Universidad Autónoma de Zacatecas
"Francisco García Salinas"

Unidad Académica de Matemáticas
Maestría Profesionalizante en Matemática Educativa

LOS ESQUEMAS DE ACCIÓN DE ESTUDIANTES DEL NIVEL SUPERIOR ANTE SITUACIONES RELATIVAS A ECUACIONES LINEALES DE UNA VARIABLE

Tesis que presenta

Francisco Javier Mejía Guardado

Para obtener el grado de:

Maestro en Matemática Educativa

con orientación en el nivel superior

Asesores

Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Zacatecas, Zac. Noviembre de 2016

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

por el apoyo económico brindado mediante

la beca con número de registro 350671,

para la realización de mis estudios de maestría.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 14 del mes de Noviembre del año 2016, el que suscribe Lic. Francisco Javier Mejía Guardado, alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior con número de matrícula 27802178; manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado titulado "*Los Esquemas de acción de los estudiantes de nivel superior ante situaciones relativas a ecuaciones lineales de una variable"* bajo la dirección de la M. C. Nancy Janeth Calvillo Guevara y el Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Francisco Javier Mejía Guardado.

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "*Los Esquemas de acción de los estudiantes de nivel superior ante situaciones relativas a ecuaciones lineales de una variable"* y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. *Francisco Javier Mejía Guardado,* egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, por lo que se **encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 14 de Noviembre del 2016

Nancy Janeth Calvillo Guevara

Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón

Contenido

Índice de figuras

Índice de Tablas

Resumen

En este escrito se presenta un estudio existente en torno a la enseñanza de las ecuaciones lineales de una incógnita. Particularmente en estudios de este tipo para nivel superior se observó una falta de investigaciones relacionadas con dicho tema. Por tal situación se optó por profundizar en los esquemas de acción que utilizan estos estudiantes, para ello se tomaron algunas nociones fundamentales de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, y la fenomenología didáctica de Freudenthal; que nos suministraron las herramientas de análisis didáctico necesarias para la caracterización de las formas en que los estudiantes actúan al momento de enfrentarse a tareas relativas a las ecuaciones lineales de una variable dentro de un proceso de matematización progresiva. Además, mediante la reflexión de lo encontrado a través de la puesta en marcha de un instrumento, se pudo inferir que los estudiantes saben cómo resolver las ecuaciones lineales de una variable pero no saben cómo utilizarlas.

Palabras clave: esquema, teoría de los campos conceptuales, fenomenología didáctica ecuaciones lineales.

“La matemática es una de las actividades humanas más antiguas,
que a lo largo de los siglos ha sido empleada con diversos propósitos.
La civilización egipcia empleaba nociones matemáticas en la construcción de
sus monumentales pirámides y palacios,
así como en distribución de tierras y establecimiento de impuestos.
Para los pitagóricos de la antigua Grecia, las matemáticas
tenían un carácter cercano a lo espiritual,
por medio del cual pretendían entender los misterios de la vida.
Era este carácter espiritual, lo que hacía de la matemática un conocimiento
al alcance de unos cuantos privilegiados”
(Caballero, 2010, p. 1).

Capítulo 1. Planteamiento del problema

Este capítulo está compuesto de cuatro partes: en la primera se exponen los motivos por los cuales se elige investigar los esquemas de acción que tienen los estudiantes sobre los sistemas de ecuaciones lineales de una variable, posteriormente presentamos una revisión de algunas investigaciones relacionadas con el tema, enseguida se presenta una reflexión a partir de estos trabajos analizados, por último se presenta el planteamiento del problema de investigación.

1.1 Los motivos para investigar este objeto

"Debido al papel fundamental que la matemática tiene para la humanidad, desde hace más de 3000 años, se le ha dado un importante lugar en la educación" (Caballero, 2010, p.1) esto se debe en gran parte a los avances científicos y tecnológicos de los cuales la matemática es pieza fundamental. A lo largo de la historia se sabe que algunos avances científicos se llevaron a cabo primero mediante la solución de un problema concreto, una vez resuelto se procedía entonces a la experimentación y validación del mismo, teniendo como resultado un modelo matemático, así, en un inicio la sociedad requirió de los saberes matemáticos para emplearlos en la resolución de los problemas de la vida cotidiana (Charnay, 1994), como es el caso de las ecuaciones lineales, que se construyeron a fin de modelar cierto tipo de situaciones.

Dentro de mi experiencia como docente en el nivel medio superior me daba cuenta que los alumnos casi nunca utilizaban la matemática, particularmente las ecuaciones lineales, como una herramienta que les podría ayudar a resolver problemas en su ámbito social. Percibía que los estudiantes generalmente no pensaban en utilizar el álgebra más elemental para resolver sencillos problemas de la vida real, como por ejemplo: "mi mamá me dio $20, para mí y para mi hermano, mitad y mitad, pero mi hermano me debe $6.50 ¿Cuánto debo de darle?". Además la mayoría de los estudiantes optaba por utilizar la aritmética, aunque ello implicara una mayor cantidad de esfuerzo y dificultad. Es decir, los estudiantes no perciben la necesidad de utilizar una ecuación para resolver problemas concretos (Maffey, 2006 en Nava, 2012). Por otro lado, las pocas veces que usaban el álgebra (aunque en estos usos los estudiantes involucrados fueran muy pocos en número comparado con la totalidad) lo hacían de una forma errónea, proponiendo ecuaciones que no modelaban la situación, además no reflexionaban sobre la posibilidad de una verificación de los resultados a los que ellos llegaban.

Podemos observar que a pesar de que las ecuaciones lineales son una parte importante de la formación matemática de los estudiantes (Caballero, 2010; Nava, 2012; Mejía, 2012), la mayoría de ellos no las ve como una herramienta dentro de su vida social y escolar sino como objetos aislados de la realidad (Caballero, 2010; Mejía, 2012), es por ello que sostenemos que el estudio sobre la relación entre estos objetos y el alumno es una tarea imprescindible.

1.2 Antecedentes

Como ya se ha dicho anteriormente el objeto matemático llamado ecuaciones lineales es de suma importancia para el desarrollo matemático de un individuo, es por ello que en esta sección se describen de una manera sintetizada algunas investigaciones realizadas en torno al tema de ecuaciones (o relacionadas con él), que darán cuenta sobre la importancia de esta investigación.

Diferentes investigaciones han estudiado los problemas relacionados con el uso de ecuaciones lineales de una variable o de sistemas de ecuaciones lineales. En el estudio de este tópico, los enfoques han variado, es así que tenemos trabajos orientados a realizar propuestas para mejorar el aprendizaje de este tema (Mabel, 2004), otros centrados en el estudio del profesor (González, 2011; Caballero, 2010, Gallegos 2013), y algunos más con un enfoque cognitivo (Abrate, Font y Pocholú, 2008; Rozainz, 2005; García, 2010; Garrote e Hidalgo, 2004; Manzanero, 2007 y Mejía, 2012).

El primero de los trabajos es el de Mabel (2004), quien enfatiza la presencia de problemas con la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, y la ruptura entre los diferentes registros semióticos[1] de este objeto por parte de los alumnos. Por esa razón diseña una secuencia didáctica para facilitar el aprendizaje de este tópico desde la teoría de representaciones semióticas, la cual afirma que al lograr que un alumno transite entre diferentes representaciones de un concepto adquirirá el conocimiento (Duval, 1999). Al final de la aplicación de la secuencia se constata el logro de las intenciones didácticas propuestas; sin embargo, se advierte que dicha secuencia da pie a otras tareas y otros diferentes diseños de secuencias.

Por su parte, González (2011) reporta un estudio de caso, el discurso de un profesor de bachillerato en la resolución de problemas, con el empleo de una actividad de problemas verbales-algebraicos modelados por sistemas de ecuaciones lineales. El objetivo del estudio fue analizar las dificultades referidas al uso de la simbología y del discurso del profesor, haciendo énfasis en las dificultades referentes al uso de códigos matemáticos, así como las formas de argumentación que el profesor da a sus estudiantes.

El análisis de dicho discurso se basó en los registros video-grabados y audio-grabados de las clases. Todo esto para dar cuenta de la importancia del discurso matemático del profesor para los alumnos. Este análisis se realizó desde la teoría antropológica de lo didáctico, que afirma que toda actividad humana consta de tareas y estas tareas pueden ser resueltas por técnicas y la operacionalidad de éstas se da bajo las tecnologías sustentadas en las teorías (Chevallard, 1999). En esta investigación se concluye que resolver un problema implica que el profesor entienda lo que hizo y pueda explicar por

[1] Los registros semióticos son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráfico, figura geométrica…) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Para profundizar sobre este tema ver Duval (1999).

qué sus acciones son correctas, justificar los procedimientos y explicar si son adecuadas o no las ideas de los alumnos.

En este mismo sentido, Caballero (2010) se preocupa por los altos índices de reprobación en el área de matemáticas particularmente en el álgebra y por esa razón realiza una caracterización de las concepciones de profesores de bachillerato sobre el concepto ecuación lineal y describe el tratamiento que estos profesores dan a dicho concepto, para posteriormente analizar el tipo de relación que se da entre las concepciones y la práctica de los profesores.

Tomando como base el pensamiento del profesor, Caballero (2010) identificó que la concepción (conjunto de creencias y posicionamientos que posee un individuo (Thompson, 1992)) predominante en los profesores estudiados es la **Estructural**, lo cual implica que la ecuación lineal sea concebida como un concepto matemático definido, cuyos elementos y técnicas de resolución son específicos del álgebra. Por otro lado, el tratamiento otorgado a la ecuación lineal que predomina entre los profesores estudiados corresponde al de la tendencia **Tradicional**, lo que quiere decir que se utiliza una metodología basada en la repetición de ejercicios.

Por otro lado, Gallegos (2013) tomando como modelo el conocimiento matemático para la enseñanza propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) manifiesta el conocimiento del contenido y estudiantes, que evidencia en la práctica un profesor de bachillerato al impartir el tema de sistemas de tres ecuaciones lineales y tres incógnitas.

Gallegos (2013) concluye que según lo que el profesor evidenció en las clases, se considera que las principales necesidades y dificultades de los estudiantes, tienen que ver con las expresiones aritméticas y algebraicas, por ello los principales conocimientos que requiere un alumno antes de abordar el tema de sistemas de ecuaciones lineales de tres por tres, son las ramas del aritmética y el álgebra

En lo que sigue haremos la descripción de los trabajos cuya orientación ha sido la descripción de aspectos cognitivos en el aprendizaje de las ecuaciones lineales (Abrate, Font y Pocholú, 2008; Rozainz, 2005; García, 2010; Garrote e Hidalgo, 2004; Manzanero, 2007; Mejía, 2012).

Abrate, Font y Pocholú (2008) realizan una investigación de naturaleza diagnóstico-descriptiva y cualitativa, desarrollada como un estudio de caso, bajo el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, ellos observan que aunque los alumnos "creen" que saben muchas técnicas para la resolución de ecuaciones, terminan usándolas indiscriminadamente sin tener en cuenta sus alcances.

De este problema intentan responder a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los modelos y métodos de resolución de ecuaciones que utilizan los alumnos? ¿Qué obstáculos y dificultades producen estos modelos y métodos de resolución de ecuaciones sobre los alumnos? ¿Qué modelos y métodos de resolución de ecuaciones utilizan los libros de Matemáticas? Para responder a estas cuestiones se realizaron dos fases de investigación, en la primera fase, y con la intención de dar respuestas a las dos primeras preguntas directrices del trabajo, se diseñó una secuencia de actividades para ser resueltas por los estudiantes, con la intención de:

- Analizar el discurso escrito que emplean los alumnos en contextos de resolución de ecuaciones, y
- Poner en evidencia potenciales dificultades y obstáculos debidos al uso de metáforas en la resolución de ecuaciones.

En una segunda fase analizaron libros de matemáticas que abordan la resolución de ecuaciones como tema de estudio.

Estos investigadores concluyen que la transposición de términos en la resolución de ecuaciones no es nocivo para el aprendizaje de los estudiantes pero conlleva a dificultades que no todos logran superar.

Por otro lado Rozainz (2005) utiliza un modelo teórico local propuesto por Filloy (1999) para analizar la propuesta institucional, y con ello explicar las tendencias cognitivas de los alumnos al momento de resolver ecuaciones lineales de dos incógnitas. La metodología de esta investigación consta de dos fases, en la primera se encuentra el análisis de la propuesta institucional (SEP 1993, 1999, 2000, 2001) sobre la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales: diseño inicial, prueba y diseño final de hojas de trabajo y de tareas, presentaciones en powerpoint y acetatos para la calculadora TI-92, para los modelos MAT (Modelo de Telesecundaria con Apoyo de Tecnología Alterna) y MUT (Modelo de Telesecundaria con Uso de Tecnología Alterna). En cuanto al modelo MTA (Modelo de Telesecundaria Actual) ya se contaba con los materiales que se emplean a nivel nacional.

En una segunda fase se aplicaron tres modelos de enseñanza (simultáneamente y en grupos diferentes), se observaron y analizaron a través de la transcripción de videograbaciones. Al término de las sesiones, se aplicó un cuestionario final sobre la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales, con el objetivo de identificar los errores de los alumnos. Con base en estos resultados, se clasificó a los alumnos, conforme a su nivel de competencia. Se eligieron dos alumnos de cada modelo de enseñanza: competencia media y competencia alta, a los seis alumnos se les entrevistó clínicamente, con el objetivo de identificar las tendencias cognitivas que dieron lugar a los errores en la resolución de problemas.

Esta autora concluye que los alumnos de telesecundaria, al resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales – aun cuando la instrucción sobre el tema fue con diversos medios y modelos de enseñanza–, tienen errores que, en el fondo, indican la complejidad propia de algunos conceptos matemáticos como: cantidades desconocidas, igualdad, incógnita, sustitución numérica y algebraica, variable, entre otros. En los seis alumnos entrevistados, se identificaron tendencias cognitivas planteadas por Filloy (1999), por ejemplo: “La imposibilidad de desencadenar operaciones que podrían hacerse momentos antes”, “El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis”. En esa investigación se encuentra una diversidad de tendencias por parte de los alumnos al momento de resolver ecuaciones lineales, discrepancia en las operaciones algebraicas y la necesidad de retomar situaciones concretas para explicar dicho tema.

En este mismo enfoque, García (2010) enfatiza la presencia de errores y dificultades en torno al aprendizaje de las matemáticas y desde la teoría de representaciones semióticas analiza las pruebas a diferentes estudiantes de nivel superior con los mismos conocimientos iniciales (los conocimientos necesarios para cursar una educación superior según las autoridades escolares) y en distintas carreras, para describir errores que surgen al momento de enfrentar situaciones–problema que involucran sistemas de ecuaciones en distintos registros de representación. En dicha investigación se concluye que, sin importar la carrera en la que se encuentre el estudiante, la mayoría de las veces no posee los conocimientos mínimos necesarios para resolver dichas tareas.

Además Garrote e Hidalgo (2004) observan la presencia de errores y dificultades que los alumnos de Bachillerato muestran en el estudio de las desigualdades e inecuaciones, muchos de los cuales se repiten año tras año. Con elementos de la teoría de los obstáculos epistemológicos de Brousseau (1997, citados en Garrote e Hidalgo, 2004) y las investigaciones que abordan errores y dificultades de los estudiantes (Socas, 1997, citados en Garrote e Hidalgo, 2004) diseñaron un cuestionario que involucraba distintos usos de la variable para analizar errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones, con los alumnos del primer curso de Bachillerato de las modalidades Tecnológico y Ciencias de la Naturaleza y la Salud. Obtienen evidencia de que muchos errores son principalmente de signo o de paréntesis y concluyen que los alumnos entienden las relaciones pero no escriben bien el lenguaje algebraico o resuelven las inecuaciones pero no saben interpretar bien el resultado, o algunas veces no la resuelven.

Otro caso es el de Manzanero (2007) quien observa el problema de una desarticulación entre la ecuación y su conjunto solución. Por ello desde la teoría APOE, se enfoca al concepto de conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales, y pretende identificar las dificultades de los estudiantes al estudiarlo, así como las construcciones mentales que puedan presentar, de acuerdo a la predicción que hace mediante una descomposición genética.

Llevando esto a cabo mediante la realización de una entrevista con alumnos de nivel medio superior, concluye que ningún estudiante mostró tener una concepción objeto para el concepto de conjunto solución y que pocos de ellos muestran haber construido un proceso de solución, en particular en el caso de los sistemas con tres variables. Se observa en las respuestas de los estudiantes una gran inseguridad en la interpretación y en la manipulación de las variables.

Para terminar con los antecedentes nos referiremos al estudio realizado por Mejía (2012), quien percibe una falta de uso de las matemáticas por parte de los estudiantes de nivel medio superior, en especial con las ecuaciones. Por tal motivo hace un estudio con estudiantes de primer grado de bachillerato y desde la teoría de los campos conceptuales describe las acciones que los estudiantes tienen al momento de enfrentarse con situaciones que involucran a las ecuaciones lineales de una variable. Este autor concluye que la mayoría de los alumnos saben cómo resolver ecuaciones lineales de una variable; sin embargo, no saben cómo formularlas a partir de una situación dada.

1.3 Reflexión

A partir del análisis de los antecedentes se puede decir que algunos investigadores diseñan secuencias para mejorar el aprendizaje de las ecuaciones lineales, en el trabajo de Mabel (2004) percibimos que su diseño está sustentado en la teoría de representaciones semióticas, por tal motivo, lo que hacen es propiciar el tránsito entre distintos registros de representación.

Otros investigadores se centran en describir el trabajo del profesor: sus concepciones (Caballero, 2010) acerca de la enseñanza de las ecuaciones lineales, así como su desempeño en clases al abordar este tema (González, 2011) y los conocimientos que evidencia (Gallegos, 2013), de donde se ha identificado el impacto que tienen las concepciones del profesor sobre su forma de enseñar en el aprendizaje del alumno, asi como las necesidades y dificultades que tiene el alumno antes de abordar el tema de sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres incognitas.

También existen varios trabajos (Abrate, Font y Pocholú, 2008; Rozainz, 2005; García, 2010; Garrote e Hidalgo, 2004; Manzanero 2007 y Mejía, 2012) que describen errores y dificultades por parte de los alumnos al momento de enfrentarse con problemas que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales.

Del grupo de investigaciones analizado observamos que en el estudio que se propone intervenir en el aprendizaje con una secuencia didáctica, Mabel (2004) se enfoca en el diseño de la secuencia de aprendizaje pero deja de lado otras cuestiones, como el papel del profesor y otras necesidades de los alumnos, específicas en el aprendizaje de las ecuaciones lineales.

Por otro lado, los trabajos de Caballero (2010) y González (2011) nos aportan elementos de suma importancia para un mejor desempeño de los profesores al impartir el tema de ecuaciones lineales; no obstante, apreciamos que en ellos se ha dejado de lado el rol del alumno como un agente independiente en el aprendizaje.

En cuanto a los trabajos de corte cognitivo, la mayoría (Abrate, Font y Pocholú, 2008; Rozainz, 2005; García, 2010 y Garrote e Hidalgo, 2004) se limita a caracterizar los errores que aparecen en el estudio de las ecuaciones lineales, solamente uno de ellos (Mejía, 2012), interpreta las respuestas de los estudiantes cuando se enfrentan, por una parte a situaciones que involucran la resolución de problemas y por otra la respuesta de éstos cuando se les pide formular la situación que modele cierta ecuación o sistema de ecuaciones lineales; sin embargo en este trabajo el análisis sólo es acerca de un tipo de problema.

Así, se distingue la necesidad de realizar más estudios en los que se caracterice la naturaleza de las respuestas de los alumnos al enfrentarse con problemas similares, en otros contextos y en el nivel superior. Por eso el desarrollo de investigación en este sentido, es de suma importancia si se quiere dar solución al problema de mejorar la calidad de la enseñanza del objeto matemático llamado ecuaciones lineales, pues estudios de este corte orientan acerca de cómo es que los estudiantes aprenden un concepto.

1.4 Planteamiento del problema de investigación

A partir del análisis realizado de las investigaciones, ahora procedemos a plantear el problema de investigación. En esta sección encontramos cuatro partes importantes que comprenden el planteamiento del problema de investigación: su problemática, pregunta de investigación, objetivos y justificación.

1.4.1 Problemática

El álgebra elemental es una parte esencial de la matemática escolar en la que se estudian las estructuras, las relaciones y las cantidades, permite hacer generalizaciones y en consecuencia abstracciones (Caballero, 2010). Partiendo de este supuesto se reconoce que las ecuaciones lineales de una variable son pieza fundamental para el desarrollo posterior de la matemática; sin embargo, *"en la enseñanza tradicional, son numerosos los errores en los que incurren los alumnos, a pesar de los esfuerzos que hacen los profesores para que los corrijan y eviten en lo sucesivo"* (Guzmán, 2000, en Mabel, 2004, p. 4).

El objeto matemático, denominado *ecuación lineal* que pertenece al álgebra, aparece como tema de estudio dentro del programa de segundo y tercer año de la Educación Secundaria en México y en el de primer semestre del nivel medio superior (bachillerato). Dicho tema, en muchos casos llega hasta la enseñanza superior en materias como Álgebra Superior o Álgebra lineal, que se llevan en las Licenciaturas de Matemáticas, e incluso en las Ingenierías Civil y Telecomunicaciones y Electrónica (Mejía, 2012). Es así que el estudio sobre las acciones que toman los alumnos del nivel superior al momento de enfrentarse con problemas relativos a las ecuaciones lineales de una variable es de gran relevancia, a fin de proporcionar herramientas objetivas que faciliten el aprendizaje de dicho tema.

1.4.2 Pregunta de investigación

El interés en torno a cómo los alumnos del nivel superior afrontan tareas relativas al uso de las ecuaciones lineales de una variable desde la matemática conduce a plantearse la siguiente pregunta:

> ¿Qué esquemas de acción emplea un grupo de 125 estudiantes de nivel superior de la Universidad Autónoma de Zacatecas al enfrentarse con situaciones del tipo matematización vertical y horizontal que se pueden resolver utilizando ecuaciones lineales de una variable?

1.4.3 Objetivo:

> Identificar y describir a partir de la teoría de los campos conceptuales los esquemas de acción que sobre las ecuaciones lineales tienen 125 estudiantes de nivel superior de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

1.4.4 Objetivos particulares:

- Analizar las ecuaciones lineales de una variable como objeto matemático escolar que se enseña desde los niveles educativos básicos hasta el nivel superior, en particular en los planes de estudio de Ingeniería civil, Licenciatura en Física, Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Biología, de la Universidad Autónoma de Zacatecas.
- Diseñar y aplicar situaciones que involucre el concepto analizado.
- Identificar y describir los esquemas de acción de los estudiantes, caracterizando los conceptos y teoremas en acto involucrados.

1.4.5 Justificación:

Como ya se ha dicho, existe una problemática en torno a la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones lineales (Caballero, 2010, Mejía, 2012, Guzmán, 2000 en Mabel, 2004). De ésta surge la inquietud de indagar cómo es que los estudiantes de nivel superior afrontan por un lado, situaciones que requieren relacionar a las ecuaciones lineales con las materias propias de su vida escolar, y por otro, cómo es que contraponen a las ecuaciones lineales en tareas puramente matemáticas.

En ese sentido este trabajo aportará elementos respecto a la caracterización de esquemas de acción[2] que tienen los estudiantes del nivel superior al trabajar con ecuaciones lineales de una variable. A su vez, dará conocimiento sobre los esquemas de pensamiento y de acción de los alumnos estudiados.

Teniendo en cuenta la problemática que existe en torno al aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales de una variable, y considerando la presencia de trabajos de investigación dentro de esta área se puede notar la falta de estudios que existe alrededor de los esquemas de acción que tienen los estudiantes del nivel superior al trabajar con ecuaciones lineales de una variable, por eso la viabilidad de la realización de la presente investigación.

La riqueza de esta investigación radica en la descripción de los diferentes esquemas de acción que los alumnos poseen para las situaciones del tipo matematización horizontal y vertical que involucran a las ecuaciones lineales con una incógnita, esto se debe a que nos proporcionan información de cómo los estudiantes aprendieron el concepto, qué hace falta, qué sobró, qué conceptos y teoremas en acto utilizó, cómo relacionan sus esquemas, etcétera.

[2] Se estudiará a fondo en el capítulo correspondiente al marco teórico

1.5 Estructura de la investigación

La presente investigación está compuesta de 7 capítulos los cuales se puntualizan a continuación:

En el capítulo 1 se justifica la motivación que llevó a realizar la investigación, también se da a conocer el problema y la pregunta de investigación que dió origen al presente trabajo así como los objetivos con los que se pretende responder a dicha pregunta. En este apartado se incluye la contextualización y la estructura de nuestro documento.

En el capítulo 2 se manifiestan las teorías que dan sustento a la investigación; es decir, aquellos conceptos teóricos que favorecerán la descripción de los resultados obtenidos. También se presenta una breve descripción de los conceptos básicos que se estarán manejando dentro del trabajo para el tema de sistema de ecuaciones lineales de una incógnita.

En el capítulo 3 se menciona el método que seguirá la presente investigación, el diseño y el procedimiento. Se hace una descripción detallada de los procesos de recolección de datos: de qué tipo, cuándo fueron recogidos y cómo (forma de recolección e instrumentos utilizados), por último se explica la manera de hacer su clasificación.

En los capítulos 4 y 5 se muestran los resultados que surgieron de la aplicación de las tareas referentes a la matematización vertical y horizontal respectivamente. Se presenta la clasificación de los diferentes esquemas encontrados para las tareas planteadas, así como los conceptos y teoremas en acto que utilizaron los estudiantes en dichas situaciones. Además se describe para qué tipo de situaciones los alumnos tienen esquemas eficaces y para cuáles situaciones no.

En las conclusiones se presenta el alcance de nuestros objetivos con respecto a los esquemas de acción y a la investigación en general; de igual manera se da a conocer las aportaciones, limitaciones y las futuras líneas de investigación que pudieran presentarse a partir del presente trabajo.

Capítulo 2. Referentes teóricos

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se requiere una reflexión sobre diferentes aspectos teóricos con los cuales se puedan caracterizar y analizar los esquemas de acción que ponen en juego los estudiantes de nivel superior, esto es, fijar los fundamentos teóricos necesarios para tal tarea. Por este motivo se pretende tomar las principales ideas de la fenomenología didáctica de Freudenthal para distinguir las relaciones y abstracciones que tienen los alumnos sobre las ecuaciones lineales. Asimismo, se toman los principales aspectos de la teoría de los campos conceptuales para analizar los conceptos que usan los alumnos en las distintas situaciones de matematización relacionadas con las ecuaciones lineales.

2.1 La matematización horizontal y vertical

En los cursos de nivel superior se requiere que los alumnos utilicen a la matemática para establecer relaciones y abstracciones dentro de problemas de la vida real (García, 2010) por esa razón es imprescindible identificar el conocimiento que posee un individuo sobre estas características después de haber estudiado algún conocimiento matemático específico, que en este caso será el tema de ecuaciones lineales de una variable. Para esta tarea la teoría de Freudenthal ayudará a identificar las relaciones y abstracciones que se establecen en el trabajo con este objeto matemático, ya que:

“Los alumnos deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego cambiar a analizar su propia actividad matemática” (Bressan, Zolkower, Gallego, 2004, p. 7). Este proceso de matematización fue propuesto por Treffers (1987) y retomado por Freudenthal (1991) bajo dos formas:

2.1.1 La matematización horizontal

Consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, y la experimentación inductiva (Bressan, Zolkower, Gallego, 2004; Treffers, 1987). Dentro del proceso de matematización horizontal, los alumnos generalizan herramientas matemáticas, las cuales los ayudan a organizar y a solucionar una situación problemática presentada dentro de un contexto de la vida real. Identificar o describir la matemática específica que es relevante dentro de un contexto general, esquematizar, formular y visualizar un problema de diversas maneras, descubrir relaciones y regularidades, reconocer un aspecto isomorfo en diversos problemas son ejemplos de actividades de matematización horizontal (Mejía, 2012; Santamarina, 2006). Para Treffers (1987) la matematización horizontal implica simplemente convertir un problema contextual en un problema matemático, por ejemplo dado el problema:

> ¿Cuántas onzas de plata pura deben de agregarse a 100 onzas de una aleación que contiene plata al 40%, para que quede al 65%?

La matematización horizontal se podría interpretar como el hecho de que un individuo plantee la relación entre el problema anterior y una ecuación lineal de una variable. Por ejemplo:

La ecuación puede establecerse notando que la cantidad de plata en las dos partes separadas es exactamente la misma que la cantidad de plata en la aleación. Usando x para representar el número de onzas de plata que han de agregarse, disponemos de la información así:

x onzas	y 100 onzas	dan $(100 + x)$ onzas
100% pura	40% pura	65% pura
____________	____________	______________
x onzas de plata	40 onzas de plata	$.65(100 + x)$ onzas de plata

Puesto que las 40 onzas originales de plata y las x onzas adicionales constituyen la plata de la aleación, se tiene la siguiente ecuación

$$x + 40 = .65(100 + x)$$

A este proceso de contextualización por parte de un individuo se le conoce como "matematización horizontal". El ejemplo propuesto es solo una posible matematización horizontal, pues un estudiante pudiera pensar en otras.

2.1.2 La matematización vertical

La matematización vertical es el proceso de reorganización dentro del mismo sistema matemático. Representar una relación como fórmula, probar regularidades, mejorar, ajustar, combinar e integrar modelos, formular un modelo matemático y generalizar son ejemplos de actividades de matematización vertical. Por esta razón se dice que la matemática vertical es tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción (Mejía, 2012). ya dentro de la matemática misma, conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática[3] (Bressan, Zolkower, Gallego, 2004; Treffers, 1987). Al proponer en la clase problemas que admitan soluciones en diferentes niveles matemáticos, se puede inducir a los alumnos a realizar este tipo de matematización vertical (Freudenthal, 1991; Gravemeijer y Teruel, 2000, en Santamarina 2006). Por ejemplo, dado el sistema de ecuaciones lineales de 2×2:

$$3x + 2y = 7$$

$$2x + 4y = 10$$

Una matematización vertical podría ser:

El sistema de ecuaciones lineales de 2x2 se puede resolver usando la graficación de líneas en el plano cartesiano; es decir, existe una relación entre las ecuaciones lineales y las funciones que las representan, de ahí es posible graficar las funciones $\mathrm{y} = \frac{7-3\mathrm{x}}{2}$ y

[3]La matemática formal no se entiende como un producto externo con el cual el alumno debe conectarse, sino como algo que crece de su propia actividad, se habla de matemática más formal cuando los estudiantes construyen argumentos que se localizan en una realidad matemática.

$y = \frac{10-2x}{4}$ en el mismo plano cartesiano y donde se intersecten las líneas rectas, ése es el punto solución del sistemas de ecuaciones; para este caso, es el punto (1,2) donde $x = 1$ y $y = 2$, siendo estos valores el conjunto solución del sistema anterior.

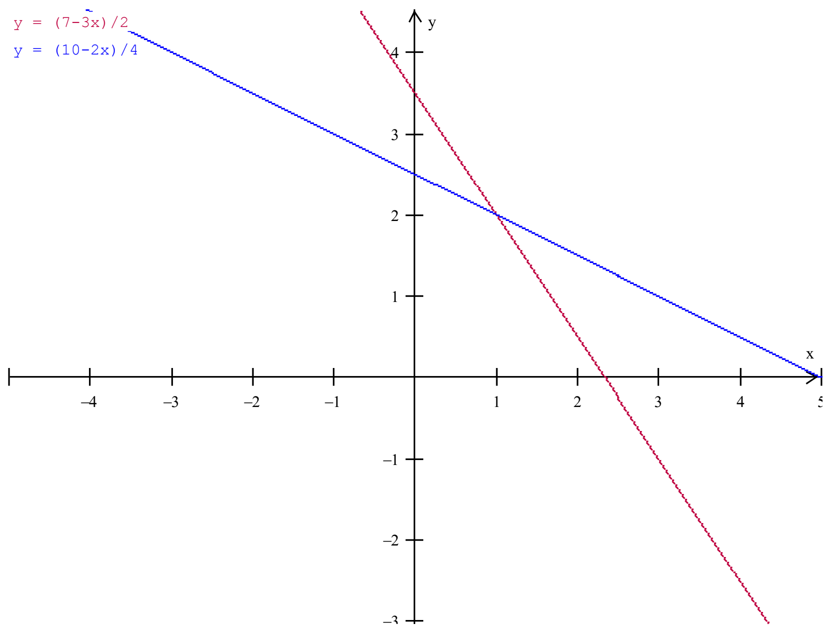


Figura 1 Solución gráfica al sistema de ecuaciones

La distinción entre estos dos grandes conceptos se puede expresar como la distinción entre dos mundos: el de la vida y el de los símbolos. La matematización horizontal conduce desde el mundo de la vida al mundo de los símbolos. En el mundo de la vida se vive, se actúa, se sufre; en el otro se crean los símbolos, se recrean y manipulan, mecánicamente, comprensivamente, reflexivamente: esto es matematización vertical. El mundo de la vida es lo que se experimenta como realidad, el mundo simbólico se refiere a la abstracción. Con seguridad, las fronteras entre estos mundos están vagamente definidas. Ambos mundos pueden expandirse o también reducirse uno a expensas del otro (Freudenthal, 1991).

Como dice Freudenthal, las fronteras entre lo que conocemos como “matematización horizontal” y “matematización vertical” no están claramente definidas. El punto crítico está en lo que entendemos como “realidad” (Gravemeijer y Teruel, 2000).

De este modo se tiene que primero la matematización horizontal es relacionar y construir estructuras en el sistema matemático, como puede ser en este caso el álgebra que puede resolver problemas con sistemas de ecuaciones y cada vez más, el sujeto puede ir progresando en este conocimiento al encontrar la relación entre los problemas y las ecuaciones.

En cambio, la matematización vertical se da cuando un sujeto relaciona las herramientas matemáticas; es decir, cuando afronta un problema por ejemplo de geometría analítica con métodos de geometría analítica, ó con herramientas del Cálculo, esto es lo que se conoce como matematización vertical (Mejía, 2012).

En este mismo sentido, al plantear a un estudiante una ecuación lineal con la consigna de que la resuelva, si se encuentra que utiliza el método de despeje, que es el comúnmente abordado en clase, se estaría en un caso de matematización vertical, además, si utiliza geometría analítica, también estaría trabajando la matematización vertical involucrada.

