UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Conocimiento de la enseñanza de la derivada usando recursos didácticos tecnológicos. El caso de un profesor.

Tesis que para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior

Presenta:

Edgar Ponciano Bustos

Directora de Tesis:

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Co-Directoras:

M. en M. Elvira Borjón Robles

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

Zacatecas, Zac., Noviembre/2016

Zacatecas, Zac. 10 de noviembre de 2016

Dra. Samanta Deciré Bernal Anaya
Coordinadora del Departamento de
Servicios Escolares de la UAZ
P r e s e n t e

Por este medio, como asesora de tesis, me permito comunicarle que **Edgar Ponciano Bustos**, estudiante de la **Maestría en Matemática Educativa con orientación en el Nivel Superior** ha terminado su tesis titulada **"Conocimiento de la enseñanza de la derivada usando recursos didácticos tecnológicos. El caso de un profesor"**, con lo cual se puede dar inicio formal a los trámites para defensa de tesis.

Sin más por el momento reciba un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e

Leticia Sosa G.

Dra. Leticia Sosa Guerrero
Asesora de la tesis
Docente Investigador de la Unidad Académica de Matemáticas de la
Universidad Autónoma de Zacatecas

Vo. Bo.

Judith A. H dz S.

Dra. Judith A. Hernández Sánchez

M.en M. Elvira Borjón Robles

Coasesoras
Docentes Investigadoras de la Unidad Académica de Matemáticas de la
Universidad Autónoma de Zacatecas

Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa
Campus Universitario II, Zacatecas, Zac. C.P. 98000
Tel. y Fax: (492) 922-9975 y (492)923-9407 ext. 1702
http://matematicas.reduaz.mx

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 12 del mes de Noviembre del año 2016, el (la) que suscribe **Edgar Ponciano Bustos** alumno(a) del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior con número de matrícula 34155443; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado intitulado "**Conocimiento de la enseñanza de la derivada usando recursos didácticos tecnológicos. El caso de un profesor"** bajo la dirección de la Dra. Leticia Sosa Guerrero, M. M. Elvira Borjón Robles y Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

EDGAR PONCIANO BUSTOS

Nombre y Firma del estudiante

AGRADECIMIENTO AL CONACYT

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Becario No. 626421

AGRADECIMIENTOS

A mi padres Aida y pedro. Por todo el apoyo que siempre me han brindado en mi vida y en mis estudios a pesar de la distancia, sin duda alguna este logro no sólo es mío también es de ellos.

A mis hermanos Jorge, Arisai y Zury. Por estar siempre conmigo cuando los he necesitado, a pesar de las distancia. Espero que este nuevo logro los motive a no rendirse en sus sueños y que se den cuenta de que si yo puede ellos también pueden, solo necesita un poco de esfuerzo y sacrificio

A mi asesora la Dra. Leticia Sosa. Por sus consejos, paciencia, tolerancia, profesionalismo y guía en todo momento para la realización de este trabajo, además por toda la enseñanza brindada en los curos de desarrollo profesional, que sin duda alguna, a pesar de la exigencia que de dichos cursos, fue un elemento más para transformar mi visión como profesor. Cada consejo que me ha brindado me ha permitido crecer como profesional y persona, y espero que vea reflejado en mí ese cambio que gracias a usted he logrado. Espero que esta investigación sea sólo el principio del trabajo que podemos hacer. Gracias por todo Dra.

A mis coasesoras la Dra. Judith Hernández y M. M. Elvira Borjón. Por sus consejos, asesorías, sugerencias, guía, profesionalismo y ayuda para la creación de esta investigación, que fueron de gran apoyo hasta la etapa final de este trabajo.

A mis sinodales la Dra. Judith Hernández, Dr. José Carrillo, Dr. Iván López y Dra. Gloria. Por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo, por sus sugerencias, comentarios y aportaciones que siempre fueron muy atinados para perfeccionar esta investigación.

***Al profesor Pepe*.** Por permitirnos compartir su quehacer docente, por tener la accesibilidad de ser grabado y proporcionarnos su planeación, estamos totalmente agradecidos con el profesor por todo lo aportado a este trabajo, gracias por ser parte fundamental para esta investigación.

A mis maestros. Por todas sus sugerencias, su tiempo, sus comentarios, su dureza, sus saberes compartidos, que me han ayudado mucho a mejorar como persona y como profesional, cada aporte que me dieron siempre los tendré presente.

A mis compañeros de la maestría. Por compartir su amistad, consejos, alegrías y tristezas, que permitieron seguir hacia adelante con cada barrera en este espectacular sendero de conocimiento. Por haberme abierto la puertas de su hogar.

A mi amiga Luz. Mención especial merece mi amiga Luz, por ser para mí una gran compañera, colega, persona, consejera, pero sobre todo ser una excelente y maravillosa amiga, estoy muy agradecido por todos los momentos vividos en esta fantástica etapa de conocimiento. Por compartir estrés, alegrías y éxitos que pasamos en la maestría. Estoy totalmente agradecido por todos tus consejos, comentarios y apoyo para la realización de

esta investigación que sin duda alguna fueron muy esenciales hasta la etapa final de este trabajo. Además de estar siempre presente cuando te necesito, ayudándome en todo momento, no solo me abriste tu corazón y amistad, sino también me permitiste entrar a tu hogar y conocer a tu maravillosa familia. Gracias por todo.

A mis amigos Diego, Shuy, Eli y Alex. Por haberme abierto su hogar sin nunca antes haberme conocido, gracias por haber hecho mi estancia en zacatecas más amena, por compartir alegrías tristezas y ser mi familia por estos dos años. Gracias por todo.

A mi amiga Adilene. Por motivarme a nunca rendirme y por siempre decirme que luchará por mis sueños, gracias a sus palabras hoy termino la maestría. Gracias por estar siempre conmigo y por tus sabios consejos.

A mi amiga Maritza. Por estar siempre conmigo desde hace 6 años, sus regaños y consejos, me han permitido crecer como persona y a nunca rendirme. Gracias por ser darme tu amistad sincera.

ÍNDICE

Índice de Tablas y Figuras

RESUMEN

Con base en la revisión de investigaciones referentes a la enseñanza derivada y el conocimiento del profesor al enseñar la derivada, identificamos la escasez de estudios que investiguen el conocimiento del docente al enseñar el concepto de la derivada utilizando recursos didácticos tecnológicos. Ante esto nos planteamos la interrogante que dirige este estudio: ¿Qué conocimiento pone en juego el profesor al enseñar la derivada en cuanto al uso de recursos didácticos tecnológicos? En este estudio se pretende caracterizar el conocimiento que pone en juego un profesor al enseñar la derivada utilizando recursos didácticos tecnológicos. La caracterización se realiza en el marco del conocimiento del profesor; el cual se sitúa en el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), desarrollado en la Universidad de Huelva, España. Este estudio es de corte cualitativo y descriptivo, en el cual se considera el caso de un profesor de la Licenciatura en Matemáticas que imparte la asignatura de Laboratorio de Cálculo y Geometría II. De esta manera, el centro de atención será el conocimiento del profesor en cuanto a la enseñanza de la derivada con el uso de recursos tecnológicos digitales. Finalmente, se aportan subcategorías desarrolladas a partir del análisis de la información del estudio de caso. Asimismo, se proporciona unos rasgos de las subcategorías, estos rasgos hace referencia sobre los usos o intencionalidades de la tecnología que surgieron con base en la información sobre el conocimiento que pone en juego el profesor en los escenarios de la planeación e impartición de la clase, de igual manera se contribuyen indicadores referentes a dicho conocimiento agrupados en las subcategorías. Además, el conocimiento que evidencia el profesor en torno a la tecnología alcanza un impacto didáctico-tecnológico, lo anterior es posible sólo si existe una asociación entre un contenido matemático y el objetivo didáctico.

ABSTRACT

Based on the review of research concerning the education and knowledge derived from teacher to teach the derivative, we identified the lack of studies investigating the knowledge of teachers to teach the concept of using technology derived educational resources. Before this we ask the question that heads this study: What knowledge brings into play the teacher to teach the derivative in the use of technological teaching resources? This study aims to characterize the knowledge that a teacher puts into play to teach using technology derived educational resources. The characterization is done under the teacher's knowledge; which it is at the Mathematics Teacher's model Specialised Knowledge (MTSK), developed at the University of Huelva, Spain. This study is qualitative and descriptive, which is considered the case of a professor degree in Mathematics that he teaches Calculus and Geometry Laboratory II. Thus, the focus will be the teacher's knowledge regarding the teaching of the derivative with the use of digital technology resources. Finally, subcategories developed from the analysis of case study information is provided. Also, some features of the subcategories is provided, these features refers to the use or intentionality of technology that emerged based on the information on the knowledge that brings into play the teacher in the stage of planning and teaching of the class, likewise indicators for contributing to such knowledge is grouped into subcategories. In addition, the knowledge that Professor evidence about the technology reaches a didactic-technological impact, the above is possible only if there is an association between a mathematical content and pedagogical purpose.

PALABRAS CLAVES: Conocimiento del profesor, Enseñanza de la derivada, Recursos didácticos, Tecnología.

PRESENTACIÓN

El trabajo de grado está organizado en siete capítulos. A continuación se describirá la estructura que se ha propuesto para la presentación de esta tesis, con la intención de que el lector pueda tener una visión general de la manera en que se ha organizado la investigación y lo que puede hallar en cada uno de los capítulos que se muestran.

En el capítulo 1, planteamiento del problema, se ha realizado un recorrido por las investigaciones referentes a la problemática que subyacen en el conocimiento del profesor al enseñar la derivada. La revisión anterior permitió plantear el problema y la pregunta de investigación, además de los objetivos, la hipótesis y justificación que delimitan el tema de interés; evidencia de este recorrido son los antecedentes presentados en el capítulo 2.En dicho capitulo2, que se refiere a los antecedentes, se presentan investigaciones analizadas sobre el conocimiento del profesor al enseñar la derivada, acerca de la enseñanza de la derivada y relativo a la enseñanza de la derivada utilizando algún recurso didáctico tecnológico.

En el capítulo 3, que se refiere a los fundamentos matemáticos y al marco teórico, se muestran definiciones matemáticas referentes al tópico de derivada. En el apartado de marco teórico se presentan y describen a diversos modelos relacionados con el conocimiento del profesor, para después aterrizar en el modelo MTSK. En el capítulo 4, se justifica la metodología empleada en esta investigación, se muestran los instrumentos con los cuales se recolecta la información y los instrumentos de análisis, asimismo se describe brevemente el estudio de caso.

En el capítulo 5 se presentan el análisis de la información, donde se consideran dos primeros acercamientos. El primero tiene que ver con indicadores hipotéticos; es decir se realiza un análisis a priori por parte del investigador de lo que se espera podría ser evidenciado por el profesor al enseñar la derivada con recursos tecnológicos. El segundo se relaciona con lo realizado por el profesor en estudio en torno a su planeación y las clases video grabadas. En el capítulo 6 se muestran los resultados de la investigación, lo anterior se realiza a través de los subindicadores evidenciados de la planeación y de las clases, además de su contrastación con aquellos indicadores hipotéticos. Estos subindicadores se agrupan de acuerdo a sus características, para proporcionar categorías, subcategorías e indicadores.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones de la investigación, estas consisten en aportaciones a la categoría Recursos y Materiales, mejoras al instrumento de análisis, además de las limitaciones y futuras investigaciones arrojadas a la luz de dicho estudio. Finalmente se muestra una reflexión del autor de esta tesis que surge a raíz de la experiencia en el desarrollo de este trabajo de investigación.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

I.1. Problemática

El profesor es uno de los ejes principales para mejorar la enseñanza y el aprendizaje, por lo tanto su formación debe ser fundamental. Pino, Godino y Font (2011), señalan que el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos de una institución educativa, depende esencialmente de la formación del profesor.

Investigar las creencias y concepciones es muy importante para averiguar el conocimiento del profesor, como lo señalan Pino, Godino y Font (2011), que estos estudios son primordiales si se desea explorar o indagar el conocimiento de los futuros profesores, puesto que las creencias y concepciones son parte esencial de dicho conocimiento. García, Azcárate y Moreno (2005) afirman que las investigaciones de las creencias y concepciones no son suficientes, ya que es necesario continuar avanzando en aspectos tales como indagar en el conocimiento del contenido y el conocimiento de la enseñanza, pero de aspectos concretos tales como el conocimiento del profesor sobre el objeto matemático derivada y su relación con otras áreas.

En lo referente al conocimiento, Thompson (1992) señala que "el conocimiento depende de encontrar criterios tales como cánones de evidencia que se discute como parte del conocimiento sintáctico del profesor" (p. 31).

Por otra parte, el conocimiento profesional del profesor se considera como resultado de la experiencia práctica apilada en la realización de tareas docentes específicas, que se va edificando desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Estepa, 2000; Llinares y Sánchez, 1990; Climent, 2002).

Existen investigaciones que han analizado el conocimiento del profesor al enseñar la derivada, a continuación se describen algunos trabajos.

García, Azcárate y Moreno (2006) señalan que el conocimiento del profesor está relacionado con la formación que tuvo de estudiante, se basa en lo empírico, los libros de texto y la propia experiencia. Según estos autores los docentes tienden a unificar los programas, obviando la diferenciación entre las materias afines de diferentes carreras; además de, reproducir las mismas metodologías de trabajo que siguieron en su etapa de estudiante, ignorando metodologías alternativas disponibles y no se involucran con el estudiante. Asimismo, Stump (2001, citado por Gavilán, 2005, p.17), considera importante la necesidad de "los profesores de conocer diferentes representaciones y las conexiones entre las mismas, además de la necesidad de conocer y usar materiales curriculares no tradicionales para el desarrollo del conocimiento de contenido pedagógico". También el trabajo de Badillo (2003) menciona que algunos profesores pueden convivir con la complejidad semiótica asociada a los macro objetos *f'(a)* y *f'(x)* y otros tienen dificultad para hacerlo. Estas dificultades que tienen los profesores en la comprensión de los macro objetos se convierten en obstáculos, y esos obstáculos se ven reflejados en la enseñanza de los mismos, provocando confusiones y errores en los alumnos.

Siguiendo en la misma línea de las investigaciones enfocadas al conocimiento del profesor con respecto a la derivada. Chávez (2009) afirma que se debe reflexionar acerca de qué es lo que debiera conocer el profesor no sólo de la derivada si no una reflexión profunda de la utilidad de la derivada en el contexto matemático. En particular su importancia en el estudio de las funciones, de las condiciones necesarias y suficientes en los teoremas que se mencionan y especialmente en el cálculo. Sin embargo, Pino, Godino, Font y Castro (2012) revelan que el conocimiento del contenido de los futuros profesores no es suficiente para hacer frente a las tareas que surgen en un escenario de enseñanza, así que, se necesita un cierto grado de conocimiento de los contenidos tanto especializado y extendido; además, existe una desconexión entre los diferentes significados de la derivada.

Hasta el momento las investigaciones dan evidencia de que el conocimiento del contenido no es suficiente pero si necesario para una excelente enseñanza y aprendizaje del contenido en cuestión; por lo que es importante que el profesor tenga información que complemente la enseñanza del contenido en cuestión. Al respecto y para el caso de la derivada se puede justificar su importancia pues de acuerdo con Apóstol (2001) es la idea central del cálculo diferencial e integral, su origen se debe a un problema de geometría: el problema de hallar la tangente en un punto a una curva (Apóstol, 2001). Esta complementación de conocimientos es importante; sin embargo, algunos profesores basan la enseñanza de este concepto en que los alumnos memoricen los algoritmos de la derivada, y en algunas ocasiones los profesores proporcionan esos algoritmos como un formulario, originando que el alumno memorice el concepto y no comprenda su interpretación y su representación. Al respecto Artigue (1995) advierte que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas, se encuentran grandes dificultades para que los estudiantes alcancen una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que es el enfoque de esta área de la matemática.

Las complicaciones de los alumnos con el concepto de la derivada se pueden deber a que sus profesores también tienen esas confusiones en sus conocimientos, y esto pudo ser provocado por la formación académica del docente. El conocimiento que manifiesta el profesor entorno a la derivada influye en su enseñanza. Y es que en ciertas circunstancias, el docente no posee un dominio de las matemáticas que enseña (Badillo, 2003), es decir, el educador no comprende en su totalidad el concepto, sus representaciones y aplicaciones. Cantoral y Farfán (2004) afirman que el docente controla los conceptos, sin embargo no posee el conocimiento de las herramientas didácticas para enseñar eficazmente esos saberes a sus alumnos. Además, García, Azcárate y Moreno (2006) reportan que los docentes repiten los mismos métodos de instrucción, que adquirieron en su etapa de estudiante, ignorando metodologías de enseñanza nuevas y alternativas.

Por su parte, Hitt (2003) muestra que algunos problemas a los que se enfrentan los profesores y los estudiantes en el proceso de enseñanza del cálculo, es la falta de acercamiento visual para el entendimiento de los conceptos del cálculo, y propone utilizar diferentes representaciones en forma coherente para los problemas, además que es importante promover la visualización matemática, también que el desarrollo de habilidades ligadas a ésta puede impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos del cálculo. De igual modo Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf (1997) enfatizan que se debe realizar una enseñanza de la derivada sobre la coordinación entre los modos de representación gráfico y analítico, así como sobre la relación explícita entre los significados gráficos de la función y los correspondientes a la derivada, de esta manera ayudarán a que los estudiantes lleguen a coordinar los dos modos de representación.

También la derivada ha sido objeto de investigación desde una óptica de enseñanza con recursos didácticos tecnológicos. Existen investigaciones que indican la importancia del uso de la tecnología para mejorar la enseñanza y el aprendizaje, en seguida se describen algunas. Cantoral y Mirón (2000) analizan los efectos de la incorporación de calculadoras con capacidad gráfica al enseñar las relaciones entre f y f', es decir, entre una función y su derivada o la función y sus primitivas, concluyen, entre cosas, que la edificación de conocimientos por parte de los alumnos, implementa varios procesos como el reconocimiento de patrones, la búsqueda persistente de semejanza y el apoyo en sus conocimientos anteriores, agregándolos a las capacidades que les ofrece las propiedades técnicas del medio tecnológico, además agregan que la visualización de conceptos y desarrollo matemáticos, no es un resultado del recurso tecnológico, sino se acata a la articulación entre "un diseño teórico de la situación didáctica"(p. 291), donde "es el diseño de la situación la que permite el uso de la tecnología"(p.291). Por su parte, Marquez y De los Ríos (2013), dan una propuesta para la enseñanza de la derivada y sus aplicaciones en un entorno informático usando Geogebra, finalizan mencionado que el hecho de que los estudiantes trabajarán cada uno en una computadora, propicia a un aprendizaje fundamentado en la construcción y reflexión, asimismo añaden que ante cada problema premostrado el estudiante efectúa varias acciones: "calcula, interpreta, saca conclusiones, simula nuevas situaciones y se encuentra en condiciones de plantear hipótesis"(p. 7216). Además Marquez y De los Ríos (2013) consideran importante integrar al salón de clases el trabajo con software, "sin descuidar el rigor y la formalización requeridos en la enseñanza del cálculo en la universidad" (p. 7217).Con las investigaciones descritas anteriormente se pretende dar un panorama sobre los estudios sobre la enseñanza de la derivada, acerca de la enseñanza de la derivada usando tecnología, y sobre nuestro foco de atención, el conocimiento del profesor y la derivada.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los resultados de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor al enseñar la derivada (Stump, 2001; Badillo, 2003; Chávez, 2009; García, Azcárate y Moreno, 2006; Pino, Godino, Font y Castro; 2012) muestran que existen diversos factores que influyen en el conocimiento del docente al enseñar la derivada y esto se ve reflejado en su práctica docente.

Siguiendo en la misma línea acerca de las investigaciones analizadas referentes al conocimiento del profesor al enseñar la derivada, nos percatamos que dichos trabajos reportan que algunos profesores enseñan la derivada de forma algorítmica, esto se puede deber a su formación y experiencia, en el caso de los recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza de la derivada se enfocan en los alcances y limitaciones de la utilización de dichos recursos en el aula; sin embargo no hacen alusión de los conocimientos que el docente evidencia. Agregado a lo anterior nos percatamos que aún no se han realizado investigaciones alusivas al conocimiento que pone en juego el profesor al enseñar la derivada implementando recursos didácticos tecnológicos. Por lo tanto, con lo mencionado anteriormente y enfocándonos en la práctica del profesor en el aula y la planeación, se identifica el siguiente problema de investigación: La *caracterización del conocimiento del docente al enseñar el concepto de la derivada al utilizar recursos didácticos tecnológicos*. Por tal motivo, la pregunta de investigación que por consecuencia se hace es la siguiente:

¿Qué conocimiento pone en juego el profesor al enseñar la derivada en cuanto al uso de recursos didácticos tecnológicos?

En este sentido, se ha propuesto avanzar en la caracterización del conocimiento del profesor referente a la enseñanza de la derivada utilizando recursos didácticos tecnológicos.

Con base en el planteamiento anterior, el objetivo general de este trabajo es: *Caracterizar el conocimiento del profesor al enseñar la derivada en cuanto a recursos didácticos tecnológicos.*

Para llegar al objetivo general se han planteado los siguientes objetivos particulares:

- ***Identificar*** *el conocimiento que evidencia el profesor para enseñar la derivada al utilizar recursos didácticos tecnológicos.*
- ***Comprender*** *el conocimiento del profesor al enseñar la derivada con recursos didácticos tecnológicos.*
- ***Obtener*** *las potencialidades del conocimiento que pone en juego el profesor referente a la enseñanza de la derivada implementando recursos didácticos de índole tecnológica.*

I.2. Hipótesis

Consideramos que algunos profesores saben que los recursos didácticos tecnológicos pudieran ser una alternativa para enriquecer su labor docente, para el caso de la derivada pudiera ayudar a la transición entre los diferentes registros de representación (gráfica, verbal, algebraica y numérica). Asimismo conocen que los recursos didácticos tecnológicos permiten enseñar desde los distintos acercamientos que tiene la derivada (la pendiente de la recta tangente a la curva, tasa de variación instantánea y/o velocidad instantánea).

Por otro lado, se espera que aquellos profesores que usan los recursos didácticos tecnológicos en el aula tengan conocimientos de la potencialidades y desventajas del recurso que empleen, así como el objetivo matemático que justifique dicho uso, mismo que deberá ser especificado en su planeación y ejecutado en su práctica.

I.3. Justificación

Los estudios revisados hasta el momento, enfocados en el conocimiento del profesor sobre la derivada, evidencia que la formación académica del docente, los libros texto y la experiencia, influyen en la práctica del docente, provocando en algunas ocasiones confusiones y errores en los estudiantes. Por tal motivo se debe de investigar el conocimiento que pone en juego el profesor para enseñar la derivada, y cómo implementa recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza de la misma. En este sentido, coincidiendo con Gavilán (2005), quien afirma que no hay suficientes investigaciones centradas en el profesor en relación al concepto de la derivada. Agregando a lo mencionado por Gavilán (2005), también afirmamos que no hay muchas investigaciones enfocadas en el conocimiento del docente en vinculación a la derivada con recursos didácticos tecnológicos.

Investigar el conocimiento del profesor servirá para detectar las potencialidades que tiene el profesor con respecto al contenido matemático (la derivada), y conocimiento didáctico del contenido (recursos didácticos tecnológicos), asimismo para comprender el proceso de enseñanza de la derivada con recursos didácticos tecnológicos para beneficiar su desarrollo profesional y de este modo el docente ejerza eficientemente su práctica para favorecer el aprendizaje del estudiante. Llinares (2009) menciona que el conocimiento del profesor es una variable potencial para llegar a comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases, generados en las situaciones de aprender a enseñar matemáticas, y del desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

Moreno (2005) afirma que el docente es clave para el éxito e indispensable para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tengan su principio en la investigación, además menciona que hablar del profesor implica hacerlo desde su conocimiento y de su desarrollo profesional. Moreno y Azcárate (2003) señalan que la sociedad necesita de personas más competitivas en sus trabajos, más cualificadas y versátiles, esto obliga tanto a profesores como a la propia universidad a redefinir sus metas, y agregan que, la universidad debería potenciar la instrucción profesional del profesor equilibrando los tres ámbitos de responsabilidad que este puede asumir: investigación, docencia y gestión.

Otras investigaciones revisadas, reportan distintas dificultades de los estudiantes al aprender la derivada (Zandieh, 2000; Berry y Nyman, 2003; Habre y Abboud, 2006), esto se puede deber a que sus profesores también tienen esas dificultades en sus conocimientos, y esas dificultades se pueden deber a que su formación académica fue de esa manera (Badillo, 2003). Además, los docentes repiten los mismos métodos de instrucción, que adquirieron en su etapa de estudiante, ignorando metodologías de enseñanza nuevas y alternativas (García, Azcárate y Moreno, 2006), cómo la tecnología.

Por otro lado, también existen investigaciones que indican la importancia del uso de la tecnología para mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Se ha considerado la importancia de que el docente conozca y utilice los recursos didácticos tecnológicos para mejorar la instrucción de la derivada y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes. De acuerdo con Marquez y De los Ríos (2013) quienes afirman que es importante que los profesores incorporen la tecnología en su instrucción, ya que en la vida cotidiana estamos haciendo uso constante de las tecnologías, es por ello que los docentes deben incorporarlas a la educación, para asegurar la educación tecnológica de los estudiantes.

La transendencia del uso de recursos didacticos tecnológicos en la enseñanza, ha sido mencionado por Akkoc, Bingolbali y Ozmantar (2008), quienes afirman que los profesores necesitan la tecnología para enriquecer su comprensión del contenido tecnológico y pedagógico, ideas detrás de este contenido que afecten directamente sus conocimientos del contenido tecnológico, para una integración exitosa de la tecnología para enseñar derivada en un punto. Por su parte, Kendal y Stacey (2002) indican que el implemento de un recurso didáctico tecnológico de los profesores hará cambios en el contenido que enseñan en respuesta a un nuevo conocimiento. Asimismo, Villanueva (2004), señala que las TIC (Tecnología de la Información y Comunicación) en la educación son una herramienta de apoyo pedagógico, reforzando las actividades escolares y colaborando a la educación no formal y alternativa, también agrega que las TIC ofrecen condiciones tecnológicas para la alteración de la enseñanza tradicional.

Con base en lo mencionado en las investigaciones anteriores, nos percatamos de que el realizar este estudio sobre el conocimiento del profesor al enseñar la derivada usando recursos didácticos tecnológicos, nos podría permitir entender (mediante lo que evidencie el profesor) las potencialidades asociadas a los recursos didácticos tecnológico para poder comprender el proceso de enseñanza de la derivada con dichos recursos, con el objetivo de poder realizar la caracterización de dicho conocimiento. Además creemos que el uso de la tecnología puede provocar cambios en el conocimiento didáctico del contenido y en el conocimiento matemático del profesor.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los resultados de esta investigación son enfocados en una caracterización de los conocimientos que le permite al profesor optimizar y potenciar, el uso de los recursos didácticos tecnológicos para favorecer la enseñanza de la derivada.

A su vez, con los resultados que arroje esta investigación, se espera que puedan servir para los profesores, formadores de profesores y como un punto de partida para la creación de diseños de instrumentos de actualización de planes de formación matemáticas, y desarrollar conocimientos didácticos matemáticos tecnológicos que se necesita para la enseñanza de la derivada, asimismo se desea que con los resultados de este estudio se comprenderá el proceso de enseñanza-aprendizaje de la derivada, provocado por la situación de aprender a enseñar la derivada. De igual forma, esperamos que con nuestra investigación se aporte criterios para seleccionar problemas, y actividades matemáticas a incluir en los programas y procesos de formación.

Los resultados esperados se sitúan bajo el marco del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). El MTSK se ocupa de ese conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Santana y Climent, 2015), que toma en cuenta las diferentes naturalezas, tanto del conocimiento matemático como conocimiento didáctico del contenido (Carrillo, Escudero y Flores, 2014).

Este modelo a través de sus dominios, subdominios y categorías, considera el conocimiento del profesor de matemáticas tomando en cuenta a la matemática, la didáctica y el currículo, como un todo que está integrado en el profesor. En este modelo nos enfocaremos en particular en el subdominio *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)* y su categoría *Recursos y Materiales*, que se describirán más adelante.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES

CAPÍTULO II. ANTECEDENTES

El cálculo es una rama importante de la matemática, su surgimiento se asocia a problemas físicos y gran parte de su potencia deriva de la variedad de sus aplicaciones (Apostol, 2001). Pino (2013) se refiere al cálculo como una ciencia fundamental con otras áreas de las matemáticas tales como la probabilidad, la topología, la teoría de grupos y aspectos del álgebra, la geometría y la teoría de números. Sin el cálculo, la tecnología moderna y la física podrían ser difíciles de imaginar (Kleiner, 2001).

Sánchez-matamoros, García y Llinares (2008) indican que la noción de derivada de una función, junto con la de integral, son conceptos clave del cálculo, también añaden que, la derivada implica varios aspectos desde: su perspectiva gráfica, como pendiente de la tangente a la curva; su perspectiva analítica, como límite del cociente incremental; su carácter puntual o global y, según exija la solución de una determinada tarea.

Además, la derivada ha sido un concepto importante de atención desde varias teorías, que van desde cuestiones cognitivas e instruccionales (Pino, Godino y Font, 2011), como también se menciona en Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008).

Las anteriores investigaciones dan muestra de que el concepto de derivada es considerado fundamental para el cálculo y otras áreas. Sin embargo, la enseñanza y el aprendizaje de conceptos de cálculo, ha sido una fuente de serios problemas, tanto para los estudiantes como para los profesores, de cara al entendimiento de sus conceptos básicos (Hitt, 2003). Estos problemas pueden estar ligados a que los profesores que enseñan este concepto basan su enseñanza en la memorización de los algoritmos entorno a la derivada, originando en los estudiantes dificultades en la comprensión de la derivada. Artigue (1995) indica que los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas tienden a enfocarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo que acaba siendo rutinaria. Selden, Mason y Selden (1994) señalan que algunos de los problemas detectados como consecuencia de enseñar de forma algorítmica es que si bien el conocimiento adquirido por los alumnos les puede ser útil para resolver ejercicios y problemas rutinarios, en el momento en el que se les enfrentan a contexto y situaciones que requieran mayor conocimiento conceptual de la derivada, muchos de los estudiantes fallan y no saben abordar la situación.

En seguida se muestra un panorama de algunos trabajos que hacen referencia al problema que nos compete: el conocimiento del profesor al enseñar la derivada usando recursos didácticos tecnológicos. Los cuales fueron organizados de la siguiente manera:

- Investigaciones sobre el conocimiento del profesor al enseñar la derivada.
- Investigaciones sobre la enseñanza de la derivada.
- Investigaciones sobre la enseñanza de la derivada utilizando algún recurso didáctico tecnológico.

CAPÍTULO II. ANTECEDENTES

II.1. Investigaciones sobre el conocimiento del profesor al enseñar la derivada

El conocimiento del profesor ha sido investigado desde un panorama cognitivo desde los primeros análisis enfocados en el pensamiento del docente sobre la planificación y la toma de decisiones (Clark y Peterson, 1986, citado por Llinares, 2009).

Ponte y Chapman (2006) indican que las investigaciones realizadas dentro del campo de formación de profesores de matemáticas, se han centrado en diversos aspectos del conocimiento y la práctica del profesor, los cuales pueden ser agrupadas en cuatro categorías: 1) conocimiento matemático de los profesores, 2) conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas, 3) creencias y concepciones de los profesores, y 4) la práctica del profesor.

En el campo del conocimiento del profesor existen varias propuestas de modelos que tratan de describir y determinar las características deseables en el conocimiento de los docentes de matemáticas para realizar su práctica de manera eficiente. Sin embargo Pino (2013) señala que aún no existe un consenso acerca de lo que un profesor debería conocer para la enseñanza de tópicos concretos como el de derivada.

Con respecto al conocimiento del profesor relacionado con el concepto de derivada, se han realizado investigaciones que han abordado esta problemática. Por ejemplo, el trabajo de García, Azcárate y Moreno (2006), en el cual se estudian las creencias, concepciones y conocimiento profesional de diez profesores universitarios del área de ciencias económicas, respecto de cómo abordan la enseñanza del cálculo diferencial, qué ejemplos matemáticos o no matemáticos consideran los más adecuados para llegar al concepto de la derivada, y qué tipos de aplicaciones de la derivada enseñan a sus estudiantes. Estos investigadores concluyen, con respecto al conocimiento del profesor que, el conocimiento del profesor está relacionado con la formación que tuvo de estudiante, se basa en lo empírico, los libros de texto y la propia experiencia, los docentes tienden a unificar los programas, obviando la diferenciación entre las materias afines de distintas carreras, y además, los profesores reproducen las mismas metodologías de trabajo que siguieron en su etapa de estudiante, ignorando metodologías alternativas disponibles y no se involucran con la profesión del estudiante.

Asimismo, Chávez (2009), estudia el conocimiento de profesores de bachillerato de cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. Se realizó un estudio de casos de carácter cualitativo que hace uso del método de encuesta. Para tal efecto se diseñaron varios cuestionarios de los cuales se aplicó uno en el que se tomó en cuenta la precisión de las preguntas en cuanto al significado y las interpretaciones de la derivada así como las condiciones de acceso indirecto a las creencias y conocimientos de los profesores que subyacen al instrumento; para su aplicación se trató de cuidar el tiempo dedicado a responder y crear un ambiente que evitara que los profesores se sintieran sujetos de evaluación en cuanto al conocimiento del tema. El cuestionario incluye tres tipos de tareas (a) calificación con valores de verdad de algunas afirmaciones, (b) descripción de conceptos y (c) resolución de problemas. El análisis se hace en dos niveles, uno micro (individual) y uno macro (comunidades de enseñanza).

Chávez (2009) concluye que, se debe reflexionar acerca de qué es lo que debiera conocer el profesor no sólo de la derivada si no una reflexión profunda de la utilidad de la derivada en el estudio de las funciones, de las condiciones necesarias y suficientes subyacentes en los teoremas que se mencionan y tienen una importancia especial en el cálculo, y también agrega que se debe de reflexionar acerca del concepto mismo de función y sus elementos subyacentes como su dominio y el papel de los contraejemplos en la construcción del significado, entre otros. Los resultados de este tipo de estudio a la vez que son importantes para la investigación deben serlo también para diseñar programas adecuados de formación y actualización de profesores.

Siguiendo en la misma línea de las investigaciones enfocadas al conocimiento del profesor con respecto a la derivada, Pino, Godino y Font (2011), plantean la siguiente pregunta: ¿Qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible? Para responder a esta pregunta los autores abordan a partir de la caracterización de la faceta epistémica del CDM (Conocimiento Didáctico-Matemático) para la derivada utilizando las herramientas teóricas y metodológicas que proporciona el EOS (Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática). Esta investigación aproxima dos estudios orientados hacia la caracterización del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. El primer estudio se centra en la descripción del significado global de la derivada, distinguiendo los significados parciales de la misma y su articulación. En el segundo estudio aborda el análisis y síntesis de las investigaciones didácticas sobre la derivada, sistematizando los conocimientos aportados en las diferentes facetas de la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Pino, Godino y Font (2011) finalizan diciendo que, la reconstrucción de un significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen.

En este mismo sentido, otra investigación es la desarrollada por Badillo, Azcárate y Font, (2011), en este trabajo se analiza la comprensión de los macro-objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ que muestran cinco profesores de matemáticas de secundaria de diferentes institutos públicos. Estos profesores enseñaban la derivada en primero y segundo curso de bachillerato (16-18 años). Se trata de un estudio de caso, se diseñó un cuestionario indirecto, en el cual se les pedía a los profesores que trataran de explicitar por escrito, lo más detalladamente posible, lo que consideraban que debería responder uno de sus estudiantes que hubiera comprendido el concepto de derivada, como resultado del proceso de estudio que ellos hubieran impartido. Para lo cual, previamente, tenían que resolver los problemas propuestos.

Badillo, Azcárate y Font (2011) concluyen que, las categorías teóricas y analíticas adaptadas de la teoría APOE y los niveles de desarrollo del esquema permiten explicar por qué algunos profesores pueden convivir con la complejidad semiótica asociada a los macro-objetos *f'(a)* y *f'(x)* y otros tienen dificultad para hacerlo. Estas dificultades que tienen los profesores en la comprensión de los macro-objetos se convierten en obstáculos, y esos obstáculos se reflejan en la enseñanza de los mismos, provocando confusiones y errores en los alumnos.

De igual manera, Pino, Godino, Font y Castro (2012), presentan algunos de los resultados obtenidos tras la aplicación de un cuestionario que, basado en el modelo propuesto por Godino (2009) para la evaluación y el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático, el cuestionario fue diseñado con el fin de explorar las características clave del conocimiento didáctico-matemático de la derivada de los futuros profesores de secundaria.

De las respuesta dadas por los futuros profesores a las tareas incluidas en el cuestionario, los investigadores indican que, los futuros profesores muestran un mejor desempeño en la resolución de tareas en las que la derivada se entiende como la pendiente de la recta tangente, destacan la necesidad de mejorar el conocimiento avanzado de los futuros profesores, ya que esto ayudaría a resolver tareas como esta. Los futuros profesores carecen de ciertos aspectos no sólo de conocimiento especializado (uso de diferentes representaciones, el uso de diferentes significados de la derivada, la solución del problema a través de diversos procedimientos, dando una serie de argumentos válidos para justificar estos procedimientos, etc.), sino también del conocimiento común necesario para resolver cierta tarea. Los futuros profesores experimentaron dificultades cuando tuvieron que utilizar la derivada como la tasa instantánea de cambio en una situación relativamente compleja.

El cuestionario aplicado por Pino, Godino, Font y Castro (2012) reveló que el conocimiento del contenido es tan común, que no es suficiente para hacer frente al tipo de tareas que surgirá en el contexto de enseñanza, por lo que los maestros necesitan un cierto grado de conocimiento de los contenidos tanto especializado y extendido. Por último, los resultados muestran que los futuros profesores carecen de ciertos aspectos del conocimiento especializado y prolongado, pero también que hay una desconexión entre los diferentes significados de la derivada.

Por último, el estudio de la investigación de Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2014) se centra en cómo poder utilizar los resultados de su investigación sobre la comprensión del concepto de la derivada como un referente para ayudar a profesores en formación, donde el objetivo de la investigación es caracterizar cómo los profesores de matemáticas en formación aprenden a notar los signos de comprensión de los estudiantes del concepto de derivada.

Este trabajo de investigación se realizó con la participación de ocho estudiantes para profesores de matemáticas en el nivel secundaria, que cursaban una asignatura de didáctica de las matemáticas para la educación secundaria. Se diseñó un cuestionario con la intención de recolectar información sobre el concepto de derivada y de la compresión de los estudiantes con la derivada.

Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2014) concluyen con una cita de Wilson, Mojica y Confrey (2013).

> Reconocimiento explícito de los elementos matemáticos utilizados por los futuros profesores para resolver problemas y la forma en que se vinculan con los modos de representación es una de las características de un desarrollo de la capacidad para notar comprensión de los estudiantes (p.23).

Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2014) añaden que la descripción del desarrollo, puede ser utilizado por los formadores de docentes como una herramienta para el diseño de programas de capacitación para los futuros profesores de matemáticas, y además, la información sobre el desarrollo de esta habilidad podría proporcionar los medios para evaluar el nivel de desarrollo de futuros profesores de matemáticas cuando los formadores de docentes describen su progreso en términos de niveles de creciente sofisticación.

II.2. Investigaciones sobre la enseñanza de la derivada

A continuación se mencionan algunas investigaciones que están enfocadas en la enseñanza de la derivada.

En ese sentido, Dolores (2000a) en su propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada, menciona que las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de derivada pueden crecer si los alumnos necesitan de herramientas para plantear y resolver problemas relacionados con la variación. Agrega diciendo que las causas atribuibles a estas dificultades son:

- No existe una conexión entre la planeación y ejecución del proceso de enseñanza del cálculo diferencial relacionado con el aprendizaje de sus conceptos básicos.
- Existe poca estructura entre los objetivos, contenidos y métodos de enseñanza.
- Los libros de texto de cálculo diferencial que se utilizan para enseñar la derivada, lo abordan desde un punto de vista teórico y sólo se enfocan en la instrucción de algoritmos.

- Existe mucho contenido teórico, sin relación con problemas físicos.

Por su parte Azcárate, Bosh, Casasdevall y Casellas (1990, citado por Pineda, 2014), afirman que para que haya éxito de la enseñanza y aprendizaje de la derivada, el profesor debe considerar cuatro componentes que son:

- Iniciar de las concepciones previas que los alumnos tengan del concepto de velocidad.
- Utilizar gráficas de funciones que ayuden a visualizar notablemente las ideas, en especial, cuando se refiere a pendiente de una recta y tasas medias de variación.
- Utilizar problemas precisos en los cuales el alumno conecte lo que aprende con situaciones de la vida diaria.
- Estar consciente de las dificultades que se presentan cuando se realiza el proceso de límite en una función, y entender que el límite no sólo es un proceso de sustitución de una variable por un valor y realizar unas operaciones.

Hitt (2003) muestra que algunas dificultades a las que se enfrentan los profesores y los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo, es la falta de acercamiento visual para el entendimiento de los conceptos del cálculo, y propone la necesidad de utilizar diferentes representaciones en forma coherente para los problemas, y que es importante promover la visualización matemática, y que el desarrollo de habilidades ligadas a ésta puede impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos del cálculo.

La investigación de Flores y Salinas (2003), tiene como objetivo averiguar en estudiantes de administración de empresas si al introducir el concepto de derivada en la asignatura de Matemática Aplicada I utilizando una metodología basada en las aplicaciones de pertinencia del contexto social de la carrera, mejoraría positivamente el rendimiento de los estudiantes en la asignatura de matemática financiera. Para la investigación se dividió un grupo de estudiantes en dos partes, a una parte de los estudiantes le impartió clases el profesor A, en cuya metodología se contemplan las aplicaciones de la derivada en el contexto social de la carrera y, al otro grupo le impartió clases el profesor B que no utiliza las aplicaciones de la derivada en el contexto social de la carrera citada anteriormente.

Flores y Salinas (2003) concluyen que, los estudiantes, a los que se les introdujo el concepto de derivada a través de sus aplicaciones en el contexto-social, tuvieron mejor rendimiento en la asignatura matemática financiera que aquellos a quienes se les introdujo este concepto de forma clásica. El profesor B, sigue utilizando una metodología tradicional para enseñar el concepto de derivada basada en aspectos físico-matemáticos o geométricos, descartando alternativas innovadoras relacionadas con la pertinencia de la carrera de los estudiantes; mientras que el profesor A, mantiene una línea de instrucción transformadora del concepto de derivada, a través de la relación con las aplicaciones que viven los estudiantes en su carrera. Además, se detectan algunas carencias didácticas relacionadas con la pertinencia del contexto. El investigar la enseñanza del profesor con respecto a la derivada, puede arrojar sus carencias didácticas o matemáticas. El docente necesita saber de aplicaciones de la derivada en diferentes contextos, para mejorar el aprendizaje del alumno.

Font (2000a, citado por Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) plantea la cuestión de crear una enseñanza enfocada a que los alumnos puedan coordinar los diferentes sistemas de representación, asumiendo que dicho enlace es una prueba de la comprensión.

Este trabajo de investigación parte de la hipótesis de que el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se puede interpretar como un proceso en que se ha de considerar a tres subprocesos donde intervienen diferentes modos de representación:

- "Traducciones entre distintas formas ostensivas de representar $f(x)$.
- El paso de una forma de representación ostensiva de $f(x)$ a una de $f\ '(x)$.
- Traducciones entre las distintas formas ostensivas de representar $f\ '(x)$ " (p. 282).

La palabra "*ostensivo* es utilizada en el sentido de que se puede mostrar a otro directamente. Por *representación ostensiva* se entiende, a manera de ejemplo, la fórmula de la función que el profesor escribe en la pizarra y el alumno ve directamente" (p. 282).

Font (2000a, citado por Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) diseñó una unidad didáctica para estudiantes de tercer año de bachillerato unificado polivalente, cuyas edades eran de 15 y 16 años, y primer año de bachillerato científico tecnológico, con actividades donde el alumno debía de realizar alguno de los tres subprocesos, "como una manera de modelizar los mecanismos de coordinación mentales entre los diferentes modos de representación. Como *representaciones ostensivas* puso a la expresión simbólica y gráfica, la tabla y la descripción verbal de la situación" (p. 282).

Las actividades propuestas por Font (2000a, citado por Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) tenían la intencionalidad de calcular la función derivada con el uso de los procedimientos límite del cociente incremental, pendiente de la tangente y tabla, que se auxilian de los procedimientos ostensivos de expresión simbólica, gráficos y tablas. Los resultados no sólo ponen de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos con los conocimientos previos (el concepto de función, traducción entre diferentes representaciones de una función, variación de una función, pendiente, tasa de variación media, velocidad), sino también que la definición de función derivada $f'(x)$, como límite del cociente incremental y como pendiente de la tangente, presenta una complejidad semiótica considerable. Sin embargo, la introducción de la derivada a partir de una tabla resultó más fácil de entender.

Los resultados del estudio anterior muestran que si se unen en la enseñanza de la derivada las tres aproximaciones como límite del cociente incremental, como pendiente de la recta tangente y como tabla de valores, se facilita la comprensión del estudiante.

Por su parte, García, Gavilán y Llinares (2012) describen y explican la práctica del profesor de matemáticas acerca de la enseñanza de la derivada, bajo la teoría APOE analizan la práctica de un profesor, finalizan mencionando que la modelación de los diversos mecanismos constructivos elaborada por el docente “permite dar cuenta de cómo construye las situaciones de aula para que los estudiantes puedan llegar a organizar la colección de procesos y objetos que constituyen el esquema de la noción de derivada”(p.231), de igual manera afirman que la modelación de la descomposición genética deducida desde la práctica del docente se elaboró partir de cómo el profesor estructuraba el contenido matemático que intentaba instruir y de cómo utilizaba los diversos “modos de representación para potenciar la construcción de los significados por parte de los estudiantes”(p.231). Agregado a lo anterior, estos autores señalan que la descripción del quehacer del docente a través de “la modelación de diversos mecanismos de construcción del conocimiento que realiza permite identificar, al menos de manera potencial, el esquema de derivada que los estudiantes pueden construir en el aula” (p.232).

Por último, Hitt (2003) sugiere que es importante que el docente fomente la visualización matemática utilizando diferentes representaciones y promoviendo una utilización razonables de las nuevas tecnologías (calculadoras gráficas y computadoras) “que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas, para favorecer la construcción de conceptos a través de la coordinación, libre de contradicciones, de las diferentes representaciones relacionadas con dichos conceptos” (p. 23). De igual manera Hitt (2003) argumenta que los profesores qué estén a favor del uso de tecnología en el aula de matemáticas deben saber que actividad se propondrá para utilizar la tecnología de manera que promueva la construcción de conceptos y una mejor actuación en la resolución de problemas.

II.3. Investigaciones sobre la enseñanza de la derivada utilizando algún recurso didáctico tecnológico

La enseñanza de la derivada también se ha abordado desde una perspectiva tecnológica. Se ha considerado la importancia de que el docente conozca y utilice los recursos didácticos tecnológicos para mejorar la instrucción de la derivada y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes. Al respecto, Kendal y Stacey (2002), realizaron observaciones de aula y entrevistas más de dos años a dos profesores, este trabajo presenta cómo dos profesores hicieron la transición del uso de calculadoras gráficas a calculadoras CAS mientras enseñaba cálculo diferencial a estudiantes de la escuela secundaria superior. Ambos profesores enseñan con CAS en formas que eran coherentes con sus creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza. En dos años sucesivos, dos maestros voluntarios, utilizaron CAS (TI-92) para enseñar 22 lecciones sobre introducción al cálculo diferencial a alumnos de 16 a 17 años de edad. Ambos eran profesores experimentados de las matemáticas, cuyos estudiantes habían usado las calculadoras gráficas en el aula durante varios años. Durante seis meses antes del comienzo de la enseñanza con CAS, los docentes trabajaron periódicamente con el equipo de investigación para aprender a usar la calculadora CAS.

CAPÍTULO II. ANTECEDENTES

Los resultados de Kendal y Stacey (2002) arrojan que durante los dos años, los enfoques de enseñanza de los profesores y el propósito para el uso de la tecnología eran estables, y eran influenciados por sus creencias sobre el aprendizaje. Por el contrario, los profesores hicieron cambios en el contenido que enseñan en respuesta a un nuevo conocimiento institucional. Escoger el contenido parecía estar guiado por los propósitos de los profesores para la enseñanza. Otras influencias afectadas en lo que enseñaron los profesores y cómo lo enseñaron fue: el conocimiento de los docentes del contenido, su conocimiento didáctico del contenido, y la falta de legitimidad del CAS como una herramienta para el aprendizaje y durante la examinación en la escuela y más amplia comunidad educativa. La magnitud de las diferencias observadas entre las respuestas de sólo dos profesores indica que habrá muchas respuestas al uso de CAS en las aulas, ya que los maestros pretenden lograr diferentes objetivos de aprendizaje e interpretar sus responsabilidades a los alumnos de diferentes maneras. El uso de una tecnología en la enseñanza del profesor puede provocar cambios en sus creencias, en el conocimiento didáctico, en el conocimiento matemático, y en el aprendizaje de los alumnos.

De igual manera, Murphy (2004), realizó un estudio donde compara dos métodos que utiliza la tecnología de gráficos de computadora para enseñar el concepto de derivada a estudiantes de pregrado. El primer método utiliza laboratorios basados en microcomputadoras, donde los estudiantes caminan frente a un sensor de movimiento y ven un gráfico de su movimiento producido en la pantalla de ordenador. Estudios anteriores han demostrado que este método es muy eficaz en la enseñanza de interpretación gráfica, pero es caro y, a menudo inconveniente (Barclay, 1985; Mokros, 1985; Mokros y Tinker, 1987).

El segundo método utiliza un applet de Java, escrito por el investigador, en el que los estudiantes utilizan un ratón para mover una figura en la parte superior de la pantalla del ordenador, mientras que un gráfico de movimiento de la figura se produce enseguida. Este método es menos caro y más conveniente. Investigadores anteriores habían especulado que el enfoque del sensor de movimiento se basa en el movimiento de todo el cuerpo y el sentido kinestésico, lo que sugiere que el enfoque de Java, en el que el movimiento de todo el cuerpo durante varios pies se sustituye por una parte en movimiento unas pocas pulgadas, podría no ser tan exitoso (Mokros, 1985; Mokros y Tinker, 1987).

Este estudio refuta esta afirmación, lo que demuestra que el applet de Java es tan eficaz como los sensores de movimiento en esta aplicación. En esta investigación participaron sesenta estudiantes de cálculo de primer semestre, que asistieron en poco tiempo en actividades de instrucción fuera de clase. Se usaron treinta y dos sensores de movimiento, y 28 utilizan el applet de Java. En todos los otros aspectos, la instrucción era lo más idéntico posible. Antes y después de la instrucción, los sujetos completaron una prueba de rendimiento de opción múltiple y una encuesta de actitud. La mitad de los sujetos también señaló a los gráficos para representar determinadas situaciones que implican movimiento y ocho participaron en entrevistas individuales.

Murphy (2004) señala que, la prueba de rendimiento estableció que los sujetos habían logrado avances significativos en su capacidad para interpretar gráficos de líneas de eventos de movimiento. La producción gráfica mostró una mejora sustancial en la capacidad de dibujar gráficos de velocidad.

La enseñanza del profesor con el uso de una herramienta tecnológica mejora el rendimiento de los estudiantes. En el caso de la derivada la tecnología ayuda a entender e interpretar la representación gráfica de la derivada, y donde los mismos estudiantes son participes de la construcción de su conocimiento.

