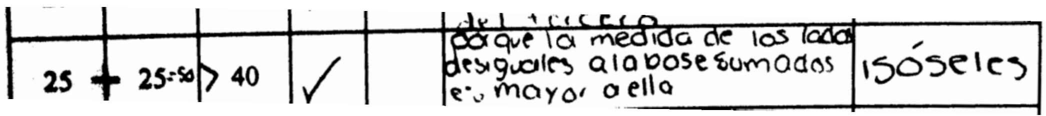
En el siguiente equipo, se puede notar que están haciendo un esfuerzo por encontrar una relación entre los lados del triángulo, pero en lugar de llamar segmento o lado, ellos se refieren con la palabra línea y además mencionan que es un triángulo escaleno y es isósceles:



25	25	40	✓		la 3era linea es mayor a los otras 2	escaleno

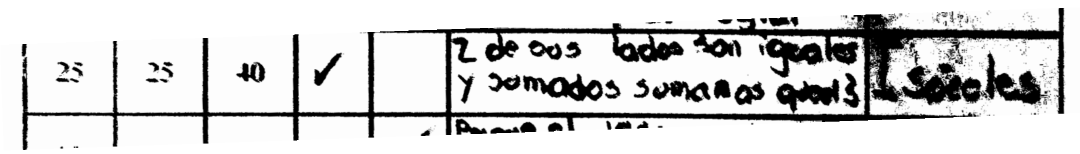
Figura 28. Respuesta del Equipo 10, Fila 3

En este momento de la actividad, ya fueron más equipos los que anotaron la relación entre los lados del triángulo, como es el caso del equipo 8 y 11, cuyas respuestas se muestran a continuación:



25	25 = 50 >	40	✓		porque la medida de los lados desiguales a la base sumados es mayor a ella	isósceles

Figura 29. Respuesta del Equipo 8, Fila 3



25	25	40	✓		2 de sus lados son iguales y sumados suman mas que el 3	Isósceles

Figura 30. Respuesta del Equipo 11, Fila 3

A continuación presentamos un momento significativo de la validación entre los integrantes del equipo 8. Este equipo en particular, hasta que formaron el tercero de los triángulos, pudo explicar por qué existía un triangulo con esas medidas en términos de sus lados y borraron las respuesta que habían anotado en las primeras filas:

531 **A8.1:** ¿Por qué? Bueno a ver, 25 y 25, los de 25 son los verdes y 40.
532 **A8.2:** No.
533 **A8.1:** ¿Ah no que no? Tómenla (al tratar de formar el triángulo se dan cuenta que sí es posible que exista un triángulo con esas medidas).
534 **A8.2:** Ah no sí, a que sí.
535 **A8.1:** Sí se forma, les dijimos.
536 **A8.3:** Hay que acomodarlos bien con la puntita.
537 **A8.2:** Les dijimos que sí se podía.
538 **A8.3:** Es isósceles.
539 **A8.2:** Isósceles, sí. 25, 25 y 40, isósceles.
540 **A8.1:** Ahí esta ¿verdad que sí se puede?
541 **A8.2:** Sí, nunca, nosotros nunca perdimos la fe, sí se puede.
542 **A8.1:** ¿Por qué se forma? ¡ah ya ya ya, yo sé, yo sé, porque la suma de los palos…
543 **A8.2:** De las medidas.
544 **A8.1:** De las medidas de los triángulos que se unen, da el total de la base, 20 y 20, 40, ya que esto mide 40.
545 **A8.3:** Pero esto es 25 y 25, 50.
546 **A8.1:** Más la puntita.
547 **A8.3:** No tiene que dar mayor.

548 **A8.1:** Bueno tiene que dar mayor a la base.
549 **A8.3:** Porque sí fuera 20 y 20, 40, no se podría, porque serían del mismo…
550 **A8.2:** Pero no son 20, 20 y 40, son 25, 25 y 40.
551 **A8.3:** Por eso o sea la suma de los otros dos.
552 **A8.1:** ¡Ah ya sé! La suma de los otros dos es mayor a la base.
553 **A8.3:** La suma de los otros dos desiguales, tendría que ser diferente.
554 **A8.2:** Es mayor a la base.
555 **A8.3:** O sea, mayor a la base pues.
556 **A8.1:** ¿Y entonces no es un triángulo isósceles?
557 **A8.2:** Sí, sí es.
558 **A8.3:** Sobre la primera, hay que borrar eso.
559 **A8.2:** Sí. Bueno pongamos en la tercera, porque las medidas de los lados desiguales...
560 **A8.1:** No, pero estos son iguales, bueno.
561 **A8.2:** Desiguales a la base.
562 **A8.1:** ¿Qué?
563 **A8.2:** Porque estos son iguales. Son desiguales a la base.
564 **A8.1:** ¡Ah!
565 **A8.3:** Porque la medida de los lados desiguales a la base, es mayor a la base.
566 **A8.2:** Que la medida de los lados desiguales a la base, sumados es igual, no, sumados es mayor a…
567 **A8.1:** Algo cortito, no tengo mucho espacio.
568 **A8.2:** Porque la medida de lo lados de la base, porque la medida de los lados desiguales a la base…
568 **A8.3:** Porque la medida de los lados desiguales a la base, es mayor…
569 **A8.2:** El resultado es mayor.
570 **A8.1:** ¿Pero por qué mayor, sí la base es más grande que ellos?
571 **A8.3:** Por eso es mayor a la base, 25 y 25, 50.
572 **A8.1:** ¡Ah!
573 **A8.2:** Para que se puedan unir. Sumados son mayor que la base.
574 **A8.1:** Porque la medida de los lados desiguales a…
575 **A8.3:** Pero es que, a ver, con permiso (la alumna toma el triángulo formado con los palos de madera) aquí va un 20 pues, digámosle que le quitamos…
576 **A8.2:** 5.
577 **A8.1:** Y así no se une.
578 **A8.2:** Con 20 no se va a unir.
579 **A8.1:** No, no se une.
580 **A8.2:** No se une.
581 **A8.3:** Entonces sí es por eso.
582 **A8.2:** Con 40 no se puede. Sí es porque…
583 **A8.1:** Entonces es por eso, porque la medida de los lados desiguales a la base, es mayor…
584 **A8.1:** Sumadas en mayor al...
585 **A8.3:** Sumadas es mayor a la base.
586 **A8.2:** Porque los, sí es, no importa que pongamos...
587 **A8.1:** Sumados es mayor a ella.

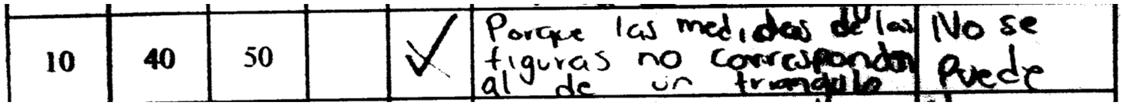
En las primeras tres filas, las medidas proporcionadas permiten a los alumnos explicar por qué se forman los triángulos, argumentando en términos de sus conocimientos previos sobre las características referentes a la clasificación de acuerdo a sus lados, pero a partir de la Fila 4, ellos deben percatarse de que ese conocimiento puede ser modificado para responder a la nueva situación planteada. Dicho lo anterior se rescata en la Tabla 13 de las respuestas que dieron, que 4 de los 11 equipos insisten en adaptar ese conocimiento, por lo que su respuesta no les permite dar paso al nuevo conocimiento.

Para la Fila 4 (ver Tabla 7. Solución óptima) se esperaba que las respuestas de los equipos estuvieran relacionadas con decir que cuando intentaron unir los palos de madera, lo que se formaba eran dos segmentos juntos y en esta ocasión algunos Equipos respondieron de la siguiente manera:

Tabla 13. Resultados Fila 4

Medidas	**¿Se forma triángulo?**	**Justificación**	**Equipos**
Fila 4 (10, 40, 50)	No	Porque las medidas de las figuras no corresponden a las de un triángulo	1, 3 y 4
		No, ninguno, todos no se puede poner como base ni como lado	2
		Porque $a + b$ no es mayor que c y no se puede	5
		Porque a un lado le faltaron 10 cm	6, 7, 10 y 11
		La medida de los lados opuestos a la base dan su medida, por lo tanto no se puede	8

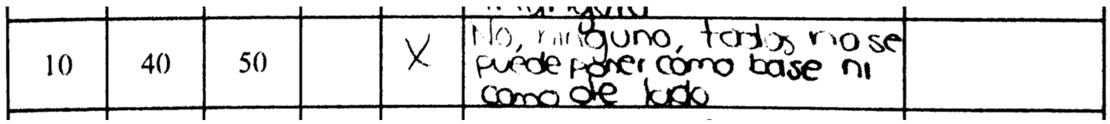
Las respuestas que dieron tres de los equipos, están relacionadas con el hecho de que con esas medidas no se puede formar un triángulo:



10	40	50		✓	Porque las medidas de las figuras no corresponden al de un triangulo	No se puede

Figura 31. Respuesta del Equipo 3, Fila 4

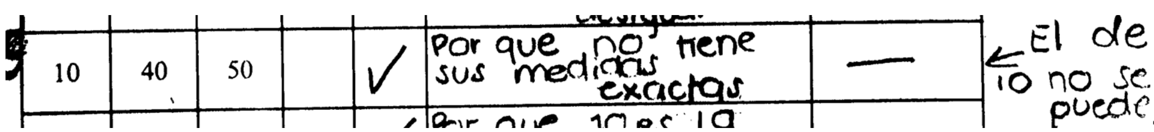
En el caso de este equipo (Equipo 2), intentaron acomodar los palos de madera; es decir, utilizar la estrategia de apoyarse con dicha representación, lo cual les permitió dar su justificación:



10	40	50		X	No, ninguno, todos no se puede poner como base ni como de lado	

Figura 32. Respuesta del Equipo 2, Fila 4

Podemos decir que con la frase “medidas exactas” los integrantes del siguiente equipo (Equipo 4), la utilizan cuando sí se puede formar un triángulo con tres segmentos, por lo tanto en su explicación, al decir que no existe un triángulo con esas medidas, mencionan que no existe porque no son exactas.



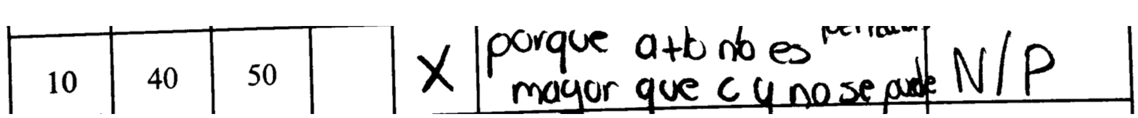
10	40	50		✓	Por que no tiene sus medidas exactas	—	El de 10 no se puede

Figura 33. Respuesta del Equipo 4, Fila 4

A continuación mostramos el diálogo que tuvieron para acordar la respuesta que darían; es decir, rescatamos el momento en el que ellos validaron su respuesta y llegaron a un acuerdo:

173 **A4.2:** A ver, 10, 40 y 50, no, esto no se va a poder.
174 **A4.1:** No manches ¿qué es esto? ¿sí se puede?
175 **A4.3:** No.
176 **A4.1:** Mira sería como muy cerradito, espérate, ya sé como. Pero espérate, quítate, quítate.
177 **A4.2:** No se puede.
178 **A4.3:** No se puede.
179 **A4.1:** Mira júntalo.
180 **A4.2:** No con todos se va a poder.
181 **A4.3:** No manches.
182 **A4.1:** No, no se puede. No ¿Por qué? Porque no tiene medidas…
183 **A4.2:** Exactas.
184 **A4.1:** Ajá.

El Equipo 5, fue el que explicó el por qué, utilizando la relación entre las medidas de los palos de madera:



10	40	50		X	porque a+b no es mayor que c y no se puede	N/P

Figura 34. Respuesta del Equipo 5, Fila 4

Otros Equipos como el 6, 7, 10 y 11, responden en términos de que a alguno de los lados les faltaron centímetros:

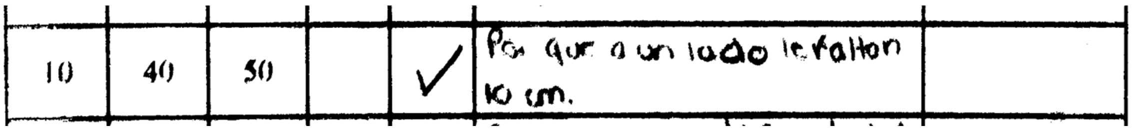


Figura 35. Respuesta del Equipo 6, Fila 4

Tenemos también la respuesta del Equipo 8, en la que se observa que trata de explicar con sus palabras lo que nosotros habíamos considerado en el análisis a priori:

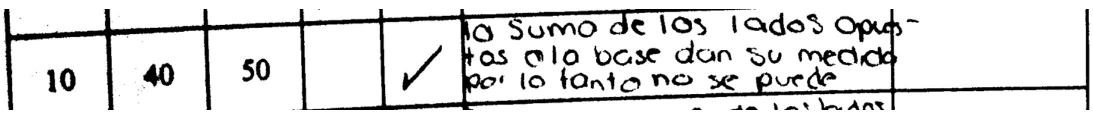


Figura 36. Respuesta del Equipo 8, Fila 4

Continuamos con la Fila 5 de la Tabla 7. Solución óptima, en la cual nosotros consideramos que la respuesta sobre el por qué, que darían los equipos sería, "porque las medidas de dos de los lados son la mitad de la tercera medida y lo que se forma son dos segmentos unidos". Como se puede observar en la siguiente Tabla 12 (Resultados de la Fila 5), algunos equipos como el 2, continúan dando la misma respuesta que en la Fila 4, hasta este momento no han podido explicar mediante la reestructuración de su conocimiento; es decir, no han encontrado la relación entre las medidas proporcionadas. Por otro lados, están los Equipos 1, 6 y 9, que dan una justificación que tiene que ver con las medidas de los lados, diciendo que a uno de ellos le sobra o que no alcanzan.

Tabla 14. Resultados Fila 5

Medidas	¿Se forma triángulo?	Justificación	Equipos
Fila 5 (10, 10, 20)	No	No alcanzaron los lados	1, 3, 6 y 9
		No, ninguno, todos no se puede poner como base ni como lado	2
		Porque 10 es la mitad de 20 y no se hace	4 y 10
		Porque $a + b$ no es mayor que c y no se puede	5

		Porque no hay forma de que quede el 10 con el 20	7
		Porque la suma de los lados opuestos a la base dan su medida $10 + 10 = 20$ base= 20	8 y 11

Las respuestas que se proporcionaron en las hojas de trabajo son las siguientes:

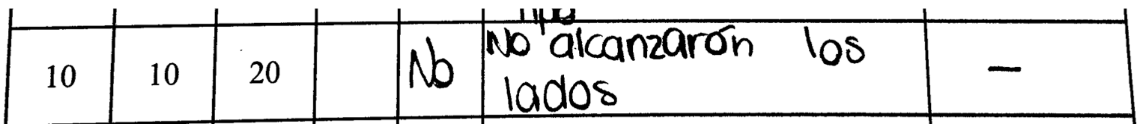


Figura 37. Respuesta del Equipo 1, Fila 5

Los integrantes del Equipo 2, mencionan que no se puede con ninguno de los segmentos, ni como base ni como lado, suponemos que con esto se refieren a que no se alcanza a formar el triángulo, como ellos consideraron que pondrían la misma respuesta que en la Fila 4, solo señalaron con una flecha de la siguiente manera:

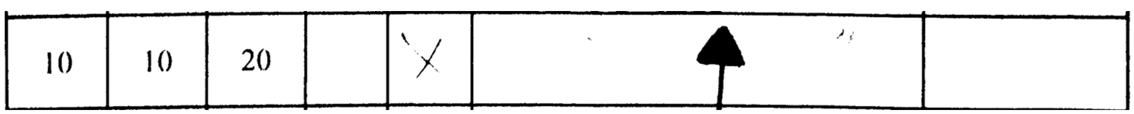


Figura 38. Respuesta del Equipo 2, Fila 5

Otros Equipos como el 4 y el 10, escriben su respuesta considerando que 10 es la mitad de 20, o que 20 es el doble de 10; es decir, tratan de encontrar relación entre las medidas de los palos de madera:

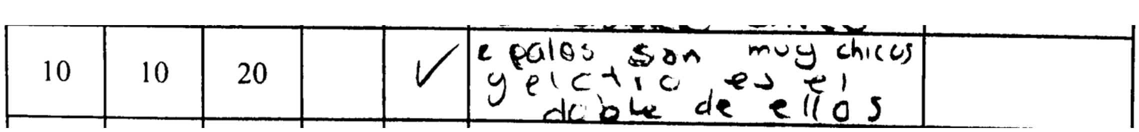


Figura 39. Respuesta del Equipo 10, Fila 5

El Equipo 5, a diferencia de los demás, logra dar una explicación relacionando los lados y justificando su explicación y al igual que en la fila anterior, decidieron anotar la palabra también, es decir porque $a + b$ no es mayor que c y no se puede:

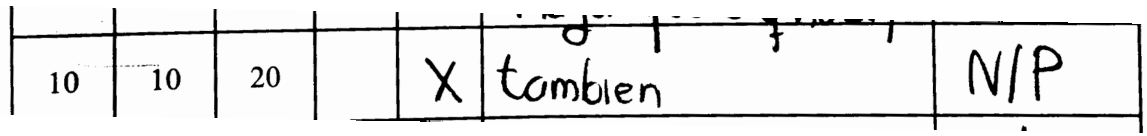


Figura 40. Respuesta del Equipo 5, Fila 5

Otro caso particular es el Equipo 7, que identifican por qué no se puede formar el triángulo, pero su lenguaje natural no les permite expresar su respuesta de manera correcta, ya que ellos consideran que la justificación es la siguiente:

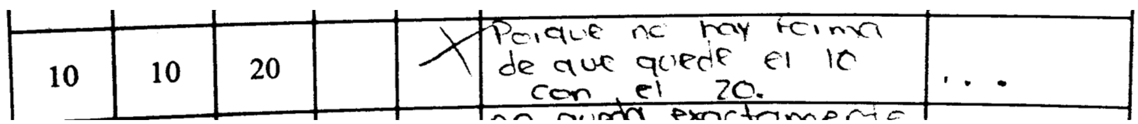


Figura 41. Respuesta del Equipo 7, Fila 5

En lo que se refiere a los Equipos 8 y 11, continúan dando la misma respuesta que en los anteriores, mencionan que es porque la suma de sus lados menores, debe ser mayor que el lado más grande.