2.2 El proceso de matematización progresiva

Ahora teniendo en consideración los conceptos de matematización horizontal y vertical, se puede explicar el concepto de matematización progresiva que consiste en el proceso que lleva un alumno al transitar entre un problema de un determinado contexto hacia un modelo matemático, es decir, en el proceso de matematización progresiva surge cuando de un contexto particular surge un determinado problema, después bajo un proceso de matematización horizontal el sujeto transforma ese problema en un problema matemático, con este, y bajo un proceso de matematización vertical el individuo soluciona dicho problema en el contexto matemático, para después con un nuevo proceso de matematización horizontal se vuelva a dar una interpretación del resultado matemático en el contexto en el que originalmente surgió. Cabe mencionar que según la naturaleza de este último proceso de matematización, se puede dar el caso de que surja un nuevo problema y el ciclo vuelva a comenzar, por eso se dice que este proceso es progresivo. Los alumnos deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego cambiar a analizar su propia actividad matemática (Freudenthal, 1991).

Según Freudenthal (1991) se busca que el alumno pueda lograr fácilmente una matematización progresiva, es decir, un libre tránsito entre matematización horizontal y vertical, sin embargo, se puede dar el caso de que esta matematización progresiva se de una manera ineficaz para la situación

Un ejemplo de matematización progresiva puede ser el siguiente:

Dado el problema en el contexto cotidiano: "Mi mamá me dio un billete de 20 pesos de domingo fui a la tienda y compré dos bolsas de papitas y me sobró 5 pesos, ¿Cuánto me costó cada bolsa?"

Mediante un proceso de matematización horizontal se transforma el problema anterior en la ecuación $2x + 5 = 20$ donde x es el precio por bolsa de papitas, después de eso mediante un proceso de matematización vertical se resuelve la ecuación utilizando el método de despeje

$$2x + 5 = 20$$

$$2x = 15$$

$$x = 15/2$$

$$x = 7.5$$

Bajo un nuevo proceso de matematización horizontal se interpreta el resultado en el contexto que originalmente surgió; "la solución de la ecuación es $x = 7.5$ y como x representa el valor de unas papitas, esto quiere decir que cada bolsa de papitas me costó siete pesos con cincuenta centavos".

Todo este proceso de distintas matematizaciones se le puede llamar como un proceso de matematización progresiva.

2.3 Los esquemas y esquemas de acción (Vergnaud)

En este apartado se describen las principales ideas de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), entre los que se pueden destacar: Esquemas[4], Situaciones y los Invariantes Operatorios, los cuales nos ayudarán a describir la forma en que actúan los estudiantes de nivel superior al enfrentarse a situaciones relativas al uso de ecuaciones lineales de una variable.

La teoría de los campos conceptuales es importante para este estudio puesto que dará una visión sobre cómo los estudiantes aprenden a resolver ecuaciones lineales de una variable, describiendo el proceso sobre el que construyen su conocimiento. Esta teoría supone que el amago del desarrollo cognitivo por un individuo es la conceptualización. Ella es la piedra angular de la cognición (Vergnaud, 1998). Luego, se debe prestar toda la atención a los aspectos conceptuales de los esquemas[5], y al análisis conceptual de las situaciones para las cuales los estudiantes desarrollan sus esquemas en la escuela o fuera de ella (Vergnaud, 1994).

Un ejemplo que se puede dar de lo anterior, es el esquema de un atleta que va a llevar a cabo un salto de altura, que lleva a observar que cada intento de salto tiene tanto elementos en común como también elementos distintos, las explicaciones de los mismos se dan mediante el análisis de los entrenamientos y de las secuencias por medio de la observación; sin embargo, a pesar de todo, la explicitación queda muy fragmentaria (Vergnaud, 1990).

Cada esquema de acción que posee un individuo está relacionado a un concepto en particular; pero en la enseñanza tradicional, es natural decir que un estudiante sabe un

[4] El concepto de esquema aparece en la obra de Piaget en relación con el tipo de organización cognitiva que, necesariamente implica la asimilación: los objetos externos son siempre asimilados a algo, a un esquema mental, a una estructura mental organizada (Dubinsky, 1996).

[5] Se define "Esquema" como "*la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada*" (Vergnaud, 1990, p. 2). Esto es, el tipo de acción o "algoritmo" que utiliza un sujeto para cada tarea específica (Mejía, 2012).

concepto si puede repetir su definición (Moreira, 2002). Sin embargo, para Vergnaud (1990, p. 1)

> "*un concepto cualesquiera no puede ser memorizado solamente como el conjunto de palabras que conforman su definición, sino que debe ser asimilado o entendido de acuerdo al problema o la acción que envuelve al sujeto al momento de utilizarlo en distintas situaciones, se pueden distinguir dos tipos de acción del sujeto:*
>
> *1) Cuando el sujeto tiene los elementos necesarios para el tratamiento inmediato de la situación.*
> *2) Cuando el sujeto no tiene los elementos necesarios para el tratamiento inmediato de la situación; es decir, le faltan los esquemas necesarios para la resolución de la misma".*

Ejemplos de lo anterior pueden ser : el planteamiento de una ecuación lineal que resuelva la situación "*un hijo que es 22 años más joven que su padre dentro de dos años su edad será la de un tercio de la de su padre, ¿Cuál es su edad actual?*", después de que el estudiante trabajó el tema "Ecuaciones Lineales" que se encuentra presente en algunos programas de estudio de nivel superior de la Universidad Autónoma de Zacatecas, se considera que constituye un ejemplo del primer tipo de acción, ya que se supone que los estudiantes tendrán los elementos necesarios para el tratamiento inmediato de la situación.

Por otro lado, dada la situación "Resuelva la ecuación $3x + 17 = 15$" puesta a un niño de primer grado de primaria, constituye un ejemplo del segundo tipo de acción ya que en este caso el individuo, se supone, no tendrá de forma inmediata el esquema que da tratamiento a dicha situación. Para este caso, el sujeto debe construir un nuevo esquema, utilizando los que ya tiene para resolver la situación.

Entonces, dependiendo de la situación a la que se enfrente el sujeto, el concepto de esquema tomará diferentes funciones, en la primera acción se habla de un proceso único, de un solo esquema y éste, más automatizado. En cambio, en la segunda acción tendrá que existir más de un esquema y no será automático, sino que se desarrollará y se complementará entre sí para llegar a una solución del problema, aquí se tratará de un proceso de descubrimiento (Vergnaud, 1990; Mejía, 2012; Moreira, 2002).

Si el objetivo es determinar los elementos cognitivos que permiten que la acción del sujeto sea operatoria, se debe estudiar los esquemas, ya que es en ellos donde se identificarán aquellos pasos de conducta que no varían, que llevarán a caracterizar los esquemas para una situación dada (Moreira, 2002).

Los esquemas de acción en situaciones matemáticas no son la excepción, por ejemplo cuando un niño quiere contar un conjunto pequeño, tiene una variación dependiendo de que lo que se trate, pueden ser bombones, personas, animales, canicas, etc., pero el esquema para esta situación también tiene elementos invariantes como son la cardinación o enunciados coordinados a la serie numérica.

Por otro lado, el esquema de resolución de una ecuación lineal de una variable $ax + b = c$ tiene algo invariante en la mayoría de los sujetos, como puede ser la preservación de la igualdad bajo distintas operaciones. El funcionamiento cognitivo del alumno comporta operaciones que tienden a automatizarse rápidamente y decisiones conscientes que permiten tener en cuenta los valores particulares de las variables de las situaciones.

Esta automatización es una de las características más visibles de lo invariante de un esquema y no por eso está reñido con las decisiones conscientes del sujeto, que toma cuando es apropiado el uso de distintos conocimientos, de hecho toda acción de un sujeto lleva a cabo una parte automática y una parte consciente.

De aquí surge que un algoritmo es un esquema y que un esquema es un objeto del mismo tipo lógico como los algoritmos (Vergnaud,1990; 1993; 1994); sin embargo, les falta efectividad; es decir, llegar al fin deseado, como cuando un niño elabora un esquema para la resolución de una situación y se da cuenta de que es erróneo, puede volver a construir otro esquema o bien modificar el mismo, de este modo, varios esquemas serán rechazados antes de llegar al esquema solución. De acuerdo con Piaget, los esquemas que están en el proceso de adaptación de estructuras cognoscitivas son asimilación y acomodación (Vergnaud, 1990).

Tomando como ejemplo el algoritmo de la suma de números enteros existen varias reglas, explicitar ese conjunto de reglas es difícil para los niños; es decir, están implícitos en los esquemas y eso no quiere decir que no puedan resolver la situación dada; sin embargo, sin estos conjuntos de reglas, para el niño es imposible llevar a cabo la resolución de la situación, un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita, a veces se puede encontrar fallas en la automatización de un esquema y éstos, ciertamente, no dan cuenta de los principales errores (Vergnaud, 1990; Mejía, 2012).

Cada esquema es relativo o es operatorio a una clase de situaciones bien definida, donde en una clase más pequeña se puede aplicar eficazmente, pero si el individuo lo quiere hacer más extenso; es decir, usa ese esquema en una situación más grande de la que está bien definida, en este caso se puede hablar de deslocalización, generalización, transferencia y descontextualización, no se puede generar este proceso, el de utilizar modificando un esquema para una situación más amplia sin que el sujeto se dé cuenta de igualdades y similitudes entre diferentes situaciones en el esquema que era ya funcional, la identificación de invariantes es fundamental en la generalización de un esquema(Vergnaud, 1990; Mejía, 2012).

También, un esquema puede aplicarse a una clase demasiado amplia de situaciones. Aquí el sujeto debe restringir su alcance o descomponer la clase en subclases y acomodar el esquema, para hacerlo suplementario se reconoce estos procesos de restricción y de acomodación (Vergnaud, 1990; Mejía, 2012).

En la resolución de tareas se observa que los sujetos buscan cómo es el esquema o los esquemas que mejor se adaptan a la situación; sin embargo, como eso no es trivial aun para él, lo resolverán con procedimientos heurísticos que no son tan efectivos como los algoritmos, pero también son esquemas (Mejía, 2012).

El esquema es una pieza fundamental en la cognición de un individuo, requieren pues de ser analizados todos los elementos que lo componen, estos son los invariantes operatorios y de inferencias (Vergnaud, 1990). Las inferencias son indispensables para un esquema al cambiar de argumentos según los valores de las variables en cada situación. Para describir el esquema utilizado por un sujeto es necesario que éste resuelva una tarea, de esta manera, se observará el funcionamiento del esquema en la situación; es decir, el *"esquema de acción".*

2.4 Los conocimientos contenidos en los esquemas, los "Invariantes Operatorios"

Dentro de los conocimientos que hacen posibles la operacionalidad de un esquema de acción están presentes los conceptos que Vergnaud (1990) llama "Invariantes Operatorios" estos son: los conceptos y teoremas en acto.

Los conceptos en acto aluden a categorías referidas a los objetos, sus propiedades y sus evoluciones, cuyo conocimiento permite hacer una interpretación de la realidad y aplicar los esquemas adecuados a un determinado tipo de situación (Soto, 2003) por ejemplo para el caso de ecuaciones se puede hablar de algunos conceptos en acto como: número, igualdad, ecuación, suma, resta, multiplicación y división (Mejía, 2012).

Mientras tanto, los teoremas en acto se manifiestan como proposiciones verdaderas que se aplican en un gran número de situaciones, en éstos, los alumnos manifiestan ciertos axiomas matemáticos pero sin ser comprendidos como tales (Soto, 2003). Por ejemplo para el caso de ecuaciones algunos teoremas en acto son: propiedad conmutativa, asociativa y distributiva, existencia del neutro aditivo, neutro multiplicativo, inverso aditivo, inverso multiplicativo y la propiedad uniforme[6]. Estos dos conceptos se les conoce como "*Invariantes operatorios*" debido a la necesidad e invariación en la que aparecen en un esquema de acción para cada situación por parte de un individuo.

Los invariantes operatorios no son del tipo lógico único, es decir, no son únicos ni imposibles de transformar, al contrario cada individuo tiene los propios y los modifica para cada situación; por lo tanto es necesario analizarlos a mayor detalle, además hay que diferenciar a los teoremas en acto, de los teoremas, y los conceptos en acto, de los conceptos, ya que en sí son diferentes de naturaleza, los conceptos y teoremas explícitos forman gran parte de la conceptualización, además, se tiene que los invariantes operatorios son la otra parte de la conceptualización, que es más difícil de observar.

En el caso de las ecuaciones lineales un "concepto en acto" puede ser el concepto de incógnita, que para una persona se puede tratar como "*algo desconocido*" un "teorema en acto" puede ser la propiedad uniforme: "*si a dos miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide por una misma cantidad, la igualdad se conserva*", un concepto (matemático) puede ser el de ecuación "en matemáticas, una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas *miembros*, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas". Y un teorema (matemático) puede ser la existencia del elemento inverso aditivo, "sea a un número real cualquiera entonces existe un numero real $-a$ tal que $a+(-a)=-a+a=0$".

Hay una relación dialéctica entre conceptos-en-acto y teoremas-en-acto, toda vez que los conceptos son ingredientes de los teoremas y los teoremas son propiedades que dan a los conceptos sus contenidos. Pero sería un error confundirlos (Vergnaud, 1998). Conceptos-en-acto son ingredientes necesarios de las proposiciones. Pero los conceptos no son teoremas, pues no permiten derivaciones (inferencias o computaciones); las derivaciones requieren proposiciones. Las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas; los conceptos

[6] Establece que si dos miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide por una misma cantidad, la igualdad se conserva.

pueden ser apenas relevantes o irrelevantes. Aun así, no existen proposiciones sin conceptos (Vergnaud, 1994).

Recíprocamente, no hay conceptos sin proposiciones, pues es la necesidad de derivar acciones de las representaciones del mundo y de tener concepciones verdaderas (o por lo menos adecuadas) del mundo que tornan necesarios a los conceptos. Un modelo computable del conocimiento intuitivo debe comprender conceptos-en-acto y teoremas-en-acto como ingredientes esenciales de los esquemas. Los esquemas son fundamentales porque generan acciones, incluyendo operaciones intelectuales, pero pueden generarlas porque contienen invariantes operatorios (teoremas y conceptos en acto) que forman el núcleo de la representación (Moreira, 2002).

Por otro lado, un concepto-en-acto no es un verdadero concepto científico ni un teorema-en-acto es un verdadero teorema a menos que se tornen explícitos. En la ciencia, conceptos y teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su veracidad, pero ese no es necesariamente el caso de los invariantes operatorios (Vergnaud, 1990). Conceptos y teoremas explícitos no constituyen más que la parte visible del iceberg de la conceptualización: sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios esa parte visible no sería nada. Recíprocamente, no se puede hablar de invariantes operatorios integrados en los esquemas sin la ayuda de categorías de conocimiento explícito: proposiciones, funciones proporcionales, objetos y argumentos (Moreira, 2002).

En general, los alumnos no son capaces de explicar ni tampoco de expresar en lenguaje natural sus teoremas y conceptos-en-acto. En el abordaje de una situación, los datos a ser trabajados y la secuencia de cálculos a ser realizados dependen de teoremas-en-acto y de la identificación de diferentes tipos de elementos pertinentes. La mayoría de esos conceptos y teoremas-en-acción permanecen totalmente implícitos, pero ellos pueden, también ser explícitos o tornarse explícitos en la representación de la solución de una situación por parte del estudiante (Moreira, 2002).

La operacionalidad de un concepto debe ser experimentada por medio de situaciones variadas, una aproximación psicológica lleva a considerar un concepto como un conjunto de invariantes que se usan en la acción. Se puede encontrar a las ecuaciones lineales al querer resolver un problema de dinero, un problema de edades o estar dadas de forma explícita como puede ser en la tarea, entre muchos otros.

Esto conduce a llevar a un concepto a una tripleta de tres conjuntos:

- **S:** conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, es el reto o la tarea a la que se enfrenta el sujeto y necesita solucionar.
- **I:** Conjunto de invariantes (operatorios) sobre las cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (Significado), estos son los conceptos y teoremas en acto con los cuales el sujeto enfrenta la situación, el conjunto de esquemas previos que un sujeto posee.
- **R:** Conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos del tratamiento (Significante); es decir, la representación que cada quien le da a cierta situación esté explícita o no, pero es muy importante porque a partir de la misma es que el sujeto empieza a resolver la situación (Mejía, 2012).

Para estudiar el desarrollo del aprendizaje es necesario considerar los tres conjuntos al mismo tiempo. Por ejemplo en la situación: "*un hijo que es 22 años más joven que su padre, dentro de dos años su edad será la de un tercio la de su padre, ¿Cuál es su edad actual?"*

Representación. Una posible representación sería, sea x la edad del niño, de ahí se puede representar este problema como

$$x + 2 = \frac{(x + 22)}{3}$$

Invariantes. Dentro de los invariantes se tendrán conceptos en acto que permitirán resolver la situación; es decir, se estará usando el "concepto en acto" de número al percatarse de que lo que está buscando es el número que representará la edad del hijo. Asimismo, podrá utilizar los conceptos en acto de igualdad, suma, resta, multiplicación y división.

Cuando posterior al planteamiento de la ecuación lineal e intentando encontrar el valor de x se observa que el miembro $x+22$ está dividido por 3, aplicando el *"teorema en acto" "propiedad uniforme"*, se multiplicaría por 3 ambos miembros de la igualdad: $(\mathbf{3})(x+2) = (\mathbf{3})\frac{(x+22)}{3}$. Además se podrían usar otros teoremas en acto: las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, existencia del neutro y existencia de inversos.

Teniendo en cuenta los anteriores conceptos (matematización horizontal y vertical, situación, esquema de acción, invariantes operatorios y representación) se pueden relacionar de la siguiente manera:

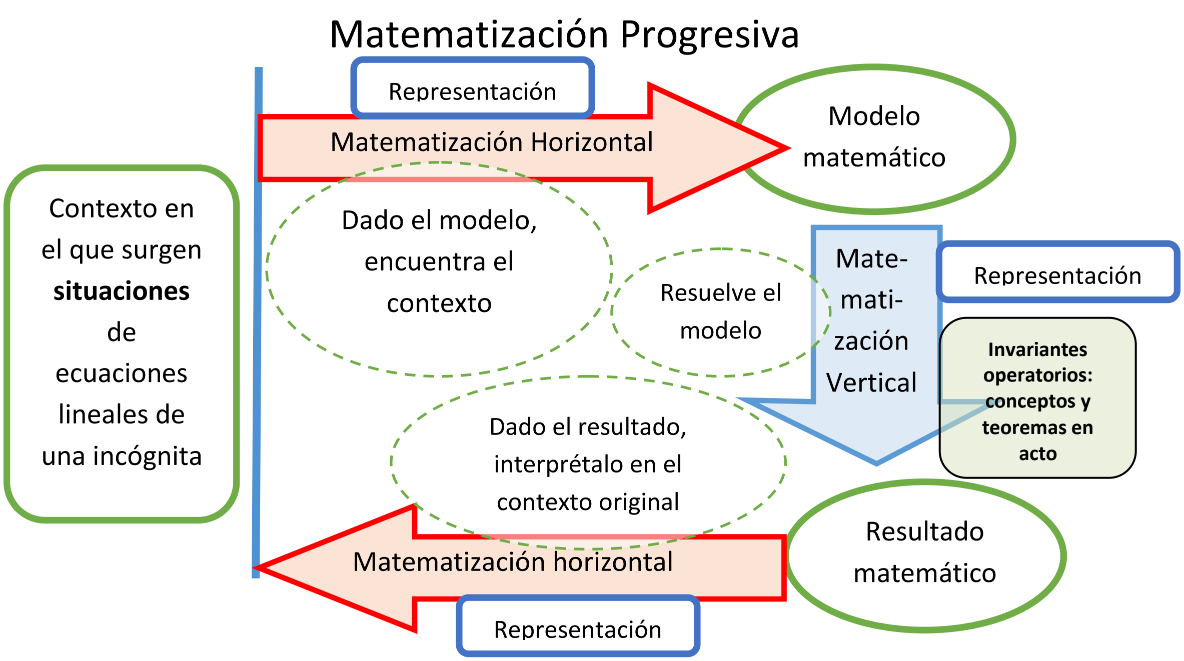


Figura 2. El proceso de matematización progresiva

2.5 Las ecuaciones lineales de una variable. Objeto matemático, objeto escolar

Desde siempre el álgebra ha sido útil para resolver distintos tipos de problemas, por ejemplo, "Encontrar las edades actuales de un hombre que es 46 años más grande que su hijo, y que dentro de diez años su edad será dos veces la de su hijo"; en problemas de optimización tales como "minimizar el gasto y maximizar la producción de la elaboración de libretas", e incluso "determine si existe un polinomio de grado tres que cumpla que tiene como raíces a 0 a $2-i$ y $2+i$ y además cumple que toma los valores de 1 y -1 cuando $x=1$ y $x=-1$ respectivamente" (Mejía, 2012).

2.5.1 Las ecuaciones lineales como un objeto matemático

Antes de definir lo que es una ecuación es necesario caracterizar los diferentes conjuntos numéricos, ya que las ecuaciones están definidas en dichos conjuntos.

El sistema de los números reales

Según Bello (1999) el conjunto de los números naturales se representa por $\mathbb{N}$, está formado por los números que utilizamos eventualmente para contar objetos: $\mathbb{N}$={1,2,3,…}. Una caracterización escolar para éstos es:

- $\mathbb{N}$ tiene siempre un primer elemento que es la unida: $1 \in \mathbb{N}$.
- Cada elemento tiene uno siguiente. Para cualquier $n \in \mathbb{N}, \exists\, n+1 \in \mathbb{N}$.
- No existe un último elemento; es decir, $\mathbb{N}$ tiene infinitos elementos.

(Bello, 1999)

Ahora fijémonos en el importante hecho de que en un sistema de números restringido a los enteros y positivos es imposible restar un número mayor de otro menor. Para hacer posible tal sustracción, se introducen nuevos números llamados los números negativos, para poder realizar operaciones tales como $a-b$, si $b>a$ y el resultado es negativo, por ejemplo $2-8$ (Lehmann, 2012).

En particular, si restamos un número entero de sí mismo, obtenemos el número cero designado por el símbolo 0. Así, si a representa cualquier número entero, tenemos la relación $a - a = 0$, la cual podemos considerarla como definición del cero (Lehmann, 2012).

Así es que los números enteros son la unión de los naturales, los negativos enteros y el elemento neutro (0) y se representan por la letra $\mathbb{Z}$ (Bello, 1999). $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Entonces $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Números racionales: son los números que se pueden escribir de la forma p/q, donde $p, q \in \mathbb{Z}\ y\ q \neq 0$, se representa con la letra $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}\ con\ q \neq 0\right\}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (Bello, 1999).

Números irracionales: son los números que no son racionales, las representaciones decimales son series no finitas y no periódicas y se denota por la letra I (Bello, 1999). Ejemplo: $I = \{\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots\}$

Números reales: Es el conjunto de todos los números racionales e irracionales, se denota con la letra $\mathbb{R}$ (Bello, 1999).

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Junto con el conjunto de los números reales se supone la existencia de dos operaciones llamadas adición y multiplicación, tales que para cada par de números reales x e y se pueda formar la suma de x e y que es otro número real designado por $x + y$ y el producto de x por y designado por $xy\ o\ x * y$. La suma $x + y$ y el producto xy están unívocamente determinados por x e y. A los signos $+$ y $*$ no se les asigna otro significado especial que el precisado en los siguientes axiomas (Apostol, 1967, p. 22):

Axioma 1. Propiedad conmutativa. $x + y = y + x, xy = yx. \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Axioma 2. Propiedad asociativa. $x + (y + z) = (x + y) + z, x(yz) = (xy)z \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Axioma 3. Propiedad distributiva. $x(y + z) = xy + xz \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

Axioma 4. Existencia de los elementos neutros. Existen dos números reales distintos, que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real x se tiene: $0 + x = x + 0$ y $1 * x = x * 1$.

Axioma 5. Existencia del inverso multiplicativo. Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y tal que $xy = yx = 1$.

Axioma 6. Existencia de inverso aditivo. Para cada número real a existe un número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$

De los axiomas anteriores se pueden deducir todas las leyes usuales del Álgebra elemental. Las más importantes de ellas se recogen a continuación como teoremas. En todos estos teoremas las letras a, b, c, d, representan números reales cualesquiera.

Teorema 1. Ley de simplificación para la suma. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. (En particular esto prueba que el número 0 del axioma 4 es único) (Bello, 1999).

Demostración.

Dado $a + b = a + c$.

En virtud del axioma 4, se puede elegir y de manera que $y + a = 0$, con lo cual

$y + (a + b) = y + (a + c)$, y aplicando la propiedad asociativa

$(y + a) + b = (y + a) + c$. Pero en virtud del axioma 4, se tiene

$0 + b = b$ y $0 + c = c$, o sea, $b = c$.

Obsérvese que este teorema demuestra que existe un solo número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 4. En efecto, si 0 y $0´$ tuvieran ambos esta propiedad, entonces, $0 + 0´ = 0\, y\, 0 + 0 = 0$; por lo tanto $0 + 0´ = 0 + 0$ y por la ley de simplificación $0 = 0´$.

Teorema 2. Propiedad de la sustracción. Dado a y b existe uno y sólo un x tal que $a + x = 0$. Este x se designa por $0 - a$. Y se escribe simplemente $-a$ y se denomina el negativo de a.

Demostración.

Supóngase que existe otro x' que cumple la misma condición que x; es decir, $a + x' = 0$, de esta afirmación se puede concluir que $a + x' = a + x$, ya que por el teorema 1 el cero es único, y además por este mismo teorema se puede sumar x a ambos lados de la igualdad, posteriormente asociando y usando que $a + x = 0$ y que $a + x' = 0$, se tiene:

$$a + x' + x = a + x + x \Rightarrow$$

$$(a + x') + x = (a + x) + x' \ \Rightarrow$$

$$0 + x = 0 + x' \ \ \Rightarrow$$

$$x = x'$$

De este modo, el negativo de a es único, y como consecuencia inmediata de este resultado se tiene que si $a + x = b$ entonces $x = b - a$

Ahora sí, estamos en condiciones de definir lo que es una ecuación lineal de una incógnita, se comenzará por definir lo que compone una ecuación, y después se dará una definición de lo que se refiere a una ecuación lineal de una incógnita.

Ecuaciones

Según Bello (1999), una ecuación es la afirmación de la igualdad entre dos cantidades y está compuesta de varios elementos:

- Incógnitas: son las letras que aparece en la ecuación.
- Coeficiente: son los números o fracciones que acompañan a la incógnita.
- Términos independientes: son los números o fracciones que no acompañan a la incógnita.
- Primer miembro: es todo lo que hay del lado izquierdo del signo de igualdad.
- Segundo miembro: es todo lo que hay del lado derecho del signo igual

$$\overbrace{\underbrace{5x+3}_{primer\ miembro} = \underbrace{2x+9}_{segundo\ miembro}}^{ecuación}$$

"x" es la incógnita.

5 y 2 son los coeficientes que acompañan a la incógnita.

3 y 9 son los términos independientes.

Ecuaciones lineales con una incógnita

Las ecuaciones lineales con una incógnita son aquellas que pueden escribirse de la forma $ax + b = 0$, donde $a\ y\ b\ \in \mathbb{R}, a \neq 0$ y x es la incógnita (Bello, 1999).

Las soluciones de una ecuación son las sustituciones de una variable que convierten a la ecuación en una proposición verdadera. Cuando encontramos la solución de una ecuación, decimos que la hemos resuelto. Puede darse el caso de que dos ecuaciones distintas tengan las mismas soluciones, en este caso, se está hablando de ecuaciones equivalentes (Bello, 1999).

Así, una ecuación equivale a otra si ambas tienen la misma solución. Por ejemplo $4x - 2 = 4$ equivale a $4x = 6$ ya que $x = 3/2$ que es la expresión más simple que permite conocer inmediatamente el valor de la incógnita.

Una ecuación de primer grado con una incógnita se soluciona con la sustitución de la variable que convierte a la ecuación en una proposición verdadera (Grossman, 2008). Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita es encontrar su solución, trasformando la ecuación en ecuaciones equivalentes, cada vez más sencillas hasta obtener el resultado (Grossman, 2008).

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se utilizan las propiedades de la igualdad, que son consecuencia de los teoremas y de los axiomas de los números reales.

Propiedades de la igualdad: Si se tiene una igualdad entre dos números o dos expresiones algebraicas: $a = b$ y se suma o resta a los dos lados de la ecuación el mismo número o expresión algebraica, la igualdad se conserva. $a + c = b + c$, $a - c = b - c$ (Bello, 1999).

Si se tiene una igualdad entre dos números o dos expresiones algebraicas: $a = b$ y se multiplica o divide los dos lados de la ecuación por el mismo número o expresión algebraica (distinta de 0 encaso de división) la igualdad se conserva. $ac = bc$, $a/c = b/c$ con $c \neq 0$.

Cabe mencionar la diferencia que existe entre una función, una ecuación y una expresión algebraica; la función $f(x) = ax + b$ que se refiere a una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto –denominado dominio- un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007); en otras palabras el valor de $f(x)$ está condicionado por los distintos valores que toma x. Una ecuación es la afirmación de la igualdad entre dos expresiones matemáticas y por último una expresión, es el conjunto de objetos matemáticos agrupados por términos; es decir, que están separados por los signos + y -, como por ejemplo la expresión $ax + b$ consta de dos términos ax y b (Ibáñez y García, 2009).

2.5.2 Las ecuaciones lineales como un objeto escolar

Las ecuaciones lineales aparecen por primera vez como tema de estudio dentro del segundo año de la Educación Secundaria (México. Secretaría de Educación Pública, 2011), el programa de estudios de este nivel tiene una estructura basada en competencias; sin embargo, en dicho nivel suelen plantearse al alumno problemas de ecuaciones lineales, los cuales no hacen necesario el uso de esta herramienta y en consecuencia la ecuación es separada de un elemental principio de necesidad (Sessa, 2005). Una razón por la cual se da esta situación son el tipo de problemas que se le plantean al alumno, por ejemplo, muchos problemas verbales planteados en clase podrían resolverse utilizando solamente recursos aritméticos, sin recurrir necesariamente a las reglas algebraicas, por lo cual, el planteamiento algebraico de una ecuación carece de significado y por lo tanto de competencia para el alumno (Sierra, 2013).

Por otro lado, hoy en día, en las escuelas del nivel medio superior de nuestro país se presenta la materia de Álgebra (México. Secretaría de Educación Pública, 2013), sin importar si el bachillerato es para la formación general o en alguna especialidad, esto se debe a su importante relación con todas las áreas del conocimiento; y es que es dentro de esta materia donde se debería retomar el tema de ecuaciones lineales desde una perspectiva de competencias; sin embargo, en los planes y programas de estudio de este nivel no se manifiesta de manera explícita, dentro de las habilidades necesarias para este tema, la validación del resultado, además, la mayoría de los problemas que se proponen para el alumno están alejados del contexto en el que éste se desenvuelve (Mejía, 2012).dg

En muchos casos dicho tema llega hasta la educación superior, como muestra se tiene a la Licenciatura en Matemáticas, la Licenciatura en Física, la Licenciatura en Ciencias Biológicas y en algunas Ingenierías (Civil, Mecánica, Química). Algunos de estos planes de estudio pretenden lograr que el alumno relacione a la matemática con otras áreas de estudio, por esa razón los problemas que se proponen que resuelva el alumno se relacionen con su campo disciplinar de su estudio.

De esta manera las ecuaciones lineales de una variable están presentes dentro de los programas de secundaria, bachillerato y en algunos de nivel superior, así se manifiesta la importancia que este tema tiene dentro del desarrollo matemático escolar, por ello es importante estudiar cómo es que los alumnos las han madurado después de haberlas estudiado en tres etapas distintas de formación académica

En esta sección se han mostrado las ecuaciones lineales de una variable desde el punto de vista matemático, cómo surgen sus propiedades y su naturaleza, además se ha identificado que están presentes en los planes y programas de estudio en diferentes etapas de la educación: secundaria, media y superior. Y en algunos de ellos se sugiere que dicho concepto matemático se use como un instrumento de resolución de tareas.

Capítulo 3. Método

En esta sección se describe cómo fue llevada a cabo la investigación, la muestra o participantes (tipo, procedencia, edades y algunas características que son relevantes en los casos; y procedimiento de selección de la muestra), el diseño de investigación y el procedimiento (un resumen de cada paso en el desarrollo de la investigación: inmersión inicial y total en el campo, descripción detallada de los procesos de recolección de datos: qué datos fueron recabados, cuándo fueron recogidos y cómo (forma de recolección y/o instrumentos utilizados)) y cómo se procedió con los datos una vez obtenidos.

3.1 El tipo de investigación

Como menciona Godino (2010)

> Dentro de la comunidad de investigadores que, desde diversas disciplinas, se interesan por los problemas relacionados con la Educación Matemática, se ha ido destacando en los últimos años, principalmente en Francia – donde sobresalen los nombres de Brousseau, Chevallard, Vergnaud, ... – un grupo que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática. (p.28)

y como resultado de ese esfuerzo este autor afirma que en ese país existe una concepción "fundamental" de la Didáctica de las Matemáticas, que tiene una concepción global de la enseñanza muy ligada a la matemática y a ciertas teorías del aprendizaje (específicamente al constructivismo de tipo piagetano) y que en su búsqueda de paradigmas propios de investigación ha construido una postura que integra tanto a los métodos cuantitativos como cualitativos (Mejía, 2012). Ejemplo de lo anterior es la teoría de los campos conceptuales y la fenomenología didáctica, así, en la presente investigación se describirán los esquemas de acción que tienen los estudiantes dentro de la matematización horizontal y vertical (método cualitativo) y además se mencionará y comparará la cantidad de alumnos que tienen dichos esquemas (método cuantitativo).

La presente investigación es un estudio didáctico en su vertiente cognitiva ya que no se manipulan variables, es decir, se observará el fenómeno tal y como sucede en su contexto natural sin manipular nada. Se basa en un diseño transeccional ya que se realizan las observaciones en un momento único del tiempo describiendo relaciones entre las variables y en su caso explicar las relaciones (correlacional) que estas guardan (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Considerando además, la operacionalidad de un concepto, debe ser experimentada por medio de situaciones variadas, y que una aproximación psicológica lleva a considerar un concepto como un conjunto de invariantes que se usan en la acción se puede analizar a los esquemas de acción de un sujeto mediante la implementación de una situación (Vergnaud, 1990).