Los profesores deben saber integrar de una manera exitosa la tecnología en el aula, con el propósito de mejorar el aprendizaje de los estudiantes, y también para enriquecer el conocimiento didáctico y matemático del mismo docente, esto lo afirman Akkoç, Bingolbali y Ozmantar (2008), esta investigación surge de los intentos de ayudar a los profesores de matemáticas en pre-servicio a integrar la tecnología en su instrucción. La utilidad de la idea de conocimiento didáctico del contenido tecnológico (TPCK) que se argumenta, proporciona un marco para el diagnóstico de las dificultades de los profesores de pre-servicio e identificar las áreas que necesitan desarrollo para una integración exitosa. Este estudio de caso es una parte de un estudio más amplio que busca investigar el desarrollo del TPCK en los profesores de matemáticas de secundaria en pre-servicio durante un programa de formación de profesores de matemáticas en Turquía.

Los datos fueron recogidos durante el período de las actividades de micro-enseñanza de los profesores de pre-servicio en la que los participantes utilizan la tecnología como herramienta para la enseñanza. Veinte profesores en formación enseñan diversos temas. Cuatro profesores en formación les enseñan el concepto de derivada en un punto. Este estudio se centró en uno de estos cuatro profesores en formación. Después de las primeras sesiones de micro-enseñanza, se llevó a cabo un taller en el que se utilizó una versión turca de software de cálculo gráfico y se trabajaron actividades prácticas del contenido tecnológico para diversos temas.

Akkoç, Bingolbali y Ozmantar (2008) concluyen que, los profesores necesitan para enriquecer su comprensión de contenido tecnológico y pedagógico ideas detrás de este contenido que afectan directamente a su TPCK para una integración exitosa de la tecnología para enseñar la derivada en un punto. Los maestros también necesitan desarrollar el conocimiento didáctico del contenido tecnológico. Este tipo de investigación podría ser útil para los formadores de docentes en relación con qué enseñar en términos del TPCK y cómo monitorear su desarrollo de TPCK especialmente durante los cursos tales como Tecnologías de Instrucción para la Enseñanza de las Matemáticas o en formación en servicio para la tecnología.

Otra investigación que implementa la tecnología en la enseñanza de la derivada es el trabajo de Kendal y Stacey (2001b) realizan una investigación sobre el uso del sistema de álgebra computacional (CAS) en la enseñanza del cálculo, en especial con la enseñanza del concepto de derivada basado en múltiples representaciones de la derivada como la numéricas, gráficas y simbólicas. Este estudio examina cómo dos profesores imparten una unidad de veinte lecciones sobre cálculo diferencial a alumnos de 16-17 de edad con la Calculadora Texas Intruments TI-92 CAS en 1998.

Estos docentes tenían fundamentalmente diferentes concepciones de las matemáticas con las prácticas docentes, privilegiando de las representaciones (simbólicas, gráficas y numéricas y sus conexiones), y del uso de la tecnología.

Esta investigación clasifica distintas formas a la enseñanza (estilos de enseñanza). Los estilos de enseñanza se centran en los contenidos con énfasis en la realización de procedimientos o en la comprensión conceptual. El profesor que privilegió su enseñanza en la comprensión conceptual y procedimental, sus estudiantes eran más capaces de interpretar la derivada, alejándose más del uso de CAS. El docente que privilegio su enseñanza con la CAS, hace un mejor uso de la CAS para resolver problemas rutinarios, provocando que con el paso del tiempo el docente adopte más la CAS de manera diferente en su práctica docente.

Kendal y Stacey (2001b) concluyen que el estudio del uso de nuevas tecnologías ofrece más enfoques a la enseñanza y por tanto mayores variaciones entre la enseñanza, y los resultados de aprendizaje pueden llegar a ser evidentes.

Las investigaciones descritas anteriormente muestran que existen diversos factores como son la formación académica, experiencia estudiantil y laboral, y libros de texto, que influyen en el conocimiento del docente para instruir la derivada. El profesor enseña el concepto derivada de una manera teórica y algorítmica como viene en algunos libros de texto, ignorando aplicaciones de la derivada en situaciones físicas. El implemento de recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza del concepto de derivada proponen mayores enfoques e innovación en la instrucción del concepto, y además, permite dar un significado preciso al conocimiento matemático, favoreciendo la construcción del concepto y utilizando diferentes representaciones relaciones con la derivada.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS Y MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO III. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS Y MARCO TEÓRICO

III.1. Fundamentos Matemáticos

Existen varias maneras de acercarnos a la derivada como lo son: la pendiente de la recta tangente a una curva, la velocidad instantánea, la derivada de una función en punto y la tasa de variación instantánea. Los conceptos para abordar el concepto de derivada que a continuación se presenta fueron tomados del libro de *Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas* de Stewart (2001).

III.1.1. La pendiente de la recta tangente

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ se quiere hallar la tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la línea secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En seguida, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces defina la tangente t como la recta que pasa por P con pendiente m (esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la figura 3.1).

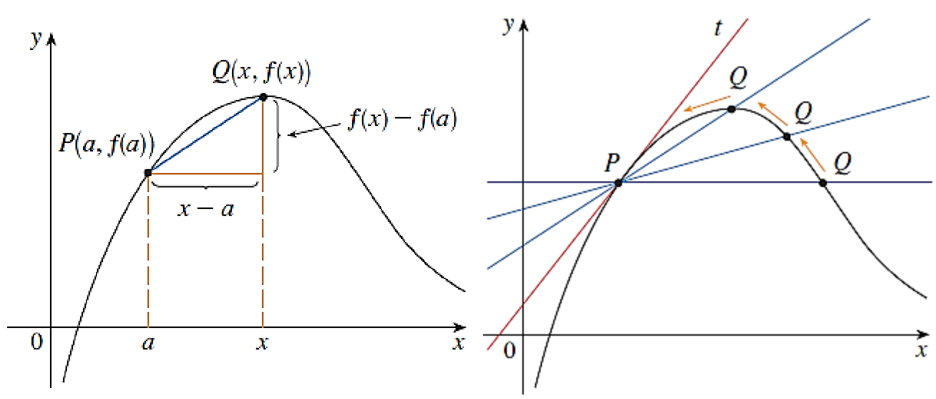


Figura 3.1. Posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P.

Definición 1. La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$, es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \boxed{(1)}$$

cuando el límite existe.

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar.

Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$ y así la pendiente de la línea secante PQ es

$$m_{pq} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(véase la figura 3.2, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

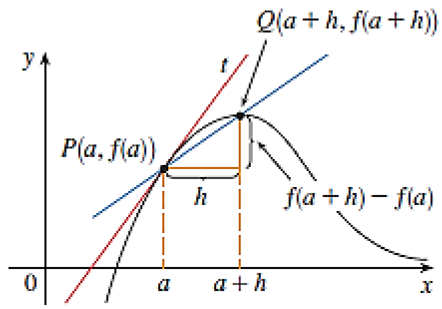


Figura 3.2. Pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ cuando $h > 0$.

Cuando x tiende a a, h lo hace a 0 (porque $h = x - a$,) y, de este modo, la expresión para la pendiente de la recta tangente, que se da en la definición 1, se convierte en

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \boxed{(2)}$$

III.1.2. Velocidad instantánea

Supóngase que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia directa) del objeto respecto al origen, en el instante t. La función f que describe el movimiento se conoce como función de posición del objeto. En el intervalo de $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$ (véase la figura 3.3). La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$velocidad\ promedio = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la secante PQ en la figura 3.4.

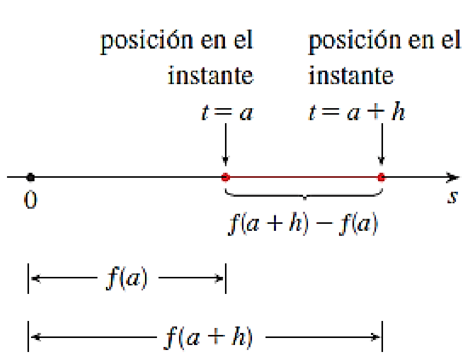


Figura 3.3. Función de posición del objeto.

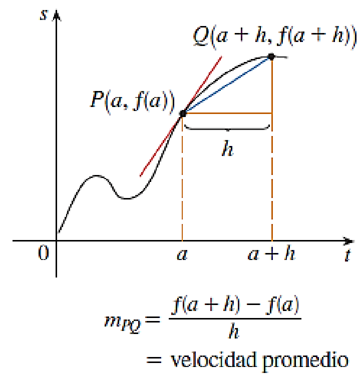


Figura 3.4. Velocidad promedio.

Supóngase ahora que calcula las velocidades promedio sobre lapsos $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Se define la velocidad (o velocidad instantánea) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \boxed{(3)}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P.

Como anteriormente se ha visto, que surge la misma clase de límite en la búsqueda de la pendiente de una línea tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3). En realidad, los límites de la forma surgen cuando calcula una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite sucede, muy seguido, se proporciona un nombre y notación especial.

Definición 2. La derivada de una función f en un número a, se indica mediante $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si escribe $x = a + h$, en tal caso, tiene $h = x - a$ y h se aproxima a 0 si y sólo si x se aproxima a a. En consecuencia, una manera equivalente de establecer la definición de la derivada, como se mencionó en la búsqueda de rectas tangentes, es

$$f'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \boxed{(5)}$$

Defínase la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta tangente que pasa a través de P y tiene pendiente m, proporcionada por la ecuación 1 o 2, ya que, mediante la definición 4, es la misma que la derivada $f'(a)$, ahora puede decir lo siguiente.

La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta tangente a través de $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si usa la forma punto pendiente de la ecuación de una recta, puede escribir una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

III.1.3. Razón de cambio instantánea

Supóngase que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y escriba $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, por lo tanto el cambio en x (también conocido como incremento de x) es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se llama razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la figura 3.5.

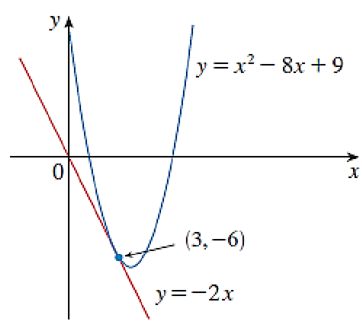


Figura 3.5. Ejemplo de ecuación de la recta tangente a la parábola en un punto.

Por analogía con la velocidad, considere la relación de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_2 y, por lo tanto, al hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas relaciones de cambio promedio se llama razón (instantánea) de cambio de y con respecto a x en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

$$razón\ de\ cambio\ instantánea = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad \boxed{(6)}$$

Reconocer este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la tangente a la curva $y = f\ (x)$ cuando $x = \ a$. Ahora tiene una segunda interpretación:

La derivada $f'(a)$.es la razón de cambio instantánea de $y = f\ (x)$ con respecto a x cuando $x = a$.

El enlace con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f\ (x)$, a continuación la razón de cambio instantánea es la pendiente de la tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 3.6), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana y el valor de y cambia lentamente.

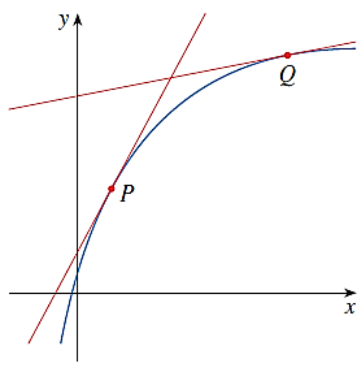


Figura 3.6. Los valores de y cambian con rapidez en P y con lentitud en Q.

En particular, si $s = f\ (t)$ es la función posición de una partícula que se traslada a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s con respecto al tiempo t. En otras palabras, $f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $\mathrm{t} = \mathrm{a}$. La rapidez de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir $|f'(a)|$.

III.1.4. La derivada como una función

Anteriormente se consideró la derivada de una función f en un número fijo a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \boxed{(1)}$$

Ahora cambie su punto de vista y haga que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \boxed{(2)}$$

a con una variable x, obtiene

Dado cualquier número x para el cual este límite exista, asigne a x el número $f'(x)$. De modo que considere f' como una nueva función, llamada derivada de f y definida por medio de la ecuación 2. Sabe que el valor de f' en x, $f'(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f\ (x))$.

La función f' se conoce como derivada de f, porque se ha “derivado” de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{\ x\ |f'(x) existe\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

Como se mencionó al principio de esta sección y con base en lo anterior, es evidente que existen diversas maneras de acércanos a la derivada, con el propósito de acotar dicho contenido matemático, este estudio se centra en investigar la pendiente de la recta tangente a la curva y la tasa de variación instantánea, así como el concepto de la tasa de variación media (TVM).

III.2. Marco Teórico

En esta sección describiremos al marco teórico que sustenta esta investigación, es decir al MTSK, pero antes de adentrarnos a dicho marco teórico, haremos una reseña en cuanto a caracterizaciones sobre el conocimiento del profesor, para después profundizar en modelos que se enfocan en el estudio del conocimiento del profesor y el conocimiento del profesor de matemáticas, para finalizar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

III.2.1. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas

La formación de profesores es una línea de investigación que ha sido estudiada por la matemática educativa desde hace varios años. Realizar investigaciones sobre la preparación del profesor es de suma importancia, porque si se mejoran los conocimientos en matemática y didáctica del profesor, se mejorará el aprendizaje de los estudiantes, esto lo afirma Pino (2013); pues el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos depende de manera fundamental de la formación de sus profesores. Además Pino (2013) agrega que, una de las problemáticas que más ha interesado y preocupado a investigadores y formadores de profesores, está vinculada con el conocimiento matemático y didáctico del profesor de matemáticas. Al respecto, existen diversos modelos (Ball, Thames, y Phelps, 2008; Shulman, 1986; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), que tratan de definir y describir los componentes que integran el conocimiento que los docentes de matemáticas deberían tener para ejercer eficientemente su práctica y favorecer el aprendizaje de sus alumnos.

Llinares (2009) menciona que el conocimiento, concepciones, creencias y procesos de pensamiento del profesor son variables potenciales para llegar a comprender los procesos:

- De enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases,
- Generados en las situaciones de aprender a enseñar matemáticas, y de desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

También Llinares (2009) agrega que en el análisis de los procesos se enfatiza el rol que desempeña el conocimiento y las creencias de los docentes en:

- Caracterizar la enseñanza de las matemáticas,
- La manera en el docente edifica su conocimiento base para la enseñanza durante los procesos de aprender a enseñar matemáticas,
- Los cambios, adecuación o consolidación de las creencias y concepciones de los futuros profesores como consecuencia de estar en entornos de aprender a enseñar matemáticas en especificas o en la actuación de las prácticas de enseñanza, y
- La creación de un nuevo conocimiento base para la enseñanza y análisis, cambios de sus creencias y concepciones originadas durante las actividades de formación continua

Agregado a lo anterior, se puede mencionar que por Llinares, Clark y Peterson (1986, citado por Llinares, 2009) afirman que “el constructor conocimiento del profesor ha sido investigado desde una óptica cognitiva desde los primeros análisis enfocados en el pensamiento del profesor sobre planificación y toma de decisiones” (p. 2). Asimismo, Brophy (1991, citado por Llinares, 2009) sugiere que el interés del conocimiento del profesor “se ha enfocado en las investigaciones de los procesos mentales de los profesores (conocimiento, percepciones y creencias), y en describir las relaciones entre estas cogniciones y la enseñanza” (p. 2).

A todo esto que se entiende por conocimiento, Thompson (1992) afirma que “el conocimiento depende de encontrar criterios tales como cánones de evidencia que se discute como parte del conocimiento sintáctico del profesor” (p. 31). Por otra parte, Alexander, Shallert y Hare (1991), señalan que por conocimiento se refieren a "un stock personal de información, destrezas, experiencias, creencias y memoria de una persona" (p. 317).

Con respecto al conocimiento profesional, Brommer (1998) argumenta que el conocimiento profesional del profesor se considera como los conocimientos científicos indispensable para desempeñar una profesión. Otros autores (Estepa, 2000; Llinares y Sánchez, 1990; Climent, 2002) señalan que el conocimiento profesional del profesor se estima como resultado de la experiencia práctica apilada en la realización de los quehaceres docentes específicos, que se va edificando desde su formación inicial y durante toda su profesión.

El tema del conocimiento del profesor ha sido de gran interés a investigadores, formadores de profesores, y en general a la educación, ya que en el conocimiento están inmersos los conocimientos matemáticos y didácticos que el docente implementa en su práctica docente (Pino, 2013). Esto ha provocado el creciente interés de investigadores, que se ha visto reflejado en el incremento exponencial de investigaciones (Llinares y Krainer, 2006; Sowder, 2007; Llinares, 2009), con el propósito de determinar el conocimiento que debería tener el docente para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea lo más favorable para el aprendizaje del estudiante.

Dentro de la matemática educativa existen varias propuestas de modelos que tratan de determinar y describir los componentes que integran el conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener para desarrollarse eficazmente en su práctica y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes.

El trabajo de Shulman (1986) se considera como el pionero en determinar el carácter específico del conocimiento del profesor que necesita para enseñar, y su propuesta ha tenido un rol importante en el desarrollo de investigaciones.

Shulman (1986) considera en su trabajo tres elementos para el conocimiento del profesor:

- Conocimiento del contenido.
- Conocimiento didáctico del contenido (PCK).
- Conocimiento curricular.

El conocimiento didáctico del contenido (PCK) es descrito por Shulman (1986) como:

> Aquél que vas más allá del conocimiento de la materia en sí misma a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza, es la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la educabilidad. (p. 9)

Además Shulman (1986) agrega que el PCK incluye:

> Las formas más útiles de representación de estas ideas, las más fuertes analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones – en una palabra, las formas de representar y formular la materia que la hace más comprensible para otros. También incluye el entendimiento de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil; las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y conocimientos que traen consigo para el aprendizaje de aquellos temas y lecciones más frecuentemente enseñados. (p. 9)

En otro trabajo de Shulman (1987) se proponen siete categorías para el conocimiento del profesor que llamó categorías del conocimiento base:

1. Conocimiento de los contenidos.
2. Conocimientos pedagógicos generales, con especial referencia a los principios generales de las estrategias de gestión del aula y de la organización que aparecen para trascender la materia.
3. Conocimiento curricular, con especial comprensión de los materiales y los programas que sirven como herramientas de trabajo para los profesores.
4. Conocimiento didáctico del contenido (PCK), es esa amalgama especial de contenido y la didáctica que es el campo propio de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional.
5. Conocimiento de los alumnos y sus características.
6. Conocimiento de los contextos educativos, que van desde el funcionamiento del grupo o aula, el gobierno y el financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas.
7. Conocimiento de los fines educativos, propósitos y valores, y sus fundamentos filosóficos e históricos. (p. 8)

Entre esas siete categorías, Shulman (1987) afirma que el conocimiento didáctico del contenido (PCK) es de especial interés debido a que identifica los cuerpos distintivos de los conocimientos para la enseñanza, pues representa la unión del contenido y la didáctica en el entendimiento de cómo un tópico particular, problema o tema se organiza, representa y adapta para la instrucción.

Además Shulman (1987) menciona que hay por lo menos cuatro fuentes principales de las categorías del conocimiento base de enseñanza las cuales son:

1. Formación académica en las disciplinas de contenido,
2. Los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, planes de estudio, libros de texto, las organizaciones escolares y las finanzas, y la estructura de la profesión docente),
3. La investigación sobre la educación, las organizaciones sociales, el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y el resto de los fenómenos sociales y culturales que afectan a lo que los profesores pueden hacer, y
4. La sabiduría de la práctica misma que permiten desarrollar en cada uno de estos.(p.8)

Después, Koehler y Mishra (2006) proponen un marco conceptual para la tecnología educativa, construyéndolo sobre la formulación del conocimiento didáctico del contenido propuesto por Shulman (1986) y se extiende al fenómeno de los profesores que integran la tecnología en su pedagogía. Este marco conceptual sirve no sólo para unificar las propuestas de integración de tecnologías en la educación, sino también para transformar la formación docente y su práctica profesional del profesorado en la educación superior. Se trata de captar algunas de las cualidades esenciales del conocimiento docente necesario para la integración de la tecnología en la enseñanza, a la vez que aborda la compleja, multifacética y ubicada naturaleza de este conocimiento. En pocas palabras, que los usos pedagógicos reflexivos de la tecnología requieren el desarrollo de una forma compleja, situada del conocimiento que denomina Conocimiento Didáctico del Contenido Tecnológico (TPCK).

El TPCK surgió de la unión de tres grandes conocimientos que son el pedagógico, el de contenido y el tecnológico (véase la figura 3.7). En este modelo, el conocimiento sobre el contenido (C), la pedagogía (P), y la tecnología (T) es central para el desarrollo de una buena enseñanza con el uso de tecnología. Sin embargo, en lugar de tratar a estos cuerpos como separadas, este modelo destaca, además, la compleja interacción de estos tres cuerpos de conocimiento.

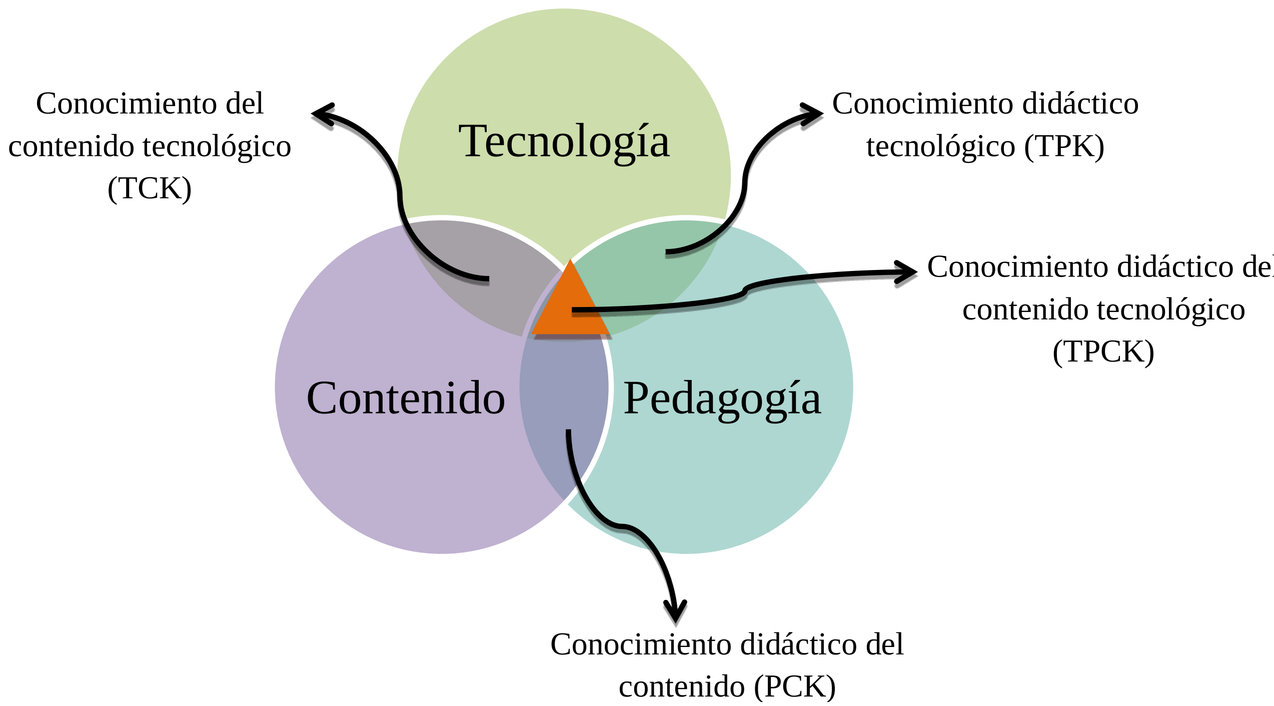


Figura 3.7. Conocimiento didáctico del contenido tecnológico (TPCK) y los tres círculos, Contenido, Pedagogía y Tecnología (Koehler y Mishra, 2006, p. 1025).

Este modelo aparte de mirar a cada uno de estos componentes en el aislamiento, también los observa en pares: conocimiento didáctico del contenido (PCK), el conocimiento contenido tecnológico (TCK), conocimiento didáctico tecnológico (TPK), y los tres en su conjunto como el conocimiento didáctico del contenido tecnológico (TPCK) (Koehler y Mishra, 2006).

El conocimiento didáctico del contenido (PCK), es similar a la idea de Shulman (1986) del conocimiento de la didáctica que se aplica a la enseñanza de contenidos específicos. Este incluye saber qué métodos de enseñanza se adaptan al contenido, y del mismo modo, a sabiendas de cómo los elementos de contenido se pueden organizar para una mejor enseñanza. Se ocupa de la representación y la formulación de conceptos, técnicas didácticas, conocimientos de lo que hace que conceptos difíciles o fáciles de aprender, el conocimiento de los conocimientos previos de los alumnos, y las teorías de la epistemología y también incluye el conocimiento de las estrategias de enseñanza que incorporan representaciones conceptuales apropiadas para hacer frente a las dificultades del alumno y las ideas erróneas y fomentar la comprensión significativa (Koehler y Mishra, 2006).

El conocimiento del contenido tecnológico (TCK), es el conocimiento sobre la manera en que la tecnología y el contenido están recíprocamente relacionados. Aunque la tecnología limita los tipos de representaciones posibles, nuevas tecnologías a menudo ofrecen representaciones nuevas y más variadas y una mayor flexibilidad en la navegación a través de estas representaciones. Los profesores tienen que saber no sólo la materia que enseñan, sino también la forma en que el tema se puede cambiar por la aplicación de la tecnología (Koehler y Mishra, 2006).

El conocimiento didáctico tecnológico (TPK), se refiere al conocimiento de la existencia, componentes y capacidades de diversas tecnologías ya que se utilizan en entornos de enseñanza y aprendizaje, y por el contrario, a sabiendas de cómo la enseñanza puede producirse como consecuencia de la utilización de tecnologías particulares. Esto podría incluir un entendimiento de que existe una gama de herramientas para una tarea en particular, la capacidad de elegir una herramienta basada en su condición física, las estrategias para el uso de la herramienta, y el conocimiento de las estrategias didácticas y la capacidad de aplicar las estrategias para el uso de las tecnologías. Además incluye el conocimiento de las herramientas para el mantenimiento de los registros de clase, asistencia y calificaciones, y el conocimiento de las ideas de base tecnológica genérica como paneles de discusión y salas de chat (Koehler y Mishra, 2006).

El conocimiento didáctico del contenido tecnológico (TPCK), es una forma emergente de conocimiento que va más allá de los tres componentes (contenido, pedagogía y tecnología). Este conocimiento es diferente del conocimiento de un experto disciplinario o de la tecnología y también del conocimiento pedagógico general, compartida por los profesores en todas las disciplinas. El TPCK es la base de la buena enseñanza con la tecnología y requiere una comprensión de la representación de los conceptos que utilizan tecnologías; técnicas didácticas que utilizan las tecnologías de manera constructiva para enseñar el contenido; el conocimiento de lo que hace conceptos difíciles o fáciles de aprender y cómo la tecnología puede ayudar a corregir algunos de los problemas que enfrentan los estudiantes; conocimiento de los conocimientos y las teorías de la epistemología previo de los estudiantes; y el conocimiento de cómo las tecnologías pueden ser utilizadas para construir sobre el conocimiento existente y desarrollar nuevas epistemologías o fortalecer las viejas (Koehler y Mishra, 2006).

Posteriormente Ball, Thames y Phelps (2008), tomando como base las ideas de Shulman (1986), enfocándose sólo en las nociones del conocimiento didáctico del contenido y conocimiento del contenido, proponen un modelo llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*, por su siglas en inglés MKT). El MKT está definido como el "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball y

Schilling, 2008, p. 374), en particular en el nivel primaria. El MKT está constituido por dos categorías, que a su vez está compuesta por otras subcategorías:

1. Conocimiento del contenido. Se incluye conocimiento común del contenido (*Common Content Knowledge*, CCK), conocimiento especializado del contenido (*Specialized Content Knowledge*, SCK) y conocimiento en el horizonte matemático
2. Conocimiento pedagógico del contenido. Está conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes (*Knowledge of Content and Students*, KCS), conocimiento del contenido y la enseñanza (*Knowledge of Content and Teaching*, KCT), y conocimiento del currículo.

Los elementos del MKT, se pueden ver de forma más clara en la figura 3.8.

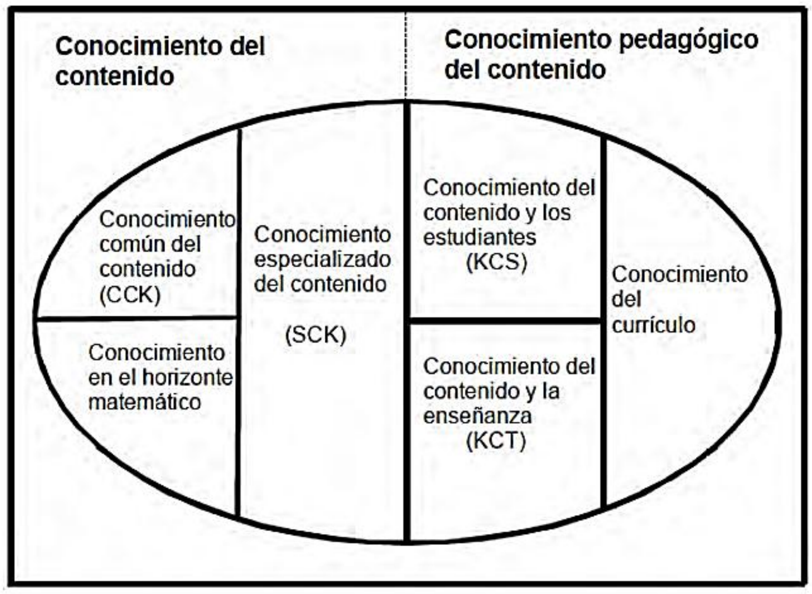


Figura 3.8. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377).

El conocimiento común del contenido (CCK), es definido por Ball, Thames y Phelps (2008) como el conocimiento matemático y habilidad usada en configuraciones distintas de la enseñanza. “Los docentes deben que conocer el material que enseñan; tiene que reconocer cuando sus estudiantes dan respuestas incorrectas o cuando el libro de texto da una definición inexacta. Deben ser capaces de hacer el trabajo que le asignan sus estudiantes” (p. 399).

El conocimiento especializado del contenido (SCK), es el conocimiento matemático y habilidad exclusivas para la enseñanza. El SCK incorpora “cómo representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377-378).

CAPÍTULO III. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS Y MARCO TEÓRICO

El conocimiento en el horizonte matemático, es definido por Ball y Bass (2009) como "una toma de conciencia (más como un turista experimentado y apreciativo que como un guía de turismo) del gran paisaje matemático en el que la experiencia y la instrucción presentes están situadas" (p. 6).

El conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) es definido por Ball, Thames y Phelps (2008) como el conocimiento que mezcla saber acerca de los estudiantes y conocer acerca de las matemáticas. Los profesores deben anticipar a lo que probablemente piensen los estudiantes y lo que van a encontrar confuso. Los docentes al elegir un ejemplo o tarea, tienen que predecir lo que los estudiantes encontrarán interesante y motivador. Los docentes también deben ser capaces de escuchar e interpretar el pensamiento de los estudiantes cómo se expresa y su lenguaje. "Cada una de estas tareas requiere una interacción entre la comprensión específica matemática y la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático" (p. 401).

Ball, Thames y Phelps (2008) señalan que el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), mezcla conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento acerca de las matemáticas. Varias de las tareas matemáticas de enseñanza requieren un conocimiento matemático del diseño de la instrucción. Los profesores secuencian contenido para la enseñanza. Eligen que ejemplos para comenzar, y los ejemplos que se utiliza para ayudar a los estudiantes profundizar en el contenido. Los profesores evalúan las ventajas y desventajas instruccionales de las representaciones utilizadas para la enseñanza

> Da ideas específicas e identifican los diferentes métodos y procedimientos permisibles en el proceso de instrucción. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y una comprensión de las cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje de los estudiantes. (p. 401)

Por último, el conocimiento curricular, es entendido por el equipo de Ball *et al*. (2008) en el sentido de los trabajos de Grossman (1990, citado por Pino, 2013), es decir, se "incluye conocimiento de los materiales curriculares disponibles para la enseñanza de un contenido particular, así como el conocimiento sobre el currículum horizontal y vertical para un tema" (p.8).

El conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) descrito anteriormente, resulta ser un avance significativo en la caracterización de los conocimientos que debe tener el profesor para la enseñanza de las matemáticas, aún quedan ciertas cuestiones por resolver. Carrillo, Climent *et al*. (2013) indican que el MKT ha sido pionero en la consideración del conocimiento matemático desde el punto de vista de la enseñanza, incluyendo el conocimiento de la estructura de la materia, las normas que rigen su funcionamiento, y una cuidadosa reflexión sobre el contenido y sus relaciones, además estos autores señalan que han identificado diversas dificultades que los orillado a plantear preguntas sobre el modelo del MKT, y agregan que, las principales deficiencias fueron reconocidas por Ball *et al*. (2008) y existe preocupación en el conocimiento del contenido (SCK) y el conocimiento contenido común (CCK).

Carrillo *et al*. (2013) afirman que las dificultades en el MKT existen cuando se desea decidir dónde termina CCK y donde comienza el SCK, como resultado de la definición misma de la CCK. El CCK se define como "el conocimiento en manos de alguien educado para el nivel correspondiente bajo análisis" (p.2) (Ball *et al*., 2008).

Otra dificultad está en la demarcación de SCK y HCK, y de SCK y KCS, de nuevo como resultado de la definición de SCK.

> SCK se entiende como una forma de pensar sobre las matemáticas que se produce sólo cuando se considera como algo que se enseña. Sin embargo, a veces es difícil determinar si esta reflexión se refiere a las relaciones entre el artículo a ser enseñado y otros (HCK) o para el aprendizaje del material (KCS) (Carrillo *et al*., 2013, p.3).

Con base a lo anterior, Carrillo *et al*. (2013) concluyen que "han encontrado problemas en la demarcación de los subdominios y que existe una necesidad de definir los subdominios de una manera ligeramente diferente, más adecuada, con el conocimiento de los docentes en relación con las matemáticas de enseñanza" (p. 3). De igual manera indican que las dificultades indicadas anteriormente llevan a pensar que sería más adecuado para alterar el centro del conocimiento del profesor de tal manera que, por un lado, se pueda entender mejor, y por otro, su contenido puede ser mejor de discernir.

El interés de Carrillo *et al*. (2013) es la extensión del conocimiento profesional de los profesores vinculados a las matemáticas como el enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje, el cual era una de las principales contribuciones del trabajo de Shulman (1987). Por su parte Ball *et al*. (2008) y Ball y Bass (2009) delinearon el conocimiento matemático en el área especializada, y es precisamente este aspecto matemático que provoca problemas cuando se aplica al conocimiento didáctico del contenido.

Carrillo *et al*. (2013) trataron de enfocar la especialización de los conocimientos de matemáticas de los profesores desde otra óptica. En lugar de hablar de conocimiento contenido especializado, como parte del conocimiento del docente, se habla del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). A continuación se explica más sobre el MTSK.

III.2.2. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK

El MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge,* ver la figura 3.9) tiene el dualismo de ser una propuesta teórica que modela el conocimiento esencial del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, y como una herramienta metodológica que permite examinar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013).

El MTSK aparece como respuesta a las dificultades detectadas en el MKT (Ball, et al., 2008), mencionadas anteriormente, y adquiere como origen las potencialidades de éste y de otros modelos (Shulman, 1986 y 1987) que caracterizan el conocimiento del profesor de matemáticas (Carrillo *et al*., 2013). Este modelo considera el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera plena en todas sus subdimensiones y evita hacer mención a referentes externos (conocimientos de otras profesiones). Conserva la separación que hace Shulman (1986), y toma en cuenta dos dominios (conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido matemático), proporcionando a cada uno de estos dominios tres subdominios y categorías internas a éstos.

El MTSK considera dos grandes dominios de conocimiento cuya esencia y medios de validación difieren entre sí. Por un lado, considera el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un ambiente escolar. En el modelo, se llama a este dominio el MK (*Mathematical Knowledge*). El otro dominio es el conocimiento relacionado con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje. Este domino se llama PCK (*Pedagogical Content Knowledge*) (Carrillo *et al*., 2013). En ese dominio, una de las categorías que lo conforman es Recursos y Materiales. Cabe mencionar que en cada subdominio del MTSK hay algunas categorías definidas en cada subdominio las cuales pueden consultarse más detalladamente en Flores-Medrano, Escudero, Montes, Aguilar (2014) las cuales surgen de la reflexión teórica y de los datos empíricos de investigaciones previamente realizadas en el grupo del cual emerge el MTSK. Así pues, con esta investigación se espera contribuir en el subdominio del KMT (Conocimiento de la enseñanza de la matemática, por su traducción al español) concretamente en la categoría Recursos y Materiales aportando subcategorías con el objetivo de clarificar y profundizar más dicha categoría, lo anterior a partir del análisis de la información de nuestro estudio de caso.

III.2.2.1. Conocimiento Matemático (MK)

Un componente esencial en el conocimiento del profesor es el conocimiento de la misma disciplina que enseña. Por lo tanto, resulta necesario plantearlo como objeto de investigación saber qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas (Flores-Medrano *et al*., 2014).

En el MTSK tiene tres subdominios que componen al conocimiento matemático: el conocimiento de los temas matemático, conocimiento de la estructura matemática y conocimiento de la práctica matemática.

III.2.2.1.1. Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)

El profesor debe conocer los contenidos que enseña a sus estudiantes y sus significados de manera fundamentada. Integra el contenido que queremos que aprenda el alumno y permite la apreciación de un conocimiento con un nivel de profundización mayor al esperado para los alumnos. Está compuesta de cinco categorías para caracterizar el contenido del KoT y que pueden emplearse indistintamente del tema matemático que el profesor esté abordando ((Flores-Medrano *et al*., 2014).).

- ***Fenomenología*** tiene un carácter de dos valores. Por un lado, considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de modelos atribuibles a un tema, vistos estos como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, entre ellos, los que aparecen en la génesis del propio concepto. Por otro lado, considera el conocimiento que tiene acerca de usos y aplicaciones de un tema (Flores-Medrano *et al*., 2014).).
- ***Propiedades y sus Fundamentos*** establecidos a un tópico o procedimiento en particular.
- ***Registros de Representación,*** es el conocimiento que tiene el profesor sobre las diversas maneras en que puede representar el tópico (numérica, gráfica, verbal, analítica, etc.), así como el conocimiento de la notación y vocabulario apto relacionado a dichas representaciones**.**
- ***Definiciones*** es el conocimiento del conjunto de propiedades que hacen definible a un objeto, también de maneras alternativas que utilice el profesor para definir.
- ***Procedimientos*** es el conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos; las condiciones suficientes para proceder; los fundamentos de los algoritmos y las características que tendría el objeto resultante asociadas al tema en cuestión (Flores-Medrano *et al*., 2014).

III.2.2.1.2. Conocimiento de la estructura matemática (KSM)

Es el conocimiento de las correspondencia que el docente realiza entre diversos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), ya sea de la asignatura que está enseñando o con contenidos de otras materias o niveles educativos. Es decir se refiere concretamente de conexiones entre tópicos matemáticos. Las categorías son:

- ***Conexiones de Complejización***, es la relación de los contenidos enseñados con contenidos consecuentes. Una visión de la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (Klein, 1933), se refleja en la proyección de los contenidos enseñados como potenciadores para futuros contenidos (Flores-Medrano *et al*., 2014).
- ***Conexiones de Simplificación***, es relación de los contenidos enseñados con contenidos previos. Una visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental se refleja en la retrospección de los contenidos enseñados potenciados por los previos (Flores-Medrano *et al*., 2014).

- ***Conexiones de Contenidos Transversales***, "no son conexiones de contenidos más simples o más complejos entre sí, sino que hay una cualidad común en estos que les relaciona, y los modos de pensamiento asociados a dichos temas contemplan esta característica común" (Flores-Medrano *et al*., 2014, p. 7).
- ***Conexiones Auxiliares***, por ejemplo, el implemento de ecuaciones como favorecedor para decretar las raíces de una función "es una conexión interconceptual (se refiere a conectores que son ideas matemáticas que permiten vincular diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento) entre ecuaciones y funciones" (Flores-Medrano *et al*., 2014, p.7).

III.2.2.1.3. Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

En este subdominio se acentúa la importancia de que el docente no sólo conozca las soluciones matemáticas establecidas, sino también la forma de conducirse para llegar a ellos y las características del trabajo matemático (Flores-Medrano *et al*., 2014). Se trata de conocer cómo se descubre y se crea conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas (Flores-Medrano *et al*., 2014). Las categorías que integran este subdominio son:

- ***Prácticas ligadas a la Matemática en General*** estima un tipo de conocimiento sobre cómo se progresan las matemáticas independientemente del concepto abordado, este conocimiento, usado para trabajar comúnmente en matemáticas, es necesario en el profesor ya que suministra de estructuras lógicas de pensamiento que ayudan a comprender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos (Flores-Medrano *et al*., 2014).
- ***Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas*** aparece cuando, por ejemplo, un profesor, al trabajar con conjuntos numerables infinitos, recurre a la inducción para probar cierta propiedad (Flores-Medrano *et al*., 2014).

III.2.2.2. Conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Entre las características que lo hacen particularmente interesante está su caracterización como un conocimiento específico del docente, exclusivo de la labor de enseñanza (Flores-Medrano *et al*., 2014).

El PCK da importancia de que el docente comprenda el contenido matemático desde la perspectiva de un contenido a enseñar (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas), desde una perspectiva de un contenido a aprender (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas) y desde una perspectiva general de los estándares de aprendizaje que se pueden/pretenden lograr (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas) (Flores-Medrano *et al*., 2014).

III.2.2.2.1. Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM)

En este subdominio se abarca los conocimientos acerca de las características de aprendizaje inseparables al contenido matemático. Evita mirar al estudiante como el foco principal del proceso cambiando la mirada hacia el contenido matemático como objeto de aprendizaje, sin dejar de aun lado al alumno. Sus categorías son:

- ***Formas de Aprendizaje,*** es el conocimiento que tiene el docente acerca de las probables formas de comprensión afiliada a la esencia misma del contenido matemático. Abarca el conocimiento de estructuras o teorías personales o institucionalizadas sobre el desarrollo cognitivo del estudiante tanto para la matemática en general como para contenidos particulares (Flores-Medrano *et al*., 2014).
- ***Formas de Interacción de los Alumnos con el Contenido Matemático***, es el conocimiento que tiene el docente acerca de los "procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los usuales como los no habituales, y a los conocimientos sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un determinado contenido" (Flores-Medrano *et al*., 2014, p.10).
- ***Concepciones de los Estudiantes sobre Matemáticas***, es el conocimiento que tiene el profesor acerca de la confianza y atracción que tienen los alumnos con respecto a las matemáticas.

III.2.2.2.2. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)

Este subdominio considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de aquello que el alumno debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado (o lo que ha alcanzado en uno anterior, o lo que alcanzará en uno posterior) (Flores-Medrano *et al*., 2014). Es aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos (Flores-Medrano *et al*., 2014). Sus categorías son:

- ***Contenidos Matemáticos se requieren Enseñar***, este conocimiento puede ser adquirido por el profesor, ya sea mediante la consulta de un documento rector que indique cuáles son esos contenidos, o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que requiere desarrollar en sus estudiantes en ese momento escolar.

- ***Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental esperado,*** se refiere a los niveles de abstracción, de complejización, etc., para un concepto en una específica situación escolar.
- ***Secuenciación de diversos Temas,*** "ya sea dentro del mismo curso o pensando en cursos anteriores (conocimientos y capacidades previas que tiene un estudiante para enfrentar tareas) o cursos posteriores (conocer las potencialidades que debe desarrollar para un determinado tópico)" (Flores-Medrano *et al*., 2014, p.12).

III.2.2.2.3. Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

En este subdominio se incluye la categoría en el que se centra esta investigación; en él se incluye el conocimiento de recursos, materiales, modos de presentar el contenido y el potencial que pueden tener para la instrucción; además, del conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado. En este subdominio habla de conocimientos intrínsecamente dependientes de los contenidos matemáticos en sí. No se trata de conocimiento de matemáticas por un lado y de la enseñanza por otro, sino que se incluyen tan sólo aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. Las categorías que integran este subdominio son:

- ***Formas de Enseñanza***, de manera general el profesor puede tener conocimiento de teorías de enseñanza personales o institucionalizadas específicas de la educación matemática (Flores-Medrano *et al*., 2014).
- ***Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático,*** es el conocimiento sobre la potencialidad matemática que pueden tener ciertas secuencias de actividades, tareas, estrategias o técnicas didácticas, que los docentes examinan potentes en el abordaje de un contenido matemático y un momento de enseñanza, así como sus limitaciones, o los obstáculos que deberán superarse para que la estrategia alcance el objetivo planteado, además de los ejemplos elegidos para representar un contenido, las metáforas, las situaciones y las explicaciones, son utilizados de acuerdo al conocimiento que se tenga sobre sus características y repercusiones en la enseñanza del contenido (Escudero-Ávila, 2015).
- ***Recursos y Materiales*** asociados al contenido a enseñar. Se refiere a los conocimientos del profesor sobre los recursos y materiales en sí mismos y los beneficios o dificultades asociadas al uso de éstos como apoyo para la enseñanza de un determinado contenido matemático. Escudero-Ávila (2015), señala que esta categoría no sólo se refiere a que el profesor conozca un determinado material como puede ser un libro de texto de matemáticas, sino que sepa sobre las características matemáticas y didácticas de ese libro para la enseñanza de un contenido matemático.

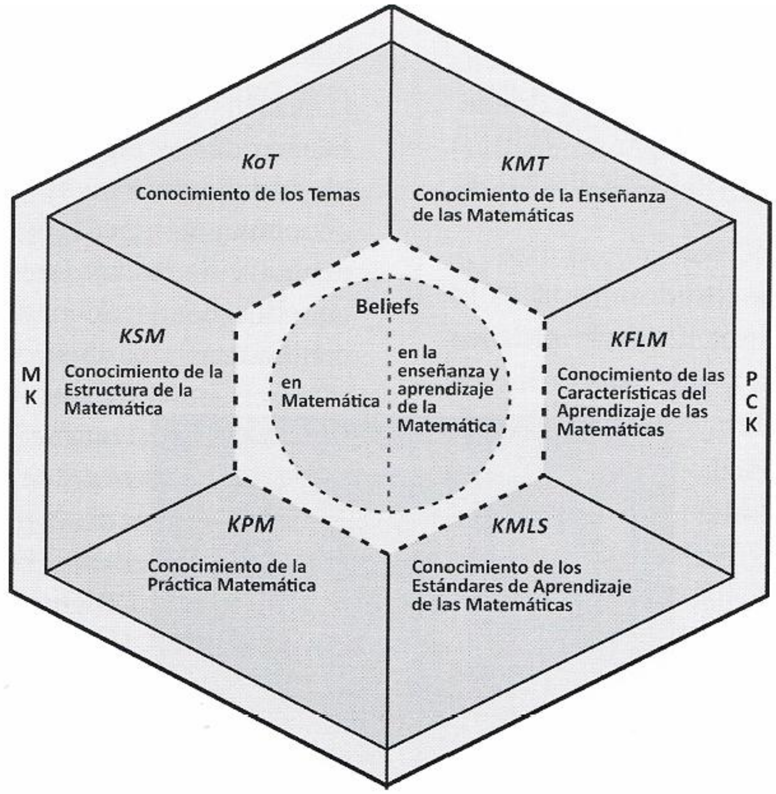


Figura 3.9. Modelo MTSK con sus respectivos dominios y subdominios (Carrillo *et al*., 2013, p.5).

Las concepciones son consideradas en el modelo MTSK, debido a que éstas influyen constantemente en la matemática, la enseñanza y aprendizaje, y en la toma de decisiones del que enseña. Las concepciones son colocadas en el MTSK en el centro del esquema y con líneas punteadas. Lo anterior indica que las concepciones que tienen el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, influyen al conocimiento que tiene en cada uno de los subdominios del modelo (Flores-Medrano *et al*., 2014). Es importante mencionar que esta investigación no considera las concepciones debido en las concepciones debido a que el tiempo es corto para realizar esta investigación, sin embargo se podría considerar para una futura investigación.

En resumen a lo mencionado en esta sección, el MTSK considera el conocimiento especializado específico del profesor de matemáticas, dicho conocimiento especializado están incluidos el conocimiento matemático, didáctico y el currículo que están entorno al profesor de matemáticas, y no hace referencia a conocimientos de otras disciplinas. Además este modelo considera a las concepciones que tienen el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, influyen al conocimiento que tiene en cada uno de los subdominios. La caracterización en subdominios y categorías intrínsecos a estos es la estructura fundamental en el modelo MTSK. Se añaden descriptores o indicadores que permiten una caracterización cada vez más fina. La interiorización y refinamiento en los subdominios intenta construir una herramienta que permita focalizar en los elementos de conocimiento que le son útiles al profesor de matemáticas para desarrollar su labor (Flores-Medrano, *et al*., 2014). Se basa "en la elucubración teórica y en estudios empíricos. Estos segundos son realizados en distintas prácticas del profesor (dentro y fuera del aula, incluyendo los procesos de formación inicial y permanente)" (Flores-Medrano *et al*., 2014, p.13). Además se observa el actuar del docente no está únicamente "basado en aquello que conoce y que el buen desempeño de éste no guarda una relación directa con el *buen conocer*, pero también reconocemos que es necesario delimitar aquellos conocimientos fundamentales que dan entidad a la profesión" (Flores-Medrano *et al*., 2014, p.13).

Con base a lo ya mencionado sobre el MTSK, el interés de esta investigación es el conocimiento que pone en juego el profesor de matemáticas sobre la enseñanza de la derivada al implementar recursos didácticos tecnológicos. Está posicionada en el marco del MTSK, y se enfoca en la subdominio ***KMT***, y se centra en la categoría de este subdominio que se llama ***Recursos y materiales***. Este subdominio como se explicó anteriormente agrega el conocimiento de recursos y materiales, para potencializar la instrucción, y hace referencia al conocimiento intrínsecamente dependiente de los contenidos en sí. No se trata de separar el conocimiento de matemáticas y de enseñanza, sino que se incorporan tan sólo aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza.

La categoría *Recursos y Materiales* asociados al contenido a enseñar, alude a los conocimientos que tiene el profesor sobre los recursos y materiales (libros de texto, pizarras normales y electrónicas, softwares educativos, aplicaciones móviles, etc.) y los beneficios o perjuicios asociadas al uso de estos como apoyo para la enseñanza de un cierto contenido matemático. Algunas investigaciones dan elementos que se deben considerar en la caracterización del conocimiento sobre recursos tecnológicos que debería tener el profesor de matemáticas. Al respecto, Santana y Climent (2015) afirman que el docente debe saber las capacidades de la herramienta tecnológica para poder implementarla en el aula de modo que mejore la enseñanza, también debe conocer posibles dificultades de aprendizaje que puede propiciar.

Hinostroza (2000) señala que los profesores, al utilizar materiales, recursos y actividades innovadoras ofrecidas por un software educativo podrán disponer de mejores herramientas para desarrollar su docencia, y aunque sus métodos no cambien, aumentaría la calidad de los recursos utilizados. Este cambio tendría impactos positivos en el proceso de aprendizaje de los alumnos ya que dispondrían de recursos mejores y más diversos. De igual manera, González (1989, citado por Villanueva, 2004) sugiere que "los medios de enseñanza cumplen funciones instructivas, cibernéticas, formativas, y recreativas, a las cuales se le agrega las funciones: motivadora-innovadora- creadora, lúdica-recreativa y desarrolladora-control" (p.705).