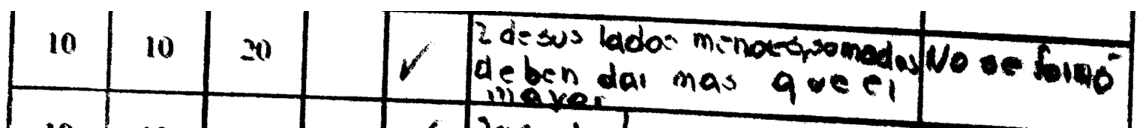


Figura 42. Respuesta del Equipo 11, Fila 5

En la penúltima de las filas (Fila 6), nuestra hipótesis fue que los alumnos respondieran, que no alcanza a cerrar el triángulo; los palos de 10 cm, deberían ser más grandes, y las respuestas que dieron los equipos son las que se presentan en la siguiente tabla (**Tabla 13.** Resltados Fila 6), en la que se puede observar que solo hubo cuatro respuestas diferentes.

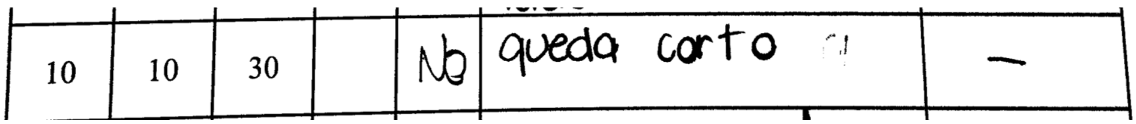
Hasta este momento el Equipo 2 ya no menciona la base del triángulo, por lo que se podría decir que ellos están encontrando una relación entre los lados,. Los equipos dieron diversas respuestas, por ejemplo el 1, 4, 6 y 9, mencionan que los lados quedan cortos o que tiene sus lados angostos y base larga.

Tabla 15. Resultados Fila 6

Medidas	¿Se forma triángulo?	Justificación	Equipos
Fila 6 (10, 10, 30)	No	Queda corto	1, 4, 6 y 9
		Con la medida de los lados no se alcanza a	2, 3, 7 y 10

		hacer un triángulo	
		Porque $a+b$ no es mayor que c y no se puede	5
		La medida del “c” es mucho mayor que el “a” y el “b” juntos	8 y 11

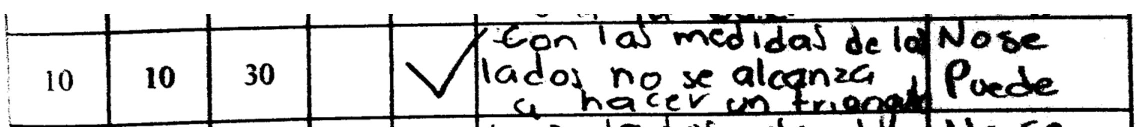
Mostramos a continuación la respuesta del Equipo 1:



10	10	30		No	queda corto	–

Figura 43. Respuesta del Equipo 1, Fila 6

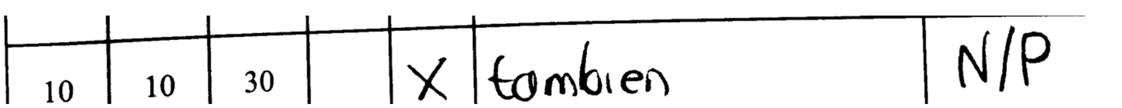
Además tenemos el caso de los Equipos 2, 3, 7 y 10, quienes mencionan que con esas medidas no se alcanza a hacer un triángulo o que las medidas no son equivalentes, uno es demasiado grande:



10	10	30		✓	Con las medidas de lo lados no se alcanza a hacer un triang	Nose Puede

Figura 44. Respuesta del Equipo 3, Fila 6

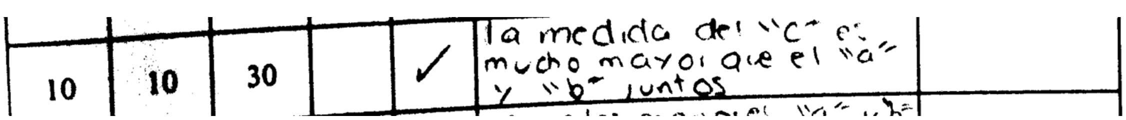
El Equipo 5, continua anotando en la justificación, la palabra también, es decir porque $a+b$ no es mayor que c y no se puede:



10	10	30		X	tambien	N/P

Figura 45. Respuesta del Equipo 5, Fila 6

Los Equipos 8 y 11 continúan relacionando las medidas de los palos de madera de manera correcta:



10	10	30		✓	la medida del "c" es mucho mayor que el "a" y "b" juntos	

Figura 46. Respuesta del Equipo 8, Fila 6

Y por último, las respuestas que dieron los equipos a la última fila (Fila 8) de la Tabla 7. Solución óptima, fueron diversas, pero se puede notar que algunos de ellos ya tratan de explicar la propiedad de la desigualdad del triángulo.

En la Tabla 14 se puede notar que el Equipo 1, utiliza la palabra “inconcurrente” para explicitar que no se puede formar un triángulo con las medidas proporcionadas en la fila 7, esta palabra no existe ni en el vocabulario matemático, ni en el vocabulario común, sino que más bien la palabra correcta es “concurrir”, por lo que nosotros pensamos que su justificación se originó cuando los alumnos tratan de encontrar una palabra que describa la situación y deciden utilizar ésa, lo cual generó una confusión de conceptos.

Los Equipos 2 y 3, vuelven a mencionar la base, pero en este momento al decir: “los lados no dan con la base”, tratan de explicar relacionando las medidas de los palos de madera. Otros como el 4, 6, 7 y 10, logran expresar con su lenguaje natural, una relación entre las medidas de los palos de madera, identificando por qué no es posible que exista un triángulo, como se esperaba en el análisis a priori; ellos ya encontraron argumentaciones que los llevaron a justificar su respuesta. En el caso de los Equipos 5, 8 y 11, observamos que sus respuestas ya son específicas; es decir, ellos identifican la relación entre las medidas de los tres segmentos cualesquiera para que pueda existir o no un triángulo. Por otro lado tenemos al Equipo 9, quienes no dieron ninguna respuesta en la columna en la que se les pedía que explicaran por qué existe o no el triángulo con las medidas dadas en la Fila 7.

Tabla 16. Resultados Fila 4

Medidas	¿Se forma triángulo?	Justificación	Equipos
Fila 7 (11, 14, 25)	No	Es inconcurrente	1
		Los lados de la figura no dan con la base	2 y 3
		Porque no alcanzan las medidas	4, 6, 7 y 10
		Porque $a+b$ no es mayor que c y no se puede	5
		Los palos menores “a” y “b” son la medida del “c”	8
		Sus lados menores alcanzan el mínimo de 25 y no formó	11

A continuación se muestran las respuestas de algunos de los equipos.

11	14	25		No	Es incorcurrente	—

Figura 47. Respuesta del Equipo 1, Fila 7

11	14	25		✓	Los lados de la Figura no dan con la base.	No se Puede

Figura 48. Respuesta del Equipo 3, Fila 7

11	14	25		✓	porque no alcanza las medidas	—

Figura 49. Respuesta del Equipo 4, Fila 7

11	14	25		✓	los palos menores "a" y "b" son la medida de "c"	

Figura 50. Respuesta del Equipo 8, Fila 7

11	14	25		✓	Sus lados menores alcanzán el minimo de 25 y no forma	No se formó

Figura 51. Respuesta del Equipo 11, Fila 7

5.2.3 Situación de validación en el grupo (inciso a)

Dentro de los cuatro tipos de situaciones distinguidas por Brousseau, tenemos la situación de validación, la cual representa el momento en el que se trata de persuadir a uno o más alumnos de que la respuesta que se está dando es la correcta, pero esto se debe hacer mediante argumentaciones; es decir, mediante pruebas que puedan respaldar lo que se está afirmando.

Al recorrer los equipos, la profesora-investigadora, pudo observar las respuestas que anotaron cada uno de los equipos, esto le permitió elegir a los equipos que pasarían al pizarrón a dar a conocer sus respuestas, para generar un ambiente de confrontación y de esa manera cada equipo tratara de convencer a los demás, del por qué su respuesta es la correcta.

Para continuar con la actividad, la profesora les dijo a los alumnos lo siguiente:

22 **Ma:** A ver, como ya la mayoría terminó, ya vamos a poner atención acá al frente por favor, ya apaguen el audio los que aun no han terminado, ¿listos? Ahora yo tengo aquí la tabla que ustedes tienen en su hoja de trabajo y van a pasar algunos equipos a escribir su respuesta, pero no es nada más escribirlas, nos van a explicar qué hicieron y por qué decidieron poner esas respuestas ¿sí? incluso vamos a tener los palillos para que los peguen en el pizarrón y formen los triángulos, en dado caso que sí se formen. Pase el equipo 7 a contestar la primera, por favor.

Una de las integrantes del eEquipo 7, pasa al pizarrón para compartir su respuesta, para ello, primero formó el triángulo y después completó la Fila 1, al compartir sus respuestas, los demás equipos observaron. La profesora lo que quería, era que se dieran cuenta de las diferencias entre la respuesta que estaba escribiendo el equipo y las respuestas que los demás tenían.

31 **A7.1:** La primera pregunta decía que sí era triángulo o no.
32 **Ma:** Y ahí ¿qué pusieron?
33 **A7.1:** Que sí.
36 **Ma:** ¿Después?
37 **A7.1:** Pusimos el por qué.
38 **Ma:** ¿Y cuál fue ese por qué?
39 (La alumna anota el por qué en la tabla que esta en el pizarrón)
40 **Ma:** A ver, en voz alta.
41 **A7.1:** Porque todos sus lados son iguales.
42 **Ma:** Porque todos sus lados son iguales, y luego ¿qué sigue?
43 **A7.1:** ¿Qué tipo de triángulo es? Y le pusimos que es equilátero.

Luego de que la alumna da a conocer la repuesta de su equipo, la profesora-investigadora les pide a los demás equipos que levanten la mano los que tengan la misma respuesta, por lo que dos de los 10 equipos restantes levantan la mano, pero se había observado con anterioridad, que la mayoría de los equipos, había dado una respuesta relacionada con los lados del triángulo.

Una de las alumnas, integrante del Equipo 8 levantó la mano, y decidió compartir la respuesta que ellas tenían:

50 **A8.3:** La suma de cada uno de sus lados equivale a un múltiplo de 3.
51 **Ma:** La suma de cada uno de los lados , ustedes decidieron poner esa respuesta, ¿por qué creen que esa respuesta es la correcta?
54 **A8.2:** Porque al sumar los lados del triángulo nos dio 30 y el número es un múltiplo de 3.

La profesora-investigadora les dijo a los alumnos que se continuaría con la tabla y que luego de eso se discutirá cuál es la respuesta correcta. En el momento de revisar las hojas de trabajo, se pudo observar que las alumnas del Equipo 8, cambiaron su respuesta y anotaron que el triángulo se formaba porque todos sus lados eran iguales. Al escuchar con detenimiento el audio que grabó este equipo, se obtiene una evidencia clara de todo el procedimiento que ellas realizaron para responder la tabla, de esta manera se refleja que la respuesta que tenían en la Fila 1, la cambiaron porque no querían poner en toda la columna del por qué, la misma respuesta para todas las filas.

En este momento el Equipo 7 convence al Equipo 8 de cambiar su respuesta, ya que las argumentaciones que dan les permiten validarla.

Luego le pregunta a los alumnos que si en su equipo estaban de acuerdo con la respuesta de su compañera, una de las integrantes del Equipo 2 menciona que sí, pero no da argumentos válidos, otro alumno integrante del Equipo 5, menciona que no, por lo que se le pregunta ¿por qué no esta de acuerdo con la respuesta del múltiplo de 3?

62 **A5.1:** Porque tiene las mismas medidas y $a + b$ es mayor que c.

Lo anterior es un momento importante, por lo que se retomó en la institucionalización. Como la profesora-investigadora se da cuenta de que las respuestas que dan los equipos son diferentes, les dijo que luego de terminar de completar la tabla, se discutiría sobre cuál es la respuesta correcta para esta fila, por lo que el siguiente equipo que pasaría a completar la Fila 2 sería el 11.

Luego la profesora-investigadora le pidió al Equipo 11 que pasara a compartir su respuesta con todo el grupo, igual que el equipo anterior, primero formó el triángulo con los palos de madera, luego anotó la respuesta que decidieron escribir en su hoja de trabajo y por último expresó en voz alta las mismas:

69 **Ma**: ¿Y cuál fue su porqué?
70 ***A*11.1**: Nosotros sumamos sus dos lados menores y dieron más que el tercero.

Otro de los integrantes del equipo, apoyó al compañero:

74 ***A*11.2**: Sumando sus lados menores suman más que el tercero que es el lado mayor.

Luego se les volvió a preguntar, ¿quién tiene la misma respuesta? ¿todos tienen la misma respuesta?, de nuevo el Equipo 5 responde que no:

80 **A5.1**: Pusimos que $a + b$ era mayor que c.
81 **M*a***: $a + b$, ¿qué?
82 **A5.1:** Era mayor que c.
83 **Ma:** ¿Y serán diferentes?
84 **A5.1:** Es una forma más rápida.

La profesora-investigadora, aclaró que las respuestas de los Equipos 11 y 5, tratan de decir lo mismo, pero la diferencia es que el Equipo 5, se refiere a los lados utilizando las literales a, b y c. Los alumnos del Equipo 5, dieron una respuesta correcta, pero no convencen a los demás equipos de modificar la suya, ya que para ellos no dan argumentos suficientes.

Para continuar, le pide al Equipo 8 que comparta su respuesta.

86 **A8.1:** Bueno primero formamos el triángulo y vimos que sí se podía con esas medidas, lo pusimos aquí (señala la columna en la que se debía marcar si se forma o no el triángulo), luego en por qué, le pusimos que las medidas de los lados desiguales a la base es mayor a ella.

¿Quién tiene una respuesta diferente?, preguntó la profesora-investigadora, una de las integrantes del Equipo 6 levantó la mano para decir que ellas tenían una respuesta diferente, por lo que les pidió que la expresaran:

88 **A6.3:** Porque tiene dos lados iguales y una base diferente.

Luego la profesora-investigadora les hizo algunos cuestionamientos a las alumnas del equipo 8. Si el triángulo tiene todos sus lados iguales y una base diferente, ¿por eso se puede formar el triángulo? ¿Esa es su explicación? ¿se refieren a cada lado? ¿o a los lados juntos? Porque ahí no especifican si se refieren a cada lado. Las alumnas le respondieron que se refieren a los lados juntos; es decir, a la suma de las medidas, solo que ellas lo estaban tratando de explicar con lenguaje natural y de tal manera que se pudiera entender lo que querían expresar.

En este momento de la clase, se observa que las alumnas explican claramente a lo que se refieren con su respuesta, pero lo que anotaron en su hoja de trabajo no se entiende de esta forma; es decir, les faltó escribir argumentaciones que les ayudaran a explicar a los demás compañeros.

El siguiente equipo que eligió la profesora-investigadora, fue el 4. Se continuó con la misma dinámica. Cuando el integrante del equipo terminó de intentar formar el cuarto triángulo con los palos de madera, se le pidió que explicara su respuesta, lo cual se muestra en el siguiente registro:

90 **A4.1:** Primero hicimos el triángulo para ver sí se podía o no se podía hacer el triángulo, y pues vimos que no, porque no tiene medidas exactas.

91 **Ma:** ¿A qué se refieren con medidas exactas?

Las integrantes del Equipo 4 trataban de explicarlo, pero una alumna del Equipo 2 interrumpió para ayudar a sus compañeras tratando de dar sus argumentaciones, pero describiendo las relaciones que ella observaba entre las medidas de los lados, además esto le permite validar su respuesta en el momento de apoyar al equipo 4:

92 **A4.2:** A que todos sus lados sean iguales ¿no?, así como el primero que todos sus lados son iguales. Como que uno sí quedaba y el otro no, y el otro quedaba muy largo.

93 **Ma:** ¿Cómo que quede muy largo o que no quede? ¿A qué se refieren con eso?

94 **A2.1:** Porque está muy grande la base, el palito de la base, o el palito ése de ahí, está chiquito y tendría que ser otro más grande.

95 **Ma:** Entonces eso de no tiene medidas exactas, como que confunde un poco ¿no?, entonces ahí ya deberían de especificar, por ejemplo lo que dice su compañera, que el palillo de 10 cm debe ser mayor, así, dar argumentaciones más específicas.

Para continuar con la fila en la que se utilizaron palos de madera de medidas con las que no se podía formar un triángulo, se le pidió al Equipo 3 que pasara al pizarrón, primero a tratar de formar el triángulo, y luego explicar su respuesta. La profesora-investigadora les preguntó si pudieron o no formar el triángulo:

100 **A:** No.

101 **Ma:** ¿Y ahí por qué? ¿Por qué no podrían?

102 **A3.1:** Ah, porque ésos eran los lados a y b, y son menores en medida a la base, porque éstos miden 10 y éste mide 20.

Otro integrante del equipo desde su lugar, ayudó a su compañero a explicar la respuesta que habían anotado en su hoja de trabajo. La respuesta que da el Equipo 3, permite observar que conforme van rellenando las filas de la tabla, los alumnos dan argumentos válidos que les permiten convencer a los demás de su respuesta, esto porque ya son más los equipos que están relacionando de manera correcta las medidas de los palos de madera:

103 **A3.2:** Son iguales, pero tendrían que ser más grandes para que alcanzara.