Por otro lado, se puede considerar que básicamente, el método de Vergnaud consiste en plantear ciertas “tareas” a los sujetos estudiados y una vez registradas sus acciones en hojas de papel o en videograbaciones, hace un análisis de los “esquemas de acción” que utilizaron los sujetos para resolver la tarea o la manera en la que éstas van evolucionando (Moreira, 2002; Mejía, 2012; Trejo y Camarena, 2011; Camarena 2009).

En este caso, se ha construido una aproximación al método que se utiliza en estudios de casos de campos conceptuales (Moreira, 2002) sobre las concepciones y los esquemas de acción; es decir, se le dará al sujeto alguna tarea que precisa un proceso de matematización progresiva que involucra a las ecuaciones lineales de una variable, para que la resuelva en una hoja de papel y después con lo escrito, lo plasmado o lo registrado en esa hoja, se analizarán los esquemas de acción que utilizó para resolver dicha tarea, específicamente se tratará de identificar el tipo de esquema de acción y las características de la matematización utilizada.

3.2 Características de la muestra

El tipo de muestra que se eligió para la presente investigación es el de muestra por conveniencia, que como mencionan Hernández, Fernández y Baptista (2006) se refiere a los casos que tenemos acceso; es decir, para nuestra investigación la muestra se eligió de manera que cumpliera con los requisitos surgidos del marco teórico. Los requisitos necesarios para la aplicación del instrumento a los alumnos fueron los siguientes:

- estar cursando un programa de nivel de licenciatura o ingeniería dentro de la Universidad Autónoma de Zacatecas, y
- que en dicho programa dentro de su plan de estudios estén presentes las ecuaciones lineales de una incógnita.,
- dichos estudiantes deben haber abordado este tema, esto se debe a que el análisis de los esquemas de acción se pretende hacer una vez que el sujeto ya debiera de poseer los esquemas necesarios para el tratamiento inmediato de la situación.

Por lo anterior, la muestra quedó comprendida por los siguientes grupos: tres grupos de ingeniería civil, primero, segundo y cuarto semestre (de 14, 23 y 21 alumnos respectivamente); un grupo de noveno semestre de la licenciatura en física (8 alumnos), un grupo de la licenciatura en biología de primer semestre (47 alumnos); y por último un grupo de primer semestre de la licenciatura en matemáticas (12 alumnos).

3.3 Características del instrumento.

El instrumento que se utiliza para analizar los esquemas de acción está compuesto por tres tipos de tareas (debido a los tres tipos de matematizaciones que aparecen en el proceso de matematización progresiva) dos de matematización horizontal y una de vertical, para el caso de la horizontal las tareas se pueden clasificar como “dado el modelo encuentra el contexto” y “dado el resultado del modelo interpreta el resultado en el contexto original” (es decir, en el contexto del cual surgió), por otro lado para la matematización vertical las tareas se clasifican como “resolver el modelo matemático”.

Cabe mencionar que para las situaciones del tipo "dado el modelo encuentra el contexto" se proponen tres tareas. Para el caso "dado el resultado del modelo interpreta el resultado en el contexto original", está compuesto de dos tareas diferentes y por último "resolver el problema matemático" está compuesto de tres tareas desiguales. Es preciso mencionar que la totalidad de las tareas propuestas son diseñadas por el investigador

Para el caso de matematización horizontal se proponen las siguientes situaciones:

-Instrucciones: Plantea un problema que se pueda resolver utilizando la ecuación en cada caso.

$$17 + 2x = 31$$

$$11 + \frac{3}{5}x = 17$$

$$x + 2(x - 20) + (x - 20) = 120$$

Aún cuando las tres ecuaciones son casos particulares de la ecuación $ax + b = c$, existe un esquema de resolución empleado por los alumnos con alto grado de disponibilidad y efectividad para $a, b\ y\ c$ positivos y $c > b$ (Chamorro, 1991), por lo tanto, esperamos mayor grado de éxito al proponer un problema para la primer tarea, posteriormente para la segunda y por último para la tercer tarea.

Para el caso de matematización vertical se proponen las siguientes tareas:

-Instrucciones: Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el procedimiento que quieras.

$$2x + 17 = 31$$

$$\frac{3}{5}x + 11 = 17$$

$$x + x - 20 + 2(x - 20) = 120$$

Recordemos que al variar los coeficientes y variables en una ecuación lineal, se modifica el tipo de esquema de resolución que utilizarán los sujetos al resolver un problema que involucre a estas tres ecuaciones; sin embargo, estarán presentes muchos elementos en común ya que se trata de una clase de situaciones específica.

Así, en la primer tarea se trata de una ecuación en la cual todos sus componentes (coeficientes y términos independientes) en ambos miembros son enteros positivos y además el término independiente del primer miembro es menor que el del segundo; es decir, se trata de una ecuación de lineal de una incógnita de las más simples (Chamorro, 1991).

La segunda tarea pertenece a una categoría más compleja que la anterior (Chamorro, 1991), esto se debe a la presencia de un número racional en el coeficiente de la incógnita. En este tipo de situación el alumno requerirá no solamente un esquema simple, sino además uno en el que se incluyan teoremas y conceptos en acto para multiplicar y dividir. Ya que en el proceso de "despeje" el estudiante tendrá que utilizar propiedades matemáticas como la existencia de inverso multiplicativo para los números reales

Para la tercera se trata de una ecuación compleja, ya que la incógnita aparece varias veces, además de la presencia de paréntesis, así como distintos términos independientes de diferente naturaleza. Para este caso el alumno utilizará un esquema más complejo que los anteriores ya que ahora no solo utilizará las operaciones básicas con números sino que deberá hacerlo también con la incógnita.

Y por último para el caso "dado el resultado del modelo interpreta el resultado en el contexto original" se proponen las siguientes dos situaciones:

> *-Instrucciones: Ahora, de los problemas que planteaste selecciona uno y resuélvelo con el procedimiento que tú quieras.*
>
> *-Instrucciones: Contesta lo que se pide.*
>
> *En su clase de matemáticas el maestro le planteó el siguiente problema a Francisco y le pidió que lo resolviera*

Germán gastó 120 pesos de saldo de su celular en hacer una breve llamada internacional de un minuto, enviar un mensaje de texto y responder un e-mail a una ciudad de Suiza, Germán sabe que el sms cuesta 20 pesos menos que el costo por minuto de llamada y el e-mail cuesta el doble que el sms. ¿Qué precio pagó por la llamada, el mensaje y el e-mail?

Luego Francisco lo resolvió de la siguiente forma:

$$x + x - 20 + 2(x - 20) = 120$$
$$x + x - 20 + 2x - 40 = 120$$
$$4x - 60 = 120$$
$$4x = 180$$
$$x = 45$$

Pero, a Francisco se le olvidó contestar las tres cosas que se le preguntaban en el problema, respóndelas tú por favor. Explica tu respuesta.

Para este caso se espera que el alumno mediante un esquema de matematización horizontal encuentre la relación que guarda el valor de la incógnita con respecto al enunciado de la situación que se le ha propuesto.

La elección de tres tipos de tareas; dos matematización horizontal y una de vertical, se debe a la búsqueda de los esquemas de acción que los estudiantes tienen dentro de un proceso de matematización progresiva, como se mencionó anteriormente dentro del marco teórico. Dentro de las tareas de matematización vertical "resolver el modelo matemático" se eligieron tres tipos distintos de situaciones (una relativamente sencilla, una más compleja y otra compleja).

Asimismo esos tres tipos de tareas se eligieron de manera que el alumno partiera de un problema sencillo y después fuera subiendo de dificultad, de esta manera se apreciará la eficacia del esquema de acción que tiene el alumno al momento de resolver ecuaciones lineales de una incógnita de sencillas a más complicadas. Cabe mencionar que la tercera tarea se relaciona directamente con las demás; pues en éste se plantea un ciclo completo de matematización progresiva (ver Figura 2).

Las primeras tareas nos servirán para ver la capacidad que tiene el alumno para pasar de una situación contextual a una situación matemática, para ver los esquemas de acción que se tienen sobre el concepto de ecuación lineal. Las siguientes situaciones ayudarán para ver qué esquemas de acción tienen los alumnos, específicamente en el contexto matemático puro, cuando se le pide resolver un problema de ecuaciones lineales. Y por último el tercer tipo de tareas ayudarán a ver los esquemas de acción que tienen los estudiantes al momento de interpretar un resultado matemático en un contexto distinto, esto se da cuando se le pide explicar una respuesta originada de la solución de una ecuación basada en un problema ajeno a las matemáticas.

Como se puede observar, la diferencia entre las distintas tareas consiste en que en las primeras, el estudiante tendrá que relacionar a la ecuación con un problema, buscando las relaciones entre la expresión algebraica y el enunciado de un problema. En las segundas actividades se pide que resuelvan la ecuación por el método que quisieran y se esperaría diferentes esquemas para resolver el mismo. Y en las últimas situaciones el alumno tendrá que encontrar la relación entre la respuesta matemática y la respuesta al problema, para ello deberá encontrar la relación ente un resultado y la verificación del mismo en el contexto en que surgió.

En cada una de las situaciones o tareas de la anterior matematización progresiva se pretende observar los esquemas de acción, los conceptos en acto, y teoremas en acto mediante el análisis de sus representaciones, teniendo siempre en cuenta que los alumnos deberían tener los esquemas necesarios para dar tratamiento inmediato y de manera adecuada a las anteriores situaciones.

La obtención de los datos para el análisis cognitivo se hará mediante la recuperación de las hojas de trabajo de los estudiantes, para analizar la información escrita. El análisis será cualitativo y atenderá las diferentes representaciones que hacen los estudiantes de las invariantes en los esquemas de acción que construyen en su actuar ante las situaciones propuestas, además como se mencionará y comparará la cantidad de alumnos que tienen dichos esquemas, utilizaremos elementos del método cuantitativo.

3.4 Características de la aplicación de las tareas.

La actividad se aplicó a tres grupos de Ingeniería Civil, primero, segundo y cuarto semestre; un grupo de noveno semestre de la Licenciatura en Física, un grupo de primer semestre de la Licenciatura en Biología; y por último un grupo de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

La actividad está constituida en dos hojas distintas, en la primera se les pidió que pusieran datos como el semestre que cursaban y el programa académico en el que estaban inscritos, en dicha hoja estaban presentes las actividades de matematización horizontal "dado el modelo encuentra el contexto" y la de matematización vertical "resolver el modelo matemático". Dicha hoja se entregó al inicio de la actividad a los alumnos dándoles la instrucción de que podían escribir sus procedimientos en la parte anversa o reversa de la hoja, como ellos lo creyeran conveniente; además de que se les dijo que por favor no borraran ningún procedimiento que no les fuera útil, esto se debe, a que el poder observar procedimientos ineficaces por parte de algún alumno nos habla de esquemas de acción inadecuados o conflictivos para el tratamiento de la situación.

Una vez terminada la hoja uno se le recogía ésta y se procedía a otorgarles la hoja dos donde se encontraba presente la actividad de matematización horizontal "dado el resultado del modelo interpreta el resultado en el contexto original" con las mismas instrucciones que la actividad anterior; esto se debe a que algunas de las actividades de la hoja 1 se podían resolver con la actividad de la hoja 2, por ello no se entregaron al mismo tiempo, esta actividad se diseñó con la finalidad de asegurar el análisis de este tipo de matematización horizontal, pues pudiera ser que los alumnos no puedan plasmar sus esquemas de acción en las actividades 1 y 2.

Por cuestiones de ética se optó por no pedir el nombre de los estudiantes en las hojas. Pero para la identificación de las tareas de cada alumno, la primera hoja contaba con un número que el investigador previamente anotó, posteriormente, cuando un alumno entregaba su hoja 1, el investigador le daba la hoja 2 escribiendo en ese momento el mismo número que tenía la hoja 1.

Para la solución de las actividades se planeó un límite de tiempo de treinta minutos; sin embargo, la mayoría de los estudiantes concluyeron antes de llegar a este punto, y solo unos cuantos sobrepasaron este límite.

El día martes 12 de noviembre del 2013 a las 10:00 de la mañana se aplicó la prueba a 23 alumnos de segundo semestre del programa de ingeniería mecánica, ese mismo día a las 11:00 de la mañana se aplicó a 21 alumnos de cuarto semestre del mismo programa académico.

Al día siguiente se aplicó la prueba a 14 alumnos de primer semestre del anterior programa así como a 8 estudiantes de noveno semestre de la licenciatura en física a las 12:00 del mediodía.

Para el siguiente día, jueves 14 de Noviembre del 2013 a las 8:00 de la mañana, 47 alumnos del programa de licenciatura en biología resolvieron la prueba, ese mismo día a las 12 del día se les aplicó la prueba a 12 alumnos del primer semestre de la licenciatura en matemáticas.

3.5 Modo de organizar el análisis de la información

Los alumnos se han clasificado mediante una clave para una rápida identificación de los mismos, dos dígitos que manifiestan el programa académico inscrito (IC, LF, LB, LM, ingeniería civil, licenciatura en física, licenciatura en biología y licenciatura en matemáticas respectivamente), otros dos que se refieren al semestre que están cursando (S1, S2, S4, S9, primer, segundo cuarto o noveno semestre) y por último otros tres que se refieren al número del alumno (A05, A22, alumno 5 ó alumno 22). Por ejemplo, la clave ICS4A12 se refiere al alumno número 12 del cuarto semestre de ingeniería civil.

Para el caso de los anexos, además de la clave anterior se le agregaron otros dos dígitos al principio de cada clave, que nos ayudarán a identificar el número de hojas de cada alumno (H1, H2,H3, hoja 1, hoja 2 y hoja 3 respectivamente), por ejemplo la clave H2LFS9A08, se refiere a la hoja número 2 del alumno 8 de noveno semestre de la licenciatura en física.

Para la organización de los datos según Hernández, Fernández y Baptista (2008) se puede hacer mediante un criterio o varios que se crean convenientes, que para este caso es primero por el tipo de tarea del instrumento y después por la representación que hay de esta tarea.

3.6 Revisión y análisis de información

Para el análisis de los resultados se usará una combinación de las dos teorías descritas en el marco teórico. En primera instancia, la división de las tareas propuestas es para el análisis por separado de la matematización vertical y horizontal.

Enseguida se analiza el primer paso de las representaciones de los estudiantes mediante el esquema de acción que siguieron, ya que este paso es en lo general el camino o esquema principal que siguió el sujeto al momento de afrontar la situación, generalmente este paso condiciona totalmente el esquema de acción utilizado por el sujeto, es por ello que la categorizará tomando como referencia este paso, un ejemplo de categoría de esquema de acción para la matematización vertical sería "estimar el valor de x por tanteos".

Una vez categorizados los esquemas de acción de los estudiantes se procederá al análisis de cada uno de ellos (tomando como referente el más representativo de los categorizados) describiendo, paso a paso el esquema utilizado para dicha situación, basándose siempre en la representación.

Para el caso de la matematización vertical, además de utilizar la organización anterior se describirán los conceptos y teoremas en acto que utilizó el sujeto al momento de resolver este tipo de tareas matemáticas, esto se debe a que como dice Vergnaud (1990) cuando un sujeto resuelve una situación matemática emplea estos conocimientos propios de él y los manifiesta dentro de sus representaciones.

Es dentro de esta clasificación en donde se espera encontrar esquemas del tipo algorítmico donde se identifique la simbolización y el procedimiento convencional del mecanismo que se va a seguir para dar solución a la situación problema; y del tipo no algorítmico donde se identifique el empleo de la simbolización espontánea para dar solución al problema. (Flores, 2007 citado en Trejo y Camarena, 2011).

A manera de conclusión se puede decir que dentro de este capítulo se describe el cómo fue llevada la investigación, el tipo, la muestra y sus características que instrumento se utilizó para recolectar información; los fenómenos que surgieron en la aplicación de las tareas, el modo de organizar la información, y el proceso para la revisión y el análisis de la misma.

Capítulo 4. Los esquemas de acción de los estudiantes en el proceso de matematización vertical

En este capítulo se muestran los resultados que surgieron de la aplicación de las tareas referentes a la matematización vertical.

Como se mencionó anteriormente la matematización vertical es el proceso de reorganización dentro del mismo sistema matemático. Representar una relación como fórmula, probar regularidades, mejorar, ajustar, combinar e integrar modelos, y generalizar son ejemplos de actividades de matematización vertical. Por esta razón se dice que la matemática vertical es tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción (Mejía, 2012).

En lo que sigue se describen los esquemas de acción que los estudiantes de nivel superior mostraron dentro de las diferentes tareas de matematización vertical que se les plantearon dentro del instrumento, como se recordará, las tareas de matematización vertical fueron las siguientes:

-Instrucciones: Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el procedimiento que quieras.

$$2x + 17 = 31$$

$$\frac{3}{5}x + 11 = 17$$

$$x + x - 20 + 2(x - 20) = 120$$

A continuación se presentan los esquemas surgidos en cada una de las distintas tareas. Cabe mencionar que primero se analizarán los esquemas de los estudiantes de la primera tarea, después los de la segunda y por último los de la tercera. Cabe mencionar que en las tres pruebas la mayoría de estos alumnos utilizan los mismos conceptos en acto que son:

- Número: ya que en él aparecen números.
- División: usan esta noción matemática.
- Igualdad: aparece el símbolo =, cuando asocian cantidades dentro de la ecuación.
- Resta y Suma: los utilizaron debido a que cumple con la suma según la tarea.
- Ecuación: al inducir el término dentro de las instrucciones.

4.1 Primera tarea $\mathbf{2x + 17 = 31}$

En esta tarea básicamente se encontraron ocho esquemas, de los cuales cinco son buenas matematizaciones y tres no lo son, en lo que sigue se describen todos ellos.

El esquema de acción de despejar la incógnita. En esta categoría se han ubicado a ochenta y nueve alumnos[7],y se toma como representante el esquema de acción del alumno LMS1A10.

Este conjunto de alumnos representó su esquema manifestando en cada paso las acciones realizadas para ir despejando poco a poco la incógnita, en el primer paso este grupo de alumnos indicó que se debía de pasar hacia el otro lado el término independiente del primer miembro hacia el otro utilizando de esta forma el teorema en acto de la propiedad uniforme (Figura 3).

$$2x = 31 - 17$$

Figura 3. Esquema de acción de despejar la incógnita 1

Después de ello realizaron mentalmente la resta de los números involucrados en el segundo miembro de la ecuación usando el teorema en acto de juntar términos semejantes (si dos términos tienen la misma base y el mismo exponente, son semejantes ¡súmalos!): $31 - 17 = 14$, para con ello expresar el resultado en el siguiente paso del esquema (Figura 4).

$$2x = 14$$

Figura 4. Esquema de acción de despejar la incógnita 2

[7] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Ahora bien, como el coeficiente de la incógnita es igual a dos, este grupo de alumnos utilizo el teorema en acto de inverso multiplicativo y la propiedad uniforme y representó el despeje de la x dividiendo el 14 entre el dos y así mismo dividir $14/2 = 7$ siendo este ultimo el resultado final de la situación (Figura 5)

$$x = \frac{14}{2} = 7$$

Figura 5. Esquema de acción de despejar la incógnita 3

El esquema de acción de aproximaciones mediante ensayo y error. En esta categoría se ubican a diez alumnos[8]; para describir sus características se toma como base el trabajo realizado por ICS4A4. Como se puede observar en la Figura 6, este alumno vuelve a transcribir la ecuación propuesta cambiando únicamente el hecho de escribir entre paréntesis a la incógnita, esto para percatarse de que el número 2 está multiplicando a la incógnita.

$$2(x) + 17 = 31$$

Figura 6. Esquema de acción de adivinar el resultado 1

Después este grupo de alumnos adivinó el número que solucionaba la ecuación propuesta; es decir, interpretó la ecuación de esta manera: “un número que multiplicado por dos y sumado 17 nos da como resultado 31”; no es muy laborioso darse cuenta por simple estimación que ese número buscado es el 7, de este modo en el siguiente paso del esquema estos estudiantes únicamente verifican el resultado propuesto confirmando la igualdad (Figura 7).

$$2(7) + 17 = 31$$

[8] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Figura 7. Esquema de acción de adivinar el resultado 2

El esquema de acción de optimizar pasos. En este caso se ubican a seis alumnos[9], se analizará el esquema de acción de LMS1A01 como representante de la categoría.

En esta clasificación lo que el conjunto de alumnos realizó fueron pasos algebraicos mentalmente; es decir, como la ecuación propuesta tenía un término positivo e independiente dentro del primer miembro de la ecuación, entonces es obvio que hay que restárselo al segundo miembro; de este modo los estudiantes restaron mentalmente $31 - 17 = 14$, por ello en el primer paso de su representación solo escriben una expresión equivalente de la ecuación propuesta (Figura 8).

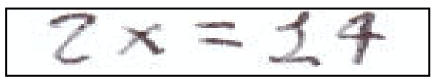


Figura 8. Esquema de acción de optimizar pasos 1

Mediante un razonamiento similar al anterior este conjunto de alumnos se da cuenta de que como el coeficiente de la incógnita es 2, entonces el segundo miembro de la ecuación debe de ser dividido entre dos y con ello la incógnita quedará despejada dando solución a la tarea (Figura 9).

Figura 9. Esquema de acción de optimizar pasos 2

El esquema de acción de despejar la incógnita en términos de operaciones aritméticas. Para este caso se han clasificado a diez alumnos[10], y se ha tomado a LMS1A09 como representante de la categoría.

[9] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos
[10] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

En el primer paso del esquema este conjunto de alumnos despejó a la incógnita de la ecuación, para ello procedió a eliminar el término independiente del primer miembro de la igualdad, restándoselo al segundo (Figura 10)

Figura 10. Esquema de acción despejar la incógnita con operaciones aritméticas 1

Después, sin realizar la operación indicada en el segundo miembro de la ecuación, en el siguiente paso de la representación se deja indicada la siguiente operación, dividir por dos lo que les resulte de la operación del segundo miembro, para que una vez que fue indicado mediante una secuencia de igualdades ir reduciendo la expresión aritmética a un solo número efectuando las operaciones para llegar a un resultado (Figura 11)

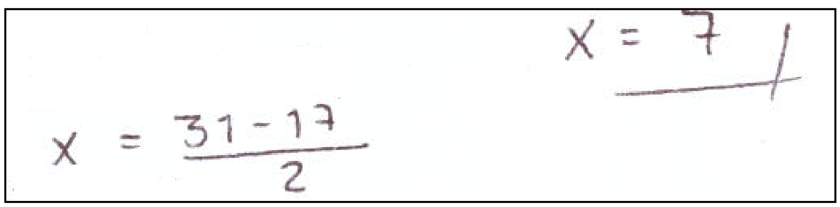


Figura 11. Esquema de acción despejar la incógnita con operaciones aritméticas 2

El esquema de acción de indicar todas las operaciones en la misma expresión. Para esta categoría se clasifica únicamente al alumno ICS4A18 y a continuación se describirá su esquema de acción.

Este alumno se dio cuenta que en la ecuación debía de restarse el término independiente al segundo miembro, por ello lo indicó del lado derecho de la igualdad, y la diferencia entre estos números es de 14, por ello representa dicho número con un nuevo signo de igualdad; sin embargo, se da cuenta que ese número debe dividirse entre dos, dado que el coeficiente de la incógnita es dos, por ello al número 14 que había escrito lo divide sobre $2x$, ahora pues como catorce entre dos es igual a siete; este alumno escribe la expresión $x = 7$ delante de un signo igual dentro de la misma expresión. Es por ello que este esquema se llama de esa forma, porque dicho alumno juntó todos los pasos en la misma expresión algebraica, es decir, en esencia este alumno utilizó el teorema en acto de "igualdad entre distintos pasos" que significa: utilizar el signo de igualdad, como un indicativo del siguiente paso (Figura 12).

$$a)\ 2x + 17 = 31 - 17 = \frac{14}{2x} = x = 7$$

Figura 12. Esquema de acción de indicar todas las operaciones en la misma expresión

Cabe mencionar la presencia de un teorema en acto dentro de este esquema por parte del alumno: el teorema en acto de igualdad entre distintos pasos algebraicos; es decir, no se percata que la sucesión de igualdades que está mostrando no es válida; sin embargo, hay que notar que el resultado de esta tarea de matematización vertical es correcto.

El esquema de acción de despejar la incógnita restando inadecuadamente. Para este caso se han clasificado a 7 alumnos[11] y se ha tomado a LMS1A03, como representante de los demás.

En el primer paso de la representación del esquema este conjunto de alumnos se dio cuenta que había que despejar a la incógnita de la ecuación, por ello procedió a eliminar el término independiente del primer miembro de la igualdad, restándoselo al segundo (Figura 13).

$$2x = 31 - 17$$

Figura 13. Esquema de acción de despejar la incógnita restando inadecuadamente 1

Después, sin realizar la operación indicada en el segundo miembro de la ecuación, en el siguiente paso de la representación se deja indicada la operación que es necesaria para

[11] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

despejar la incógnita, dividir por dos, lo que les resulte de la operación del segundo miembro, para que una vez que fue indicado mediante una sucesión de igualdades, ir reduciendo la expresión aritmética a un solo número efectuando las operaciones necesarias y con ello llegar a un resultado (Figura 14) sin embargo este alumno no realiza bien la resta de dichos números ya que solo considera al número uno y al siete y como la diferencia entre 11 y 7 es cuatro escribe el número 4 sin percatarse que no se 21 sino 31.

$$x = \frac{31-17}{2} = \frac{4}{2} = 2 \,//$$

Figura 14. Esquema de acción de despejar la incógnita restando inadecuadamente 2

Cabe mencionar que ésta no es una buena matematización y esto se debe a que estos alumnos utilizan un teorema en acto: diferencia entre dos números con la misma cantidad de cifras; en el que el alumno únicamente se fija en las dos últimas cifras de los números que va a restar y se da cuenta que la diferencia es de 4 , por ello lo escribe; sin embargo, este razonamiento no siempre es válido, solo se cumple cuando las cifras de las decenas son consecutivas y en este caso no lo son. Por ello el resultado propuesto no es una solución de la ecuación dada.

El esquema de acción de sumar el término independiente al segundo miembro. En esta categoría solo se presenta el esquema de ICS1A07 ya que es el único que manifiesta esta representación

Este alumno en su primer paso del esquema sumó el término independiente del primer miembro con el segundo, sin percatarse de que en realidad deberían restarse por ello este estudiante representa un 48 (Figura 15).

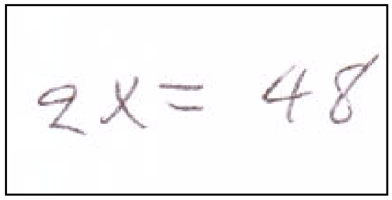


Figura 15. E A Sumar el término independiente al segundo miembro 1

Después este alumno dividió dicho número entre dos ya que es el coeficiente que acompaña a la incógnita y que da como resultado 24 siendo para este alumno el resultado de la ecuación propuesta (Figura 16) sin embargo esta es una matematización inadecuada.

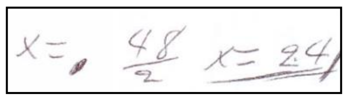


Figura 16. E A Sumar el término independiente al segundo miembro 2

Se encontraron algunas regularidades dentro de la primera tarea de matematización vertical como lo es que la mayoría de ellos utilizó un esquema muy apegado al que se enseña en la escuela, por lo tanto muy pocos mostraron uno diferente a éste, además la mayoría de los estudiantes realizó una buena matematización (Tabla 1).

Tabla 1. Matematización vertical $\mathbf{2x+17=31}$

Esquema	**Adecuado**	**Alumnos**	**%**
Despejar incognita	SI	39 de ingeniería civil	67.24
		35 de biología	74.46
		9 de matemáticas	75
		6 de física	75
Aprox. Mediante ensayo y error	SI	5 de biología	10.63
		5 de ingeniería civil	8.62
Optimizar pasos	SI	5 de ingeniería civil	8.62
		1 de matemáticas	8.33
Despejar la incógnita en términos de operaciones aritméticas	SI	6 de ingeniería civil	10.34
		2 de biología	4.25
		1 de física	12.5
		1 de matemáticas	8.33
Indicar todas las	SI	1 de ingeniería	1.72

operaciones en la misma expresión			
Despejar la incógnita restando inadecuadamente	NO	4 de biología	8.51
		1 de ingeniería civil	1.72
		1 de física	12.5
Sumar el término independiente al segundo miembro	NO	1 de ingeniería civil	1.72

De 125 alumnos que realizaron la prueba 116 (92.8%) utilizaron un esquema que sí solucionaba la ecuación propuesta, además la mayoría de ellos (71.2%) utilizó un esquema del tipo algorítmico como lo es el de despejar la incógnita. De este modo se puede decir que para este tipo de tarea la mayoría de los estudiantes mostró un esquema de acción adecuado para la situación.

4.1.2 Segunda tarea resuelve la ecuación: $\frac{3}{5}x + 11 = 17$

En esta tarea se encontraron diez esquemas, de los cuales cinco son buenas matematizaciones y cinco no lo son, en lo que sigue se describen todos ellos.

El esquema de acción algorítmico. Para este caso se han clasificado a 58 alumnos[12] y como representante de la clasificación al alumno , ICS4A09.

Este conjunto de alumnos representó su esquema manifestando en cada paso las acciones realizadas para ir despejando poco a poco la incógnita, en el primer paso este grupo de alumnos indicó que se debía de pasar hacia el otro lado el término independiente del primer miembro hacia el otro.

Después realizar las resta y posteriormente utilizar el teorema en acto de “dividir el resultado obtenido entre el inverso” (establece que el inverso de a/b es b/a) para el número racional 3/5, una vez representado esto prosiguieron a efectuar la operación indicada de la multiplicación de números racionales (6)(3/5) para con este paso despejar

[12] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

la incógnita de la ecuación y así obtener el resultado deseado (Figura 17). Cabe mencionar que este proceso es una buena matematización ya que se resuelve la situación.

$$= 17-11 \rightarrow \frac{3}{5}x = 6 \rightarrow x = \frac{\frac{6}{1}}{\frac{3}{5}} \rightarrow x = \frac{30}{3} \rightarrow x = 10$$

Figura 17. Esquema de acción algorítmico

El esquema de acción de optimizar pasos. En esta categoría se han clasificado a 26 alumnos[13], y se toma a LMS1A08 como representante de los demás.

Este esquema de acción se caracteriza porque los estudiantes que lo utilizaron optimizaron los pasos dentro de sus representaciones; es decir, en un primer paso utilizaron el teorema en acto de "restar el término independiente del primer miembro al segundo" (establece que cuando se trata de números se puede restar mentalmente) y mentalmente realizaron las operaciones, así con ello obtuvieron la ecuación equivalente $\frac{3}{5}x = 6$, después utilizando el teorema en acto de inverso multiplicativo de los números reales multiplicaron el segundo miembro por el 3/5 y efectuaron las operaciones para de esa forma obtener el resultado deseado (Figura 18), cabe mencionar que este esquema es una buena matematización por parte de los estudiantes ya que se llegó al resultado deseado.

$$\frac{3}{5}x = 6 \Rightarrow x = \frac{5}{3}(6) \Rightarrow x = 10$$

Figura 18. Esquema de acción de optimizar pasos

[13] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

El esquema de acción de despejar la incógnita en términos de operaciones aritméticas. En esta categoría se clasifican a los alumnos, ICS4A19, LFS9A07, LFS9A01 y ICS4A11 y se toma a este último como representante de la categoría.

En el primer paso del esquema este conjunto de alumnos despejó a la incógnita de la ecuación, para ello procedió a usar el teorema en acto de inverso aditivo para eliminar el término independiente del primer miembro de la igualdad, restándoselo al segundo, asimismo dejando la operación indicada multiplicaron esta operación por el inverso multiplicativo del coeficiente de la incógnita utilizando el teorema en acto del inverso multiplicativo(Figura 19).

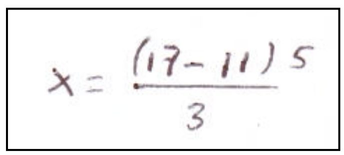


Figura 19. E A despejar la incógnita en términos de operaciones aritméticas 1

Después en el siguiente paso del esquema y usando el teorema en acto de juntar términos semejantes este alumno representó al número seis que es el resultado de la primera operación aun multiplicado por el $5/3$, mostrando con esto una ecuación equivalente a las otras dos (Figura 20).

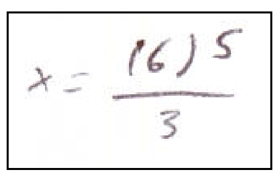


Figura 20. Despejar la incógnita en términos de operaciones aritméticas 2

A continuación se realizaron las operaciones restantes utilizando el teorema en acto de juntar términos semejantes para llegar a un solo número y con ello encontrar la solución de la ecuación propuesta; es decir, se multiplicó el seis por el cinco y se dividió entre tres, encontrando así la solución de la ecuación (Figura 21). Siendo esta una buena matematización.

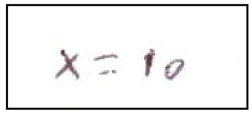


Figura 21. Despejar la incógnita en términos de operaciones aritméticas 3

El esquema de acción de adivinar la solución. Para este caso se han clasificado a los alumnos LBS1A28, LBS1A11, LBS1A47, ICS1A05, ICS4A07 y ICS4A01 tomándose este último como representante de la categoría.

Este esquema se caracteriza porque los alumnos adivinaron la solución o realizaron todas las operaciones aritméticas de forma mental ya que su única representación es la solución de la ecuación, cabe mencionar que esta es una buena matematización (Figura 22). Hay que mencionar que es posible que estos estudiantes tengan un esquema algorítmico para esta clase de situaciones, que les permite encontrar una solución sin ir detallando los teoremas y conceptos en acto que utilizan.

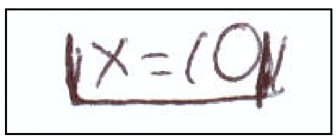


Figura 22. Esquema de acción de adivinar la solución

El esquema de acción de aproximación numérica. En esta categoría se han clasificado a los alumnos LMS1A11, LBS1A38, LBS1A17, LBS1A29, LBS1A33, LBS1A37, LBS1A46, LBS1A7, LBS1A34 y LBS1A23 tomándose a éste como representante.