Por su parte, Castillo (2008) indica que las teorías relacionadas con la innovación en la educación sugieren que las tecnologías actúan como catalizadoras del proceso de cambio. Tal efecto ayuda a crear una alteración en los métodos y procedimientos que utiliza un profesor, facilitando la aceptación de estrategias pedagógicas diferentes que, eventualmente, son más efectivas. Desde una visión distinta, que alude a las acciones del profesor, es posible afirmar sobre el potencial de estas tecnologías para ejercer como intermediario en la actividad profesional. En el mismo sentido, Celestino, Echegaray y Guenaga (2003), señalan que el conflicto de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en la producción y difusión de literatura docente y materiales didácticos es incuestionable. La instrucción de calidad, ha de tomar en cuenta las TIC, ya que éstas pueden suponer un cambio fundamental en la didáctica, pero no se debe guiar en utilizar la tecnología, sino lograr que los estudiantes aprendan bien el contenido de la asignatura a la vez que se formen y desarrollen en ellos, valores e intereses profesional.

Con base en la Real Academia Española (2015) caracterizamos tecnología y tecnología educativa. Entonces entendemos por *tecnología* como el conjunto de instrumentos, métodos, y técnicas que se encargan de la solución de un problema. La *tecnología en la educación* la comprendemos como el conjunto de conocimientos de una disciplina y conocimientos didácticos, que están relacionados a métodos, técnicas y herramientas, que tiene una finalidad educativa, y que están implementados en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Nos referimos a *tecnologías educativas* como los son: pizarrón, los libros de textos, marcadores, gises, computadora, proyector, pizarrones electrónicos, software o dispositivos móviles. Coincidiendo con Koehler y Mishra (2009), quienes aplican la palabra tecnología como de tipo analógico y digital, es decir, tecnologías nuevas y viejas, las tecnologías digitales las caracterizan como la computadora, dispositivos portátiles o aplicaciones de software, y las tecnologías analógicas las caracterizan como libros de texto o lápiz.

Esta investigación asume la postura de tecnología de tipo digital como lo caracterizan Koehler y Mishra (2009). Por lo tanto, comprendemos por recursos didácticos tecnológicos como aquellas herramientas que implementa el profesor para realizar su práctica, esas herramientas son de carácter específicamente tecnológico digital y con fines educativos (particularmente con la enseñanza de las matemáticas), que pueden ser tanto un *Software* (por ejemplo, Geogebra, Cabri o Derive) hasta un *Hardware* (por ejemplo, Calculadora, Tablets o Pizarrón electrónico). Escudero-Ávila (2015) se refiere a los recursos didácticos tecnológicos como aquellas herramientas "diseñadas específicamente para la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo Cabri, como los que han sido adaptados para fines educativos como las hojas de cálculo de Excel" (p.302).

Para finalizar y como se mencionó anteriormente, con esta investigación se espera contribuir en el subdominio del KMT (Conocimiento de la enseñanza de la matemática, por su traducción al español) concretamente en la categoría Recursos y Materiales aportando subcategorías, con el objetivo de clarificar y profundizar más dicha categoría, lo anterior a partir del análisis de la información de nuestro estudio de caso.

.

CAPÍTULO IV

MARCO METODOLÓGICO

CAPÍTULO IV. MARCO METODOLÓGICO

Coincidiendo con lo que sugiere Kaplan (1973, citado por Cohen, Manion y Morrison, 2007) que el objetivo de la metodología es que nos ayude a comprender, en los más extensos términos, no los productos de la investigación científica, sino el proceso en sí, y en describir los tipos de enfoque, y los paradigmas de investigación.

IV.1. Investigación cualitativa

La investigación cualitativa es una labor que sitúa al observador en el mundo. Radica en un grupo de prácticas interpretativas que hacen al mundo incuestionable. "Estas prácticas alteran el mundo, lo transforman en una serie de representaciones, que insertan las notas de campo, las entrevistas, conversaciones, fotografías, registros y memorias. La investigación cualitativa conlleva un acercamiento explicativo y naturalista del mundo" (Denzin y Lincoln, 2005, p.3).

Las metodologías cualitativas se dirigen hacia la comprensión de las situaciones exclusivas y específicas, se enfocan en la averiguación de significado y de sentido que les conceden a los hechos los mismos sujetos, y en cómo coexisten y perciben ciertos fenómenos o experiencias individuos o grupos sociales a los que se investigan (Rodríguez y Valldeoriola, 2009).

Algunos de los principales rasgos característicos de cualquier investigación cualitativa (Rodríguez y Valldeoriola, 2009) son:

1. Tienen lugar en un contexto natural, al que debe desplazarse el investigador.
2. Utiliza múltiples métodos participativos, interactivos y humanísticos.
3. Es emergente.
4. Es primordialmente interpretativa.
5. Afronta los fenómenos sociales de forma holística.
6. El investigador restringe y determina la investigación.
7. El investigador emplea argumentos complicados, múltiples, repetitivos y paralelos.
8. El investigador usa una o más estrategias de investigación como dirección del proceso.

Por su lado Creswell (1998, citado por Vasilachis de Gialdino, 2006) afirma que entre las razones inevitables para hacer frente a un estudio de corte cualitativo son:

1. La pregunta de investigación cualitativa empieza comúnmente con el término ¿Cómo? o ¿Qué?
2. El tema necesita ser investigado.
3. La exigencia de presentar una detallada investigación del tema.

4. La necesidad de estudiar a las personas en sus momentos naturales.
5. El investigador como una persona que aprende rápidamente y puede relatar en términos de los actores en lugar de sentirse como un experto que los evalúa.

Por lo descrito anteriormente, la metodología que se emplea en este estudio es de tipo cualitativa, porque retomando nuestra pregunta de investigación se desea conocer:

¿Qué conocimiento pone en juego el profesor al enseñar la derivada en cuanto al uso de recursos didácticos tecnológicos?

Además, para responder dicha pregunta se pretende identificar, interpretar obtener y caracterizar el conocimiento del profesor, al enseñar la derivada, en cuanto a recursos didácticos tecnológicos. No es de tipo cuantitativa porque no se desea medir cantidad.

Este estudio es a su vez de naturaleza descriptiva, porque se busca especificar con una mayor exactitud el conocimiento de Pepe que estaba enseñando el tópico de la derivada implementado recursos didácticos de índole tecnológicos. Las investigaciones descriptivas buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno sometido a análisis (Dankhe, 1989). Miden o evalúan varios aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno o fenómenos a investigar. En un estudio descriptivo se eligen una serie de cuestiones y se mide cada una de ellas independiente, para así, describir lo que se investiga (Hernández, Fernández y Baptista, 1997).

Los estudios descriptivos se enfocan en medir con la mayor exactitud posible. Selltiz, Jahoda y Cooks (1965) menciona que en esta tipo de estudios el investigador deber ser capaz de definir que se va a medir y como se va a lograr exactitud en esa medición. De igual manera, debe ser capaz de especificar quien o quienes tienen que incluirse en la medición.

IV.2. Estudio de caso

Los casos que son de interés en la educación los conforman en su mayoría, personas, las personas se asemejan en cierta manera unos a otros, en cierta forma son únicos, un caso puede ser un individuo o un grupo de alumnos, o un determinado movimiento de profesionales, el caso es uno entre muchos, en cualquier estudio dado, se centra en ese uno (Stake, 2007). Smith (s.f., citado por Stake, 2007, p. 16) definió caso como “sistema acotado, siendo un caso un objeto más que un proceso”

Con respecto al profesor Pepe se realiza un estudio de caso porque se investiga detalladamente, comprensivamente y profundamente el conocimiento de un profesor (nivel superior) que imparte la asignatura de Laboratorio de Cálculo y Geometría II.

Stake (2007) menciona que el estudio de caso es el estudio de la singularidad y de la complejidad de caso singular, para llegar a comprender su actividad en coincidencias importantes. Rodríguez, Gil y García (1999), consideran que "el estudio de casos implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de interés" (p. 92), el caso puede ser más simple o más complejo, con base en los intereses, objetivos y posibilidades del estudio, puede ser una persona, un grupo u organización, un acontecimiento, un plan de estudios o una determinada acción, entre otros.

Stake (2007) realiza una clasificación del estudio de caso, esta clasificación se presenta en la tabla 4.1.

Tabla 4.1

Clasificación del estudio de caso según Stake (2007).

Intrínseco	Instrumental	Caso múltiple o colectivo
El estudio se desarrolla porque se desea conseguir un mejor entendimiento de un determinado caso.	Examina un caso particular para proporcionar más información sobre un tema o para reformular una generalización.	Un conjunto de casos que se estudia de forma conjunta para investigar un determinado fenómeno, población o condición general
No se inclina por un caso específico porque éste represente a otros casos o porque sea explicativo de un determinado problema o fenómeno, sino porque es de interés por sí mismo.	El caso adopta un papel complementario y su utilidad radica en la aportación de datos para entender otro fenómeno.	Se trata de un estudio instrumental extendido a varios casos
		Los casos pueden ser similares o no, ya que no es necesario conocer de antemano si tienen alguna característica en común.

Con base a la clasificación de Stake (2007) esta investigación es de tipo *instrumental*, porque se indaga el caso de Pepe para suministrar más información acerca de su conocimiento, este profesor estaba enseñando en concepto de la derivada con recursos didácticos tecnológicos, además se identifica, analiza, obtiene y posteriormente se caracteriza el conocimiento de dicho profesor que ponen en juego para enseñar dicho tópico en cuanto a recursos didácticos tecnológicos. No es *intrínseco* porque no se desea conseguir un mejor entendimiento del profesor, ni tampoco es un *caso múltiple o colectivo* porque no se desea estudiar de forma conjunta un determinado fenómeno, población o condición general.

El estudio de caso contempla tanto el estudio de casos únicos, como el estudio de casos múltiples (Yin, 2009), además Yin menciona que existen cinco razones que justifican la opción por un estudio de caso único:

- El caso tiene un carácter crítico en la confirmación, modificación o ampliación de una teoría o conocimientos disponibles sobre el objeto de estudio.
- Representa un caso único o extremo, es decir, se trata de un caso irrepetible y/o peculiar.
- Es un caso típico o representativo que permite recopilar datos sobre un fenómeno, lugar, circunstancia, etc., habitual.
- Se trata de un caso revelador que permite al investigador observar un fenómeno, situación, sujeto o hecho que hasta el momento era inaccesible para la investigación social.
- Tiene un carácter longitudinal, que permite que el investigador estudie un mismo caso en diferentes momentos y observar cómo ciertas circunstancias cambian con el paso del tiempo.

Además de lo anterior, se deben tomar en cuenta otros criterios en el momento de *seleccionar* los casos (Rodríguez, Gil y García, 1999; Yin, 2009):

- Tener fácil acceso al caso (datos, personas, documentos, etc.).
- Existe una alta posibilidad de que se den una mezcla de procesos, programas, personas, interacciones y/o estructuras relacionadas con las preguntas de investigación.
- Se puede establecer buena correspondencia con los informantes.
- El investigador puede desarrollar su labor mientras resulte necesario.
- La calidad y credibilidad del estudio estén aseguradas.

Otro de los aspectos importantes que se debe plantear en el diseño de una investigación basada en el estudio de casos es la *unidad de análisis*. La demarcación de las unidades de análisis se debe hacer a partir de las preguntas de investigación. Si estas preguntas no orientan sobre las unidades de análisis, se está ante preguntas mal formuladas, ambiguas o vagas. Según el número de unidades de análisis contempladas en cada caso, se está ante diseños globales o inclusivos (Rodríguez y Valldeoriola, 2009).

Con base en lo anterior, a continuación describiremos nuestro caso de estudio. El caso de interés para esta investigación es un profesor de matemáticas que imparte clases en la Licenciatura en Matemáticas ofertada en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. La unidad académica se encuentra ubicada en la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, México. Por ética de la investigación el seudónimo asignado a este profesor es Pepe, las características del docente en seguida.

Seudónimo	Formación profesional	Años de experiencia docente	Asignaturas que ha impartido
Pepe	Licenciatura en Enseñanza de la Matemáticas. Maestría y Doctorado con especialidad en Matemática Educativa.	8 años	Cálculo diferencial e integral. Álgebra. Geometría plana y analítica. Álgebra lineal.

Pepe impartió durante el semestre que corresponde a la fecha del 25 de enero al 29 de Mayo del 2016 la asignatura de Laboratorio de Cálculo y Geometría II. En esta materia se enseña el tópico de la derivada con el uso de tecnología (las clases se grabaron del 29 de febrero al 19 de marzo del 2016), está fue la razón de solicitar a Pepe el poder observar su práctica y analizar el conocimiento que evidenciará en el proceso de instrucción de este contenido matemático escolar. Este laboratorio se imparte dos veces a la semana con una duración de una hora cada clase. De acuerdo al plan de estudio (2014) de la institución, el Laboratorio de Cálculo y Geometría II se enseña en el segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas y el concepto de la derivada se encuentra en la unidad cuatro llamada: *Resolver actividades en un contexto gráfico, numérico y algebraico para aplicar definiciones de cálculo diferencial como: La derivada y su aplicación en contextos diversos de la ciencia, así como graficar y describir ecuaciones y describir ecuaciones de curvas en coordenadas polares*.

Pepe realiza su clase en un centro de cómputo, donde cuenta con los recursos didácticos tecnológicos siguientes: una computadora para él y para cada alumno; la instalación del software de geometría dinámica (Geogebra); además de un proyector y un pizarrón electrónico. Todo el material es utilizado por el profesor para la clase de Laboratorio. En particular en esta investigación se analizan dos escenarios relacionados con la práctica docente de Pepe, el primero consiste en la planeación de la clase y el segundo corresponde a la sesión frente a grupo.

Es importante mencionar que la asignatura de Laboratorio de Cálculo y Geometría II es una materia complementaria al curso de Cálculo diferencial, que de acuerdo al plan de estudio (2014) se encuentra en el segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

El caso se analiza desde una perspectiva cualitativa y descriptiva, donde la información se recolecta mediante la planeación escrita de la clase, las grabaciones del desarrollo áulico en video y entrevistas grabadas con el profesor, dichos instrumentos se especifican en seguida.

IV.3. Instrumentos para la recolección de información

Para la recolección de los datos uno de los instrumentos es la grabación mediante videos de las clases del profesor; ya que permiten investigar vínculos más directos entre comportamientos, acciones y conocimientos. La grabación en video de las clases proporciona una interacción entre el observador y los participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez. Planas (2006) menciona que el video permite establecer conexiones más directas entre comportamientos y acciones observables e interpretaciones del observador, y en la fase de recolección de datos, el video de una sesión de clases proporciona una perspectiva poliédrica de las interacciones entre participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez. Gil (2011) afirma que el video como parte de un proceso de investigación en comunicación (social, audiovisual, periodística) puede ser utilizado tanto como herramienta de trabajo, en cuanto que permite el seguimiento al objeto de estudio, o como producto final.

Estando de acuerdo con LeFevre (2002, citado por Sowder, 2007) y Sowder (2007) que los casos en videos ofrecen una oportunidad para que los docentes compartan una experiencia común de práctica de enseñanza, y puede actuar como un andamio para desarrollar teoría de la práctica y aplicar la teoría a la práctica, el video posee el potencial hacer la práctica accesible en trozos de tamaño manejables, y la oportunidad que ofrece vídeo para pausar, rebobinar, y de repetir la práctica es digna de atención y tiene la posibilidad de retratar la complejidad de la práctica y al mismo tiempo permite un enfoque de la acción

Gil (2011) afirma que el uso del video permite:

- “Observar y comprender actividades, así como obtener información adicional acerca de comportamientos y hechos que de otra manera no serían posibles de obtener, incluyendo factores ambientales, anímicos y expresivos que pudieran afectar o intervenir en el desarrollo de la investigación”(p.5).
- Registrar “procedimientos, situaciones, rituales y el desempeño de una comunidad o de un grupo de individuos, con la mínima intervención en la cotidianidad de las personas documentadas” (p .5).
- Obtener evidencias frente a las problemáticas o situaciones que son observadas

Por otro lado, como se mencionó anteriormente también se analiza la planeación de la clase del profesor. Al respecto Gómez (2002) mención que “el conocimiento del profesor cambia constantemente; la planeación para la enseñanza incorpora la producción de una trayectoria hipotética de aprendizaje; e l cambio continuo en el conocimiento del profesor produce un cambio continuo en la trayectoria hipotética de aprendizaje” (p.255), asimismo Gómez (2002) afirma que la planeación para los docentes figura “la versión más conocida del currículo. Es el esquema con el que tradicionalmente se describen los planes de formación a cargo de un profesor en el espacio de un aula” (p.256). La planeación de una hora de sesión de clase debe tener, entre otras cosas, la predicción del comportamiento de los estudiantes cuando encaran la labor que componen las actividades sugeridas. “La complejidad del contenido matemático y de los procesos cognitivos necesarios para construirlo hace que las actuaciones de los escolares puedan ser diferentes de aquellas previstas por el profesor en su planificación” (Gómez, 2002, p. 283).

La última técnica utilizada es la entrevista realizada al profesor, con la intención de solicitar información, para poder tener elementos sustanciales de cara a la caracterización del conocimiento del profesor al enseñar la derivada en cuanto a recursos didácticos tecnológicos. Se realiza una entrevista porque la entrevista es la técnica con la cual el investigador busca conseguir información de una manera “oral y personalizada. La información versará en torno a acontecimientos vividos y aspectos subjetivos de la persona tales como creencias, actitudes, opiniones o valores en relación con la situación que se está estudiando” (Murillo, 2012, p.6). También concordando con Rodríguez, Gil y García (1999) afirman que "la entrevista es una técnica en la que una persona (entrevistador) solicita información de otra o de un grupo (entrevistados, informantes), para obtener datos sobre un problema determinado" (p. 165).

Las principales características atribuidas a las entrevistas (Meneses y Rodríguez, 2011) son:

- Es un procedimiento designado a adquirir información oral.
- Supone una dinámica interactiva en la que, básicamente, el entrevistado pregunta y el entrevistado responde, posibilitando cierto grado de reajuste (clarificación y exploración) en las preguntas y respuestas, ya sea cara a cara, telefónicamente o en línea.
- Siguen un estilo relativamente informal, que podría definirse como una conversación con propósito explícito.
- Las preguntas o temas tratados en la entrevista son abiertos, de modo que el entrevistado pueda ofrecer una respuesta propia.
- El objetivo no es contrastar ideas, creencias o supuestos, sino aproximarse y comprender las ideas, creencias y supuestos de la persona entrevistada.
- Muchas entrevistas cualitativas se basan en el hecho de que el conocimiento es situado y contextual y de que, por tanto, la tarea del entrevistador es procurar generar el contexto adecuado para que ese conocimiento se evidencie.
- El entrevistador emplea tácticas de persuasión para motivar al entrevistado a responder de manera adecuada.
- El entrevistador registra en diversos soportes la información obtenida durante la entrevista (p. 36).

Murillo (2012) distingue distintas tipologías de entrevistas, clasificándolas según su estructura y su diseño de la misma o entre el momento en el que se lleva a cabo.

Según su estructura y diseño se clasifican en:	**Según el momento de realización se clasifican en:**
1. Entrevistas estructuradas 2. Entrevistas semiestructuradas	1. Entrevista inicial, exploratoria o de diagnóstico.

3. Entrevistas no estructuradas o abiertas	2. Entrevista de desarrollo o de seguimiento. 3. Entrevista final.

A continuación se presentan las tablas 4.2 y 4.3 con el propósito de diferenciar las diversas tipologías de la entrevista de acuerdo con Murillo (2012).

Tabla 4.2

Tipo de entrevista de acuerdo a su diseño y estructura.

Entrevistas estructuradas	Entrevistas semiestructuradas	Entrevistas no estructuradas o abiertas
El investigador crea una planificación previa de todas las preguntas que se exponen, y se hace un guion de forma ordenada y dirigida.	El investigador previamente a la entrevista, realiza una tarea de planificación de la misma elaborando un guion que determine aquella información que desea obtener	No se requiere de la elaboración de ningún tipo de guion anterior a la entrevista
Las preguntas son cerradas y sólo se puede afirmar, negar o responder una respuesta concreta y exacta.	Las preguntas que se realizan son abiertas	La información que se obtiene es el resultado de la elaboración paralela a partir de las respuestas del entrevistado.
El entrevistado no puede realizar ningún de comentarios, ni realizar valoraciones.	Durante el transcurso de la entrevista se unirán temas y se irá construyendo un conocimiento universal y comprensivo de la realidad del entrevistado.	
	El investigador siempre debe de estar concentrado en la atención en las respuestas del entrevistado.	

Tabla 4.3

Tipo de entrevista de acuerdo al momento de realización.

Entrevista inicial	Entrevista de desarrollo o de seguimiento	Entrevista final
El objetivo es la examinación de aspectos notables y particulares de una realidad para sostener un primer acercamiento y mirada de la misma.	Describe el desarrollo de una situación, o de una apariencia determinada dentro del contexto de estudio.	Se realiza cuando el propósito es diferenciar información, finalizar aspectos de la investigación, o comunicar sobre algunos asuntos con el objetivo de seguir el desarrollo de investigación.
Posee gran valor si se realiza en los primeros momentos, cuando se accede al contexto a investigar.	Investiga y conoce más íntegramente la forma de vida, relaciones, sucesos y apreciaciones.	La organización en que se realice variará de acuerdo a los objetivos generales de la investigación.
Otorga la oportunidad de crear un entorno de conducta a un futuro.		
Se puede realizar de una manera muy organizada hasta con un formato no estructurado, de acuerdo a las intenciones del entrevistador.		

Con base en las tablas anteriores el tipo de entrevista de este trabajo es de carácter *semiestructurada*, porque previamente a ella, se realiza una tarea de diseñar un guion que determina aquella información temática que se quiere obtener, además porque las preguntas que se realizan son abiertas, durante el transcurso de la entrevista se unirán temas y se irá construyendo un conocimiento universal y comprensivo de la realidad del profesor.

El guion de la entrevista semiestructurada así como el objetivo de las preguntas se presentan en el Anexo I.

IV.4. Instrumentos para el análisis de la información

Las sesiones de las clases video-grabadas de Pepe, las transcripciones de la misma y la planeación de la clase, son la fuente principal de información que se analiza. El análisis de los datos tiene por objetivo obtener indicadores o descriptores del subdominio KMT para el caso del profesor. Los indicadores permiten identificar y comprender (Sosa, 2011) el KMT, además, estos proporcionan una caracterización cada vez más fina de la categoría Recursos y Materiales del KMT. Estos indicadores se obtendrán de los subindicadores, que a su vez, se adquirirán de la planeación y de las grabaciones de las clases.

En el análisis de las clases y de la planeación se utilizan dos instrumentos que se integran en uno sólo. El primer instrumento para analizar el KMT es el modelo del MTSK propuesto por Carrillo, Climent *et al*. (2013), como se mencionó en la capítulo tres, este modelo tiene la dualidad de ser un marco teórico-metodológico, como una herramienta metodológica permite examinar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013). El segundo instrumento está basado en una adaptación realizada al modelo propuesto por Ribeiro (2008, citado por Sosa, 2011) para modelar la enseñanza, este instrumento se utiliza para organizar la información de las transcripciones de las clases y así analizarlas. Es importante remarcar que un complemento para analizar la información es la entrevista, dejando como fuente principal la planeación de la clase y las sesiones frente a grupo grabadas en videos.

IV.4.1. Modelo para caracterizar el conocimiento del profesor

Para caracterizar el conocimiento del profesor al enseñar la derivada en cuanto a recursos didácticos tecnológicos, usamos el modelo del MTSK como una herramienta metodológica, ya que permite investigar diversas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías. Para identificar, interpretar, obtener y caracterizar el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT) y su categoría Recursos y Materiales se realiza mediante los indicadores, estos indicadores van a permitir una caracterización cada vez más refinada del conocimiento del profesor al enseñar la derivada en cuanto a recursos didácticos tecnológicos.

La explicación detallada de los dominios, subdominios y categorías del modelo MTSK, se encuentran en el capítulo tres en la sección del marco teórico (ver la figura 3.9 que se encuentra en el capítulo tres).

IV.4.2. Modelo para organizar y analizar la información

Sosa (2011) realiza una adaptación del modelo propuesto por Ribeiro (2008, citado por Sosa, 2011), el modelo de Ribeiro posibilita crear el análisis de la práctica del docente de matemáticas en temas de primaria. En el modelo de Ribeiro (2008, citado por Sosa, 2011) se considera a la clase "como un todo formado por episodios fenomenológicamente coherentes, regidos por un objetivo declarado o interpretado por el investigador" (p. 52). En los episodios se determina el evento inicial y el evento final de ese objetivo. En esos dos eventos el docente interactúa con los alumnos utilizando un definido tipo de comunicación, una o diversas técnicas para lograr su objetivo. Durante las interacciones que se dan entre el evento inicial y evento final se "identifican los indicadores y los conocimientos matemáticos para la enseñanza (CME)" (p. 52), en este modelo siguen el modelo de Ball *et al*. (2008). Ribeiro (2008, citado por Sosa, 2011) propone que el nombre del episodio este claramente conectado con el objetivo del profesor en alguna situación en especifica.

La adaptación gráfica del modelo propuesto por Sosa (2011), como lo mencione anteriormente, es una adaptación del modelo de Ribeiro (2008, citado por Sosa, 2011), dicho modelo está inspirado en el modelo que sugiere Schoenfeld (1998a, b, 2000, citado por Sosa, 2011). En el modelo propuesto por Sosa (2011) tanto los objetivos como los conocimientos son elementos esenciales en el modelo. "La identificación de los objetivos da luz a una división en episodios fenomenológicamente coherentes, permitiendo también identificar los eventos iniciales y finales" (Sosa, 2011, p. 54). Cabe mencionar que las acciones que considera el docente juegan un rol muy importante porque se utilizan como ayuda para comprender y modelar el objetivo del docente. Con respecto a los conocimientos referentes al CME, estos son el centro de interés del modelo de Sosa (2011). Asimismo, el modelo que propone Sosa (2001) queda representado en la figura 4.4.

❖ [i.j] [1] Descripción del episodio. (línea de inicio – línea de fin)

Objetivo general: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.

Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del episodio.

[A, i.j] [2] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

Conocimientos

Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese episodio.

Conocimiento Común del Contenido (**CCC**)

Subdescriptores

Conocimiento Especializado del Contenido (**CEC**)

Subdescriptores

Horizonte Matemático (HM)

Subdescriptores

Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (**CC-Es**)

Subdescriptores

Conocimiento del contenido y de la Enseñanza (**CC-En**)

Subdescriptores

[1] [i.j] representa la clase i y episodio j, al que corresponde la situación específica.

[2] En esta adaptación, en la etiqueta de la acción, hubo que anteceder la letra A para que no se confundiera la etiqueta del subepisodio con la de la acción (Sosa, 2011).

Conocimiento Curricular (**CC**)

Subdescriptores

Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese episodio.

- [i.j.k] [3] Descripción del subepisodio. (línea de inicio – línea de fin)

Objetivo particular: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.

Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del subepisodio.

[A, i.j.k] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

Conocimientos

Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese subepisodio.

CCC

Subdescriptores

CEC

Subdescriptores

HM

Subdescriptores

CC Es

Subdescriptores

CC En

Subdescriptores

CC

Subdescriptores

Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese episodio.

Figura 4.4. Propuesta de Sosa (2011) el cual es una modelo adaptado al modelo de Ribeiro (2008, citado por Sosa, 2011).

En esta investigación se realiza una adaptación al modelo propuesto por Sosa (2011) debido a que este trabajo sigue el modelo del MTSK, siendo su principal interés la categoría Recursos y Materiales que pertenece al subdominio KMT y está asociado al dominio PCK, nuestra adaptación se muestra en la figura 4.5.

[3] En el caso en el que haya subepisodios, éstos siguen la misma estructura interna que los episodios, cambiando el tamaño de letra para diferenciarlos de los episodios. La ubicación de los subepisodios depende de la propia naturaleza del objetivo general y/o particular y de la acción que realice el profesor para enseñar el contenido (Sosa, 2011).

Este instrumento es implementado para el análisis de dos escenarios: la planeación y la clase del profesor. Los escenarios consisten en actividades realizadas por el profesor para enseñar el tema de derivada. Cabe recalcar que la planeación es el documento realizado por el profesor y la clase son video-grabaciones.

❖ [i.j] [4] Descripción del episodio. (línea de inicio – línea de fin)

Objetivo general: Identificar el objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.

Evento desencadenante[5]: Evento que funciona como causa de inicio del episodio.

[A, i.j] [6]Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)[7]

Recursos y Materiales[8]

Subindicador del MTSK: Enumeración con un orden ascendente de los subindicadores que vayan identificándose.

Subindicador encontrado: Descripción del subindicador que se identificó. (línea de inicio – línea de fin)

Evidencia: Evidencia que se toma de la planeación o de los videos con la finalidad de corroborar el subindicador identificado. (línea de inicio – línea de fin)

Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese episodio.

❖ [i.j.k] [9] Descripción del subepisodio. (línea de inicio – línea de fin)

Objetivo particular: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.

Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del subepisodio.

[A, i.j.k] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

Conocimiento didáctico del Contenido(PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática(KMT)

---

[4] [i.j] representa el escenario i y episodio j, al que corresponde la situación específica. En el caso de la planeación el episodio también se interpreta como una situación o actividad específica escrita por el docente.

[5] En la planeación, el evento desencadenante y el evento de término se considera como una descripción de inicio y fin que el docente pone en juego en la planeación para lograr su objetivo.

[6] En esta adaptación, en la etiqueta de la acción, hubo que anteceder la letra A para que no se confundiera la etiqueta del subepisodio con la de la acción, lo mismo que en la adaptación de Sosa (2011). En el caso de la planeación la acción(A) se utiliza como ayuda para comprender y modelar el conocimiento del docente.

[7] Dado que el interés de esta investigación se centra únicamente en el Subdominio KMT en esta adaptación aparece únicamente dicho subdominio como análisis de la planeación y de los videos.

[8] Esta investigación analiza la categoría Recurso y materiales.

[9] En el caso en el que haya subepisodios, éstos siguen la misma estructura interna que los episodios, cambiando el tamaño de letra para diferenciarlos de los episodios. La ubicación de los subepisodios depende de la propia naturaleza del objetivo general y/o particular y de la acción que realice el profesor para enseñar el contenido (Sosa, 2011).

Recursos y Materiales
Subindicador del MTSK: Enumeración con un orden ascendente de los subindicadores que vayan identificándose.
Subindicador encontrado: Descripción del subindicador que se identificó. (línea de inicio – línea de fin)
Evidencia: Evidencia que se toma de la planeación y de los videos con la finalidad de corroborar el subindicador identificado. (línea de inicio – línea de fin)
Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese episodio.

Figura 4.5. Modelo que implementaremos en esta investigación, que es una adaptación al modelo propuesto por Sosa (2011).

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

V.1 Análisis de la planeación y de las clases grabadas en video

Como se mencionó en el capítulo cuatro para el análisis de la información se utilizan dos instrumentos que se integran en uno sólo, el cual es una adaptación que se realizó al modelo propuesto por Sosa (2011), se encuentra en la figura 11 del capítulo cuatro, esta adaptación nos permite organizar y analizar la planeación del profesor y la información de las transcripciones hechas de las video-grabaciones, con el propósito de identificar cuáles son los indicadores de la categoría Recursos y Materiales del subdominio Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT).

El análisis de la información se realizó a través de dos acercamientos, con el propósito de obtener una investigación más completa de la planeación, de las clases video-grabadas y de la entrevista. El primer acercamiento hipotético radica en una aproximación de los probables indicadores que intuimos se podrían identificar en la categoría Recursos y Materiales. Este primer acercamiento son suposiciones de lo que se cree pudiera encontrarse como resultado dentro del análisis de la planeación, de las video-grabaciones y de la entrevista. Es importante señalar que estas hipótesis están basadas en la experiencia del autor como: investigador en formación, docente, lecturas efectuadas en formación de la maestría y en la realización de esta investigación. Posteriormente, se realiza un segundo acercamiento al análisis de la información, este análisis se realiza directamente a lo obtenido de lo analizado de la planeación y de las transcripciones de las grabaciones en video de la clase del profesor. En este segundo acercamiento posiblemente se vea reflejado los indicadores propuestos en el primer acercamiento, o en caso contrario no se vea reflejado ninguno, o tal vez surjan nuevos indicadores.

V.1.1. Primer acercamiento hipotético al análisis de la información

Este acercamiento de análisis hipotético está basado en la experiencia que he tenido como: investigador en formación, docente en la educación media superior y superior, lecturas efectuadas durante mi formación académica y durante la realización de esta investigación (las cuales fueron citadas en el planteamiento del problema y antecedentes). Se realiza una aproximación hipotética donde se identifican los probables indicadores y subindicadores que creemos se podrían evidenciar en el análisis de la planeación y en los videos, cabe mencionar que antes de realizar este acercamiento hipotético no se tuvo contacto de ninguna índole con la información obtenida, es decir, la planeación y las video-grabaciones.

El objetivo de este primer acercamiento es una propuesta inicial sobre los posibles indicadores y subindicadores que se pudieran encontrar en un segundo acercamiento a la información. El realizar lo anterior sirve para tener un precedente de los probables indicadores y subindicadores a identificar, con la intención de que al realizar la obtención de la información del segundo acercamiento sea lo más fina, y también tener un antecedente de lo que se está investigando. La investigación de Santana y Climent (2015) es un presente más para la elaboración de estos indicadores y subindicadores hipotéticos, debido a que presentan indicadores referentes a la potencialidad de utilizar Geogebra en la práctica del profesor, sin embardo es importante mencionar que estos indicadores presentado por Santana y Climent (2015) están enfocados a la enseñanza del uso y reconocimiento de figuras geométricas en el plano y en el espacio y las rectas y puntos notables del triángulo, no están centradas a la enseñanza de la derivada. Sin embargo estos indicadores propuestos por Santana y Climent fueron de gran ayuda para plantear los indicadores hipotéticos. Los indicadores propuestos por Santana y Climent (2015, p. 81) son:

- Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra como una herramienta de dibujo para el profesor.
- Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra como una herramienta de dibujo para el alumno que le permite combinar, construir y medir figuras y rectas.
- Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra de permitir a la vez trabajar con un registro algebraico y geométrico.
- Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra como herramienta que permite mostrar y trabajar con una geometría dinámica
- Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra para posibilitar actividades de exploración del alumno.
- Conocer distintos tipos de actividades para llevar a cabo con Geogebra: actividades de introducción, desarrollo y/o evaluación
- Saber darle una notación específica a un elemento geométrico dentro de Geogebra para resaltar de esta forma la importancia de la notación.

En la figura 5.1 se muestra de manera general una propuesta inicial para la clasificación de los indicadores que se pudieran evidenciar con base en los indicadores y subindicadores hipotéticos. Es importante mencionar que tal vez algún subindicador pudiera pertenecer a otro indicador, o pudiera surgir otro tipo de indicador. Además, cabe recalcar que los indicadores y subindicadores propuestos en este primer acercamiento pueda que no se identifiquen, o si se evidencie en el segundo acercamiento, o talvez se evidencie nuevos indicadores y subindicadores que no son mencionados en la tabla 5.2. En la tabla 5.2 se describen los probables indicadores y subindicadores a identificar (en el Anexo II se encuentran ejemplos de los subindicadores, con el objetivo de clarificar dicho subindicador)

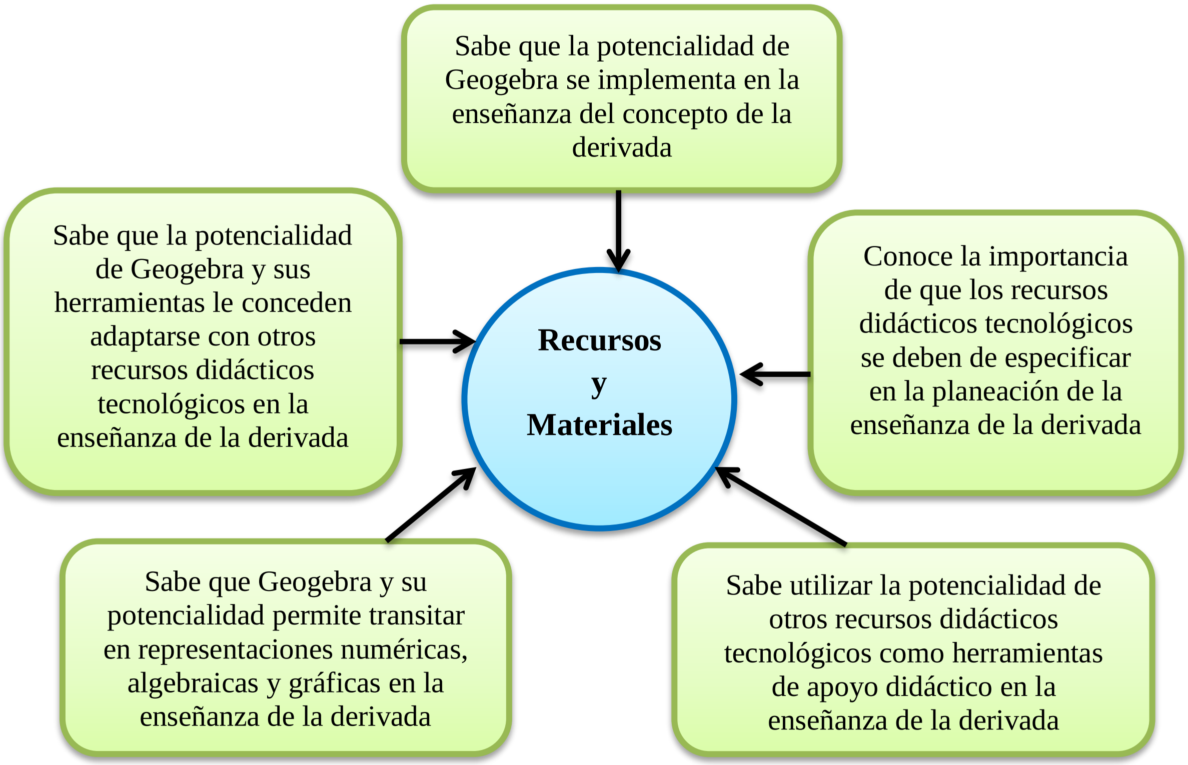


Figura 5.1. Diagrama que muestra los probables indicadores que se pudieran evidenciar.

Tabla 5.2

En esta tabla se especifican los indicadores y subindicadores que posiblemente aparezcan en el análisis de la planeación y de las clases video-grabadas del profesor (Agregamos etiquetas a los indicadores hipotéticos para su fácil manejo y poderlos utilizar en capítulo de resultados).

Concomiendo Didáctico del Contenido (PCK) **Concomiendo de la Enseñanza de la Matemática (KMT)** **Recursos y Materiales**		
Etiqueta	**Indicador que se pudiera encontrar**	**Subindicador que se supone pudiera encontrarse. El profesor…**
Geogebra y la derivada		
KMT1-IH	Sabe que Geogebra y su potencialidad permite transitar en representaciones numéricas, algebraicas y gráficas en la enseñanza de la	Sabe que Geogebra concede trabajar en distintas representaciones semióticas como lo son: algebraica, numérica y gráfica para la enseñanza de la derivada.
		Sabe Geogebra permite enseñar y trabajar gráficas de manera dinámicas en torno a la instrucción de la derivada, con el propósito de que el alumno comprenda más el concepto de la derivada.

	derivada	
KMT2-IH	Sabe que la potencialidad de Geogebra y sus herramientas le conceden adaptarse con otros recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza de la derivada	Sabe que Geogebra es una herramienta que le posibilita integrarse con otras tecnologías como lo son: almacenamiento en la nube, moodle, páginas web, proyector y pizarrón electrónico respecto a la enseñanza de la derivada.
KMT3-IH	Sabe que la potencialidad de Geogebra se implementa en la enseñanza del concepto de la derivada	Sabe que la accesibilidad de Geogebra permite calcular la pendiente de la recta tangente a una curva, con la finalidad de que el alumno pueda comprender dicho concepto.
		Sabe que la potencialidad de Geogebra concede calcular algebraica y gráficamente la derivada de una función, para que el alumno compruebe y comprenda la derivada de una función.
		Sabe que Geogebra y su potencialidad posibilita graficar cualquier tipo de función, así como calcular y graficar la derivada de la misma función, con el objetivo de que el alumno comprenda y compruebe la derivada de cualquier función.
		Sabe que la potencialidad de Geogebra permite calcular y graficar la velocidad de un objeto móvil, con el propósito de que el estudiante comprenda la velocidad.
		Sabe que Geogebra y su potencialidad concede calcular y graficar la razón de cambio instantánea, con el objetivo de que el alumno comprenda y comprueba la razón de cambio.
		Sabe la potencialidad de Geogebra permite calcular y visualizar las raíces de una función para implementarlos en problemas de optimización de la derivada, tanto gráficamente como algebraicamente.
Otros recursos didácticos tecnológico		
KMT4-IH	Sabe utilizar la	Sabe que la potencialidad de los softwares con o sin fines educativo permite realizar alguna actividad a la par del alumno, o cuando se esté iniciando la enseñanza de la derivada, con el objetivo de que el alumno este al mismo ritmo de los demás alumnos, o

	potencialidad de otros recursos didácticos tecnológicos como herramientas de apoyo didáctico en la enseñanza de la derivada	se familiarice con las nuevas herramientas que se relacionan con la derivada.
		Sabe que el proyector concede mostrar y explicar la actividad entorno a la derivada e ir realizando dicha actividad a la par del alumno.
		Sabe que la potencialidad de tener un espacio tecnológico, como lo es un laboratorio de computación concede al alumno trabajar en un ambiente tecnológico ya sea de manera individual o en equipo.
		Sabe que los diversos softwares y hardwares se pueden utilizar en la enseñanza de la derivada, con el propósito de que el alumno enriquezca su conocimiento.
		Sabe la potencialidad del pizarrón electrónico se implementa en la enseñanza de la derivada, ya que su interactividad enfocada a la derivada puede ser enriquecedor para el profesor y el alumno.
		Sabe que la potencialidad de los alojamientos de archivos multiplataforma permite guardar y retomar una actividad, estas herramientas conceden almacenar, retomas, evaluar la actividad y el desempeño del alumno, y darle seguimiento al aprendizaje del estudiante.
Recursos didácticos tecnológicos en la planeación		
KMT5-IH	Conoce la importancia de que los recursos didácticos tecnológicos se deben de especificar en la planeación de la enseñanza de la derivada	Conoce que el objetivo de implementar los recursos didácticos tecnológicos en la clase se tiene que especificar en la planeación.
		Conoce que en el implemento de los recursos didácticos tecnológicos es necesario buscar un equilibrio entre el tiempo de la clase, mismo que se verá reflejado en la evaluación de la clase.
		Conoce que en la evaluación de una actividad con recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza de la derivada será importante equilibrar la evaluación entre los recursos y la derivada.
		Conoce que en el implemento de recursos didácticos tecnológicos es necesario especificar las estrategias de enseñanza y actividades de aprendizaje en la planeación.
		Conoce que en el implemento de recursos didácticos tecnológicos de debe de determinar las competencias a desarrollar.
		Conoce que el uso de los recursos didácticos tecnológicos a utilizar en la clase.se debe de establecer en la planeación.

V.1.2. Segundo acercamiento al análisis de la información del profesor Pepe

En este segundo acercamiento del análisis de la información, se inició primero con la planeación de la clase del profesor, posteriormente se analizó el contenido de las seis clases que se video grabaron, con el objetivo de identificar cuáles son las videos-grabaciones que nos daban un gran número de evidencia de los indicadores. Es importante mencionar que el tópico matemático que se adoptó en este trabajo es debido a que el docente aborda el tema de la derivada desde los tópicos de la tasa de variación media y la pendiente de la recta tangente, para después concluir su última clase con la tasa de variación instantánea. Las transcripciones de la planeación de las clases se encuentran en el Anexo III y Anexo IV.

En la siguiente tabla se muestra la distribución de los días de clases, además del análisis que se realizó a cada clase, donde se puede notar que la sesión del día 5 no se presentó conocimiento matemático de la derivada, sólo se presentó conocimiento matemático de manera indirecta con respecto a graficar puntos en el plano de puntos y tipo de función y acerca de los recursos didácticos tecnológicos (sensor y calculadora gráfica asociada a Geogebra), es decir, la clase 5 estaba enfocada a que los estudiantes se familiarizaran con el software y hardware de la calculadora gráfica y del sensor para emplearlos en la clase 6. Por este motivo sólo se consideran las sesiones del día 1, 2, 3, 4, y 6 como se muestra en la tabla 5.3.

Tabla 5.3

Selección de las clases para el análisis de la información.

Conocimiento de Pepe	**Días de clases**					
	Día 1 29/02/16	Día 2 04/03/16	Día 3 07/03/16	Día 4 14/03/16	Día 5 11/03/16	Día 6 19/03/16
Enseñanza de la derivada	Si	Si	Si	Si	No	Si
Recurso didácticos tecnológicos	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Después de haber determinado cuáles de las sesiones de clases video-grabadas se iban a analizar se procedió a examinar cada una de las cinco clases, posteriormente se realizó las transcripciones de la planeación y de las clases con el propósito de obtener todos los subdescriptores que se evidencien dentro de la categoría Recursos y Materiales. Estos subdescriptores nos permitirían identificar los indicadores de acuerdo a las características de estos subindicadores, además dichos subindicadores fueron plasmados en la adaptación que se le hizo al modelo de Sosa (2001).

IV.1.2.1. Modelación del proceso de enseñanza de la planeación

- [Planeacion.1] Explicación de la competencia didáctica a desarrollar de la asignatura y de la competencia didáctica a desarrollar que corresponde a la unidad de la derivada. (1 – 21)

Objetivo general: Explicar en la planeación que la competencia de la asignatura y la competencia de la unidad que corresponde a la derivada.

Evento desencadenante: El docente conoce de su planeación la competencia principal que se debe de desarrollar de la asignatura.

[A, Planeación.1] El profesor en la planeación describe la competencia que debe desarrollar en el alumno en la materia, y de la competencia de la unidad referente al tópico de la derivada.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicadores del MTSK: KMT-P1.

Subindicador encontrado: Conoce que se debe de especificar las características de las herramientas tecnológicas que se utilizan y con qué objetivo se implementará la tecnología en la materia, esto se determina en la competencia de la asignatura. (10 – 11)

Subindicador encontrado: Conoce que se tiene que establecer las actividades a resolver en diferentes representaciones semióticas para aplicar las definiciones de la derivada, y así como su aplicación en diferentes contextos, esto se determina en la competencia de la unidad. (13-19)

Evidencia: El docente desde un inicio de la planeación especifica las horas y los créditos, las horas teóricos prácticos que le corresponde a la asignatura, también determina cuál es la competencia de la asignatura para no desviarse del objetivo de la materia, además especifica la competencia de la unidad cuatro que corresponde al concepto de la derivada, en donde el objetivo es enseñarla de acuerdo a las definiciones y aplicación de la derivada en diferentes contextos. (9 – 11)

COMPETENCIA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA
UTILIZAR LAS HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES DE CÁLCULO NUMÉRICO, GRÁFICO Y SIMBÓLICO PARA PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL Y GEOMETRIA ANALITICA.

UNIDAD DE COMPETENCIA 4	TOTAL DE HORAS DEL SEMESTRE QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA		
	AID	ATS	ATI
Resolver actividades en un contexto gráfico, numérico y algebraico para aplicar definiciones del cálculo diferencial como: La derivada y su aplicación en contextos diversos de la ciencia.			

Evento de término: Pepe establece la unidad de competencia correspondiente al concepto de la derivada, la cual está compuesta del Desempeño, los Saberes Teóricos/Declarativos, Saber Procedimental y Competencias genéricas, estos elementos le servirán al profesor para declarar en la planeación su estrategia a utilizar.

- [Planeación.2] Descripción de las estrategias de enseñanza y las actividades de aprendizaje y determinación de los recursos didácticos tecnológicos. (23 – 33)

Objetivo general: Describir cuales son las estrategias de enseñanza y las actividades de aprendizaje, de acuerdo a la unidad cuatro que corresponde al concepto de la derivada y determinar cuáles son los recursos didácticos tecnológicos que se utilizan en la unidad.

Evento desencadenante: El docente indica cuales son las estrategias de enseñanza y actividades de aprendizaje, que corresponde al concepto de la derivada.

[A, Planeacion.2] Pepe determina las estrategias de enseñanza y las actividades de aprendizaje, ya que estas le van permitir tener una idea general sobre las actividades que enseñará y aprenderán, además de que serán una forma de encausar la clase, cuando se desvíe el objetivo de la clase.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P2.

Subindicador encontrado: Conoce que es importante especificar objetivos, asignación de tareas y prácticas con tecnología, trabajo individual y asesorías, esto se determina en las estrategia de enseñanza, asimismo de especificar la observación del uso de instrucciones para hacer operaciones elementales con tecnología y la asignación de actividades en el centro de cómputo, esto se determina en las actividades de aprendizaje. (24-31)

Subindicador encontrado: Conoce que es importante especificar aquéllos recursos didácticos de características tecnologías, esos recursos son de tipo hardware como la computadora y de tipo software como el programa de geometría dinámica, para la enseñanza de la derivada. (32-33)

Evidencia: De acuerdo a la planeación Pepe establece las estrategias a seguir para la enseñanza y las actividades del tópico de la derivada, también específica los recursos didácticos tecnológicos a utilizar en la clase de la derivada. (24-33)

ESTRATEGIA		
ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**	
- Establecimiento de objetivos e información del laboratorio. - Asignación de tareas y prácticas con tecnología. - Trabajo individual. - Asesorías personalizadas.	**TRABAJO PRESENCIAL Y/O SUPERVISADO**	**TRABAJO AUTÓNOMO**
	- Observación sobre el uso de instrucciones para hacer operaciones elementales con tecnología. - Asignación de actividades a realizarse en el centro de computo o laboratorio con supervisión docente.	**- Resolución de actividades - Tareas de casa**
RECURSOS DIDÁCTICOS:		
Pizarrón, computadora y software de geometría dinámica.		

Evento de término: Después de que el docente precisa los recursos didácticos tecnológicos a implementar en la enseñanza de la derivada, detalla las actividades a realizar con esos recursos didácticos tecnológicos.

❖ [Planeación.3] Comprensión del concepto de derivada por medio del vínculo entre la tasa de variación media desde perspectivas gráficas y numéricas con el uso Geogebra. (34 – 45)

Objetivo general: Comprender del concepto de la derivada por medio de la relación existente con la tasa de variación media desde perspectivas gráficas y numéricas con Geogebra.

Evento desencadenante: El profesor detalla el objetivo principal de las sesiones de clases.

[A, Planeacion.3] Después que especifica el objetivo principal de las sesiones de clases, en seguida se detalla los momentos de las sesiones y su intención.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P3.

Subindicador encontrado: Conoce que es importante precisar el uso de la potencialidad de las herramientas de Geogebra para la enseñanza de la Tasa de Variación Media (TVM), así como especificar los momentos de las sesiones de las clases y la intencionalidad de la misma correspondiente al concepto de la TVM. (37 – 42)

Subindicador encontrado: Conoce que el Dropbox es un recurso tecnológico alterno para almacenar, retomar, guardar, explicar y evaluar una actividad, el cual también es un recurso para que el alumno almacene la actividad que se realiza, la retome y la guarde en una carpeta en Dropbox, con el motivo de que el docente evalué la actividad y de seguimiento a lo que está aprendiendo el alumno. (43 – 45)

Evidencia: El profesor describe los momentos de las sesiones y la intención de los mismos, también agrega alguna nota complementaria de los momentos. (36 – 44)

Momentos de la sesiones	Intencionalidad
Momento 0	Se explica La definición de la TVM por medio de ilustraciones y de cómo se calcula
Momento 1	Se realiza una construcción en geogebra para ilustrar la TVM
Momento 2	Se realiza con una serie de cálculos apoyándose de la construcción en geogebra para dar sentido a los elementos que componen la TVM como: secante, tangente, pendiente la resta para obtener incrementos en x y y etc.
Momento 3	Se tiene la intención de ir llevándolos a la tasa de variación instantánea que es la derivada en un punto por medio de acercamientos de un punto a otro, es decir cuando h tiende a cero con el uso de Geogebra. Se quiere con esto de que el estudiante observe como la secante tiende a ser a la tangente en dicho punto desde lo visual, y así tener elementos para bosquejar una expresión algebraica respecto a la TVM con puntos hecho en la construcción en geogebra
Momento 4	En este momento se quiere que formalicen expresiones respecto a la derivada a lo realizado en el momento anterior, para ello se les pide que hagan cálculos siempre apoyándose de la construcción en geogebra realizada para expresen la formula de la derivada. Al final se deja una sesión de preguntas

NOTAS:

- Las formas de trabajo serán de corte plenaria, es decir el profesor va explicando a los estudiantes y ellos pueden intervenir preguntando dudas. Posterior habrá trabajo autónomo de parte de ellos.
- El documento de trabajo estará en su carpeta dropbox por cada sesión para que de ahí responda y lo anexen luego a la carpeta dropbox.