104 **Ma:** ¿Más grandes qué?

105 **A3.2:** El lado a y b, tendrían que ser más grandes que la base para que se alcanzara a formar el triángulo.

109 **A8.3:** El a y b sumados tienen que ser un número mayor a la base.

Para continuar se les pregunta sí algún otro equipo anotó esa respuesta, por lo que el Equipo 8 responde que sí, luego pregunta que quién tiene una diferente, pero ninguno de los equipos levanta la mano.

Con ayuda de los equipos que pasaron al pizarrón se validaron las respuestas y se observa que al principio los alumnos trataban de dar sus argumentaciones, apoyándose en el tipo de triángulo que se formaba (equilátero, escaleno e isósceles), pero cuando llegaron a la Fila 4 (10, 40 y 50) en la que las medidas de los palos de madera no les permitían formar el triángulo, todos los equipos se inclinaron por encontrar una relación entre las medidas proporcionadas, para poder convencer a los demás de sus argumentaciones, esto debido a que comenzaron a expresar con el lenguaje natural, la desigualdad del triángulo, lo cual fue una de las hipótesis que nosotros habíamos considerado en el análisis a priori.

Para continuar, la profesora les dice a los alumnos que como se observó, con las respuesta que ellos dieron, estuvieron relacionando las medidas de los lados del triángulo, o en su caso, las medidas de los palos de madera con las que no se podían construir los triángulos. El material didáctico manipulable, ayudó a los alumnos a construir sus pruebas.

Figura 52. Validación en el grupo

5.2.4 Situación de acción (inciso b)

Para continuar con la clase, la profesora-investigadora pidió a los equipos que entregaran el material didáctico de los palos de madera, ya que para trabajar en el inciso b (ver **anexo 1:** Actividad 1) de su hoja de trabajo, utilizarían un material diferente, las figuras articuladas con escala; este material les permitiría representar triángulos de diferentes medidas para poder encontrar las relaciones que existen entre las medidas de los segmentos, realizando operaciones aditivas entre las medidas elegidas y de esa manera ayudar a que los alumnos lograran construir su conocimiento.

116 **Ma:** A ver, ustedes ya con sus respuestas que me están dando, han estado relacionando un poco lo lados de los triángulos ¿verdad? Y están sacando un poco de información de ahí, ahorita con un material que les voy a dar, ustedes van a tratar de formar unos triángulos diferentes, tres nada más. Y en la parte de atrás de su hoja, van a anotar las medidas que ustedes eligieron, pero también quiero que anoten las relaciones que ustedes encuentran entre esas medidas o ¿por qué eligieron esas medidas específicamente? ¿sí?, si se puede o no formar un triángulo, ahora vamos a cerrar con lo de la tabla para terminar.

La profesora titular y la profesora-investigadora, repartieron el material a los equipos, ellos empezaron a manipularlo familiarizándose con él, de esta forma empezaron a actuar en la situación planteada, la profesora-investigadora para poder asegurarse que las reglas del juego han sido claras, les explica la forma correcta en la que deben utilizar el material, a continuación se presenta un fragmento de la clase:

118 **Ma:** La forma correcta en la que deben estar las regletas, es, la graduación de las reglas debe estar hacia adentro, ¿sí? así como está este que tengo yo, ustedes, si se fijan, en el material tenemos tres lados, para formar el triángulo, entonces, tenemos uno de 20, uno de 10 y uno de 40, el de 10 y el de 20, no los podemos modificar, pero el de 40 sí lo podemos modificar. Entonces, yo voy a formar un triángulo que mida, 10, 20 y no sé… éste, 25 por ejemplo y ya lo formé (forma el triángulo para mostrarle a los alumnos cómo deben usar el material). Ustedes van a elegir tres triángulos, pero de tal manera que puedan encontrar esa relación que trataban de explicar entre las medidas, pero escrito, para que ya pueda yo ver, si en realidad ya comprendieron cuál es esa propiedad que estamos buscando de los triángulos ¿sí?, prendan ya el audio y concéntrense porque queda poco tiempo, tienen 20 minutos para hacerlo.

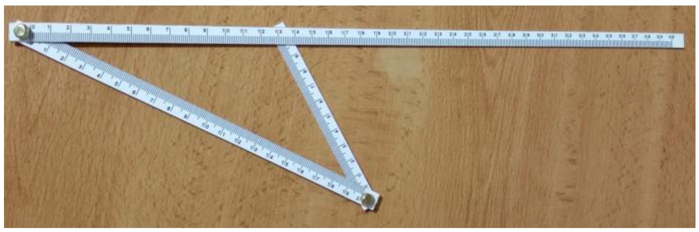


Figura 53. Materia didáctico

Los equipos empezaron a trabajar, eligiendo las medidas con las que formaron el primero de los triángulos, para poder manipular el material didáctico proporcionado.

Figura 54. Equipos manipulando el material de las figuras articuladas con escala

120 **Ma:** Anoten todas las relaciones que ustedes consideren que hay entre los lados del triángulo. Pueden elegir también si ustedes quieren, uno que no se pueda formar como el de la tabla, pero tienen que explicar ahí, por qué no se puede formar, pero ya con las relaciones que encuentren ¿sí?

La profesora-investigadora y la profesora-titular pasaban por los equipos para observar que estuvieran trabajando y que utilizaran el material de manera correcta. También les pidió que respondieran la pregunta que está al final de su hoja de trabajo.

5.2.5 Situación de formulación-validación entre los integrantes del equipo (inciso b)

Al igual que en el primero de los incisos en el que los alumnos completaron la tabla, apoyándose en los palos de madera, en este apartado consideramos conveniente que las situaciones, tanto de formulación como de validación, se explicaran en un apartado, ya que se complementan, pues los integrantes de los equipos proponen sus procedimientos pero además de eso los validan ante sus compañeros, y esto sucede en varias ocasiones durante el desarrollo de la actividad.

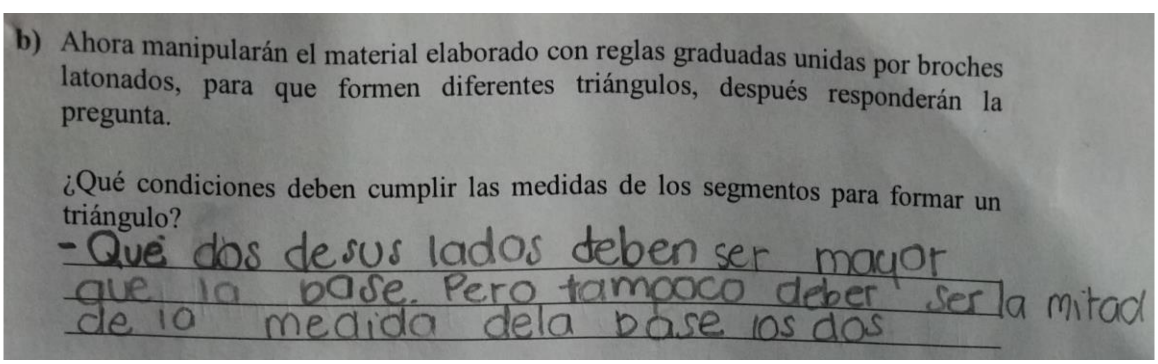
Las integrantes del Equipo 4 empiezan a formular; es decir, proponen las medidas que ellas consideran correctas para formar el primero de los triángulos. Como se puede observar a continuación las integrantes de este equipo ya llegan a expresar con sus palabras la desigualdad del triángulo, porque en la primera tabla de la hoja de trabajo (Tabla 7. Solución óptima), cuando no se podía formar un triángulo con las medidas proporcionadas, ellas decían que no eran medidas exactas, pero al empezar a resolver el inciso b, ellas ya hablan de las relaciones entre las medidas de los lados, solo les falta especificar que la suma de dos de los lados debe ser mayor que el tercer lado, ya que expresan que sus lados deben ser mayor a la base. Éste es un momento claro sobre cómo las alumnas fueron construyendo el conocimiento.

En el siguiente registro, la alumna A4.1 menciona que se puede formar un triángulo porque tiene ángulos rectos, pero en ese mismo instante al observar el triángulo formado con las figuras articuladas con escala, se da cuenta de que no son rectos, por lo que ella misma se responde y dice que no es verdad; éste es un ejemplo de la importancia que tiene el materia didáctico, el cual le ayudó a darse cuenta de que estaba dando una respuesta incorrecta y a reflexionar sobre el hecho de que los ángulos no tenían nada que ver con la actividad, además con la intervención de la profesora-investigadora pudo confirmarlo.

A continuación se rescata un momento importante en el que una de las alumnas además de formular, trata de validar su procedimiento con las demás compañeras (Equipo 4):

703 **A4.1:** Haremos tres triángulos diferentes a los de la tabla.
704 **A4.2:** Miren, 20, 10 y 18.
705 **A4.3:** ¿El número 1?
706 **A4.2:** 20, 10 y 18.
707 **A4.1:** ¿Por qué se puede formar? Oigan.
708 **A4.2:** A ver, 20, 10 y 18.
709 **A4.3:** Tendría que ser 17. ¿Pero por qué se forma?
710 **A4.1:** Porque tiene ángulos rectos. No, no es cierto.
711 **A4.2:** Porque 20 y 17 son mayor que c, que 10.
712 **A4.1:** Es que 10 es la base por eso se puede.
713 **A4.3:** Porque 20, lado a, 17, lado b, son mayores que 10, que es la base. El número 2, vamos a hacer otro triángulo.
714 **A4.3:** Préstamelo (toma el material didáctico).
715 **A4.2:** Pero es que ¿cómo se puede de diferentes medidas?, siempre tiene que ser 20 aquí.

716 **A4.1:** Pues sí, nada más que cambia el grandote y el chiquito.
717 **A4.3:** Ya tengo uno, 20, 9 y 25.
718 **A4.2:** Es que la maestra nos había dicho algo de los ángulos.
719 **A4.1:** Todos los ángulos (las alumnas le hablan a la profesora-investigadora para comentarle lo que habían anotado como respuesta).
720 **Ma:** Está bien eso que pusieron, pero, ¿no habrá otra cosa que se les pasa? ¿nada más tendrá que ver la suma o habrá otra operación que les ayude con esta propiedad? ¿o nada más ésa?
721 **A4.2:** Dile, a ver, esa que tienes.
722 **A4.1:** ¿Los ángulos?
723 **Ma:** Bueno los ángulos ahorita no entran, estamos nada más hablando de la medida de los lados, más bien entre los lados. Piensen en algo, dejen a un lado así la suma, y reflexionene en algo diferente, a ver si pueden sacar algo que falta, ese algo, encontrarlo entre las tres.
724 **A4.3:** ¿Qué puede ser?
725 **A4.2:** La posición de los lados.
726 **A4.1:** ¿Qué tiene?
727 **A4.2:** Por ejemplo la base, o sea donde estáa ubicada la base, bueno cuánto mide la base.
728 **A4.3:** Sí, la posición de la base y de los lados, todo depende.
729 **A4.1:** ¿De la posición de la base?
730 **A4.2:** Más bien de las posiciones de todo.
731 **A4.1:** Porque es importante también dónde se ubica la base.
732 **A4.3:** La posición de la base. Nos falta otro.
733 **A4.1:** ¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para poder formar un triángulo?
734 **A4.2:** Dos de sus lados tienen que ser en el equilátero, no, pero ya en los demás que dos de sus lados deben ser iguales y uno diferente.
735 **A4.1:** Pero no todos los triángulos, porque también está el escaleno.
736 **A4.3:** Deben ser mayor que la base.
737 **A4.1 y A4.2:** Sí.
738 **A4.3:** Porque sus lados deben ser…
739 **A4.1:** ¿Qué dijiste? ¿La posición de la base no?
740 **A4.3:** Deben ser mayor que la base.
741 **A4.2:** Pero, ¿sabes qué nos faltó en la primera?
742 **A4.3:** Que deben de ser mayores, pero no deben de ser la mitad porque con la mitad no se puede.



b) Ahora manipularán el material elaborado con reglas graduadas unidas por broches latonados, para que formen diferentes triángulos, después responderán la pregunta.

¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?

-Qué dos de sus lados deben ser mayor que la base. Pero tampoco deber ser la mitad de la medida dela base los dos

Figura 55. Respuesta del Equipo 4, inciso b

En el caso del Equipo 6, podemos observar que cuando ellas están discutiendo sobre porqué sí se puede formar un triángulo con esas medidas, dos de las integrantes proponen dos procedimientos diferentes, una menciona que es por sus ángulos y otra insiste en que se debe explicar fijándose en los lados de los triángulos. También nos percatamos de que cuando completaron la primera tabla, para explicar el por qué, ellas anotaban respuestas relacionadas con decir que a los lados les faltaba o les sobraba para formar el triángulo, pero hasta este momento lograron responder relacionando las medidas de los lados de los triángulos elegidos. En el registro siguiente se muestra este momento.

770 **A6.1:** 16, 10 y 20. ¿Por qué se podrá formar?
771 **A6.3:** Ahí está miren (les muestra a sus compañeras el triángulo que formó con el material).
772 **A6.2:** Ahora, ¿por qué sí se puede? A ver, ideas.
773 **A6.1:** ¿Por qué sí se puede?
774 **A6.3:** Porque sus ángulos son iguales.
775 **A6.2:** A ver la base ¿cuánto mide? Digamos que la base es la de 20, o ¿cuál les gusta para base, la de 10? Mira elijamos la base de 20, ahora, 16 y 10, 26, la suma de sus lados tiene que ser más grande que la base.
776 **A6.1:** ¿Sí no?
777 (Las alumnas anotan la respuesta que les dijo su compañera.
778 **A6.2:** Miren por ejemplo, aquí elijamos 20, 10 y 24.
779 **A6.3:** Ángulo de 90° ¿no?
780 **A6.1:** Pues es que es una conclusión para todos los triángulos.
781 **A6.2:** Miren, a ver, súmenle así como dijimos aquí, son 20, 30 y aquí es 22. No. 20 y 10, ¿cuánto da?
782 **A6.1 y A6.3:** 30
783 **A6.2:** Y es más grande que la base que es de 24, ésa es la conclusión para hacer triángulos, bueno yo digo.
784 **A6.1:** ¿Sumar?
785 **A6.2:** Ponle la misma… Al sumar, pone al sumar.
786 **A6.1:** Es que tiene que ser una conclusión para todas y confirmar que sí se pueda. Ahora la base es 20, 14 y 10.
787 **A6.2:** 14 y 10, son 24, 24 es mayor que 20.
788 **A6.1:** Ahí esta, entonces la suma tiene que ser…
789 **A6.2:** En todas hay que ponerle la misma.
790 **A6.3:** La suma de sus lados debe ser mayor a la base.

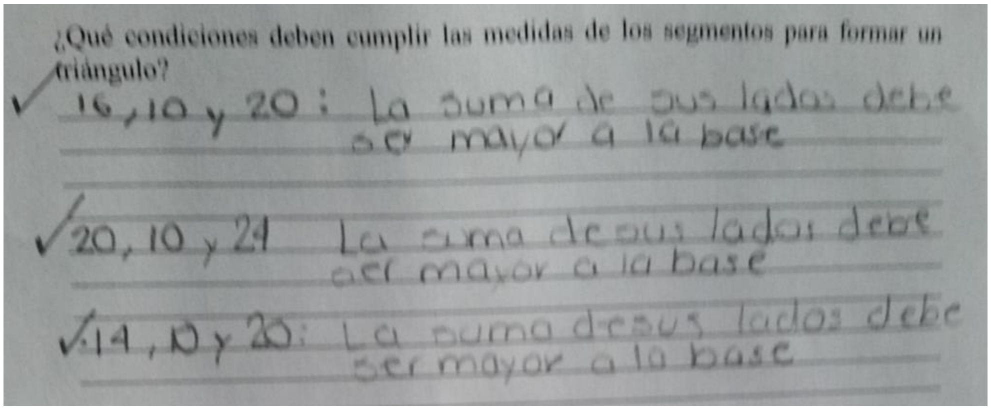


Figura 56. Respuesta del Equipo 6, inciso b

A diferencia de los equipos anteriores, el 7 tuvo problemas para explicar por qué se podía formar un triángulo, por lo que pidieron a la profesora-investigadora que les dijera a qué se refería cuando dijo que debían explicar cómo se puede formar un triángulo. Cuando trabajaron en el inciso “a”, ellas explicaban que el triángulo se formaba o no porque queda espacio o porque le falta a un lado, pero en el inciso b; se puede observar que tratan de encontrar una explicación diferente en la que relacionan las medidas de los lados, aunque al final la respuesta que dan está un poco alejada de lo que se había considerado en el análisis a priori:

791 **A7.1:** Ok 20, 10 y 25, ya están, ya los acabaste de hacer, ya. ¿Qué otro se puede hacer?
792 **A7.2:** Pero tenemos que poner las explicaciones.
793 **A7.1:** A ver, sí está bien (la alumna toma las reglas graduadas unidas por broches latonados para formar el triángulo con las medidas elegidas).
794 **A7.3:** A ver, 20, 10 y 28.
795 **Ma:** Tienen que explicarme ¿cómo sé yo que se puede formar un triángulo, sin tener yo el material, sin tener los palos de madera? ¿cómo puedo generalizarlo?
796 **A7.1:** Así por ejemplo cómo lo explicaban ellas, con los puros lados.
797 **Ma:** Ah, eso quiero que con un triángulo me digan y expliquen, hagan operaciones, lo que ustedes gusten, para darme cuenta que ya entendieron.
798 **A7.1:** Que con los lados, por ejemplo como dijeron, con éste, 20, 10 y 25, que la base tiene que ser menor que los dos lados.
799 **A7.2:** ¿Menor o mayor?
800 **A7.1:** Menor, la base, por ejemplo, ésta es la base (la alumna toma el material didáctico y lo manipula para apoyarse y explicar a sus compañeras), o sea que estos dos lados, para que quede uno, estos dos lados tienen que ser mayores que éste, porque éste va a ser el menor.
801 **A7.3:** Ahora explícalo para ponerlo aquí.
802 **A7.1:** 20, 10 y 25, se sabe porque simplemente, el mayor es la base y se puede acomodar de las otras dos medidas, ¡no esperen!, se podrá acomodar con las otras dos medidas que son 20 y 10, no importa cuál pongas primero y así se forma un triángulo.
803 **A7.2:** Punto, no todos los triángulos tienen los mismos lados.
804 **A7.1:** Abran un paréntesis y pongan eso, no todos los triángulos son iguales.
805 **A7.3:** Pero tenemos que hacer cuentas para explicarlo.
806 **A7.1:** No mira, es que se refiere a que la base que es 25, es la más grande, a eso se refería y luego

después puedes acomodar el 10 y el 20, no importa cual pongamos primero, y sale el triángulo.