Este esquema de acción se caracteriza porque los alumnos que utilizaron dicho esquema transformaron numéricamente los números racionales presentes en la ecuación; es decir, en el primer paso del esquema este grupo de alumnos despejó a la incógnita de la ecuación, para ello procedió a eliminar el término independiente del primer miembro de la igualdad, restándoselo al segundo, después de ello utilizaron el teorema en acto de transformar el número racional 3/5 por 0.60 y lo pasaron dividiendo (Figura 23).

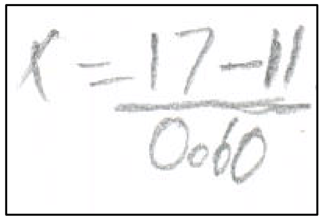


Figura 23. Esquema de acción de aproximación numérica 1

Después este grupo de alumnos procedió a realizar las operaciones indicadas en el primer paso de su esquema de acción, realizando primero la resta 17-11=6 y en seguida utilizando el teorema en acto de la división con punto hace el cociente entre los dos números indicados para con ello llegar al resultado, siendo ésta una buena matematización (Figura 24).

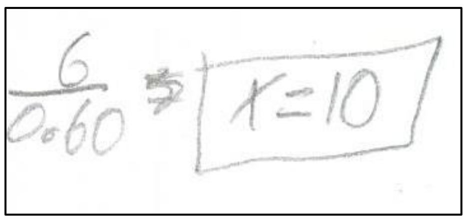


Figura 24. Esquema de acción de aproximación numérica 2

El esquema de acción de una mala aproximación numérica. Para este caso se han clasificado a los alumnos LBS1A36 y ICS4A04 tomando se este último como representante de los demás. Este esquema se caracteriza porque al igual que el anterior, este grupo de alumnos transformó el número racional presente en la ecuación en un decimal, pero como es periódico, optaron por aproximarlo; sin embargo, lo hicieron mal; es decir, en el primer paso del esquema estos alumnos decidieron utilizar el teorema en acto de aproximar el 3/5 de la ecuación; no obstante en lugar de realizar la división 3/5 lo hicieron al revés 5/3 por ello les da como resultado el número 1.66, para posteriormente transformar la ecuación en una equivalente (para ellos) y con esto terminar el procedimiento, cabe mencionar que se trata de una mala matematización además de que no se emitió ningún resultado (Figura 25).

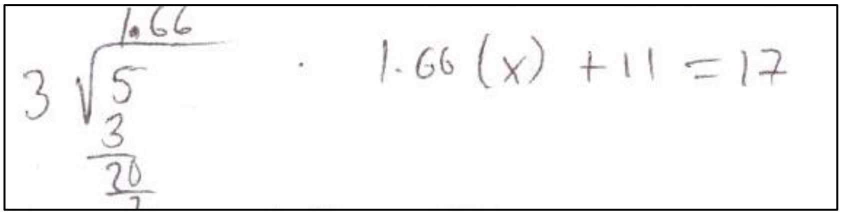


Figura 25. Esquema de acción de una mala aproximación numérica

El esquema de acción de confundir la operación con la fracción. En esta categoría se clasifican a los alumnos ICS4A12, ICS4A23, LBS1A14 y LBS1A45, y se toma como representante de los demás al alumno ICS4A12 del cual describiremos su esquema utilizado.

Con base en las representaciones que manifiesta este conjunto de alumnos se puede decir en primera instancia que para esta tarea utilizaron el teorema en acto de la propiedad uniforme y restaron de manera mental el término independiente del primer miembro de la ecuación, al segundo y da como resultado 6, de esta manera el alumno escribe la ecuación equivalente a la primera (Figura 26).

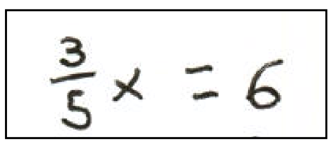


Figura 26. Esquema de acción de confundir la operación con la fracción 1

Después de ello usando el teorema en acto del inverso multiplicativo este alumno pasó multiplicando el $3/5$ al número 6 , para con ello despejar la incógnita y poder dar solución a la ecuación, de este paso del esquema surge la representación $x = 18/5$; sin embargo, este alumno no se percata de que en realidad no se debe de multiplicar por $3/5$ al 6 sino por su inverso multiplicativo que es 5/3. Es por esa razón que se dice que ésta es una mala matematización (Figura 27).

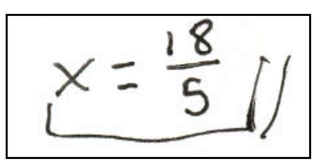


Figura 27. Esquema de acción de confundir la operación con la fracción 2

El esquema de acción de no terminar el proceso. Para este caso se han clasificado a los alumnos LBS1A06, LBS1A09, LBS1A02, ICS2A15 y LFS9A06. Se toma como representante de la categoría al alumno LBS1A06.

Este conjunto de alumnos primeramente pasó restando el término independiente del primer miembro de la ecuación, dejándolo indicado dentro de su representación (Figura 28).

$$\frac{3}{5}X = 17 - 11$$

Figura 28. Esquema de acción de no terminar el proceso 1

Después escribiendo tres puntos (que en matemáticas significan “por lo tanto”) escribe la ecuación equivalente a las anteriores una vez que realizó la operación de restar el término independiente del primer miembro al segundo; sin embargo, y aunque hasta el momento es una buena matematización, este alumno terminó sus representaciones en este paso; es decir, no encontró el número que da solución a la ecuación y por lo tanto es una mala matematización (Figura 29).

$$\therefore \frac{3}{5}X = 6$$

Figura 29. Esquema de acción de no terminar el proceso 2

Ausencia de esquema de acción. Para este caso se clasifican a los alumnos LBS1A05 y LBS1A42, los cuales no manifestaron ninguna representación, por lo tanto no dieron una solución. Así, no se puede afirmar la presencia de algún esquema por parte de estos alumnos. Y dado que no solucionan la tarea se puede decir que ésta es una mala matematización.

El esquema de acción de error de aritmética. En esta categoría se clasifican a los alumnos ICS4A14, ICS4A17, LBS1A20, LBS1A25, LBS1A12, LBS1A32 y LMS1A01 y se toma a este último como representante.

En el primer paso del esquema este conjunto de alumnos utilizó el teorema en acto de la propiedad uniforme y restó el término independiente del primer miembro al segundo, para con ello llegar a una ecuación equivalente de la primera; sin embargo, no se realizó de manera adecuada ya que la diferencia entre estos dos números es de seis y este alumno representó un cinco (Figura 30).

Figura 30. Esquema de acción de error de aritmética 1

Después de ello, multiplicó al segundo miembro por el inverso multiplicativo de $3/5$ para con ello dar solución a la tarea planteada; sin embargo, ésta es una mala matematización ya que el número que manifiesta como solución no lo es (Figura 31).

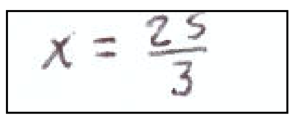


Figura 31. Esquema de acción de error de aritmética 2

Tabla 2. Matematización vertical $\frac{3}{5}x + 11 = 17$

Esquema	Adecuado	Alumnos	%
Algorítmico	SI	31 de ingeniería	53.44
		6 de matemáticas	50
		18 de biología	38.29
		3 de física	37.5
Optimizar pasos	SI	15 de ingeniería civil	25.8
		4 de biología	8.5
		2 de física	25
		5 de matemáticas	41.6
Despejar incógnita en términos de	SI	2 de ingeniería civil	3.44

operaciones aritméticas			
Adivinar la solución	SI	3 de biología	6.38
		3 de ingeniería	5.16
Aproximación numérica	SI	9 de biología	19.125
Confundir operación con fracción	NO	2 de ingeniería civil	3.44
		2 de biología	4.25
No terminar proceso	NO	3 de biología	6.38
		1 de ingeniería civil	1.72
		1 de física	12.5
		2 de física	25
Ausencia de esquema	NO	2 de biología	4.25
Error de aritmética	NO	1 de matemáticas	8.3
		2 de ingeniería	3.44
		4 de biología	8.5
Mala aproximación numérica	NO	1 de biología	2.12
		1 de física	12.5

De 125 alumnos que realizaron la prueba 101 utilizaron un esquema que sí solucionaba la ecuación propuesta, además la mayoría de ellos 58 utilizó un esquema del tipo algorítmico como lo es el de despejar la incógnita. De este modo se puede decir que para este tipo de tarea la mayoría de los estudiantes mostró un esquema de acción adecuado para la situación. Además la mayoría de los estudiantes no mostraron diferencias entre las distintas carreras, es decir, el uso o no uso de esquemas efectivos no depende de la carrera.

4.1.3 Tercera tarea $x + x - 20 + 2(x - 20) = 120$

En esta tarea se encontraron 12 esquemas de los cuales 3 son buenas matematizaciones y 9 no lo son, en lo que sigue se describen todos ellos.

El esquema de acción de operaciones mentales. En este caso aparecen los alumnos LBS1A29, y ICS4A01, y se analizará el esquema de acción de este último. En este esquema de acción el alumno utilizó los teoremas en acto sumar términos semejantes para los términos x y x y la propiedad distributiva para la expresión $2(x-20)$, para obtener la ecuación equivalente a la propuesta.

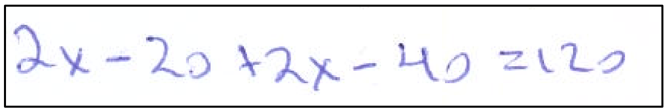


Figura 32. Esquema de acción de operaciones mentales 1

Para finalizar este alumno en el siguiente paso muestra simplemente el resultado de la ecuación, $x=45$ que es una buena matematización, en este caso no se puede hablar de un tipo de teorema en acto por que se necesitaría una representación que hubiera utilizado como válida; sin embargo, en este caso no lo hay.

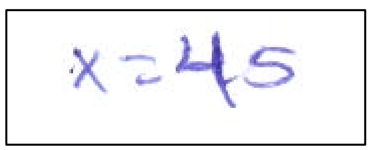


Figura 33. Esquema de acción de operaciones mentales 2

El esquema de acción algorítmico. En esta categoría se incluye a 78 alumnos[14] y para describir sus características se toma como base el trabajo realizado por ICS2A21. Como se puede ver en la Figura 34, el estudiante toma la ecuación propuesta, luego utiliza el teorema en acto de sumar términos semejantes (propiedad asociativa); es decir, sumó el término x con su semejante x y puso $2x$.

[14] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

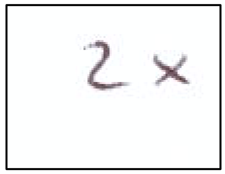


Figura 34. Esquema de acción algorítmico 1

Después de eso, utilizó el teorema en acto de multiplicación de polinomios que usó en el término $2(x-20)$ donde se dice que se multiplican "todos contra todos" (propiedad distributiva), utilizando aquí el teorema en acto de multiplicación algebraica y aritmética, y se referirá a él como el teorema en acto propiedad distributiva. Por eso puso la expresión: $2x\ -40$.

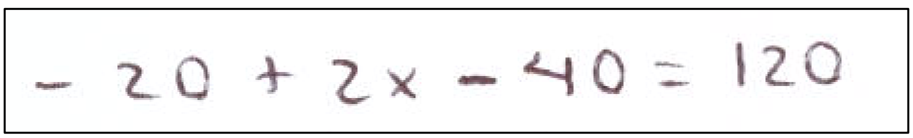


Figura 35. Esquema de acción algorítmico 2

En el siguiente paso del esquema volvió a utilizar el teorema en acto de sumar términos semejantes que en ese caso eran $2x$ y $2x$ además del teorema en acto propiedad asociativa cuando suma los términos -20 y -40, de este modo puso del lado izquierdo de la igualdad $4x-60$.

Figura 36. Esquema de acción algorítmico 3

Enseguida, como se puede ver en la Figura 37, para encontrar el valor de x utiliza la propiedad uniforme para el producto, al despejar x de la expresión $4x$, por tanto, se observa que dividió $180/4$, llegando con esto al resultado para x. Cabe mencionar que este proceso es una buena matematización.

$$4x = 180$$
$$x = 45$$

Figura 37. Esquema de acción algorítmico 4

El esquema de acción de la triple igualdad. En este caso aparecen los alumnos ICS2A14 y LMS1A01, y se analizará el esquema de acción de este último. Este alumno optimizó varios pasos en su representación al aplicar varios teoremas en acto al mismo tiempo mentalmente, utilizó el teorema en acto de la propiedad distributiva, la propiedad uniforme y sumar términos semejantes para llegar a la expresión $4x = 180$, ecuación equivalente a la propuesta y que ayuda a encontrar la solución; pero en medio de esta expresión aparece el número 160 que se puede decir que es ayuda numérica para realizar las operaciones.

$$4x = 160 = 180$$

Figura 38. Esquema de acción de la triple igualdad 1

En el siguiente paso de la representación de su esquema este alumno simplemente muestra el resultado obtenido $x = 45$, lo cual es una buena matematizacion ya que da solución a la situación propuesta, sin embargo, hay que resaltar que en la expresión anterior el alumno escribe una contradicción matemática, pone igual los números 160 y 180.

$$x = 45$$

Figura 39. Esquema de acción de la triple igualdad 2

El esquema de acción de simplificación de la expresión $(x - 20)$. En este caso aparecen los alumnos LBS1A47, ICS1A11, LBS1A21, LBS1A20, LBS1A45, ICS4A08, ICS1A10 y LBS1A30, y se analizará el esquema de acción de este último.

En este caso el camino que siguió el alumno (Figura 40) fue el de simplificar la expresión *x*-20, para esto utilizó su teorema en acto que según su representación dice que “$x - a = -ax$ donde a es natural” y todas las demás expresiones las escribió de la misma manera.

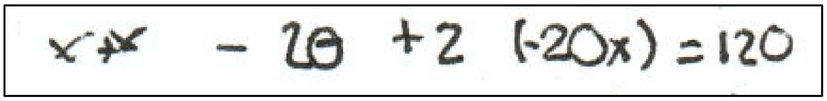


Figura 40. Esquema de acción de simplificación de la expresión ($\mathbf{x} - \mathbf{20}$) 1

Después de eso, como se puede ver en la figura #, utilizó los teoremas en acto de juntar términos semejantes, propiedad asociativa, para las expresiones x, x y el teorema en acto de la multiplicación algebraica para las expresiones 2 y –20x, de esta manera en el siguiente paso puso la expresión 2x y –40x. Del lado derecho de la igualdad aparece un -20, se considera que esto se debe a que usó el teorema en acto de la propiedad uniforme[15] para la suma, como se observa en la Figura 41:

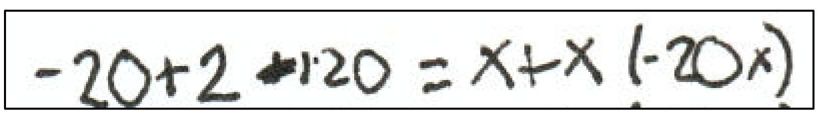


Figura 41. Esquema de acción de simplificación de la expresión ($\mathbf{x} - \mathbf{20}$) 2

Además de esto en el siguiente paso el alumno vuelve a utilizar el teorema en acto juntar términos semejantes, propiedad asociativa para la suma, con los factores x y x, además del teorema en acto propiedad asociativa con los números 120 y 20. De este razonamiento en el siguiente paso pone la expresión $102 = 2x\,(-20x)$ para después tratar de realizar el despeje de la misma, concluyendo la actividad en este paso, el de usar el teorema en acto propiedad uniforme para el producto. Cabe mencionar que este proceso es una mala matematización.

[15] Establece que si a dos miembros de una igualdad se les suma o se les multiplica por la misma cantidad la igualdad se prevalece

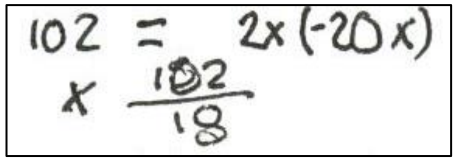


Figura 42. Esquema de acción de simplificación de la expresión $(\mathbf{x} - \mathbf{20})$ 3

El esquema de acción de adivinar el resultado. Otro esquema encontrado dentro de esta situación se distingue por que se basa en la estimación. Este tipo de estrategia fue usado por los alumnos: ICS4A04, LBS1A36, LBS1A34, LBS1A42 y ICS1A05 tomando a este último como representante de la categoría; y como se puede ver en la Figura 43 el esquema consiste en asignarle de entrada un valor a la incógnita que aparece dentro de la ecuación, en un primer intento este alumno inicia una representación asignando el valor de 80 a la incógnita, sin embargo al percatarse mentalmente que dicho valor no satisface la igualdad, por ello cancela este esquema y representa uno nuevo asignando según este último, el valor de 20 a la incógnita.

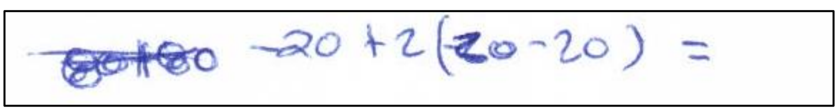


Figura 43. Esquema de acción de adivinar el resultado 1

Se puede observar la presencia de un teorema en acto por parte de este estudiante que consiste en igualar números a “nada” acción que en matemáticas no es correcta, después de esto este alumno trato de verificar el resultado y como la simplificación de la expresión que propuso en la figura anterior es igual a -20 entonces le hacían falta 140 para obtener el resultado por dicha razón este alumno opto por separar ese 140 en dos partes y agregarlas a la anterior expresión para con ello llegar al resultado deseado Figura 44.

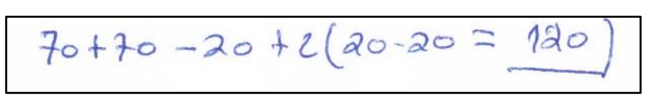


Figura 44. Esquema de acción de adivinar el resultado 2

De esta forma es como este alumno termina su esquema de acción para esta ecuación, sin embargo, es preciso mencionar que dicho proceso es una mala matematización por que no resuelve la situación.

El esquema de acción exponente cuadrático. En otro esquema encontrado dentro de esta situación se distingue la presencia de un exponente en la incógnita. Este tipo de estrategia fue usado por los alumnos: LBS1A04 y LBS1A41, que fueron los únicos en representarlo. Se toma como representante el trabajo de LBS1A41. Como se puede apreciar en la Figura 45 este alumno transforma la expresión $2(x - 20\ )$ en $x^2 - 40$, esto se debe a la presencia de un teorema en acto por parte de este estudiante, "como $2 * x =$ a dos veces x, y como dos veces multiplicar la x da como resultado x^2 entonces $2 * x = x^2$"

$$\boxed{2x - 20 + x^2 - 40 = 120}$$

Figura 45. Esquema de acción exponente cuadrático 1

Después utilizando la propiedad uniforme y el teorema en acto de juntar términos semejantes para los números, transforma la anterior ecuación en una equivalente a ella pero al percatarse de que se trata de una ecuación cuadrática no encuentra los valores que satisfacen dicha igualdad

$$\boxed{2x + x^2 = 120 + 20 + 40 = \underline{2x + x^2 = 180} =}$$

Figura 46. Esquema de acción exponente cuadrático 2

De esta manera este alumno termina con sus representaciones, sin haber mostrado un resultado para la ecuación, por ello se puede decir que este esquema es una mala matematización porque no soluciona la situación planteada.

El esquema de acción dividir antes de multiplicar. En esta categoría se incluye a los alumnos ICS1A08 y LMS1A09 y para describir sus características se toma como base el trabajo realizado por LMS1A09, este esquema se caracteriza por que el alumno utiliza el teorema en acto de la propiedad uniforme tomando como referencia el término $2(x-20)$, es decir, pasa dividiendo el número 2 al otro lado lado de la igualdad sin percatarse de que del lado derecho de la igualdad aún están presentes los términos x y x después utiliza el teorema en acto de juntar términos semejantes para transformar la expresión $x+x$ en $2x$.

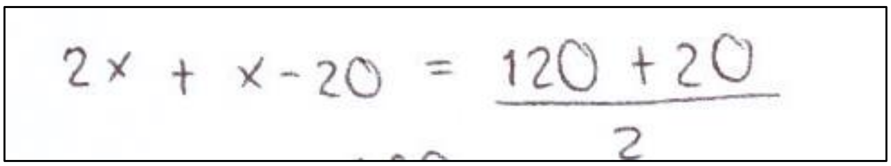


Figura 47. Esquema de acción dividir antes de multiplicar 1

Después utilizando nuevamente el teorema en acto de juntar términos semejantes simplifica las expresiones $2x$ y x y del lado derecho de la igualdad $120+20$ para con ello obtener una ecuación equivalente a la anterior:

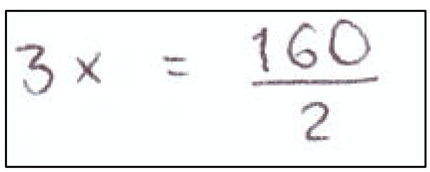


Figura 48. Esquema de acción dividir antes de multiplicar 2

Como última representación a esta situación este alumno dividió el 160 entre dos dando como resultado 80 y después utilizo el teorema en acto de la propiedad uniforme para pasar dividiendo el número 3 de lado derecho de la igualdad y con ello dar por concluido la situación, cabe mencionar que se trata de una mala matematizacion ya que no da tratamiento adecuado a la misma.

$$x = \frac{80}{3}$$

Figura 49. Esquema de acción dividir antes de multiplicar 3

El esquema de acción realizar varios procesos mentalmente. Otro esquema encontrado dentro de esta situación se distingue porque se basa en la realización de pasos algebraicos mentalmente. Este tipo de estrategia fue usado por los alumnos: LBS1A33, LMS1A03 y LBS1A23 tomándose a este último como representante de los demás.

En la primera representación del esquema se puede distinguir que este grupo de alumnos utilizó varios teorema en acto de forma simultánea, casi sin hacer representaciones, utilizan el teorema en acto de juntar términos semejantes, la propiedad distributiva y la propiedad uniforme para la ecuación propuesta, para llegar a la siguiente ecuación equivalente sin darse cuenta de que este proceso no fue eficiente.

$$4x = 178$$

Figura 50. Esquema de acción realizar varios procesos mentalmente 1

Después de ello utilizan el teorema en acto de la propiedad uniforme para pasar dividiendo el número 4 y con ello dar por concluida la situación, siendo ésta una mala matematización ya que no da un tratamiento adecuado a ésta.

$$x = \frac{178}{4}$$

Figura 51. Esquema de acción realizar varios procesos mentalmente 2

El esquema de acción de transformar números. En este caso aparecen los alumnos ICS2A18, ICS2A09, ICS2A02, LBS1A35, LBS1A25, LBS1A27, ICS4A14, LMS1A07, ICS4A18 y ICS1A14, y se analizará el esquema de acción de este último.

En la primera representación de esta situación el estudiante utiliza el teorema en acto de juntar términos semejantes, para los términos x y x, además de la propiedad distributiva para la expresión $2(x - 20)$, realizadas éstas de una manera adecuada; sin embargo, cambia el número 20 de la ecuación original por un 2, ya que todos los demás pasos están correctos en ese paso y no hay más elementos en su representación, no es posible afirmar la presencia de un teorema en acto ya que solamente se puede tratar de una simple equivocación de "dedo".

$$\boxed{2x - 2 + 2x - 40 = 120}$$

Figura 52. Esquema de acción de transformar números 1

En las siguientes representaciones de este esquema de acción utiliza el teorema en acto de juntar términos semejantes para los términos $2x$ y $2x$ y también para los números, luego, utiliza la propiedad uniforme para pasar sumando el número 42 y pasar dividiendo el 4.

$$\begin{aligned} 4x - 42 &= 120 \\ 4x &= 120 + 42 \end{aligned}$$

Figura 53. Esquema de acción de transformar números 2

$$\begin{aligned} 4x &= 162 \\ x &= \frac{162}{4} \end{aligned}$$

Figura 54. Esquema de acción de transformar números 3

En el paso final de la representación de este esquema manifiesta como solución al número 4.5; sin embargo el resultado de la división es 40.5 y por esta razón no se puede afirmar si se trata de una equivocación de "dedo" o nuevamente es la presencia de un teorema en acto, además por el resultado representado se puede decir que es una mala matematización.

$$\boxed{x = 4.5}$$

Figura 55. Esquema de acción de transformar números 4

El esquema de acción de eliminar un lado de la igualdad. En esta categoría se incluye a los alumnos ICS1A07, LBS1A32, LMS1A12, ICS4A02, ICS4A12 y para describir sus características se toma como base el trabajo realizado por ICS4A15. El estudiante utiliza el teorema en acto de sumar términos semejantes, sumó el término x con su semejante x y puso $2x$.Después de eso, utilizó el teorema en acto de propiedad distributiva al término $2(x - 20)$ obteniendo de esta manera la expresión $2x\ - 40$.

$$x + x - 20 + 2x - 40 = 120$$

Figura 56. Esquema de acción de eliminar un lado de la igualdad 1

En el siguiente paso del esquema volvió a utilizar el teorema en acto de sumar términos semejantes que en ese caso eran $2x$ y $2x$ además del teorema en acto propiedad asociativa cuando suma los términos -20 y -40, de este modo puso del lado izquierdo de la igualdad $4x - 60$.

$$4x - 60 = 120$$

Figura 57. Esquema de acción de eliminar un lado de la igualdad 2

En los siguientes pasos del esquema utiliza la propiedad uniforme para pasar primero al lado derecho de la igualdad el número 60; sin embargo, no representa al número 120, dejándolo eliminado, enseguida, vuelve a utilizar la propiedad uniforme para pasar el 4 al lado derecho de la igualdad y por último realizar la división para obtener un resultado. Ésta es una mala matematizacion ya que dejó de lado un término de la igualdad.

$$4x = 60 \qquad x = \frac{60}{4} \qquad x = 15$$

Figura 58. Esquema de acción de eliminar un lado de la igualdad 3

Ausencia de esquema de acción. Para este caso se clasifican a los alumnos LBS1A11, LBS1A12 y ICS4A17, los cuales no manifestaron ninguna representación, por lo tanto no dieron una solución. Así, no se puede afirmar la presencia de algún esquema por parte de estos alumnos. Y dado que no solucionan la tarea se puede decir que ésta es una mala matematización.

El esquema de acción de resultado espontáneo. En esta categoría se clasifica únicamente al alumno LFS9A01 ya que es el único que manifestó este esquema de acción, que se caracteriza porque prácticamente "aparece" el resultado; es decir, este alumno representa del lado derecho de la igualdad los números que van surgiendo de aplicar los teoremas en acto necesarios para dar tratamiento a la situación propuesta, se da cuenta de la presencia de dos números -20, aplicando el teorema en acto de la propiedad uniforme los pasa del otro del lado derecho de la igualdad como 20, después, de agrupar términos semejantes mentalmente le da como resultado el $4x$ y aplicando nuevamente la propiedad uniforme pasa el 4 dividiendo y con ello da por finalizada la situación:

$$x = \frac{120 + 20 + 20}{4}$$

Figura 59. Esquema de acción de resultado espontáneo

Hay que hacer notar que este alumno no manifiesta el resultado de la ecuación como un número único, donde se puede hablar de la presencia de un concepto en acto sobre el resultado, sin embargo, se trata de una mala matematización ya que no resuelve la situación planteada.

Tabla 3. Matematización vertical $x + x - 20 + 2(x - 20) = 120$

Esquema	Adecuado	Alumnos	%
Operaciones mentales	SI	1 de biología	2.12
		1 de ingeniería	1.72
Algorítmico	SI	38 de ingeniería	65.51
		7 de matemáticas	58.33
		26 de biología	55.31
		7 de física	87.5
Triple igualdad	SI	1 de ingeniería	1.72
		1 de matemáticas	8.33
Simplificación de la expresión $(x - 20)$	NO	3 de ingeniería civil	5.17
		5 de biología	10.63
Adivinar el resultado	NO	3 de biología	6.38
		2 ingeniería civil	3.44
Dividir antes de multiplicar	NO	1 de ingeniería civil	0.17
		1 de matemáticas	8.33
Resultado espontaneo	NO	1 de física	12.5
Transformar números	NO	1 de matemáticas	8.3
		6 de ingeniería	10.34
		3 de biología	6.38
Eliminar un lado de la igualdad	NO	4 de ingeniería civil	6.89
		1 de biología	2.12
		1 de matemáticas	8.33
Realizar varios procesos	NO	2 de biología	4.25
		1 de matemáticas	8.3

mentalmente			
Ausencia de esquema	NO	2 de biología	4.25
		1 de ingeniería	1.72
Exponente cuadrático	NO	2 de biología	4.25

De 125 alumnos que realizaron la prueba 82 utilizaron un esquema que sí solucionaba la ecuación propuesta, además la mayoría de ellos 78 utilizó un esquema del tipo algorítmico como lo es el de despejar la incógnita. De este modo se puede decir que para este tipo de tarea la mayoría de los estudiantes mostró un esquema de acción adecuado para la situación. Además a manera de conclusión se puede decir que en general dentro de estas tareas de matematización vertical la mayoría de los alumnos (sin importar la carrera que se está cursando) si mostro un esquema que da tratamiento a la situación, es decir, si resolvieron las tareas.

En las tres primeras tareas que correspondían a la matematización vertical se encontraron los siguientes esquemas de acción:

- Adivinar el resultado
- Optimizar pasos
- Indicar todas las operaciones en la misma expresión
- Despejar la incógnita en términos de operaciones aritméticas
- Despejar la incógnita
- Despejar la incógnita restando inadecuadamente
- Separar el coeficiente como un número independiente de la incógnita
- Sumar el término independiente al segundo miembro
- Despejar incógnita en términos de operaciones aritméticas
- Adivinar la solución
- Aproximación numérica
- Confundir operación con fracción
- No terminar proceso
- Ausencia de esquema
- Error de aritmética
- Mala aproximación numérica

- Simplificación de la expresión $(x - 20)$
- Adivinar el resultado
- Dividir antes de multiplicar
- Resultado espontáneo
- Transformar números
- Operaciones mentales
- Eliminar un lado de la igualdad
- Realizar varios procesos mentalmente
- Triple igualdad
- Exponente cuadrático

Y dentro de ellas los conceptos en acto:

- Número
- División
- Igualdad
- Resta y Suma
- Ecuación

Así como los teoremas en acto:

Tabla 4. Teoremas en acto presentes

Teorema en acto	Significado	Propiedad matemática que da origen
Igualdad entre distintos pasos	Utilizar el signo de igualdad, como un indicativo del siguiente paso	Propiedad de tricotomía de los números reales
Diferencia entre dos números con la misma cantidad de cifras	Para restar dos números de la misma cantidad de cifras solo se restan las unidades	Suma de números reales, propiedad asociativa
Dividir el resultado obtenido entre el inverso multiplicativo	El inverso multiplicativo de a/b es el mismo	Existencia de inverso multiplicativo para $\mathbb{R}/\{0\}$
Restar el término independiente del primer miembro al segundo	Cuando se trata de números se puede restar mentalmente para despejar la incógnita	Existencia de inverso aditivo de los números reales
Inverso multiplicativo de los números reales	Todo numero menos el cero tiene otro por el cual cuando se multiplica da 1	Existencia de inverso multiplicativo para $\mathbb{R}/\{0\}$
Transformar el número racional 3/5 por 0.60	Para trabajar con decimales se divide el numerador entre el denominador	Equivalencia entre números racionales y números decimales
Aproximar el 3/5	Estimar a que es igual un numero racional	Equivalencia entre números racionales y números decimales
$x - a = -ax$ donde a es natural	$x - a = -ax$	El orden de los sumandos no altera la suma
Multiplicación algebraica	Todos contra todos	Propiedad distributiva de los números reales
Propiedad uniforme	Establece que si a dos	Propiedad de: tricotomía,

	miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide por la misma cantidad, la igualdad se conserva	existencia de inverso aditivo, inverso multiplicativo, propiedad distributiva y asociativa.
Juntar términos semejantes, propiedad asociativa	Si dos términos tienen misma base y mismo exponente son semejantes se pueden sumar	Propiedad asociativa de los números reales
Igualar números a "nada"	Manifestar la ejecución de operaciones y terminar solo con un signo $=$	Propiedad de tricotomía de los números reales
Multiplicación de polinomios	Para multiplicar polinomios se multiplican el primer término del primer polinomio contra todos los del segundo y así sucesivamente hasta acabar	Propiedad distributiva, producto
Propiedad distributiva	Se multiplican todos contra todos	Propiedad distributiva de los números reales
$2 * x = x^2$	$a * x = x^a, a \in \mathbb{Z}$	Leyes de los exponentes

Aunque existe una cantidad numerosa de esquemas en ambos procesos de matematización, es imperativo observar que para el caso de matematización vertical la mayoría de los estudiantes optó por usar un esquema del tipo algorítmico y la mayoría de ellos sí completó las tareas de manera satisfactoria. Cabe mencionar que había tres niveles de tareas en las cuales en la más básica casi el total de los alumnos puedo resolverla, en la segunda tarea hubo menos esquemas eficaces y en la más elaborada hubo más alumnos que no logro una buena matematización.

Capítulo 5. Los esquemas de acción de los estudiantes en el proceso de matematización horizontal

Recordemos que la matematización horizontal es la acción mediante la que los alumnos generalizan las herramientas matemáticas que le ayudan a organizar y a solucionar una situación problemática. Identificar o describir la matemática específica que es relevante dentro de un contexto general, esquematizar, formular y visualizar un problema de diversas maneras, descubrir relaciones y regularidades, reconocer un aspecto isomorfo en diversos problemas son ejemplos de actividades de matematización horizontal (Mejía, 2012).

Por esta razón se dice que la matematización horizontal consiste en tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción, en este sentido, en la segunda actividad de la propuesta, se pide una acción de este tipo, en la que los estudiantes encontrarían la situación que se pudiera resolver utilizando la ecuación propuesta en cada caso, a partir de un contexto relacionado con su área de estudio o con la vida real. Es preciso aclarar que generalmente estas matematizaciones van de la "historia" matemática al modelo pero en este caso se hará a la inversa debido al objeto matemático que se quiere estudiar, de este modo se garantiza que los esquemas que aparezcan de este modo corresponden a las ecuaciones lineales de una incógnita En lo que sigue se describen los principales esquemas de acción que aparecieron en la aplicación de esta tarea.