Evento de término: Pepe agrega notas complementarias a los momentos de las sesiones, donde se especifica la forma de trabajo de los alumnos y en que recurso tecnológico se guardan las actividades realizadas.

❖ [Planeacion.4] Conocimiento de la tasa de variación media. (46 – 56)

Objetivo general: Conocer la tasa de variación media de una función dado un intervalo.

Evento desencadenante: El docente especifica el objetivo de la actividad en la para la enseñanza de la tasa de variación media.

[A, Planeación.4] Pepe detalla que presentará en la clase de la derivada una ilustración de la tasa de variación media la cual se construirá por medio de Geogebra, también específica los objetivos matemáticos a desarrollar y el tiempo correspondiente al momento cero de la actividad.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P4.

Subndicador encontrado: Conoce que la potencialidad del software de Geogebra le permite enseñar y realizar la construcción gráfica de la tasa de variación media teniendo presente los objetivos matemáticos. (51 – 56)

Evidencia: En la planeación el docente ilustra la gráfica que espera obtener y especifica los objetivos matemáticos que pretende enseñar c. (51-56)

Tasa de variación media

Se ilustra por medio del geogebra

$$TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Gráficamente :

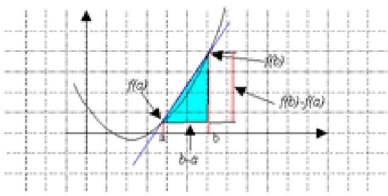


figura 1

OBJETIVOS MATEMÁTICOS:

- Conocer la interpretación geométrica de la tasa de variación media.
- Relacionar la aplicación de la tasa de variación media con su interpretación geométrica y deducir su definición. No priorizar la memorización de la fórmula de la derivada, sino su deducción a través de la fórmula de la tasa de variación media. Observar como la recta secante se aproxima a la recta tangente conforme se reduce la amplitud del intervalo.

Comprobar que esta misma relación se cumple para las pendientes de ambas rectas. La pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente cuando la amplitud del intervalo disminuye.

Evento de término: El docente específica en su último objetivo matemático que: se debe de comprobar que esta misma relación se cumple para las pendientes de ambas rectas. La pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente cuando la amplitud del intervalo disminuye.

❖ [Planeacion.5] Construcción de la tasa de variación media con Geogebra. (58-68)

Objetivo general: Construir la gráfica que representa la tasa de variación media, utilizando las herramientas de Geogebra.

Evento desencadenante: El profesor es su planeación específica que los alumnos graficarán la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en Geogebra.

[A, Planeacion.5] El docente precisa que se construirá gráficamente la tasa de variación, especificando cada paso del momento 1 de la actividad, así como estimar el tiempo del momento de la actividad.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P5.

Subindicador encontrado: Conoce que la potencialidad de las herramientas de deslizador, recta perpendicular, intersección de dos objetos, ocultar objetos, segmento entre dos puntos que pertenecen a Geogebra le concede graficar la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$, crear los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a+h, f(a+h))$, crear el punto C y trazar los segmentos AC y CB, las herramientas mencionadas tienen el propósito de que el estudiante construya gráficamente la tasa de variación media. (61 – 67)

Evidencia: Pepe detalla cada paso de la actividad, estos pasos le van a permitir construir la gráfica de la tasa de variación media, además de conocer cuánto tiempo le llevará realizar dicha construcción. (58 – 68)

Momento 1 Actividad de construcción (20 min)	**Realizar la TVM con el uso de geogebra** Se les pide de inicio realizar en geogebra las siguientes instrucciones 1. Representa la función en GeoGebra f(x)=(x+1)²+1 2. Crea un deslizador a con valores de -5 a 5 e incrementos de 0.1 3. Edita el punto A=(a, f(a)). 4. Crea un deslizador h con valores de -5 a 5 e incrementos de 0.1 5. Edita el punto B=(a+h, f(a+h)). 6. Sea C el punto de intersección de de la recta que pasa por A y perpendicular a el eje y, con la recta que pasa por B y perpendicular al eje X 7. Ocultar recta perpendicular y trazar segmento AC y BC. **Pregunta grupal :** ¿Qué observan respecto a los segmentos AC y BC al mover el deslizador de parámetro h?

Evento de término: El profesor termina el momento 1 con la siguiente pregunta: ¿Qué observan respecto a los segmentos AC y BC al mover el deslizador de parámetro h?

❖ [Planeacion.6] Cálculos de la distancia de los segmentos AC y BC y de la tasa de variación media de la función $f(x)$ en unos intervalos. (69 – 79)

Objetivo general: Calcular la tasa de variación media de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en unos intervalos dados utilizando Geogebra.

Evento desencadenante: El profesor específica que los alumnos calcularán la distancia del segmento AC cuando $a = -1$ y $h = 4$, por el método propio del alumno.

[A, Planeacion.6] Con base en la construcción de la gráfica que representa la tasa de variación media, el docente especifica en la planeación que se debe de calcular la distancia de los segmentos AC y BC, además de calcular la tasa de variación media de la función $f(x)$ en un intervalo, especificando cada paso del momento 2 de la actividad, así como el tiempo del momento de la actividad.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

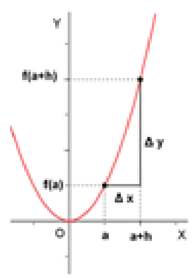
Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P6.

Subindicador encontrado: Conoce que la herramienta deslizador de Geogebra le posibilita calcular las distancias de dos segmentos cuando las variables a y h (asignadas a los deslizadores) tienen ciertos valores y para calcular la tasa de variación de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en los intervalos sugeridos por el profesor, para que el alumno exprese la fórmula de la TVM en función de las variables a y h, y le permita al estudiante comprender y expresar la forma gráfica para la función $f(x) = x^2$ en los puntos $(a, a + h)$ y $\left(f(a), f(a+h)\right)$. (70 – 78)

Evidencia: Pepe específica el tiempo y cada paso de la actividad, estos pasos le van a permitir calcular la distancia de los segmentos AC y BC, y de la tasa de variación media de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en los intervalos dados, además, sabe que pregunta realizar al alumno para saber si está comprendiendo lo que está realizando con la actividad. (70-79)

Momento 2 Actividad individual 30 min	b) Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C cuando a=-1, h=4, expresa la fórmula escrita de cómo lo obtuviste c) Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C cuando a=-1, h =4 expresa la fórmula escrita de cómo lo obtuviste d) Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C en función de *h* y *a* usando el mismo método usado en los literales anteriores. e) Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C en función de *h* y a usando el mismo método usado en los literales anteriores. f) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [-2, 2] g) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 1] h) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [3, 4] i) ¿Cómo puedes expresar la fórmula de la TVM en función e la variables *a* y *h*? j) ¿Expresa ahora una forma gráfica para f(x)=x^2 la TVM para los puntos (a, a+h) y (f(a), f(a+h)? Guardar archivo como: *TVM_Práctica LabII* Una vez terminado el bosquejo grafico el profesor hace referencia a los símbolos Δx y Δy por medio de la siguiente ilustración
	 Figura 2

Evento de término: El profesor termina el momento 2 haciendo referencia a los símbolos Δx y Δy como se ve en la gráfica anterior e indica que guarden el archivo como: TVM_Práctica LabII.

❖ [Planeación.7] Cálculos de la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en intervalos utilizando Geogebra. (80 – 99)

Objetivo general: Calcular la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en intervalos dados hacia la noción de límite para dar significado a la tasa de variación media, utilizando Geogebra.

Evento desencadenante: El profesor específico que los alumnos abrirán el archivo que guardaron en la sesión uno para que realicen los cálculos que se piden en la nueva actividad.

[A, Planeacion.7] El docente en la planeación determina cada paso de la actividad, estos pasos le van a permitir calcular la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en los intervalos sugeridos, así como especificar el tiempo estimado del momento de la actividad.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P7.

Subindicador encontrado: Conoce que la herramienta deslizador de Geogebra le permiten realizar los cálculos de la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en los intervalos dados, con el objetivo de que el alumno posteriormente comprenda el comportamiento de la TVM en el intervalo $[(a, b]$ y $[f(a), f(b)]$ cuando h tiende a 0 y la relación entre la TVM y la recta secante, también que el estudiante exprese la formula algebraica del límite de la recta secante cuando h tiende a 0 y termine con la definición de la derivada de una función. (83 – 98)

Evidencia: El docente en la planeación determina cada paso de la actividad, estos pasos le van a permitir calcular la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en los intervalos dados, además de especificar las preguntas adecuadas a realizar durante la sesión para dirigir al alumno hacia la noción de límite para dar significado a la tasa de variación instantánea. (85 – 99)

Momento 3. Hacia la noción de límite para dar significado a al tasa de variación instantánea 30 min	Por medio de geogebra abra el archivo TVM_Práctica LabII y analize los cálculos que se piden a continuación a) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 2] b) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 1] c) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.5] d) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.3] e) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.1] f) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.5] g) ¿Qué comportamiento observas sobre la *TVM* cuando el intervalo[a, b] y [f(a), f(b)] se reduce cada vez que h tiende a 0? h) ¿Cómo varia la pendiente de la recta secante cuando aproximamos el punto B al punto A? i) Si aproximamos los valores de *h->0* ¿qué le ocurre a la recta secante? j) Cuál será el Limite de la pendiente de la recta secante cuando h->0? k) Cuál es el limite de la recta secante en su expresión algebraica de la recta cuando h->0?

Momento 4. 20 min	j) Conociendo la relación existente entre la tasa de variación media y la recta secante. Calcula: □ $\lim_{h\to 0} TVM\, f(x)_{[x,x+h]}$ k) Calcula $\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{(-1+h)-(-1)}$ l) Calcula f'(3) m) Termina la definición de derivada de una función: □ $f'(x) = \lim_{h\to \ldots} \ldots$	

Evento de término: Para finalizar la sesión dos, Pepe realiza sesiones de preguntas hacia los estudiantes con una duración de 10 minutos.

- [Planeacion.8] Cálculos de las distancias de los segmentos AC, BC cuando a y h son igual aun valor y de la TVM en intervalos dados. (100 – 111)

Objetivo general: Calcular las distancias de los segmentos AC y BC cuando las variables a y h se les asigna ciertos valores y calcular la tasa de variación media de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en intervalos dados y calcular la TVM para la función $f(x) = x^2$.

Evento desencadenante: Pepe especifica volver a retomar la actividad que se realizó en la clase anterior, es decir, la construcción de la TVM de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$.

[A, Planeación.8] El docente en la planeación precisa que el retomar la actividad realizada en la clase anterior se utiliza para responder las preguntas de la nueva actividad que se realizará.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P8.

Subindicador encontrado: Conoce que la potencialidad del deslizador y la hoja de cálculo integrada en Geogebra le concede calcular la distancia de los segmentos AC y BC con las variables a y h, debido a que las variables a y h están asignadas a cada deslizador, con las distancias se elabora una tabla en la hoja de cálculo, esto le permite al alumno expresar la fórmula que obtuvo para calcular las distancias. (l02 – 105)

Subindicador encontrado: Conoce que para realizar el cálculo de la tasa de variación media de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en los intervalos dados, y para expresar la gráfica de la función $f(x) = x^2$, los deslizadores de Geogebra le podrá ayudar a realizar los cálculos y a graficar la función, con el motivo que el alumno exprese la fórmula de la TVM con respecto a las variables a y h asignadas a los deslizadores y comprenda la TVM en los puntos $(a, a+h)\ y\ (f(a), f(a+h))$. (l06 – 110)

Evidencia: Pepe retoma la actividad de la construcción de la TVM para plantear nuevas actividades, en las cuales hay expresar la fórmula para calcular la distancia de dos segmentos en función de a y h, además de calcular la TVM de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ y $f(x) = x^2$. (102 – 110)

a) Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C cuando a=0 y h=1,2,3,4,5, expresa la fórmula escrita de cómo lo obtuviste. Elabora una tabla en la Hoja de cálculo de geogebra.

b) Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C cuando a=-1, h =4 expresa la fórmula escrita de cómo lo obtuviste

c) Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C en función de *h* y *a* usando el mismo método usado en los literales anteriores.

d) Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C en función de *h* y **a** usando el mismo método usado en los literales anteriores.

e) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [-2, 2]
f) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 1]
g) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [3, 4]
h) ¿Cómo puedes expresar la fórmula de la TVM en función e la variables a y h?
i) ¿Expresa ahora una forma gráfica para f(x)=x^2 la TVM para los puntos (a, a+h) y (f(a), f(a+h)?

Evento de término: EL docente finaliza esta actividad especificando que el archivo se guardará como: TVM_Práctica LabII_nombre y apellido.

❖ [Planeación.9] Determinación de la función que modela los movimientos de la rana saltarina. (112 – 132)

Objetivo general: Determinar cuál es la función que modela los movimientos de la rana saltarina.

Evento desencadenante: El profesor establece que primero los alumnos deben conectarse a internet para abrir el juego de la rana saltarina.

[A, Planeación.9] Pepe especifica que antes de realizar las actividades debe primero resolver el juego, el cual consiste en cambiar de lugar las ranas verdes con las cafés.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

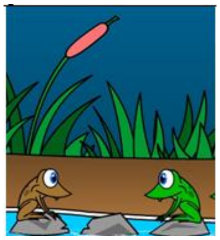
Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P9.

Subindicador encontrado: Conoce que el juego de la rana saltarina que se encuentra en internet, es otra alternativa para enseñar y realizar actividades entorno a la TVM, el juego consiste en cambiar las ranas verdes con las ranas cafés, el propósito es encontrar una función que modele los movimientos que se realiza cuando hay una, dos, tres y cuatro ranas en cada lado. (114 – 131)

Evidencia: Pepe determina en la planeación las tablas de los movimientos que tienen que registrar los alumnos, para una, dos, tres y cuatro ranas en cada lado, donde las ranas cafés son la letra C, las ranas verdes la V y el espacio es 0. (114 – 132)



0	C	0	V
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

0	C	C	0	V	V
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

N° de ranas en cada lado (r)	Número de movimientos (M) M=f(r)	
1		
2		
3		
4		
5		

Evento de término: Pepe pregunta cuántos movimientos se harían con 5 ranas en cada lado.

❖ [Planeación.10] Realización de una gráfica. (133 – 134)

Objetivo general: Realizar una gráfica mediante un sensor y la calculadora gráfica.

Evento desencadenante: El docente específica que se debe partir de un punto a un metro del sensor.

[A, Planeacion.10] Pepe detalla s que se debe de caminar a paso constante alejándose rápidamente del sensor.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P10.

Subindicador encontrado: Conoce que existen otros recursos didácticos tecnológicos como son los sensores y las calculadoras gráficas para enseñar y crear actividades entorno a la TVM, estos recursos se implementan para realizar una gráfica del movimiento de una persona u objeto, la información de esta gráfica se almacena en la calculadora. (134)

Evidencia: El profesor escribe la actividad a realizar la cual es: Pariendo de un punto que se encuentre a un metro del sensor, caminaras a paso aproximadamente constante, alejándote rápidamente del sensor. El intervalo de tiempo será de 8 segundos. (134)

Evento de término: El tiempo que se estima para realizar la gráfica de movimiento es de 8 segundos.

- [Planeación.11] Cálculos de la tasa de variación media de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en intervalos dados. (136 – 152)

Objetivo general: Calcular la TVM de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en los intervalos dados mediante las variables a y h.

Evento desencadenante: El docente retoma la construcción gráfica de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ que se realizó en la primera actividad.

[A, Planeacion.11] Pepe especifica que se debe de calcular la tasa de variación media de la función $f(x)$ en los intervalos.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-P11.

Subindicador encontrado: Conoce que los deslizadores de Geogebra le posibilita calcular la tasa de variación media en los intervalos dados, estos intervalos se van reduciendo debido a la configuración del incremento del deslizador, asignados a las variables a y h, con el propósito de que el alumno comprenda acerca de que sucede con la recta secante cuando el intervalo se reduce, para que después exprese la fórmula de la TVM en los puntos $(a, a+h)\ y\ (f(a), f(a+h)$, y también comprenda acerca de que sucede si le agrega el $\lim_{h\to 0} TVM$ a la fórmula de la TVM. (143-149)

Evidencia: Pepe retoma la actividad de la construcción de la TVM para plantear nuevas actividades en las cuales hay que calcular y expresar la fórmula de la TVM para la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ cuando el intervalo se reduce con los deslizadores a y h. (138-152)

a) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 2]

b) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 1]

c) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.5]

d) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.3]

e) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.1]

f) Cambia los incrementos del deslizador *a en* 0.01 y calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.05] y [0, 0.01] y escribe ¿qué sucede?

g) *Escribe qué observas de los resultados de la TVM cada vez que el intervalo se reduce*

h) ¿Qué sucede con la recta secante cada vez que el intervalo de su dominio se reduce?

i) Qué relación observas sobre la ecuación de la recta secante de la vista algebraica con cada resultado del cálculo de la TVM en los incisos a) —f)

j) *Escribe ahora qué significa el calcular la TVM en el intervalo del inciso a) comparándolo con el* intervalo del inciso f)

k) ¿Expresa ahora como fórmula la TVM para los puntos (a, a+h) y (f(a), f(a+h)?

l) De la fórmula que expresaste en el inciso anterior, que sucede si le agregamos el $\lim_{h\to 0} TVM$. Escribe

m) Calcula

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{(-1+h)-(-1)}$$

Copia la imagen de geogebra para ver que valores tiene los deslizadores a y h

m) Calcula $f'(3)$, qué valores debe tener el deslizador a y h, copia la imagen y pega en esta sección.

Evento de término: Pepe detalla calcular $f'(3)$, y que valores debe tener el deslizador a y h.

IV.1.2.2. Modelación del proceso de enseñanza de las clases video-grabadas

Análisis de la clase del día 29/02/2016

- [Video.1] Utilización de los recursos didácticos tecnológicos para almacenar, descargar, ilustrar y explicar la actividad. (46 – 66)

Objetivo general: Utilizar los recursos tecnológicos de apoyo como el Dropbox para almacenar el archivo, y los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza como el pizarrón electrónico, proyector y la computadora para ilustrar y explicar la actividad.

Evento desencadenante: Pepe menciona que hay que abrir Dropbox para descargar el archivo.

[A, Video.1] Abre el archivo que descargo en la computadora para ilustrar e explicar el tema que se va a ver en la clase apoyándose del pizarrón electrónico, proyector y la computadora.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V1.

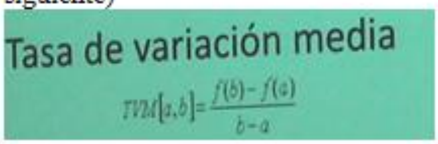
Subindicador encontrado: Sabe que el Dropbox es un recurso que le posibilita almacenar la actividad de la tasa de variación media. (47 – 49)

Subindicador encontrado: Sabe que el pizarrón electrónico, la computadora y el proyector le concede ilustrar la gráfica y la formula $TVM[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, con el objetivo de explicar la gráfica y la deducción de la fórmula de la tasa de la variación media. (50 –

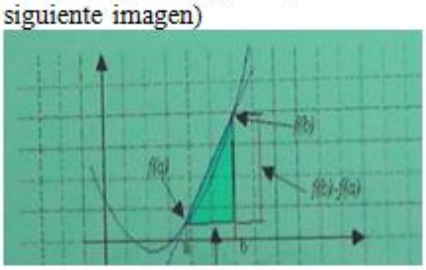
60)

Evidencia: Pepe descarga a través del Dropbox el documento, el cual lo usa para ilustrar la gráfica y la formula de la tasa de variación media, lo anterior le permite al docente explicar mediante la ilustración de la gráfica cómo es que deduce la expresión algebraica de la TVM. (46 – 65)

50. M: Ok, muy bien, bueno la tasa de variación media, tiene que ver mucho con su cuestionario que estaban haciendo, pero miren, voy a empezar con esta ilustración, ¿qué es la tasa de variación media? ¿Esta fórmula le es familiar? (señala lo siguiente)

51. 

54. M: Verdad, tiene que ver con la fórmula de la pendiente, bien voy a explicar un poco la ilustración de qué es la tasa de variación media de un intervalo $[a, b]$, fíjense hay una gráfica, una curva y una recta, ¿qué recta es esta? (señala la siguiente imagen)

55. 

Evento de término: Después de que Pepe ilustra y explica la gráfica y la expresión algebraica de la TVM, sugiere al alumno abrir Geogebra para iniciar la actividad.

❖ [Video.2] Construcción el triángulo de la tasa de variación media mediante Geogebra. (67 – 99)

Objetivo general: Construir el triángulo de la gráfica de la TVM mediante las herramientas de Geogebra.

Evento desencadenante: Pepe siguiere abrir Geogebra para iniciar con la actividad.

[A, Video.2] Introduce en la línea de comandos de Geogebra la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ para graficarla.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

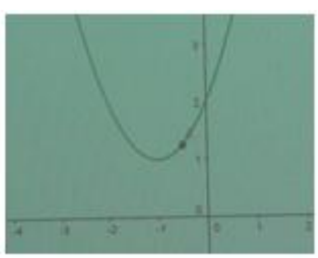
Subindicador del MTSK: KMT-V2.

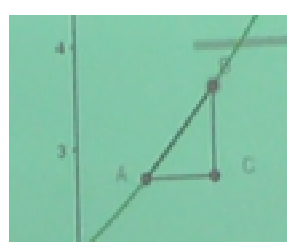
Subindicador encontrado: Sabe que las herramientas deslizador, rectas perpendiculares, punto de intersección, crear segmentos y zoom de Geogebra le van a permitir construir el triángulo de la gráfica de la TVM. Se requiere primero de graficar la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$, crear deslizadores asignados a las variables a y h , crear mediante los deslizadores los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a+h, f(a+h))$, trazar rectas perpendiculares al eje x y y que pasen por los puntos A y B, crear el punto de intersección C formado por la intersección de las perpendiculares, crear los segmentos AC y CB, para que el alumno comprenda sobre qué sucede con las distancias de los lados del triángulo y que sucede con el triángulo cuando la variable del deslizador h se hace cada vez más pequeño y la comprensión se complementa con la potencialidad de la herramienta zoom. (71-77: 81-100)

Evidencia: Pepe explica y va construyendo a la par de sus alumnos la gráfica de la tasa de variación media, primero inicia graficando la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$, crea deslizadores para las variables a y h, crea los puntos A y B con ayuda de los deslizadores, para después trazar perpendiculares a los eje x y y y a los puntos A y B con el fin de encontrar la intersección de las perpendiculares y crear el punto C, el punto C se une con los puntos A y B mediantes los segmentos para crear el triángulo. (70 – 99)

70. M: $f(x) = (x+1)^2 + 1$, bueno tenemos la siguiente función, vamos a crear un deslizador, vamos a crear un deslizador qué va a ir desde -5 a 5 con incrementos de .1, de 0.1 (primera imagen) creamos un deslizador, sí déjenme, déjenme quitar la fijación para que yo lo pueda mover ahí está, tenemos este deslizador y lo vamos a llamar a , ahí viene una actividad que vamos hacer ahorita que va aparecer a.....de -

71. 

79. 

99. 

Evento de término: El docente afirma que cuando h se hace cero los segmentos AC y CB siguen existiendo de manera infinitesimal.

- [Video.3] Trazo de la recta secante que pase por los puntos A y B y tangente al punto A. (100 – 119)

Objetivo general: Trazar con las herramientas de Geogebra la recta secante a los puntos A y B, y la recta tangente al punto A.

Evento desencadenante: Pepe pide trazar la recta que pase por A y B y que le asignen un color.

[A, Video.3] El docente traza la recta que pasa por A y B y la rótula con el nombre de secante, después traza la recta que pasa por A y la rótula con el nombre de tangente, posteriormente le asigna un color distinto a las rectas para diferenciarlas.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V3.

Subindicador encontrado: Sabe que las potencialidades de las herramientas trazo de recta, tangente, zoom y el deslizador asignado a la variable h de Geogebra le conceden crear la recta secante a los puntos A y B, y la recta tangente al punto A y explicar sobre qué sucede con la recta secante cada vez que la variable h se hace cada vez más pequeña, para que el alumno comprenda y vea mediante el zoom, que la recta secante se comporta como la tangente cuando la h se acerca a cero y lo comprenda con los coeficientes de las rectas, es decir, las pendientes de las ecuaciones de la recta secante y tangente. (100 – 117)

Evidencia: Pepe traza dos rectas, una secante a los puntos A y B, y la otra tangente al punto A y con el deslizador de la variable h, que ya había creado, cuestiona al alumno sobre qué sucede con la recta secante cuando la h tiende a cero, y lo comprenda con el valor de las pendientes del as ecuaciones de las rectas. (104 – 119)

106.

116. M: Si, la prueba es ésta es la ecuación de la recta como habíamos dicho la roja era la recta tangente, no, secante, y la azul la recta tangente fíjense en sus pendientes, ¿qué pendiente tiene esta? (señala la ecuación roja)

117. $k: -0.27x + 0.1y = 0.19$
$l: y = 2.6x + 1.91$

118. E: 2.6

119. M: Y la otra 0.27 casi igual…entonces cuando h es pequeño vamos hacer el teorema cuando h es cero, la secante se comporta como la tangente, se comporta, más no es la misma, son muy infinitesimalmente muy pequeñas, yo aquí no lo veo… van hacer lo mismo, cada vez que h tiende a ser cero ya no los veos son parejas, casados, enjaulados… no… bueno voy a regresar… no le puedo regresar ya le hice mega-zoom… muy bien… déjenme regresar hijos…

Evento de término: El profesor dice que cuando h tiende a cero la secante se comporta como la tangente, pero no es la misma.

- [Video.4] Asignación y explicación de la literales al triángulo construido y cálculo de la pendiente. (120-153)

Objetivo general: Asignar y explicar las literales para terminar con la construcción de la gráfica de la TVM y calcular la pendiente de la recta secante.

Evento desencadenante: Pepe primero dice que oculten las rectas secante y tangente, después menciona que regresen la rectas que son perpendiculares a los ejes x y y.

[A, Video.4] El docente regresa las rectas perpendiculares al eje x y y que había ocultado con anterioridad, para encontrar los puntos donde intersectan las rectas con el eje x y y.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

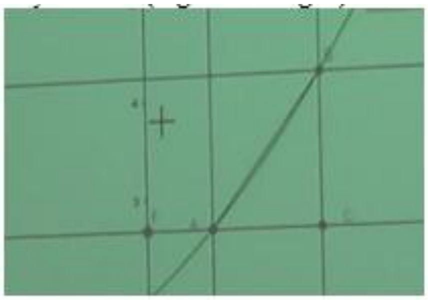
Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

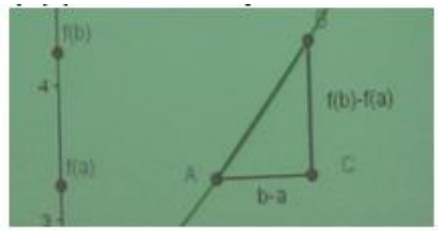
Recursos y Materiales

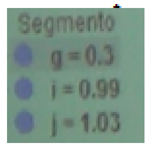
Subindicador del MTSK: KMT-V4.

Subindicador encontrado: Sabe que la herramienta de intersección, las propiedades de los puntos y segmentos de Geogebra le permiten encontrar los puntos $C, D, E\ y\ F$ que se intersectan de las rectas perpendiculares al eje x y y, las cuales mediante sus propiedades rotula los nombres $f(b), a, b\ y\ f(a)$, después rotula los nombres de $b - a$ y $f(b) - f(a)$ a los lados del triángulo, estos nombre los utiliza para explicar la deducción de la expresión algebraica de la TVM y para explicar cómo calcular la pendiente de la recta secante, con el propósito de que alumno comprenda la expresión de la TVM y calcule la pendiente de la recta secante con la división de los valores de los segmentos $AC\ /CB\ = i/g$. (121 – l53)

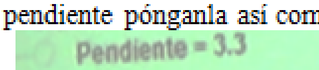
Evidencia: El docente asigna nombres a los puntos de intersección de las rectas perpendiculares con los ejes x y y y a los lados del triángulo construido con los nombres asignados de $a, b, f(a), f(b), b-a, f(b)-f(a)$ explica la deducción de la expresión algebraica de la TVM, además explica cómo calcular la pendiente de la recta secante con los valores de los segmentos AC y CB, es decir, la división de los segmentos i/g. (121 – 153)

122. 

138. 

148. 

152. M: Qué es la pendiente de la secante hagamos el cálculo, vamos a llamarle pendiente es igual y pongamos el segmento este que en mi caso es la letra i dividido entre este segmento que es la letra g y aquí aparece, i entre g, ahí, si, Ok yo le puse como pendiente pónganla así como pendiente

153. 

Evento de término: Pepe menciona que para calcular la pendiente en su caso es i/g , ya que él les asigno esas variables.

❖ [Video.5] Creación de la formula en Latex de Geogebra de la expresión algebraica de la TVM y del cálculo de la pendiente. (154- 172)

Objetivo general: Crear la formula en Latex de Geogebra de la expresión algebraica de la TVM y del cálculo de la pendiente de la recta secante mediante la división de los segmentos AC y BC.

Evento desencadenante: Pepe sugiere seguir con la otra parte de la actividad, la cual es escribir la fórmula de la TVM en Latex.

[A, Video.5] El profesor escribe en el pintarrón la sintaxis de Latex para que los estudiantes la escriban en Geogebra.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

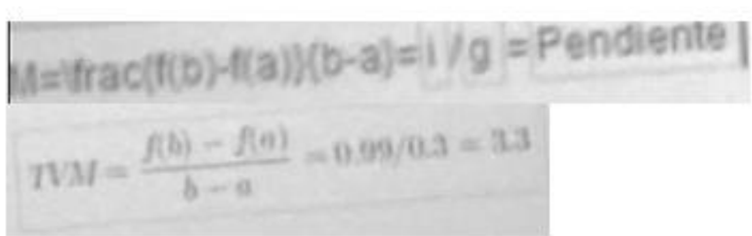
Subindicador del MTSK: KMT-V5.

Subindicador encontrado: Sabe que la potencialidad de la herramienta de Latex de Geogebra le permite crear y calcular la fórmula de la TVM la cual es $\$TVM = \backslash frac\{f(b) - f(a)\}\{b - a\} = i/g = P\acute{e}ndiente$ para mostrar el valor de la pendiente de la recta secante mediante la división de los segmentos i y g del triángulo construido con el objetivo de que el estudiante comprenda cual es el valor numérico de la pendiente cada vez que se mueve el deslizador de la variable h. (154 – 166)

Subindicador encontrado: Sabe que la herramienta texto de Geogebra le concede escribir y responder a las preguntas: ¿Qué observan respecto a los segmentos AC y BC al mover el deslizador h cuando $< h < 1$ y > 1? y ¿Qué puedes decir de lo que significa la TVM? para que el estudiante también escriba y responda a las preguntas dentro de la actividad realizada en Geogebra. (169 – 172)

Evidencia: Pepe utiliza la herramienta de Latex integrada a Geogebra para crear la fórmula de la TVM, explica cómo escribir la sintaxis a los estudiantes, esta fórmula realizada en Latex le permite al docente explicar el valor numérico de la pendiente cuando la variable h asignada al deslizar se mueve. (154 – 166)

159.



160.

161. M: Cada vez que yo mueva el h esto debe cambiar

Evento de término: Pepe menciona que hay guardar en el Dropbox el documento con el nombre de TVM_Sesión1.

Análisis de la clase del día 04/03/2016

❖ [Video.6] Reconstrucción de la gráfica de la tasa de variación media. (1-25)

Objetivo general: Reconstruir la gráfica de la TVM mediante las herramientas de Geogebra.

Evento desencadenante: Pepe al tratar de abrir el Dropbox donde tiene almacenado la actividad anterior llamada TVM_Sesión1, pero se da cuenta que no hay internet en el centro de cómputo.

[A, Videos.6] El docente al darse cuenta que no hay internet, abre Geogebra y empieza a reconstruir la gráfica de la TVM.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

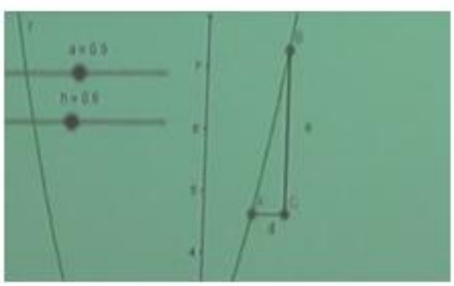
Recursos y Materiales

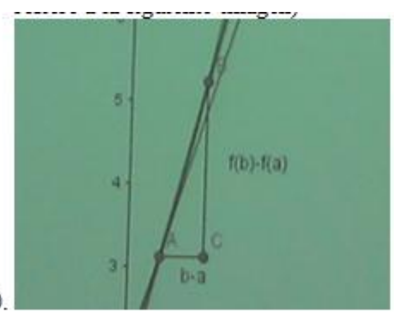
Subindicador del MTSK: KMT-V6.

Subindicador encontrado: Sabe a la perfección las herramientas de Geogebra que utilizó en la actividad de la clase anterior, por lo tanto vuelve a reconstruir y a explicar la gráfica de la TVM de manera rápida, debido a que no tuvo acceso al internet para descargar el archivo TVM_Sesión1, con el motivo de no atrasar a los estudiantes en la nueva actividad. (3 – 23)

Evidencia: Pepe al iniciar su clase se da cuenta de que no hay internet en el centro de cómputo para descargar el archivo TVM_Sesión1 y retomarlo para la nueva actividad de la clase, entonces el profesor vuelve a construir y explicar la gráfica de la TVM para seguir con la clase. (1 – 26)

1. M: Bueno muy bien vamos a empezar no hay internet no sé qué hacer me van a grabar estoy en líos, ok bueno vamos hacerlo rápido vamos a volverlo hacer, no sé si tienen el archivo guardado en su computadora el último
2. E: No, se borra

18. 

20. 

Evento de término: El docente terminar de realizar la reconstrucción de la gráfica de la TVM con todos sus elementos que tenía el archivo TVM_Sesión1.

❖ [Video.7] Cálculo de las variación e interpretación del tipo función. (26- 94)

Objetivo general: Calcular el valor numérico de la tasa de variación media e interpretar el tipo función.

Evento desencadenante: El docente menciona ir al menú vista y abrir la Hoja de cálculo de Geogebra.

[A, Video.7] Pepe realiza un recordatorio sobre los deslizadores a y h, y los configura en la opción mínimo (le pone en 0), máximo (le pone en 5) y el incremento del deslizador (de 1 en 1).

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

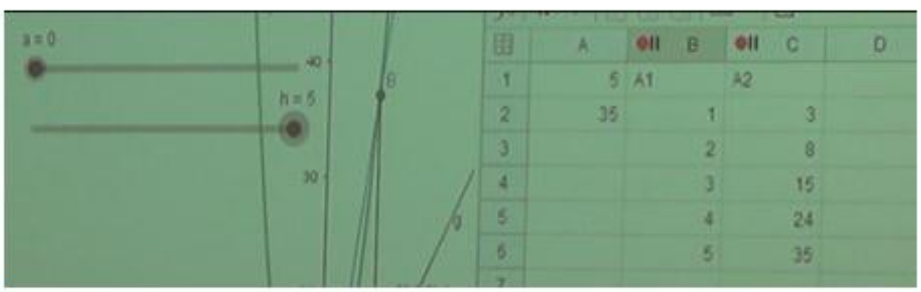
Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V7.

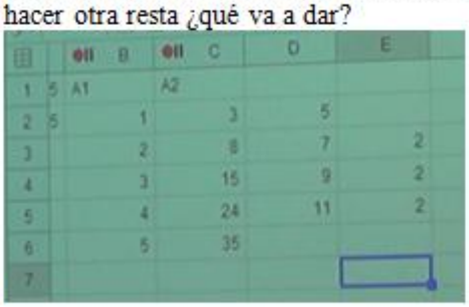
Subindicador encontrado: Sabe que la potencialidad de la hoja de cálculo de Geogebra le posibilita capturar los valores numéricos de los segmentos AC y CB, el incremento de 1 en 1 del deslizador h y realizar las restas de esos incremento para encontrar la primera y segunda variación, con el propósito de que la alumno comprenda a acerca del incremento de la función cuando h incrementa 1 en 1 y además calcule la primera y segunda variación para que comprenda e interprete a qué tipo de función le corresponde esas variaciones. (27 – 94)

Evidencia: Pepe mediante el incremento del deslizador captura los valores numéricos en la hoja de cálculo de Geogebra, para después restar esos incremento el cual da como resultado la primera variación, después resta la primera variación para obtener la segunda variación y con esto el alumno comprende el tipo de función que le corresponde . (27 – 94)

52. M: La flecha de teclado, selecciona el deslizador y lo vas moviendo con la fecha para ir avanzando de uno en uno, y se debe de registrar los valores que toma este este segmento, fue 1, 2 después fue 3 y las alturas cuáles fueron 3,8, 15, 24 y 35, debe de aparecer eso, ¿Si les apareció?

53. 

79. M: Entonces la variación ahí siempre es la misma, hagámosla comprobemos en Excel, vamos hacer esta resta va a ser la celda C3 menos C2 y la arrastramos (el resultado aparece en la siguiente imagen)… siempre aumento en 2 y si vuelvo a hacer otra resta ¿qué va a dar?

80. 

94. M: 0, primera derivada ¿cuál es? una variación, una resta, segunda derivada ¿qué te da? una constante, tercera derivada 0, la cuadrática tiene 2 variaciones, por eso da constante, en una cuadrática al derivar esto es el análisis numérico cuando llegué a una constante podemos entender que curva es…. ah es una cuadrática porque tiene dos variaciones si fuera una cúbica hasta qué valores llegarás la constante cuantas variaciones haremos… si fuera una cúbica cuántas variaciones haremos cuántas restas haremos para que llegamos a una constante, si, hablen, se entienden esa idea…muy bien…

Evento de término: El profesor pregunta si fuera una cubica ¿cuántas variaciones se tiene que hacer?

❖ [Video.8] Comprensión del crecimiento de la tasa de variación media. (95 – 127)

Objetivo general: Comprender el crecimiento de la tasa de variación media.

Evento desencadenante: Pepe menciona que hay que desactivar las celdas de la hoja de cálculo, para no perjudicar a los valores numéricos y pone el deslizador h hasta el cero.

[A,Video.8] El profesor configura el deslizador h el mínimo lo pone en 0, máximo en 10 y el incremento del deslizador de 2 en 2.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V8.

Subindicador encontrado: Sabe que la potencialidad de la hoja de cálculo de Geogebra le posibilita capturar los valores numéricos de los segmentos AC y CB, el incremento de 2 en 2 del deslizador h y realizar las restas de esos incremento para encontrar la primera y segunda variación, con el propósito de que la alumno comprenda a acerca del incremento de la función cuando h incrementa 2 en 2 y además calcule la primera y segunda variación para que comprenda que cuando el intervalo es más grande la curva crece poco. (l00 – 128)

Evidencia: El docente mediante el incremento del deslizador vuelve a captura los valores numéricos en la hoja de cálculo de Geogebra, para después restar esos incremento el cual da como resultado la primera variación, después lo resta para obtener la segunda variación y con esto el alumno comprenda que la curva crece cuando el intervalo es grande. (95 – 128)

117. M: Otra vez la variación de $H3 - H2$ esta variación debe ser constante, ahí está, aquí sale el signo de interrogación porque no hay con quien resta, este con este me da este con este me da este y éste con este me da este, la segunda variación debe de ser constante porque es una cuadrática, sí, qué diferencia ven ustedes de la anterior a ésta como crecía esta función el otro avanzaba de uno en uno y ahora esta avanzó de dos en dos, si tienen estos datos vean cómo avanzaba esta avanzó 3, 8, 15, cuando avanzo de uno en uno y esta son sus variaciones, su variación son estas, y está de acá avanzó 8, 24, 48, 80 y 120 qué pueden decir de eso, a ver… este es uno que ponerlo y este es otro verdad… esta son sus variaciones de una(primera imagen de color amarillo), y estás son sus variaciones de otra(segunda imagen de color verde)

118.

A1	A2		
1	3	5	
2	8	7	2
3	15	9	2
4	24	11	2
5	35		

119.

A7	A8		
2	8	16	8
4	24	24	8
6	48	32	8
8	80	40	
10	120		

128. M: crece no, si es más pequeño pues también crece ¿sí o no? …sigue creciendo, pero si el intervalo es más amplio también sigue creciendo, pero ¿crecen iguales?, no, la idea es que se fijen que no crecen iguales porque es 2 y 8 la variación es más grande aquí (se refiere a la parte verde de la tabla anterior), porque mientras más te alejas más crece la curva, mientras más crece el intervalo pues sí crece pero no tanto, si, esa es la moraleja, sí Noemí jejeje…sí Sofía, Manuel, a ver hagan esto ustedes a ver si es cierto, esto es ya la tarea quiero que estudien y me expliquen,

Evento de término: Pepe le pregunta a los estudiantes si les quedo clara la idea, ya que esa es la tarea y la explicaran.

- [Video.9] Cálculo numérico de la variación y la interpretación de una función lineal y cubica. (129 – 179)

Objetivo general: Calcular el valor numérico de la variación de la función $f(x) = 2x$ y $f(x) = x^3$.

Evento desencadenante: El profesor explica cómo utilizar la herramienta casilla de entrada de Geogebra.

[A, Videos.9] Pepe sugiere que en la herramienta casilla de entrada en la opción rotulo pongan $f(x) =$ y en la opción objeto vinculado se coloca la función que se ha estado trabajando $f(x) = (x + 1)^2 + 1$.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

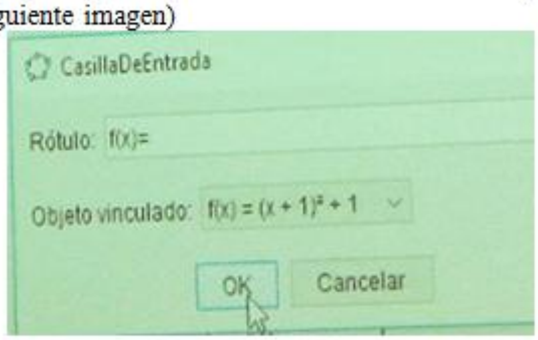
Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V9.

Subindicador encontrado: Sabe que la herramienta casilla de entrada de Geogebra le concede vincular las funciones $f(x) = 2x$ y $f(x) = x^3$ con todo lo que se desarrolló en la actividad, con los deslizadores y la hoja de cálculo, sin necesidad de realizar todo de otra vez, para que el estudiante calcule las restas de las variaciones, comprenda el valor numérico de la variación calculado por la TVM para dichas funciones, y comprenda que cuando calcula la derivada de una función de manera algebraica lo que realiza son restas de las variaciones. (129 – 173)

Evidencia: Pepe utiliza la herramienta casilla de entrada para calcular la variación de la función $f(x) = 2x$ y $f(x) = x^3$y otras funciones, para que el alumno comprenda que el cálculo de las derivadas de forma algebraica son restas de las variaciones. (129 – 179)

129. M: pongan esto para que no pongan otra función aquí hay una opción que se llama y ya hemos usado *casilla de entrada*, si, y la ponemos, en el *rótulo* póngale $f(x) =$ y el *objeto vinculado* va a hacer la función que había puesto $f(x)$(se refiere a la siguiente imagen)



130.

156. M: 0, es el análisis numérico de la variación lo que está haciendo la tasa de variación media, analizar qué tanto varía esa función y esa función varía, en este caso, la primera variación siempre da una constante, en el caso cuando aumenta 1 cuando aumenta dos, son diferentes variaciones en una dio 2 y una dio 4 así les dio a todos

157. E: Si

160. M: Crece verdad, pero siempre va a ser la segunda variación de una recta siempre va a ser 0, la derivada una recta dos veces siempre va a ser 0 la derivada ahí fíjense son restas son restas lo que hacen talachudamente eso que hacen es esto, ósea, es ver cómo se comporta una función, cómo varía una función, cómo crece una función verdad

Evento de término: Pepe pregunta a los alumnos que si ya hay internet y sugiere que lo suban al Dropbox para almacenarlo en su carpeta.

Análisis de la clase del día 07/03/2016

- [Video.10] Juego de la rana saltarían y cálculo de los movimientos de las ranas. (1 – 48)

Objetivo general: Jugar el juego en internet de las ranas saltarina y calcular los movimientos de las ranas.

Evento desencadenante: Pepe dice a los alumnos que abran Google y que busquen el juego de las ranas saltarinas.

[A, Video.10] El profesor indica que hay que resolver el juego de las ranas saltarinas, donde hay que pasar las ranas al otro lado las cafés y las verdes.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

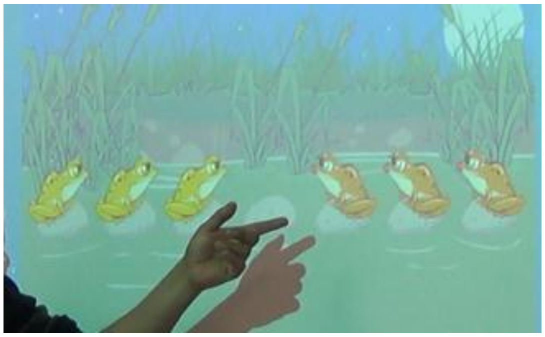
Subindicador del MTSK: KMT-V10.

Subindicador encontrado: Sabe que el juego de las ranas saltarinas localizado en internet le permite tener una enseñanza diferente de la TVM, el propósito del juego es que los alumnos calculen los movimientos que hicieron al pasar las ranas verdes y cafés de un lado a otro, sin que ninguna rana del mismo color quede junta porque se termina el juego. (1 – 31)

Evidencia: Pepe inicia la clase con un juego en línea llamado ranas saltarinas, el juego trata de que hay que pasar las ranas verdes al otro lado donde se encuentran las ranas cafés y viceversa, sin que ninguna rana del mismo color estén juntas, los estudiantes tienen que calcular los movimientos de las ranas. (1 – 44)

1. M: Abram el Google, háganme caso no es broma… pongan por allá… ranas saltarina, así como lo oyen,
2. E: ¿Cómo?
3. M: Ranas saltarinas, búsquenlo
4. E: ¿Es un juego profe?
5. M: Si es un juego

9. M: Resuélvanlo tienen que pasar las ranas al otro lado, las cafés y verdes, dígame ¿cuántos movimientos tienen que hacer para hacerlo?



Evento de término: El docente pregunta ¿cuántos movimientos más o menos realizaron?

- [Video.11] Almacenamiento y descarga de la actividad rana saltarina en Dropbox para el registro y cálculo de los movimientos de las ranas en tablas. (50 – 79)

Objetivo general: Almacenar y descargar la actividad de la rana saltarina en Dropbox para registrar y calcular los movimientos de las ranas en las tablas.

Evento desencadenante: Pepe dice que hay que abrir Dropbox para descargar el archivo de la actividad que se llama rana saltarina.

[A, Video.11] El profesor entra a su carpeta en Dropbox para poder abrir el archivo de la actividad de las ranas saltarinas y explica lo que tiene que hacer los estudiantes.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V11.

Subindicador encontrado: Sabe que el Dropbox es un recurso tecnológico que le posibilita para almacenar y descargar la actividad de las ranas saltarinas, donde explica que las ranas verdes son la letra V, la ranas café son la letra C y el espacio es el 0, con el motivo de que el alumno vuelva a jugar y vaya registrando y calculando los movimientos cuando exista una, dos, tres, cuatro y hasta cinco ranas en cada lado. (52 – 64)

Evidencia: Pepe indica que para seguir con la actividad los estudiantes tiene que descargar la actividad de las ranas saltarinas almacenada en la carpeta de la materia en el Dropbox, en la actividad los alumnos tiene que registrar los movimientos cuando exista una, dos, tres, cuatro y hasta cinco ranas en cada lado, donde las ranas cafés son la letra C y las verdes la V y el espacio es el 0. (52 – 75)

54. M: Si esta en cálculo… situación de la rana… vamos a ver, cálculo, cursos, laboratorio 2, día de clase, situación de la rana, vamos hacer lo siguiente, aquí tienen una tabla dónde están las tres ranas cafés(C) y 3 ranas verdes (V), el número cero es el espacio vacío(se refiere al cero de la siguiente imagen), vayan registrando su movimiento, este ya lo tienen ahí cópienlo, está es la solución, ya tiene la solución haya, lo pueden desplegar no, pero pueden copiar su solución y vean ¿cuántos movimientos hacen en este caso?

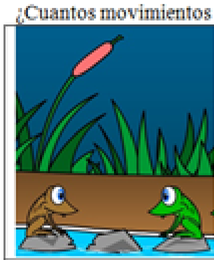
Registra cada uno de los movimiento:

0	C	C	C	0	V	V	V
1							
2							
3							
4							

55.

¿Cuantos movimientos se harían con una rana en cada lado?

59.



0	C	0	V
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

63.

0	C	C	C	0	V	V	V
1	C	C	0	C	V	V	V

64.

N° de ranas en cada lado (r)	Número de movimientos (M) M=f(r)	
1		
2		
3		
4		
5		

Evento de término: El profesor sale un rato del salón y sugiere a los estudiantes llenar las tablas hasta tres ranas.

- [Video.12] Cálculo, comprobación de los movimientos de cuatro ranas, interpretación del tipo función y graficación de los puntos que representan los movimientos de las ranas. (87 – 118)

Objetivo general: Calcular, comprobar los movimientos de cuatro ranas en cada lado e interpretar el tipo de función que le corresponde a dicho movimientos y graficar los puntos que representa la cantidad de ranas con sus respectivos movimientos.

Evento desencadenante: Pepe menciona que hay que abrir Geogebra para seguir con la actividad de las ranas saltarinas.

[A, Video.12] Pepe indica que después de abrir Geogebra, hay que abrir la hoja de cálculo de Geogebra y pregunta a los estudiantes cuántos movimientos obtuvieron para la cantidad de1,2 y 3 de ranas en cada lado.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V12.

Subindicador encontrado: Sabe que la herramienta hoja de cálculo de Geogebra le posibilita calcular y comprobar por la primera y segunda variación que 24 es el número de movimientos cuando existen cuatro ranas en cada lado, con el motivo de que el estudiante interprete mediante las variaciones que la función cuadrática modela el número de movimientos de la las ranas. (87 – 111)

Subindicador encontrado: Sabe que la opción lista de puntos y la opción crear de la hoja de cálculo de Geogebra le concede graficar puntos de acuerdo a los valores numéricos sobre la cantidad de las ranas y de sus respectivos movimientos, con el motivo de que los alumnos puedan comprender el tipo de gráfica que le corresponde a los movimientos de las ranas. (112 – 115)

Evidencia: Pepe utiliza la hoja de cálculo de Geogebra para calcular y comprobar mediante las variaciones que 24 es el número de movimientos que corresponde cuando existen cuatro ranas en cada lado, y con las variaciones interpreta que la función cuadrática modela el número de movimientos de las ranas y gráfica los puntos de esos movimientos. (87 – 118)

102. E: De 2

103. M: De 2 esto quiere decir hice yo hago una segunda variación me va a dar aquí 2, 2, 2(se refiere a la siguiente imagen), con estos datos ustedes pueden pensar ¿qué función es? ¿qué tipo de función está modelando el número de movimientos de la rana? ¿qué función es?