807 **A7.3:** ¿Pero cuál sale?

808 **A7.2:** No, pero tienen que ser estos dos para hacer un triángulo, sin palitos ni nada de esto, tenemos que…

809 **A7.3:** Sale un isósceles.

810 **A7.2:** Estos dos números, por ejemplo la base, supongamos que va a ser el 25, entonces 10 ó 20, tienen que ser mayor que el 25 para que se pueda hacer.

811 **A7.3:** Entonces la base es 10.

812 **A7.1:** La base es 10, no cabe.

813 **A7.2:** ¡No cabe!

814 **A7.3:** La base es 25.

815 **A7.2:** La base es 10, 25 y 20, entonces éste es 20 y éste tiene que ser 25 (la alumna se apoya del material didáctico), y ahí está, ya quedo.

816 **A7.3:** A ver, ¿ cómo?

817 **A7.1:** Ándale.

818 **A7.2:** Pues es que ya te expliqué, pero...

819 **A7.3:** Pero es que no te entendemos.

820 **A7.2:** Es que mira, como explicó Teresita…

821 **A7.1:** ¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?

822 **A7.2:** Que la base sea más grande que los lados.

823 **A7.3:** Que los lados sean más grandes que la base.

824 **A7.2:** Que los lados sean más grandes que la base.

825 **A7.1:** Sean un poco más grandes que la base. Otra.

826 **A7.2:** Y que quede exactamente. Sin que sobre, ni falte.

827 **A7.1:** Díctamelo tú.

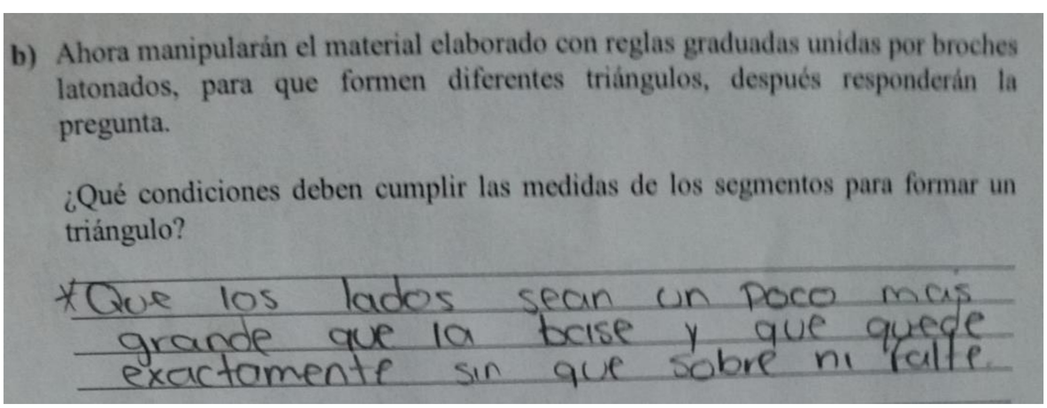
828 **A7.2:** Se sabe porque el mayor es la base… No Alondra, es que se me hace que aquí es, se sabe porque el menor es la base.

829 **A7.1:** No.

830 **A7.2 y A7.3:** ¡Sí!

831 **A7.1:** ¿Qué le vamos a poner?

832 **A7.2:** Se sabe porque el menor es la base y se puede acomodar con las otras medidas, que son 20 y 25, no importa cuál va primero, y así se forma un triángulo.



b) Ahora manipularán el material elaborado con reglas graduadas unidas por broches latonados, para que formen diferentes triángulos, después responderán la pregunta.

¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?

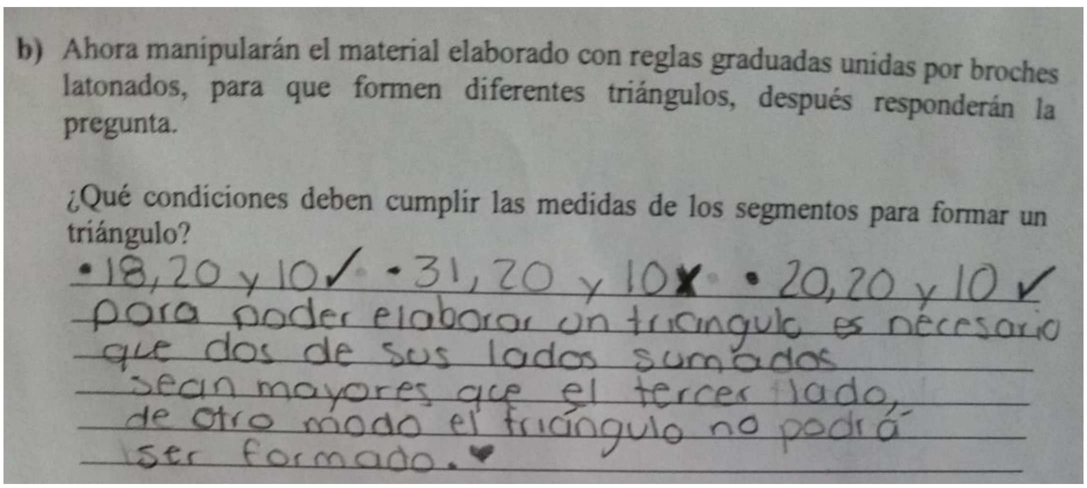
*Que los lados sean un poco mas grande que la base y que quede exactamente sin que sobre ni falte

Figura 57. Respuesta del Equipo 7, inciso b

Como se puede observar en el siguiente registro, en la primera tabla de la hoja de trabajo (Tabla 7. Solución óptima), el Equipo 8 construyó su conocimiento cuando llegaron a la tercera de las filas y esto fue posible con ayuda de la representación con el material didáctico (palos de madera), lo anterior ayudó a las alumnos en el momento de trabajar en el inciso b, porque lograron expresar con su lenguaje natural la propiedad de la desigualdad del triángulo, pero a pesar de eso, continúan apoyándose del segundo material didáctico proporcionado (figuras articuladas con escala) para representar los triángulos:

833 **A8.3:** Para que sea un triángulo, tiene que ser un número menor que 30, porque éstos dos suman 30, si por ejemplo nos queremos pasar del 30, ya no se puede, ya no es un triángulo.
834 **A8.1:**Pués la mitad de 30.
835 **A8.2:** Pues sí. Ah, también era el que no se puede formar.
836 **A8.1:** No. Se ve mejor de 17.
837 **A8.2:** Sí.
838 **A8.1:** No, 18, 19, ¿18?
839 **A8.3:** ¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?
840 **A8.1:** Bueno elijamos 3, dos y uno que no se pueda.
841 **A8.2:** ¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo? Bueno escogimos 18, 10 y 20.
842 **A8.3:** Bueno el único que va a cambiar es éste (señalando el lado que mide 40 cm) así que digo, pongámosle 18.
843 **A8.2:** No.
844 **A8.3:** Bueno o sea.
845 **A8.2:** Mira ya cambié éste.
846 **A8.3:** Sí, pero dijo que nada más podíamos cambiar el otro.
847 **A8.1:** Nada más podemos cambiar éste.
848 **A8.3:** El de 40.
849 **A8.2:** Y si queremos uno… así más chiquito, sería como el 12 o…
850 **A8.1:** Pues escogemos el 18, el 20 y el 10. ¿Y cuál otro? ¿Son 3 o cuántos?
851 **A8.2:** Acaba de decir que 3.
852 **A8.3:** ¿Pero que sí se puedan formar triángulos? Pues está el 18, el..
853 **A8.1:** No, también que no se pueda, de los dos, que se pueda y que no se pueda, como ahí. A ver, pero pongámosle, 18, 20 y 10.
854 **A8.3:** Ah, perdón, el primero que sea 18, 20 y 10. Otro triángulo podría ser, bueno que sí se formara, sería 20, 10 y 12.
855 **A8.1:** ¿Y luego otro?
856 **A8.3:** Que no se pueda, por ejemplo…
857 **A8.2:** Uno que se pase de 30. ¡31!
858 **A8.3:** 31, 20 Y 10.
859 **A8.2:** ¿Y el último?
860 **A8.1:** Uno que no se pueda.
861 **A8.2:** Pero ésa no es la pregunta.
862 **A8.3:** Primero hay que escribir la regla.
863 **A8.1:** ¿Por qué no se puede?
864 **A8.2:** Porque es menor que 30. Y luego una última.
865 **A8.3:** ¿Que se pueda o que no se pueda?

866 **A8.2:** Que se pueda.
867 **A8.3:** Uno que tenga 10 y 20.
868 **A8.2:** 20, 10, 10, no se puede.
869 **A8.1:** 20, 20 y 10.
870 **A8.3:** Sería isósceles.
871 **A8.1:** Ah sí, un isósceles. 20, 20 y 10.
872 **A8.2:** Sí sería un isósceles, sí porque esta así ¿verdad?
873 **A8.3:** Porque tiene dos lados iguales y uno desigual.
874 **A8.2:** 20, 20 y 10. ¿Y ahora qué?
875 **A8.1:** Ahora la regla. Cada uno de los… Para poder formar un triángulo…
876 **A8.3:** Dos de los lados deben ser mayores al tercero, al tercer lado.
877 **A8.1 y A8.2:** Para poder elaborar un triángulo es necesario…
878 **A8.3:** Que dos de los lados sean mayores que el tercero. Bueno que dos de sus lados sumados, sean mayor al tercer lado.
879 **A8.2:** De otro modo el triángulo no podrá ser elaborado. No podrá ser formado.



b) Ahora manipularán el material elaborado con reglas graduadas unidas por broches latonados, para que formen diferentes triángulos, después responderán la pregunta.

¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?

• 18, 20 y 10 ✓ • 31, 20 y 10 ✗ • 20, 20 y 10 ✓
para poder elaborar un triangulo es necesario
que dos de sus lados sumados
sean mayores que el tercer lado,
de otro modo el triángulo no podrá
ser formado.

Figura 58. Respuesta del Equipo 8, inciso b

Anteriormente se muestra cómo algunos de los equipos llevan a cabo su proceso de construcción del conocimiento, todos lo hacen de diferente forma pero al final se alcanza a rescatar que la mayoría se centra en las medidas de los segmentos proporcionados.

5.2.6 Situación de validación en el grupo (inciso b)

Se presentan los momentos en que los equipos dan a conocer a los demás sus respuestas, y además validan cada una de ellas con la finalidad de convencer a los demás de que su respuesta es la correcta.

Para iniciar con esta situación de validación, la profesora-investigadora le pide al Equipo 6 que pase a expresar su respuesta y que explique su procedimiento. Como se muestra en el siguiente registro, la discusión para validar las respuestas se desplegó a partir de la participación del Equipo 6, ya que aquellos que no estuvieron de acuerdo, expresaron y argumentaron de manera clara con la finalidad de convencer a los demás equipos de que su respuesta es la correcta y es la que podrían escribir en su hoja de trabajo. Durante el desarrollo de la clase y hasta este momento se logra destacar el proceso de cada uno de los equipos para lograr construir su conocimiento, aunque algunos encuentran las relaciones, se observa que en sus respuestas siguen considerando el conocimiento previo que ellos tenían, como es el caso del Equipo 6, quienes expresan con lenguaje natural la propiedad, pero la explican considerando los lados y la base del triángulo.

Otros, como el Equipo 2, revelan que a pesar de que tratan de dar argumentos para defender sus respuestas, no son suficientes para convencer a los demás equipos. En cambio el Equipo 8, llega a expresar la desigualdad del triángulo, pero ninguno de los demás pudo llegar a enunciar, que para formar un triángulo además de que la suma de las medidas de dos de sus lados debe ser mayor que la medida del tercer lado, también debe cumplir con la condición de que la diferencia entre las medidas de dos de sus lados debe ser menor a la medida del tercer lado.

124 **Ma:** A ver, por favor dígannos qué anotaron.
125 **A6.1:** Hicimos un triángulo con las medidas de 16, 10 y 20, y anotamos en la pregunta ¿qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?, que para que un triángulo se forme, la suma de sus lados debe ser mayor a la base.
126 **Ma:** ¿Algún equipo tiene una respuesta diferente?
127 **A2.1:** Elegimos un triángulo isósceles. Nosotros le pusimos que el lado inclinado era el lado b y el que está vertical, era el lado a, entonces que el lado b tiene que ser más largo para poder sumar con el lado a y la base del triángulo, para que se encuentren entre sí.
128 **Ma:** ¿Entonces ustedes nada más creen que se cumple con el triángulo isósceles?
129 **A2.1:** Sí, haciendo eso.
130 **Ma:** ¿Ustedes qué dicen? (señalando al equipo 4)
131 **A4.1:** La posición de los lados.
132 **A4.2:** En que se encuentre cada uno de sus lados y la base.
133 **Ma:** ¿Por qué la posición? ¿A qué se refieren con la posición?
134 **A4.1:** Mmm, a que tiene que tener forma de triángulo, pero la posición que si, bueno 10, 20 y 15 (la alumna utiliza el lenguaje corporal como apoyo para expresar su respuesta), que puede ser 15, 20 y 10, depende de eso.
135 **Ma:** ¿Depende de eso si se forma el triángulo?
136 **A41:** Sí.
137 **Ma:** A ver, ¿aquí qué dicen? (señalando al equipo 7).
138 **A7.1:** Que los lados sean un poco más grandes que la base.
139 **Ma:** Bueno aquí ellas coinciden con sus compañeras (equipo 6), y dicen que la suma de los lados debe ser mayor que la base, pero ¿importará la base o tendré que especificar la base o los dos lados?
140 **A7.2:** No.
141 (La alumna del equipo 8 levanta la mano para compartir su respuesta y la profesora-investigadora le da la palabra).
142 **A8.3:** La suma de dos de sus lados, debe ser mayor al tercer lado.
143 **Ma:** Aquí ella ya generalizó más.

Es importante rescatar el papel de la profesora-investigadora, ya que como se observa en las transcripciones anteriores, en el momento de la validación en el grupo, trata de orientar a los alumnos para que defiendan su respuesta, además los confronta mediante preguntas estratégicas que los lleven a reflexionar y defender sus respuestas en el grupo, con argumentos y permitiendo que expliquen de manera que los demás puedan convencerse.

5.2.7 Situación de institucionalización

La situación de institucionalización es el momento en que la profesora-investigadora les dice a sus alumnos cómo es conocido en Matemáticas el tópico matemático que estuvieron trabajando.

145 **Ma:** Si se fijan, la mayoría ya encontró esa relación entre los lados, algunos no pudieron explicarla, pero este tema que estamos trabajando se llama la desigualdad del triángulo, así es conocida en Matemáticas, nada más les faltó encontrar una relación que es la de las diferencias de los lados, la diferencia entre dos lados cualesquiera de un triángulo, debe ser menor a la medida del tercer lado, por favor anótenlo en su hoja de trabajo (la profesora-investigadora pega la hoja bond en la que escribió la propiedad de la desigualdad del triángulo para que los alumnos la copien en su hoja de trabajo).

5.3 Análisis de la Actividad 2 "Construcción de triángulos"

El propósito de la actividad fue que los alumnos mediante los trazos con regla y compás comprueben que un triángulo existe cuando cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Y que los alumnos al trazar los triángulos puedan experimentar con diferentes datos y aprender la desigualdad del triángulo.

5.3.1 Situación de acción

La profesora-investigadora inició la sesión preguntando a los alumnos si alguien recordaba lo que habían visto la clase anterior, con la finalidad de poder iniciar con la segunda actividad. Uno de los alumnos expresó:

786 **A5:** No, éste… éste… investigamos cómo (duda un poco), bueno los puntos importantes para hacer un triángulo.

Con este comentario, la profesora-investigadora pudo hacer una intervención:

887 **Ma:** Sí, ¿qué características deben tener las medidas de los segmentos para poder formar un triángulo, verdad? ¿Sí recuerdan?. Bueno, vamos a continuar pero ahora, vamos a usar la regla y el compás. ¿Todos traen regla y compás?

A: Sí.

Luego repartió la hoja de trabajo, así como también hojas de máquina para que hicieran ahí las construcciones. Le pidió a un alumno que leyera las instrucciones en voz alta para que todos las pudieran escuchar:

894 **A6:** "Construcción de triángulos. De manera individual observa la tabla, y realiza lo que se te pide" (lee las medidas indicadas en la tabla).

Les pide que observen las medidas y que vean qué tienen de diferente a las que utilizaron en la clase anterior, y un alumno da la respuesta:

900 **A5:** Que algunas tienen decimales.

Se les explica que en esta ocasión utilizarían números decimales, porque en la clase anterior debido a que se estaba trabajando con palos de madera, era difícil utilizar números decimales, ya que en el momento de cortarlos con esas medidas, podrían tener un margen de error mayor al que tendrían sí fueran números enteros. Luego les preguntó que si alguno de ellos sabe cómo construir un triángulo utilizando regla y compás, a lo que un alumno pasó al pizarrón a explicarles:

905 **A5:** Marcas una línea del tamaño que quieres, le pones en los extremos a y b, colocas el compás y vamos a formar una tipo x (refiriéndose a la intersección de los dos arcos marcados por el compás). No le pongo medidas porque es para un triángulo cualquiera. Ahora marcamos el punto (marca el punto de intersección). Luego formamos el triángulo.