5.1.1 Primera tarea "Plantea un problema que se pueda resolver utilizando la ecuación en cada caso $17 + 2x = 31$"

En esta tarea se encontraron básicamente 10 esquemas de los cuales 6 son buenas matematizaciones y 4 no lo son, a continuación se describen todos ellos.

El esquema de acción de encontrar edades. En esta tarea se clasifican a 12 estudiantes[16] y se tomarán como base para el análisis de este esquema a los alumnos LBS1A47 y LBS1A38.

[16] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

En el primer paso de su esquema de acción este grupo de alumnos eligió plantear un problema en el cual se encontraran edades de personas; es decir, se estableció una matematización horizontal entre la incógnita y la edad buscada en el problema; se establece la edad de dos personas cuya suma da como resultado el lado derecho de la igualdad de la ecuación propuesta, después de ello, como solo existe una incógnita se toma solamente la edad de una persona como desconocida y la otra está dada.

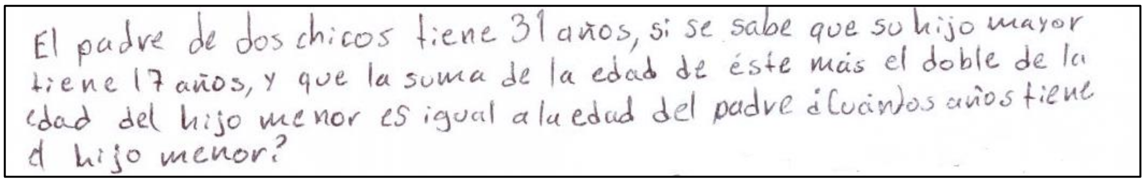

El padre de dos chicos tiene 31 años, si se sabe que su hijo mayor tiene 17 años, y que la suma de la edad de éste más el doble de la edad del hijo menor es igual a la edad del padre ¿Cuántos años tiene el hijo menor?

Figura 60. Esquema de acción de encontrar edades 1

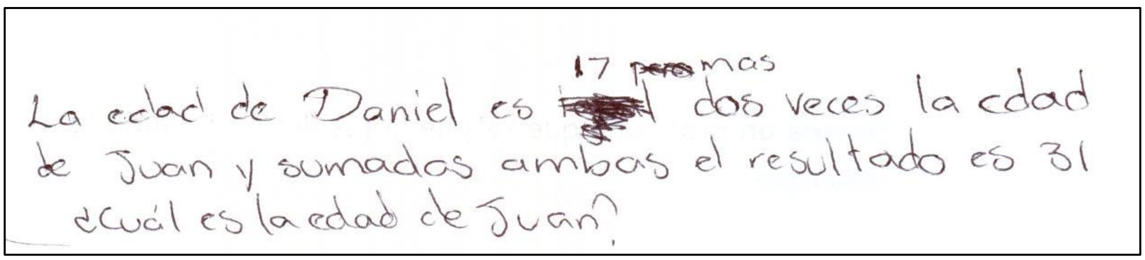
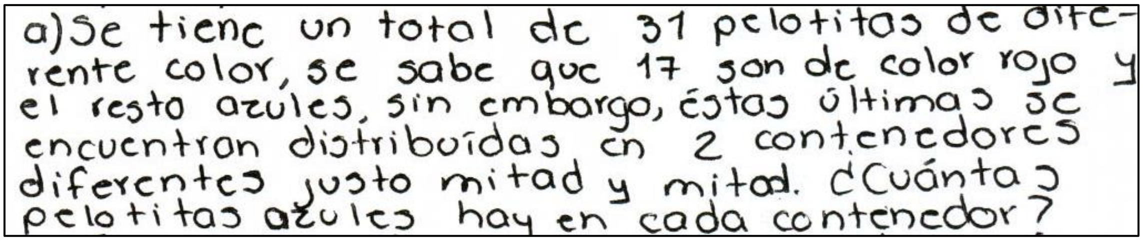

La edad de Daniel es 17 ~~pero~~ mas dos veces la edad de Juan y sumados ambos el resultado es 31 ¿Cuál es la edad de Juan?

Figura 61. Esquema de acción de encontrar edades 2

Cabe mencionar que este grupo de alumnos se dio cuenta de que la incógnita esta multiplicada por 2, la edad buscada estaría dada al doble. Ya que el enunciado de la ecuación coincide con el planteamiento verbal de la situación se trata de una buena matematización

El esquema de acción de situación con pelotitas. En este caso aparecen los alumnos LBS1A11, ICS2A07 y LBS1A22 y se analizará la representación de este último. Para esta tarea este alumno parte de establecer una relación entre encontrar el número de pelotitas de color azul y la incógnita de la ecuación propuesta. Se propone la existencia de pelotitas de color azul y rojo pero se desconoce la cantidad de bolitas azules que está repartida en dos contenedores iguales.



a)Se tiene un total de 31 pelotitas de dife-rente color, se sabe que 17 son de color rojo y el resto azules, sin embargo, éstas últimas se encuentran distribuidas en 2 contenedores diferentes justo mitad y mitad. ¿Cuántas pelotitas azules hay en cada contenedor?

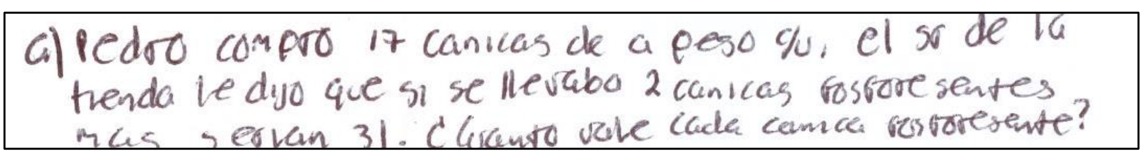
Figura 62. Esquema de acción de situación con pelotitas

De esta forma es como se establece la relación entre el enunciado de la situación y la ecuación planteada siendo ésta una buena matematización.

El esquema de acción de precios, dulces, costos o artículos. En esta categoría se clasifican a 25 estudiantes[17] y se toman como representantes a los alumnos ICS2A16, LFS9A04, LFS9A07 y ICS1A02.

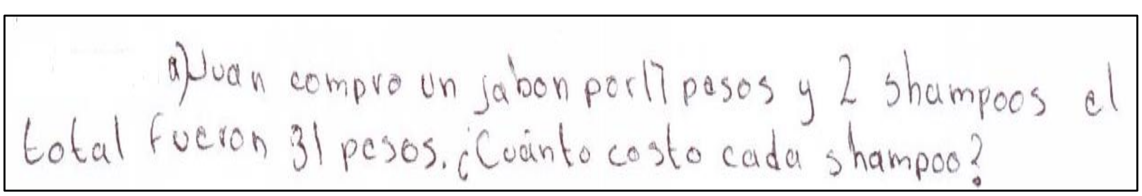
Esta categoría se distingue porque el planteamiento de la situación se realizó tomando como relación principal una incógnita que tuviera relación con una situación comercial, es decir, una matematización horizontal hacia situaciones de compra o venta de algún artículo.

En el primer paso del esquema este grupo de alumnos estableció la relación con la incógnita y la situación, como el costo o precio faltante de una situación.



a) Pedro compro 17 canicas de a peso c/u, el sr de la tienda le dijo que si se llevaba 2 canicas fosforesentes mas serian 31. ¿Cuanto vale cada canica fosforesente?

Figura 63. Esquema de acción de precios, dulces, costos o artículos 1



a) Juan compro un jabon por 17 pesos y 2 shampoos el total fueron 31 pesos. ¿Cuánto costo cada shampoo?

[17] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Figura 64. Esquema de acción de precios, dulces, costos o artículos 2

Después de ello se enuncia que el total debe ser de 31 pesos ya que es la parte del lado derecho de la igualdad de la ecuación propuesta para finalizar con duplicar el costo de la incógnita por la misma razón.

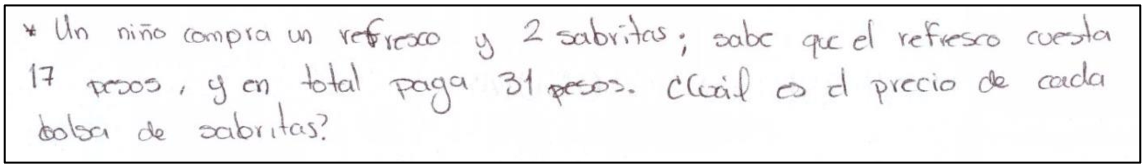

* Un niño compra un refresco y 2 sabritas; sabe que el refresco cuesta 17 pesos, y en total paga 31 pesos. ¿Cuál es el precio de cada bolsa de sabritas?

Figura 65. Esquema de acción de precios, dulces, costos o artículos 3

Para terminar con el esquema se puede decir que este grupo de alumnos únicamente se planteó la pregunta de cuestionar por la incógnita, siendo ésta una buena matematización.

El esquema de acción numérico. En este caso aparecen los alumnos LBS1A39, LBS1A08, LBS1A34, LBS1A42, LBS1A01, LBS1A25, ICS4A06 y se toma como representantes el trabajo realizado por los alumnos LMS1A01 y LBS1A23.

Este grupo de alumnos establece un vínculo entre la incógnita y un número desconocido dentro del enunciado del problema, es decir, la característica principal de este esquema de acción es la relación que se guarda entre la incógnita en la ecuación propuesta y el número no conocido en la situación. Se establece que dicho número se debe de multiplicar por dos y sumarle 17 y esto les debe de dar como resultado 31.

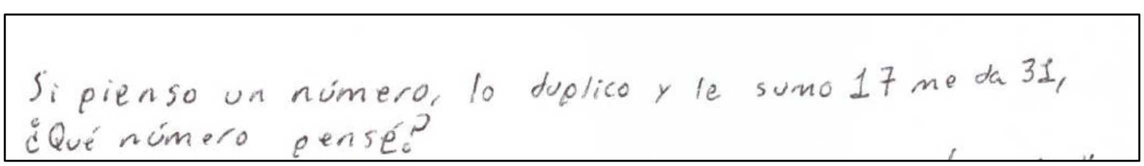

Si pienso un número, lo duplico y le sumo 17 me da 31, ¿Qué número pensé?

Figura 66. Esquema de acción numérico 1

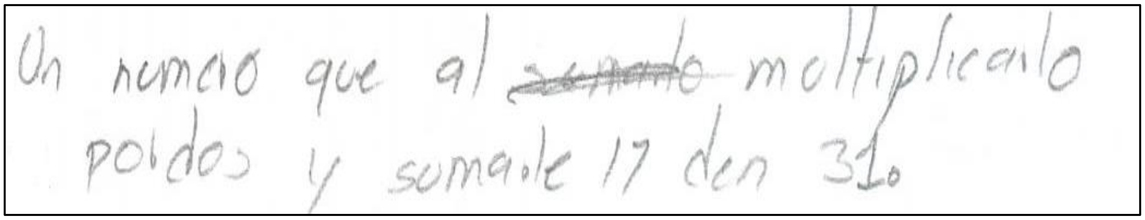

Un numero que al ~~sumado~~ multiplicarlo pordos y sumarle 17 den 31.

Figura 67. Esquema de acción numérico 2

Aunque se trate casi de una traducción literal de la ecuación propuesta este tipo de esquema es una buena matematización ya que da tratamiento a la situación propuesta.

El esquema de acción de pollos, granja o gallina. En esta categoría se clasifican a los alumnos ICS1A06, ICS1A09, ICS2A06, LBS1A40 y ICS1A13, este último se toma como representante de esta categoría.

Este esquema de acción se caracteriza por que se establece una relación entre la incógnita de la ecuación propuesta y el número de pollos desconocido del enunciado; como el lado derecho de la igualdad es 31 ese es total de pollos que debe haber, después como aparece el número 17 entonces esa cantidad de pollos debe de ser conocida en el enunciado, luego como la incógnita esta multiplicada por 2, aparece repartida de forma igual.ga

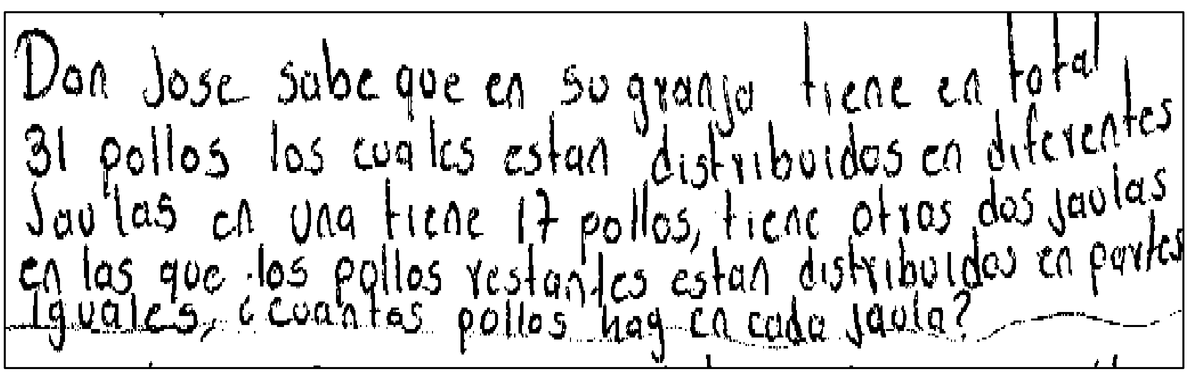

Don Jose sabe que en su granja tiene en total 31 pollos los cuales estan distribuidos en diferentes Jaulas en una tiene 17 pollos, tiene otros dos jaulas en las que los pollos restantes estan distribuidos en partes iguales, ¿cuantos pollos hay en cada jaula?

Figura 68. Esquema de acción de pollos, granja o gallina

Para finalizar con la actividad este alumno únicamente pregunta por la cantidad de pollos desconocida de la situación, cabe mencionar que este esquema de acción es una buena matematización

El esquema de acción aplicado al contexto de su formación. En este caso se clasifican a los estudiantes LMS1A02, LMS1A08, ICS2A17, ICS1A14 y se toma como representantes los trabajos realizados por los alumnos ICS4A04 y LMS1A09.

Este esquema de acción se caracteriza por que los alumnos propusieron como situación para la ecuación propuesta una relacionada con su ámbito de estudio profesional, es decir, el ingeniero civil redactó una situación que tuviera que ver con alguna obra de construcción, mientras que los matemáticos una situación relacionada con las mismas matemáticas.

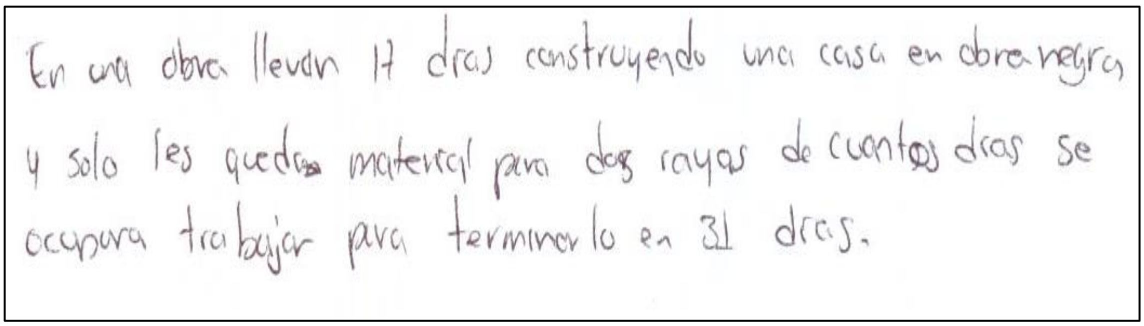

En una obra llevan 17 dias construyendo una casa en obra negra y solo les queda material para dos rayas de cuantos dias se ocupara trabajar para terminarlo en 31 dias.

Figura 69. Esquema de acción aplicado al contexto de su formación 1

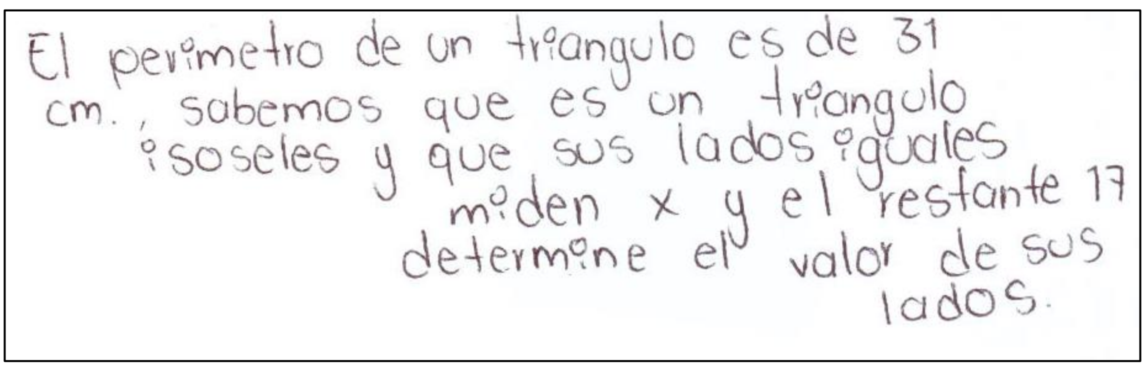

El perimetro de un triangulo es de 31 cm., sabemos que es un triangulo isoseles y que sus lados iguales miden x y el restante 17 determine el valor de sus lados.

Figura 70. Esquema de acción aplicado al contexto de su formación 2

Cabe mencionar que para el caso del primer estudiante, asigna al valor de la incógnita, rayas de trabajo para completar la obra (Figura 69), mientras que el otro estudiante relaciona la incógnita con uno de los lados de un triángulo isósceles de perímetro conocido (Figura 70). Además como este grupo de alumnos da tratamiento a la situación propuesta se puede afirmar que se trata de una buena matematización

Ausencia de esquema. Para este caso se clasifican a los alumnos LBS1A30, LBS1A41, ICS1A04, ICS4A08, ICS4A02 y LBS1A05 los cuales o no manifiestan alguna representación o no plantean ningún enunciado que resuelva la situación.

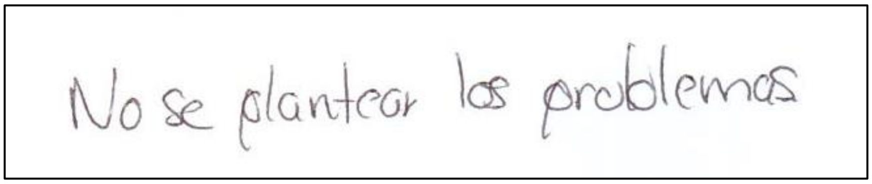

No se plantear los problemas

Figura 71. Ausencia de esquema

Como este grupo de alumnos no da tratamiento a la situación propuesta se puede decir que se trata de una mala matematización

El esquema de acción de intentos ilógicos. En este caso se clasifican a 25 estudiantes[18], y se toma como base el trabajo realizado por, ICS4A18, ICS4A12 y LBS1A14 como representantes de los demás.

Este tipo de esquema se caracteriza por el intento que hacen los estudiantes para plantear la situación a la tarea, sin tomar en cuenta la lógica que se debe de seguir para poder plantear una buena situación. Algunos simplemente asignaron sustantivos a las cantidades conocidas de la ecuación propuesta, como perros y animales para después con el término en el que aparece la incógnita simplemente preguntar cuánto vale x.

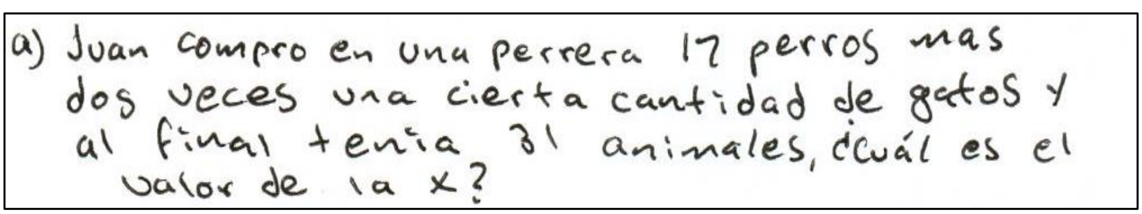
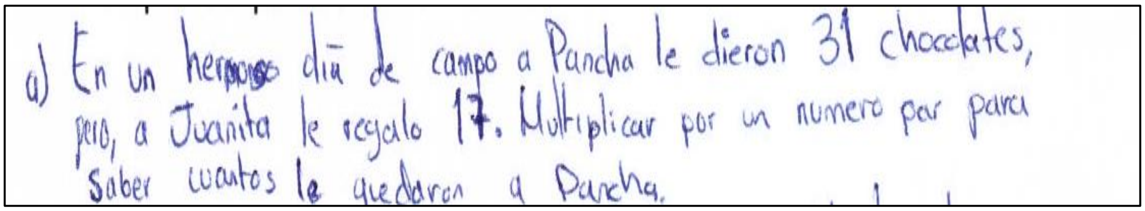

a) Juan compro en una perrera 17 perros mas dos veces una cierta cantidad de gatos y al final tenia 31 animales, ¿cuál es el valor de la x?

Figura 72. Esquema de acción de intentos ilógicos 1

[18] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Por otro lado el resto de los alumnos al igual que los anteriores, asignó sustantivos a los números conocidos de la ecuación pero a diferencia de ellos al momento de escribir lo relacionado con la incógnita, como se trata de un número desconocido, preguntaron por encontrar el número desconocido para poder llegar a la igualdad entre las cantidades propuestas.



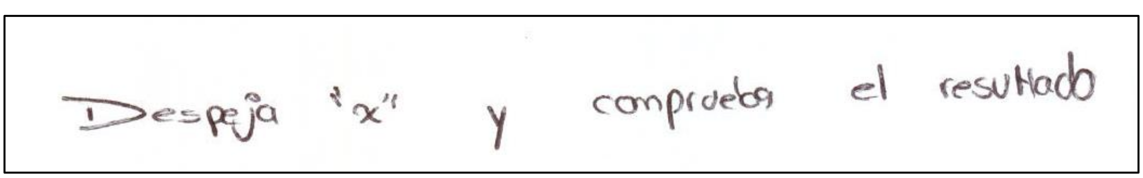
a) En un hermoso día de campo a Pancha le dieron 31 chocolates, pero, a Juanita le regalo 17. Multiplicar por un numero par para saber cuantos le quedaron a Pancha.

Figura 73. Esquema de acción de intentos ilógicos 2

Cabe mencionar que como las situaciones planteadas en todos los casos carecen de sentido lógico y con ellas es imposible llegar a la ecuación propuesta, se puede afirmar que este esquema es una mala matematización

El esquema de acción indicativo. En esta categoría se clasifican a 31 alumnos[19], y se toma como base el esquema realizado por los alumnos ICS2A01, ICS2A12 y ICS4A17.

Este tipo de esquema se caracteriza por que los alumnos proponen como situación un enunciado tipo instructivo que indica que se debe de resolver la ecuación propuesta, es decir, para los alumnos es suficiente escribir “resuelve la ecuación” o “resuelva el problema” para con ello cumplir con el cometido de formular una situación que se pueda resolver con la ecuación, sin embargo, no se percatan que esa consigna que hacen no es única y se puede aplicar a cualquier ecuación y no únicamente a la que se le está proponiendo.



Despeja "x" y comprueba el resultado

[19] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Figura 74. Esquema de acción indicativo 1

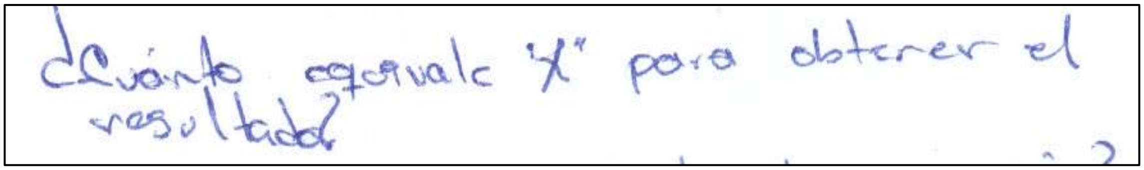


Figura 75. Esquema de acción indicativo 2

Como se da el caso de que la representación del esquema propuesto para dar tratamiento a la tarea planteada no la resuelve, se puede decir que se trata de una mala matematización horizontal

El esquema de acción de describir la solución de la ecuación en palabras. En este caso se clasifica únicamente al estudiante LBS1A44 ya que es el único que mostró este tipo de representación.

Este esquema se caracteriza porque dicho alumno describe literalmente lo que debía de hacer para solucionar la ecuación propuesta; es decir, escribe que para resolver la ecuación se debe despejar a la incógnita x

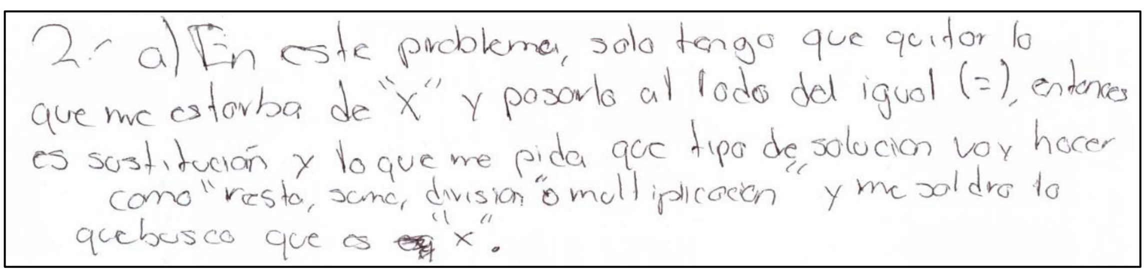


Figura 76. Esquema de acción describir la solución de la ecuación en palabras

Como este alumno no da tratamiento a la situación planteada se puede decir que se trata de una mala matematización

Tabla 5. Matematización horizontal Plantea un problema que se pueda resolver utilizando la ecuación $17 + 2x = 31$

Esquema	Adecuado	Alumnos	%
Encontrar edades	SI	2 de ingeniería civil	3.44

		1 de física	12.5
		9 de biología	19.14
Situación con pelotas	SI	2 de biología	4.25
		1 ingeniería civil	1.72
Precios, dulces, costos, artículos	SI	13 de ingeniería civil	22.41
		6 de física	75
		3 de biología	6.38
		3 de matemáticas	25
Numérico	SI	1 de matemáticas	8.3
		1 de ingeniería	1.72
		7 de biología	14.89
Pollos, granja o gallina	SI	1 de biología	2.12
		4 de ingeniería	6.89
Aplicado al contexto de su formación	SI	3 de ingeniería	5.17
		3 de matemáticas	25
Describir la solución en palabras	NO	1 de biología	2.12
Intentos ilógicos	NO	11 de ingeniería civil	18.96
		10 de biología	21.27
		1 de física	12.5
		3 de matemáticas	25
Ausencia de esquema	NO	3 de biología	6.38
		2 de ingeniería	3.44
Indicativo	NO	22 de ingeniería	37.93
		2 de matemáticas	16.66
		7 de biología	14.89

De 125 alumnos que realizaron la prueba 60 utilizaron un esquema que sí solucionaba la ecuación propuesta, además la mayoría de ellos 65 utilizó un esquema que no daba tratamiento a la situación. De este modo se puede decir que para este tipo de tarea la mayoría de los estudiantes no mostró un esquema de acción adecuado para la situación.

5.1.2 Segunda tarea "Plantea un problema que se pueda resolver utilizando la ecuación $\mathbf{11+\frac{3}{5}x=17}$"

En esta tarea se encontraron básicamente 12 esquemas de los cuales cinco son buenas matematizaciones y siete no lo son, a continuación se describen todas ellas.

El esquema de acción sobre situaciones de compra o repartición de algún artículo. En esta categoría se clasifican a 18 alumnos[20] y se toman como representantes a los alumnos LBS1A19 y LMS1A12.

Esta categoría se distingue porque el planteamiento de la situación se realizó tomando como relación principal una incógnita que tuviera correspondencia con una situación lucrativa, es decir, una matematización horizontal hacia situaciones de compra o repartición de algún artículo, principalmente se utilizaron referentes como dulces, pasteles o dinero.

En el primer paso de este esquema este grupo de alumnos estableció la relación con la incógnita y la situación como el costo, precio o artículo faltante de una situación.

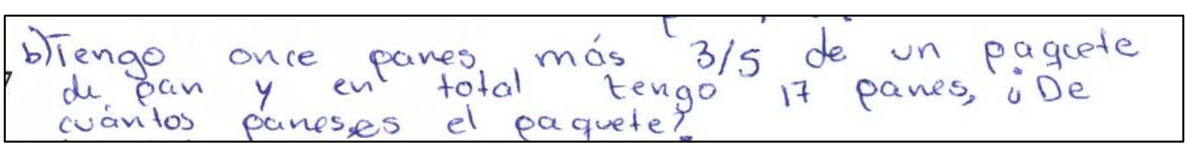
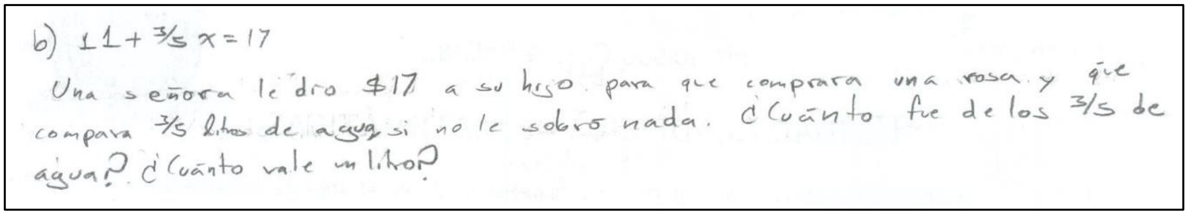

b) Tengo once panes más 3/5 de un paquete de pan y en total tengo 17 panes, ¿De cuántos panes es el paquete?

Figura 77. Repartición de un artículo

[20] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Después plantearon la concordancia con el resto del planteamiento utilizando por una parte el lado derecho de la igualdad como el total de artículos propuestos y por el otro lado como una porción conocida o fija.



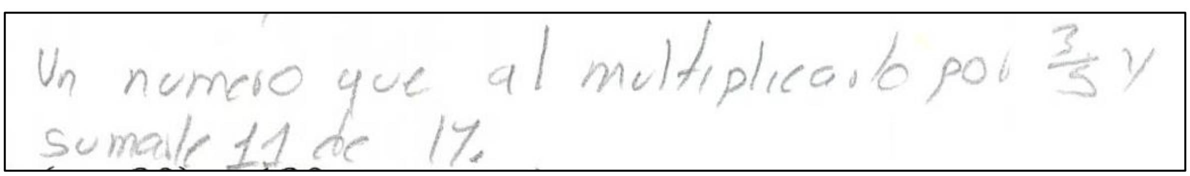
b) $11 + 3/5\, x = 17$
Una señora le dio $17 a su hijo para que comprara una rosa y que compara 3/5 litros de agua si no le sobro nada. ¿Cuánto fue de los 3/5 de agua? ¿Cuánto vale un litro?

Figura 78. Dinero

Para finalizar con el planteamiento de esta situación, este grupo de alumnos simplemente preguntó por la cantidad o costo que era desconocido; siendo ésta una buena matematización ya que da tratamiento a la actividad.

El esquema de acción numérico. En este caso aparecen once alumnos[21], y se toma como representantes el trabajo realizado por los alumnos LBS1A23 y LBS1A38.

Este grupo de estudiantes instituye una relación entre la incógnita y un número ignorado dentro del enunciado del problema; es decir, la característica principal de este esquema de acción es la correspondencia que se guarda entre la incógnita en la ecuación propuesta y el número no conocido en la situación. Se establece que dicho número se debe de multiplicar por $3/5$ y sumarle 11, esto les debe de dar como resultado 17.



Un numero que al multiplicarlo por $\frac{3}{5}$ y sumarle 11 de 17.

Figura 79. Los números

[21] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Para concluir con la actividad este grupo de alumnos únicamente pregunta por el número desconocido, cabe mencionar que se trata de una buena matematización ya que da tratamiento a la situación planteada.

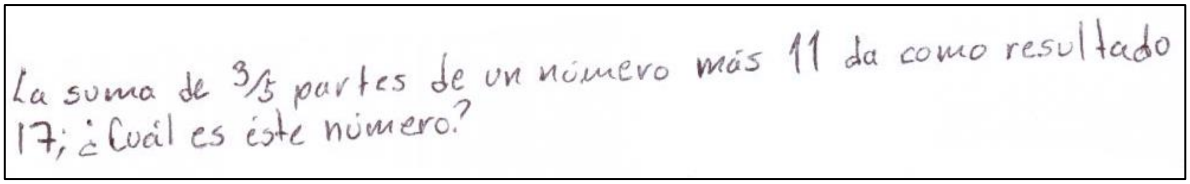

La suma de 3/5 partes de un número más 11 da como resultado 17; ¿Cuál es éste número?

Figura 80. Números 2

El esquema de acción de intentos ilógicos. En este caso se clasifican a 28 estudiantes[22], y se toma como base el trabajo realizado por, LBS1A17 y ICS2A22 como representantes de los demás.

Este tipo de esquema se determina por el intento que hacen los alumnos para plantear la situación, sin tomar en cuenta la lógica que se debe seguir. Establecen el lado derecho de la igualdad como el total de algún costo o artículo, después agregan el 11 como parte de ese total y luego describen a la fracción representada en el enunciado como una parte desconocida de ese total o del artículo:

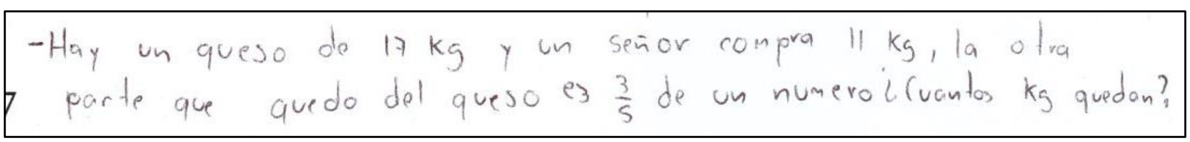

-Hay un queso de 17 kg y un señor compra 11 kg, la otra parte que quedo del queso es $\frac{3}{5}$ de un numero ¿Cuantos kg quedan?

Figura 81. Ilógico

Para concluir con este esquema, los alumnos preguntan por el costo o artículo desconocido. Sin embargo, ésta es una mala matematización ya que se trata de una situación que carece de lógica.