104.

	A	B	C	D
1	1	3		
2	2	8	5	2
3	3	15	7	2
4	4	24	9	2
5	5			

105. E: Cuadrática

106. M: ¿Cuadrática lineal o cúbica? ¿qué función es?

107. E: Cuadrática

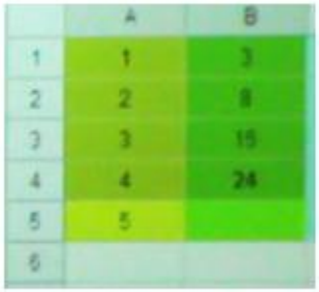
108. M: Cuadrática, porque es cuadrática, Luis ¿por qué dices que es cuadrática?

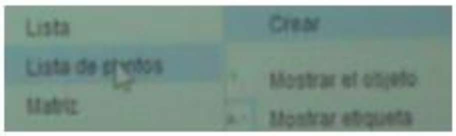
109. E: Porque se realizaron dos restas para llegar a la constante

110. M: ¿Cuantas resta fueron?

111. E: Dos

112. M: dos verdad, como al hacer dos diferencias y me da una constante yo sé que estos datos modelan una función cuadrática, ahora cuál es esa función cuadrática, vamos a buscarla ya lo menos tenemos los datos de Excel, pero las diferencias nos van a permitir saber qué tipo de función es cómo se comporta, si se comporta como una cuadrática, va aumentando rápido, entonces muy bien, ahí

113. 

114. 

115. 

Evento de término: Pepe le ayuda a un alumno que tiene problemas con usar Geogebra, el alumno no puede graficar los puntos con los valores de la tabla.

- [Video.13] Creación del sistema de ecuaciones lineales de $3x3$ y solución mediante el cálculo simbólico CAS para encontrar la función cuadrática y graficarla en Geogebra.(119 – 167)

Objetivo general: Crear el sistema de ecuaciones lineales de $3x3$ y solucionar mediante el cálculo simbólico CAS para encontrar la función cuadrática y graficarla en Geogebra de esta manera comprobar que los puntos graficados anteriormente pasan por la función.

Evento desencadenante: El docente indica que ahora van a usar el álgebra, pregunta a los estudiantes si recuerdan cuál es la fórmula general de la cuadrática.

[A, Video.13] Pepe indica que se utiliza la formula general de la cuadrática $ax^2 + bx + c$, menciona que en esta fórmula se sustituirán los valores 1, 2 y 3 del número de las ranas en x, y va hacer igual a sus respectiva cantidad de movimientos.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

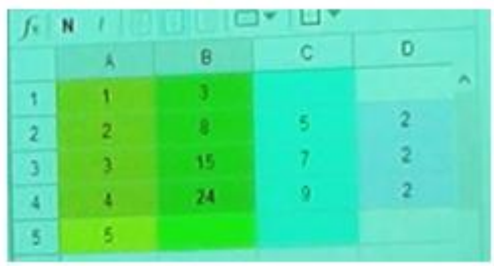
Subindicador del MTSK: KMT-V13.

Subindicador encontrado: Sabe que la potencialidad de la herramienta de cálculo simbólico CAS de Geogebra le permite resolver el sistema de ecuaciones y encontrar los valores de $a = 1, b = 2$ y $c = 0$ para después encontrar la función cuadrática que modele el número de ranas 1, 2 y 3 y sus respectivos movimientos. Para lo anterior es necesario utilizar la formula general de la cuadrática: $ax^2 + bx + c$ y algebra para poder encontrar y solucionar el sistema de ecuaciones $3 = a + b + c$, $8 = 4a + 2b + c$ y $15 = 9a + 3b + c$, los valores de a, b y c tienen el motivo de que los alumnos lo sustituyan en la ecuación cuadrática general para encontrar y graficar la función $f(x) = x^2 + 2x$, además de comprobar que lo puntos graficados anteriormente pasan por la función $f(x) = x^2 + 2x$. (129 – l52)

Subindicador encontrado: Sabe que las sentencias condicionales que están integradas en la sintaxis de Geogebra le posibilita al profesor condicionar la función de la siguiente manera $f(x) = x^2 + 2x.(x > 0)$ para encontrar la gráfica correcta de la función, con el objetivo de que el estudiante comprenda que la función $f(x)$ que modela los movimientos de la rana tiene puro valores positivos. (153 – l64)

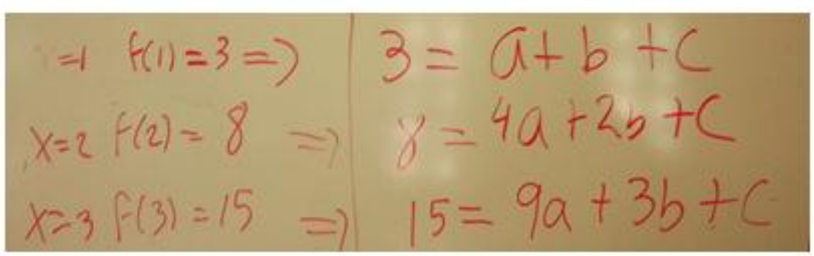
Evidencia: Pepe utiliza los valores numéricos que corresponde a la cantidad de ranas en cada lado y sus respectivos movimientos para crear un sistema de ecuaciones y resolverlos con la herramienta del cálculo simbólico CAS de Geogebra y de esta manera encontrar la función que le corresponde a los movimientos de la rana. (125 – l65)

127.

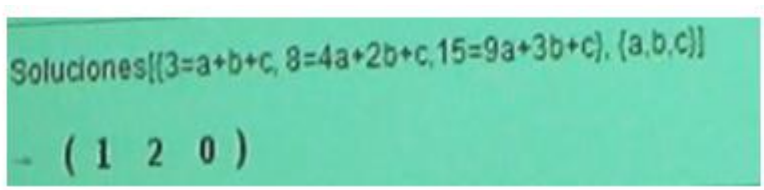


136. M: Ya tenemos un sistema de ecuaciones de tres por tres (se refiere a la siguiente imagen), resuélvanla, no es cierto, lo vamos a resolver directamente en el Geogebra, se entiende esto (señala la siguiente imagen)

137.

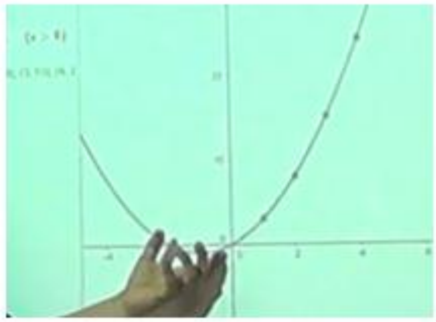


147.



148. M: Cuando aparezca esto, me está diciendo que cuánto vale la a, la a vale en este caso 1 y la b vale 2 y se c vale cero ya sé cuál es la ecuación cuál es la ecuación ahí la cuadrática pues la ecuación es $f(x) = x^2 + 2x$, ya la encontré, sí ya la encontré póngala en Geogebra a ver si pasa por los puntos, edítenla en Geogebra… ok bueno aquí va, ya hicieron todo esto

161.



Evento de término: Pepe indica que hay que guardar la actividad ranas saltarinas, pero finaliza la clase mencionando que, de alguna manera se puede saber cómo encontrar un tipo función mediante la variación y un poco de álgebra.

Análisis de la clase del día 14/03/2016

❖ [Video.14] Utilización y configuración de la calculadora gráfica y el sensor. (1 – 15)

Objetivo general: Utilizar y configurar la calculadora gráfica y el sensor.

Evento desencadenante: Pepe organiza a los estudiantes en equipos de dos o tres integrantes para que realicen la actividad, le proporciona los sensores y las calculadoras a cada equipo, para que vayan conectándolas e interactúen con los botones y el software de la calculadora.

[A, Video.14] El profesor les entrega a los alumnos la actividad y les dice a los alumnos que salgan al patio de la escuela para que registren la gráfica de movimiento del compañero.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V14.

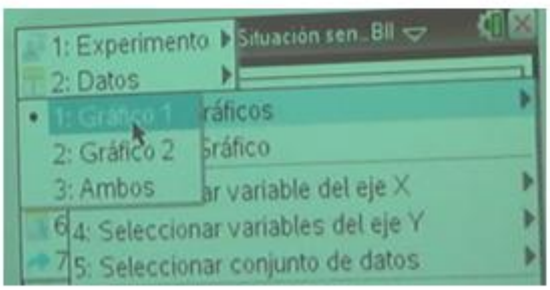
Subindicador encontrado: Sabe que los sensores y calculadoras gráficas son una alternativa para la enseñanza de la TVM, por lo tanto es importante explicar cómo utilizar, configurar, guardar las gráficas y cómo realizar los movimientos, con el propósito de que los equipos grafiquen una excelente gráfica y no tengan problemas con los sensores y la calculadora. (2 – 10)

Subindicador encontrado: Sabe que la potencialidad del sensor y la calculadora gráfica le concede crear gráficas y obtener su información numérica para la enseñanza de la TVM, estos recursos didácticos tecnológicos le posibilita a los estudiantes obtener valores numéricos referentes al movimiento graficado, con el objetivo de pasarlos a la hoja de cálculo de Geogebra y graficarlos. (11-13)

Evidencia: Pepe en esta clase implementa calculadoras gráficas y sensores para la enseñanza de la TVM, con esta tecnología los estudiantes crean una gráfica con base en los movimientos de su compañero, para poder utilizar los valores numéricos de esas gráficas en la hoja de cálculo de Geogebra. (1-13)

1. **Nota: El profesor antes de iniciar su clase realiza equipo de dos o de tres estudiantes para que realicen la actividad, también le proporciona los sensores y calculadoras para que vayan conectándolas e infatúen con los botones y el software integrado en la calculadora.**

5. M: Si, ya…vamos a ver documentos… bueno ahí dice cómo van configurar los tiempos, conecten primero debe de parpadear el sensor, bueno esta es la mía pero…ah les va aparecer dos gráficos, cuando la prenden aparecen dos gráficos, hay que ponerlo grafico 1, si no se acuerdan aquí va: menú, gráficos, grafico1…si menú, gráficos, mostrar gráficos

6. 

11. **Nota: Los alumnos salen del salón para realizar la actividad al aire libre, en cambio el profesor se acerca con cada equipo para revisar que la calculadora y el sensor este bien configurado de acuerdo a la actividad, y así pueda realizar la gráfica del movimiento de la persona.**
12. **También les explica a cada equipo como guardar la gráfica que vayan realizando con la calculadora y el sensor, de igual manera da sugerencias de como poder realizar los movimientos de tal manera que se grafique una excelente gráfica.**
13. **Posteriormente ayuda a cada equipo como poder obtener los datos de la información de las calculadoras correspondiente a la gráfica para utilizarlos en el siguiente paso de la actividad, es decir, en una hoja de cálculo en Geogebra.**

Evento de término: Pepe pregunta a los estudiantes si todos pudieron ingresar a la computadora, debido a que algunos alumnos tuvieron problemas de iniciar sesión en la computadora.

- [Video.15] Introducción y graficación de los valores numéricos de la gráfica hechas con la calculadora y el sensor en la hoja de cálculo de Geogebra. (16 – 28)

Objetivo general: Introducir y graficar los valores numéricos obtenidos de la gráfica realizada con la calculadora gráfica y el sensor en la hoja de cálculo de Geogebra.

Evento desencadenante: El profesor menciona que hay que entrar a Geogebra y pasar los datos de las gráficas a la hoja de cálculo.

[A, Video.15] Pepe indica que en la calculadora están los valores numéricos de la gráfica del movimiento formadas por dos columnas, una columna corresponde al tiempo y la otra a la posición, y esas dos columnas hay pasarlas a la hoja de cálculo.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

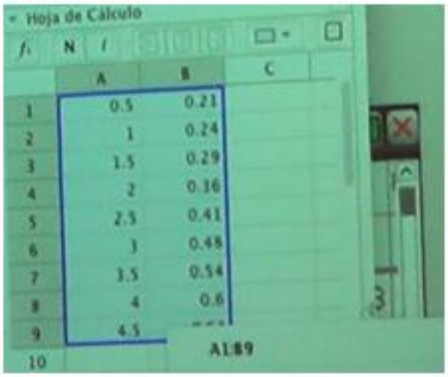
Subindicador del MTSK: KMT-V15.

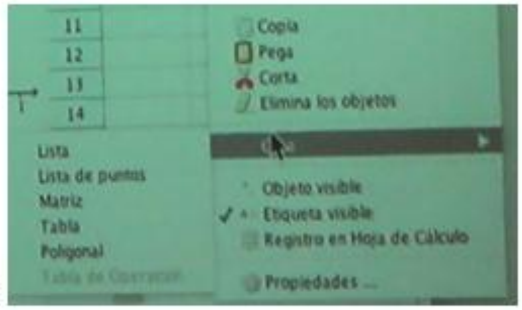
Subindicador encontrado: Sabe que la hoja de cálculo de Geogebra le permite graficar los valores numéricos registrados el sensor y la calculadora gráfica, para que los estudiantes pueden graficar la información y visualicen la gráfica que le corresponde a la información recolectada. (16 – 28)

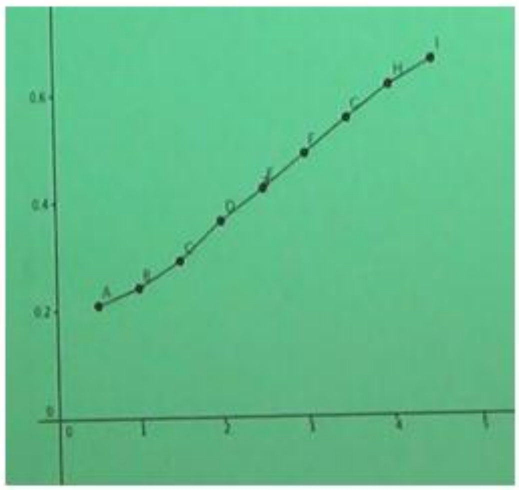
Evidencia: Pepe utiliza los valores numéricos obtenidos de la gráfica del movimiento para llevarlos a la hoja de cálculo para graficar dichos valores. (16 – 28)

16. M: Hay que entrar y hay pasar los datos de las gráficas a la hoja de cálculo de Geogebra, entonces hay dos columnas en la hoja de cálculo que son estas: tiempo y posición, hay que pasarlas en la hoja de cálculo de Geogebra las primeras dos columnas de su grafica en la tabla de datos… las primeras dos columnas son como 9 puntos, hay pasarlas esos datos, hay pasarlas en la hoja de cálculo de Geogebra ¿ya buscaron su tabla?

21. M: Ahorita voy… bueno hay que graficarlos, bueno hay que pasarlos a la hoja de cálculo, cuando lo hayan hecho lo seleccionan (primera imagen) y le dan en el botón derecho, y le decir que cree una poligonal (segunda imagen)… botón derecho y le dicen que cree una poligonal… ¿ya las tiene Luis?
22. E: Si
23. M: Botón derecho, exacto, ya está, poligonal

24. 

25. 

28. 

Evento de término: Al finalizar de graficar los valores numéricos Pepe dice que ahora los estudiantes tiene que sacar la primera variación. .

❖ [Video.16] Creación del sistema de ecuaciones lineales de $2x2$, y su solución mediante el cálculo simbólico CAS para encontrar la función. (29 – 80)

Objetivo general: Crear un sistema de ecuaciones lineales de $2x2$ con los dos primeros valores numéricos de la gráfica de movimiento sustituidos en la ecuación $y = mx + b$, y solucionar el sistema por el cálculo simbólico CAS para encontrar la función y graficarla en Geogebra.

Evento desencadenante: Pepe indica a los estudiantes que primero saquen la primera variación de los valores numéricos.

[A, Video.16] El profesor explica a sus estudiantes que la ecuación que emplearán para encontrar el sistema de ecuaciones es la ecuación lineal $y = mx + b$.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

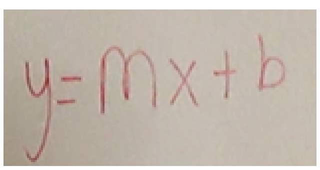
Subindicador del MTSK: KMT-V16.

Subindicador encontrado: Sabe la potencialidad de la hoja de cálculo de Geogebra le permite calcular las variaciones de los datos del movimiento capturados por la calculadora gráfica y el sensor, con el motivo de poder deducir la función que modela ese movimiento. (29-30)

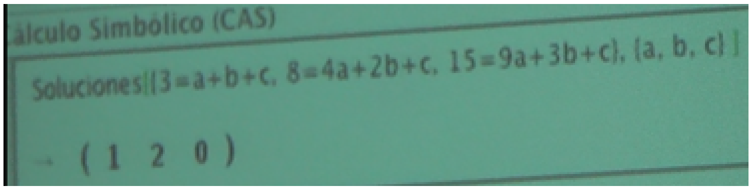
Subindicador encontrado: Sabe que la potencialidad de la herramienta de cálculo simbólico CAS de Geogebra le posibilita solucionar el sistema de ecuaciones de $2x2$ y encontrar los valores de m y b para después encontrar la función lineal que modele los valores numéricos arrojados por el sensor y la calculadora. Para lo anterior es necesario emplear la ecuación lineal $y = mx + b$ y algebra para encontrar y solucionar el sistema de ecuaciones de $2x2$, donde la variable x es el tiempo y la variable y es la posición, los valores de m y b tienen el objetivo de que los alumnos lo sustituyan en la ecuación lineal para encontrar la función que le corresponde. (31 – 76)

Evidencia: El profesor con los datos obtenidos de la calculadora y del sensor, mediante la ecuación lineal, y la el cálculo simbólico CAS de Geogebra, encuentra la función que le corresponde a los datos. (31 – 77)

31. M: Muy bien… a ver, pónganme atención aquí después siguen, después siguen, miren, este, la mayoría piensa que es una lineal, no, es una función lineal, ok, estamos en una aproximación no exactitud, entonces, una función lineal generalmente cómo se define, como y igual a una pendiente más b (escribe la siguiente imagen en el pintarron)

32. 

39. M: Eso es lo que hay que hacer aquí, hay que buscar quién es, cuál es su formula de su movimiento, hay que buscarla, entonces, ya tienen su tabla y hay que sustituir un valor de x y un valor de y y me genera una ecuacion en terminos de m y b necesito dos ecuaciones para resolverlas y hayar eso, si, entonces hay hacer el algebra, hay que hacer eso

64. 

65. E: ¿Dónde está eso? ¿ lista de cálculo, lista de ecuaciones, lista de variables?
66. M: Exacto, lista de ecuaciones, lista de variables, pon soluciones, escribe soluciones ahí, y debe de haber una opción que diga lista de ecuaciones y lista de variables, ahí está, está saliendo, búscala ahí (se lo dice a un alumno)
67. E: ¿Lista de ecuaciones, lista de variables?
68. M: Si, y hay que ponerlas más o menos entre llaves, las ecuaciones, busquen y hay que ponerlas entre llaves… hay que buscar las ecuaciones, hay que buscar las ecuaciones, que van a resolver

Evento de término: Pepe indicada que hay que guardar la actividad con el nombre de Situación de movimiento lineal.

Análisis de la clase del día 19/03/2016

❖ [Video.17] Utilización del Dropbox como recurso tecnológico para almacenar y retomar la actividad TVM_sesion1. (1– 10)

Objetivo general: Utilizar el Dropbox como recurso tecnológico para almacenar y retomar la actividad TVM_sesion1 realizada con anterioridad.

Evento desencadenante: Pepe indica que hay que abrir Dropbox y que busquen dentro de Dropbox el archivo que realizaron con anterioridad que se llama TVM_sesion1.

[A, Video.17] El docente también busca el archivo en la carpeta de un alumno y abre dicho archivo para mostrar a que archivo se refería.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

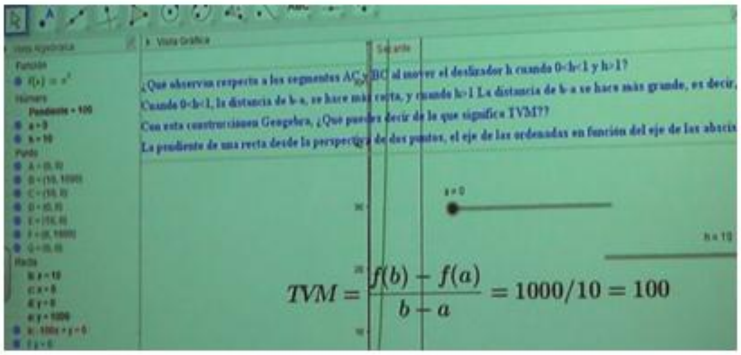
Recursos y Materiales

Subindicador del MTSK: KMT-V17.

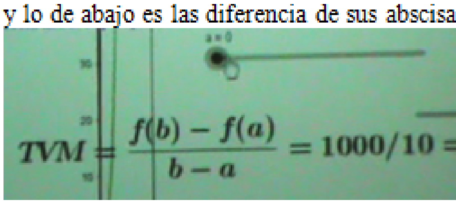
Subindicador encontrado: Sabe que el Dropbox es un recurso tecnológico que le concede almacenar y retomar la actividad realizada en Geogebra con anterioridad la cual consistía en la construcción algebraica, gráfica y el cálculo de la TVM, con el propósito de volver a usar y configurar los deslizadores de las variables a y h para implementarlo en las preguntas de la nueva actividad y que los estudiantes analicen la TVM en los intervalos sugeridos en la nueva actividad. (1– 8)

Evidencia: Pepe retoma una actividad realizada en Geogebra que se hizo en la primera sesión del tema de la derivada y que estaba guardada en el Dropbox, esta actividad la utiliza para responder algunas preguntas de la nueva actividad. (1– 10)

1. M: Abran su, abran sus Dropbox, por favor, chispas no puede ser, abran su Dropbox, habrán el Dropbox, abran el archivo que ya tienen hecho que se llama creo que se llama: TVM_sesión1, no, este, abran ese archivo que ya lo tienen en la carpeta de cálculo y también en esa carpeta hay otro archivo Word... hay ya se me olvidó creo que termina en H2.docx (siguiente imagen) ese archivo en Word que termina en esto (siguiente imagen)

6. 

8. M: Este, este es el que deben de abrir y lo que pide ahí es que calculen la tasa de variación media de la función tal, la función cuál la que tienen en este, en este Geogebra, pero la van a calcular de 0 a 2, entonces cómo van hacer esto en Word, vamos a hacer este, cuál es la tasa de variación media ustedes ya la tienen definida aquí (primera imagen), pero tengo que mover los parámetros a y h de tal manera que analicen el intervalo de 0 a 2, si, esto, si de 0 a 2 analizar cuál es la tasa de variación media ya la tienen calculada ya la tiene hecha, esta es la fórmula de la tasa de variación media tienen dos puntos lo de arriba son la diferencia de las ordenadas y lo de abajo es las diferencia de sus abscisas(segunda imagen)

9. 

Evento de término: El docente indica que hay que mover los parámetros a y h para analizar la TVM el intervalo de 0 a 2.

❖ [Video.18] Exportación de la imagen en Geogebra o utilización de la tecla *prt sc* para copiar y recortar la imagen de la gráfica en Paint o en Word para la solución de las preguntas de la actividad. (11 – 31)

Objetivo general: Exportar la imagen de las gráficas manipuladas por los deslizadores a y h realizadas en Geogebra o utilizar la tecla *prt sc* para copiar y recortar la imagen de la gráfica en Paint o en Word, para responder a las preguntas de la actividad con base en los intervalos sugeridos.

Evento desencadenante: El profesor alude que cuando ya ubiquen el intervalo de 0 a 2 deben de copiar la imagen.

[A, Video.18] Pepe explica que en Geogebra hay una opción que guarda las gráficas que se van realizando como imagen, menciona que para guardar la imagen hay que ir a la opción exportar (aparece una mini ventana), después vista grafica imagen, quitar la opción transparencia y finalmente la guarda en la computadora.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Recursos y Materiales

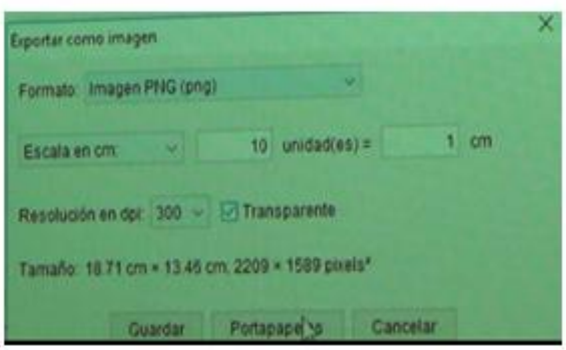
Subindicador del MTSK: KMT-V18.

Subindicador encontrado: Sabe que Geogebra tiene la potencialidad de guardar las gráficas como imágenes, esta opción es implementada para guardar las imágenes de las gráficas cuando los deslizadores a y h son manipulados de acuerdo a los intervalos para responder a las preguntas de la actividad, con el motivo de que el alumno analicen y comprendan la TVM en dichos intervalos y que el alumno no se atrase con la actividad. (11 – 22)

Subindicador encontrado: Sabe que la opción tecla *prt sc* para copiar y recortar la imagen de la gráfica en Paint o en Word, esta opción es implementada para guardar las imágenes de las gráficas cuando los deslizadores a y h son manipulados de acuerdo a los intervalos para responder a las preguntas de la actividad, con el motivo de que el alumno analicen y comprendan la TVM en dichos intervalos y que el alumno no se atrase con la actividad. (23 – 27)

Evidencia: Pepe explica como exportar y guardar una imagen de las gráficas en Geogebra, además de enseñar otra forma de guardar dicha imagen mediante la tecla la tecla *prt sc* para copiar y recortar la imagen de la gráfica en Paint o en Word. (1 – 28)

13.



15. M: Es archivo, exportar, vista gráfica de imagen, entonces le damos aquí y aquí le dan el formato los que quieran pero creo que es esta png (se refiere a la opción formato de la imagen anterior)… vamos a ver cómo la guarda, ver, ahí está, quítale la transparencia, hay una cuestión ahí que dice transparencia (se refiere a la quitar la palomita verde de la opción transparente de la imagen anterior) porque queda negra, y ya guardamos la imagen, entonces lo que vamos a hacer ahorita es ir calculando en este archivo y ahí mismo van a ir escribiendo, calculen la tasa de 0 a 2, de 0 a 1, la tasa de variación media de 0 a 0.5, me va reduciendo de 0 a 0.3 y de 0 a 0.1, rapidito así, lo calculen y copian la imagen y vamos lo suben

23. M: Sí falla, si falla guardar la imagen, en el teclado hay una opción que se llama… este imprimir pantalla, sí saben esa opción el teclado imprime pantalla, ósea dónde está… imprimir pantalla hay una tecla que se llama imprimir pantalla y hay que buscar aquí el Paint, cómo buscó el Paint
24. E: La puede pegar directamente en Word
25. M: Bueno, está bien vamos hacerlo en Word… cuando yo uso Paint, también lo pueden hacer en Word como dicen, y lo pego control V, y ya tengo la imagen, si, entonces la verdad no quiero pegar toda, yo quiero un pedacito, no todo… pues recortan la parte que quieren, esta parte no más, no todo control X, control N, no lo guardo, control V, y ya está es la parte, y ya lo guardó (siguiente imagen), si entonces así puede ser otra opción por medio de imprimir pantalla lo pegan en el Word, o péguenlo en el Word directamente, o se quieren un pedazo lo recortan en el Paint

Evento de término: El docente pregunta a los estudiantes si ya llegaron al inciso f) de las preguntas.

- [Video.19] Cambio de los incrementos del deslizador a y h y cálculo de la TVM de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en los intervalos sugeridos por el profesor. (35 – 73)

Objetivo general: Cambiar los incrementos del deslizador a y h, y calcular la TVM de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en los intervalos sugeridos por el profesor.

Evento desencadenante: Pepe dice a los alumnos que hay que cambiar los incrementos a los deslizadores a y h. a 0.1.

[A, Video.19] Después de realizar los cambios a los incrementos de los deslizadores Pepe indica que hay que ubicar los deslizadores en los intervalos 0 a 0.5 y de 0 a 0.01.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

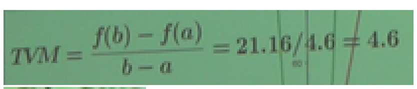
Recursos y Materiales

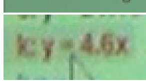
Subindicador del MTSK: KMT-V19.

Subindicador encontrado: Sabe que la potencialidad de las propiedades de los deslizadores de Geogebra le permite cambiar el incremento a 0.1 de las variables a y h asignadas a los deslizadores para ubicar a los deslizadores en los intervalos 0 a 0.5 y de 0 a 0.01, con el propósito de que los estudiantes analicen y comprendan acerca que cuando los intervalos se hacen más pequeño la TVM disminuye y también comprendan que cuando se mueve el deslizador h hacia un punto, el coeficiente de la ecuación de la recta secante se reduce al valor numérico de la TVM, es decir, la recta secante se empieza a convertir a un recta tangente. (35 –73)

Evidencia: El docente cambia los incremento de los deslizadores a y h, para que los estudiantes pueden respondes a los demás incisos de la pregunta, y comprendan sobre que sucede con la recta secante cada vez que se disminuye el intervalo.(35– 73)

35. M: En el f hay que cambiar los incrementos del deslizador a y h a .01 los dos para que puedan hacerlo .01, .01 como ustedes dicen no jala .01 los dos h y a para poder buscar esos intervalos, ahora ubíquenlos hay dos intervalos que les piden de 0 a 0.5 y de 0 a 0.01
36. M: Muy bien, al f, ya casi todos están en el f ¿verdad?... muy bien creo que casi todos llegaron al f, ya llegaron al f ustedes tambien, vean una cosa díganme, Héctor, cada vez que se hace más pequeño ese intervalo 2, 1, .5, qué le pasa a la tasa de variación media, esa es la pregunta g, escríbanla ahí, lo que ustedes consideren, vayan viendo cómo va cambiando los valores de la tasa de variación media y respondan la pregunta g haya en el Word, después me lo dicen pero escríbanlo ahí, sí… todos los cálculos que hicieron cada vez que es pequeño el intervalo ¿qué le pasa a la tasa de variación media?
37. E: Disminuye
38. M: Disminuye pero… tienen que observar cada vez que disminuye cómo disminuye, sólo quiero que entiendan bien esa parte, cada vez que se reduce el intervalo cómo disminuye esa cosa, hay una, hay una preguntan, en la pregunta número i te dice cuándo hiciste el inciso a cuánto le dio la tasa de variación del inciso a la primera ¿cuánto les dio? Diego
39. E: 4

68. 

69. 

70. E: El coeficiente se reduce a la tasa de variación
71. M: Y el coeficiente de una recta que está junto a la x qué representa
72. E: Pendiente
73. M: La pendiente, y cada vez que nos acercamos a un punto la secante se empieza a convertir, en una recta, que lo que justo está hablando es la pendiente… bueno vamos a ver, creo que ya respondí el inciso j,

Evento de término: Pepe indica que la recta secante se convierte en una recta tangente y que su coeficiente es la pendiente.

- [Video.20] Explicación del $\lim_{h \to 0} TVM$ en los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a + h, f(a + h))$. (74 – 101)

Objetivo general: Explicar el $\lim_{h \to 0} TVM$ en los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a + h, f(a + h))$.

Evento desencadenante: El profesor menciona a los estudiantes que ya saben la fórmula de la tasa de variación media.

[A, Video.20] Pepe indica a los estudiantes que la fórmula de la TVM ya la hicieron en Geogebra, escribe en el pintarron los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a + h, f(a + h))$ y después los explica y ubica en el plano cartesiano.

Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

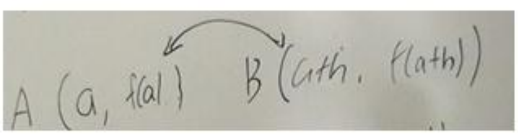
Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

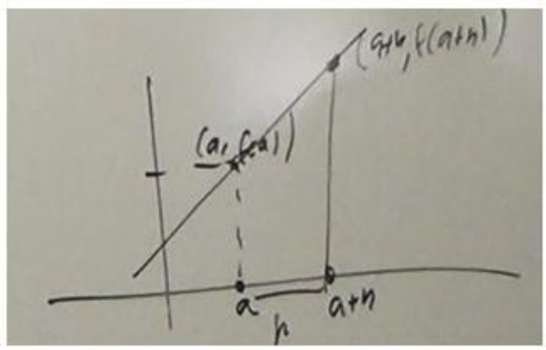
Recursos y Materiales

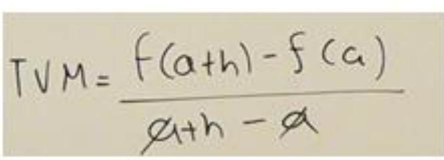
Subindicador del MTSK: KMT-V20.

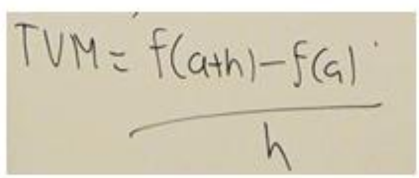
Subindicador encontrado: Sabe que después de la construcción gráfica y algebraica de la TVM en Geogebra es importante explicar $\lim_{h\to 0} TVM$, inicia explicando y definiendo los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a + h, f(a + h))$ en el plano cartesiano, lo anterior le permite al profesor explicar y argumentar como se construye la formula algebraica $TVM = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, esta fórmula también le permite al docente explicar y argumentar que la variable h es la que estaba cambiando en los intervalos 0 a 2, 0 a 1, 0 a 0.01, esto tiene por objetivo que los estudiantes comprendan que cuando h tiende a 0, y a la fórmula de la TVM se le agrega el lim lo que en están comprendiendo es la derivada, el cambio instantáneo, la pendiente de la recta secante que se está convirtiendo en tangente. (78 – 100)

Evidencia: Para finalizar el tópico de la derivada Pepe explica y construye la fórmula de la TVM en términos del $\lim\limits_{h\to 0}$ para que el alumno comprenda que lo que ha estado comprendiendo es la derivada. (78 –100)

82.


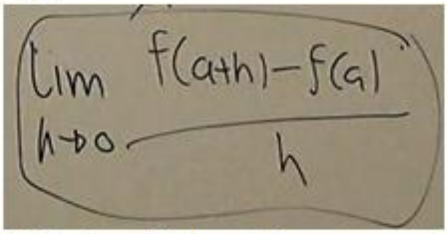
81.


86.


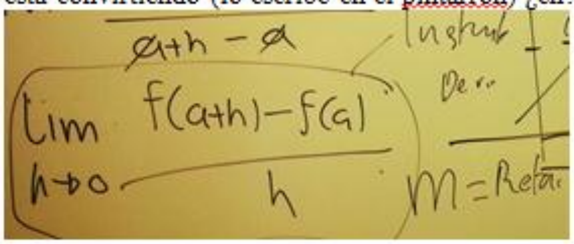
87.


88. E: La h

89. M: La h se está haciendo qué, entonces en la siguiente pregunta yo les decía, si a h yo le pongo esta cuestión porque h está tendiendo a cero ¿qué significa para ustedes esto?

90. 

98. M: A 2, pero si entre intervalo es muy grande no hay un cálculo muy exacto, verdad, pero lo que quería que entendieran la tasa de variación media nos permite calcular el intervalo, pero cuando yo me acerco en un punto esto se llama instantáneo y esto es la derivada, y esto es la pendiente de la recta secante que se está convirtiendo (lo escribe en el pintarron) ¿en?

99. 

100. E: Tangente

Evento de término: Pepe termina su clase y se va rápido, porque un profesor iba a ocupar el centro de cómputo.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS

CAPÍTULO VI. RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados arrojados del análisis de la información del capítulo anterior. El propósito de este capítulo de resultados es proporcionar respuesta a nuestra pregunta de investigación: *¿qué conocimiento pone en juego a el profesor al enseñar la derivada en cuanto al uso de recursos didácticos tecnológicos?* y al objetivo general el cual es: *caracterizar el conocimiento del profesor, al enseñar la derivada, en cuanto a recursos didácticos tecnológicos*.

VI.1. Presentación de los subindicadores de la categoría recursos y materiales del subdominio KMT evidenciados en el profesor Pepe

En seguida se muestran de manera cronológica los subindicadores que se identificaron en los escenarios de la planeación y de las clases videos grabados. Además se ilustra los sudindicadores que fueron identificados en dichos escenarios.

VI.1.1. Presentación cronológica de los subindicadores identificados en la planeación

KMT-P1: Conoce que se debe de especificar las características de las herramientas tecnológicas que se utilizan y con qué objetivo se implementará la tecnología en la materia, esto se determina en la competencia de la asignatura (10 – 11)

KMT-P1.1: Conoce que se tiene que establecer las actividades a resolver en diferentes representaciones semióticas para aplicar las definiciones de la derivada, y así como su aplicación en diferentes contextos, esto se determina en la competencia de la unidad. (13-19)

KMT-P2: Conoce que es importante especificar objetivos, asignación de tareas y prácticas con tecnología, trabajo individual y asesorías, esto se determina en las estrategia de enseñanza, asimismo de especificar la observación del uso de instrucciones para hacer operaciones elementales con tecnología y la asignación de actividades en el centro de cómputo, esto se determina en las actividades de aprendizaje. (24-31)

KMT-P2.1: Conoce que es importante especificar aquéllos recursos didácticos de características tecnologías, esos recursos son de tipo hardware como la computadora y de tipo software como el programa de geometría dinámica, para la enseñanza de la derivada. (32-33)

KMT-P3: Conoce que es importante precisar el uso de la potencialidad de las herramientas de Geogebra para la enseñanza de la Tasa de Variación Media (TVM), así como especificar los momentos de las sesiones de las clases y la intencionalidad de la misma correspondiente al concepto de la TVM. (37 – 42)

KMT-P3.1: Conoce que el Dropbox es un recurso tecnológico alterno para almacenar, retomar, guardar, explicar y evaluar una actividad, el cual también es un recurso para que el alumno almacene la actividad que se realiza, la retome y la guarde en una carpeta en Dropbox, con el motivo de que el docente evalué la actividad y de seguimiento a lo que está aprendiendo el alumno. (43 – 45)

KMT-P4: Conoce que la potencialidad del software de Geogebra le permite enseñar y realizar la construcción gráfica de la tasa de variación media teniendo presente los objetivos matemáticos. (51 – 56)

KMT-P5: Conoce que la potencialidad de las herramientas de deslizador, recta perpendicular, intersección de dos objetos, ocultar objetos, segmento entre dos puntos que pertenecen a Geogebra le concede graficar la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$, crear los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a+h, f(a+h))$, crear el punto C y trazar los segmentos AC y CB, las herramientas mencionadas tienen el propósito de que el estudiante construya gráficamente la tasa de variación media. (61 – 67)

KMT-P6: Conoce que la herramienta deslizador de Geogebra le posibilita calcular las distancias de dos segmentos cuando las variables a y h (asignadas a los deslizadores) tienen ciertos valores y para calcular la tasa de variación de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en los intervalos sugeridos por el profesor, para que el alumno exprese la fórmula de la TVM en función de las variables a y h, y le permita al estudiante comprender y expresar la forma gráfica para la función $f(x) = x^2$ en los puntos $(a, a+h)$ y $\left(f(a), f(a+h)\right)$. (70 – 78)

KMT-P7: Conoce que la herramienta deslizador de Geogebra le permiten realizar los cálculos de la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en los intervalos dados, con el objetivo de que el alumno posteriormente comprenda el comportamiento de la TVM en el intervalo $[(a, b]$ y $[f(a), f(b)]$ cuando h tiende a 0 y la relación entre la TVM y la recta secante, también que el estudiante exprese la formula algebraica del límite de la recta secante cuando h tiende a 0 y termine con la definición de la derivada de una función. (83 – 98)

KMT-P8: Conoce que la potencialidad del deslizador y la hoja de cálculo integrada en Geogebra le concede calcular la distancia de los segmentos AC y BC con las variables a y h, debido a que las variables a y h están asignadas a cada deslizador, con las distancias se elabora una tabla en la hoja de cálculo, esto le permite al alumno expresar la fórmula que obtuvo para calcular las distancias. (l02 – 105)

KMT-P8.1: Conoce que para realizar el cálculo de la tasa de variación media de la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$ en los intervalos dados, y para expresar la gráfica de la función $f(x) = x^2$, los deslizadores de Geogebra le podrá ayudar a realizar los cálculos y a graficar la función, con el motivo que el alumno exprese la fórmula de la TVM con respecto a las variables a y h asignadas a los deslizadores y comprenda la TVM en los puntos $(a, a+h)\ y\ (f(a), f(a+h))$. (l06 – 110)

KMT-P9: Conoce que el juego de la rana saltarina que se encuentra en internet, es otra alternativa para enseñar y realizar actividades entorno a la TVM, el juego consiste en cambiar las ranas verdes con las ranas cafés, el propósito es encontrar una función que modele los movimientos que se realiza cuando hay una, dos, tres y cuatro ranas en cada lado. (114 – 131)

KMT-P10: Conoce que existen otros recursos didácticos tecnológicos como son los sensores y las calculadoras gráficas para enseñar y crear actividades entorno a la TVM, estos recursos se implementan para realizar una gráfica del movimiento de una persona u objeto, la información de esta gráfica se almacena en la calculadora. (134)

KMT-P11: Conoce que los deslizadores de Geogebra le posibilita calcular la tasa de variación media en los intervalos dados, estos intervalos se van reduciendo debido a la configuración del incremento del deslizador, asignados a las variables a y h, con el propósito de que el alumno comprenda acerca de que sucede con la recta secante cuando el intervalo se reduce, para que después exprese la fórmula de la TVM en los puntos $(a, a+h)\ y\ (f(a), f(a+h))$, y también comprenda acerca de que sucede si le agrega el $\lim_{h\to 0} TVM$ a la fórmula de la TVM. (143-149)

En la figura 6.1 se ilustra los subindicadores evidenciados en la planeación, con el propósito de ilustrar dicha información.

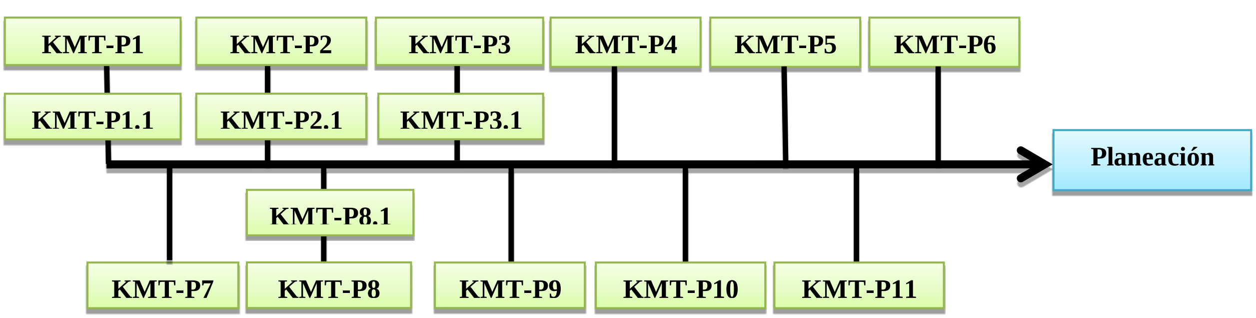


Figura 6.1. Ilustración de los subindicadores de la planeación.

VI.1.2. Presentación cronológica de los subindicadores identificados en los videos

KMT-V1: Sabe que el Dropbox es un recurso que le posibilita almacenar la actividad de la tasa de variación media. (47 – 49)

KMT-V1.1: Sabe que el pizarrón electrónico, la computadora y el proyector le concede ilustrar la gráfica y la formula $TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, con el objetivo de explicar la gráfica y la deducción de la fórmula de la tasa de la variación media. (50 – 60)

KMT-V2: Sabe que las herramientas deslizador, rectas perpendiculares, punto de intersección, crear segmentos y zoom de Geogebra le van a permitir construir el triángulo de la gráfica de la TVM. Se requiere primero de graficar la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$, crear deslizadores asignados a las variables a y h , crear mediante los deslizadores los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a+h, f(a+h))$, trazar rectas perpendiculares al eje x y y que pasen por los puntos A y B, crear el punto de intersección C formado por la intersección de las perpendiculares, crear los segmentos AC y CB, para que el alumno comprenda sobre qué sucede con las distancias de los lados del triángulo y que sucede con el triángulo cuando la variable del deslizador h se hace cada vez más pequeño y la comprensión se complementa con la potencialidad de la herramienta zoom. (71-77: 81-100)

KMT-V3: Sabe que las potencialidades de las herramientas trazo de recta, tangente, zoom y el deslizador asignado a la variable h de Geogebra le conceden crear la recta secante a los puntos A y B, y la recta tangente al punto A y explicar sobre qué sucede con la recta secante cada vez que la variable h se hace cada vez más pequeña, para que el alumno comprenda y vea mediante el zoom, que la recta secante se comporta como la tangente cuando la h se acerca a cero y lo comprenda con los coeficientes de las rectas, es decir, las pendientes de las ecuaciones de la recta secante y tangente. (100 – 117)

KMT-V4: Sabe que la herramienta de intersección, las propiedades de los puntos y segmentos de Geogebra le permiten encontrar los puntos $C, D, E\ y\ F$ que se intersectan de las rectas perpendiculares al eje x y y, las cuales mediante sus propiedades rotula los nombres $f(b), a, b\ y\ f(a)$, después rotula los nombres de $b-a$ y $f(b)-f(a)$ a los lados del triángulo, estos nombre los utiliza para explicar la deducción de la expresión algebraica de la TVM y para explicar cómo calcular la pendiente de la recta secante, con el propósito de que alumno comprenda la expresión de la TVM y calcule la pendiente de la recta secante con la división de los valores de los segmentos $AC\ /CB\ = i/g$. (121 – l53)

KMT-V5: Sabe que la potencialidad de la herramienta de Latex de Geogebra le permite crear y calcular la fórmula de la TVM la cual es $\$TVM = \backslash\ frac\{f(b) - f(a)\}\{b-a\} = i/g = Péndiente$ para mostrar el valor de la pendiente de la recta secante mediante la división de los segmentos i y g del triángulo construido con el objetivo de que el estudiante comprenda cual es el valor numérico de la pendiente cada vez que se mueve el deslizador de la variable h. (154 – 166)

KMT-V5.1: Sabe que la herramienta texto de Geogebra le concede escribir y responder a las preguntas: ¿Qué observan respecto a los segmentos AC y BC al mover el deslizador h cuando $< h < 1$ y > 1? y ¿Qué puedes decir de lo que significa la TVM? para que el estudiante también escriba y responda a las preguntas dentro de la actividad realizada en Geogebra. (169 – 172)

En la figura 6.2 se ilustra los subindicadores evidenciados en la primera clase, con el propósito de ilustrar dicha información.

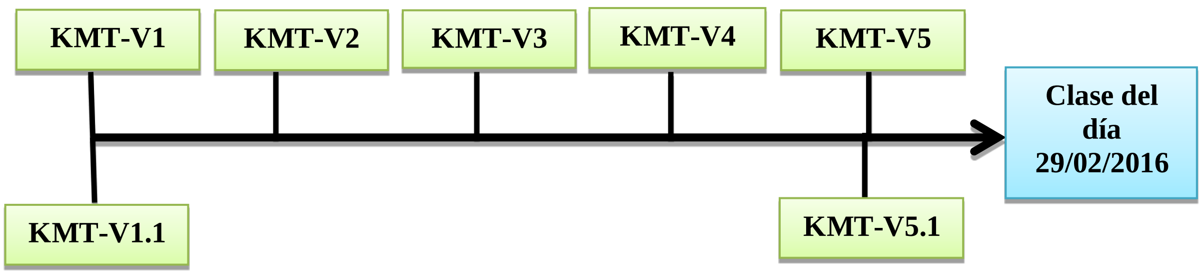


Figura 6.2. Ilustración de los subindicadores de la primera clase.

KMT-V6: Sabe a la perfección las herramientas de Geogebra que utilizó en la actividad de la clase anterior, por lo tanto vuelve a reconstruir y a explicar la gráfica de la TVM de manera rápida, debido a que no tuvo acceso al internet para descargar el archivo TVM_Sesión1, con el motivo de no atrasar a los estudiantes en la nueva actividad. (3 – 23)

KMT-V7: Sabe que la potencialidad de la hoja de cálculo de Geogebra le posibilita capturar los valores numéricos de los segmentos AC y CB,el incremento de 1 en 1 del deslizador h y realizar las restas de esos incremento para encontrar la primera y segunda variación, con el propósito de que la alumno comprenda a acerca del incremento de la función cuando h incrementa 1 en 1 y además calcule la primera y segunda variación para que comprenda e interprete a qué tipo de función le corresponde esas variaciones. (27 – 94)

KMT-V8: Sabe que la potencialidad de la hoja de cálculo de Geogebra le posibilita capturar los valores numéricos de los segmentos AC y CB, el incremento de 2 en 2 del deslizador h y realizar las restas de esos incremento para encontrar la primera y segunda variación, con el propósito de que la alumno comprenda a acerca del incremento de la función cuando h incrementa 2 en 2 y además calcule la primera y segunda variación para que comprenda que cuando el intervalo es más grande la curva crece poco. (l00 – 128)

KMT-V9: Sabe que la herramienta casilla de entrada de Geogebra le concede vincular las funciones $f(x) = 2x$ y $f(x) = x^3$ con todo lo que se desarrolló en la actividad, con los deslizadores y la hoja de cálculo, sin necesidad de realizar todo de otra vez, para que el estudiante calcule las restas de las variaciones, comprenda el valor numérico de la variación calculado por la TVM para dichas funciones, y comprenda que cuando calcula la derivada de una función de manera algebraica lo que realiza son restas de las variaciones. (129 – 173)

En la figura 6.3 se ilustra los subindicadores evidenciados en la segunda clase, con el propósito de ilustrar dicha información.

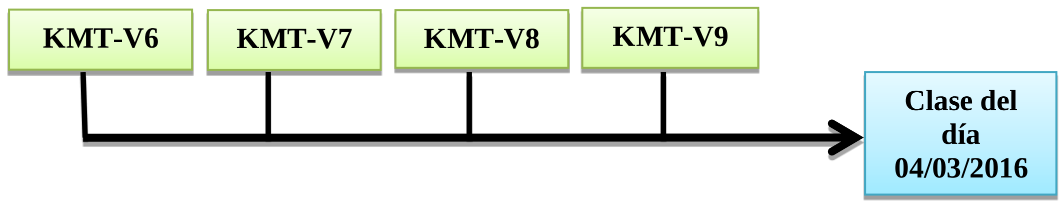


Figura 6.3. Ilustración de los subindicadores de la segunda clase.