906 **Ma:** Sí se fijan, él ahí construyó un triángulo cualquiera, pero por ejemplo si queremos tomar una medida ¿qué hacemos?, por ejemplo que el triángulo tenga un lado de 10 cm (le proporciona de nuevo el compás al alumno, con la finalidad de que construya el triángulo con las medidas que le está sugiriendo).

907 **A5:** 10 cm, será la medida de la base.

908 **Ma:** El otro lado será de 13 cm.

909 **A5:** Abres el compás de 13 cm.
(Para concluir el triángulo, el alumno toma la escuadra y une cada uno de los puntos que marcó con el compás)

910 **Ma:** ¿Si le entendieron a su compañero cómo es el procedimiento?.

911 **A:** Sí.

Figura 59. Respuesta del Equipo 6, Fila 4

Luego de eso se les dio tiempo a los alumnos para que realizaran las construcciones con las medidas que se les pedían en la tabla, pero en el momento de pasar por sus lugares, la profesora-investigadora pudo observar que seguían teniendo problemas con el trazo de los triángulos, por lo que les pidió a los alumnos pusieran atención al frente:

914 **Ma:** A ver muchachos, pongan atención un poquito acá, nada más para aclarar algo. En esta lámina les puse los pasos que su compañero les explicó ahorita, utilizando la escuadra y el compás. Si se fijan, sí tenemos un triángulo de 4 cm y 5 cm y 6 cm, como medida de sus lados, ustedes pueden elegir cualquier lado, por ejemplo, yo tomé el que mide 6 cm, tracé la recta, puse un punto A, luego medí con el compás, de esta manera en la escuadra (toma el compás y la regla y les explica a los alumnos). Medí 6 cm, como lo hizo su compañero, tracé un arco, después, ya que está marcado, tomo otro lado cualquiera, y marco el otro arco, estos arcos se tienen que cruzar, para que el tercero sea el punto C, luego ya trazo los segmentos y formo mi triángulo. Para nombrar un segmento se le pone, por ejemplo, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y por último $\overline{BC}$, como su compañero lo hizo aquí (señala en el pizarrón los segmentos del triángulo).

Figura 60. Respuesta del Equipo 6, Fila 4

Después de eso, recorre de nuevo los lugares y observa que a los alumnos en el momento de entrar en acción para la construcción de los triángulos, se les hace difícil elegir el lado que será la base del mismo, entonces vuelve a intervenir la profesora-investigadora, con otra explicación en el pizarrón:

916 **Ma:** A ver, muchachos, otra vez, todos vamos a trazar el primer triángulo que viene ahí, ¿qué medidas vienen? ¿medidas del lado a?

917 **A:** 2.4

918 **Ma:** ¿Del lado b?

919 **A:** 2.2

920 **Ma:** ¿Del c?

921 **A:** 4.2

922 **Ma:** Bueno, primeramente, ¿qué medida quieren que tomemos de base?

923 **A:** 4.2, 2.2, 2.4

924 **Ma:** Por ejemplo tienen su regla, con esa regla voy a trazar mi segmento de 2.4 (traza el segmento en el pizarrón), ¿sí?, ahora, lo que nos decía su compañero ahorita, voy a nombrar los vértices de mi triángulo, a y b, ahora ¿cuál es la medida del siguiente lado?

925 **A:** 2.2

926 **Ma:** Ah, pues toman su compás, ¿ya lo tienen?, lo abren 2.2 cm, la abertura debe medir eso exactamente, ¿sí?, colocan el piquito del compás en el punto A, ¿ya lo tienen?

927 **A:** Ya.

928 **Ma:** Ahora van a hacer un arco, ¿sí?, del punto A, ¿cuánto va a medir ése?

929 **A:** 2.2

930 **Ma:** Ahora, ¿cuál medida nos falta? ¿ya todos tienen ésa?

931 **A:** 4.2

932 **Ma:** Ahora 4.2, ¿dónde coloco el compás?

933 **A:** En el punto B.

934 **Ma:** En el punto B, van tomando el compás, lo colocan en el punto B, hagan un poquito largo el arco, para que pueda cruzarse con el otro cuando tracen el del otro lado, ¿sí?

935 **A8:** ¿Lo vamos a dejar ahí mismo en 2.2?

936 **Ma:** No, ábranlo con la medida que nos falta, ¿cuánto es?

937 **A8:** 4.2

938 **Ma:** 4.2, lo van a abrir.

939 **A8:** Pero no llega…

940 **Ma:** Si no llega, entonces ¿eso qué quiere decir?

941 **A8:** Que no se puede.

942 **Ma:** Entonces ustedes tienen que ver eso, yo nada más les estoy explicando cómo se construye un triángulo, por ejemplo yo aquí ya le puse de 2.2 cm, por eso me salió, ustedes eso van a ver, sí se puede o no construir un triángulo con esas medidas que se les dan en la tabla. Ahora sí, a este punto le vamos a poner, punto C, y luego unen los vértices, A con C, y B con C, para que se forme el triángulo. ¿A todos les quedó claro?

943 **A:** Sí.

Hasta este momento y después de varios intentos, se logra la devolución, porque los alumnos ya lograron aplicar el procedimiento y empezaron a realizar la actividad, algunos primero decidieron cuál lado sería la base, incluso empezaron a razonar sobre sus construcciones, otros, pudieron utilizar de manera correcta la regla y el compás y además siguieron los pasos que les explicó la profesora-investigadora, esto porque observaron que si no los construían como se les había explicado, las construcciones no serían correctas.

5.3.2 Situación de formulación

Se pudo observar que los alumnos antes de empezar con las construcciones de los triángulos, primero eligieron cuál de las medidas proporcionadas en la tabla sería la base, para después iniciar con el trazo de la misma.

Otros alumnos marcaban el vértice A y abrían el compás con la medida de la base elegida, para marcar el vértice B y unir el segmento; es decir, utilizaban el compás para marcarlo, en lugar de trazar directamente con la regla un segmento de la medida elegida.

También había alumnos que al no saber utilizar el compás, tenían dificultad para trazar los arcos que permitían marcar el vértice c, por lo que tardaron más tiempo que otros en hacerlo.

Pudimos observar en sus construcciones que algunos alumnos ponían a cada segmento su medida, además que los indicaban con el símbolo que se les mencionó, por ejemplo $\overline{AB}$, puesto que se quería que ellos se familiarizaran con el lenguaje matemático y lo expresaran en sus respuestas.

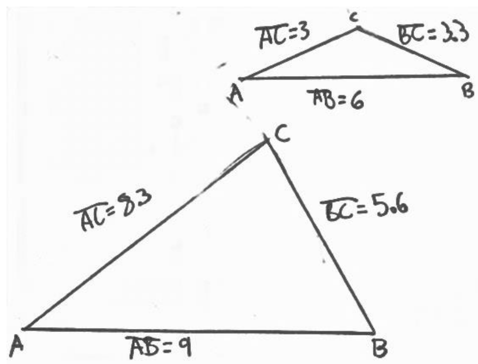


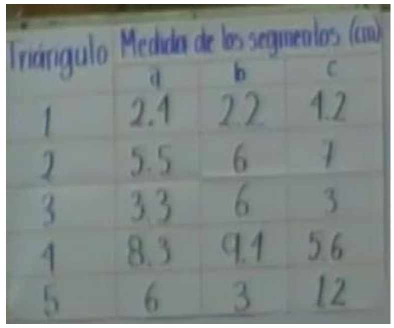
Figura 61. Producción del alumno 31

Los alumnos se estaban apoyando en su compañero de mesa, aunque se les dijo que la actividad sería de manera individual, pero como la profesora-investigadora observó que fue de gran apoyo que trabajaran en pareja dejo que continuaran haciéndolo de esa forma.

5.3.3 Situación de validación

La situación de validación, permite que los estudiantes expresen y defiendan sus respuestas ante sus compañeros, además que convenzan al resto del grupo con sus explicaciones auténticas, por lo que aquí presentaremos el momento en el que se desarrolló esta situación.

Primero que nada, la profesora-investigadora se percató de que la mayoría de los alumnos ya habían terminado, por lo que les pidió su atención para iniciar con la socialización de sus respuestas. Les preguntó si el primer triángulo lo habían podido formar, a lo que la mayoría de los alumnos responden que sí, luego inicia con las medidas de la primera fila de la tabla.



Triángulo	Medida de los segmentos (cm)		
	a	b	c
1	2.4	2.2	4.2
2	5.5	6	7
3	3.3	6	3
4	8.3	9.4	5.6
5	6	3	12

Figura 62. Tabla con las medidas de los segmentos

En el siguiente registro se muestra que uno de los alumnos participa compartiendo su respuesta y que además logra expresar los lados nombrándolos con una literal (es importante señalar que este alumno desde la actividad 1, recordó la relación entre los lados del triángulo, expresándola de la siguiente manera: $a + b > c$). Lo que la profesora-investigadora hace, es sustituir las medidas de los segmentos para comprobar si la respuesta del alumno (4.6), es correcta, con la finalidad de lograr que los demás alumnos reflexionen y participen en la validación de la respuesta, además pretende aclarar dudas y orientarlos para que construyan su conocimiento.

951 **Ma:** A ver, por ejemplo, si no tenemos nuestro compás y la regla ¿cómo podemos decir si el primer triángulo se puede formar? Levantando la mano.

952 (Dos alumnos levantan la mano para participar compartiendo su respuesta).

953 **Ma:** A ver, su compañero de allá atrás.

954 **A5.1:** Eh, sumando a y b, bueno los segmentos a y b, y viendo a ver si es mayor que el tercero.

955 **Ma:** A ver, dices tú que sumamos a y b, $2.4 + 2.2$ ¿sí?, 4.6 ¿verdad?, luego ya lo sumé, ¿ahora qué hago?

956 **A5.1:** Comprobar si es mayor que el segmento c.

957 **Ma:** Comprobar si el resultado de esta suma es mayor que el segmento…

958 **A:** c.

959 **Ma:** ¿Y qué pasará? ¿Sí es o no es?

960 **A:** Sí.

961 **Ma:** $4.6 > 4.2$, entonces ahí ya supimos si éste (refiriéndose al triángulo que podría formarse con las medidas de la primera fila) lo podemos formar antes de hacerlo ¿verdad? ¿si se acordaban de que ayer hicimos eso?

962 **A:** Sí.

Luego pide la participación de otro estudiante para el caso de las medidas de la segunda fila. En el próximo registro, se observa la participación de tres de los alumnos, ellos defienden sus respuestas y además obtienen argumentaciones, con ayuda de las preguntas de la profesora, todo el grupo se percata de que la suma de los dos lados se puede realizar con cualquiera de ellos; es decir, ellos han identificado que se puede hacer no solo con los que son diferentes a la base de un triángulo.

965 **Ma:** ¿Cómo sabes si sí se puede construir un triángulo? A ver, levanten la mano. Participen, no importa que digan lo mismo, lo que queremos es que quede claro.
966 **A3:** Sumando los lados.
967 **Ma:** Sumando los lados. Bueno y si nada más, por ejemplo aquí, dice ella que sumando a y b, ¿nada más sumando a y b podemos comprobarlo?
968 **A:** No.
969 **A5.1:** También se puede hacer lo mismo pero al revés, por ejemplo, restas $c - b$.
970 **Ma:** Vamos a hacer lo que dice su compañera primero $5.5 + 6 = 11.5$, 11.5 ¿verdad?, ¿11.5 es mayor que 7?
971 **A:** Sí.
972 **Ma:** Y luego lo que dice su compañero, ¿qué dices tú?
973 **A5.1:** Que en vez de hacer eso, reste a c el b.
974 **Ma:** ¿Y nada más puedo restar el $c - b$?
975 **A5.1:** No, también puede hacer eso con el a.
976 **Ma:** Por ejemplo, si tenemos 5.5 y 6, ya los sumé, ¿qué comprobé? Que el resultado es mayor que el tercer lado, pero por ejemplo si yo digo, quiero agarrar el b y el c, es $6.6 + 7$, ¿si serían 13 (la profesora-investigadora realiza las operaciones en el pizarrón), 13 es mayor que 5.5?
977 **A:** Sí.
978 **Ma:** ¿Entonces qué quiere decir? ¿que se cumple cómo? $13 > 5.5$, ayer dijimos una cosa…
979 **A5.1:** Dijimos algo de la resta.
980 **Ma:** Bueno también, aparte de la resta, algunos decían que nada más se podía sumar los lados menores ¿será cierto eso? Con lo que vimos ayer, ¿quién recuerda qué dijimos?
981 **A8:** Que la suma de dos lados debe ser mayor al tercero.
982 **Ma:** ¿Y esos lados importan? ¿La suma de dos lados importa?
983 **A2.1:** Que sí importa porque si no no se va a poder sumar.
984 **Ma:** Pero me refiero a que si la suma tiene que ser exactamente con los lados menores.
985 **A2.1:** No, puede ser de cualquier lado.

Además, otro alumno recuerda lo que se dijo el día anterior sobre la resta entre dos lados cualquiera, por lo que este comentario se retomó más adelante.

986 **Ma:** Puede ser de cualquier lado ¿verdad?, por ejemplo si quiero sumar $a + b$, ese resultado de la suma debe ser mayor que c, y si quiero sumar $a + c$, ¿qué pasará? Ese resultado debe ser mayor que el b. No importa cuáles lados tomemos para hacer esa suma, siempre tiene que ser mayor que el tercero, no importa los lados que tomemos. Otra cosa que decíamos, la que decía ahorita su compañero, él dice que además de la suma, ¿qué otra operación podremos hacer con esas medidas de los segmentos?
987 **A5.1:** Tienes que restar $c - b$, y lo que te salga tiene que ser menor que el tercer lado.
988 **Ma:** Igual, ¿nada más sería $b - c$ la única forma de comprobarlo?
989 **A5.1:** No, también puede ser $c - a$.
990 **Ma:** Por ejemplo aquí, a $2.4 - 2.2 = 0.2$, el resultado de la diferencia de estos dos, debe ser menor a la del tercer lado, ¿sí se cumple?
991 **A:** Sí.
992 **Ma:** Entonces, ésas son las características que ustedes debieron haber puesto en el inciso b, donde les pedían que explicaran porqué sí se podía formar y porqué no. Cuando ustedes no tengan una regla y un compás en un examen, observando las medidas de los segmentos ¿podrán saber si se puede o no?
993 **A:** Sí, sumando los segmentos.

994 **Ma:** Sí, pero siempre tiene que comprobar que el resultado de la la suma sea mayor que el tercer lado. ¿Y en la resta?

995 **A:** Que el resultado sea menor.

En este momento de la clase lo que se pretendía era que los alumnos recordaran que no solo es necesario hacer sumas entre cualquiera de las medidas de dos de los tres segmentos proporcionados, sino que también se podría, y es importante, hacer la resta entre las medidas de dos de los tres segmentos.

La validación solo fue entre algunos alumnos y la profesora-investigadora, ya que ella intervino constantemente, con la finalidad de ayudarlos a construir su conocimiento, esto para lograr que validaran los diferentes procedimientos que proponían sus compañeros.

Como menciona Brousseau (2002, p. 74) el rol del maestro también consiste en institucionalizar, por lo tanto es importante que esté atento para identificar en qué momento de la clase lo hará, ya que esto lo puede realizar, ya sea rescatando algún momento significativo de la clase (una acción del estudiante o una formulación) y recopilando lo que ayude a que los alumnos conozcan el tópico matemático con el que estuvieron trabajando, tal y como se conoce en Matemáticas y que de esa manera lo puedan usar en otro momento de su aprendizaje.

5.3.4 Situación de institucionalización

En este momento de la actividad, no se tenía considerado (en el análisis a priori) que la profesora-investigadora llevara a cabo una situación de institucionalización, pero debido a la manera en la que la actividad se fue desarrollando; se inició mediante un ejemplo en el que la profesora-investigadora les da las medidas 5 cm, 3 cm y 2 cm a los alumnos y ella frente al pintarrón es quien dirige este momento.

1008 **Ma:** Ahora sí, si les pongo por ejemplo, que las medidas de los segmentos de los lados de un triángulo serán, $a = 5$, $b = 3$ y $c = 2$, ¿se podrá formar ese triángulo? (Los alumnos realizan operaciones en sus hojas de trabajo para estar seguros si con las medidas proporcionadas, es posible que exista un triángulo).

1009 **A2.1:** Sí.

1010 **Ma:** Si creen necesario hacer una operación o algo, la pueden hacer en su hoja.

1011 **A2.1:** Sí.

1012 **Ma:** ¿Si se puede?

1013 **A:** Sí.

1014 **Ma:** ¿Tú dices que no?

1015 **A5.1:** Sería como ayer cuando intentamos… hacer el triángulo de 10, 10 y 20. Tendrían que estar rectas las dos líneas, éste, bueno, la de la base sería 5, y la de 3 y 2, serían rectas.

1016 **Ma:** Se formaría un solo segmento ¿verdad?, pero ¿cómo lo puedo comprobar con esto que les acabo de decir yo ahorita? (la profesora-investigadora señala las operaciones que realizó anteriormente en el pizarrón).

1017 **A:** Sumando $a + b$.

1018 **Ma:** Sumo $a + b$, ¿cuánto es?