[22] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

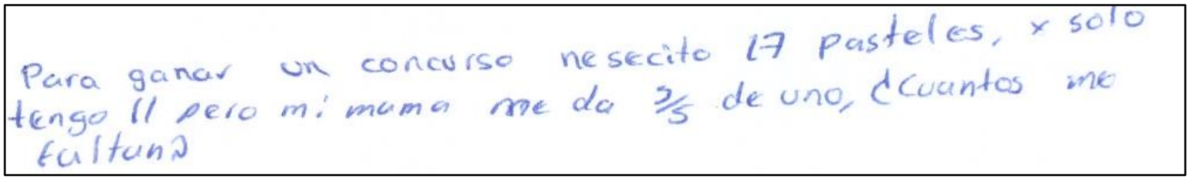

Para ganar un concurso nesecito 17 pasteles, x solo tengo 11 pero mi mama me da 2/5 de uno, ¿Cuantos me faltan?

Figura 82. Ilógico 2

El esquema de acción de describir la solución de la ecuación en palabras. En este caso se clasifica nueva y únicamente al estudiante LBS1A44 ya que es el único que mostró este tipo de representación.

Este esquema se define porque dicho alumno relata literalmente lo que debía de hacer para solucionar la ecuación; es decir, escribe que para resolver la ecuación se debe de despejar a la incógnita y cómo lo va realizando:

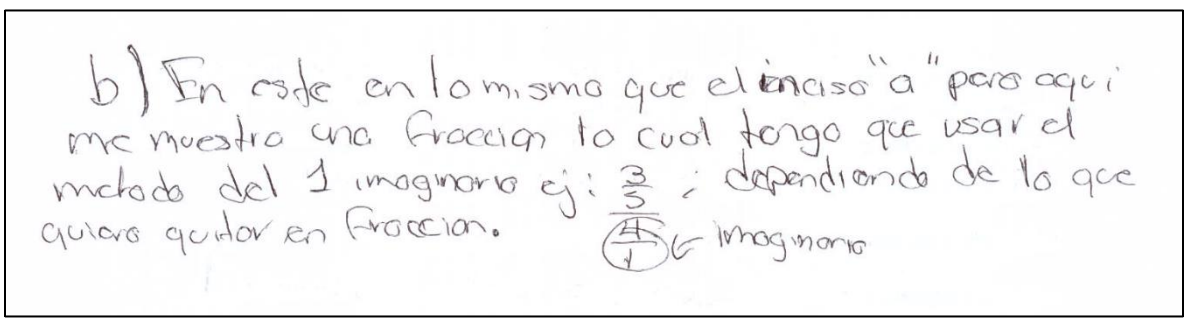

b) En este en lo mismo que el inciso "a" pero aqui me muestra una fraccion lo cual tengo que usar el metodo del 1 imaginario ej: $\frac{3}{5}$; dependiendo de lo que quiero quitar en fraccion. $\frac{4}{4}$ ← imaginario

Figura 83. Descripción

Como este alumno no plantea la situación se puede afirmar que se trata de una mala matematización.

El esquema de acción indicativo. En esta categoría se clasifican a 25 alumnos[23], y se toma como base el esquema realizado por los alumnos ICS1A07 y ICS2A13.

Este tipo de esquema se clasifica porque los estudiantes plantean como situación un enunciado tipo instructivo que indica que se debe de resolver la ecuación propuesta, es decir, para los estudiantes es suficiente escribir "calcula en fracción el resultado de x" o

[23] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

"de la ecuación dada encuentra el valor de x" para con ello cumplir con la tarea de formular una situación que se pueda resolver con la ecuación; sin embargo, no se dan cuenta que esa consigna no es única y se puede aplicar a cualquier ecuación y no únicamente a la que se le está planteando.

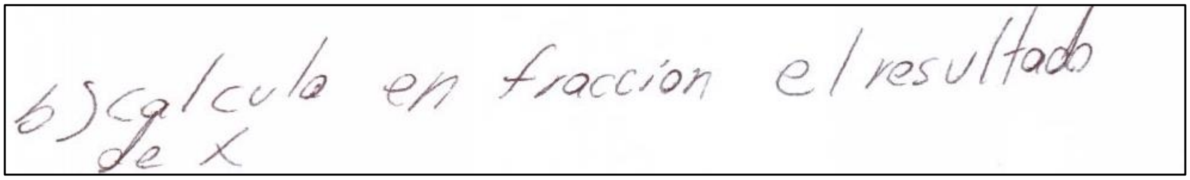


Figura 84. Indicativo

Como este grupo de alumnos no resolvió la situación propuesta se puede decir que se trata de una mala matematización.

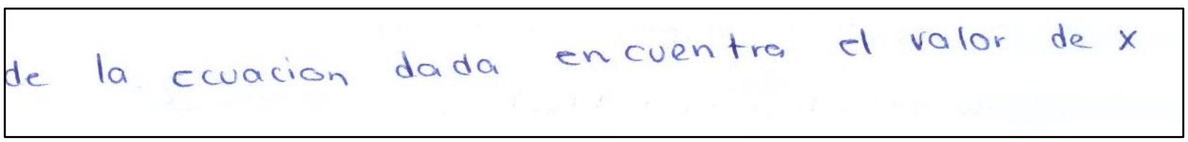


Figura 85. La ecuación

Ausencia de esquema. Para este caso se clasifican a los alumnos, ICS4A08, ICS4A10, ICS4A04, ICS1A04, ICS1A11, ICS1A05, ICS1A06, ICS1A12, ICS1A08, ICS1A10, ICS2A01, ICS2A06, ICS2A14, ICS2A02, LBS1A41, LBS1A30, LBS1A05, LBS1A21, LBS1A42, LBS1A11, LBS1A15, LBS1A04, LFS9A01 y ICS4A02 los cuales o no manifiestan alguna representación o no plantean ningún enunciado que resuelva la situación.

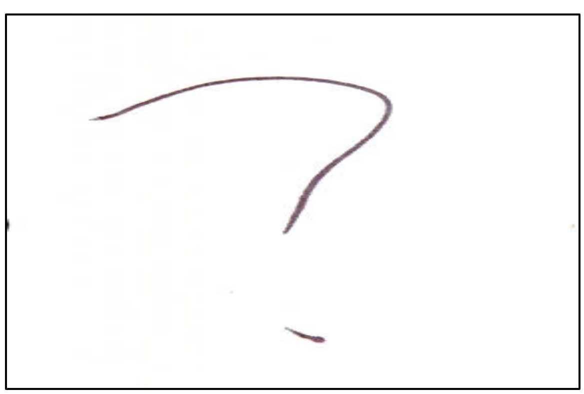


Figura 86. Interrogante

Como este grupo de alumnos no da tratamiento a la situación propuesta se puede decir que se trata de una mala matematización.

El esquema de acción aplicado al contexto de su formación. En este caso se clasifican a los estudiantes LMS1A05, ICS2A11, y se toma como representante el trabajo realizado por el alumno ICS2A17.

Este esquema de acción se determina porque el estudiante expone como situación para la ecuación dada una relacionada con su ámbito de estudio profesional; es decir, el estudiante para ingeniero civil redactó una situación que tuviera que ver con alguna obra de construcción, mientras que el matemático una relacionada con las mismas matemáticas.

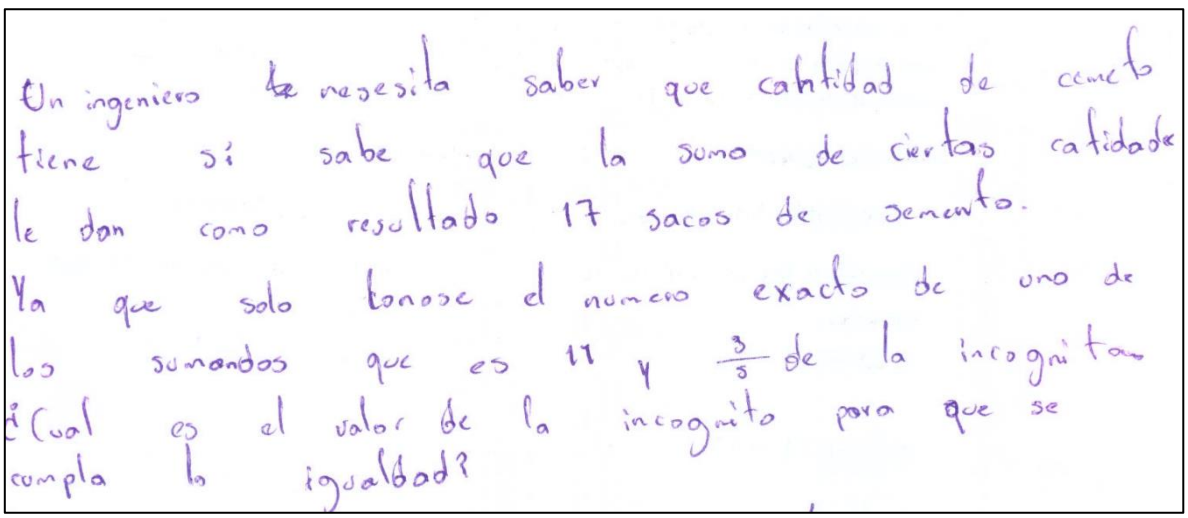

Un ingeniero ~~te~~ nesesita saber que cantidad de cemeto tiene sí sabe que la suma de ciertas catidades le dan como resultado 17 sacos de semento.
Ya que solo conose el numero exacto de uno de los sumandos que es 11 y $\frac{3}{5}$ de la incognita
¿Cual es el valor de la incognita para que se cumpla la igualdad?

Figura 87. El cemento

Como este grupo de alumnos representa una situación acorde para la ecuación propuesta se puede afirmar que se trata de una buena matematización.

El esquema de acción de encontrar edades. En esta tarea se clasifican a los estudiantes LBS1A03 y LBS1A27 y se tomará como base para el análisis de este esquema a éste último.

Este par de alumnos eligió plantear una situación en la cual se encontraran edades de personas; es decir, se estableció una relación entre la incógnita y la edad buscada en la situación; se instituye la edad de dos personas cuya suma da como resultado el lado derecho de la igualdad de la ecuación propuesta, después de ello, como solo existe una incógnita se toma solamente la edad de una persona como desconocida y la otra está dada:

b) Si yo tengo 11 años más la suma de los años de mi hermano que son $\frac{3}{5}\underline{x}$ y el resultado al sumar los dos es de 17 cuantos años tiene mi hermano?

Figura 88. La edad

Sin embargo estos alumnos no se percatan de que están mezclando cantidades conocidas (años) con cantidades matemáticas ($\frac{3}{5}x$) lo que resulta en una situación que carece de lógica, por esa razón este esquema es una mala matematización horizontal.

El esquema de acción de grupos de personas. En este caso se clasifican a los estudiantes ICS4A05, ICS4A15, ICS2A15, LMS1A11, LBS1A28, y se toma como representante el trabajo realizado por el alumno LMS1A04.

En este esquema de acción este grupo de estudiantes estableció la relación entre la ecuación dada y la cantidad de personas en un grupo, tomando como base establecer la cantidad desconocida de hombres y como conocida la cantidad de mujeres.

b) Existe un grupo de 17 personas, 3/5 son hombres x 17 son mujeres ¿Cuántos hombres son en total?
~~si el~~ ~~total~~

Figura 89. El género

Como el total de personas ya está dado solo era necesario preguntar pues por la cantidad de hombres para finalizar con la situación; se trata de una buena matematización aunque hayan dado información extra.

El esquema de acción de las ovejas. En esta tarea se clasifican a los estudiantes ICS2A19, LBS1A47 y LBS1A37 y se tomarán como base para el análisis de este esquema a éste último.

Este grupo de estudiantes utilizó el total de la ecuación como el total de ovejas que había en una granja o en cierto lugar, después dejando de lado la ecuación propuesta hace un planteamiento de alguna enfermedad con una tendencia numérica (Figura 90).

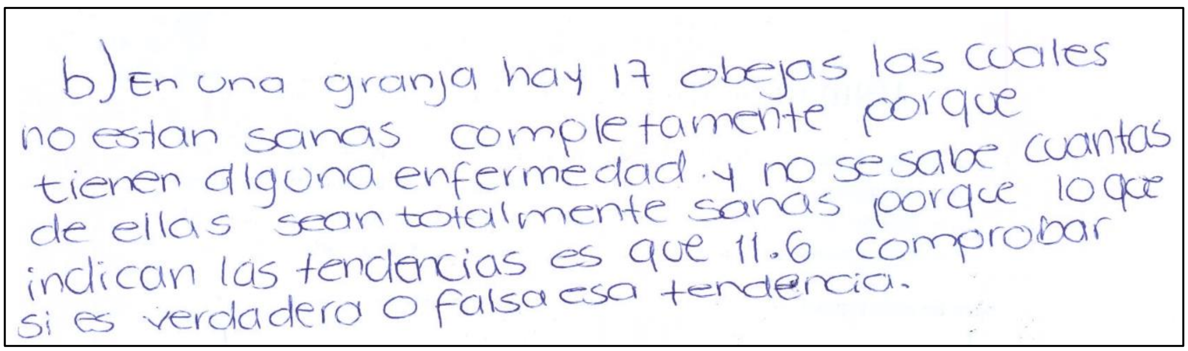

b) En una granja hay 17 obejas las cuales no estan sanas completamente porque tienen alguna enfermedad. y no se sabe cuantas de ellas sean totalmente sanas porque lo que indican las tendencias es que 11.6 comprobar si es verdadero o falsa esa tendencia.

Figura 90. La granja

Cabe mencionar que lo único que tomó de la ecuación este alumno fue el lado derecho de la igualdad dejando de lado todo lo demás, por esa razón se trata de una mala matematización.

El esquema de acción de la distancia. En este caso se clasifican a los estudiantes LBS1A6, LBSA26, y se toma como representante el trabajo realizado por el alumno LBS1A16.

Este tipo de esquema se clasifica porque los alumnos plantean una situación que tiene que ver con la distancia hacia algún lugar, se toma como el total de la distancia el lado derecho de la igualdad, después se da como conocido el término independiente de la ecuación.

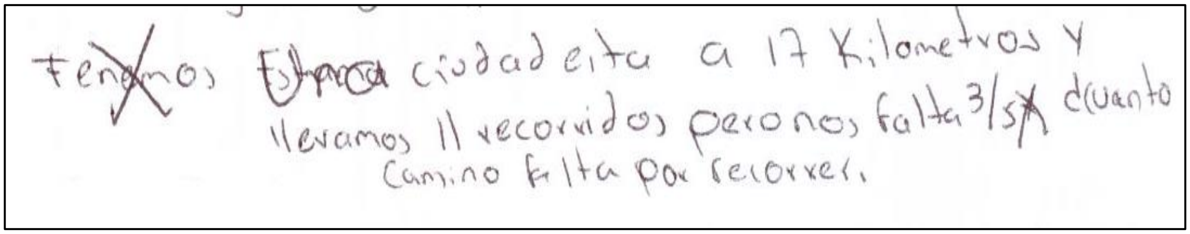

~~Tenemos~~ ~~Esta~~ ciudad esta a 17 Kilometros y llevamos 11 recorridos pero nos falta 3/5~~x~~ cuanto camino falta por recorrer.

Figura 91. La distancia

Sin embargo, este grupo de alumnos no se dan cuenta de que para hacer una buena matematización es necesario mencionar que falta $3/5$ del camino y no de x como lo proponen, por ello, se trata de una mala matematización.

El esquema de acción del agua. En esta tarea se clasifican a los estudiantes LMS1A03, LBS1A32 y ICS4A11 y se tomarán como base para el análisis de este esquema a éste último.

Este grupo de alumnos representó un esquema que se relaciona con cantidades de agua en dos recipientes, uno conocido con 11 litros de capacidad y otro desconocido (estableciendo con esto la relación entre su enunciado y la incógnita de la ecuación dada) con $3/5$ de la capacidad.

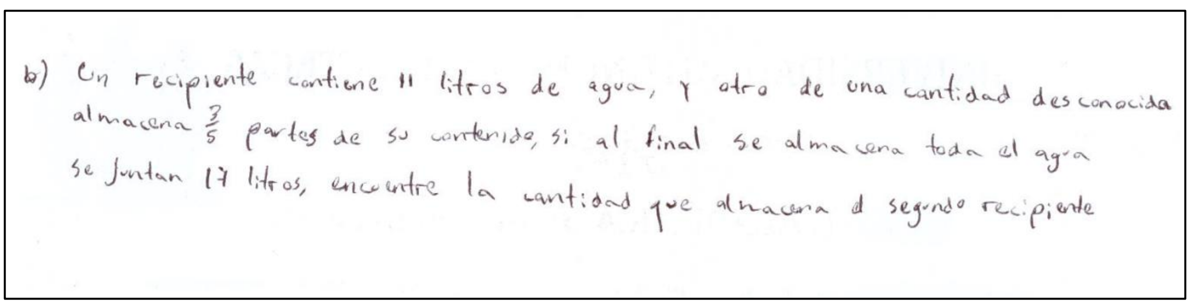

b) Un recipiente contiene 11 litros de agua, y otro de una cantidad desconocida almacena $\frac{3}{5}$ partes de su contenido, si al final se almacena toda el agua se juntan 17 litros, encuentre la cantidad que almacena el segundo recipiente

Figura 92. El agua

Para finalizar con esta actividad este alumno pregunta por la cantidad de agua desconocida en el otro recipiente, siendo ésta una buena matematización.

Tabla 6. Matematización horizontal Plantea un problema que se pueda resolver utilizando la ecuación $11+\frac{3}{5}\mathrm{x}=17$

Esquema	Adecuado	Alumnos	%
Grupos de personas	SI	3 de ingeniería civil	5.17
		2 de matemáticas	16.6
		1 de biología	2.12
Aplicado al contexto de su formación	SI	2 de ingeniería	3.44
		1 de matemáticas	8.33
Agua	SI	1 de matemáticas	8.3
		1 de ingeniería	1.72
		1 de biología	2.12
Dulces, pasteles o dinero	SI	6 de ingeniería civil	10.34
		5 de física	62.5
		4 de biología	8.51
		3 de matemáticas	25
Numérico	SI	9 de biología	19.14
		2 de ingeniería	3.44
Las ovejas	NO	2 de biología	4.25
		1 ingeniería civil	1.72
Describir la solución en palabras	NO	1 de biología	2.12
Intentos ilógicos	NO	14 de ingeniería civil	24.13
		10 de biología	21.27
		1 de física	12.5
		3 de matemáticas	25
Ausencia de esquema	NO	8 de biología	17.02
		15 de ingeniería	25.86
		1 de física	12.5
Indicativo	NO	15 de ingeniería	25.86
		2 de matemáticas	16.66
		8 de biología	17.02
Encontrar edades	NO	2 de biología	4.25
Distancia	NO	3 de biología	6.38

De 125 alumnos que realizaron la prueba, 41 utilizaron un esquema que sí solucionaba la ecuación propuesta, pero la mayoría de ellos, 83, utilizó un esquema que no daba tratamiento a la situación. De este modo se puede decir que para este tipo de tarea la mayoría de los estudiantes no mostró un esquema de acción adecuado para la situación.

5.1.3 Tercera tarea "Plantea un problema que se pueda resolver utilizando la ecuación $\boldsymbol{x+2(x-20)+(x-20)=120}$"

En esta tarea se encontraron básicamente diez esquemas de los cuales cuatro son buenas matematizaciones y seis no lo son, a continuación se describen todos ellos.

El esquema de acción de encontrar edades. Para esta categoría se clasifican a los estudiantes ICS4A20, LMS1A01 y LMS1A08 y se tomarán como base para el análisis de este esquema a éste último.

Estos alumnos optaron por representar una situación en la cual se encontraran edades de individuos; es decir, se estableció una correspondencia entre la incógnita y la edad buscada en la situación; se establece la edad de tres personas cuya suma da como resultado el lado derecho de la igualdad de la ecuación dada, después de ello, como solo existe una incógnita, se establece la relación de una edad con el resto, una es mayor 20 años y la otra es el doble de la mayor.

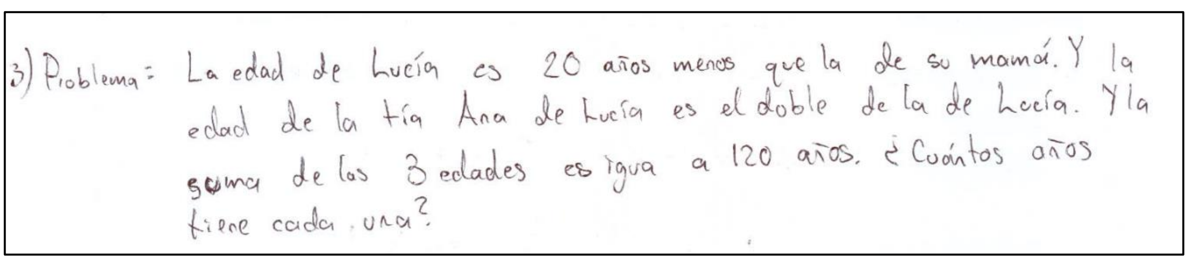

3) Problema: La edad de Lucía es 20 años menos que la de su mamá. Y la edad de la tía Ana de Lucía es el doble de la de Lucía. Y la suma de las 3 edades es igua a 120 años. ¿Cuántos años tiene cada una?

Figura 93. Las edades

Para finalizar esta actividad, este grupo de alumnos pregunta por cada una de las edades establecidas, siendo esto una buena matematización.

El esquema de acción del agua. En esta tarea se clasifican a los estudiantes LBS1A07, y ICS4A11 que se tomará como representante de la clase.

Este par de estudiantes manifestó un esquema que se relaciona con cantidades de agua en un recipiente, cuya capacidad es desconocida, pero se establece que se llenó una vez y se volvió a vaciar después, se llenó 3 veces con 20 litros menos de su capacidad y las tres veces se volvió a vaciar.

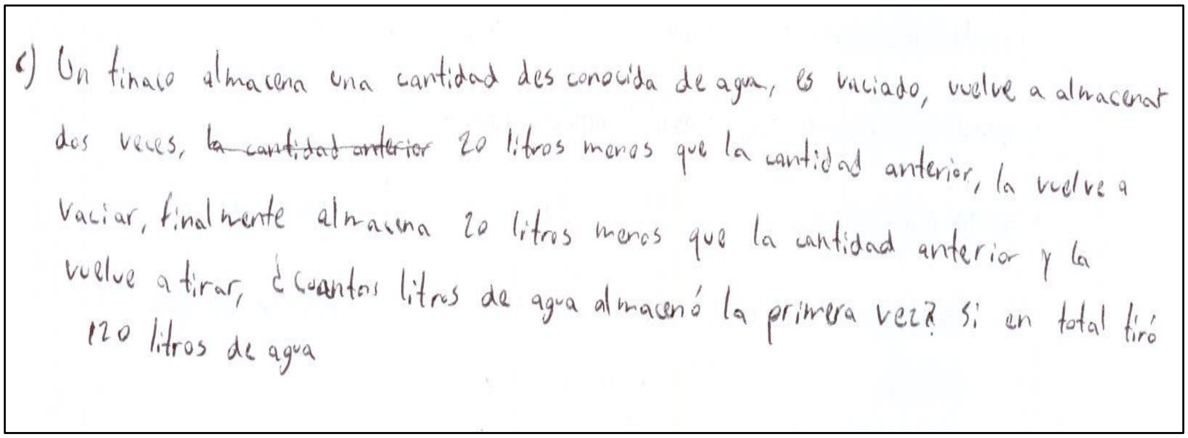

c) Un tinaco almacena una cantidad desconocida de agua, es vaciado, vuelve a almacenar dos veces, ~~la cantidad anterior~~ 20 litros menos que la cantidad anterior, la vuelve a vaciar, finalmente almacena 20 litros menos que la cantidad anterior y la vuelve a tirar, ¿Cuantos litros de agua almacenó la primera vez? si en total tiró 120 litros de agua

Figura 94. El tinaco

Finalmente se establece que la cantidad de agua que se tiró es igual al lado derecho de la igualdad (120) y se pregunta por la capacidad del recipiente, siendo ésta una buena matematización.

Ausencia de esquema. Para este caso se clasifican a los alumnos, ICS1A09, ICS1A10, ICS1A08, ICS1A12, ICS1A11, ICS1A05, ICS1A06, LBS1A45, LBS1A26, LBS1A11, LBS1A15, LBS1A41, LBS1A30, LBS1A05, LBS1A21, LBS1A28, LBS1A31, LBS1A29, LBS1A20, LBS1A34, LMS1A07, LMS1A12, ICS2A05, ICS2A02, ICS2A01, ICS2A06, ICS2A23, ICS2A12, ICS4A08, ICS4A02, ICS4A18, LFS9A01 y ICS1A04 los cuales no representaron ningún esquema que diera tratamiento a la situación dada.

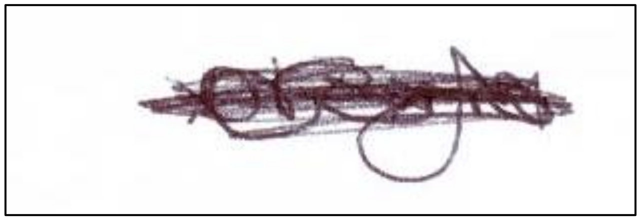


Figura 95. Borrón

De esta manera se puede afirmar que se trata de una mala matematización.

El esquema de acción aplicado al contexto de su formación. En este caso se clasifican a los estudiantes, LMS1A10, LMS1A02, LMS1A06 y se toma como representante el trabajo realizado por el alumno LMS1A09.

Esta clasificación se caracteriza porque el estudiante exhibe como situación para la ecuación propuesta una relacionada con su ámbito de estudio profesional; es decir, estos estudiantes de la licenciatura en matemáticas proponen un enunciado en el cual se involucran a las matemáticas mismas como lo es el perímetro de alguna figura geométrica.

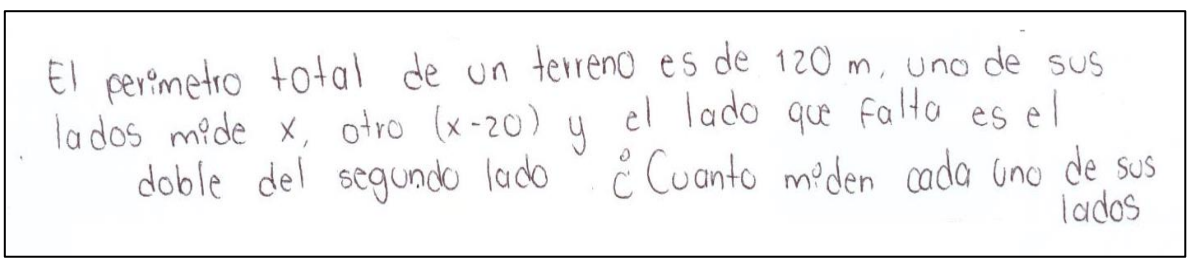

El perímetro total de un terreno es de 120 m, uno de sus lados mide x, otro (x-20) y el lado que falta es el doble del segundo lado ¿Cuanto miden cada uno de sus lados

Figura 96. El terreno

Una vez establecida la relación entre la ecuación y el perímetro de la figura, este estudiante pregunta por la longitud de cada uno de los lados, siendo ésta una buena matematización.

El esquema de acción de describir la solución de la ecuación en palabras. En este caso se clasifica a los alumnos ICS2A08, LBS1A13, LBS1A33, y LBS1A44 que se toma como el representante de los demás.

Este esquema se define porque los estudiantes narran el proceso a seguir para dar solución a la ecuación, es decir, escriben que para resolver la ecuación se debe de despejar a la incógnita y cómo lo va efectuando.

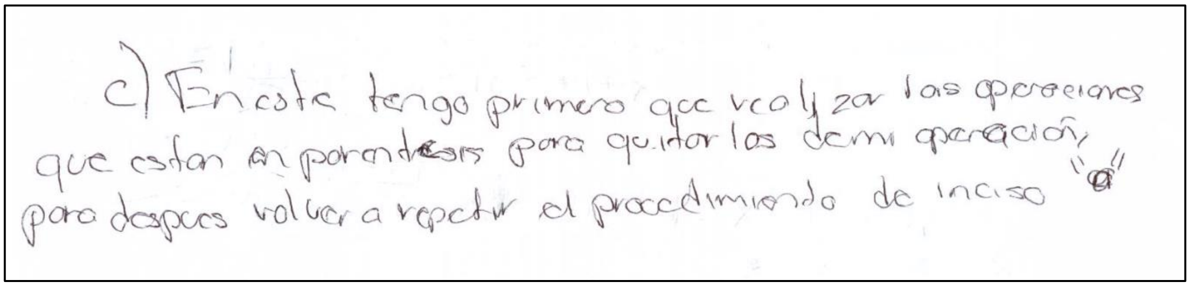

c) En este tengo primero que realizar las operaciones que estan en parentesis para quitar los demas operación, para despues volver a repetir el procedimiento de inciso "a"

Figura 97. El proceso

Cabe mencionar que se trata de una mala matematización ya que este tipo de esquema no soluciona la situación propuesta.

El esquema de acción de intentos ilógicos. En este caso se clasifican a 25 estudiantes[24], y se toma como base el trabajo realizado por ICS1A02, y LBS1A10 como representantes de los demás.

Este tipo de esquema se determina por el conato que hacen los estudiantes para diseñar la situación, sin tomar en cuenta la lógica que se debe seguir. Establecen el lado derecho de la igualdad como el total de algún artículo cualquiera y después, como aparecen tres términos en el lado derecho de la ecuación, reparten ese artículo entre tres personas y establecen la relación entre cantidades.

[24] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

c) tenemos 120 naranjas, Se reparten a 3 personas de la siguiente forma, al ~~primero~~ Juan tiene 20 menos que el ~~segun~~ Pedro y Luis tiene el doble que Juan.

Figura 98. Las naranjas

O también partieron de establecer una correlación entre ciertas edades desconocidas

si pedro tiene la edad de juan más 2 y pedro tiene

Figura 99. Las edades 2

Sin embargo, estos estudiantes no se dan cuenta de que sus planteamientos carecen de sentido lógico ya que algunos no preguntaron por la cantidad desconocida (Figura 99) y otros no terminaron el planteamiento, por esa razón se trata de una mala matematización.

El esquema de acción numérico. Para esta tarea se clasifican a los alumnos, LBS1A32, LBS1A12, LBS1A08, LBS1A46, LBS1A27, LBS1A39 y el estudiante LBS1A01 que se toma como representante de los demás.

Este tipo de esquema se caracteriza por la relación establecida entre la incógnita de la ecuación y un número desconocido en el enunciado, como en la ecuación aparecen tres términos se refiere al número, más ese mismo número menos 20, más el doble del anterior número.

Un número más el doble del número menos 20 y el mismo numero menos 20 es igual a 120.

Figura 100. Las cantidades

Cabe mencionar que aunque la relación establecida se da de una forma correcta este estudiante no representó la pregunta hacia la incógnita que en este caso era el número desconocido, por esa razón este esquema es una mala matematización ya que no da tratamiento a la situación dada.

El esquema de acción de canicas, dulces y regalos. En este caso se clasifican a 14 estudiantes[25] y como representantes de esta clasificación se toman a los alumnos LMS1A04 y LBS1A14.

En esta representación la característica que existe es que se establece la vinculación entre la incógnita con un número desconocido o de regalos, de canicas, o de dulces, que se establece como un regalo o una producción cuyo total es el lado derecho de la igualdad.

A Juanita en su compleaños le dieron muchos regalos, Pepito le dio primero un no. desconocido de regalos, luego Pepita le dio el mismo número de regalos que pepito menos 20 que se embolso multiplicado por 2 y llego la tía Lucy y le dio el mismo numero de regalos que Pepito menos 20 que se le calleron en total le dieron 120 regalos. ¿ Encontrar el no. desconocido de regalos.

Figura 101. Los regalos

Para llegar a establecer de una forma correcta la suma para llegar al lado derecho de la igualdad y como la ecuación consta de tres términos se estableció en el enunciado la suma de esas tres cantidades relacionadas entre sí según los términos de la ecuación:

c) Existe una fabrica de canicas, producen 120 al dia, al medio dia produce la primera cantidad que en la mañana menos 20 y en la tarde produce dos veces la cantidad del medio dia ¿Cuantas canicas produce en cada tiempo?

Figura 102. Las canicas

[25] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Para finalizar, este grupo de alumnos pregunta por la cantidad desconocida de producción como el tiempo establecido en horas o de regalos, y como con ello da solución a la situación propuesta se puede decir que se trata de una buena matematización.

El esquema de acción de límite de la ecuación. Para esta tarea únicamente se clasifican a los alumnos LBS1A02 y ICS1A07 y este último se toma como representante de esta tarea.

Esta representación se distingue porque los alumnos dan tratamiento a la situación únicamente escribiendo que calculen el límite de la ecuación propuesta:

bosca el limite de la ecdacion

Figura 103. El límite

Como no dan solución a la tarea, se puede decir que se trata de una mala matematización.

El esquema de acción matemáticas con matemáticas. En esta categoría se clasifican a 30 alumnos[26], y se toma como base el esquema realizado por los alumnos ICS4A13 y ICS2A11.

Este tipo de esquema se caracteriza porque los alumnos proponen como situación un enunciado en el cual utilizan la ecuación propuesta como argumento o los elementos que la conforman; es decir, plantean la situación manifestando que la ecuación ya formaba parte de la consigna original o que los términos de la misma ya estaban dados.

En una maquina la potencia de el motor esta dada por
$x + 2(x-20) + (x-20) = 120$ ~~Cuanta potencia~~ por hora
Cuanta potencia esta generando en una hora?