KMT-V10: Sabe que el juego de las ranas saltarinas localizado en internet le permite tener una enseñanza diferente de la TVM, el propósito del juego es que los alumnos calculen los movimientos que hicieron al pasar las ranas verdes y cafés de un lado a otro, sin que ninguna rana del mismo color quede junta porque se termina el juego. (1 – 31)

KMT-V11: Sabe que el Dropbox es un recurso tecnológico que le posibilita para almacenar y descargar la actividad de las ranas saltarinas, donde explica que las ranas verdes son la letra V, la ranas café son la letra C y el espacio es el 0, con el motivo de que el alumno vuelva a jugar y vaya registrando y calculando los movimientos cuando exista una, dos, tres, cuatro y hasta cinco ranas en cada lado. (52 – 64)

KMT-V12: Sabe que la herramienta hoja de cálculo de Geogebra le posibilita calcular y comprobar por la primera y segunda variación que 24 es el número de movimientos cuando existen cuatro ranas en cada lado, con el motivo de que el estudiante interprete mediante las variaciones que la función cuadrática modela el número de movimientos de la las ranas. (87 – 111)

KMT-V12.1: Sabe que la opción lista de puntos y la opción crear de la hoja de cálculo de Geogebra le concede graficar puntos de acuerdo a los valores numéricos sobre la cantidad de las ranas y de sus respectivos movimientos, con el motivo de que los alumnos puedan comprender el tipo de gráfica que le corresponde a los movimientos de las ranas. (112 – 115)

KMT-V13: Sabe que la potencialidad de la herramienta de cálculo simbólico CAS de Geogebra le permite resolver el sistema de ecuaciones y encontrar los valores de $a = 1, b = 2$ y $c = 0$ para después encontrar la función cuadrática que modele el número de ranas 1, 2 y 3 y sus respectivos movimientos. Para lo anterior es necesario utilizar la formula general de la cuadrática: $ax^2 + bx + c$ y algebra para poder encontrar y solucionar el sistema de ecuaciones $3 = a + b + c$, $8 = 4a + 2b + c$ y $15 = 9a + 3b + c$, los valores de a, b y c tienen el motivo de que los alumnos lo sustituyan en la ecuación cuadrática general para encontrar y graficar la función $f(x) = x^2 + 2x$, además de comprobar que lo puntos graficados anteriormente pasan por la función $f(x) = x^2 + 2x$. (129 – l52)

KMT-V13.1: Sabe que las sentencias condicionales que están integradas en la sintaxis de Geogebra le posibilita al profesor condicionar la función de la siguiente manera $f(x) = x^2 + 2x.(x > 0)$ para encontrar la gráfica correcta de la función, con el objetivo de que el estudiante comprenda que la función $f(x)$ que modela los movimientos de la rana tiene puro valores positivos. (153 – l64)

En la figura 6.4 se ilustra los subindicadores evidenciados en la tercera clase, con el propósito de ilustrar dicha información.

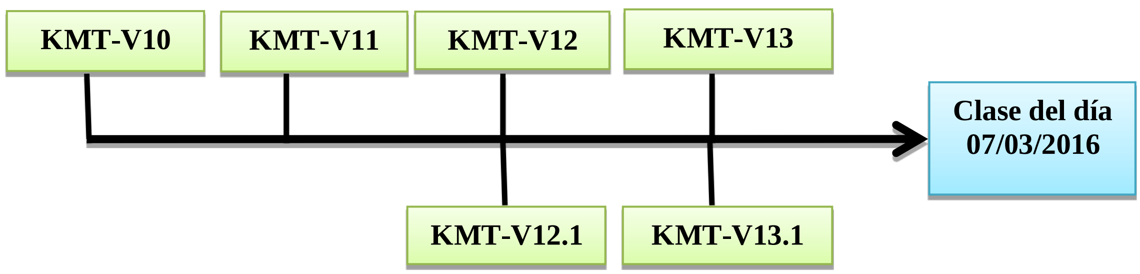


Figura 6.4. Ilustración de los subindicadores de la tercera clase.

KMT-V14: Sabe que los sensores y calculadoras gráficas son una alternativa para la enseñanza de la TVM, por lo tanto es importante explicar cómo utilizar, configurar, guardar las gráficas y cómo realizar los movimientos, con el propósito de que los equipos grafiquen una excelente gráfica y no tengan problemas con los sensores y la calculadora. (2 – 10)

KMT-V14.1: Sabe que la potencialidad del sensor y la calculadora gráfica le concede crear gráficas y obtener su información numérica para la enseñanza de la TVM, estos recursos didácticos tecnológicos le posibilita a los estudiantes obtener valores numéricos referentes al movimiento graficado, con el objetivo de pasarlos a la hoja de cálculo de Geogebra y graficarlos. (11-13)

KMT-V15: Sabe que la hoja de cálculo de Geogebra le permite graficar los valores numéricos registrados el sensor y la calculadora gráfica, para que los estudiantes pueden graficar la información y visualicen la gráfica que le corresponde a la información recolectada. (16 – 28)

KMT-V16: Sabe la potencialidad de la hoja de cálculo de Geogebra le permite calcular las variaciones de los datos del movimiento capturados por la calculadora gráfica y el sensor, con el motivo de poder deducir la función que modela ese movimiento. (29-30)

KMT-V16.1: Sabe que la potencialidad de la herramienta de cálculo simbólico CAS de Geogebra le posibilita solucionar el sistema de ecuaciones de $2x2$ y encontrar los valores de m y b para después encontrar la función lineal que modele los valores numéricos arrojados por el sensor y la calculadora. Para lo anterior es necesario emplear la ecuación lineal $y = mx + b$ y álgebra para encontrar y solucionar el sistema de ecuaciones de $2x2$, donde la variable x es el tiempo y la variable y es la posición, los valores de m y b tienen el objetivo de que los alumnos lo sustituyan en la ecuación lineal para encontrar la función que le corresponde. (31 – 76)

En la figura 6.5 se ilustra los subindicadores evidenciados en la quinta clase, con el propósito de ilustrar dicha información.

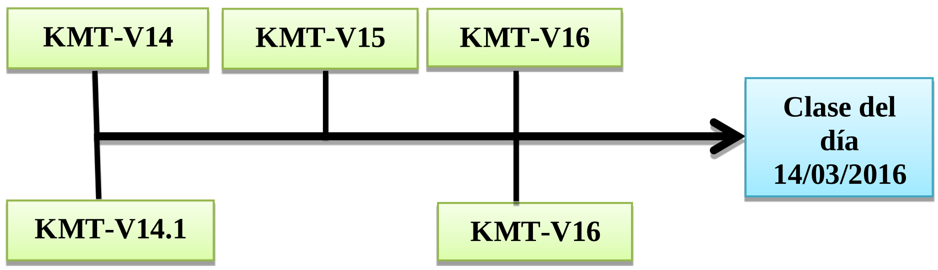


Figura 6.5. Ilustración de los subindicadores de la quinta clase.

KMT-V17: Sabe que el Dropbox es un recurso tecnológico que le concede almacenar y retomar la actividad realizada en Geogebra con anterioridad la cual consistía en la construcción algebraica, gráfica y el cálculo de la TVM, con el propósito de volver a usar y configurar los deslizadores de las variables a y h para implementarlo en las preguntas de la nueva actividad y que los estudiantes analicen la TVM en los intervalos sugeridos en la nueva actividad. (1– 8)

KMT-V18: Sabe que Geogebra tiene la potencialidad de guardar las gráficas como imágenes, esta opción es implementada para guardar las imágenes de las gráficas cuando los deslizadores a y h son manipulados de acuerdo a los intervalos para responder a las preguntas de la actividad, con el motivo de que el alumno analicen y comprendan la TVM en dichos intervalos y que el alumno no se atrase con la actividad. (11 – 22)

KMT-V18.1: Sabe que la opción tecla *prt sc* para copiar y recortar la imagen de la gráfica en Paint o en Word, esta opción es implementada para guardar las imágenes de las gráficas cuando los deslizadores a y h son manipulados de acuerdo a los intervalos para responder a las preguntas de la actividad, con el motivo de que el alumno analicen y comprendan la TVM en dichos intervalos y que el alumno no se atrase con la actividad. (23– 27)

KMT-V19: Sabe que la potencialidad de las propiedades de los deslizadores de Geogebra le permite cambiar el incremento a 0.1 de las variables a y h asignadas a los deslizadores para ubicar a los deslizadores en los intervalos 0 a 0.5 y de 0 a 0.01, con el propósito de que los estudiantes analicen y comprendan acerca que cuando los intervalos se hacen más pequeño la TVM disminuye y también comprendan que cuando se mueve el deslizador h hacia un punto, el coeficiente de la ecuación de la recta secante se reduce al valor numérico de la TVM, es decir, la recta secante se empieza a convertir a un recta tangente. (35 –73)

KMT-V20: Sabe que después de la construcción gráfica y algebraica de la TVM en Geogebra es importante explicar $\lim_{h\to 0} TVM$, inicia explicando y definiendo los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a + h, f(a + h))$ en el plano cartesiano, lo anterior le permite al profesor explicar y argumentar como se construye la formula algebraica $TVM = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, esta fórmula también le permite al docente explicar y argumentar que la variable h es la que estaba cambiando en los intervalos 0 a 2, 0 a 1, 0 a 0.01, esto tiene por objetivo que los estudiantes comprendan que cuando h tiende a 0, y a la fórmula de la TVM se le agrega el lim lo que en están comprendiendo es la derivada, el cambio instantáneo, la pendiente de la recta secante que se está convirtiendo en tangente. (78 – 100)

En la figura 6.6 se ilustra los subindicadores evidenciados en la sexta clase, con el propósito de ilustrar dicha información.

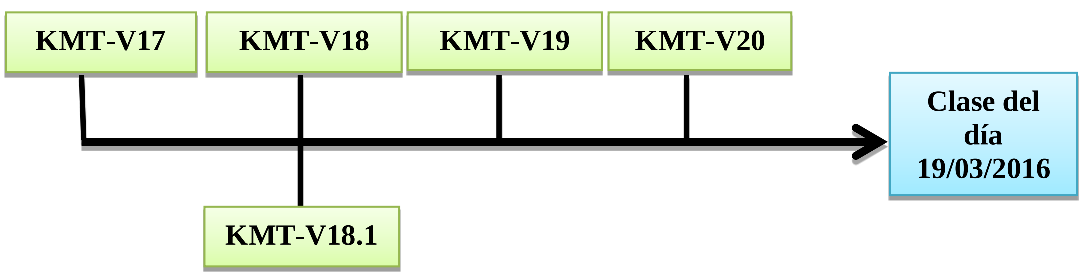


Figura 6.6. Ilustración de los subindicadores de la sexta clase.

VI.2. Presentación de la asociación de los subindicadores en indicadores de la categoría recursos y materiales del subdominio KMT evidenciados en el profesor Pepe

A continuación se presentan las características que se detectaron en el análisis de los subindicadores, estas características nos van a posibilitar agrupar a los sudindicadores en indicadores, a su vez estos indicadores nos permite realizar la caracterización del conocimiento del profesor, al enseñar la derivada, en cuanto a recursos didácticos tecnológicos. Asimismo con el agrupamiento se muestran categorías y subcategorías.

Cabe mencionar que puede suceder que ningún sudindicador se agrupe con otros sudindicadores, en este caso, el sudindicador que no quede agrupado se descarta.

VI.2.1. Características de los subindicadores de la planeación y de los videos del profesor Pepe

En este apartado se muestran las características que se aprecian de los subdindicadores con base en un análisis detalladamente que se realizó de los mismos. Para determinar dichas características de los subindicadores se detectaron aspectos generales de los mismos, en la tabla 6.7 se exponen esos aspectos detectados que fueron asignados a literales y sus respectivos significados. Encontrar las características de cada subindicador nos proporciona mayor factibilidad de agruparlos en indicadores de cara a la caracterización del conocimiento del profesor.

D = Derivada
ED = Enseñanza de la Derivada
RDTG = Recurso Didáctico Tecnológico de Geogebra
RDTSC = Recurso Didáctico Tecnológico del Sensor y Calculadora
TM = Tópico Matemático
RTA = Recurso Tecnológico de Apoyo
RP = Recurso de Programación
RTAE= Recurso Tecnológico de Apoyo para la Enseñanza

Tabla 6.7

Características de los subindicadores.

Escenarios	Subindicador	Características
Planeación	KMT-P1	RTA, ED y D
	KMT-P1.1	D y ED
	KMT-P2	RTA, ED y D
	KMT-P2.1	RTA, RDTG, ED y D
	KMT-P3	RDTG, ED y D
	KMT-P3.1	RTA y ED
	KMT-P4	RDTG, ED y D
	KMT-P5	RDTG (deslizador, perpendicular, intersección, ocultar, segmento), ED, D y TM
	KMT-P6	RDTG (deslizador), ED y D
	KMT-P7	RDTG (deslizador), ED, D y TM
	KMT-P8	RDTG (distancia, deslizador), ED y TM
	KMT-P8.1	RDTG (deslizador, graficar), ED, D y TM
	KMT-P9	RTAE y ED
	KMT-P10	RDTSC (graficar) y ED
	KMT-P11	RDTG (deslizador), ED y D

Videos de las clases	KMT-V1	RTA y ED
	KMT-V1.1	RTAE y ED
	KMT-V2	RDTG (graficar, puntos, perpendiculares, intersección, segmento, zoom), ED y TM
	KMT-V3	RDTG (recta secante, recta tangente, zoom, deslizador), ED y D
	KMT-V4	RTDG (intersección, propiedades de puntos, segmentos), ED y D
	KMT-V5	RDTG (latex), RP, ED y D
	KMT-V5.1	RDTG (texto) y ED
	KMT-V6	RDTG, ED y D
	KMT-V7	RDTG (deslizador, hoja de cálculo), ED y D
	KMT-V8	RDTG (deslizador, hoja de cálculo), ED y D
	KMT-V9	RDTG (casilla de entrada), ED y D
	KMT-V10	RTAE y ED
	KMT-V11	RTA y ED
	KMT-V12	RDTG (hoja de cálculo), ED y D
	KMT-V12.1	RDTG (graficar, hoja de cálculo, lista de puntos), ED y TM
	KMT-V13	RDTG (cálculo simbólico CAS), ED, D y TM
	KMT-V13.1	RDTG (condicionales), RP, ED y D
	KMT-V14	RDTSC (propiedades, configuración), ED y TM
	KMT-V14.1	RDTSC (graficar, datos), ED, D y TM
	KMT-V15	RDTSC (datos) y RDTG (hoja de cálculo), ED, D y TM
	KMT-V16	RDTSC (datos), RDTG (hoja de cálculo), ED y D
	KMT-V16.1	RDTSC (datos) y RDTG (cálculo simbólico CAS), ED, D y TM
	KMT-V17	RTAE y RDTG (deslizador), RTAE, ED y D
	KMT-V18	RDTG (exportar), RTAE, ED y D
	KMT-V18.1	RTAE, ED y D
	KMT-V19	RDTG (deslizador), ED y D
	KMT-V20	D, ED y TM

VI.2.2. Agrupamiento de los subindicadores en indicadores de la planeación y de los videos

Después de haber encontrado las características de los subindicadores en cada escenario (en el apartado anterior), en la tabla 6.8 se muestran el agrupamiento que se realizó de los subindicadores con base en las características comunes que tenían cada uno.

Tabla 6.8

Agrupamiento de los subindicadores de acuerdo a sus características.

Agrupamiento		
Grupos	**Subindicador**	**Características**
1	KMT-P1	RTA, ED y D
	KMT-P2	RTA, ED y D
	KMT-P3.1	RTA y ED
	KMT-V1	RTA y ED
	KMT-V11	RTA y ED
2	KMT-P9	RTAE y ED
	KMT-V1.1	RTAE y ED
	KMT-V10	RTAE y ED
	KMT-V18.1	RTAE, ED y D
3	KMT-P2.1	RDTG, RTA y ED
	KMT-V17	RDTG (deslizador), RTAE, ED y D
	KMT-V18	RDTG (exportar), RTAE, ED y D
4	KMT-P3	RDTG, ED y D
	KMT-P4	RDTG, ED y D
	KMT-P6	RDTG (deslizador), ED y D
	KMT-P11	RDTG (deslizador), ED y D
	KMT-V3	RDTG (recta secante, recta tangente, zoom, deslizador), ED y D
	KMT-V4	RTDG (intersección, propiedades de puntos, segmentos), ED y D
	KMT-V5.1	RDTG (texto), ED y D
	KMT-V6	RDTG, ED y D
	KMT-V7	RDTG (deslizador, hoja de cálculo), ED y D
	KMT-V8	RDTG (deslizador, hoja de cálculo), ED y D
	KMT-V9	RDTG (casilla de entrada), ED y D
	KMT-V12	RDTG (hoja de cálculo), ED y D
	KMT-V19	RDTG (deslizador), ED y D
5	KMT-V5	RDTG (latex), RP, ED y D
	KMT-V13.1	RDTG (condicionales), RP, ED y D
	KMT-P10	RDTSC (graficar) y ED

6	KMT-V14	RDTSC (propiedades, configuración), ED y TM
	KMT-V14.1	RDTSC (graficar, datos), ED, D y TM
	KMT-V15	RDTSC (datos) y RDTG (hoja de cálculo), ED, D y TM
	KMT-V16	RDTSC (datos), RDTG (hoja de cálculo), ED y D
	KMT-V16.1	RDTSC (datos), RDTG (cálculo simbólico CAS), ED, D y TM
7	KMT-P5	RDTG (deslizador, perpendicular, intersección, ocultar, segmento), ED, D y TM
	KMT-P7	RDTG (deslizador), ED, D y TM
	KMT-P8	RDTG (distancia, deslizador), ED y TM
	KMT-P8.1	RDTG (deslizador, graficar), ED, D y TM
	KMT-V2	RDTG (graficar, puntos, perpendiculares, intersección, segmento, zoom), ED y TM
	KMT-V12.1	RDTG (graficar, hoja de cálculo, lista de puntos), ED y TM
	KMT-V13	RDTG (cálculo simbólico CAS), ED, D y TM

El agrupamiento anterior nos proporciona criterios para poder plantear subcategorías que corresponde a cada subindicador con base en las características que presentan de los mismos (véase la figura 6.9). La primera subcategoría (líneas punteadas) hace referencia a recursos tecnológicos de apoyo que no está relacionada a la enseñanza de un contenido matemático, la segunda categoría hace referencia a recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza, está asociada a un contenido matemático de manera indirecta o directa. La tercera subcategoría hasta la séptima está relacionada a recursos didácticos tecnológicos y están asociados de forma directa a un contenido matemático, en este caso la derivada.

Por lo tanto, con lo mencionado anteriormente y las subcategorías que siguen en la figura 6.9, nos planteamos una clasificación acerca de los recursos de índole digital, con la intención de ser más específicos, esta clasificación la nombramos como: *recursos didácticos tecnológicos*, *recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y recursos tecnológicos de apoyo*.

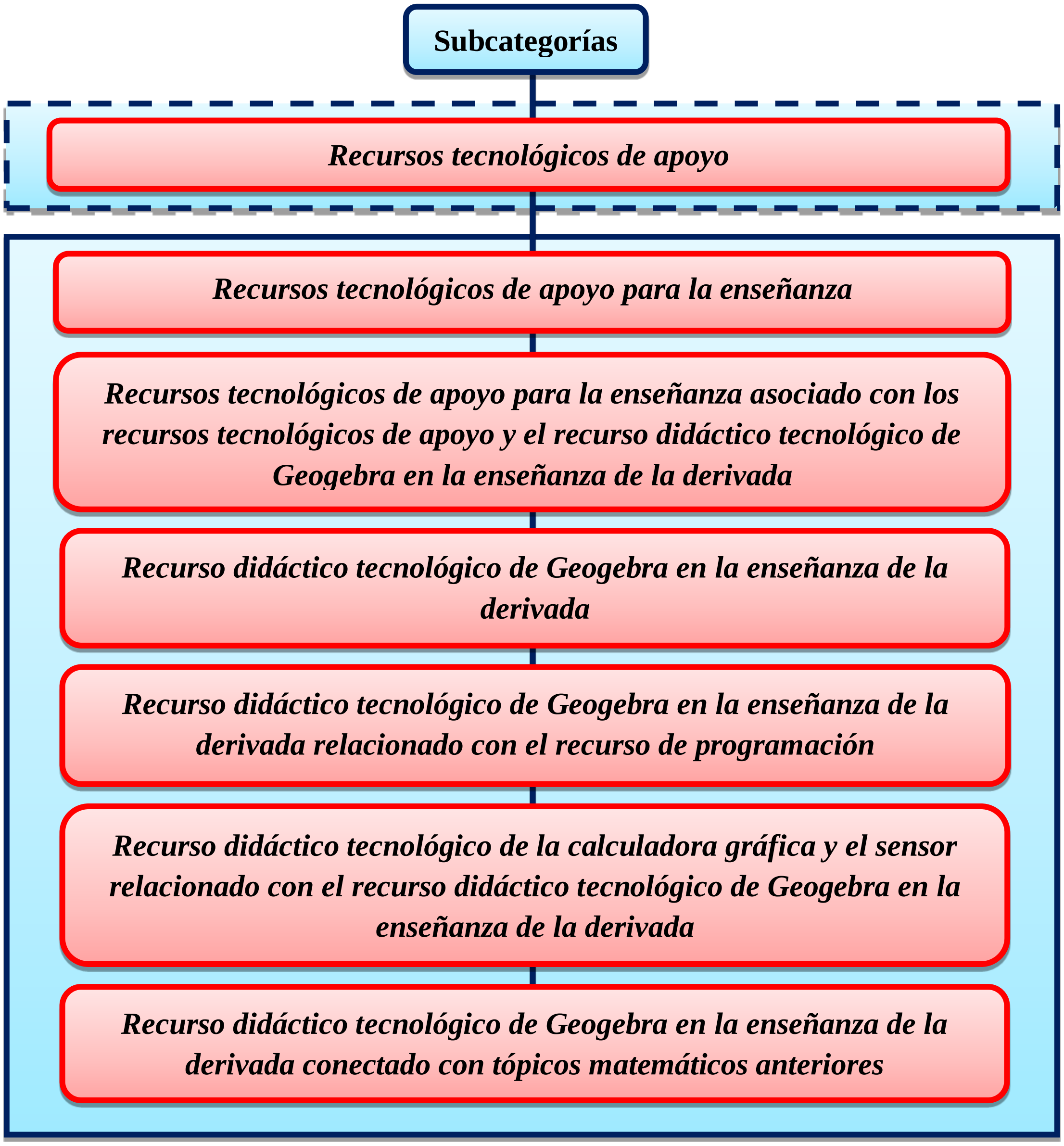


Figura 6.9. Subcategorías surgidas de los subindicadores.

Con base en los sudindicadores y la entrevista se proporciona rasgos a las subcategorías, estos rasgos están asociados a la enseñanza de algún concepto matemático con el implemento de recursos didácticos tecnológicos, recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y recursos tecnológicos de apoyo, considerando como referente la clasificación realizada por Hernández, Borjón y Torres (2016, en prensa) sobre los usos o intencionalidades de la tecnología. La clasificación de Hernández, Borjón y Torres (2016) es:

- **Informático.** La tecnología es un medio para buscar, reproducir o presentar información. Su contexto es diverso y no está relacionado directamente a un contenido matemático.

- **Técnico.** "Su alcance se limita a cuestiones que tiene que ver con realizar acciones habituales dónde la tecnología permite hacerlo de una manera más óptima" (p.2), está relacionado a la repetición "de acciones en un tiempo menor o dónde la intencionalidad es que los estudiantes evidencien la funcionalidad de la tecnología" (p.2).
- **Didáctica-tecnológica.** Hace mención a la edificación de significados de objetos en estudio (Miranda y Sacristán, 2012, citado por Hernández, Borjón y Torres, 2016); relacionados a contenidos matemáticos. La características primordial es que está determinada por un uso reflexivo (Hitt y Cortés, 2009 y Hitt, 2003, citado por Hernández, Borjón y Torres, 2016). "En particular se considera que en esta dimensión las tecnologías podrían revolucionar las prácticas en el aula" (p.2) (Rojano, 2003, citado por Hernández, Borjón y Torres, 2016)

A la clasificación anterior, se agregan más categorías (rasgos) a la dimensión Informática, además de especificar y brindar algunas características extras, como se muestra en la tabla 6.10. Lo anterior como un resultado de esta investigación, producto de los subindicadores y la entrevista al profesor.

Tabla 6.10

Más rasgos a la clasificación de Hernández, Borjón y Torres (2016).

Clasificación (rasgos)	Descripción
Informático	Agregando a lo que se mencionó anteriormente, otra función del recurso tecnológico es para almacenar, descargar, retomar o mostrar una actividad, no ligado implícitamente a un conocimiento matemático.
Informático - Tecnológico	Se presenta la información sobre la función del recurso tecnológico especificándola en la planeación o en la clase, sin estar ligado a un conocimiento matemático.
Informático - Enseñar	Se presenta la información sobre la función del recurso tecnológico de cara la enseñanza especificándola en la planeación o en la clase, sin estar ligado a un conocimiento matemático.
Informático - Técnico	La función del recurso tecnológico es para almacenar, descargar, retomar o mostrar una actividad facilitando una acción de manera óptima, sin estar ligado a un conocimiento matemático.
Técnico-Enseñar	Se presenta la información sobre el uso del recurso tecnológico o de las herramientas del mismo a utilizar de cara la enseñanza de un contenido matemático escolar especificándola en la planeación o en la clase.
Técnico - Didáctica-tecnológica	Los recursos tecnológicos de apoyo, los recursos de

	apoyo para la enseñanza, los recursos didácticos tecnológicos o las herramientas de los mismos, en asociación, realizan alguna acción de manera rápida relacionada a un contenido matemático sin un uso reflexivo del recurso.

En la tabla 6.11 se muestran las subcategorías con sus respectivos rasgos, con base en el análisis de los sudindicadores e indicadores.

Tabla 6.11

Rasgos asociados a las subcategorías.

Subcategorías	Rasgos
Recursos tecnológicos de apoyo	➢ Informático ➢ Informático-Tecnológico ➢ Informático-Técnico
Recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza	➢ Informático ➢ Informático-Enseñar ➢ Informático-Técnico
Recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza relacionado con los recursos tecnológicos de apoyo y el recurso tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada	➢ Informático ➢ Informático-Tecnológico ➢ Informático-Enseñar ➢ Informático-Técnico
Recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada	➢ Informático-Enseñar ➢ Técnico ➢ Técnico-Enseñar ➢ Técnico-Didáctico-tecnológica ➢ Didáctico-tecnológica
Recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada relacionado con el recurso de programación	➢ Informático ➢ Informático-Enseñar ➢ Técnico ➢ Técnico-Enseñar ➢ Didáctico-tecnológica
Recurso didáctico tecnológico de la calculadora gráfica y el sensor asociado con el recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada	➢ Informático ➢ Técnico ➢ Técnico-Enseñar ➢ Didáctico-tecnológica
Recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada relacionado con diferentes tópicos matemáticos	➢ Informático ➢ Técnico ➢ Técnico-Enseñar ➢ Didáctico-tecnológica

De igual modo, con el agrupamiento descrito en la tabla 6.8 nos da pauta para proporcionar siete indicadores que se evidenciaron del conocimiento del profesor. Los indicadores que detectamos se muestran en la tabla 6.12 relacionados con su respectiva categoría (agregamos etiquetas al final de cada indicador evidenciado para su fácil manejo más adelante).

Tabla 6.12

Indicadores surgidos de los subindicadores.

Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT) Recursos y Materiales	
Subcategoría	**Indicadores evidenciados**
Recursos tecnológicos de apoyo	• Conoce que el Dropbox es un *recurso tecnológico de apoyo* que permite almacenar y retomar alguna actividad, en particular de la derivada de una función de una variable. (KMT1-IE)
Recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza	• Conoce que los *recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza* que empleará para la enseñanza de la derivada de una función de una variable se debe de establecer en la planeación de la clase. (KMT2-IE) • Sabe que los *recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza* y su potencialidad concede ilustrar, explicar y ser otra alternativa de ayuda respecto a la instrucción de la derivada de una función de una variable. (KMT3-IE)
Recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza relacionado con los recursos tecnológicos de apoyo y el recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada	• Conoce la potencialidad de los *recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza* relacionado con los *recursos tecnológicos de apoyo* y el *recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada* que utilizará para la instrucción de la derivada de una función de una variable se tiene que especificar en la planeación de la clase. (KMT4-IE) • Conoce la potencialidad de los *recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza* relacionado con los *recursos tecnológicos de apoyo* y el *recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada* permiten guardar, mostrar y explicar alguna actividad respecto a la instrucción de la derivada de una función de una variable. (KMT5-IE)

Recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada	• Conoce la potencialidad de Geogebra como un recurso didáctico que permite asignar literales, visualizar y construir la representación gráfica de la tasa de variación media. (KMT6-IE) • Sabe que Geogebra y su potencialidad es un recurso didáctico que posibilita calcular y observar el comportamiento de la pendiente de la recta secante cuando el deslizador h se hace cada vez más pequeño y se acerca a cero. (KMT7-IE) • Conoce la potencialidad de Geogebra como un recurso didáctico que concede calcular las variaciones y graficar los movimientos para comprender el tipo de función que le corresponde. • Sabe que el recurso didáctico de Geogebra y su potencialidad posibilita calcular, trabajar e ilustrar la representación gráfica y algebraica de la derivada de una función en un punto de cualquier tipo función dada. (KMT8-IE) • Conoce la potencialidad de Geogebra como un recurso didáctico dinámico que permite transitar en representaciones numéricas, algebraicas y gráficas mediante las herramientas y la interacción gráfica que tiene incorporadas. (KMT9-IE)
Recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada relacionado con el recurso de programación	• Sabe que el recurso didáctico de Geogebra y su potencialidad permite realizar cálculos y expresar la fórmula de la derivada de una función de una variable. (KMT10-IE) • Conoce que Geogebra es un recurso didáctico que posibilita encontrar y delimitar la gráfica de una función condicionada. (KMT11-IE)
Recurso didáctico tecnológico de la calculadora gráfica y el sensor relacionado con el recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la	• Conoce la potencialidad del sensor y la calculadora gráfica relacionada con Geogebra como recursos didácticos que conceden resolver un sistema de ecuaciones para encontrar la función que le corresponde. (KMT12-IE) • Conoce que el sensor y la calculadora gráfica relacionada con Geogebra tienen la potencialidad como recursos didácticos que permiten calcular las variaciones y graficar los movimientos para comprender que función le corresponde. (KMT13-IE) • Conoce que los recursos didácticos del sensor y la calculadora gráfica relacionada con Geogebra permiten conectar los tópicos anteriores de sistemas de ecuaciones lineales y función en la solución de una actividad de la derivada de una función de una variable. (KMT14-IE)

derivada	• Sabe que el sensor y su potencialidad es un recurso didáctico que posibilita trabajar con datos numéricos capturados en un ambiente real. (KMT15-IE) • Sabe la potencialidad de la calculadora gráfica como un recurso didáctico que concede laborar al mismo tiempo con registros algebraicos y gráficos, y con registros numéricos proporcionado por el sensor. (KMT16-IE) • Conoce que los recursos didácticos del sensor, la calculadora gráfica y la computadora permiten transitar en representaciones numéricas, algebraicas y gráficas mediante la conjunción de ambos. (KMT17-IE)
Recurso didáctico tecnológico de Geogebra en la enseñanza de la derivada conectado con tópicos matemáticos anteriores	• Conoce la potencialidad de Geogebra como un recurso didáctico que permite graficar, construir y observar los tópicos de sistema de coordenadas en el plano y función, anteriores al concepto de la derivada de una función de una variable, para solucionar alguna tarea relativa a la derivada. (KMT18-IE) • Sabe que Geogebra y su potencialidad es un recurso didáctico que concede crear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para encontrar la función que modele movimientos. (KMT19-IE) • Sabe que el recurso didáctico de Geogebra permite ilustrar y conectar los tópicos de función y límite con el concepto de la derivada de una función de una variable para la solución de alguna actividad referente a la derivada. (KMT20-IE)

Las subcategorías e indicadores nos permiten llegar al objetivo general el cual es *caracterizar el conocimiento del profesor, al enseñar la derivada, en cuanto a recursos didácticos tecnológicos*, las subcategorías e indicadores nos dan evidencia que el conocimiento que tiene el profesor es muy amplio, pone en juego un conocimiento de recursos tecnológicos de apoyo como el Dropbox, de igual manera muestra conocimiento acerca de recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza como lo son: el pizarrón electrónico, proyector, computadora, juego de internet, softwares y hardware. También el docente tiene conocimientos de recursos didácticos tecnológicos como lo son: Geogebra y calculadoras gráficas y sensores. Los conocimiento de Pepe sobre los recursos didácticos tecnológicos tienen las características de ser un conocimiento tecnológico (comunicación e información hacia los estudiantes), técnico (calcular, graficar, representar y configurar) y didáctico (sabe cómo conjugar el recurso didáctico tecnológico y el contenido matemático de cara a la enseñanza), además manifestó conocimientos alternativos para la enseñanza de la derivada como lo son: el juego de las ranas saltarinas y la calculadora gráfica y el sensor. Asimismo estos recursos le permitieron al profesor transitar en distintos registros de representaciones como lo son la numérica, algebraica y gráfica.

Por otro lado, es importante mencionar que en el análisis de Pepe se evidenció un subindicador y un indicador que hace referencia a la enseñanza de la derivada de una función de un punto, sin embargo este subindicador e indicador no está contemplado debido a que en su enseñanza que correspondió a la última clase, no se realizó con recursos didácticos tecnológicos.

Indicador
Sabe que después de enseñar la tasa de variación media y la pendiente de la recta secante cuando $\boldsymbol{h}$ se acerca cero mediante la potencialidad de los recursos didácticos de Geogebra y de la calculadora gráfica y el sensor, es importante formalizar y enseñar la tasa de variación instantánea $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Sin embargo, en la entrevista el docente mencionó que todas las actividades que se realizaron, en las cuales se implementaron recursos didácticos tecnológicos, recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y recursos tecnológicos de apoyo, tenían el objetivo de ir guiando a que los alumnos fueran comprendiendo la tasa de variación instantánea. Lo mencionado anteriormente se ve reflejado en la última clase, el docente dice que cuando se cambiaron los incrementos a los deslizadores, lo que se estaba haciendo era de que los estudiantes comprendieran que sucede con la recta secante cuando la variable h asignada al deslizador se hace cada vez más pequeño, es decir, cuando tiende a cero.

VI.3. Explicación del caso de Pepe

Para explicar el caso de Pepe es importante retomar que se trata de un profesor con doctorado con especialidad en matemática educativa, con 1 año y medio de experiencia en la asignatura Laboratorio de Cálculo y Geometría II, dicha materia se imparte en el segundo semestre de la licenciatura en matemáticas, este curso se desarrolló en una centro de computación donde cuenta con pizarrón electrónico, proyector, computadoras para cada alumno y para el profesor, que tienen instalado el software de Geogebra. La planeación y las transcripciones de las clases video grabadas corresponden a la unidad cuatro llamada: *Resolver actividades en un contexto gráfico, numérico y algebraico para aplicar definiciones de cálculo diferencial como: La derivada y su aplicación en contextos diversos de la ciencia, así como graficar y describir ecuaciones y describir ecuaciones de curvas en coordenadas polares*.

En seguida aclaramos el caso de Pepe de cara a la pregunta de investigación, es decir, con base al conocimiento de la enseñanza de la derivada con recursos didácticos tecnológicos que evidencia el profesor en la planeación y en la clase.

CAPÍTULO VI. RESULTADOS

En la planeación el profesor evidencia conocimiento sobre recursos y materiales al especificar la competencia de la unidad y las estrategias de enseñanza y de aprendizaje en función de la tecnología, y los recursos didácticos que implementará en la clase de la derivada. En la planeación el docente específico cincos actividades, en la primera actividad “La tasa de variación media” el profesor conoce que debe de especificar los momentos de la sesión con su intencionalidad, además señala que la actividad se realizará con el apoyo de Geogebra, especificado el objetivo matemático de la misma, en esta primer actividad deja entre ver qué herramientas de Geogebra implementará y cómo estás se relaciona con el objetivo matemático. Cabe señalar que en esta actividad el docente hace referencia al recurso tecnológico del Dropbox como un medio para guardar y descargar la actividad que realizará el alumno, para que después los estudiantes anexen al Dropbox lo que hicieron en la actividad.

En la segunda actividad “Tasa de variación media-Hoja de trabajo 1”, el docente conoce que la actividad anterior le ayudará a responder las preguntas respecto a esta actividad, especificando que se resolverá a través de configurar las propiedades del deslizador y de la hoja de cálculo de Geogebra. Para la tercera actividad “Rana saltarina” el profesor conoce un recurso tecnológico alternativo para la enseñanza de la tasa de variación media, este recurso es un juego de internet, el cual consiste en cambiar las ranas verdes y cafés de lado a otro, sin que ninguna rana del mismo color queden iguales, los movimientos realizados en el juego se registrarán en tablas especificadas en la actividad, planteando la pregunta principal de la actividad: ¿cuál es la función que modele el número de movimientos de la rana saltarina? En esta actividad el docente no determina el objetivo matemático entorno a la derivada

En la cuarta actividad “Movimiento 2 (Run2)”, el profesor determina que la actividad se realizará por medio del sensor y la calculadora gráfica, el docente conoce que el sensor y la calculadora es un recurso didáctico tecnológico alternativo para la enseñanza de la tasa de variación media, en este escenario de la planeación el profesor no específico el objetivo matemático de la actividad

Para la quinta actividad “Tasa de variación media-Hoja de trabajo 2”, el docente conoce que la primera actividad le ayudará a responder las preguntas respecto a esta actividad, determinando que se resolverá a través de configurar las propiedades del deslizador de Geogebra.

En las actividades “Rana saltarina”, “Movimiento 2 (Run2)” y “Tasa de variación media-Hoja de trabajo 2” el profesor no específico el objetivo matemático, sin embargo durante la entrevista mencionó que el objetivo de las tres actividades era que los alumnos comprendieran la tasa de variación media.

Por otro lado en el escenario de las clases video grabadas, la clase que corresponde al día 29/02/2016 el docente hace un repaso del contenido matemático cuando dos rectas son secantes y tangentes, y cómo se calcula la pendiente de una recta. En esta clase el profesor hace uso del proyector, pizarrón electrónico y la computadora para ilustrar y explicar la actividad que realizará. Pepe sabe que el Dropbox es un recurso tecnológico que le permite guardar el archivo de la actividad para que el alumno lo descargue y vea las instrucciones y las preguntas de la actividad, además sabe que la potencialidad de las herramientas de graficar, trazar rectas perpendiculares, crear puntos, punto de intersección, segmentos, deslizador, zoom y texto de Geogebra le permitirán graficar la función $f(x) = (x+1)^2 + 1$, construir y explicar la forma algebraica y gráfica de la tasa de variación media (TVM). También sabe que para comprender el valor numérico de la tasa de variación media la herramienta Latex de Geogebra le permite mostrar y crear la fórmula de la tasa de variación media.

Para la segunda clase del día 04/03/2016 el profesor no pudo descargar la actividad realizada el primer día debido a que tuvo problemas con el acceso a internet, por lo tanto no pudo descargar la actividad anterior, sin embargo en esta situación el profesor evidenció conocimiento matemático y de Geogebra, ya que tuvo que reconstruir la gráfica de la TVM de manera rápida a la par del alumno. El docente sabe que las propiedades de los deslizadores a y h, le van permitir modificar sus incrementos para respondes las pregunta de esta actividad, de igual manera sabe que el deslizador en asociación con la potencialidad de la hoja de cálculo de Geogebra le van a capturar los incrementos y calcular las restas de esos incrementos para encontrar la primera y segunda variación. También Pepe sabe que para calcular las variaciones de cualquier función se realiza por la herramienta casilla de entrada, esta herramienta vincula los deslizadores y la hoja de cálculo con cualquier tipo de función.

En la tercera clase del día 07/03/2016 el docente sorprende a los alumno al mencionar que tienen que acceder internet para abrir el juego de la rana saltarina, el profesor da una breve explicación sobre cómo se juega y las reglas de dicho juego. El profesor sigue utilizando el Dropbox, sabe que es un recurso tecnológico para almacenar y descargar la actividad de la rana saltarina, en esta actividad Pepe explica cuáles son las tablas donde los estudiantes tienen que registrar los movimientos de las ranas. Asimismo sabe que la hoja de cálculo de Geogebra le concede encontrar las variaciones de los movimientos de las ranas y graficar los puntos de los movimientos. De igual manera se observa que Pepe sabe qué para encontrar la función cuadrática que modele los movimientos de las ranas necesita de apoyarse del tópico de solución de sistema de ecuaciones lineales, a partir de los movimientos Pepe crea el sistema de ecuaciones y lo soluciona mediante la potencialidad de la herramienta de cálculo simbólico CAS de Geogebra, al encontrar los valores de las incógnitas los sustituye en la formula general cuadrática para encontrar la función $f(x) = x^2 + 2x$. Además se muestra como el profesor comprueba que los puntos graficados anteriormente pasan por la gráfica de la función que encontró, al final de la clase Pepe evidencia conocimiento sobre sintaxis condicionales otra potencialidad de Geogebra, el docente sabe que utilizar las condicionales en la función le concede restringir la gráfica de la función.

CAPÍTULO VI. RESULTADOS

Para la clase del día 14/03/2016 el docente implementa un recurso didáctico tecnológico alternativo, el cual es una calculadora gráfica y el sensor, en esta actividad el profesor primero organiza a los estudiantes para crear equipos de dos y tres integrantes para que alcancen las calculadoras y los sensores. Se observa que Pepe sabe cómo utilizar, configurar y guardar las gráficas en la calculadora, y cómo realizar los movimientos enfrente del sensor para obtener una excelente gráfica. El profesor además de utilizar la calculadora y el sensor sabe que para graficar los valores numéricos registrados por los mismos la hoja de cálculo de Geogebra le permite graficar dichos valores. Asimismo se percibe que el docente sabe qué para encontrar la función lineal de los valores numéricos utiliza el tópico de solución de sistema de ecuaciones lineales, a partir de las dos filas de los valores numérico Pepe crea el sistema de ecuaciones y lo soluciona con la herramienta de cálculo simbólico CAS de Geogebra, al encontrar los valores de las incógnitas los sustituye en la formula lineal para encontrar la función.

Es importante mencionar que el profesor antes de esta actividad del día 14/03/2016 tuvo que realizar un clase previa que se realizó el día 11/03/2016, esta sesión consistió en enseñar cómo configurar la calculadora y cómo realizar el movimiento enfrente del sensor para obtener una mejor gráfica, esta clase tenía la intención de que el estudiante se estuviera familiarizando con el ambiente gráfico de la calculadora gráfica y del sensor.

En la última clase del día 19/03/2016 Pepe sabe que la primera actividad la cual esta guardada en el Dropbox, le ayudará a responder las preguntas respecto a esta actividad, el docente menciona que las preguntas de las actividades se resolverán por las propiedades de los deslizadores a y h. El docente sabe que para responder a las preguntas se requiere de las imágenes de las gráficas, esta opción de guardar las gráficas como imagen se realiza por la herramienta exportar de Geogebra, además sabe que otra alternativa de obtener las gráficas como imagen es mediante la opción de la tecla *prt sc*, para después recortarla en Paint o Word. Se muestra que Pepe sabe que la configuración de las propiedades de los deslizadores es importante para responder algunos incisos de las preguntas de la actividad. Para finalizar esta sesión, el docente sabe que es importante institucionalizar la tasa de variación media, es decir, explica que cuando h tiende a 0 y a la fórmula de la TVM se le agrega el lim lo que se está comprendiendo es la derivada, el cambio instantáneo y la pendiente de la recta secante que se está convirtiendo en tangente. Cabe mencionar que en todas las clases el profesor siempre pasaba a revisar las actividades de los estudiantes, ayudándoles en cualquier problema que tuvieran con la actividad, con Geogebra, con la calculadora gráfica y el sensor y con la computadora, para que los estudiantes no se atrasaran. Cuando los alumnos no acababan la actividad se las dejaba de tarea y después la subían a su carpeta en Dropbox. En el caso de que algún estudiante no fuera a clases, les explicaba la actividad de la clase que no asistieron para que comprendieran lo que hizo y lo que se está haciendo en la nueva actividad.

CAPÍTULO VI. RESULTADOS

A continuación se muestra la relación de los sudindicadores de la planeación con los subindicadores evidenciados en las clases video grabadas. Cabe mencionar que los subindicadores KMT-P1, KMT-P2 y KMT-P2.1 tienen presencia de manera implícita en cada actividad y en cada sesión de la clase.

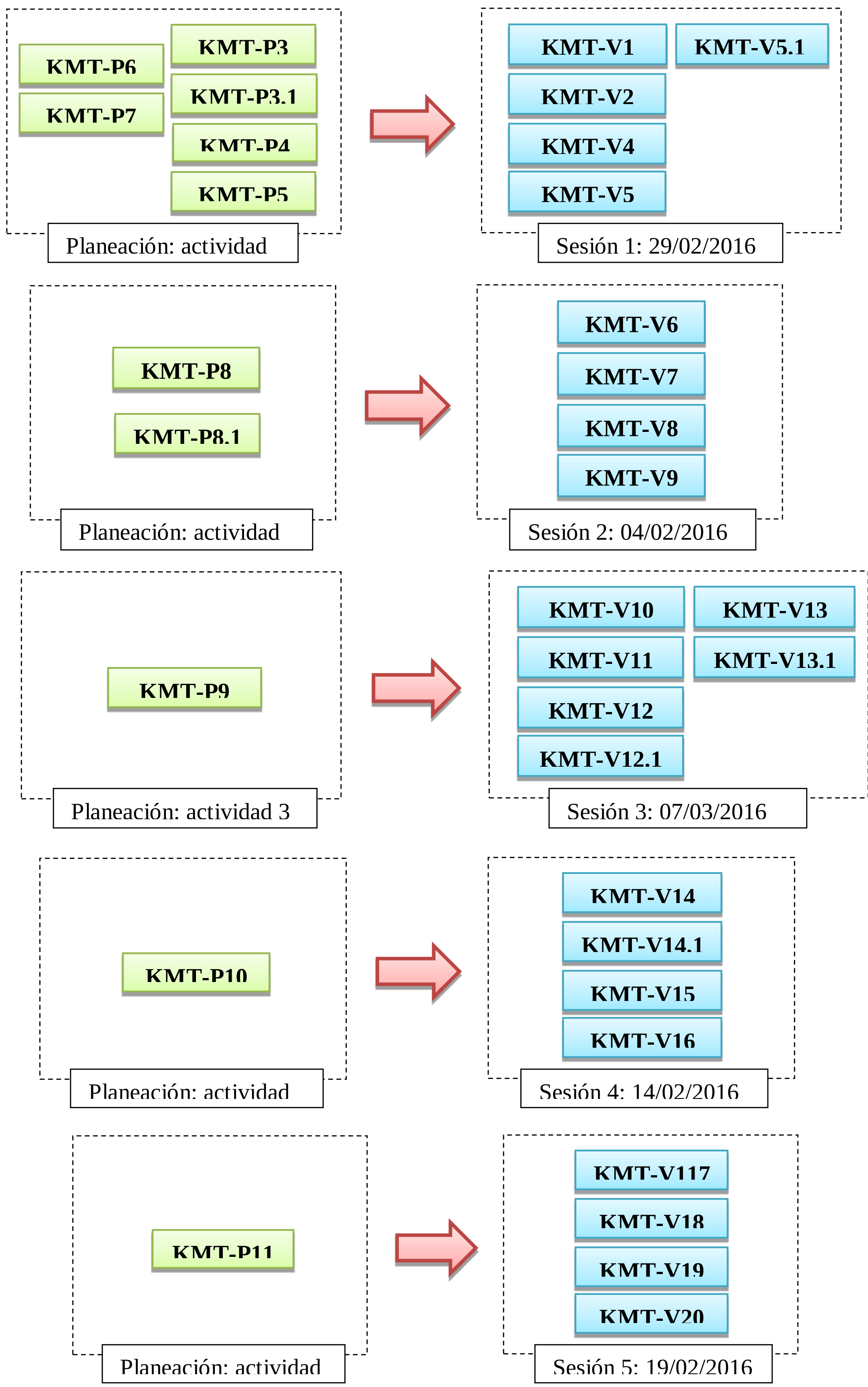


Figura 6.13. Relación de los subindicadores de la planeación y de los sudindicadores clases.

Como se visualiza en las figuras anteriores, en las sesiones es donde se evidenciaron mayor subindicadores, es decir, conocimiento sobre los recursos didácticos tecnológicos con la derivada, también del el uso de los recursos tecnológicos de apoyo y de los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza como un medio de apoyo para la enseñanza de la derivada, creemos que se evidenciaron varios subindicadores en las clases debido a que en primer lugar el docente no explicito todas las actividades que iba a desarrollar, sólo lo hizo en la primera clase como se puede ver en la figura anterior. En segundo lugar suponemos que se evidenció mayor subindicador debido a que en las clases suceden eventos inesperados que no se contemplan en la planeación, y esos eventos se tienen que remediar en el momento de la clase, por lo tanto se percibe más conocimiento detallado sobre los recursos didácticos tecnológicos, los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y los recursos tecnológicos de apoyo.

Para cerrar esta sección, el conocimiento que pone en juego el profesor en la enseñanza de la derivada, se basa en saberes que pertenecen a las diversos acercamientos de la derivada, es decir, pone en juego conocimientos referente a la tasa de variación instantánea y a la pendiente de la recta secante que se va convirtiendo en tangente, además de transitar en distintos registros de representaciones como lo son la numérica, algebraica y gráfica, esto posiblemente se debe a la formación que ha tenido y a su experiencia docente, además de poner en juego conocimientos de tópicos anteriores al tema de derivada para solucionar las actividades. De igual manera el docente da indicios de expresar la definición de la tasa de variación media, de la pendiente de la recta tangente, la tasa de variación instantánea y de la derivada de una función de una variable en un punto, sin mencionar la definición de la velocidad instantánea y las reglas de derivación.

Asimismo, no hace referencia a las aplicaciones de la derivada dentro de la matemática (puntos de inflexión, concavidad, convexidad, creciente y decreciente), por otro lado tanto en la planeación como en la clase emplea aplicaciones de la vida real como la velocidad de objetos mediante los recursos de apoyo para la enseñanza como los juegos en línea y los recursos didácticos tecnológicos de sensor y calculadora gráfica y Geogebra.

En lo que respecta al conocimiento sobre recursos didácticos tecnológicos, el docente emplea diversos recursos didácticos tecnológicos de tipo hardware y software, además de recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y recursos tecnológicos de apoyo integrándolos su quehacer docente, teniendo presente las dificultades que puede representar el implemento de recursos didácticos tecnológicos para la enseñanza de la derivada, así como las dificultades técnicas de estos recursos que pueden aparecer repentinamente en la clase.

VI.4. Relación de los indicadores hipotéticos con los indicadores evidenciados por el profesor Pepe

Como se mencionó anteriormente los indicadores y subindicadores hipotéticos permitieron tener una imagen previa hacia los indicadores y subindicadores que evidenciá el docente en la planeación y la clase. Los indicadores y subindicadores hipotéticos nos guiaron hacia una posible dirección sobre el conocimiento del caso de estudio.

En la siguiente figura 6.14 se muestra la relación que existe entre los indicadores hipotéticos y los indicadores evidenciados por el docente, esta relación se da con base en el análisis de ambos indicadores, donde se identificaron ciertas características de los mismos, como lo son: Geogebra, la enseñanza de la derivada con Geogebra, las distintas herramientas de Geogebra para la enseñanza de la derivada y apoyo de otros recursos tecnológicos. Con esto no queremos decir que sean exactamente iguales los indicadores, sino que, por sus características tienen cierta relación.

Los indicadores hipotéticos no se evidenciaron exactamente, porque no se consideraron los diversos recursos didácticos tecnológicos, los recursos tecnológicos de apoyo, los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y las diversas herramientas de Geogebra que puso en juego el profesor, algunas de las herramientas de Geogebra se desconocían, y no creímos que podría ser utilizada por el profesor. Con base en lo anterior se puede argumentar que la formación del docente influyó en que los indicadores hipotéticos no se evidenciaran, debido a que el conocimiento que tiene Pepe adquirido en su formación de licenciatura, maestría y doctorado es muy amplio. Además se puede observar en la clase de Pepe que es un profesor preocupado por mejorar día a día su quehacer docente, esto se ve reflejado en los recursos didácticos tecnológicos, los recursos tecnológicos de apoyo y los recursos tecnológicos para la enseñanza que implemento en la instrucción de la derivada, asimismo durante la entrevista menciona que cualquier docente debe de estar en persistente actualización con las tecnologías porque van cambiando constantemente, también añadió que los profesores que desarrollan aplicaciones en Geogebra deben de compartirlas con otros docentes para que estos profesores las implementen como otra alternativa de enseñanza o para poder solucionar alguna problemática que surja inesperadamente dentro del aula (ver la figura 6.14).