1019 **A:** 8.
1020 **Ma:** ¿8 es mayor que c?
1021 **A:** Sí.
1022 **Ma:** Y luego sumo $3 + 2$, ¿cuánto es?
1023 **A:** 5.
1024 **Ma:** ¿5 es mayor que 5?
1025 **A:** Igual.
1026 **Ma:** ¿Entonces ahí qué pasa?
1027 **A:** No se cumple.
1028 **Ma:** Ya no se cumple ¿verdad? ¿qué quiere decir? ¿se puede o no formar el triángulo? (Una de las alumnas levanta la mano para participar y se le cede la palabra).
1029 **A21:** Nada más se puede formar con el a y el c, y que la base sea 3, y no se puede formar el b y el c porque la suma no es mayor a la base.
1030 **Ma:** Lo primero que decías, ¿qué sí se puede qué?
1031 **A21:** El a y el c.
1032 **Ma:** ¿El a y el c si se puede qué?
1033 **A21:** Formar el triángulo.
1034 **Ma:** ¿Segura? Por ejemplo, dices tú, ¿5 la base y 2 el otro lado?
1035 **A21:** No, la base 3 y los lados 5 y 2 (la profesora-investigadora anota en el pizarrón las medias para realizar las operaciones necesarias, esto para ayudar a que la alumna se dé cuenta de que no es correcta su respuesta).
1036 **Ma:** Pero, fíjate bien, 5, si giramos este triángulo, el 2 va a quedar invertido ¿qué pasa con estos dos? ¿$2 + 3$?
1037 **A:** 5.
1038 **Ma:** ¿5 es mayor que 5?
1039 **A:** No.
1040 **Ma:** Entonces es como les decía ahorita, no importa la base que tomen, siempre van a ser las mismas medidas, siempre va a ser el mismo triángulo, aunque tenga estos lados y lo quieras poner tú diferente, no se puede formar el triángulo, porque no cumple esta condición que decíamos ahorita, por eso es importante que lo hagan con los tres lados, porque $a + c$, pues sí, 7 es mayor que 3, pero ya cuando suman, $b + c$, ¿qué pasa?
1041 **A:** No se cumple.
1042 **Ma:** Ya no se cumple, por eso es conveniente hacer las tres sumas, $5 + 3 = 8$, sí es mayor que 2. ¿Ahora qué hago? $b + c$, que es $3 + 2 = 5$, ¿5 es mayor que 5?
1043 **A:** No, es igual.
1044 **Ma:** Aquí, no es mayor que 5, entonces aquí no se cumple. ¿Qué me falta?¿Cuál otra me falta a hacer?
1045 **A5.1:** La resta.
1046 **Ma:** También falta la resta, pero nos falta una suma.
1047 **A2.1:** $2 + 5$.
1048 **Ma:** ¿$2 + 5$?
1049 **A:** 7.
1050 **Ma:** Ya hicimos $a + b$, $b + c$, ¿cuál nos falta?, entonces falta $2 + 5$, que serían 7, 7 es mayor que 3, ahí también se cumple, pero ya hubo una condición que no se cumplió por lo tanto el triángulo, no se puede, ya si ustedes se quieren cerciorar, pues hacen la resta. En lugar de hacer la suma hacen la resta, por ejemplo $5 - 3$.
1051 **A:** 2.
1052 **Ma:** ¿$2 < 2$?

1053 **A:** No.

1054 **Ma:** Tampoco se cumple aquí. Entonces así, haciendo estas operaciones, ustedes van a ver sí se puede o no. ¿Cómo les dije que se le conocía en Matemáticas a esa propiedad de los triángulos? ¿No se acuerdan?

1055 **A5.1:** Desigualdad triangular.

1056 **Ma:** Es la desigualdad del triángulo, siempre que queramos construir un triángulo debemos tener en cuenta esas características, para poder construirlo, porque si ponemos una medida, que no cumpla con ello ¿qué va a pasar? No vamos a tener un triángulo ¿verdad? Y esa es la propiedad que estuvimos viendo ayer y hoy. ¿Tienen alguna duda o a alguien no le queda claro? (Todos los alumnos dijeron que no tenían ninguna duda).

Este momento es institucionalización, en el que se muestra evidencia de que la profesora-investigadora inició con un ejemplo para generar preguntas y obtener respuestas de sus alumnos, para que de esa manera se recopilaran algunos momentos de la clase, para llegar a expresarles de nuevo que ese tópico matemático es conocido como la desigualdad del triángulo.

5.4 Etapa de validación de la Ingeniería Didáctica

En esta etapa de la Ingeniería Didáctica se contrastan las hipótesis consideradas en el análisis a priori, con lo que realmente sucedió en el análisis a porteriori, con la finalidad de rescatar cada uno de los momentos que sucedieron o no, durante la experimentación.

5.4.1 Material didáctico

El material que les fue proporcionado a los equipos para que respondieran el inciso “a”, en el que debían completar los datos faltantes de la tabla, fue el que habíamos considerado en el análisis a priori, ya que cada equipo contaba con 18 palos de madera (8 de 10 cm, 1 de 11 cm, 1 de 14 cm, 1 de 15 cm, 1 de 20 cm, 2 de 25 cm, 1 de 30 cm, 2 de 40 cm y 1 de 50 cm.), lo único que se modificó, fue que para las filas 4, 5 y 7 de la tabla, los palos de madera se organizaron de tres en tres, de acuerdo a las medidas, por ejemplo, en el caso de la fila 4, en la que se utilizaron las medidas, 10 cm, 40 cm y 50 cm; éstos fueron organizados con una liga para evitar que se utilizaran otros, evitando que se cumpliera lo que queríamos que los alumnos comprobaran; es decir, si no se cortaban los palos de manera exacta, éstos no podrían haber cumplido el propósito de comprobar que con segmentos de cualquier medida era posible formar o no un triángulo.

El material que la profesora-investigadora utilizó fue la misma cantidad de palos de madera, con las mismas medidas, solo que para que los alumnos pudieran formar los triángulos en el pintarrón, se utilizó en lugar de imanes, cuadritos adhesivos, los cuales permitieron que los palos de madera se quedaran fijos en el pintarrón. Además se basó en las hojas bond que contenían la misma información de la hoja de trabajo.

Figura 63. Palos de madera utilizados por la profesora-investigadora

Lo importante era que los alumnos pudieran utilizar el material didáctico manipulable con la finalidad de facilitar su proceso de enseñanza y aprendizaje (Area, 2010, citado en Valenzuela, 2012, p. 25). Lo anterior nos permite pensar en la importancia de implementar materiales didácticos manipulables, ya que durante el desarrollo de las actividades llegan a ser un medio que permite la adquisición de conocimiento, considerando que también fueron diseñados para apoyar al profesor durante su clase, puesto que con anterioridad se dio a la tarea de reflexionar sobre la forma en la que podría aprovecharlo para el desarrollo de un tema.

5.4.2 Situación de acción (actividad 1: "Existencia de triángulos")

Primeramente es conveniente mencionar que cuando la profesora-investigadora llegó al salón de clases, los equipos ya habían sido formados por la profesora-titular del grupo, eran 11 equipos, 10 con 3 integrantes y 1 con 4. Como se mencionó anteriormente, la profesora-titular conformó los equipos considerando que en cada uno de ellos el rendimiento académico de sus integrantes fuera homogéneo.

Podemos decir que la organización de los equipos fue de ayuda para el propósito de nuestra actividad, ya que se logró que el material didáctico manipulable que se les proporcionó a los equipos, fuera utilizado por todos los integrantes, de manera que trabajaran en conjunto, que se apoyaran y que discutieran sobre lo que harían para resolver la actividad, con la intención de que el material apoyara en gran medida a la construcción del conocimiento.

Para iniciar con la clase, la profesora-investigadora, les planteó la pregunta: "¿Se puede construir siempre un triángulo con tres segmentos de cualquier longitud?", la cual correspondía al inciso "a" de la primera actividad, tal y como lo anticipamos en nuestra hipótesis, los alumnos respondieran de manera espontánea y sin muchas explicaciones que sí, pero luego de que se les diera un ejemplo con algunas medidas (20 cm, 20 cm y

40 cm) y se les volviera a preguntar si se podría formar un triángulo, algunos alumnos sostuvieron su respuesta y otros cuantos dijeron que no se podía, desde este momento se logró generar curiosidad en ellos, así comenzaron a interesarse en la actividad.

Luego de que algunos alumnos ayudaran a leer las instrucciones, las profesoras (titular e investigadora), repartieron el material didáctico a cada uno de los equipos y se pudo observar claramente que cuando se les proporcionó, se logró la devolución, ya que los palos de madera eran de interés para los estudiantes y a pesar de que no se les había dado ninguna instrucción, ellos empezaron a manipular el material y a relacionarlo con la tabla de su hoja de trabajo.

Así, los alumnos actuaron en la situación y algunos equipos lo hicieron como lo habíamos considerado; es decir, identificaron cuáles eran los datos faltantes en la primera de las filas, luego formaron los triángulos con los palos de madera y después continuaron llenando los datos faltantes, además, como se consideró, algunos equipos pudieron decir que el primero de los triángulos era equilátero, mucho antes de utilizar el material didáctico.

En lo que se refiere a la construcción del conocimiento, en la situación de acción, se quería que los alumnos relacionaran el materia didáctico manipulable con la resolución de la actividad, además que ellos se dieran cuenta que ese material les podía servir como un apoyo para experimentar, formular y validar sus procedimientos.

5.4.3 Situación de formulación-validación (actividad 1: “Existencia de triángulos”)

Para la situación de formulación, los integrantes de los equipos propusieron sus procedimientos y esto les permitía elegir el que los convenciera; por ejemplo, tal como lo habíamos estimado, para la primera de las filas, los alumnos en sus respectivos equipos, mencionaban al ver las medidas, qué era un triángulo equilátero, pero otro prefería utilizar los palos de madera, luego se ponían de acuerdo y decidían que primero era conveniente ubicar los palos de madera de las medidas indicadas, luego formar el triángulo y después explicar por qué sí o por qué no era posible formar un triángulo. Por último anotaban el tipo de triángulo que era.

Como la tabla fue elaborada de tal manera que las medidas permitieran a los alumnos ir de lo sencillo a lo difícil, con la finalidad de que pudieran modificar su conocimiento, la primera de las filas la respondieron sin ningún problema, así como la segunda y la tercera, puesto que en las tres, se formaban triángulos que la mayoría de los equipos, pudieron identificar fácilmente de qué tipo eran, considerando las características de sus lados.

La solución óptima para la primera de las filas, era que los alumnos responderían que sí se generaba triángulo, porque con los palos de madera sí se logró construir, pero para esta fila todos los equipos, respondieron lo mismo (porque sus lados son iguales), la cual es una respuesta diferente a lo que se esperaba. Consideramos que el hecho de agregar en la tabla la columna en la que debía poner el tipo de triángulo que se formaba, ayudó a que los alumnos se dieran cuenta de que ese conocimiento previo que tenían, en un determinado momento ya no les sería útil para dar paso a nuevos razonamientos que les ayudaran a dar respuesta a lo que se les planteaba.

Para la fila dos, nuestra hipótesis de solución óptima fue que dirían que sí, porque los palos con esas medidas permitirían formar un triángulo, pero lo que en realidad pasó fue que ellos dieron diversas respuestas; algunos equipos dieron como justificación algo relacionado con los lados del triángulo "encajan en medidas o porque los lados alcanzan las medidas de la base"; otros decidieron mencionar: "porque sus lados son desiguales"; un equipo explicaba que "sumando sus lados menores" y algunos dieron respuestas incorrectas por ejemplo, escribieron: "porque es un triángulo isósceles", "porque dos de sus lados formar un ángulo de 90°" o "sumando sus dos lados menores, dieron la suma del tercero".

En un equipo llegaron a expresar la siguiente respuesta: "porque la fórmula $a + b > c$ se cumple y los palos concuerdan". Otro equipo menciona que "sumando sus dos lados menores, dieron más que el tercero". En este mismo sentido pudimos observar una gran variedad de respuestas que dieron los equipos, así que surgieron otras diferentes a la que consideramos en el análisis a posteriori. Las diversas respuestas que dieron los alumnos nos llevan a pensar en la similitud que hay entre cada una de ellas; es decir, todos tratan de explicar alguna relación entre los lados del triángulo, además reflejan los conocimientos previos; es decir, para la Fila 2 continúan tratando de explicar su respuesta mencionando los lados y la base del triángulo, pero sin encontrar una relación entre los tres lados del triángulo.

El material didáctico manipulable pudo orientar a los alumnos para modificar sus respuestas, ya que al comprobar que sí se formaba un triángulo, ellos trataban de explicarlo al observar el material y reflexionar, se logró generar el ambiente de aprendizaje adecuado para el desarrollo de la actividad, ya que el trabajo en equipo permitió que los alumnos se sintieran apoyados por sus compañeros.

La participación de los integrantes de cada uno de los equipos, ayudó para que tuvieran la confianza de expresar sus ideas antes de anotar alguna respuesta en su hoja de trabajo, se pretendía que conforme fueran avanzando en las filas de la tabla, la construcción del conocimiento sea paso a paso; es decir, ellos observan que el conocimiento que tenían sobre los triángulos era de gran ayuda para dar una justificación sobre por qué se puede formar un triángulo con las medidas dadas, y hasta este momento los alumnos empiezan a valerse de su conocimiento.

En el caso de la Fila 3 de la Tabla 7. Solución óptima, lo que habíamos considerado que responderían los alumnos fue que sí se pudo construir el triángulo con los palos, pero al igual que en la Fila 2, las respuestas fueron diversas. Tres equipos dieron como argumento, que sí se formaba el triángulo "porque tiene dos lados iguales y uno desigual"; otro mencionaba que "aunque no tenga las mismas medidas forman un triángulo"; otro, "porque todos sus ángulos son de acuerdo a los de un triángulo"; otras respuestas que dieron son: "porque también la fórmula aplica a la perfección", "queda exactamente", "porque la medida de los lados desiguales a la base es mayor a ella", "la tercera línea es mayor a las otras dos" y por último, "dos de sus lados son iguales y sumados, suman más que el tercero.

En esta fila, hubo un caso que fue el Equipo 9, quienes respondieron que con esas medidas no se podía formar un triángulo "porque sus lados son menores a la base y sobro un tramo". Es importante mencionar que este equipo fue el único que tuvo problemas para trabajar en conjunto, ya que no se apoyaban, sino que copiaban la respuesta al compañero, no discutían ni tampoco proponían diferentes formas de resolver la actividad. En cuanto a lo anterior, podemos decir que una posible explicación sobre la falta de interés de los tres alumnos hacia las actividades, tiene que ver con una dificultad asociada a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, ya que a diferencia de los demás alumnos (30), no se mostraron atraídos por resolver la situación.

Continuando con las respuestas a la tabla en la Fila 4, propusimos que lo que los alumnos responderían era que dijeran que porque cuando trataron de unir los palos de madera, lo que se forma son dos segmentos juntos, pero aquí ya solo hubo 5 respuestas diferentes, ya que varios equipos coincidieron. Tres de ellos mencionan que "porque las medidas de las figuras no corresponden a las de un triángulo; cuatro equipos dicen; "es porque a un lado le faltaron 10 cm; otro equipo menciona; "porque $a + b$ no es mayor que c y no se puede"; otro más anota; "todos no se pueden poner ni como base ni como lado"; y la última respuesta dada por uno de los equipos es; "la medida de los lados opuestos a la base dan su medida, por lo tanto no se puede".

Como se observa, las respuestas de los alumnos estuvieron alejadas de lo que nosotros pensamos, ya que hubo variedad, y además los equipos mencionan que no se puede formar el triángulo porque las medidas no corresponden o porque le faltan centímetros a un lado; es decir, ellos empiezan a observar que existe relación entre las medidas dadas. Además en las respuesta para esta fila, se observa que algunos equipos dan justificaciones acercadas a la propiedad de la desigualdad del triángulo, pero se siguen apoyando en las características de los triángulos refiriéndose a los lados y la base para explicar, lo cual se podría deber a un obstáculo que no les permite reestructurar su conocimiento para darle paso a uno nuevo y otros cuantos equipos se empiezan a fijar en las medidas de los segmentos que se les proporcionan y en lo que observan al intentar formarlos con los palos de madera.

En la Fila 5, creímos que la respuesta óptima sería; porque las medidas de dos de los lados son la mitad de la tercera medida y lo que se forma son dos segmentos unidos. En este caso, 4 de los 11 equipos dieron una respuesta similar diciendo; "porque 10 es a mitad de 20 y no se hace" y "porque la suma de los lados opuestos a la base dan su medida $10 + 10 = 20$ base$= 20$"; otros dan la misma respuesta que a la fila anterior; "todos no se puede poner como base ni como lado" y "porque $a + b$ no es mayor que c y no se puede". Por último, el resto de los equipos justifican; "no alcanzan los lados" y "porque no hay forma de que quede el 10 con el 20".

Hasta este momento 5 de los 11 equipos, logran expresar con sus palabras que la suma de dos de los lados debe ser mayor que el tercero para que pueda formarse un triángulo, pero todavía siguen refiriéndose a los lados y la base; es decir, utilizan sus conocimientos previos sobre el triángulo.

Para la Fila 6, la respuesta óptima era que los alumnos dirían que no alcanza a cerrar el triángulo, los palos de 10 cm, deberían ser más grandes. En este caso solo hubo 4 respuestas diferentes: "queda corto", "con la medida de los lados no se alcanza a hacer un triángulo", "porque $a + b$ no es mayor que c y no se puede" y "la medida del "c" es mucho mayor que el "a" y el "b" juntos". Como se puede notar, dos de las respuestas son parecidas a la que habíamos propuesto en el análisis a priori, pero tenemos 3 de los 11 equipos que continúan expresando la propiedad de la desigualdad del triángulo con sus palabras y mientras que los demás se fijan en que las medidas deben ser mayores para que se pueda formar el triángulo.

En la última de las filas, la respuesta óptima pensada, fue: porque también forman dos segmentos juntos. Pero los equipos dieron su respuesta justificando de la siguiente manera; "es inconcurrente", "los lados de la figura no dan con la base", "porque no alcanzan las medidas", "porque $a + b$ no es mayor que c y no se puede", "los palos menores "a" y "b" son la medida del "c", y "sus lados menores alcanzan el mínimo de 25 y no formó".