Figura 104. La máquina

[26] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

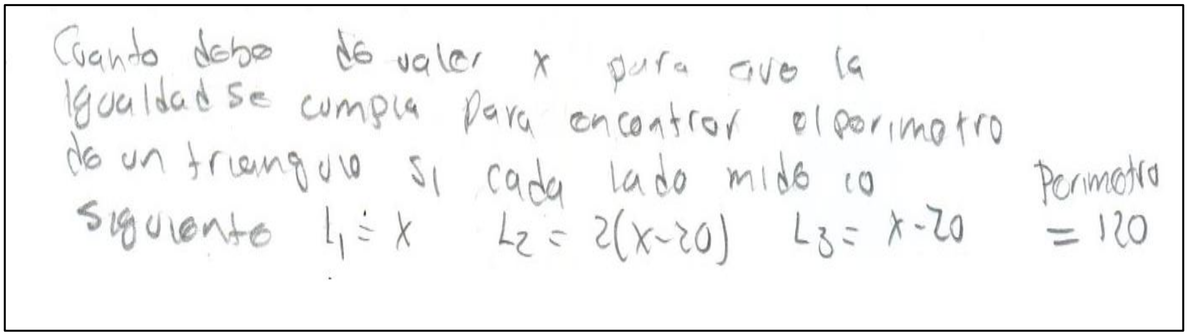

Cuanto debe de valer x para que la igualdad se cumpla para encontrar el perimetro de un triangulo si cada lado mide lo siguiente $L_1 = x$ $L_2 = 2(x-20)$ $L_3 = x-20$ Perimetro $= 120$

Figura 105. El perímetro

Sin embargo este tipo de esquema no soluciona la ecuación plantada ya que la consigna era formular una situación que se pudiera resolver utilizando la ecuación y en este caso no se da ya que se está utilizando a la misma como parte del enunciado, por esta razón es una mala matematización.

Tabla 7. Matematización horizontal Plantea un problema que se pueda resolver utilizando la ecuación $x + 2(x - 20) + (x - 20) = 120$

Esquema	Adecuado	Alumnos	%
Encontrar edades	SI	1 de ingeniería civil	1.74
		2 de matemáticas	16.66
Agua	SI	1 de biología	2.12
		1 ingeniería civil	1.72
Ausencia	NO	17 de ingeniería civil	29.31
		1 de física	12.5
		13 de biología	27.65
		2 de matemáticas	16.66
Contexto formacional	SI	4 de matemáticas	33.33
describir solución en palabras	NO	1 de ingeniería	1.72
		3de biología	6.38
Intentos ilógicos	NO	10 de biología	21.27
		13 de ingeniería	22.41
		2 de física	25

Numérico	NO	7 de biología	14.89
Canicas dulces y regalos	SI	5 de ingeniería	8.62
		3 de matemáticas	25
		4 de física	50
		2 de biología	4.25
Límite de ecuación	NO	1 de biología	2.12
		1 de ingeniería	1.72
Matemáticas con matemáticas	NO	19 de ingeniería	32.75
		1 de física	12.5
		10 de biología	21.27

De 125 alumnos que realizaron la prueba, 23 utilizaron un esquema que sí solucionaba la ecuación propuesta, además la mayoría de ellos, 101, utilizó un esquema que no daba tratamiento a la situación. De este modo se puede decir que para este tipo de tarea la mayoría de los estudiantes no mostró un esquema de acción adecuado para la situación.

5.1.4 Cuarta tarea "Ahora, de los problemas que planteaste selecciona uno y resuélvelo con el procedimiento que tú quieras."

Hay que recordar que dentro de la matematización horizontal que forma parte del proceso de matematización progresiva existe "la visón retrospectiva" es decir, que una vez completado la transformación de un problema contextual en un problema matemático y resolver este problema matemático, la solución del problema no termina ahí porque el resultado final sería un dato matemático, en otras palabras la solución de la situación se encontraría en otro contexto diferente al que surgió. Por esa razón dentro de la matematización horizontal es necesaria la interpretación del resultado en el contexto original.

Por lo anterior se planteó esta situación a los estudiantes, para el análisis de los esquemas de acción que utilizan dentro de esta forma particular de matematización horizontal.

En esta tarea se encontraron básicamente seis esquemas de los cuales dos son buenas matematizaciones y cuatro no lo son, a continuación se describen todos ellos.

El esquema de acción de volver a resolver la ecuación y dejar el resultado. Para esta categoría se clasifican a 49 estudiantes[27] y se tomarán como base para el análisis de este esquema a ICS2A11, ICS4A13 y ICS4A01.

Estos alumnos optaron por representar nuevamente la solución de la ecuación matemática, es decir para ellos resolver una situación se trata de resolver la ecuación matemática surgida y al tener el resultado de la misma, se termina con ello la situación sin la necesidad de interpretar el resultado en el contexto original.

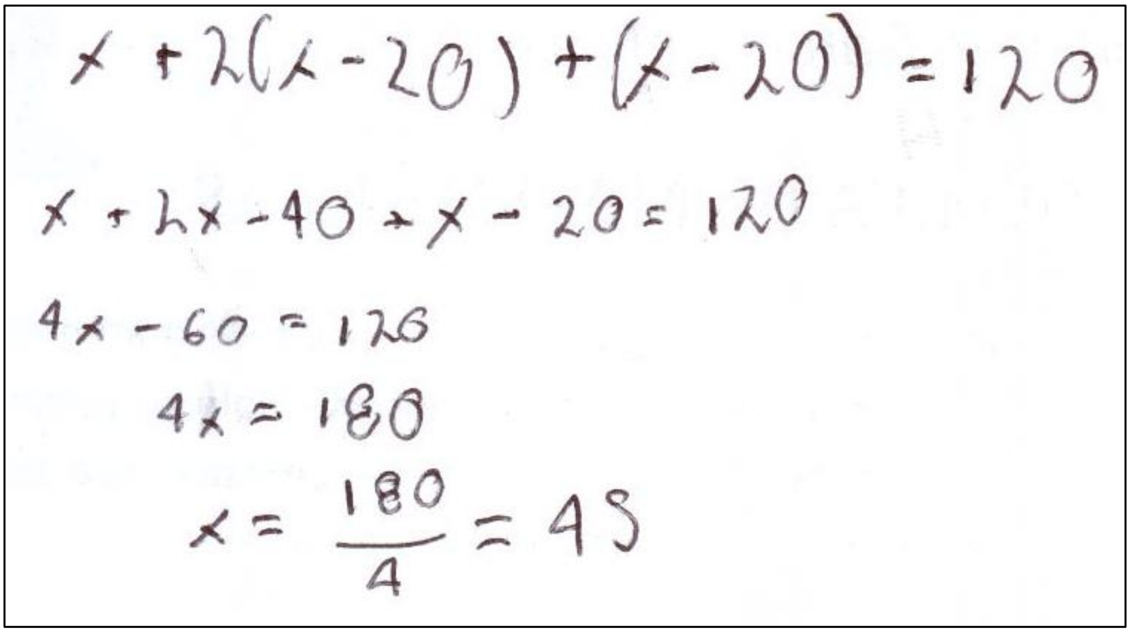


Figura 106. La solución otra vez

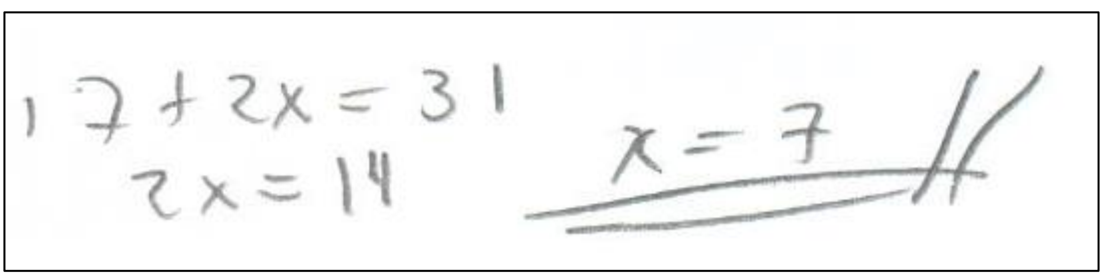


Figura 107. La solución otra vez 2

[27] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Aunque el resultado de la ecuación está dado de una forma correcta, este tipo de matematización es inadecuada para esta situación porque no cumple con el enunciado propuesto de resolver una de las situaciones que ya habían sido planteadas, por tal razón se trata de una mala matematización.

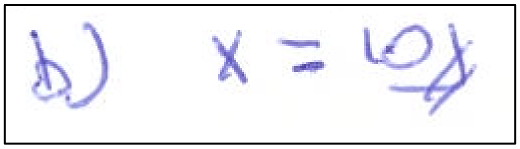


Figura 108. La solución otra vez 3

El esquema de interpretar el resultado en su contexto original. En esta categoría se clasifican a 26 alumnos[28], y se toma como base el esquema realizado por los alumnos LFS9A02, LBS1A19 y LFS9A07.

Este tipo de esquema se caracteriza porque los alumnos representan un esquema en el cual primeramente eligen uno de los problemas que plantearon en la actividad anterior y buscan su correspondiente ecuación dentro de la actividad, enseguida retoman la solución que ya tenían de la ecuación de la actividad 1 y la reescriben tal cual.

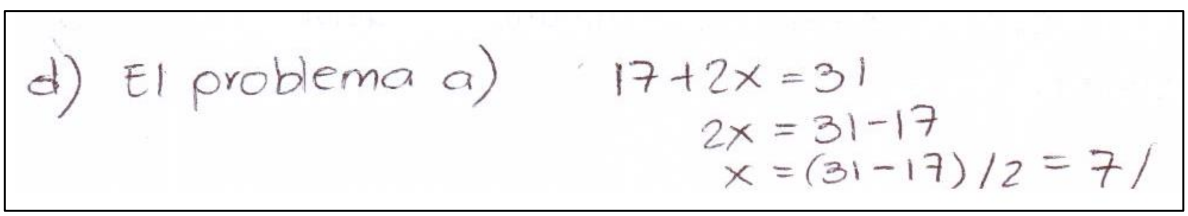


Figura 109. Reescribir

Una vez considerado el dato numérico, estos alumnos interpretan dicho dato dentro del contexto en el que había surgido expresando literalmente el significado del número expresado en su representación.

[28] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

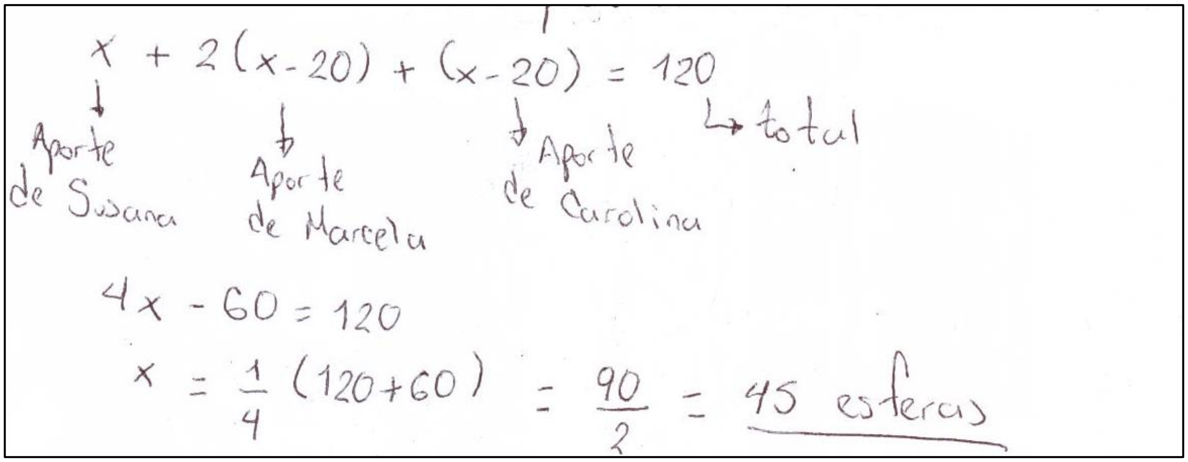


Figura 110. Reescribir 2

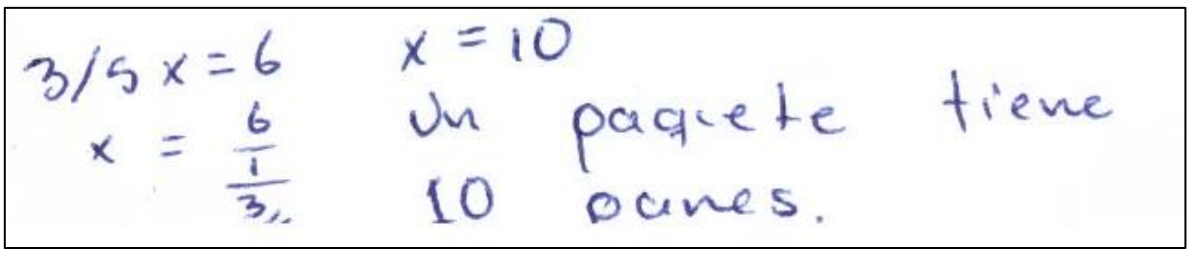


Figura 111. Reescribir 3

Como este grupo de alumnos sí concluye la actividad de interpretar la solución de la ecuación en el contexto original, se puede decir que se trata de una buena matematización.

El esquema de acción de descripción literal de que el resultado ya está. Para esta categoría se clasifica únicamente al alumno LBS1A02 ya que es el único que mostró este tipo de esquema en específico.

Este estudiante representa un esquema de acción en el cual literalmente escribe “la solución del problema del inciso a) ya está resuelta en la parte de arriba del problema 1” es decir, para este alumno era obvio que como el problema estaba planteado y había una correspondiente ecuación que ya había resuelto en la actividad anterior entonces ya no había nada que realizar en esta situación.

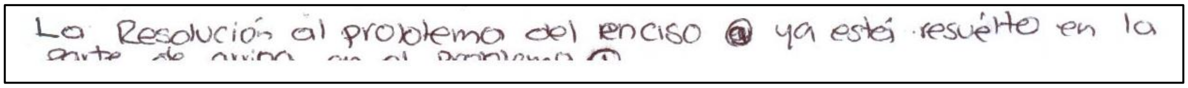
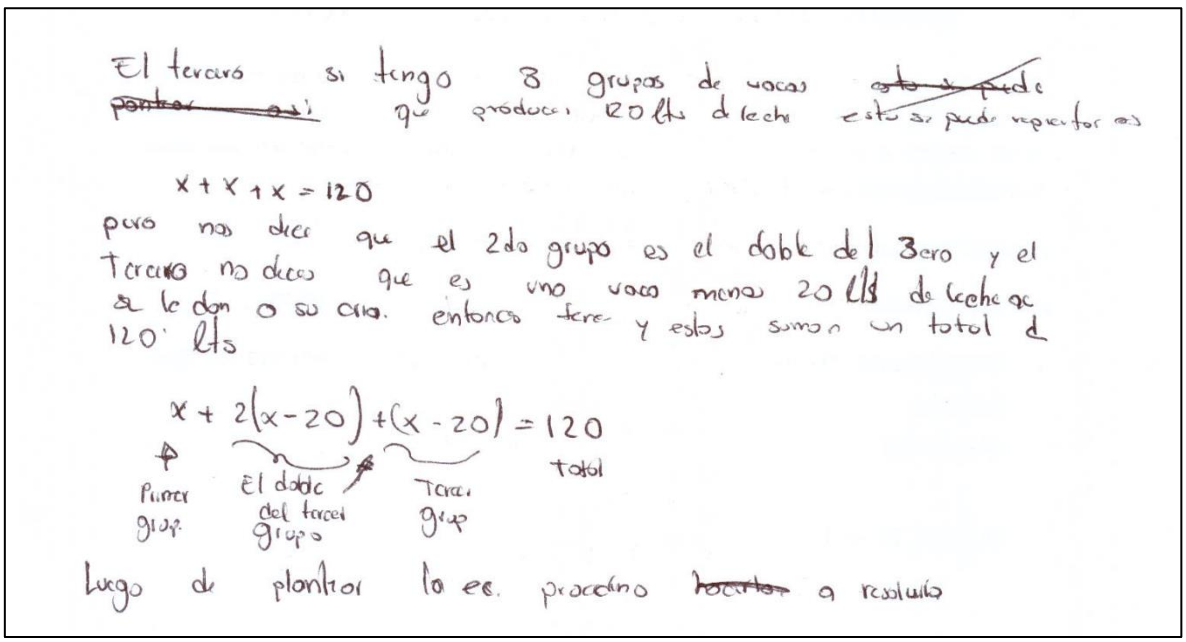

La Resolución al problema del enciso @ ya esté resuelto en la

Figura 112. Literal

Sin embargo, este estudiante no se da cuenta de que la solución de su problema no termina ahí, debe de interpretar el resultado en el contexto en el que estaba planteado, proceso que no realiza, por ello se puede decir que se trata de una mala matematización horizontal.

El esquema de acción de interpretación del resultado en su contexto original pero con comprobación. En esta categoría se clasifican a los alumnos, LBS1A40, LBS1A39 y se toma como base el esquema realizado por el alumno ICS2A19.

Este tipo de esquema se caracteriza porque el alumno retoma uno de los problemas que él mismo planteó en las situaciones anteriores, después establece el vínculo que existe entre éste y su ecuación correspondiente, y resolverla.


El tercero si tengo 8 grupos de vacas ~~esto se puede~~
~~plantear así~~ que producen 120 lts de leche esto se puede representar así

$x + x + x = 120$

pero nos dice que el 2do grupo es el doble del 3ero y el
Tercero nos dice que es uno vaco menos 20 lts de leche que
se le dan o su cría. entonces tere y estos suman un total de
120 lts

$$\underbrace{x}_{\text{Primer grupo}} + \underbrace{2(x-20)}_{\text{El doble del tercer grupo}} + \underbrace{(x-20)}_{\text{Tercer grupo}} = \underbrace{120}_{\text{total}}$$

Luego de plantear la ec. procedemos ~~hacerla~~ a resolverla

Figura 113. La comprobación

Una vez resuelta la ecuación este estudiante representa la interpretación del resultado en el contexto original de la situación y la relación que se guarda con las demás incógnitas de su problema propuesto.

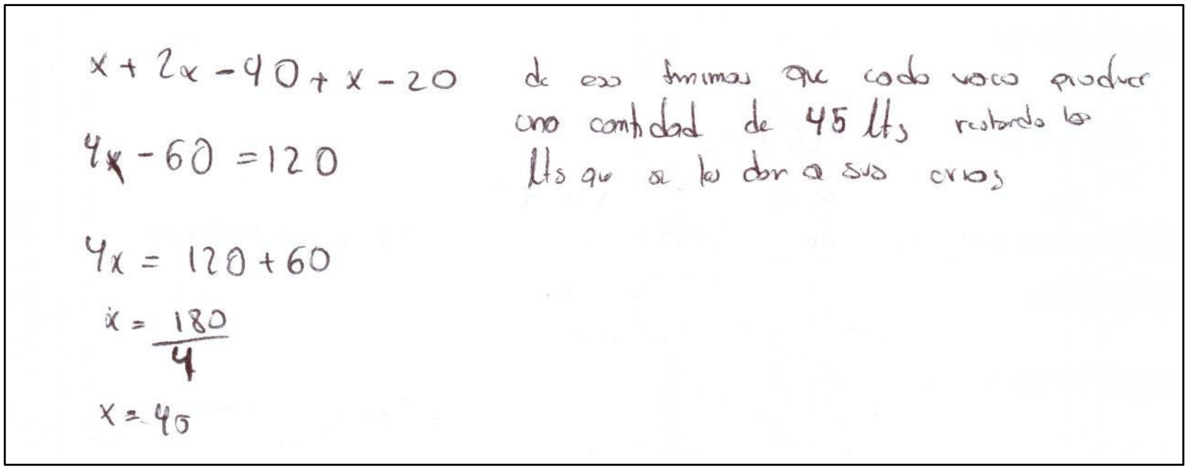


Figura 114. La comprobación 2

Aunque el tratamiento a la situación ya fue representado, este alumno en un paso más de su esquema, manifiesta una comprobación de la ecuación para así estar seguro de la preservación de la igualdad.

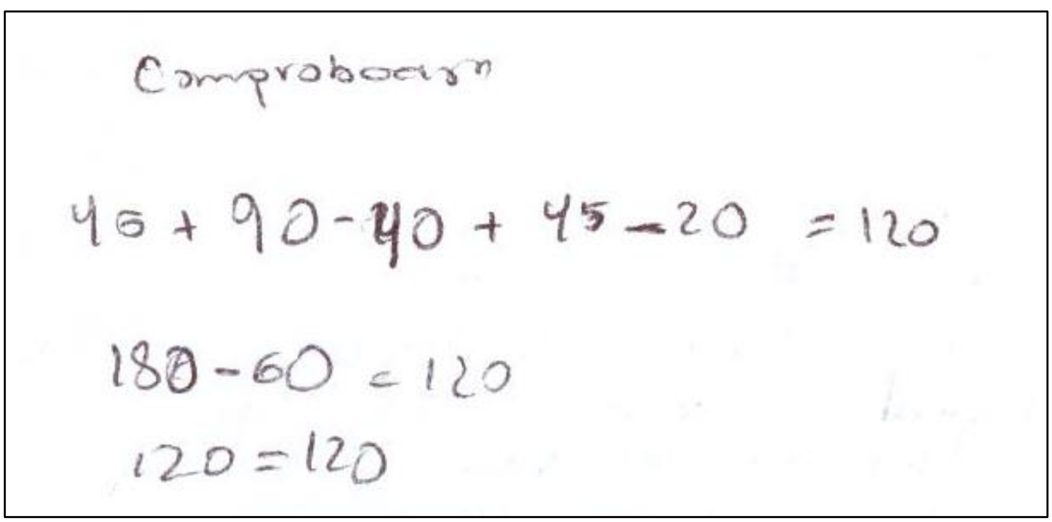


Figura 115. La comprobación 3

Como este grupo de alumnos soluciona la situación propuesta se puede decir que se trata de una buena matematización.

Ausencia de esquema. Para este caso se clasifican a los alumnos, ICS1A04, ICS1A11, ICS1A05, ICS1A14, LBS1A45, LBS1A26, LBS1A11, LBS1A41, LBS1A30, LBS1A05, LBS1A21, LBS1A31, LBS1A20, LBS1A42, LBS1A36, LBS1A09, LBS1A47, LBS1A10, LBS1A12, LBS1A07, LBS1A18, ICS2A02, ICS2A23, ICS2A07, ICS2A16, ICS2A14, ICS4A08, ICS4A02, ICS4A21, ICS4A04, ICS4A03, ICS4A14, LFS9A08, LFS9A03, LFS9A06, LFS9A05, LMS1A09 los cuales no representaron ningún esquema que diera tratamiento a la situación dada.

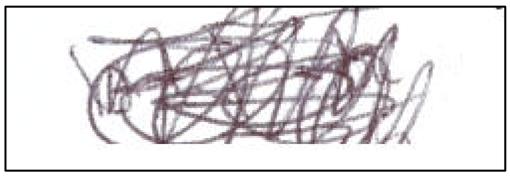
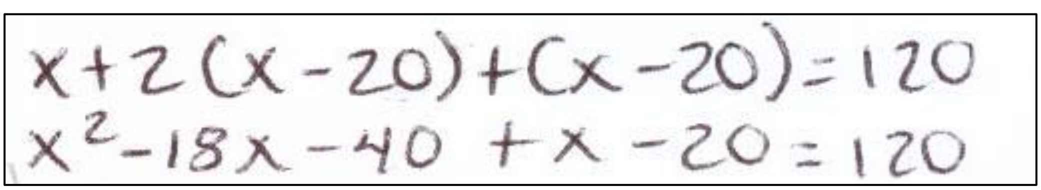


Figura 116. Rayones

De esta manera se puede afirmar que se trata de una mala matematización, ya que no dan tratamiento a la situación planteada.

El esquema de resolver la ecuación erróneamente. Para esta categoría se clasifican a nueve estudiantes[29] y se toma a ICS1A13 como representante de esta clasificación.

Este estudiante representa un esquema de acción en el cual retoma la ecuación propuesta en el inciso c) y después intenta resolverla, sin embargo no se da cuenta de que la solución ya estaba dada en el ejercicio número 1 inciso c), por esa razón la trata de volver a resolver.



[29] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Figura 117. La cuadrática

Aunque este estudiante en la actividad 1 inciso c) la resolvió de una forma correcta, en este caso no lo realizó, utilizó teoremas en acto ineficaces como "juntar términos semejantes sumando exponentes" lo cual le generó que apareciera un término al cuadrado, lo cual le llevó a querer resolverlo utilizando la fórmula general para las ecuaciones cuadráticas y después de eso no saber qué hacer con ese procedimiento. No se puede afirmar nada sobre la naturaleza de este esquema debido a la representación que se dio, pero se pudiera suponer alguna confusión del tipo teorema en acto en cuanto al ámbito matemático.

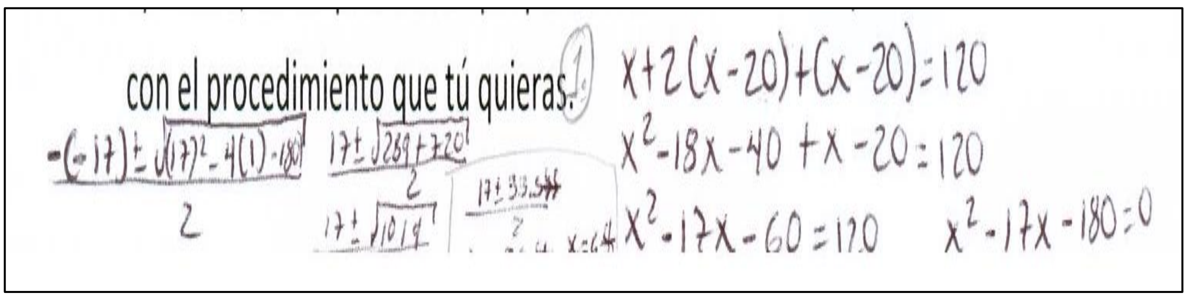


Figura 118. La cuadrática 2

Como este esquema se centra en la solución de la ecuación, que no es dada de una forma correcta y además no se interpreta el resultado en ningún contexto se puede afirmar que se trata de una mala matematización por parte de estos alumnos.

Tabla 8. Matematización horizontal "Ahora, de los problemas que planteaste selecciona uno y resuélvelo con el procedimiento que tú quieras"

Esquema	Adecuado	Alumnos	%
Resolver ecuación y dejar el resultado	NO	27 de ingeniería civil	46.55
		3 de matemáticas	25
		1 de física	12.5
		19 de biología	40.42
Interpretar el resultado en su contexto original	SI	5 de biología	10.63
		11 ingeniería civil	18.96
		3 de física	37.5

		7 de matemáticas	58.33
Ausencia	NO	15 de ingeniería civil	25.86
		4 de física	50
		17 de biología	36.17
		1 de matemáticas	8.33
Descripción literal de que el resultado ya está	NO	1 de biología	2.12
Interpretación del resultado en su contexto original pero con comprobación	SI	1 de ingeniería	1.72
		2de biología	4.25
Resolver ecuación erróneamente	NO	3 de biología	6.38
		5 de ingeniería	8.62
		1 de matemáticas	8.33

De 125 alumnos que realizaron la prueba, 29 utilizaron un esquema que sí solucionaba la ecuación propuesta, además la mayoría de ellos, 96, utilizó un esquema que no daba tratamiento a la situación. De este modo se puede decir que para este tipo de tarea la mayoría de los estudiantes no mostró un esquema de acción adecuado para la situación.

5.1.2 Quinta tarea "En su clase de matemáticas el maestro le planteó el siguiente problema a Francisco y le pidió que lo resolviera."

Hay que tener en cuenta de que podría haberse dado el caso en el que algún estudiante no hubiera tenido bien planteados los problemas de la actividad dos, o bien, mal las soluciones de las ecuaciones de la actividad uno, y al no tener éstos, no podría haber completado la actividad anterior. Por esa razón se diseñó la siguiente tarea para apoyar a este tipo de casos y poder analizar los esquemas de acción que tienen los estudiantes en este proceso de matematización horizontal.

La tarea consistía en que se le diera el problema y se les diera el planteamiento de la ecuación así como la solución de la misma y al final se les pidiera que interpretaran el resultado; es decir, que contestaran las preguntas originales de la ecuación.

Tarea 5. En su clase de matemáticas el maestro le planteó el siguiente problema a Francisco y le pidió que lo resolviera:

> *Germán gastó 120 pesos de saldo de su celular en hacer una breve llamada internacional de un minuto, enviar un mensaje de texto y responder un e-mail a una ciudad de Suiza, Germán sabe que el sms cuesta 20 pesos menos que el costo por minuto de llamada y el e-mail cuesta el doble que el sms. ¿Qué precio pagó por la llamada, el mensaje y el e-mail?*
>
> Luego Francisco lo resolvió de la siguiente forma:

$$x + x - 20 + 2(x - 20) = 120$$

$$x + x - 20 + 2x - 40 = 120$$

$$4x - 60 = 120$$

$$4x = 180$$

$$x = 45$$

Pero, a Francisco se le olvidó contestar las tres cosas que se le preguntaban en el problema, respóndelas tú por favor. Explica tu respuesta.

A continuación se describen los esquemas de acción que se encontraron en esta actividad.

En esta tarea se encontraron básicamente nueve esquemas de los cuales dos son buenas matematizaciones y siete no lo son, a continuación se describen todos ellos.

El esquema de tomar el mensaje como la mitad de la llamada. En esta categoría se clasifican a los alumnos, ICS2A22, ICS4A02 y se toma como base el esquema realizado por el alumno LBS1A25.

Este tipo de esquema se caracteriza porque este alumno representó que el costo del mensaje era igual a la mitad del costo de la llamada, afirmación que no es verdadera ya que la cantidad que era el doble era la del e-mail (el e-mail costaba el doble que el sms).

Figura 119. La mitad de la llamada

Para este alumno, con esto bastaba para afirmar que la actividad ya estaba completa aunque faltara representar el costo del e-mail. Además como la consigan decía que a Francisco se le había olvidado contestar el problema él asumió que hacía falta manifestar qué tipo de procedimiento se debió de seguir para llegar a dicho resultado por esa razón este alumno escribe que se resuelve con un sistema de ecuaciones.

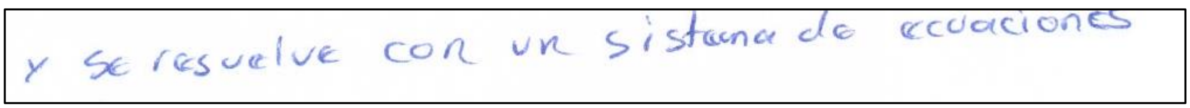


Figura 120. El sistema de solución

Como este estudiante no resuelve la tarea encomendada se puede decir que se trata de una mala matematización horizontal.

El esquema de acción incompleto. Para esta clasificación se clasifica únicamente al estudiante LBS1A15 ya que es el único que mostró dicho esquema.

Esta representación se caracteriza porque el alumno entendió la tarea que le había sido encomendada; es decir, se dio cuenta de que se le pedía encontrar el costo del mensaje, la llamada y el e-mail. Sin embargo este alumno no sabe cómo completar la tarea ya que en su representación no plasma ningún otro razonamiento.

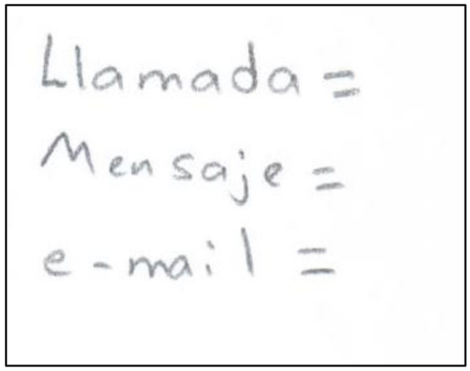


Figura 121. Las tres incógnitas

Como este estudiante no da tratamiento a la situación, se puede decir que se trata de una mala matematización.

El esquema de dejar de lado el resultado de la ecuación. En esta categoría se clasifican a 15 alumnos[30], y se toma como base el esquema realizado por el alumno LBS1A37.

Este tipo de esquema se caracteriza porque los estudiantes dejan de lado el resultado de la ecuación propuesta en el que ya se les está dando el costo de la llamada y por otro lado sacan conclusiones utilizando su propia lógica, suponen que el costo del mensaje es igual a 20, luego como el e-mail cuesta el doble que el mensaje, entonces el e-mail cuesta 40, luego como como $20 + 40 = 60$ entonces la llamada debe de costar 60 para completar el dinero que se gastó.

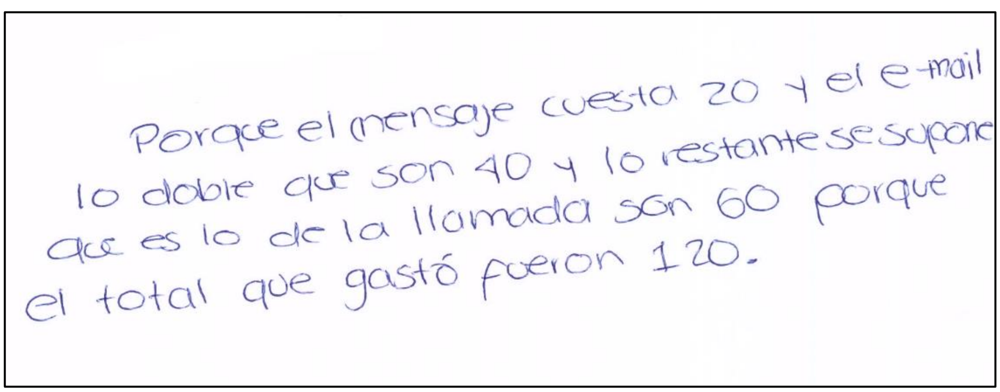


Figura 122. Solución de lado

[30] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Así, este grupo de alumnos representan los costos que se solicitaban sin darse cuenta de que su razonamiento es inadecuado, por ello esta categoría es una mala matematización. Este tipo de esquema también aparece con los alumnos de bachillerato (Mejía, 2012)

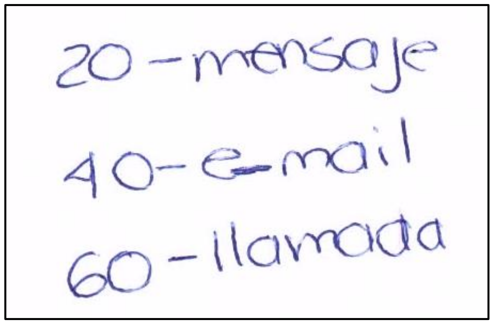


Figura 123. La respuesta

El esquema de encontrar solo una relación (la del mensaje). Para esta clasificación se clasifican a los estudiantes, ICS2A03, ICS2A05, ICS4A08 y como representante de esta categoría se toma el esquema representado por el alumno ICS2A15.