Por último, en el caso de los indicadores que tiene que ver con el recursos de programación evidenciado por Pepe, no se consideró en los indicadores hipotéticos porque no creíamos que el profesor tendría y emplearía ese conocimiento de esas características en su clase. Por lo tanto, no se consideró en los indicadores hipotéticos. El indicador mencionado anteriormente se muestra en la figura 6.14 con un contorno azul obscuro para diferenciarlos de los otros indicadores.

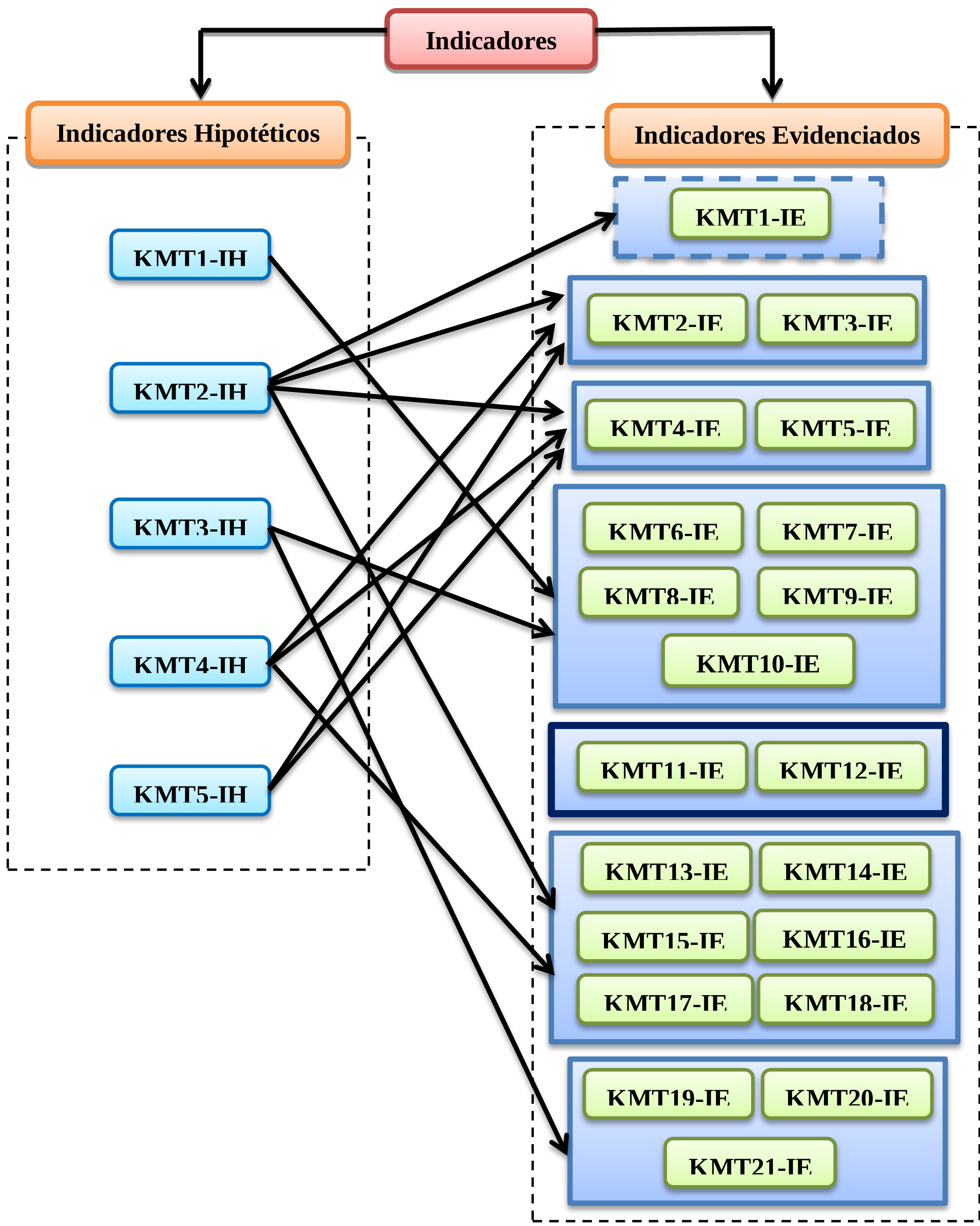


Figura 6.14. Relación de los Indicadores Hipotéticos y los Indicadores Evidenciados.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

CAPÍTULO VII. CONCLUSIONES

Con base en lo abordado hasta el momento podemos afirmar que el conocimiento que pone el juego el profesor en los escenarios de la planeación y de las clases al enseñar la derivada usando recursos didácticos tecnológicos, se basa en un conocimiento en el cual emplea recursos didácticos tecnológicos de características de tipo software y hardware, de tipo software es: Geogebra, de tipo hardware son: calculadora gráfica y sensor. Cabe mencionar que se evidencia y observa que Geogebra es el recurso didáctico tecnológico fundamental en la enseñanza de la derivada para el profesor, asimismo asocia Geogebra con la calculadora gráfica y el sensor. Estos recursos son empleados por el docente para transitar en distintos registros de representaciones: numérica, algebraica y gráfica, además le concede trabajar con cantidades numéricas pequeñas para la noción de limite en la enseñanza de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva y la tasa de variación instantánea; lo anterior lo llevo a cabo el docente, con el propósito de que los estudiantes comprendan estos acercamientos de la derivada. Los recursos que fueron empleados por el docente en este proceso de enseñanza se pueden ver sintetizados en la siguiente tabla.

Tabla 7.1

Enseñanza de la derivada con recursos didácticos tecnológicos.

CONTENIDO MATEMÁTICO	OBJETIVOS DE ENSEÑANZA	RECURSOS DIDÁCTICOS TECNOLÓGICOS	
		Software	Hardware
• Tasa de variación media. • Pendiente de la recta tangente a la curva. • Tasa de variación instantánea	• Transitar en registros de representaciones: numérica, algebraica y gráfica. • Trabajar cantidades numéricas pequeñas	• Geogebra.	• Calculadora gráfica. • Sensor.

También, podemos confirmar que el conocimiento del profesor en la enseñanza de la derivada se basa en recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza, estos recursos están vinculados a un contenido matemático escolar de forma directa o indirecta. En el caso del juego en línea es una alternativa para la enseñanza de la derivada donde en primer momento fue jugar para después registrar datos pedidos en la actividad. La potencialidad de los recursos de Word, Paint y las teclas especiales permitieron solucionar problemas que emergieron en el momento y que de alguna manera estos problemas, si no se hubiese solucionado, impedían seguir con la actividad. En el caso de las potencialidades de los recursos de la computadora, proyector y pizarrón electrónico posibilitaron ilustrar y explicar la actividad, relacionándose con los recursos didácticos tecnológicos y los recursos tecnológicos de apoyo.

Tabla 7.2

Enseñanza de la derivada con recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza.

<table>
<tr><th rowspan="2">CONTENIDO MATEMÁTICO</th><th rowspan="2">OBJETIVOS DE ENSEÑANZA</th><th colspan="2">RECURSOS TECNOLÓGICOS DE APOYO PARA LA ENSEÑANZA</th></tr>
<tr><th>Software</th><th>Hardware</th></tr>
<tr><td>• Tasa de variación media.
• Pendiente de la recta tangente a la curva.
• Tasa de variación instantánea.</td><td>• Jugar
• Registrar datos numéricos.
• Ilustrar y explicar.
• Solucionar problemas relacionados con los recursos.</td><td>• Juego en línea.
• Paint.
• Word.</td><td>• Teclas especiales de la computadora.
• Computadoras.
• Proyector.
• Pizarrón electrónico.</td></tr>
</table>

De igual manera el docente implementa recursos tecnológicos de apoyo, estos recursos no están asociados a un contenido matemático escolar en específico, pero en este caso se implementaron para la derivada. Este recurso posibilitó guardar, retomar, mostrar, descargar y evaluar las actividades.

Tabla 7.3.

Enseñanza de la derivada con recursos tecnológicos de apoyo.

<table>
<tr><th rowspan="2">CONTENIDO MATEMÁTICO</th><th rowspan="2">OBJETIVOS</th><th>RECURSOS TECNOLÓGICOS DE APOYO</th></tr>
<tr><th>Software</th></tr>
<tr><td>• Tasa de variación media.
• Pendiente de la recta tangente a la curva.
• Tasa de variación instantánea.</td><td>• Guardar, retomar, mostrar, descargar y evaluar.</td><td>• Dropbox.</td></tr>
</table>

Es importante mencionar que en un salón de clases donde la tecnología digital juega un papel importante y en particular para el caso de la enseñanza de la derivada; consideramos que es fundamental la asociación de los recursos didácticos tecnológicos con los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y los recursos tecnológicos de apoyo, también afirmamos que los ya mencionados recursos se podrían utilizar con otros contenidos matemáticos.

VII.1. Referentes a algunos aspectos generales

Con base en los resultados arrojados por la investigación y la corroboración de la entrevista efectuada reafirmamos que, la formación continua del profesor es fundamental para la adquisición de nuevos conocimientos sobre la enseñanza de la derivada y conocimiento didáctico a cerca de nuevas alternativas de recursos didácticos tecnológicos, recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y recursos tecnológicos de apoyo. La formación continua debe de estar presente en profesores que implementan tecnología en el aula, debido a que la tecnología siempre está en constante cambio, pues va surgiendo nuevas tecnologías, y las aulas está siendo influenciada por estas, puesto que el alumno está haciendo uso constante de la misma. Al respecto Marquez y De los Ríos (2013) afirman que es importante que los profesores incorporen la tecnología en su instrucción, ya que en la vida cotidiana estamos haciendo uso constante de las tecnologías, es por ello que los docentes deben incorporarlas a la educación, para asegurar la educación tecnológica de los estudiantes.

Los resultados de esta investigación constatan sobre el papel de la formación y experiencia del profesor como fuentes importantes en los conocimientos que evidencia los profesores y que se ven reflejados en su práctica docente. El conocimiento que tiene el estudio de caso sobre Geogebra, las calculadoras gráficas y los sensores, los juegos de internet y el Dropbox, tiene relación con la formación que ha tenido y con las experiencias como profesor de nivel superior. En específico aquellas herramientas tecnológicas relacionadas con las asignaturas que ha impartido a lo largo de su práctica docente. Al respecto García, Azcárate y Moreno, (2006) mencionan que el conocimiento del profesor está relacionado con la formación que tuvo de estudiante, se basa en lo empírico, los libros de texto y la propia experiencia.

Adentrándonos respecto a Geogebra, podemos afirmar que es un software libre de geometría dinámica que tiene la potencialidad de ser utilizado de forma accesible por el docente, se evidencia y observa que el estudio de caso emplea como recurso fundamental a Geogebra en los escenarios de la planeación y de la clase; lo anterior podría suceder debido a que Geogebra está compuesto por diversas herramientas las cuales permitieron al docente crear actividades entorno a la derivada. De acuerdo con el estudio caso, existen dos herramientas que son importantes integrarlas en la enseñanza de la derivada, esas herramientas son el deslizador y la casilla de entrada. El docente durante la entrevista mencionó que el deslizador es una herramienta que permite enseñar de una manera dinámica la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea, la casilla de entrada concede vincular alguna función con alguna construcción de Geogebra. Otro elemento potencial de Geogebra rescatado por el profesor es que le permite integrarlo con otros recursos tecnológicos de apoyo, recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y con recursos didácticos tecnológicos. Es importante mencionar que se observa y evidencia que la potencialidad de Geogebra en el aula permite transitar en diversos registros de representaciones: numérica, algebraica y gráfica, además de trabajar cantidades numéricas pequeñas. Otra potencialidad de este software es que concede integrarse con otros recursos didácticos tecnológicos como lo son: la calculadora gráfica y el sensor, que también posibilitan transitar en los registros de representaciones ya mencionados.

Sin embargo Geogebra tiene algunas desventajas de manera implícitas y explicitas mencionadas por el profesor, por ejemplo; El lenguaje simbólico (iconos, secuencias y ventanas) que utiliza Geogebra ha sido una desventaja para los alumnos, debido a que Geogebra utiliza un lenguaje que no es parte de su uso cotidiano para el estudiante. Una desventaja que propicia Geogebra en la enseñanza de la derivada y que cualquier docente que utilice Geogebra en su clase debe de conocer, es que el software sabe diferenciar entre una función y una ecuación, es decir para Geogebra una ecuación se puede escribir como: $y =$ y una función como: $f(x) =$. Estas desventajas que tiene Geogebra de manera directa o indirecta influyen en el aprendizaje del estudiante con respecto al cálculo diferencial y en particular a la derivada. Estos conocimientos sobre las desventajas de Geogebra se van aprendiendo durante la experiencia del profesor al utilizar el software en sus clases.

El estudio de caso mencionó que, cualquier docente que implemente algún recurso didáctico como Geogebra u otro recurso didáctico tecnológico como calculadoras y sensores, debe tener el conocimiento matemático, didáctico y técnico, lo anterior también es mencionado en el TPCK (Koehler y Mishra, 2006). El conocimiento técnico del recurso didáctico tecnológico se refiere al conocimiento sobre alguna tarea que realiza el recurso didáctico tecnológico de una manera más accesible, así como saber qué recursos cumple con esas características de poder realizar dicha tarea, y como lo mencionan Hernández, Borjón y Torres (2016) el recurso didáctico tecnológico se convierte en el fin. El conocimiento didáctico alude a saber cómo utilizar el recurso didáctico tecnológico y el conocimiento matemático de cara a la enseñanza del contenido matemático.

Por otro lado, la institucionalización del concepto de la derivada es importante efectuarla cuando se enseña dicho contenido con recursos didácticos tecnológicos. En este caso, en los escenarios de la planeación y de las clases, el docente institucionalizó la TVM en la tasa de variación instantánea , es decir, el profesor especifica en la planeación y en la clase las actividades a efectuar con los recursos didácticos tecnológicos, los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y los recursos tecnológicos de apoyo, para que al final de la unidad de derivada tenga los elementos suficientes para enseñar $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y que los estudiantes comprendan que lo aprendido con la TVM era un antecedente para entender la derivada, la pendiente de la recta secante que se está convirtiendo en tangente y la tasa de variación instantánea.

CAPÍTULO VII. CONCLUSIONES

Para la enseñanza de la derivada algunos docentes, como el caso de estudio, se ayudan de los recursos didácticos tecnológicos, los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y los recursos tecnológicos de apoyo para transitar en distintos registros de representaciones como la numérica, algebraica y la geométrica mostrando conexión entre estas representaciones, y en algunas actividades, aplicaciones de la vida real entorno a la derivada. El tránsito de representaciones numérica, algebraica y gráfica es una de las características particulares matemáticas y didácticas de estos recursos para la enseñanza de la derivada. Hitt (2003) muestra que algunas dificultades a las que se enfrentan los profesores en el proceso de enseñanza del cálculo, es la falta de acercamiento visual para el entendimiento de los conceptos del cálculo, y propone la necesidad de utilizar diferentes representaciones en forma coherente para los problemas, y que es importante promover la visualización matemática, además sugiere que es importante que el docente fomente la visualización matemática utilizando diferentes representaciones y promoviendo una utilización razonables de las nuevas tecnologías (calculadoras gráficas y computadoras) "que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas, para favorecer la construcción de conceptos a través de la coordinación, libre de contradicciones, de las diferentes representaciones relacionadas con dichos conceptos" (p. 23)

Con respecto a la hipótesis que nos planteamos concluimos que, el conocimiento que evidencian algunos profesores, en particular el caso de estudio, sobre recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza de la derivada, los implementa para enriquecer su quehacer docente, utiliza en su práctica docente los recursos didácticos tecnológicos como Geogebra (recurso fundamental) y calculadoras gráficas y sensores, ambos recursos en asociación, además implementa otros recursos para la enseñanza de la derivada, estos recursos los clasificamos como: recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y recursos tecnológicos de apoyo, es importante mencionar que el uso de estos recursos están en relación en un salón de clases donde la tecnología es fundamental, es decir, en un laboratorio de computación que funge como salón de clases. Implementar Geogebra y la calculadora gráfica para la enseñanza de la derivada le permitieron al profesor transitar entre los diferentes registros de representaciones, también estos recursos didácticos tecnológicos le permiten al profesor enseñar la tasa de variación media, así como distintos acercamientos de la derivada como lo son: la pendiente de la recta tangente a la curva y tasa de variación instantánea. Para concluir este apartado, el docente conoce las potencialidades y desventajas didácticas y técnicas que pueden presentar los recursos didácticos tecnológicos, por tal motivo, para el caso de la potencialidad, debe considerar el objetivo matemático que justifique la utilidad del recurso, mismo que deberá ser especificado en su planeación y efectuado en práctica. Para el caso de las desventajas, el docente debe estar preparado para cualquier evento inesperado que suceda con los recursos didácticos tecnológico, los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y los recursos tecnológicos de apoyo; así como buscar una solución alternativa cuando se presente algún problema con el recurso cuando se encuentre en clase.

Para finalizar esta sección, recordando los indicadores propuesto por Santana y Climent (2015) sobre las potencialidades de Geogebra en la enseñanza del uso y reconocimiento de figuras geométricas en el plano y en el espacio, y las rectas y puntos notables del triángulo, nos damos cuenta de la modificación que sufren los indicadores que evidencia el estudio de caso en comparación a los propuesto por Santa y Climent; esto se origina de acuerdo al contenido matemático escolar enseñado, el nivel académico en el que se imparte los mencionados contenidos, la formación académica y experiencia del docente.

VII.2. Respecto al MTSK

En esta investigación se nota que todos los subdominios y categorías se presentan en el conocimiento del profesor de manera indirecta o directa. También se evidencia relación del subdominio KMT con otros subdominios como los son KoT, KSM, KFLM y KMLS. En el caso del subdominio KoT encontramos relación con todas las categorías, para el subdominio del KSM se evidencia relación con las categorías *conexiones de simplificación* y *conexiones auxiliares*, en el caso del subdominio KFLM se encuentra relación con la categoría *formas de aprendizaje*, para el subdominio KMT se ve relación con la categoría *formas de enseñanza* y para el subdominio KMLS encontramos asociación con las categorías el *conocimiento del Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de diversos temas.*

En lo que respecta a la categoría Recursos y Materiales creemos que el nombre asignado es muy general, debido a que considera Recursos y Materiales de cualquier índole como apoyo para la enseñanza de un contenido matemático, es decir, se podría especificar el conocimiento del profesor sobre Recursos y Materiales desde una perspectiva analógica y digital, como lo menciona Koehler y Mishra (2009), quienes clasifican la tecnología como de tipo analógico y digital, es decir, tecnologías nuevas y viejas. Las tecnologías digitales las caracterizan como la computadora, dispositivos portátiles o softwares, y las tecnologías analógicas las caracterizan como libros de texto o lápiz. Teniendo en cuenta las características matemáticas y didácticas específicas para la enseñanza de un tópico matemático concreto (Escudero-Ávila, 2015), considerando además las potencialidades o las dificultades matemáticas, didácticas y técnicas del Recurso y Material analógico y digital relacionada al implemento de estos de cara a la enseñanza de un delimitado contenido matemático.

Enfocándonos en la categoría Recursos y Materiales de índole digital, también creemos que se debe de realizar una clasificación o subcategorías, considerando los recursos didácticos tecnológicos, los recursos tecnológicos de apoyo y los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza, estos tres recursos juegan un papel distinto en el aula, es decir, los recursos didácticos tecnológicos están asociado al conocimiento matemático y didáctico, los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza están relacionados con un conocimiento matemático de manera indirecta o directa y los recursos tecnológicos de apoyo no están relacionados a un contenido matemático. Sin embargo, es importante mencionar que en un laboratorio de computación que funge como salón de clases, los recursos didácticos tecnológicos necesitan apoyo de los otros recursos tecnológicos, para llevar a cabo una actividad. Esta clasificación pretende ampliar y clarificar la categoría recursos y materiales del MTSK, asimismo sirve para agrupar y especificar los indicadores y los rasgos que están asociados a las características de la clasificación o subcategorías, si bien es importante mencionar que se propone esta clasificación, aún se requiere trabajar más en ella para ser más específicas, o en otros casos surjan otro elementos para enriquecer o mejorar la clasificación propuesta, también se podrían investigar las diversas interacciones de esta clasificación con otros contenidos matemáticos o estudiar la evolución de esta clasificación relacionada en la enseñanza la derivada.

En el caso de los recursos didácticos tecnológicos es importante considerar aquellos recursos de tipo software y hardware que fueron diseñados para la enseñanza de las matemáticas o los que han sido adaptados a la enseñanza de las matemáticas (por ejemplo, Matlab, Maple o Mathematica, entre otros) o hayan sido adaptados para un fin escolar (por ejemplo, PowerPoint, Flash, Multimedia Builder, entre otros). Es importante mencionar y condiciendo con Escudero-Ávila (2015) el conocimiento del profesor sobre los recursos didácticos tecnológicos debe de considerar las características matemáticas específicas de los recursos didácticos para la enseñanza de un contenido matemático concreto.

VII.3. Respecto a la Metodología

Vitabar (2011) realiza una clasificación sobre el profesor y el papel de la tecnología en su práctica docente, en esta clasificación considera cuatro grupos: *los novatos*, *los experientes, los resistentes y los tecnócratas*, nosotros aseguramos que el estudio de caso se encuentra entre un docente *experiente* y *tecnócrata*. De acuerdo con Vitabar (2011) los docentes *experientes* son aquellos que se han formado y tienen un excelente nivel de reflexión didáctica diaria de su quehacer docente y conducen con precisión cuáles son sus objetivos, “son capaces de discernir la bondad de cierta metodología en función de la calidad del aprendizaje de sus alumnos” (p.3), para estos docentes la tecnología es secundaria, “y sólo tiene sentido en razón de lo que puede aportar a los procesos de enseñanza y aprendizaje” (p.3). Por otro lado, para Vitabar (2011) los profesores *tecnócratas* son aquellos “ávidos usuarios de la tecnología para fines personales, y que confían en que es posible también simplificar el trabajo del aula con ella. Aprenden fácilmente el uso de nuevos programas, y promueven su uso a todos los niveles” (p.3), el dominio que tiene sobre la tecnología los mantiene cercanos al entorno de sus estudiantes, y además se expresan confiables al momento de usar la tecnología en el salón de clases.

Como lo mencione en el párrafo anterior el estudio de caso, tomado para este trabajo, representa aquel docente *experiente* - *tecnócrata* en las tecnologías, quien pone en juego conocimientos referentes al contenido matemático y didáctico, asimismo muestra evidencia de tener conocimiento en cuanto a los *recursos didácticos tecnológicos*, los *recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza* y los *recursos tecnológicos de apoyo*, de igual manera sabe integrar la tecnológica con el contenido matemático, de cara a la enseñanza del mismo, no perdiendo de vista el objetivo de la actividad, y donde observamos que la reflexión continua de su práctica docente es fundamental. Durante la entrevista el estudio de caso mencionó que estar a la vanguardia en tecnología es algo que tiene muy presente, debido a que la tecnología está en constante actualizaciones y cada vez están surgiendo nuevas, sabiendo integrar la tecnología al mundo de sus estudiantes. Cabe mencionar que este caso de estudio aporto gran información debido a que en la asignatura que imparte la tecnología juega un papel importante en la enseñanza-aprendizaje, la materia se desarrolla en un laboratorio de computación donde cuenta con diversos recursos tecnológicos y recursos didácticos tecnológicos, por lo tanto es importante que cuando se analice el conocimiento del profesor cuando implemente tecnología se debe de cerciorar que el profesor si utilice tecnología en su práctica docente, porque si no se considera ese punto la investigación será sesgada.

En el instrumento de análisis de información que se utilizó, se podría mejorar agregando las subcategorías que se evidenciaron, además de los rasgos de la clasificación de Hernández, Borjón y Torres (2016, en prensa) y los nuevos rasgos que surgieron, todo esto con el fin de precisar detalladamente los subindicadores que se identifiquen, y esto ayude a determinar los indicadores cada vez más específicos y finos para caracterizar el conocimiento del profesor en la categoría Recursos y Materiales.

VII.4. Aportaciones de la investigación

En las siguientes líneas describimos aspectos importantes arrojados por esta investigación, estos aspectos podrían ayudar a fortalecer, actualizar o diseñar programas para la formación de profesores y al formador mediante los indicadores evidenciados.

Iniciaremos con la información proporcionada por los indicadores, esta nos da algunas características sobre el conocimiento de un profesor que implementa recursos didácticos tecnológicos para la enseñanza de la derivada, esta información podría ser considerada para diseñar actividades para la formación de profesores nivel superior o nivel medio superior que implemente Geogebra, calculadoras gráficas o sensores.

Por otro lado, los indicadores nos conceden la información necesaria para dar un seguimiento al conocimiento del profesor y cómo va evolucionando esté a través de su quehacer docente, asimismo los indicadores pueden ser un punto de partida para el estudio del conocimiento de otros profesores que utilizan recursos didácticos tecnológicos, recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y recursos de apoyo en la enseñanza de la derivada, con el motivo de conocer si se presentan los mismos indicadores o cambian. Por tal razón, los indicadores arrojados en esta investigación podrían ser útiles para estudios futuros dentro o fuera del marco teórico abordado en este trabajo.

Las subcategorías permiten ser más específicos en cuanto a las características sobre los tipos de recursos de naturaleza tecnológica y sus particularidades que utiliza un docente que está familiarizado con la tecnología. De igual manera las subcategorías nos conceden asociar las características iguales o similares entre los indicadores mismos que nos permiten identificar y asociar los diferentes recursos tecnológicos.

Los indicadores y las subcategorías pueden servir como una guía para aquellos formadores de profesores o profesores que tengan la iniciativa o la curiosidad de implementar recursos didácticos tecnológicos, recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y recursos de apoyo para transformar la enseñanza de un tópico, en particular el de la derivada.

Las subcategorías, rasgos e indicadores pueden ser utilizados para crear programas para el desarrollo profesional del profesor que implemente o desea implementar tecnología, este desarrollo profesional se puede realizar mediante la creación de actividades, las cuales tendrán las características del conocimiento que evidencia el profesor en cuanto al conocimiento matemático, didáctico y técnico, con el propósito de provocar una reflexión sobre qué los recursos didácticos tecnológicos, los recursos tecnológicos de apoyo y de apoyo para la enseñanza puede implementar y cómo utilizarlos en la enseñanza-aprendizaje de la derivada de una función en una variable. También, con las subcategorías y rasgos se podrían crear cuestionarios o guiones de entrevista para diagnosticar el conocimiento del profesor en cuanto al uso que realiza a los recursos, con el propósito de ayudarlos a evidenciar y mostrarles su conocimiento con respecto a los recursos, y de esta manera proporcionarles las herramientas adecuadas para que puedan implementar los recursos de una mejor manera en la enseñanza de conocimiento matemático en específico.

VII.5. Limitaciones del estudio y futuras investigaciones

Una limitación de este trabajo que se presento es que, al inicio de la investigación se pretendía abarca todo el concepto de la derivada, sin embargo la derivada es un tema muy amplio y no se puede abarcar todo lo que gira en torno a este concepto, por lo tanto se tuvo que delimitar la derivada. Para delimitar el la derivada se utilizó las clases y la planeación del profesor.

Por otro lado, las futuras investigaciones que se podrían realizar con base en ese estudio son:

- El profesor que se analizo es un docente *experiente* - *tecnócrata* en el área de enseñanza de la derivada y otros tópicos con recursos didácticos tecnológicos y recursos tecnológicos, sería importante tomar como referente el conocimiento de dicho profesor para adaptar o crear actividades para la enseñanza de la derivada en profesores de nivel superior o medio superior que empleen o deseen utilizar tecnología en el aula, esto con ayuda de los indicadores, subcategorías y rasgos que se evidenciaron, es decir, ver reflejado cómo el conocimiento del profesor puede afectar la práctica.

- Como se mencionó en el capítulo de metodología el profesor imparte la asignatura de Laboratorio de Cálculo y Geometría II donde el tema de la derivada se encuentra en la unidad cuatro, pero existe la materia de Cálculo Diferencial que es impartido por otra docente donde el tema de la derivada se encuentra en la unidad cinco, sería interesante analizar el conocimiento de esta profesor(a) y comparar el conocimiento sobre la enseñanza de la derivada de estos dos profesores y ver qué conocimientos son comunes y cuáles se ven modificados con el uso de la tecnología, con el propósito de crear actividades para la formación de profesores elaboradas a partir del conocimiento de ambos profesor.
- Investigar la interacción y enseñanza de otros tópicos matemáticos referente a la enseñanza del cálculo diferencial e integral con recursos didácticos tecnológicos.
- Cómo evoluciona el conocimiento del profesor referente al implemento de los recursos didácticos tecnológicos, los recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza y los recursos tecnológicos de apoyo en la enseñanza de un tópico.
- Cómo las nuevas tecnologías influyen en el conocimiento del profesor y cómo se ve reflejado en su práctica docente.
- Como se mencionó en el apartado del marco teórico, en el MTSK se considera a las creencias como elemento que permea a los subdominios. Para el caso del KMT y la categoría Recursos y Materiales sería interesante investigar las creencias del caso de estudio en la enseñanza de la derivada con recursos didácticos tecnológicos, con el propósito de investigar cómo dichas creencias influyen en su práctica docente.
- Sería interesante estudiar las desventajas didácticas, matemáticas y técnicas que tienen los recursos didácticos tecnológicos ya mencionados en la enseñanza de la derivada.

VII.6. Reflexión final

Antes de la realización de este trabajo de investigación, creía que el conocimiento matemático que debería tener el profesor para enseñar la derivada sólo se basaba en enseñar las reglas de derivación o bien creía, tal vez por mi formación, que todo profesor de matemática tenía que abarcar todos los acercamientos de la derivada, sus registros de representaciones, y las aplicaciones de la misma. También suponía que no era importante especificar en las clases la importancia de relacionar la derivada con contenidos matemáticos anteriores y posteriores, porque creía que el alumno por su cuenta lo intuiría. Con respecto a los recursos didácticos tecnológicos tenía la creencia que sólo bastada con diseñar la actividad con los recursos sin considerar los objetivos matemáticos y didácticos, además creía que no era posible estructurar una planeación de tal manera que una unidad se pudiera abarcar toda apoyándose de recursos didácticos tecnológicos.

Sin embargo, después de realizar esta investigación muchos conocimientos como profesor de matemáticas cambiaron en mí. Tomando como referente el MTSK, en el dominio del Conocimiento Matemático, cambie la manera en cómo veía a los contenidos matemáticos de cara a la enseñanza, es decir, ahora sé que no sólo basta en conocer un contenido matemático, debo de conocer su *Fenomenología*, *Propiedades y sus fundamentos, Registro de representación, Definiciones y Procedimientos* (categorías del subdominio KoT). También ahora sé, por un lado, lo que implica conocer un tópico matemático, en este caso la derivada, y la importancia de argumentar de él dentro del aulas y por otro lo indispensable que se vuelve especificar en la planeación las relaciones de la derivada con los contenidos matemáticos anteriores y posteriores con el objetivo de no dejar nada a la especulación o intuición de mis alumnos, como lo menciona el subdominio KSM, dentro de este subdominio existen categorías que hacen referencia a estos conocimientos, esas categorías son: *conexiones de complejización* y *conexiones de simplificación*.

En lo que respecta al dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido, los cambios de mi conocimiento se reflejan en el KMT, en sus dos categoría; en la categoría *Forma de enseñanza* hoy sé que no sólo basta con conocer las teorías de enseñanza dentro de la matemática educativa, sino que también hay que identificar y extraer en lo posible toda la potencialidad de estas para poderlas aplicar en mi quehacer docente, es decir considerar ejemplos, analogías, metáforas, estrategias o técnica didáctica etc. Para el caso de la enseñanza de la derivada una teoría de enseñanza que sé es fundamental es la teoría de representaciones semióticas de Duval. En la categoría de *Recursos y Materiales* entiendo que no sólo basta con conocer un recurso didáctico de índole tecnológico, sino que es necesario conocer las características didácticas y matemáticas que están asociadas al recurso de cara a la enseñanza de un contenido matemático, considerando siempre las desventajas que están relacionada a estos. Para el caso de la enseñanza de la derivada los recursos didácticos tecnológicos que se empleen deben de tener las características didácticas y matemáticas del tránsito de representaciones, debido a que la naturaleza de la derivada se puede transitar en representaciones numéricas, algebraicas, gráficas y verbales.

Hoy me doy cuenta que no es posible abarcar todo lo que engloba la derivada porque siempre el docente tiene que apegarse a lo estipulado por los programas de estudio de la institución educativa, por lo que el conocimiento que tiene el profesor y que ha ido adquiriendo con base a su experiencia, le permitirán en su momento tomar decisiones que le ayuden a mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje en torno a este tema dentro de su aula.

CAPÍTULO VII. CONCLUSIONES

Para finalizar, el investigar el conocimiento del profesor me permitió comprender el proceso de enseñanza de la derivada con el implemento de recursos didácticos tecnológicos y esperó de la mejor manera que este trabajo de investigación quede como apoyo para otros docentes o formadores de docentes, con el propósito de que los profesores que tengan o no conocimiento de la matemática educativa mejoren su desarrollo profesional con el fin de favorecer el aprendizaje del estudiante y mejorar la educación matemática. Asimismo sé que ser un profesor especializado es un gran reto, sin embargo este trabajo de investigación me permitió abrir una puerta, de muchas que aún me quedan pendientes, porque el desarrollo profesional debe de ser constante y para toda la vida, teniendo presente siempre la reflexión como un medio para mejorar e enriquecer nuestra práctica docente, así como para ayudar a otros profesores de matemáticas. Sé que aún hace falta mucho por hacer pero espero que este trabajo contribuya en parte a una de las problemáticas planteadas dentro de la educación matemática.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Alexander, P., Schallert, D. y Hare, V. (1991) Coming to Terms: How Reserchers in Learning and Literacy talk about knowledge. *Review of Educational Research, 61*(3), 315-343.

Akkoc, H., Bingolbali, E., y Ozmantar, F. (2008). Investigating the technological pedagogical content knowledge: A case of derivative at a point. En O. Figueras, y A. Sepúlveda (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter*, *2*, 17-24. Michoacán, México: PME.

Apostol, T. M. (2001). *Calculus volúmen I: cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. (2da. ed). España: Reverté.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizont: Knowing mathematics for teaching to learnes' mathematical futures. Paper presented at the *43Rd Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held in Oldenburg*, Germany.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *29*(2), 191-206.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis de Doctorado inédita). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Barclay, W. L. (1985). *Graphing Misconceptions and Possible Remedies Using Microcomputer-Based Labs.* (Technical Report Number TERC-TR-85-5). Cambridge, MA: Technical Education Research Center.

Berry, J. y Nyman, M.(2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 481-497.

REFERENCIAS

Brommer, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias, 6* (1), 19-29.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(3), 265-292.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Australia: Thomson.

Carrillo, J., Escudero, D y Flores, E. (2014). *El uso de MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria*. Recuperado el 9 de junio del 2015, de http://www.researchgate.net/publication/263086221_El_uso_de_MTSK_en_la_formacin_inicial_de_profesores_de_matemticas_de_primaria

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*, 2985-2994. Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía.

Carrillo, J., y Contreras, L.C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, *7*(3), 79-92.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 171-194.

Celestino, A., Echegaray, O. y Guenaga, G. (2003) Integración de la TIC en la Educación Superior. Píxel-Bit 21, 21-28. Recuperado el 18 de mayo del 2015, de http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n21/n21art/art2103.htm

Chávez, M. (2009). *Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada*. Recuperado el 30 de marzo de 2015, de http://www.matedu.cinvestav.mx/~elcalculoysuensenanza/investigacion/articulosPDF/MDiaz.pdf

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: Un estudio de caso* (Tesis de Doctorado). Universidad de Huelva, España.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: Ediciones La Muralla.

Cohen, Manion y Morrison (2007). *Research Methods in Education*. Sixth edition. United Kingdom: Taylor y Francis e-Library.

Dankhe, G. L. (1989). Investigación y comunicación. En C. Fernández Collado y G.L Dankhe (Eds.), *La comunicación humana: ciencia social*. México: McGraw-Hill, 385-454.

REFERENCIAS

Denzin, N. y Lincoln, Y.(2005). *The Sage Handbook of Qualitative Research* (3.ªed.). Londres: Sage.

Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (coordinador). *El futuro del cálculo infinitesimal*. (Capítulo V, pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Estepa, J. (2000). El conocimiento profesional de los profesores de ciencias sociales. En J. Pagés, J. Estepa y G. Travé (Eds.), *Modelos, contenidos y experiencias en la formación profesional del profesorado de Ciencias Sociales* (pp. 313-334). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis de Doctorado inédita). Universidad de Huelva, España.

Flores, W., y Salinas, M. (2013). Metodologías en la Enseñanza de la Derivada: URACCAN-Nueva Guinea. *Ciencia e Interculturalidad*, *12*(1).

Flores, E., Escudero, D.I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao:SEIEM.

Flores-Medrano, E., Escudero D., Montes M. y Aguilar, A. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. Recuperado el 06 de octubre del 2015, de http://www.researchgate.net/publication/267392675_Un_marco_terico_para_el_Conocimiento_especializado_del_Profesor_de_Matemticas.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2005). Conocimiento del contenido didáctico del profesor de matemáticas de universidad y su relación con otros contenidos disciplinares. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Grupo de investigación: Didáctica del Análisis*. Córdoba: SEIEM.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 85-116.

García, M., Gavilán, J.M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(3), pp. 219-235.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva* (Tesis de Doctorado inédita). Universidad de Sevilla, España.

Gil, M. (2011). El vídeo como herramienta de investigación: Una propuesta metodológica para la formación de profesionales en Comunicación. *Enlaces: revista del CES Felipe II*, (13), 7.

REFERENCIAS

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Habre, S. y Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1997). *Metodología de la Investigación.* (3ª. ed.). Colombia: Panamericana Formas e Impresos S.A.

Hernández, J., Borjón, E. y Torres M., (2016, en prensa). La presencia de la tecnología en la formación inicial de los profesores de matemáticas del nivel medio superior.

Hernández, G. (1998). *Paradigmas en psicología de la educación*. Educador: Paidós

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Hinostroza, E. (2000). *Roles alternativos de TIC en educación: sistema de apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje* (Versión electrónica). Recuperado el 18 de mayo del 2015, de www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie2000/papers/265.html

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México.

Kendal, M. y Stacey, K.(2002). Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(5), 196-203.

Kendal, M. y Stacey, K. (2001b). The Impact of Teacher Privileging on Learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, nº 2, pp. 143-165.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus.

Educational Studies in Mathematics, *48*, 137-174.

Klein, F. (1933). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [Elementary mathematics from a higher viewpoint]. Berlin: Springer.

Koehler, M. J., y Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60-70.

Koehler, M., y Mishra, P. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *The Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

REFERENCIAS

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990). Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. *Enseñanza*, *8*, 165-180. Universidad de Salamanca.

Llinares, S. (2009). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. *Colección Digital Eudoxus*,(15).

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Marquez, C. y De los Ríos, C. (2013). Una propuesta para la enseñanza de la derivada con Geogebra. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 7211-7217.

Meneses, J. y Rodríguez, D. (2011). *El cuestionario y la entrevista*. Construcció d'instruments d'investigació en e-learning

Mokros, J. R. (1985). *The Impact of Microcomputer-Based Science Labs on Children's Graphing Skills*. (Technical Report Number TERC-TR-85-3). Cambridge, MA: Technical Education Research Center.

Mokros, J., y Tinker, R. (1987). The Impact of Microcomputer-Based Labs on Children's Ability to Interpret Graphs. *Journal of Research in Science Teaching, 24,* 369-383.

Montes, M., Contreras, L.C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti, *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194), Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias 21* (2), 265-280.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* Universidad de Córdoba, España.81-96.

Murphy, L. (2004). *Using computer-based laboratories to teach graphing concepts and the derivative at the college level*. Recuperado 29 de abril del 2015, de http://mathforum.org/mathtools/tool/1052/

Murillo, J. (2012). *La entrevista*. Recuperado 14 de mayo de 2015, de http://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/Met_Inves_Avan

REFERENCIAS

Pineda, C. (2014). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada*. Recuperado 25 de agosto de 2015, de http://soda.ustadistancia.edu.co/enlinea/congreso/Coloquio/MEMORIAS%20COLOQUIO%20PDF/DIDACTICA/Una%20propuesta%20didactica%20para%20la%20ensenanza%20del%20concepto%20de%20la%20derivada.pdf

Pino, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (Tesis de Doctorado). Universidad de Granada, Granada, España.

Pino, L., Godino, J. y Font, V. (2011). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. *Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 206-213.

Pino, L., Godino, J., Font, V., y Castro, W. F. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivative. En *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, pp. 297-304).

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática*, *18*(1), 37-72.

Ponte, J.P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers.

Real Academia española -RAE-. (2015). *Diccionarios de la lengua Española*. Recuperado 1 de septiembre de2015, de http://www.rae.es/

Rodríguez, D. y Valldeoriola, J. (2009). *Metodología de la Investigación*. Barcelona: UOC.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.

Sánchez, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers'noticing of students'understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-25.

Santana, N. y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de Geogebra en el Aula de Matemáticas. *Números, 88*, 75-91.

Selden, J. Mason, A. Y Selden, A.(1944). Even good calculus student can't solde non-routine problems. En Kaput, J. y Dubisnky, E. (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning. MAA 3*, 19-26.

REFERENCIAS

Selltiz, C., Jahoda, M. y Cook, S. W. (1965). *Métodos de investigación en las relaciones sociales.* Madrid: Ed. RIALP. Octava edicion.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Cuarta Edición. España:Ediciones Morata.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas*. 4ª edición. Thomson**.**

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos* (Tesis de Doctorado inédita). Universidad de Huelva, España.

Sowder, J. T. (2007). The Mathematical education and development of teachers. En Lester, F.(Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning., 1* (157-223). Estados Unidos de America: Editorial NCTM.

Thompson, A. (1992). Teacher's belief and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). Macmillan: New York.

Unidad Académica de Matemáticas -UAM-. (2015). *Característica del Plan de Estudios E (2014)*. Recuperado 1 de septiembre de2015, de http://matematicas.reduaz.mx/web/index.php/lic-mate/plan-e-2014

Vasilachis de Gialdino, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.

Villanueva, Y. (2004). *Tendencias actuales en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y la utilización de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación*. Recuperado 18 de mayo del 2015, de http://funes.uniandes.edu.co/6168/1/VillanuevaTendenciasAlme2005.pdf

Vitabar, F. (2011). Cursos de GeoGebra para profesores en Uruguay: valoraciones, padecimientos y reclamos. En *Memorias de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife, Brasil*

Yin, R. K. (2009). *Case Study Research: design and methods* (4a. ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. IV* (pp. 103-127). Washington, DC: American Mathematical Society y Mathematical Association of America.

ANEXOS

ANEXOS

Anexos I. Guion de la entrevista semiestructurada que se le realizó al profesor Pepe

Planeación

Objetivo: Saber cuál es la intención de utilizar el Dropbox.

1. ¿Cuál es el propósito didáctico de utilizar Dropbox en sus clases?
2. ¿Y dentro de la educación cuál es ese propósito?

Objetivo: Saber el objetivo matemático de las tres actividades para corroborar y comprobar los subindicadores de la planeación KMT-P9, KMT-P10 y KMT-P11.

3. ¿Cuál era el objetivo matemático que planteo en de la actividad de la rana saltarina?
4. ¿Cuál era el objetivo matemático que planteo para la actividad del Run?
5. ¿Cuál era el objetivo matemático de la situación TVM-2?

Videos

Objetivo: Saber la intención didáctica del profesor al utilizar recursos didácticos tecnológicos para comprobar un subindicador.

6. ¿Qué potencialidad didáctica tiene utilizar el pizarrón electrónico, la computadora y el proyector en su clase? ¿Y dentro de la educación cuál es ese propósito?

Objetivo: Obtener información referente al conocimiento del profesor sobre Geogebra.

7. ¿Cómo fue que conoció Geogebra? ¿Por qué utiliza Geogebra y no otro software de geometría dinámica?

Objetivo: Obtener información referente a Geogebra y su implementación con la derivada.

8. ¿Ha utilizado otro software o sólo ha utilizado Geogebra?
9. ¿Qué potencialidades le ha encontrado a Geogebra para aplicarlo en la enseñanza de la derivada a diferencia de otros softwares?
10. ¿Conoce las limitaciones que tiene Geogebra en la enseñanza de la derivada? En caso de que se la respuesta sea no ¿ En la enseñanza de otro tópico?
11. ¿Cuáles son las herramientas de Geogebra que utiliza más para la enseñanza de la derivada? ¿Cuál de esas herramientas tiene una mayor potencialidad para la enseñanza de la misma?

Objetivo: Obtener información referente a los recursos tecnológicos alternativos en la enseñanza derivada.

12. ¿Cómo conoció el juego de la rana saltarina y la calculadora y los sensores?
13. ¿Cómo supo que el juego de la rana saltarina y la calculadora y los sensores le ayudarían en la enseñanza de la tasa de variación media? ¿Lo ha utilizado antes?

Objetivo: Obtener más información sobre el conocimiento del profesor acerca de la programación.

14. ¿Cómo conoció y aprendió Latex? ¿Cómo fue su primer contacto con Latex de Geogebra?
15. ¿Con base en su experiencia cree que el profesor que desee implementar Geogebra en su clase debe de tener conocimiento de Latex?
16. ¿Cree que los profesores que implementan recursos didácticos tecnológicos educativos de tipo software, deberían de tener conocimiento o nociones sobre la sintaxis de algún lenguaje de programación, para enfrentar cualquier situación en el aula?
17. ¿Ha realizado alguna aplicación en Geogebra para resolver una necesidad de su clase y comparte con otros docentes? En caso de la respuesta sea si ¿Cuál aplicación? En caso de que no, ¿Usted ha pensado en realizarlo o tiene idea de que se puede realizar?

Desventajas de las tecnologías de los recursos didácticos tecnológicos

Objetivo: Obtener información referente a las desventajas de los recursos didácticos tecnológicos que se evidencian en los videos

18. ¿Qué conocimiento considera que debe de tener el profesor de matemáticas para continuar su clase a pesar de la falla que puedan surgir en la clase?
19. ¿Cómo solucionar ese problema?
20. ¿Cree que el profesor tiene que estar preparados para estas fallas repentinas de Geogebra, y tener el conocimiento de otras alternativas tecnológicas? ¿Cómo?
21. ¿Cómo evalúa la actividad del estudiante?
22. ¿Qué medias didácticas implementa con el alumno que no acude regularmente a su clase?
23. ¿Qué medidas tomaría en cuenta para organizar los equipos para esa actividad de tal manera que garantice la enseñanza y aprendizaje?

Para finalizar

Objetivo: Obtener información para enriquecer un subindicador KMT-V16.

24. ¿Cuál fue la función que usted esperaba que debieran de encontrar los estudiantes en la actividad del sensor?

Objetivo: obtener información sobre la formalización de la derivada

25. ¿Qué relación tiene la formalización de la derivada en un punto, con todas los clases anteriores donde implemento tecnología?

Objetivo: Obtener información referente a las ventajas de tener un espacio con recursos didácticos tecnológicos

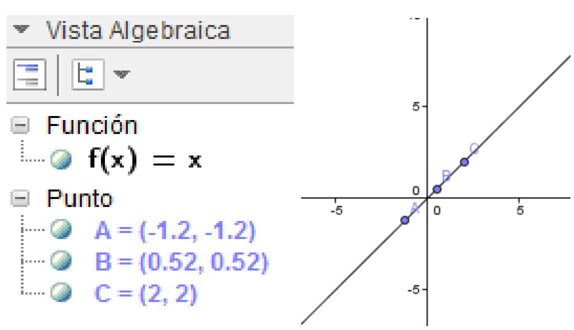
26. ¿Qué ventajas considera que tiene un profesor en un espacio donde tenga recursos didácticos tecnológicos?

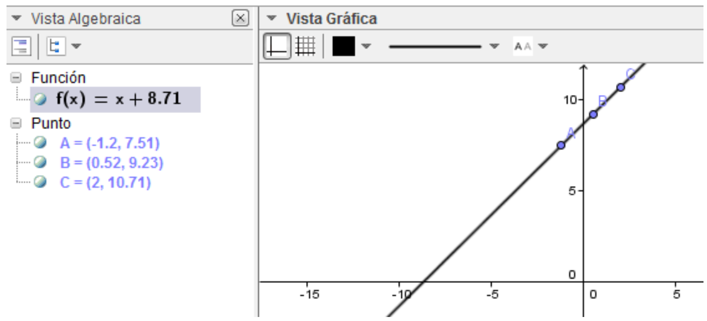
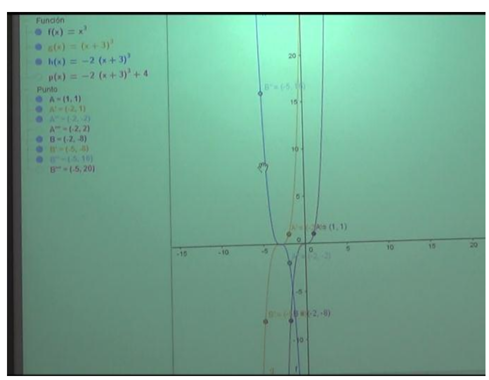
Objetivo: Obtener información referente a la opinión del profesor sobre los conocimientos del profesor que implementa en su práctica tecnología

27. ¿Qué conocimiento cree que debe de tener un profesor que enseña la derivada con recursos didácticos tecnológicos?

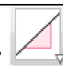
Gracias por la información proporcionada

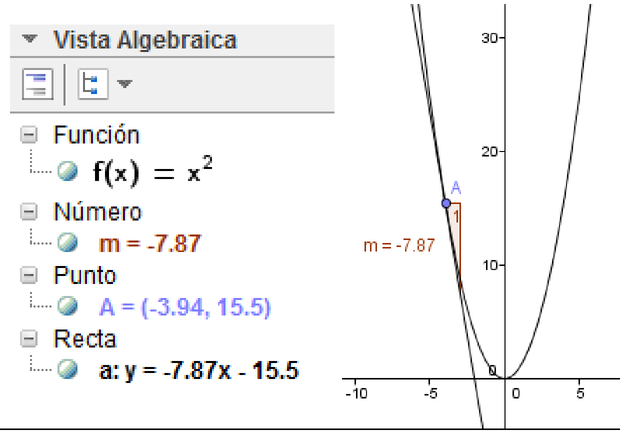
Anexos II. Ejemplos de los subindicadores hipotéticos

<table>
<tr><th colspan="2">Concomiendo Didáctico del Contenido (PCK)
Concomiendo de la Enseñanza de la Matemática (KMT)
Recursos y Materiales</th></tr>
<tr><th>Subindicador que se supone pudiera encontrarse. El profesor…</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Sabe que Geogebra concede trabajar en distintas representaciones semióticas como lo son: algebraica, numérica y gráfica para la enseñanza de la derivada.</td><td>El ambiente grafico de Geogebra permite transitar con representaciones algebraicas, numéricas y gráficas, separando cada representación en distintas vistas. Una de muchas potencialidades de Geogebra es que permite editar la función en cada momento y esto se ve reflejado en la gráfica y la función. A continuación se muestra un ejemplo de la función $f(x) = x$.