Las respuestas de los alumnos también fueron variadas, pero uno de los equipos utilizó la palabra inconcurrente, la cual no es correcta, nosotros interpretamos que se refieren a que los lados con esas medidas no se unen, y como se mencionó en el análisis a posteriori, esto se puede deber a que los alumnos tengan una dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos. Lo mismo es para la respuesta en la que mencionan que los lados de la figura no dan con la base y la otra en la que dicen que no alcanzan las medidas, aquí los alumnos se refieren a que las medidas no cumplen con la propiedad de la desigualdad del triángulo. Las respuestas del resto de los equipos al igual que en las filas anteriores, reflejan que su aprendizaje con el desarrollo de la actividad, los lleva a encontrar las características de los segmentos para que se pueda formar un triángulo, no de manera general , sino que más bien especificando que se realiza la suma de las medidas de dos lados, sin especificar que la suma puede ser entre dos de los lados cualquiera.

Es importante mencionar que mientras los integrantes de los equipos fueron respondiendo la tabla, hubo momentos para las situaciones de formulación y también para la situación de validación. En cada una de las filas y en la mayoría de los equipos, ellos entraban en estas dos situaciones con el objetivo de lograr elegir la respuesta que para ellos era la correcta y la que los convencía mejor.

Para la ultima de las filas, 7 de los 11 equipos siguieron el proceso de construcción que se esperaba, ya que el propósito de la actividad fue que ellos durante la situación didáctica, primero, utilizaran sus conocimientos previos, luego que lograran identificar las características de las medidas de los segmentos para formar un triángulo y que con ello lograran expresar con sus palabras la desigualdad del triángulo.

5.4.4 Situación de validación en el grupo

La validación que se realizó en el grupo, luego de que todos los equipos terminaron de completar la tabla, fue organizada por la profesora-investigadora, ella eligió los equipos que pasarían al pintarrón, considerando que éstos defenderían sus respuestas y trataran de convencer a los demás de que su respuesta era la correcta. Para que se validaran, se les pidió a los equipos que si les tocaba pasar al frente, debían hacer lo mismo que habían hecho en el momento de responder la fila correspondiente. Se puede decir que todos los equipos utilizaron los palos de madera para comprobar sus respuestas y éstos les ayudaron a construir su conocimiento.

El primero de los equipos que pasó al frente fue el 7, ya que ellas terminaron primero de llenar la fila 1, pero además la mayoría coincidieron en la respuesta, solo hubo dos en particular que intervinieron luego de que el Equipo 7 diera a conocer su respuesta, ya que tenían una diferente, pero esta respuesta no convenció a los demás equipos por lo que ellas terminaron cambiándola; es decir, se convencieron con la explicación del Equipo 7.

Durante la validación de la primera de las filas otro de los equipos participó diciendo que la respuesta que ellos habían dado fue que se formaba porque tienen las mismas medidas y porque $a + b$ es mayor que c, pero este equipo no logro convencer a los demás de que cambiaran su respuesta.

En la Fila 2 la profesora-investigadora decidió pasar al Equipo 11, porque ellos tenían una respuesta correcta y se acercaba a lo que pretendíamos que los alumnos construyeran en el transcurso de las actividades, ellos explicaron que "sumaron los lados menores y dieron más que el tercero", otro integrante del mismo equipo dice que "sumando sus lados menores suman más que el tercero que es el lado mayor". Luego de que dan a conocer su respuesta, se les pregunta que si hay equipos que tengan otra respuesta diferente a la de sus compañeros, en ese momento un integrante del Equipo 5 levanta la mano y dice que ellos tienen otra respuesta diferente. Este equipo es el mismo que intervino anteriormente, de nuevo tratan de convencer a los demás que su respuesta es la correcta, pero no lo logran.

El siguiente equipo que pasó fue el 8, ellas justificaron que el triángulo se formo porque "las medidas de los lados desiguales a la base son mayores que ella", en este momento intervino el Equipo 6 diciendo que su respuesta era diferente, que ellas anotaron que "porque tiene dos lados iguales y una base diferente". Para lograr que las alumnas del Equipo 8 pudieran reflexionar sobre su respuesta la profesora-investigadora les realizó algunas preguntas, con esto, ellas pudieron explicar mejor su respuesta.

El Equipo 4 fue elegido para dar a conocer su respuesta a sus compañeros, la cual fue que no se puede formar el triángulo "porque no tiene medidas exactas". Como la profesora-investigadora observó que no tenían argumentos suficientes, les hizo una serie de cuestionamientos con la finalidad de hacerles ver que es conveniente que su respuesta sea clara y sobre todo específica para que los demás la pudieran entender.

Durante la validación de esta respuesta, intervino una de las integrantes del Equipo 2, la cual apoyo a las alumnas del Equipo 4, dando ideas sobre las argumentaciones que podían agregar para que su respuesta fuera entendible para los demás, y se aprovechó su participación haciendo notar que sus argumentaciones podían ser como las que la compañera estaba explicando.

El siguiente equipo que pasó fue el 3, sus integrantes dan a conocer su respuesta argumentando que "los lados a y b, tendrían que ser más grandes que la base para que se alcanzara a formar el triángulo", luego de que dan su respuesta, una integrante del Equipo 8 interviene y menciona que es porque "el a y b sumados tienen que ser un número mayor a la base".

Con la participación de los equipos se puede rescatar que en las primeras de las filas, los argumentos que dieron estuvieron relacionados con los tipos de triángulos de acuerdo a sus lados, pero conforme fueron avanzando en las filas, la mayoría de ellos dejaron a un lado ese conocimiento y dieron paso a encontrar la relación entre las medidas de los lados del triángulo.

Lo importante de la validación radicó en el hecho de que los equipos defendieron su respuesta y la argumentaron para poder lograr que los demás se convencieran o no de cambiar su respuesta. Además permitió generar la participación de los alumnos sin importar que fueran de equipos diferentes, se apoyaron y complementaron las respuestas dejando claro lo que querían expresar.

Además las intervenciones de la profesora-investigadora fueron estratégicas, de tal manera que las preguntas que les planteó a los alumnos, ayudaran a que ellos explicaran de una mejor manera lo que querían expresar, fomentando en ellas la construcción del conocimiento y permitiendo que las participaciones fueran escuchadas por igual por todo el grupo, así como el fomento de un ambiente de respeto por los alumnos que expresaban su trabajo. Lo principal era orientarlos para que pudieran recorrer ese camino que les permitiera adquirir conocimiento y esto se logró mediante las participaciones de la profesora-investigadora, ya que ella intentó devolver a los alumnos, mediante preguntas, cada una de las afirmaciones que ellos hacían y esto dio paso a generar un ambiente de discusión entre el grupo, logrando que ellos se cuestionaran y explicaran a los demás el procedimiento que habían seguido para inclinarse por la respuesta que consideraron la correcta.

En este momento se pudieron rescatar argumentaciones que ayudaron a cada integrante de los equipos a darse cuenta de que pueden existir diversidad de respuestas con las que se trata de explicar, en este caso la desigualdad del triángulo, también a observar que el hecho de que sean diferentes, no quiere decir que estén mal, sino que es importante que las expresen para que los demás contribuyan a mejorarlas, aclarar alguna duda o para darse cuenta de que su respuesta no es correcta.

5.4.5 Situación de acción (inciso b)

La primera de las actividades está constituida por dos incisos, por lo que realizaremos la validación de las diferentes situaciones que se presentaron en el inciso “b”, en el cual se utilizó el material didáctico de las figuras articuladas con escala, este material fue diseñado con la intención de que los alumnos pudieran formar triángulos considerando que la medida de dos de los lados no se podía modificar, por esa razón tenían la oportunidad de elegir la medida del tercero de los lados, incluso podían elegir medidas con las cuales no se pudiera construir un triángulo.

Se les proporcionó el material (11 figuras articuladas con escala, una por equipo). Como se les pidió que formaran tres triángulos, y que además escribieran en su hoja de trabajo las relaciones que ellos encontraron entre las medidas de cada uno de los lados, los alumnos iniciaron con la manipulación del material y continuaron apoyándose entre ellos para resolver la situación, cada uno de los integrantes contribuía en la toma de decisiones sobre qué medidas a elegir y la forma en la que explicarían por qué se podía formar un triángulo.

Es importante mencionar que los alumnos al entrar en la situación de acción, primero eligieron tres medidas que representarían los lados del triángulo, pero ya lo hacían pensando sí era posible o no formarlo, de tal manera que pudieran explicarlo encontrando una relación entre las medidas elegidas por ellos mismos.

Luego de realizar lo anterior, dieron respuesta a la pregunta planteada ¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de los segmentos para formar un triángulo?, considerando que al manipular el material y elegir las medidas de sus triángulos, los alumnos pudieron dar respuesta a la pregunta.

Las respuestas a la pregunta anterior, reflejan que los alumnos lograron expresar la desigualdad del triángulo con el lenguaje natural, esto es debido a que la secuencia que se les planteó con el desarrollo de la actividad, los orientó de manera correcta a la mayoría de ellos, para que lograran establecer una relación entre las medidas de los lados del triángulo.

5.4.6 Situación de formulación-validación entre los integrantes del equipo (inciso b)

Cuando los equipos empiezan a proponer diferentes medidas con las cuales realizaron cálculos (en este caso adiciones) con la finalidad de encontrar la relación entre las medidas de los lados del triángulo, en dado caso que éste se pueda formar, se generan diálogos entre los integrantes de cada uno de los equipos de los cuales se extrajo la evidencia, se puede notar que proponen posibles respuestas y que les interesa encontrar una explicación que los convenza para justificarla.

Los razonamientos y las discusiones que surgieron al realizar esta actividad, revelan el proceso de cada uno de los equipos en el momento de proponer sus procedimientos y validarlos. Observamos que 10 de los 11 equipos logran expresar con lenguaje natural la desigualdad del triángulo, con esto podemos decir que el diseño de la actividad permitió que los alumnos lograran un aprendizaje sobre este tópico matemático.

Se presentaron tres tipos de respuestas, la primera es en la que los equipos dicen que "la suma de las medidas de los lados del triángulo debe ser mayor que la base", la segunda, "que la suma de dos de los lados debe ser mayor que el tercero" y la tercera, en la que mencionan, "para que sea posible construir un triángulo $a + b > c$".

La primera de las respuestas mencionadas anteriormente, fue la que dieron la mayoría de los equipos, para ser específicos fueron 8, ellos explican la desigualdad del triángulo en su lenguaje natural y además consideran la base del triángulo, porque suponen que es importante que primero se determine cuál será la base y después con las otras dos medidas se determinará sí se puede construir un triángulo. 2 de los 11 equipos dieron la segunda respuesta, en la cual se observa que ellos ya consideran que la adición se puede realizar entre dos de las tres medidas dadas, así como comparar ese resultado con el tercer lado. La última de las respuestas fue dada por uno de los equipos, ellos especifican la suma asignando a cada uno de los lados una literal, lo que representa para el equipo, una forma rápida de explicar la desigualdad del triángulo.

Estos razonamientos nos brindan información importante, ya que la diversidad entre los alumnos permite observar procesos de aprendizaje diferentes, los cuales proporcionan información valiosa sobre cómo se fue llevando a cabo la construcción de su conocimiento, de tal manera que permite considerar los pros y los contras del diseño de nuestra actividad.

Además tenemos un equipo que no logró llegar a ninguna de las repuestas anteriores, ya que al responder la pregunta sobre qué condiciones deben cumplir las medidas de tres segmentos para formar un triángulo, respondieron describiendo los triángulos, equilátero, escaleno e isósceles, lo que revela que estaban distraídos al momento de la situación de validación en el grupo y que no participaron en ella, porque durante el desarrollo de la clase, se les notaba ausentes, sin interés ni actitud positiva ante la actividad. La profesora-investigadora se acercaba para orientarlos y resolver sus dudas, ellos aparentaban que ya habían entendido las indicaciones y que podían continuar por sí mismos, pero sus producciones revelan que no hubo trabajo colaborativo y que no llegaron a construir el conocimiento que se esperaba.

5.4.7 Situación de validación en el grupo (inciso b)

En la situación de validación en el grupo, se había considerado en el análisis a priori, que los alumnos darían sus respuestas tratando de describir la relación entre las medidas, mencionando que eran pequeñas, que debían ser más grandes o que un lado debe ser menor que la suma de los otros dos, y que además expresaría con sus palabras la desigualdad del triángulo. Lo que en realidad sucedió fue que en la mayoría de los equipos (10 de 11), se logró que decidieran entre los integrantes la respuesta que darían a la actividad propuesta, y además que cuando se les pedía expresar sus respuestas, se apoyaran para llegar a un acuerdo en la socialización, expresando cada uno sus argumentos.

Las intervenciones de la profesora-investigadora para dirigir el momento de validación, fueron importantes, ya que intervino en los momentos precisos siempre con la intención de orientar a los alumnos, para que ellos mismo trataran de expresar sus respuestas dándolas a conocer con explicaciones claras y con respeto hacia sus compañeros.

5.4.8 Situación de institucionalización (actividad 1)

La institucionalización es también un momento importante de la clase, es en el que la profesora-investigadora da a conocer el nombre del tema que se estuvo trabajando, con la finalidad de que los alumnos lo puedan identificar en otro momento de su vida escolar y que lo puedan utilizar en la resolución de algunos problemas.

La forma en la que la profesora-investigadora llevó a cabo este momento, debido al tiempo que restaba para el término de la clase, fue adecuado, solo que no pudo explicarlo mediante el triangulo, tal como se había previsto en el análisis a priori, sino que en su discurso trató de expresar la desigualdad del triángulo y les hizo saber a los alumnos que ninguno de los equipos había podido llegar a expresar que además de la relación que habían encontrado, la segunda condición para poder construir un triángulo con tres segmentos, era que la diferencia entre las medidas de dos lados cualquiera, deber ser menor a la medida del tercer lado.

5.4.9 Situación de acción (actividad 2: "Construcción de triángulos")

Para iniciar la clase se consideró importante que los alumnos identificaran la diferencia entre las medidas proporcionadas en la tabla de la primera actividad y las medidas de la tabla de la segunda actividad; es decir, que notaran que en la segunda había números decimales, esto para que no se quedaran con la idea de que la desigualdad del triángulo solo se cumplía con números naturales.

El material didáctico que se utilizó fueron la regla y el compás, por lo que es relevante comentar que se pensó en el material tradicional, debido a que creíamos importante que los alumnos pudieran trabajar las construcciones de los triángulos, utilizando números decimales. Luego de que ya se aplicó, pudimos notar que los alumnos tuvieron problemas para manejar de manera adecuada dicho material, y que la construcción de un triángulo no les había quedado muy clara en cursos anteriores, por lo que estos factores generaron que fuera difícil que lograran entrar en la situación de acción.

Se intentó en tres ocasiones lograr la devolución, pero en la primera que fue mediante la explicación de uno de los alumnos, no se logró debido a que no quedaron claras las instrucciones que siguió para hacer la construcción; en la segunda donde la profesora-investigadora les explicó apoyándose de las láminas cuyo contenido eran las instrucciones para trazar un triángulo con regla y compás, pero al pasar por los lugares se continuó observando que los alumnos estaban un poco perdidos al trazar sus construcciones; por último, la profesora-investigadora tuvo que improvisar y pidió la atención de los alumnos, ya que en esta ocasión les explicaría, pero trazando todos juntos el triángulo con las medidas proporcionadas en la primera de las filas.

No fue hasta la tercera de las explicaciones cuando los alumnos empezaron a actuar sobre la situación, y por lo tanto se dio la devolución, esto se pudo observar porque al pasar por los lugares de trabajo se notó que ya estaban trazando los triángulos, en el caso que las medidas cumplieran con las condiciones para construir un triángulo.

5.4.10 Situación de formulación (actividad 2: "Construcción de triángulos")

Los alumnos siguieron las instrucciones de la profesora-investigadora para trazar un triángulo, solo que hubo algunos que después de que elegían la primera de las medidas que trazarían, no utilizaban de madera directa la regla para medir y luego unir los vértices, sino que más bien marcaban el punto y luego abrían el compás de la medida elegida para después marcar el segundo vértice y por último trazar el segmento y unir los dos vértices.

En las medidas con las que no era posible construir el triángulo, surgió algo que no estaba dentro de nuestras hipótesis en el análisis a priori, los alumnos desde antes de intentar construir el triángulo, ya sabían que no se podría, decían que las medidas no cumplían con las condiciones necesarias, pero aún así consideraron importante hacer los trazos. Algunos no identificaban lo anterior hasta después de intentar trazarlo con la regla y el compás, esto les permitía observar claramente que no se podía.

Como se les explicó en tres ocasiones cómo trazar un triángulo, al intentarlo, hicieron lo posible por mejorar su manejo del material, por lo que no se presentó la situación donde utilizaran solo la regla o el compás.

5.4.11 Situación de validación (actividad 2: "Construcción de triángulos")

Para iniciar con la situación de validación, la profesora-investigadora plantea a los alumnos una pregunta, si no tenemos ningún material, ¿cómo podremos saber si con las medidas proporcionadas se puede construir un triángulo?, con ello, logra la participación de los alumnos, puesto que uno responde que sumando $a + b$, y viendo que fuera mayor que el tercero, la profesora-investigadora realiza la suma, pero sustituyendo las literales por las medidas indicadas en la primera de las filas de la tabla. Esta estrategia de enseñanza le funcionó de manera positiva, ya que le permitió explicar a los alumnos, pero a su vez, fomentó su participación para validar tanto sus respuestas como las de sus compañeros.

Al continuar realizando la misma pregunta, sin decir al primer alumno que participó, que su respuesta estaba correcta, se tuvo la aportación de otros alumnos, y se tuvo otra participación significativa, en la que uno de ellos recuerda la segunda de las condiciones que es la de la diferencia, además se pudo explicar obteniendo las diferencias entre dos medidas proporcionadas en la tabla.

Otra pregunta que hizo la profesora-investigadora fue; ¿importan los lados con los que se realice la suma?, fue satisfactorio cuando algunos de los alumnos que en la clase anterior decían que solo con los lados y no con la base se realizaba la adición, respondieron que podía realizarse con cualquiera de los lados. Se observa en las respuestas de los alumnos, que lograron construir el conocimiento conforme fueron realizando las actividades propuestas.