Esta representación se caracteriza porque dicho estudiante se da cuenta de que la solución de la ecuación es igual al costo de la llamada y como el mensaje cuesta 20 pesos menos que la llamada, representa que el mensaje tiene un valor de 25 pesos:

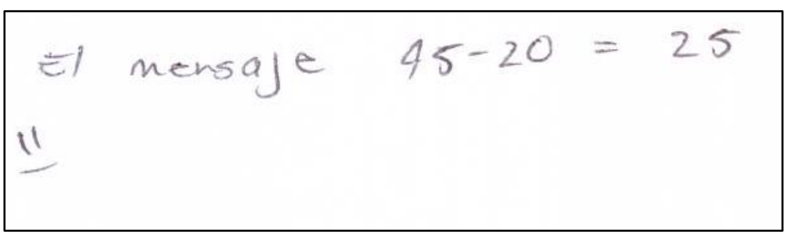


Figura 124. La carita

Sin embargo, aunque toma en cuenta dos cantidades de forma correcta, solo representa una y por lo tanto no da tratamiento a la tarea encomendada por esa razón se trata de una mala matematización.

El esquema de volver a intentar resolver la ecuación. En esta categoría se clasifican a los alumnos, LBS1A34, LBS1A01 y como base se toma el esquema realizado por el alumno ICS1A06.

Esta representación se distingue porque esta tercia de estudiantes retoman otra vez la ecuación planteada en la tarea dejando de lado la solución de la misma, y después de eso la intentan resolver; sin embargo, la aplicación de teoremas en acto[31] como el de "*multiplica términos aunque se trate de una suma*"[32] los conduce a encontrar una solución inadecuada

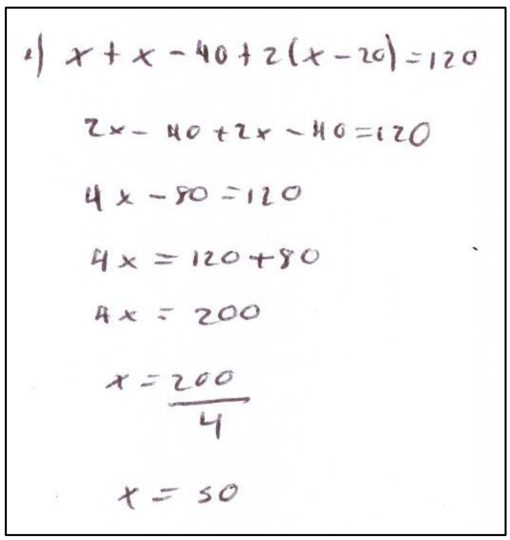


Figura 125. Volver a resolver

Obteniendo de esta manera una solución distinta a la original 50, asumiendo esta última cantidad como el costo del e-mail, de esta forma, para ellos el costo del mensaje, que es la mitad del e-mail es igual a 25.

[31] Aunque en este apartado se estén observando esquemas de matematización horizontal hay que considerar que estos alumnos emplearon matematización vertical, por ello se hace mención de los teoremas en acto que emplearon.

[32] Establece que si dos número se están sumando $(x + y)$ su resultado es igual a su multiplicación (xy)

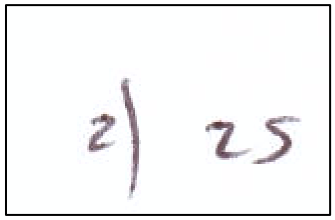


Figura 126. El 2)

Como estos estudiantes no resuelven la situación planteada, se puede afirmar que se trata de una mala matematización.

El esquema de encontrar el resultado utilizando las ecuaciones. Para este caso se clasifican a 17 estudiantes[33], y se toma como representante de este esquema el trabajo realizado por LMS1A11.

En la representación de este esquema de acción su característica principal es que sus afirmaciones se basan en los términos algebraicos que aparecen dentro de la ecuación planteada, es decir, se percatan de que el resultado es igual al costo de la llamada, y con los términos $x-20$ y $2(x-20)$ establece el costo del mensaje y el e-mail respectivamente.

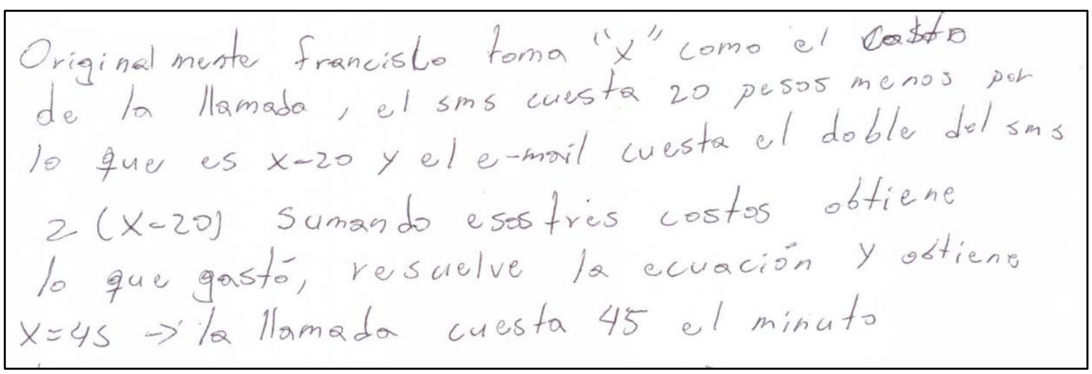

Originalmente francisco toma "x" como el costo
de la llamada, el sms cuesta 20 pesos menos por
lo que es x-20 y el e-mail cuesta el doble del sms
2(x-20) sumando esos tres costos obtiene
lo que gastó, resuelve la ecuación y obtiene
x=45 -> la llamada cuesta 45 el minuto

Figura 127. Las ecuaciones

[33] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Después, utilizando esos términos algebraicos y teniendo en cuenta de que $x = 45$ únicamente sustituyó el valor para de esa manera encontrar los costos faltantes respectivamente:

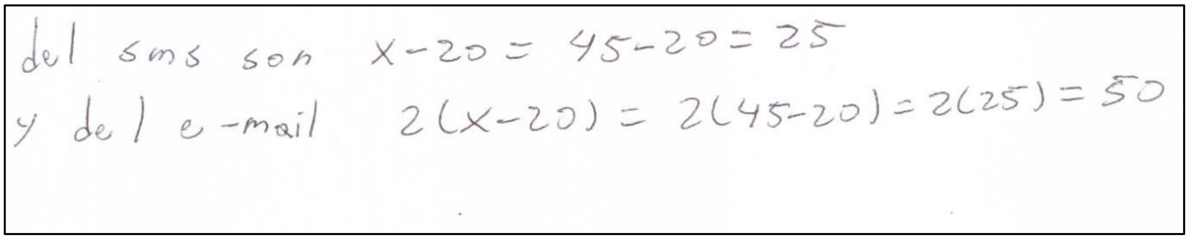


Figura 128. Las ecuaciones 2

Como este estudiante da tratamiento adecuado a la situación planteada, se puede decir que se trata de una buena matematización.

El esquema de encontrar el resultado utilizando aritmética. En esta categoría se clasifican a 63 alumnos[34], y como base se toma el esquema realizado por los alumnos LFS9A08 y LMS1A08.

Esta representación se distingue porque los resultados emitidos por este grupo de alumnos se basan en cálculos aritméticos; es decir, estos alumnos se dieron cuenta de que el resultado de la ecuación propuesta era equivalente al costo de la llamada (45), luego volviendo al enunciado de la tarea que establece que el costo del mensaje es veinte pesos menos que el costo de la llamada, mentalmente restaron 20 a 45 que es igual al costo del mensaje 25.

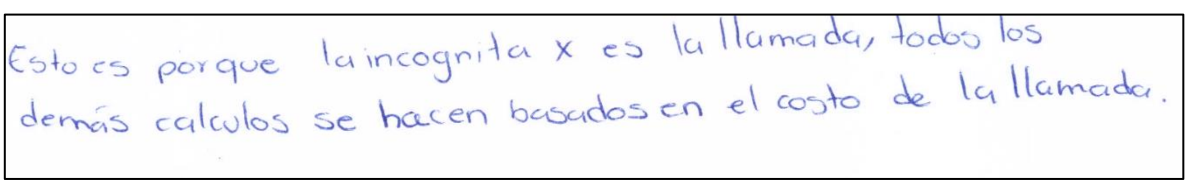


Figura 129. La aritmética

[34] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Luego como el enunciado dice que el costo del e-mail es igual al doble del costo del mensaje y el mensaje cuesta 25 por lo tanto el costo del e-mail es igual a 50.

Nuestra x resultante de la ecuación es el precio de la llamada.
Como sabemos que los sms cuestan 20 pesos menos que el costo por minuto de la llamada, concluimos que los sms(mensajes) cuestan 25pesos.
Y por último, como sabemos que e-mail cuesta lo doble de los sms tendremos que el e-mail tiene un precio de $50.

Figura 130. La aritmética 2

Para finalizar estos estudiantes plasman los costos correspondientes para cada una de las tres cantidades desconocidas del problema original, y como dan tratamiento adecuado a la situación se trata de una buena matematización.

$$\text{precio} \begin{cases} \text{llamada: } \$45 \text{ pesos} \\ \text{mensaje: } 45-20 = \$25 \text{ pesos} \\ \text{e-mail: } 25(2) = \$50 \text{ pesos} \end{cases}$$

Figura 131. Los costos

El esquema de comprobar la ecuación. Para este caso se clasifican a los estudiantes, LBS1A43, ICS2A12 y como representante de este esquema el trabajo realizado por LBS1A06.

En la representación de este esquema de acción su característica principal es que los alumnos comprueban el resultado de la ecuación propuesta; es decir, sustituyen el valor encontrado de x en la ecuación original y utilizando pasos algebraicos llegan a la comprobación de que el resultado es correcto.

$$x+x-20+2(x-20)=120$$
$$45+45-20+2(45-20)=120$$
$$90-20+2(45-20)=120$$
$$70+90-40=120$$
$$120=120$$

Figura 132. La comprobación

Sin embargo, este grupo de alumnos no se da cuenta de que esa tarea no era la encomienda por esa razón se puede afirmar que se trata de una mala matematización

El esquema de acción de establecer una relación con el gasto total. En esta categoría se clasifican a 15 alumnos[35], y se toma a LBS1A41 como representante de la clase.

En esta representación dicho alumno partió del gasto total de saldo y estableció una relación con el resto, es decir, se deja de lado el planteamiento y resultado de la ecuación dada y manifiesta que el costo de la llamada es igual a gasto total efectuado (aunque esto carezca de lógica) y de ahí utilizando el enunciado del problema establece los costos faltantes.

$$\text{llamada} = 120$$

[35] Las claves de los alumnos clasificados para esta tarea se encuentra en los anexos

Figura 133. El resultado

Como el mensaje cuesta 20 menos que la llamada y el e-mail el doble que el mensaje, entonces los costos son de 100 y 200 respectivamente; aunque con este razonamiento el costo total sería de 420 pesos.

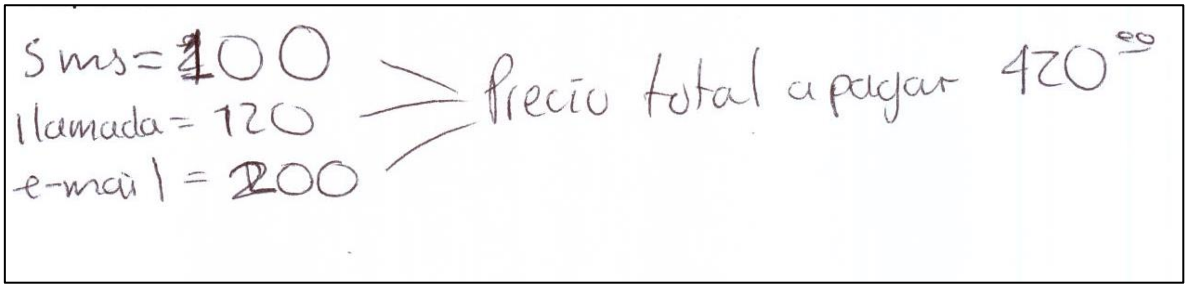


Figura 134. Pago excesivo

Como este estudiante no da tratamiento adecuado a la situación se puede afirmar que se trata de una mala matematización.

Tabla 9. Dado el problema, la ecuación y el resultado de esta, retoma el resultado de la ecuación e interprétalo en su contexto original

Esquema	Adecuado	Alumnos	%
Tomar mensaje como mitad de llamada	NO	2 de ingeniería civil	3.44
		1 de biología	2.12
Incompleto	NO	1 de biología	2.12
Encontrar el resultado utilizando ecuaciones	SI	6 de ingeniería civil	10.34
		4 de física	50
		5 de biología	10.63
		1 de matemáticas	8.33
Encontrar solo una relación	NO	4 de ingeniería	6.89
Volver a intentar resolver la ecuación	NO	1 de ingeniería	1.72
		2 de biología	4.25
Encontrar el	SI	20 de biología	42.55

resultado utilizando aritmética		30 de ingeniería	51.72
		9 de matemáticas	75
		4 de física	50
Comprobar la ecuación	NO	2 de biología	4.25
		1 de Ingeniería	1.72
Establecer una relación con el gasto total	NO	10 de biología	21.27
		5 de ingeniería	8.62

De 125 alumnos que realizaron la prueba 81 utilizaron un esquema que sí solucionaba la ecuación propuesta, y 44 utilizó un esquema que no daba tratamiento a la situación. De este modo se puede decir que para este tipo de tarea la mayoría de los estudiantes sí mostró un esquema de acción adecuado para la situación.
Hay que recordar que en cada una de las tareas el objetivo fue observar los esquemas de acción, en la matematización vertical, además, los conceptos y teoremas en acto que mostraron todos los estudiantes mediante el análisis de sus representaciones.

Para estas tareas que correspondían a situaciones del tipo de matematización horizontal se encontraron los siguientes esquemas:

- Encontrar edades
- Situación con pelotas
- Precios, dulces, costos, artículos
- Describir la solución en palabras
- Pollos, granja o gallina
- Intentos ilógicos
- Aplicado al contexto de su formación
- Ausencia de esquema
- Indicativo
- Grupos de personas
- Las ovejas
- Dulces, pasteles o dinero
- Distancia
- Agua
- Contexto formacional
- Describir solución en palabras
- Numérico
- Canicas dulces y regalos
- Límite de ecuación
- Matemáticas con matemáticas
- Resolver ecuación y dejar el resultado

- Interpretar el resultado en su contexto original
- Descripción literal de que el resultado ya está
- Interpretación del resultado en su contexto original pero con comprobación
- Resolver ecuación erróneamente
- Tomar mensaje como mitad de llamada
- Incompleto
- Encontrar el resultado utilizando ecuaciones
- Encontrar solo una relación
- Volver a intentar resolver la ecuación
- Encontrar el resultado utilizando aritmética
- Comprobar la ecuación
- Establecer una relación con el gasto total

Recordemos que en este caso había tres niveles de tareas según la ecuación que estaba dada para el caso de la ecuación más simple sí hubo muchos esquemas que daban solución a la situación, esto en contraste con la última ecuación, en la cual la mayoría de las representaciones que se dieron no daban tratamiento a la situación, además, hay que hacer notar que los esquemas que más alumnos usaron son los del tipo de compra venta o repartición de artículos así como el de encontrar edades, y los más poco usuales son los relacionados al contexto de su profesión, es decir, aunque los alumnos están estudiando en un nivel superior la mayoría de ellos no ha evolucionado su contexto de referencia hacia un ámbito profesional.

Por otro lado, para el caso de la matematización horizontal muy particularmente en las pruebas referentes a formular una situación que se pueda resolver con la ecuación dada, la mayoría de los estudiantes mostraron esquemas de acción ineficaces que no solucionaban la tarea.

Para la cuarta tarea de matematización horizontal que se refería de la solución de uno de los problemas que ya se habían formulado, la mayoría de los estudiantes no mostró ningún esquema de acción o asumió que ya estaba resuelto por la razón de que ya estaba el problema y la ecuación resuelta, de este modo se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes esquematiza que un problema termina una vez que se ha resuelto la ecuación.

Para el caso de la última tarea, dentro de la matematización horizontal que consistía en la interpretación de un resultado matemático en el contexto específico de un problema ya dado, la mayoría de los estudiantes mostró un esquema favorable a la situación, esto es porque la situación estaba diseñada para que se dieran cuenta de la falta de la interpretación en el contexto original.

De esta manera, se puede afirmar que los estudiantes de nivel superior una vez visto el tema de ecuaciones lineales de una variable, saben cómo resolverlas pero no saben cómo plantearlas y asumen que un problema termina cuando se resuelve la ecuación que lo modela.

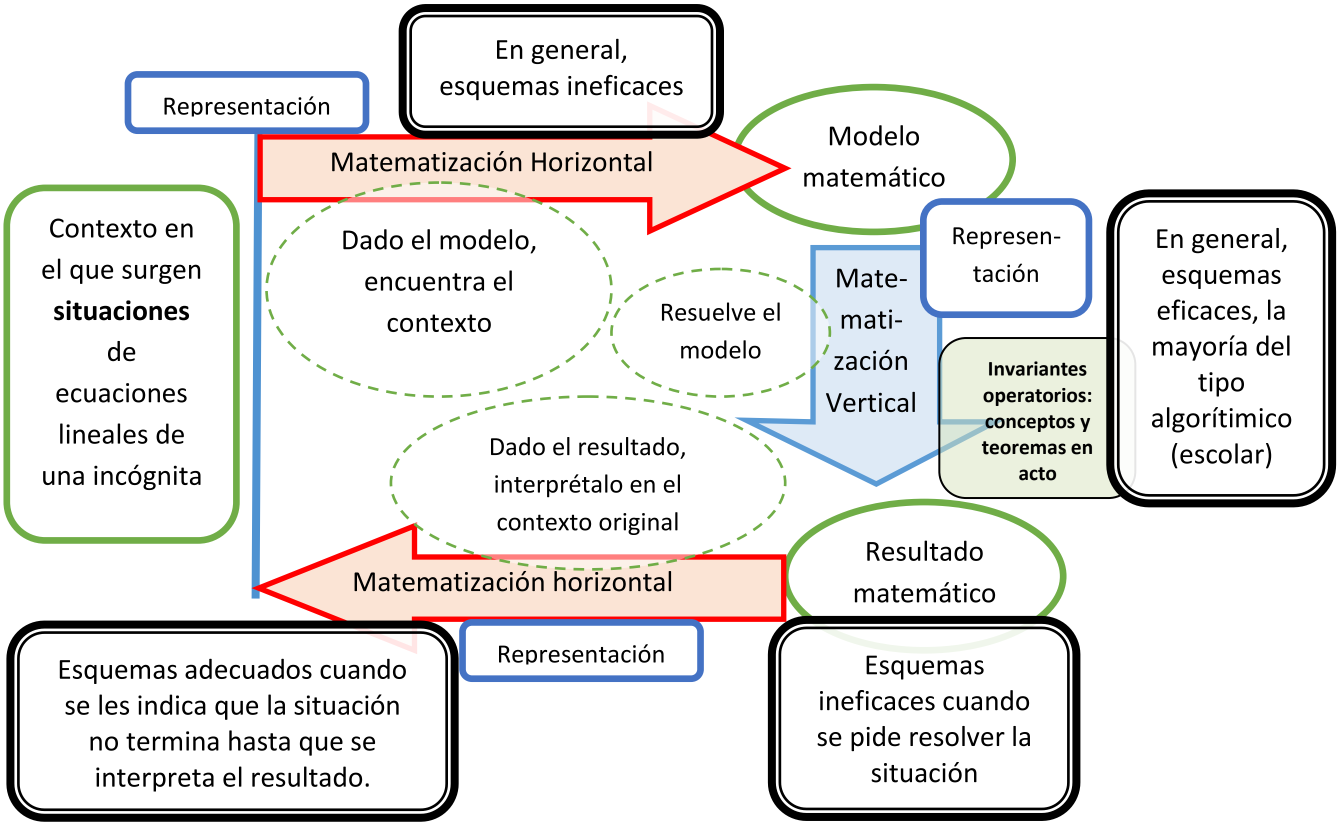


Figura 135. Resultados del estudio matematización progresiva

Conclusiones

Hay que recordar que las matemáticas son una parte importante para el desarrollo contemporáneo del progreso de la humanidad, es por eso que hay que darle una importancia especial en cuanto a los fenómenos que surgen al momento de intentar enseñar esta ciencia (Mejía, 2012). En este sentido este trabajo centró su estudio en el tema particular de ecuaciones lineales, ya que es parte fundamental en el aprendizaje posterior de las matemáticas. De la inquietud surgida sobre caracterizar los esquemas de acción de los estudiantes del nivel superior, se propuso analizar los fenómenos en torno al aprendizaje al momento de que algunos estudiantes afrontaran situaciones del tipo de matematización vertical y horizontal que involucrara particularmente a las ecuaciones lineales de una variable.

Por lo anterior se mostraron a las ecuaciones lineales de una variable como un objeto matemático y un objeto escolar en los planes de estudio de algunas carreras de la Universidad Autónoma de Zacatecas, para con ello tener las bases necesarias para diseñar una serie de actividades que mostraran los esquemas de acción de los estudiantes de las diferentes carreras de dicha institucion, en la cual se pudieron analizar los esquemas dentro de un proceso de matematización progresiva en el cual los alumnos matematizan situaciones y las solucionan utilizando conceptos y teorema en acto.

Una vez diseñado el instrumento se aplicó para el análisis de los esquemas de acción que tienen los alumnos de los programas de Ingeniería Civil, Licenciatura en Matemáticas, Licenciatura en Física y Licenciatura en Bilogía de la Universidad Autónoma de Zacatecas, después de que estudiaron en clase el tema de ecuaciones lineales, ya que en estos planes de estudio está presente este tema.

Teniendo en cuenta la pregunta de investigación: ¿Qué esquemas de acción emplean algunos de los estudiantes de nivel superior de la Universidad Autónoma de Zacatecas al enfrentarse con situaciones del tipo matematización vertical y horizontal que se pueden resolver utilizando ecuaciones lineales de una variable? Se puede decir en general que para el caso de matematización vertical los esquemas encontrados son en general eficaces y del tipo “algorítmico”, para el caso de matematización horizontal los esquemas surgidos son muy variados y en general son ineficaces ya que no dan tratamiento a la tarea.

Y en lo particular se puede decir que. La primeras tres pruebas pedían a los estudiantes que resolvieran una ecuación dada; es decir, se quiso analizar los esquemas de acción de los estudiantes de la matematización vertical. En las siguientes tres pruebas, se les pidió que plantearan una situación que se pudiera resolver utilizando la ecuación que se les daba en cada caso. Y en las últimas dos pruebas se les pidió que dieran respuesta a uno de los problemas que ya habían planteado para el primer caso, para el segundo se les dio la situación la ecuación que la modelaba y la solución matemática de la misma, pidiéndoseles que resolvieran la situación; todo esto a fin de analizar los esquemas de acción por separado para la matematización horizontal.

De la primera prueba se puede concluir que la mayoría de los estudiantes optó por usar un esquema del tipo algorítmico y la mayoría de ellos sí completó las tareas de manera satisfactoria. Aunque se pudieron observar teoremas en acto ineficaces, la mayoría de los estudiantes utilizan esquemas apegados al álgebra y no a otras áreas de la matemática, como lo puede ser la geometría analítica.

Para las siguientes tres pruebas de matematización horizontal en las que se pedía que formularan situaciones la mayoría de los estudiantes mostró esquemas de acción ineficaces que no solucionaban la tarea. Contrastando esto con las actividades anteriores se puede afirmar que los estudiantes saben resolver las ecuaciones pero no saben cómo o para qué se usan. Además se confirma la conclusión sobre la necesidad de que los estudiantes afronten más situaciones de matematización horizontal en su proceso de aprendizaje.

Por otra parte, para la cuarta tarea de matematización horizontal que se refería a la solución de uno de los problemas que ya se habían formulado, la mayoría de los estudiantes no mostró ningún esquema de acción o asumió que ya estaba resuelto por la razón de que ya estaba el problema y la ecuación resuelta, de este modo se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes esquematiza que un problema termina una vez que se ha resuelto la ecuación. Esto se podría deber a aprendizajes de esquemas de acción ajenos a la matematización horizontal. Sin embargo, para la última tarea dentro de la matematización horizontal que consistía en la interpretación de un resultado matemático en el contexto específico de un problema ya dado, la mayoría de los estudiantes mostró un esquema favorable a la situación, esto es porque la situación estaba diseñada para que se dieran cuenta de la falta de la interpretación en el contexto original.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede decir que los alumnos esquematizan que un problema termina una vez que se ha resuelto la ecuación que lo modela, sin embargo sí poseen esquemas adecuados para interpretar la solución matemática obtenida en su contexto original.

Entonces, la principal carencia en el aprendizaje de las ecuaciones lineales de los estudiantes de nivel superior tiene que ver con las situaciones de matematización horizontal y con las estrategias para la validación de los posibles resultados.

La variedad de esquemas encontrados en el análisis de las pruebas de matematización horizontal referentes al diseño de situaciones, remite a la ausencia de esquemas que tienen los alumnos para enfrentar situaciones de este tipo. Es decir, los alumnos no poseen esquemas en los cuales utilicen a las ecuaciones lineales de una incógnita como una herramienta que les pueda ayudar en la práctica de su profesión.

En lo referido a la matematización vertical, también existe una variedad de esquemas pero la mayoría de ellos son eficaces, aunque hay que mencionar que, una gran parte de los teoremas en acto en los que reposan dichos esquemas carecen de validez. Es decir, es necesario mostrar al alumno hasta qué punto son eficaces los teoremas en acto sobre los que reposan sus esquemas de acción para la matematización vertical a fin de que se modifiquen para hacerlos eficaces para un número más amplio de situaciones de este tipo.

Además es imperativo que el alumno esquematice hasta qué momento se da por resuelta una situación, que según el proceso de matematización progresiva, no es en el momento en que se obtiene una solución matemática sino hasta que esa solución matemática se interpreta en el contexto en el cual surgió. Y de esta manera los alumnos no pueden completar el proceso de matematización progresiva

Cabe mencionar que con ello el presente trabajo contribuyó al vacío de trabajos de este tipo, identificado respecto a la caracterización de esquemas de acción que tienen los estudiantes del nivel superior al trabajar con ecuaciones lineales de una variable, en ese sentido este trabajo aportó conocimiento científico de como los estudiantes de nivel superior resuelven tareas que involucran a las ecuaciones lineales de una incógnita. A su vez, este conocimiento le dará al profesor un panorama más amplio acerca de la posible explicación sobre cómo los estudiantes utilizan a las ecuaciones lineales en un ámbito profesional.

A partir de la descripción de los programas de estudio, se consideró necesario observar hasta qué grado de esquematización llegó el alumno; es decir, es necesario analizar los esquemas que tienen los alumnos después de que ya han estudiado el tema de ecuaciones lineales en su Unidad Académica. Para ello se requirió tener elementos teóricos que permitieran cumplir con este objetivo, mismos que se pueden encontrar en el capítulo 3.

Para el caso de los esquemas y según los aspectos teóricos trabajados, se pudo distinguir que un concepto está formado por una tripleta de tres conjuntos, que son las situaciones, las representaciones y los invariantes lógicos. Dentro de las situaciones se puede distinguir dos procesos distintos de matematización que son la horizontal y la vertical en la cual un sujeto toma una situación de la vida real y la transforma en una situación matemática (horizontal) después esa situación la resuelve utilizando conceptos y teoremas en acto, obteniendo así un resultado matemático (vertical), una vez obtenido el resultado el sujeto lo interpreta en el contexto del cual surgió (horizontal) dando así un tratamiento a la situación real. Toda esta serie de procesos se le conoce como matematización progresiva.

Cabe mencionar que, según lo que se quisiera observar ya sea matematización vertical u horizontal, se modificarían la situaciones y aparecerían distintos esquemas, uno para cada tipo de matematización, sin embargo en naturaleza son muy parecidos. Después de eso y con base en lo anterior se prosiguió al desarrollo del instrumento que se utilizó para analizar los esquemas de acción, que consistió en ocho pruebas: tres que ayudaran a identificar la matematización vertical y el resto para la horizontal.

Como se puede ver, el Marco Teórico utilizado es muy amplio, y esto constituye una limitante, ya que no fue posible utilizar todos los elementos teóricos ahí planteados, por lo que, para futuras investigaciones se podría acompañar la aplicación de las pruebas con entrevistas clínicas para contrastar la representación del esquema de acción con el esquema mental.

Recomendaciones y futuras investigaciones

Se puede decir que, el esquema construido para realizar el análisis de la información constituye una herramienta metodológica fecunda, ya que a partir de ella se considera que pueden desarrollarse múltiples trabajos que exploren los procesos de conceptualización de objetos matemáticos y por lo mismo puede ser utilizado en otros trabajos de este estilo como por ejemplo para ecuaciones cuadráticas.

La presente investigación también puede servir como punto de partida para investigaciones concernientes al desarrollo de instrumentos de prevención para una enseñanza defectuosa del tema de ecuaciones lineales en una variable en el nivel superior, en nuestro caso observamos que es necesaria la inclusión de situaciones de matematización horizontal presentes en los planes de estudios.

Como reflexión personal por parte del autor, la presente investigación contribuyó a reforzar la idea sobre el uso de la matemática en la vida cotidiana por parte de los estudiantes de nivel superior, los cuales ven a la matemática como algo ajeno a la realidad y no como una herramienta que les puede facilitar las tareas del día a día.

Reflexión como investigador

La experiencia de la aplicación de la situación, así como el diseño y los análisis permite que el investigador se convierta a la vez en profesor ya que interpreta el pensamiento de los estudiantes como si fueran sus propios alumnos. A través de esta experiencia pude percibir una ruptura que existe entre las matemáticas y las demás materias en las diferentes carreras no matemáticas en las que participé, pues si bien es necesario que los alumnos tengan el conocimiento matemático es también deseable que lo usen tanto en las demás materias, asi como también en su ámbito social y profesional.

Aunque para algunos matemáticos pareciera ingenuo imaginar dificultades en la solución de ecuaciones lineales de una incógnita, en un nivel de estudios tan avanzado, el analizar la presente investigación puede percatarse que efectivamente existen y que no se trata de hechos aislados ni “errores de dedo”.

Me parecería muy interesante que un profesor de matemáticas utilice delante de sus alumnos la matemática pero no dentro de problemas descontextualizados que vienen en el libro o planes de clase sino en situaciones propias de su entorno y su contexto social. De esta forma los alumnos se percatarían que todas esas herramientas que se les enseñan diariamente son fecundas y les pueden ayudar.

En mi experiencia como profesor dentro del nivel medio superior yo hacía un gran esfuerzo por que los alumnos me vieran usar la matemática en problemas del día a día, debo reconocer que a veces no era fácil hacerlo. Sin embargo, este tipo de prácticas llamaban la atención de los estudiantes y los llevaba a la reflexión.

Considero necesario que el profesor de matemáticas se concientice en el papel que funge dentro de la formación humana de los individuos que tiene en su aula y tome en cuenta el desarrollo profesional que debe tener.

Además considero que la matemática educativa es una herramienta muy poderosa en la mejora de la práctica del profesor de matemáticas, la implementación de situaciones el desarrollo de investigaciones así como la difusión de resultados son recursos muy valiosos que todos los que queremos enseñar matemáticas deberíamos utilizar siempre.

Referencias

Apóstol, T. (1967). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* México: Editorial REVERTÉ,S. A.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Jornal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Bello, I. (1999). *Álgebra elemental.* México: Internacional Thomson Editoriales, S. A. de C. V.

Bressan, A., Zolkower, B., y Gallego, M. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta (pp. 777-796). *Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*.

Caballero, M. (2010). *Concepciones y enseñanza del concepto de ecuación lineal, un estudio con profesores de bachillerato*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. Yucatán, México.

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación educativa.* 9 (46), 15-25. IPN. México.

Chamorro, M. C. (2005). Didáctica de las matemáticas para educación infantil. Madrid: Pearson Educación.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y Reflexiones (*pp. 51-63). México: Paidós.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19(2)*, 221-266.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Freudenthal, H (1991): *Revisiting Mathematics Education: China lectures.* Dordrecht: Kluwen Academia.

Gallegos, B. (2013). *Conocimiento profesional del profesor de bachillerato al impartir el tema de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas*. Tesis de maestria no publicada. Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas. México

García, J. (2010).*Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de Granada. España.

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Consultado en http://www.ugr.es/local/jgodino (febrero, 2012).

Gravemeijer, K. y Teruel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *J. Currículo Studies, 32 (6)*, pp. 777-796.

Grossman, S. (1999). *Álgebra lineal con aplicaciones (segunda edición).* México: Editorial Iberoamérica.

Guzmán R. I. (2000). *Conferencia dictada en el seminario interdisciplinario. Problemáticas de la didáctica.*

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill.

Ibáñez, P. y García, G. (2009). *Matemáticas I Aritmética y Álgebra*. México, México: Cengage Learning Editores.

Lehmann, C. (2012). *Álgebra*. México: Limusa.

Moreira, M. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. La Enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigaciones en enseñanza de las ciencias, 7(1).*

Mabel, S. (2004). Sistemas de Ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 7 (1), 49-78.

Matemáticas I. Serie Programa de Estudios 2010. Dirección General de Bachillerato. México. Secretaría de Educación Pública.

Mejía, F. (2012). *Los esquemas de acción de los estudiantes de bachillerato en problemas relativos a las ecuaciones lineales de una variable.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas. México.

México. Secretaría de Educación Pública. (2013). *Matemáticas I, Serie programas de Estudio.* México: Subsecretaría de Educación Media Superior, Dirección General de Bachillerato.

México. Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011, guía para el maestro: Educación básica secundaria. Matemáticas.* D.F., México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

Nava, P. (2012). *La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales a través de las situaciones didácticas: Un estudio con alumnos de bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Santamarina, F. I. (2006). *La conceptualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Comahue. Comahue. Argentina.

Sessa, C. (2005). Una entrada al álgebra a través de la generalización. En Sessa (Ed.). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: Orígenes y perspectivas* (pp. 67 – 126). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, en L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE/Horsori.

Soto, M. (2003). *El conocimiento didáctico de la división: un estudio con profesores en formación.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel.

Trejo, E. y Camarena, P. (2011). Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicasen el contexto del balance de materia. *Educación Matematica.* 23 (2), 65-90. Santillana. México.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematicseducation.Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 167-181.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In L. Nasser (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro (pp. 1-26*).

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.Albany* (pp. 41-59)*,* N.Y.: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Reserches en didáctique des Mathématiques 10 (2.3),* 133-170.