5.4.12 Situación de institucionalización (actividad 2: "Construcción de triángulos")

En los supuestos del análisis a priori, no se pensó en un segundo momento de institucionalización, pero durante el desarrollo de la actividad 2, la profesora-investigadora se percató de que se requería de la realización de la institucionalización, por lo que destinó los últimos minutos de la clase para llevarla a cabo mediante un ejemplo, con la finalidad de que quedaran claras algunas cuestiones.

Lo antes mencionado permitió aclarar a los alumnos que es necesario hacer tres adiciones $a + b > c$, $a + c > b$ y $b + c > a$, esto se presentó, debido a que una alumna decía que sí se cambiaba la posición de los segmentos con las medidas indicadas, que así, sí se podía construir (5 cm, 3 cm y 2 cm); es decir, que si se realizaban las siguientes adiciones: $5 + 3 > 2$ y que $5 + 2 > 3$, el triángulo sí se podía formar. Otros alumnos daban ejemplos como los que se presentaron en la clase anterior diciendo que con las medidas 10 cm, 10 cm y 20 cm, no se podía construir un triángulo.

Al final la profesora-investigadora les comenta que para construir un triángulo, es necesario realizar la adición y obtener la diferencia entre dos de las tres medidas proporcionadas, para luego comprobar si el resultado es mayor o menor que la tercera medida, según sea el caso.

5.5 Discusión

La diversidad de respuestas que dieron los alumnos al resolver las actividades, brindan información acerca de los conocimientos que ellos han adquirido y la calidad de los mismos (con calidad nos referimos al hecho de que ese conocimiento pueda ser utilizado de manera correcta en una situación determinada), ya que con eso, logramos identificar la aplicación que ellos le dan a ese conocimiento, así como la capacidad que tienen para estructurarlo con el nuevo conocimiento. En muchas ocasiones los profesores consideramos importante propiciar en ellos diferentes formas de adquirirlo, a partir de diversas actividades planeadas para tal fin.

La forma en la que el material didáctico actuó en la situación didáctica fue significativa, ya que su papel fue el de lograr que los alumnos además de involucrarse con el conocimiento, también pudieron observar a lo que en realidad se refiere la desigualdad del triángulo, puesto que ayudó tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del mismo, incluso pudo ayudar a que los alumnos expusieran sus respuestas con su apoyo, brindando seguridad al expresarlas.

Reflexionando sobre nuestra pregunta de investigación que fue: ¿Qué efecto tendrá el material didáctico para el aprendizaje de la desigualdad del triángulo en alumnos de secundaria?, podemos decir que el material didáctico además de lograr motivar a los alumnos para aprender el tema de la desigualdad del triángulo, ya que se mostraron atentos ante la actividad, apoyó para que los estudiantes descubrieran por sí mismos el conocimiento de la desigualdad del triángulo, mediante la manipulación del mismo.

Con los resultados obtenidos después de la aplicación de la situación didáctica, podemos decir que los materiales didácticos manipulables ayudaron a que los alumnos aprendieran la desigualdad del triángulo, tal y como lo planteamos en nuestra hipótesis.

CONCLUSIONES

Como bien revelaron nuestros antecedentes, la enseñanza de la geometría tiene lugar en los finales del curso en la escuela secundaria, ya que los profesores no consideran importante enfatizar en algunos de sus tópicos, el hecho de cubrir el programa oficial marcado por las autoridades educativas y otros aspectos, los desvía a ver los temas de manera trivial, lo que da lugar a que los conocimientos previos de los alumnos no estén bien enraizados, provocando que no puedan utilizarlos en los momentos en que se requiera.

En particular el tópico matemático de la desigualdad del triángulo, tema que se ve en el primer bloque de segundo grado de educación secundaria, fue elegido para que en torno a él, fuera diseñada la secuencia de actividades, con la finalidad de que los alumnos aumentaran su formación y profundizaran en los conocimientos que poseían. La realización de los análisis preliminares revelaron aspectos clave con los que surgieron ideas importantes a considerar al elegir qué tipo de actividades serían convenientes para los estudiantes.

Fue importante seleccionar ese tópico matemático, ya que al realizar la experimentación los alumnos mostraron interés y, a pesar de que era un tema que habían visto al iniciar el curso, la mayoría de ellos no lo recordaba, por lo que la actividad les ayudó a empezar con el estudio de la desigualdad del triángulo, pero dedicando el tiempo necesario para que en la medida de lo posible, éste quedara claro.

El material didáctico utilizado se eligió debido a que se requería que fuera manipulable bien elaborado y sobre todo estructurado de tal forma que sirviera a los alumnos como una representación del objeto matemático abordado y una forma de comprobar lo que ellos creían al dar sus respuestas, ya que al hacerlo, podían observar lo que pasaba, si se podía o no construir un triángulo y de ese modo convencer a sus compañeros sobre lo que ellos afirmaban.

La primera de las actividades, constaba de dos incisos, el primero se organizó de tal forma que se lograra la devolución, la cual fue inducida por el material didáctico manipulable que se les proporcionó; este material actuó como mediador entre el estudiante y su aprendizaje, logrando facilitar la construcción del mismo. Los palos de madera utilizados para el primero de los incisos, apoyaron a los estudiantes para completar la tabla, con ellos pudieron expresar la desigualdad del triángulo mediante el lenguaje natural, esto se puede notar en los diálogos obtenidos entre los diferentes equipos.

El impacto, tanto del material didáctico como de la secuencia didáctica en el aprendizaje de los alumnos, se vio reflejado desde el momento en el que ellos pudieron identificar las características de los lados de un triángulo, considerando que el material didáctico y la secuencia didáctica se complementaron para ayudar a que los alumnos se apropieran del tópico matemático estudiado, así como también se generaron momentos de formulación importantes que propiciaron argumentaciones válidas entre los estudiantes cuando expresaban sus respuestas, provocando que los demás se convencieran de que se habían equivocado.

La Teoría de Situaciones Didácticas nos brindó las armas necesarias para crear un medio adecuado para el aprendizaje de los alumnos, ya que permite analizar tanto a los alumnos, como al profesor, el conocimiento y además las relaciones establecidas entre ellos, da las pautas específicas que todo docente puede considerar para incorporarlas en sus métodos de enseñanza y lograr que éstos puedan ser más efectivos.

La metodología utilizada coadyuvó a que el tema de la desigualdad del triángulo fuera aprendido por la mayoría de los alumnos, ya que la secuencia didáctica se analizó de la mejor manera posible, con la finalidad de lograr que el aprendizaje de los alumnos estuviera encaminado a que se lograran los objetivos previstos. El diseño del material didáctico utilizado, representó un aspecto importante, ya que en torno a él se fueron estructurando cada una de las actividades, complementándose de esta forma una estrategia de enseñanza efectiva para aprovechar el conocimiento anterior de los alumnos y su capacidad para adquirir nuevos conocimientos.

El análisis de los datos reveló, que el trabajo en equipo fue otro de los factores que contribuyó para lograr que se cumpliera el propósito de la actividad, el cual tenía que ver con ayudar a que los estudiantes construyeran su conocimiento al manipular el material didáctico proporcionado, y que de esa forma pudieran darle sentido al tópico matemático de la desigualdad del triángulo. Con la frase darle sentido, nos referimos a que ellos puedan relacionar el tópico con la actividad; es decir, cuando manipularon el material y pudieron observar las condiciones de existencia de un triángulo, ellos consiguieron darle ese sentido que les ayudaría a recordarlo en dado momento que fuera necesario aplicar este conocimiento previo.

Al validar los datos pudimos darnos cuenta que la actividad puede mejorarse, de tal manera que se pueda aprovechar mejor, por ejemplo en el inciso “b” de la actividad 1, observamos que el tiempo que se le destinó fue poco, por lo que el material didáctico de las figuras articuladas con escala, no se pudo aprovechar en gran medida, pero lo que proponemos es que en lugar de que los incisos “a” y “b” formen una actividad, el segundo se podría ver en un segundo momento; es decir, que tenga al igual que el inciso “a”, un mayor tiempo para su implementación.

En cuanto a las respuestas que dieron los alumnos en la tabla del inciso “a”, notamos que algunos de ellos trataban de dar justificaciones refiriéndose a los ángulos de los triángulos, a lo que podemos decir que es posible que se deba a un conocimiento previo que hayan adquirido en clases anteriores, y que haya representado un obstáculo al responder la columna correspondiente. Por lo anterior en una aplicación futura, sería importante recomendar que se tome en cuenta realizar un análisis detallado de las posibles dificultades, obstáculos y errores que se pueden llegar a presentar en el desarrollo de la actividad, ya que el hecho de conocerlos, permite al profesor reflexionar y anticiparlos de tal forma que si se llegan a presentar, tenga la capacidad de aprovecharlos y orientar a los alumnos.

Me gustaría que otra modificación que se le haga a la actividad, es cambiar el nombre al material didáctico, en lugar de que en la instrucción diga "ahora manipularán algunos triángulos elaborados con reglas graduadas unidas por broches latonados que se les proporcionarán, después responderán la pregunta", que la instrucción quede de la siguiente forma "Ahora manipularán algunos triángulos elaborados con las tiras articuladas con escala que se les proporcionarán, después responderán la pregunta", puesto que es importante que el alumno se sienta familiarizado tanto con el material, como con su nombre.

La segunda de las actividades reveló una falta de práctica con el juego de geometría por parte de los alumnos, lo cual provocó que la devolución se lograra en un mayor tiempo del que se tenía previsto. Lo importante de esta actividad es que los alumnos no se quedaron con la idea de que la desigualdad del triángulo solo se cumplía con números enteros, sino que también con parte entera y parte decimal. Lo negativo es que nos gustaría que en un futuro se pudiera aplicar, pero para esto, una mejor opción sería diseñar un material didáctico manipulable que sea de mayor interés para los alumnos, que les permita observar la desigualdad del triángulo y que las medidas con las que se trabaje sean números decimales.

Una recomendación que se haría es el hecho de que se considere organizar al grupo en equipos, esto para que haya un apoyo mutuo y se pueda obtener un resultado favorable al resolver la actividad.

El papel que juega el profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje, debe permitir a los alumnos construir su conocimiento y hacerse responsable de sus propias decisiones. Este aprendizaje está influenciado por las estrategias que utilice al momento de impartir una clase, y puede ser una forma de mostrarle al alumno que las Matemáticas pueden ser interesantes para ellos, permitiéndoles experimentar y comprobar sus tópicos matemáticos.

Un aspecto que es relevante es el hecho de que los alumnos no hayan enunciado uno de los aspectos de la propiedad de la desigualdad del triángulo, el que dice, "en cada triángulo cualquier lado es mayor que la diferencia entre los otros dos lados". Podría ser por la forma en la que la actividad fue diseñada; es decir, que ésta los pudo haber orientado a que solo realizaran adiciones entre las medidas proporcionadas. Por lo que consideramos que se puede volver a rediseñar la situación propuesta o se puede diseñar una diferente donde se pueda orientar a que los alumnos encuentren relación entre las medidas dadas, pero en este caso realizando sustracciones, considerando que esa característica es aún más compleja.

En un futuro me gustaría realizar en la secuencia didáctica las modificaciones antes mencionadas, ya que sería interesante analizar cómo influyen en la adquisición de aprendizaje por parte de los alumnos y en las interacciones que se presentan entre el alumno, el profesor y el conocimiento.

Sería bueno detenerse a pensar sobre la importancia del material didáctico como un apoyo para la enseñanza y como un instrumento de comprobación en el aprendizaje de los alumnos, ya que uno de los papeles que desempeñó en el desarrollo de la situación didáctica, se pudo observar de manera general, cuando los alumnos utilizaban los palos de madera como una representación del objeto matemático para comprobar su respuesta antes de anotarla e incluso para poder convencer a sus compañeros. Este aspecto es relevante en nuestra investigación porque a pesar de que ya se cuenta con una gran variedad de materiales para la enseñanza (entre ellos la tecnología), no los hay para cada tema, así que se puede pensar que una tarea importante de los didáctas es el diseño de este tipo de materiales, ya que tienen un gran potencial y a pesar de que su elaboración lleva tiempo, su uso podría contribuir de manera positiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los resultados de esta investigación, podrían ayudar en la práctica docente, primero porque el profesor ya tendría una propuesta para la enseñanza del tema, además, contaría con los análisis a priori, que facilitarían su implementación y se tendría un panorama sobre lo que sucederá en el proceso de enseñanza-aprendizaje, permitiendo que se prevean las modificaciones necesarias para que sea mejorada.

El modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), es componente central del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) desarrollado por Socas (2010, 2012). Este modelo permite considerar los conocimientos implicados en la situación problemática, por esta razón lo recomendamos para futuras aplicaciones de la actividad. Para llevarlo a cabo, es importante tomar en cuenta los procesos, las estructuras y las operaciones que pueden llegar a aparecer en el momento de resolverla. Dentro de la primera se tienen la modelización, la sustitución formal y la generalización; en la segunda, están las mismas estructuras, los conceptos/definiciones y las propiedades; por último la tercera, la cual esta constituida por las operaciones, técnicas y algoritmos/reglas, pudiéndose elaborar un mapa competencial de este contenido curricular. Con la ayuda de él se pueden hacer algunas reflexiones que orienten a pensar en la importancia de tomar en cuenta algunos aspectos que a pesar de no estar relacionados con el tópico matemático de manera directa, lo pueden estar indirectamente.

Por otro lado considero importante mencionar que el hecho de tener la oportunidad de ingresar a una Maestría en Matemática Educativa que me brindó la oportunidad de trabajar en el aula, no solo como profesora sino también como investigadora, enriqueció mi desarrollo profesional y me permitió reflexionar sobre la responsabilidad que asumí desde el momento en el que decidí ser profesora de Matemáticas, ya que el hecho de aportar un granito de arena en la educación de nuestro país, es sin duda una de las satisfacciones más significativas para mí.

REFERENCIAS

Alemán, J. (2009). *La geometría con cabri: una visualización a las propiedades de los triángulos (Tesis de Maestria no publicada).* Dirección de Estudios de Posgrado de la Universidad Pedagógica Nacional, Tegucigalpa, Honduras.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.Ma. (1988) *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Área, M., Parcerisa, A. y Rodriguez, J. (Coords) (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Ed: Graó.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería Didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Iberoamérica, pp. 33-59.

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría brousseauniana. *Educación Matemática*, *13* (3), 5-21.

Baltazar, C., Ruiz, E. y Ojeda, L. F. (2013). Matemáticas 2, Fundamental. México: Ediciones Castillo.

Barrantes, L. (2002). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar y su enseñanza – aprendizaje (Tesis doctoral no publicada).* Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, Badajoz, España.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 7(2), 33-155.* (versión castellana).

Brouseau, G. (2002). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. 9ª Reimpresión. Paidós, 65-94.

Brousseau, G. (1981). "Problèmes de didactique des décimaux”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2. 1.

Cascallana, M. T. (1988). *Iniciación de la Matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid, Santillana.

Castañeda, C. A. (2011). *Aplicación de estrategias que conduzcan a la comprensión y apropiación de metodologías para la resolución de triángulos de cualquier tipo, en estudiantes de grado décimo (Tesis de Maestría no publicada).* Facultad de Ciencias, Colombia.

Castellanos, I. (2010). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software Geogebra con alumnos de II de Magisterio de la ENMPN*

(Tesis de Maestría no publicada). Dirección de Estudios de Posgrado de la Universidad Pedagógica Nacional, Tegucigalpa, Honduras.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las Matemáticas.* México: Editorial Siglo Veintiuno.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 1*(2), 48-56.

Dienes, Z.P. (1970) *La construcción de las matemáticas.* Barcelona: Vicens-Vives.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gómez, P. (Ed.)*, Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Iberoamérica, 61-96.

Espinosa P., García P. y García J. (1999). *Fichero de Actividades Didácticas Matemáticas (secundaria)*. Secretaria de Educación Pública (pp. 94-95). México, D. F.

Gálvez, G. (2002). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. 9.ª. Reimpresión. Paidós, 39-63.

Gamba, D y Bogotá, F. (2013). *ARA SOLIS: Un dispositivo didáctico, ejemplificado para educación media, que permita la construcción de las funciones trigonométricas, en la ubicación de cuerpos celestes con base en los diseños y registros astronómicos que los muiscas dejaron establecidos en el Parque Arqueológico de Monquirá – Boyacá. (Tesis de Licenciatura no publicada)*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

Gamboa, R. y Ballesteros, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *14*(2), 125-142.

Godino, J., Gonzato, M. y Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?. Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra~~,~~ (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 275-304. Recuperado el 16 de Septiembre de 2015 de:

https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=OTCsKu0BZ0kC&oi=fnd&pg=PA275&dq=learning+geometry&ots=4sNhvMTNID&sig=bhOqWQJnGxqaWJKC1Rkex3XOgrI#v=onepage&q=learning%20geometry&f=false.

Lobo, T. M. (2012). *Los materiales didácticos manipulativos en la enseñanza-aprendizaje de la geometría. Actividades para realizar con el alumnado del segundo ciclo de educación primaria (Tesis de Maestría no publicada).* Universidad de Valladolid, Palencia.

México. Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011, Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas.* D.F., México.

Moise, E. (1986). *Geometría moderna*. (Trad. Mariano García, Universidad de Puerto Rico.) Massachusetts, USA: Fondo Educativo Interamericano, Addison Wesley Iber- americana S.A.

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza (Ed.), *Enseñar Matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.; análisis y propuestas.* (pp. 59-71). Buenos Aires: Paidós.

Pérez, R. (1994). Construir la Geometría. *UNO*, 2, 65-80.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011, Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas.* Recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/PROG1EROSEC_MAT2013.pdf

Socas, M. M. (1999): El papel de los materiales concretos con fines didácticos en la clase de Matemáticas. En Socas, M.M.; Camacho, M. y Morales, A. (eds.): *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7-32. Universidad de La Laguna.

Valenzuela, M. (2012). *Uso de Materiales Didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Un estudio sobre algunos colegios de Chile. (Tesis de Maestría no publicada).* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada.

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Números* (78), 73-94.