</td></tr>
<tr><td>Sabe Geogebra permite</td><td>La herramienta *arrastra o seleccionar objeto*  permite</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>enseñar y trabajar gráficas de manera dinámicas en torno a la instrucción de la derivada, con el propósito de que el alumno comprenda más el concepto de la derivada.</td>
<td>arrastra la gráfica de la función al lugar donde uno desee, cambiando su representación algebraica de manera automática. Por otra parte la herramienta desplaza vista gráfica o eje permite mover al plano al lugar que deseemos y cambiar la escala de los ejes x y y. Por último la herramienta aproximar y alejar permite acercar o alejarse de la gráfica en cuestión o de algunos puntos que este sobre la misma.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Sabe que Geogebra es una herramienta que le posibilita integrarse con otras tecnologías como lo son: almacenamiento en la nube, moodle, páginas web, proyector y pizarrón electrónico respecto a la enseñanza de la derivada.</td>
<td>Si una institución cuenta con un laboratorio de computación, Geogebra puede integrarse a la perfección con otros recursos tecnológicos. El proyector le puede permitir al profesor mostrar la actividad a realizar en el pizarrón electrónico, y este último a su vez muestra y puede ayudar a explicar y resolver la actividad, todos estos conectados a una computadora que utiliza el profesor. Por último el profesor puede sugerir a los alumnos guardar las actividades que realizaron en un Dropbox.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Sabe que la accesibilidad de Geogebra permite calcular la pendiente de la recta tangente a una curva, con la finalidad de que el alumno pueda comprender dicho concepto.</td>
<td>Para calcular la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$, primero se escribe la función en la línea de entrada, después se agrega un punto sobre la gráfica de la función con la herramienta nuevo punto, posteriormente se calcula la recta tangente de la función en el punto A con la herramienta tangente, por último se calcula la pendiente de la recta tangente con la herramienta</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

pendiente .



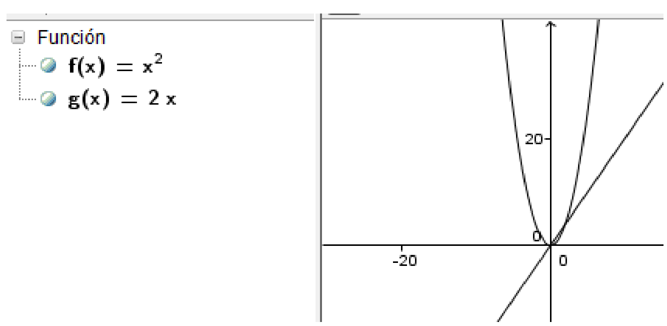
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Sabe que la potencialidad de Geogebra concede calcular algebraica y gráficamente la derivada de una función, para que el alumno compruebe y comprenda la derivada de una función.

</td>
<td>

Dada la función $f(x) = x^2$, Geogebra automáticamente grafica la función, para calcular la derivada en la *línea de entrada* se escribe el siguiente comando: *Derivada[<Función>].*

Para calcular la derivada se calcula de la siguiente manera: Derivada $[f(x)]$. Geogebra calcula algebraica y gráficamente la derivada de la función accesiblemente, otorgando un nombre a la nueva función, en este caso $g(x)$.



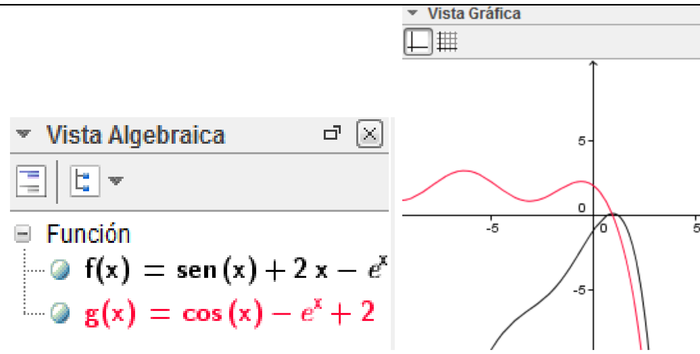
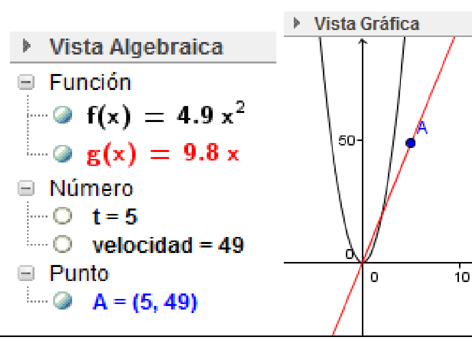
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Sabe que Geogebra y su potencialidad posibilita graficar cualquier tipo de función, así como calcular y graficar la derivada de la misma función, con el objetivo de que el alumno comprenda y compruebe la derivada de cualquier función.

</td>
<td>

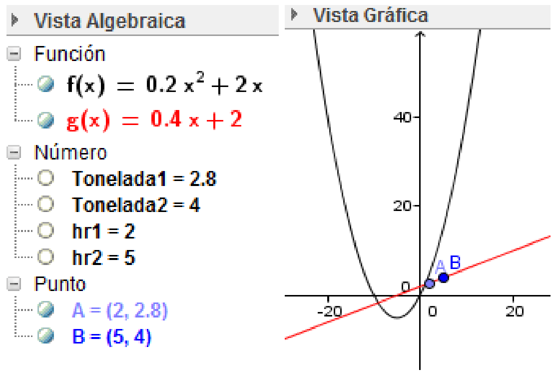
Geogebra permite graficar cualquier tipo de función, por ejemplo puede graficar la función $f(x) = sen(x) + 2x - e^x$ y utilizando el comando Derivada $[f(x)]$ calcula algebraica y gráficamente su derivada, la cual es $g(x)$.

</td>
</tr>
</table>

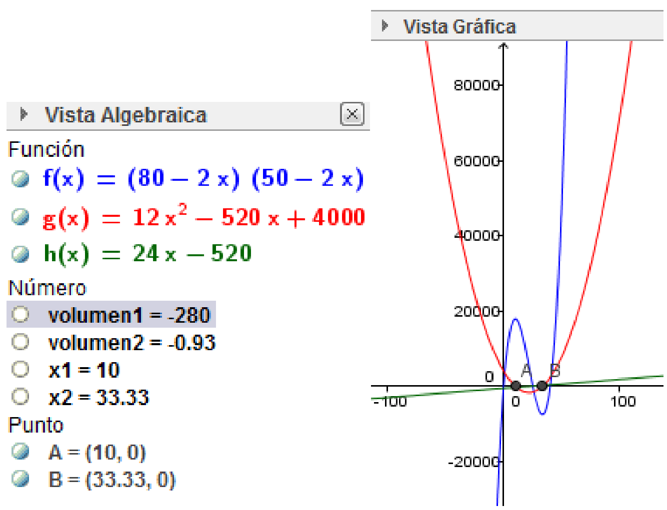
	
Sabe que la potencialidad de Geogebra permite calcular y graficar la velocidad de un objeto móvil, con el propósito de que el estudiante comprenda la velocidad.	Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, $450\, m$ sobre el nivel del suelo. ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos? Necesita hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera, que es eficaz iniciar la búsqueda de la velocidad en un tiempo común $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, es decir, la función es $f(t) = 4.9t^2$, para calcular la derivada usamos el comando *Derivada [$<Función>$]*, y la derivada de $f(t)$ es $g(t)$= Derivada [$f(t)$], después declaramos la variable $t = 5$ y por ultimo para calcular la velocidad sustituimos t en $g(t)$ y se la asignamos a v de la siguiente manera $v = g(t)$ y la velocidad es $v = 49$. 
Sabe que Geogebra y su potencialidad concede calcular y graficar la razón de cambio instantánea, con el objetivo de que el alumno comprenda y comprueba la razón de cambio.	Para calcular la derivada seguimos utilizando el comando *Derivada[$<Función>$]*. Se realizan estudios para poder purificar la atmósfera de la Tierra. Si una compañía a través de sus fábricas y durante un período de 18 horas diarias para combatir el "smog", liberará en la atmósfera cada una de sus fábricas, toneladas de una sustancia química determinada por la función: $f(x) = 0.2x^2 + 2x$ ¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancias

<table>
<tr>
<td></td>
<td>químicas desde que se empiezan a liberar?

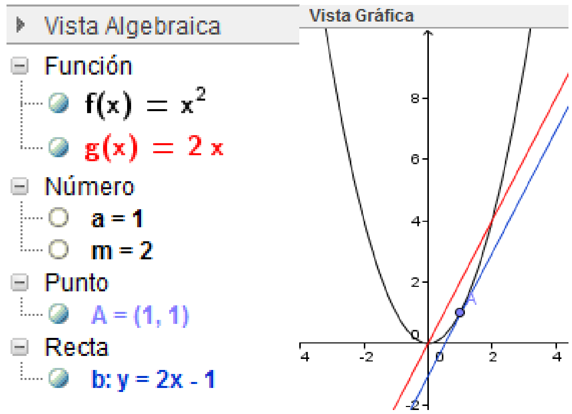
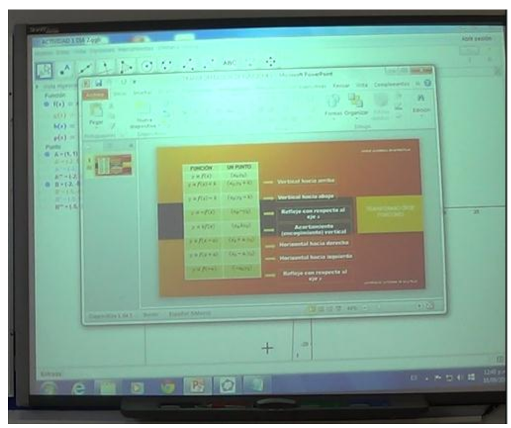
Hasta: ¿2 horas después? y ¿5 horas después?


</td>
</tr>
<tr>
<td>Sabe la potencialidad de Geogebra permite calcular y visualizar las raíces de una función para implementarlos en problemas de optimización de la derivada, tanto gráficamente como algebraicamente.</td>
<td>Para calcular la derivada y la raíz de una función seguimos usando el comando Derivada[<Función>] y Raíz[<Polinomio>], respectivamente.

Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente, se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.


</td>
</tr>
<tr>
<td>Sabe que la potencialidad de los softwares con o sin fines educativo permite realizar alguna actividad a la par del alumno, o cuando se esté iniciando la enseñanza de la derivada, con el objetivo de que el alumno este al mismo</td>
<td>Si se está introduciendo por primera vez al concepto de derivada con Geogebra, será importante que el profesor realice una actividad a la par de los estudiantes para que estos se familiaricen con las nuevas herramientas que se utilizaran en este concepto.

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1,1)$.</td>
</tr>
</table>

ritmo de los demás alumnos, o se familiarice con las nuevas herramientas que se relacionan con la derivada.	Este ejemplo se resuelve de manera accesible con Geogebra, lo único nuevo es el comando para calcular la derivada el cual es: *Derivada [<Función>]*. 
Sabe que el proyector concede mostrar y explicar la actividad entorno a la derivada e ir realizando dicha actividad a la par del alumno.	El proyector es un excelente recurso didáctico de carácter tecnológico porque permite mostrar hacia el alumnado la derivada o la actividad a resolver, siendo un recurso para optimizar el tiempo de una clase. 
Sabe que la potencialidad de tener un espacio tecnológico, como lo es un laboratorio de computación concede al alumno trabajar en un ambiente tecnológico ya sea de manera individual o en equipo.	Los laboratorios de computación son espacios tecnológicos donde el profesor enseña un concepto de manera complementaria a lo que se enseña en un salón de clases. Los laboratorios deben de contar con los hardwares y softwares actualizados de características educativas, además de crear un ambiente de trabajo individual o en equipo para el alumno.

	
Sabe que los diversos softwares y hardwares se pueden utilizar en la enseñanza de la derivada, con el propósito de que el alumno enriquezca su conocimiento.	El profesor no sólo debe de implementar un software para enseñar la derivada, también debe de saber y utilizar otros softwares que le ayuden a presentar un concepto de cara la enseñanza como lo pueden ser: Cabri, Geometra, Matlab, Maple, Mathematica y aplicaciones móviles. Además de calculadoras gráficas, Tablets, dispositivos móviles.
Sabe la potencialidad del pizarrón electrónico se implementa en la enseñanza de la derivada, ya que su interactividad enfocada a la derivada puede ser enriquecedor para el profesor y el alumno.	El pizarrón electrónico también es un excelente recurso didáctico tecnológico porque permite mostrar y resolver una actividad entorno a la derivada, debido a que su ambiente interactivo está conectado y configurado con un proyector y una computadora. En el caso de Geogebra, el pizarrón electrónico permite ser un medio para evidenciar y resolver una actividad con los elementos del pizarrón (borrador y lápiz). 
Sabe que la potencialidad de los alojamientos de archivos multiplataforma permite guardar y retomar una actividad, estas herramientas conceden almacenar, retomas, evaluar la actividad y el desempeño del alumno, y darle seguimiento al aprendizaje del estudiante.	Las plataformas en la nube como Dropbox, Onedrive, Google drive, Mega o plataformas como Moodle o propias de la institución permiten almacenar las actividades realizadas por los alumnos, con el objetivo de que el profesor evalué la solución de la actividad y darle seguimiento al aprendizaje que el alumno va adquiriendo con algún concepto.

<table>
<tr>
<td>Conoce que el objetivo de implementar los recursos didácticos tecnológicos en la clase se tiene que especificar en la planeación.</td>
<td>
<table>
<tr><th>Saberes Procedimentales</th><th></th></tr>
<tr>
<td>Interpretación de un conjunto de coordenadas que componen a una función en los diferentes registros (numérico, algebraico y grafico).

Manejo de la calculadora o software gráfico</td>
<td>-Reconocer el comportamiento grafico de las funciones al operar (uso de signos –, +) y variar los parámetros

- Determinar los cambio que sucede en el dominio e imagen al transformar una función

- Manejo de la calculadora o software gráfico</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Conoce que en el implemento de los recursos didácticos tecnológicos es necesario buscar un equilibrio entre el tiempo de la clase, mismo que se verá reflejado en la evaluación de la clase.</td>
<td>
<table>
<tr><th colspan="3">EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><th>CRITERIOS DE DESEMPEÑO O CALIDAD</th><th>EVIDENCIAS</th><th>VALOR O PONDERACIÓN</th></tr>
<tr>
<td>Lectura anticipada de las notas de clase
Resolución de problemas en aula y extra clase
Redacción ordenada de la solución de problemas</td>
<td>Tiempo efectivo en la plataforma virtual.

Manejo adecuado de la calculadora en la resolución de problemas, evaluado por el docente.

Resolución escrita de problemas, de forma individual contra el tiempo, con o sin apoyo de las notas. Se deben considerar problemas con y sin el uso de la calculadora.

Instrumentos derivados del trabajo en equipo.

Capacidad crítica, compromiso con la calidad, respeto, a través de la rúbrica.</td>
<td>10%

10%

60%

10%

10%</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Conoce que en la evaluación de una actividad con recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza de la derivada será importante equilibrar la evaluación entre los recursos y la derivada.</td>
<td>
<table>
<tr><th>REQUERIMIENTOS DIDÁCTICOS</th><th>LINEAMIENTOS DE EVALUACIÓN Y CERTIFICACIÓN</th></tr>
<tr>
<td>• Pizarrón
• Cañón
• Calculadoras
• Plataforma virtual
• Software y dispositivo de graficación.</td>
<td>• Argumentación oral
• Argumentación escrita (exámenes, tareas, resúmenes, proyectos)
• Comprensión lectora
• Capacidad de síntesis
• Retroalimentación con pares
• Planteamiento de hipótesis, verificación o refutación (nivel numérico)
• Analizar y tomar decisiones en situaciones problema (nivel numérico)
• Operatividad algorítmica manual y en la calculadora</td>
</tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="3">EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><th>CRITERIOS DE DESEMPEÑO O CALIDAD</th><th>EVIDENCIAS</th><th>VALOR O PONDERACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Lectura anticipada de las notas de clase
Resolución de problemas en aula y extra clase
Redacción ordenada de la solución de problemas</td><td>Tiempo efectivo en la plataforma virtual.</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>Manejo adecuado de la calculadora en la resolución de problemas, evaluado por el docente.</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>Resolución escrita de problemas, de forma individual contra el tiempo, con o sin apoyo de las notas. Se deben considerar problemas con y sin el uso de la calculadora.</td><td>60%</td></tr>
<tr><td>Instrumentos derivados del trabajo en equipo.</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>Capacidad crítica, compromiso con la calidad, respeto, a través de la rúbrica.</td><td>10%</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Conoce que en el implemento de recursos didácticos tecnológicos es necesario especificar las estrategias de enseñanza y actividades de aprendizaje en la planeación.	**ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA** - Actividades de determinación de similitudes y diferencias del dominio e imagen de las funciones con y sin el uso de tecnología - Experimentación por medio de sensores para determinar y generar hipótesis sobre las relaciones entre conjuntos - Lectura y exposición de artículos de investigación relacionado con la transformación de funciones **ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE** **TRABAJO PRESENCIAL Y/O SUPERVISADO:** 1 Lección en la que se establecen los objetivos y se proporciona la información sobre la UC. 2 lecciones magistrales por semana, que comenzarán con un "Cues"; en las que se sugiere que el alumno esté resumiendo y tomando notas. **TRABAJO AUTÓNOMO:** Participación en la plataforma virtual para revisión de apuntes, participación en foros –asesoría virtual–, descarga de problemas para resolver en casa (una tarea por semana)
Conoce que en el implemento de recursos didácticos tecnológicos de debe de determinar las competencias a desarrollar.	**COMPETENCIA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA** Usar conceptos de cálculo incluidos en la matemática preuniversitaria para la solución de problemas que involucren: operaciones aritméticas con el uso de calculadora, conjuntos solución de desigualdades en sus diferentes representaciones, transformaciones de relaciones funcionales en sus diferentes representaciones.
Conoce que el uso de los recursos didácticos tecnológicos a utilizar en la clase.se debe de establecer en la planeación.	**RECURSOS DIDÁCTICOS:** - Uso de calculadora o software grafico - Sensores de movimiento y temperatura -Libros (fuente documental) -Material propuesto por el profesor - Pintarrón

ANEXOS

Anexos III. Transcripción de la planeación del profesor

1.	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS PLAN ANALÍTICO**									**ÁREA ACADÉMICA**					
2.										**CIENCIA BÁSICA**					
3.	**UNIDAD ACADÉMICA**			**MATEMÁTICAS**											
4.	**PROGRAMA ACADÉMICO**			**LICENCIATURA**											
5.	**CICLO ESCOLAR**			**AGOSTO-DICIEMBRE**											
6.	**UNIDAD DIDÁCTICA**			**LABORATORIO DE CÁLCULO Y GEOMETRÍA II**					**SERIADA CON**		**PRE-CÁLCULO**				
7.	**EJE CURRICULAR DE LA UNIDAD DIDÁCTICA**														
8.	**ACTIVIDAD CON INTERVENCIÓN DOCENTE POR SEMESTRE (Teóricas, Prácticas y mixtas)**			**ACTIVIDAD DE TRABAJO SUPERVISADO POR SEMESTRE**				**ACTIVIDAD DE TRABAJO INDEPEDIENTE POR SEMESTRE**				**TOTAL DE HORAS AL SEMESTRE**		**TOTAL DE CREDITOS DE LA UD**	
9.	**HRS**	**60**	**CREDITOS**		**HRS**		**CREDITOS**		**HRS**		**CREDITOS**				

10.	**COMPETENCIA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA**
11.	**UTILIZAR LAS HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES DE CÁLCULO NUMÉRICO, GRÁFICO Y SIMBÓLICO PARA PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL Y GEOMETRIA ANALITICA.**

12	**UNIDAD DE COMPETENCIA 4**	**TOTAL DE HORAS DEL SEMESTRE QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA**		
		AID	**ATS**	**ATI**
13	**Resolver actividades en un contexto gráfico, numérico y algebraico para aplicar definiciones del cálculo diferencial como: La derivada y su aplicación en contextos diversos de la ciencia.**			

14.	**Desempeños**
15.	**- Significado gráfico de la derivada en problemas en contexto**

16.	**Saberes Teóricos/Declarativos**
17.	**- Aplicación de la definición de derivada de una función en un punto**

18.	**Saberes Procedimentales**
19.	**- Entenderá el significado de la derivada de una función en problemas de otros contextos como la física, (velocidad), biología (cambios en poblaciones) y matemática.**

20.	**Competencias Genéricas**
21.	**Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.**

22.	**Capacidad de actuar ante nuevas situaciones**

23	**ESTRATEGIA**

24.	**ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA**
25.	- Establecimiento de objetivos e información del laboratorio. - Asignación de tareas y prácticas con tecnología. - Trabajo individual. - Asesorías personalizadas.

26.	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**

27.	**TRABAJO PRESENCIAL Y/O SUPERVISADO**
28.	**- Observación sobre el uso de instrucciones para hacer operaciones elementales con tecnología.**
29.	**- Asignación de actividades a realizarse en el centro de cómputo o laboratorio con supervisión docente.**

30.	**TRABAJO AUTÓNOMO**
31.	- **Resolución de actividades** - **Tareas de casa**

32.	RECURSOS DIDÁCTICOS:
33.	**Pizarrón, computadora y software de geometría dinámica.**

34. ***OBJETIVO de las sesiones:*** El estudiante comprenda el concepto de derivada por medio de la relación existente con la tasa de variación media desde contextos gráficos y numéricos con el uso de Geogebra.

35. Descripción de los momentos de trabajo en dos sesiones

36.	Momentos de la sesiones	Intencionalidad
37.	Momento 0	Se explica La definición de la TVM por medio de ilustraciones y de cómo se calcula
38.	Momento 1	Se realiza una construcción en geogebra para ilustrar la TVM
39.	Momento 2	Se realiza con una serie de cálculos apoyándose de la construcción en geogebra para dar sentido a los elementos que componen la TVM como: secante, tangente, pendiente la resta para obtener incrementos en x y y etc.
40.	Momento 3	Se tiene la intención de ir llevándolos a la tasa de variación instantánea que es la derivada en un punto por medio de acercamientos de un punto a otro, es decir cuando h tiende a cero con el uso de Geogebra.
41.		Se quiere con esto de que el estudiante observe como la secante tiende a ser a la tangente en dicho punto desde lo visual, y así tener elementos para bosquejar una expresión algebraica respecto a la TVM con puntos hecho en la construcción en geogebra
42.	Momento 4	En este momento se quiere que formalicen expresiones respecto a la derivada a lo realizado en el momento anterior, para ello se les pide que hagan cálculos siempre apoyándose de la construcción en geogebra realizada para expresen la fórmula de la derivada. Al final se deja una sesión de preguntas

43. NOTAS:
44. Las formas de trabajo serán de corte plenaria, es decir el profesor va explicando a los estudiantes y ellos pueden intervenir preguntando dudas. Posterior habrá trabajo autónomo de parte de ellos.
45. El documento de trabajo estará en su carpeta dropbox por cada sesión para que de ahí responda y lo anexen luego a la carpeta dropbox.

46. Plan de trabajo

47. Sesión 1

48.		**Unidad 5. La tasa de variación media.**
49.		**Objetivo:** Los alumnos conocerán que la tasa de variación media de una función dado un intervalo se calcula mediante

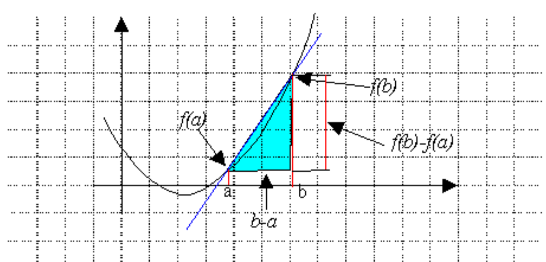
50.	Se presenta una ilustración de lo que es la tasa de variación media por medio de geogebra (10 min)

51. Tasa de variación media

Se ilustra por medio del geogebra

$$TVM[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Gráficamente :



52.

figura 1

53.	- Conocer la interpretación geométrica de la tasa de variación media.
54.	- Relacionar la aplicación de la tasa de variación media con su interpretación geométrica y deducir su definición.
55.	No priorizar la memorización de la fórmula de la derivada, sino su deducción a través de la fórmula de la tasa de variación media. Observar como la recta secante se aproxima a la recta tangente conforme se reduce la amplitud del intervalo.
56.	Comprobar que esta misma relación se cumple para las pendientes de ambas rectas. La pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente cuando la amplitud del intervalo disminuye.

57.	**Sesión 1**

58.	Momento 1 Actividad de construcción (20 min)
59.	**Realizar la TVM con el uso de geogebra**
60.	Se les pide de inicio realizar en geogebra las siguientes instrucciones
61.	a) Representa la función en GeoGebra $f(x)= (x+1)^2+1$
62.	b) Crea un deslizador a con valores de -5 a 5 e incrementos de 0.1
63.	c) Edita el punto A= (a, f(a)).
64.	d) Crea un deslizador h con valores de -5 a 5 e incrementos de 0.1
65.	e) Edita el punto B=(a+h, f(a+h)).
66.	f) Sea C el punto de intersección de de la recta que pasa por A y perpendicular a el eje y, con la recta que pasa por B y perpendicular al eje X
67.	g) Ocultar recta perpendicular y trazar segmento AC y BC.
68.	**Pregunta grupal :** ¿Qué observan respecto a los segmentos AC y BC al mover el deslizador de parámetro h?

69.	Momento 2 Actividad individual 30 min

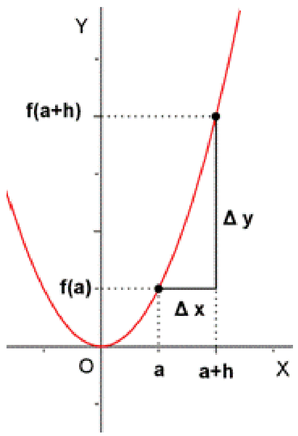
70.	a) Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C cuando a=-1, h=4, expresa la fórmula escrita de cómo lo obtuviste
71.	b) Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C en función de *h* y *a* usando el mismo método usado en los literales anteriores.
72.	c) Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C en función de *h* y **a** usando el mismo método usado en los literales anteriores.
73.	d) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [-2, 2]
74.	e) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 1]
75.	f) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [3, 4]
76.	g) ¿Cómo puedes expresar la fórmula de la TVM en función e la variables ***a*** y ***h***?
77.	h) ¿Expresa ahora una forma gráfica para f(x)=x^2 la TVM para los puntos (a, a+h) y (f(a), f(a+h)?
78.	Guardar archivo como: ***TVM_Práctica LabII***
79.	Una vez terminado el bosquejo grafico el profesor hace referencia a los símbolos Δx y Δy por medio de la siguiente ilustración 

	Figura 2

80.	**Sesión 2**

81.	**Momento 3.** Hacia la noción de límite para dar significado a al tasa de variación instantánea 30 min

82.	Por medio de geogebra abra el archivo TVM_Práctica LabII y analize los cálculos que se piden a continuación
83.	a) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 2]
84.	b) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 1]
85.	c) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.5]
86.	d) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.3]
87.	e) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.1]
88.	f) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.5]
89.	g) ¿Qué comportamiento observas sobre la ***TVM*** cuando el intervalo[a, b] y [f(a), f(b)] se reduce cada vez que h tiende a 0?
90.	h) ¿Cómo varia la pendiente de la recta secante cuando aproximamos el punto B al punto A?
91.	i) Si aproximamos los valores de ***h->0*** ¿qué le ocurre a la recta secante***?***
92.	j) Cuál será el Limite de la pendiente de la recta secante cuando h->0?

93.	k) Cuál es el límite de la recta secante en su expresión algebraica de la recta cuando h->0?

94.	Momento 4. 20 min

95.	j) Conociendo la relación existente entre la tasa de variación media y la recta secante. Calcula: $$\lim_{h \to 0} TVMf(x)_{[x,x+h]}$$
96.	k) Calcula $$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{(-1+h) - (-1)}$$
97.	j) Calcula f´(3)
98.	l) Termina la definición de derivada de una función: $$f'(x) = \lim_{h \to \cdots} \ldots\ldots$$

99.	Sesión de preguntas 10 min

100. Tasa de variación media-Hoja de trabajo 1

101. De la construcción que elaboraste anteriormente, utiliza para responder las siguientes preguntas

102. Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C cuando a=0 y h=1,2,3,4,5, expresa la fórmula escrita de cómo lo obtuviste. Elabora una tabla en la Hoja de cálculo de geogebra.

103. Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C cuando a=-1, h =4 expresa la fórmula escrita de cómo lo obtuviste

104. Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C en función de *h* y *a* usando el mismo método usado en los literales anteriores.

105. Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C en función de *h* y **a** usando el mismo método usado en los literales anteriores.

106. Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [-2, 2]
107. Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 1]
108. Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [3, 4]
109. ¿Cómo puedes expresar la fórmula de la TVM en función e la variables a y h?
110. ¿Expresa ahora una forma gráfica para f(x)=x^2 la TVM para los puntos (a, a+h) y (f(a), f(a+h)?

111. Guardar archivo como: ***TVM_Práctica LabII_nombre y apellido***

112. ¿Cuál es la función que modelo el número de movimientos de la Rana Saltarina?

113. Nombre: ____

114. Paso1: Conéctate al siguiente Link y resuelve el juego de cambiar de lugar a las ranas verdes con las cafes.

115. Link:http://www.educa.jcyl.es/educacyl/cm/gallery/Recursos%20Infinity/juegos/arcade/ranas/ranas.html

116. ¿Cuantos movimientos tuviste que hacer para cambiar a las tres ranas de posición?

117. Para responder a la pregunta completa la siguiente tabla donde la C: Ranas Cafés, V: Ranas Verde y 0: Espacio sin ocupar. Por ejemplo un primer movimiento sería este:

118.

119.

0	**C**	**C**	**C**	**0**	**V**	**V**	**V**
1	**C**	**C**	0	**C**	**V**	**V**	**V**

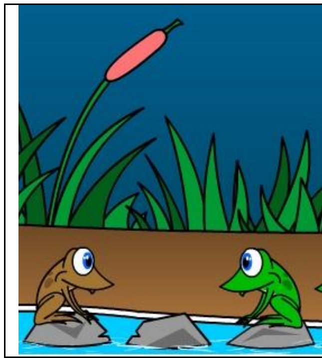
120. Registra cada uno de los movimiento:

121.

0	**C**	**C**	**C**	**0**	**V**	**V**	**V**
1							
2							
3							
4							

122. ¿Cuantos movimientos se harían con una rana en cada lado?

123.

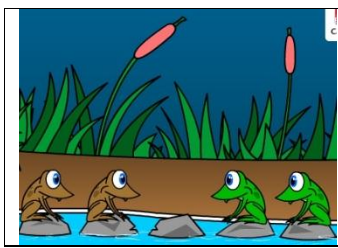


124.

0	C	0	V
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

125. ¿Cuantos movimientos se harían con dos ranas en cada lado?

126.



127.

0	C	C	0	V	V

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

128. Coloca en una tabla hoja de cálculo en geogebra de la siguiente manera/Etiqueta las columnas
129.

N° de ranas en cada lado (r)	Número de movimientos (M) M=f(r)	
1		
2		
3		
4		
5		

130. Con los datos que has obtenido, ¿Cuantos movimientos se harían con cuatro ranas de cada lado?
131.

0	**C**	**C**	**C**	**C**	**0**	**V**	**V**	**V**	**V**
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									

8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									

132. ¿Cuantos movimientos se harían con 5 ranas de cada lado?

133. Movimiento 2(Run2)

134. Pariendo de un punto que se encuentre a un metro del sensor, caminaras a paso aproximadamente constante, alejándote rápidamente del sensor. El intervalo de tiempo será de 8 segundos.

135. Tasa de variación media-Hoja de trabajo 2

136. De la construcción que elaboraste anteriormente, utiliza para responder las siguientes preguntas (Nombre Archivo TVM sesión 1)

137. En

138. a) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 2]

139. b) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 1]

140. c) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.5]

141. d) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.3]

142. e) Calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.1]

143. f) Cambia los incrementos del deslizador ***a en*** 0.01 y calcula la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [0, 0.05] y [0, 0.01] y escribe ¿qué sucede?

144. g) ***Escribe qué observas de los resultados de la TVM cada vez que el intervalo se reduce***

145. h) ¿Qué sucede con la recta secante cada vez que el intervalo de su dominio se reduce?

146. i) Qué relación observas sobre la ecuación de la recta secante de la vista algebraica con cada resultado del cálculo de la TVM en los incisos a) –-f)

147. j) ***Escribe ahora qué significa el calcular la TVM en el intervalo del inciso a) comparándolo con el*** intervalo del inciso f)

148. k) ¿Expresa ahora como fórmula la TVM para los puntos (a, a+h) y (f(a), f(a+h)?

149. l) De la fórmula que expresaste en el inciso anterior, que sucede si le agregamos el $\lim_{h\to 0} TVM$. Escribe

150. m) Calcula

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{(-1+h) - (-1)}$$

151.

Copia la imagen de geogebra para ver que valores tiene los deslizadores ***a y h***

152. n) Calcula f´(3), qué valores debe tener el deslizador a y h, copia la imagen y pega en esta sección.

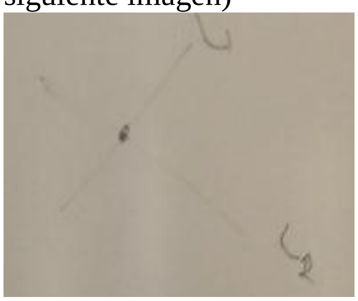
153. Referencias

154. Ruiz, k; Cordóba, y; Rendón, (2014). **La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de geogebra como propuesta didáctica.** *Congreso iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, pp 1-22, Buenos Aires:Argentina

155. Dolores. (2013). *La variación y la derivada*. México: Díaz Santos

Anexos IV. Transcripción de la clase video grabadas del profesor

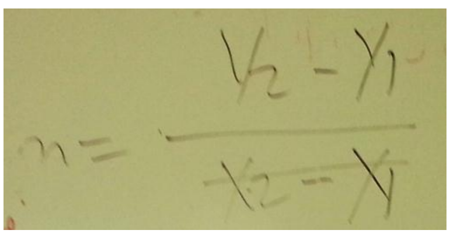
Transcripción de la clase del día 29/02/2016

1. **Nota: antes de iniciar su clase el profesor enciende la computadora, el proyecto y el pizarrón electrónico para enseñar y mostrar la actividad**
2. M: Muy bien muchachos vamos a empezar, que tal el archivo que les envié, ¿Cómo contestaron ese archivo? Se acuerdan de todo eso ¿le costó, muy difícil? Ese cuestionario sobre rectas, sobre pendientes, cuándo es una pendiente negativa, ¿se acordaban de ello?
3. E: Un poco
4. M: Un poco, verdad, algunos contestaron algunas cosas medias extrañas eh, pero…
5. E: Jajajaja
6. M: Esteee por ejemplos una secante ¿qué es? Alguien me puede decir….el que quiera, Pacheco por favor
7. E: Una recta que intersectan dos puntos de una circunferencia
8. M: ¿Sólo una circunferencia?
9. E: Una curva
10. M: Una curva, está bien, este si yo hago esto, algunos no me respondieron este aspecto entre rectas, unas cosas extrañas… ¿esto qué es? (escribe en el pizarrón la siguiente imagen)
11. 

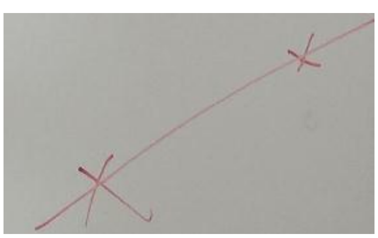
12. M: $L1$ y $L2$ ¿qué son? ¿Secantes o tangentes? ¿Qué es una tangente antes que nada? ¿Qué es una tangente?
13. E: Una recta que pasa por un punto
14. M: Un punto ¿no? ¿Y esto es una tangente o secante? (señala la imagen anterior) ¿pasa por un punto a quién? La tangente ¿por quién?
15. E: La recta $L1$ es tangente a la recta $L2$ en el punto donde la intersectan
16. M: Aja!! La pregunta es: ¿a quién es tangente? ¿a una recta? A quien díganme
17. E: Es que depende donde está la curva a la cual es tangente
18. M: Entonces, Pacheco dijo: es una curva, ¿no?, ¿hay tangentes a rectas?... Verdad, entonces, este….yo sea que la tangente corta en un punto ¿no?, pero ¿estas serán tangentes? (señala la imagen anterior), entonces…
19. M: son un grupo de provocaciones que le estoy haciendo no es que me lo respondan, los estoy provocando, porque….este, que es la tangente que es la secante es algo que vamos a utilizar ahorita, vamos a ver este clase, eeeh, pero, por ejemplo alguien me dijo que secante era esto (escribe la siguiente imagen), ¿Qué son estas dos rectas?

20. 

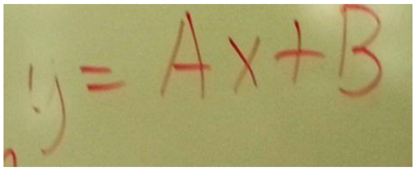
21. E: Paralelas
22. M: Son paralelas ¿son secantes o tangentes?
23. E: Paralelas
24. M: No es secante ni tangente
25. E: No
26. M: No verdad, entonces vayan familiarizando con la definición…. ¿Cómo calculan la pendiente de una recta, se acuerdan? ¿ Se saben la formula? m es igual a…(escribe lo siguiente el pintarron)

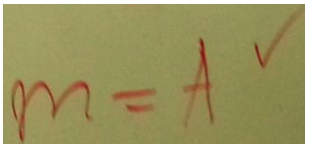
27. 

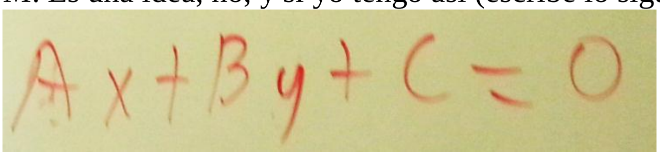
28. M: ¿Si yo tengo una recta?¿ esta es la única forma de hallar una pendiente?¿ cuál otra se saben? Una fórmula que se acuerden
29. E: ¿De qué?
30. M: Si se acuerdan de otra manera de calcular la pendiente aparte de dos puntos esto es cuando hay dos puntos (dibuja en el pintarron dos puntos)….esta es cuando hay dos puntos y una recta (dibuja lo siguiente) utilizamos esta fórmula (señala la imagen anterior), ¿no?

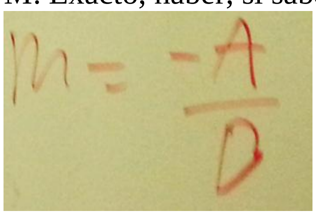
31. 

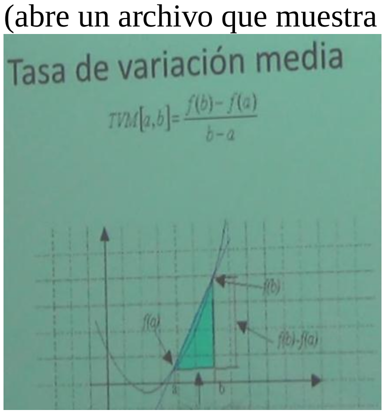
32. M: Para hallar *y* la ecuación de una recta, ¿no? Puedo hallar la ecuación de una recta, después punto pendiente, pero necesito sacar la pendiente primero, verdad, entonces, es una formula, si yo tengo una función así (escribe lo siguiente)

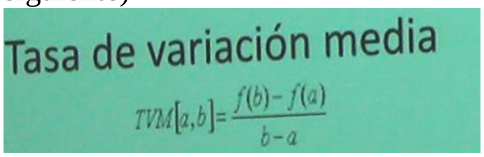
33. 

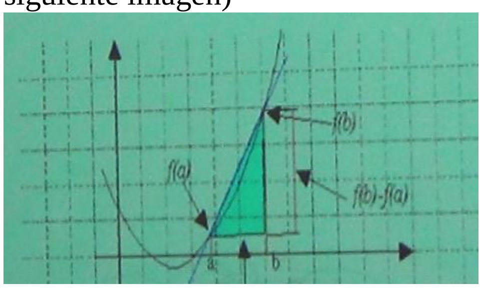
34. M: ¿Puedo saber cuál es la pendiente? ¿Cuál?
35. E: A
36. M: El A esta es otra idea es A (escribe lo siguiente)
37. 

38. M: Es una idea, no, y si yo tengo así (escribe lo siguiente)
39. 

40. M: También saben cómo hallar la pendiente, se acuerdan de la formula
41. E: es a/b
42. M: Exacto, haber, si saben es a/b, ¿no? (escribe lo siguiente)
43. 

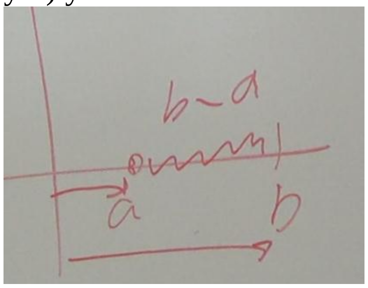
44. M: ¿es la constan B?
45. E: Si
46. M: ¿Seguros? Jeje…
47. M: bueno, muy bien vamos a empezar, den en abrir Dropbox, mmmm, bueno, bueno, vamos a ver, déjenme abrir Dropbox para bajar el archivo…será este…este…
48. M: aquí están todos ustedes, vamos a ver esta ilustración primero antes de empezar (abre un archivo que muestra lo siguiente)
49. 

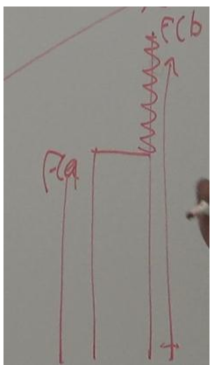
50. M: Vamos a ver algo con lo que quiero empezar, iniciando la tasa de variación media, voy abrirlo, los quiero ilustrar…que se cargue…..mmmmmm…..
51. M: Ok, muy bien, bueno la tasa de variación media, tiene que ver mucho con su cuestionario que estaban haciendo, pero miren, voy a empezar con esta ilustración, ¿qué es la tasa de variación media? ¿Esta fórmula le es familiar? (señala lo siguiente)
52. 

53. M: A quien es familiar esta fórmula, esta de aquí (señala la imagen de arriba), ¿Le es familiar? ¿no ven relación con quién?¿ con algo?
54. E: Con la fórmula de la pendiente
55. M: Verdad, tiene que ver con la fórmula de la pendiente, bien voy a explicar un poco la ilustración de qué es la tasa de variación media de un intervalo $[a, b]$, fíjense hay una gráfica, una curva y una recta, ¿qué recta es esta? (señala la siguiente imagen)
56. 

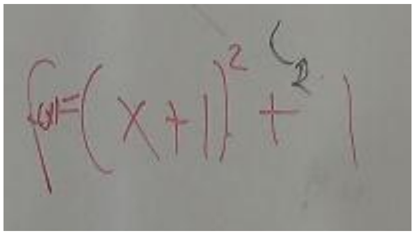
57. M: Esta azul, no sé si la logren ver haya atrás (sigue señalando la gráfica anterior), esta azul que recta es: ¿tangente o secante?
58. E: Secante
59. M: Corta en dos puntos corta aquí y corta acá (señala a y $f(b)$, respectivamente), ¿no? Este el punto a la abscisa a y esta es la abscisa b y aquí es la imagen de a $f(a)$ y la imagen de $b, f(b)$, si, entonces, si yo quiero hallar la pendiente de esta recta secante es $y_2 - y_1$, pero aquí no se maneja eso, se maneja y_2 viene siendo la $f(b)$ y este punto de acá (señala el punto en la imagen anterior), $f(b) - f(a)$ es lo que esta acá arriba(señala la fórmula de la tasa de variación media la imagen anterior) es como si fuera $y_2 - y_1$ entonces la imagen de a y la imagen de b(señala el punto en la imagen) y abajo están las abscisas, la resta de las abscisas(lo señala en la imagen) $x_2 - x$ y que vienen siendo $b - a$ y es este pedazo(lo señala en la imagen anterior)
60. M: Entonces se forma ahí un triángulo rectángulo, esta distancia es $b - a$ (lo señala en la imagen anterior) y esta distancia de altura es $f(b) - f(a)$ si no logran ver, pero es como si estamos mostrando los segmentos, está el plano así (lo que escribió se muestra en la siguiente imagen), aquí está a y aquí esta b, esta distancia (se refiere a la distancia de origen al punto b) menos esta distancia (se refiere a la

distancia de origen al punto a) me queda esta (señala a la distancia entre el punto a y b) y esta le vamos a llamar $b - a$

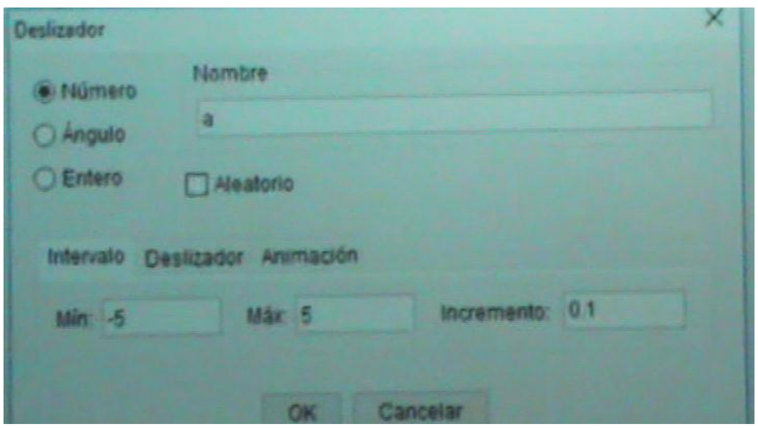
61. 

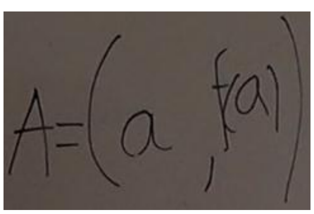
62. M: Las alturas igual, si esta es $f(b)$ y esta es $f(a)$ esta distancia menos esta distancia queda este pedacito (lo que escribió se muestra en la siguiente imagen), a este pedacito le vamos a llamar $f(b) - f(b)$ (se refiere a lo que zigzagueado) son restas de distancias
63. 
64. M: Si este pedacito lo traslado y este pedacito lo traslado va a formar un triángulo (se refiere al siguiente triángulo) que es lo que están viendo aquí (se refiere al triángulo formado en la ilustración de la tasa de variación media)
65. 

66. M: Si Diego…Manuel…este muy bien…esto se llama la tasa de variación media, qué es eso de la tasa de variación media, lo que veo ahorita es cálculo, parece ser que está calculando pendientes, ¿no?...está calculando pendientes…
67. M: vamos a ver qué es eso de la tasa de variación media, bien abran su Dropbox…No su Dropbox, su archivo Geogebra….
68. M: háganlo en Geogebra y vamos hacer una práctica de eso, muy bien
69. M: vamos a graficar la siguiente función, grafiquen esta función en la entrada (escribe lo siguiente función en el pintarron), si, grafiquen esta función en la entrada de Geogebra

70. 

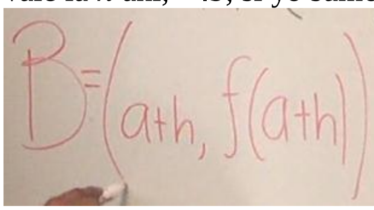
71. M: $f(x) = (x + 1)^2 + 1$, bueno tenemos la siguiente función, vamos a crear un deslizador, vamos a crear un deslizador qué va a ir desde -5 a 5 con incrementos de .1, de 0.1 (primera imagen) creamos un deslizador, sí déjenme, déjenme quitar la fijación para que yo lo pueda mover ahí está, tenemos este deslizador y lo vamos a llamar a , ahí viene una actividad que vamos hacer ahorita que va aparecer a…..de -5 a 5 se incrementó de 0.1 vamos a poner un punto un punto aquí dentro de la gráfica usando ese deslizador, recuerden estos comandos deben de recordarlo, vamos a llamar un punto A tal que la abscisa sea lo que valga la a, entonces en las abscisas voy a poner el parámetro a del deslizador este (escribe lo siguiente el pintarron, segunda imagen)

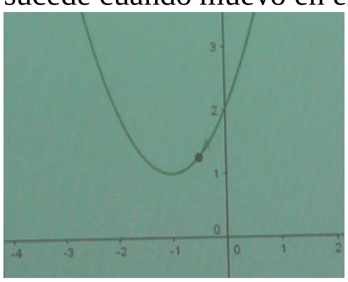
72. 

73. 

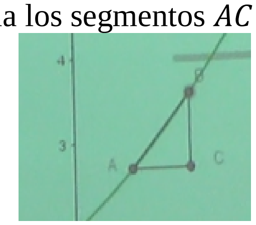
74. M: Su imagen quiero que esté dentro de la curva por eso tengo que ponerlo en función de su imagen $f(a)$, si, entonces evitemos ese punto y debe de aparecer en la gráfica y no debe salirse cuando mueva el deslizador lo puedo controlar
75. M: Vamos editarlo $A = (a, f(a))$, ahí tenemos el punto A este punto al mover con el deslizador lo puedo controlar yo lo puedo controlar desde aquí ya lo puedo mover por toda la curva, bien, en este caso desde dónde a dónde lo voy a mover desde -5 a 5, no puedo mover más no puedo ampliar, pero hasta ahorita lo vamos a manejar desde -5 a 5, vamos a crear otro deslizador a éste le vamos a llamar vamos a

llamarle h igual va a ser de -5 a 5 con incrementos de .1, le quitó la fijación para que yo lo pueda mover, muy bien, entonces, vamos a crear otro punto B antes de crear este punto B con ese deslizador vamos a crear un punto B tal que la imagen sea la abscisa sea $a + h$ y su imagen sea $f(a) + h$ antes de hacer esto…Noemi… alguien tiene idea de qué va a hacer en la gráfica esto

76. M: Este punto, ya conozco la a, Cuánto vale la a ahí, punto no lo ves $-.5$, cuánto vale la h ahí, $-.5$, si yo sumó esto (señala la siguiente imagen) que va a dar -1
77. 

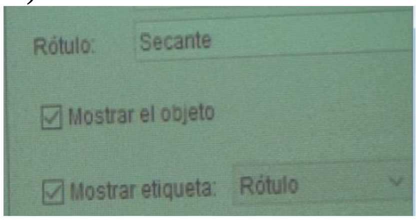
78. E: -1
79. M: -1 y su imagen pues tenía que ver la imagen de $a + b$, entonces es, la imagen de -1. cuánto sería la suma la imagen de -1 sería más o menos por acá(señala la siguiente imagen) recuerden la imagen es esto sería más o menos como 1, entonces es la abscisa la imagen lo que vale aquí -1 su altura donde toca la curva ahí va a estar eviten este punto(señala la siguiente imagen) y va a aparecer ahí y dígame qué sucede cuando muevo en el deslizadores
80. 
81. M: A ver cómo van… muy bien. si alguien se atrasa me dice por favor entonces ahí está, grafiquemos el punto $B = (a + h, f(a) + h)$ muy bien si yo muevo el punto A ¿qué pasa?
82. E: La distancia se hace más pequeña
83. M: Si yo muevo el punto h ¿qué hace? Ahí está vamos a ver, tenemos este punto, si yo muevo el deslizador a, si yo muevo este deslizador se va a mover el punto A, pero le sigue el punto B porque está por las variables, B está a una distancia h de a, es lo que está diciendo por eso cuando yo me muevo el punto A se mueve B, cuando h lo nuevo que pasa ¿alguien me puede decir? ¿qué pasa cuando h se hace grande?
84. E: Se aleja
85. M: Se aleja verdad, lo que es la distancia está marcando con A, ¿sí es pequeño que pasa? se acerca, sí, eso es lo que está haciendo el h ahí si mueve el a se van los dos juntitos, se van a agarrados de la mano, no es así, muy bien ok….
86. M: Vamos a trazar una recta perpendicular que pase por A perpendicular eje de x esta recta y esta recta hacemos un zoom, dos rectas perpendiculares que pasen por A y por B, si, dos rectas perpendiculares que pasen por A pero perpendicular al eje y que pasen por B perpendiculares al eje y y busquen este punto de intersección este

de acá deben de tener esos tres puntos así déjenlo no más vamos a formar un triángulo que se lo mostré en la clase de variación media

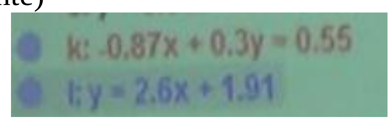
87. M: Muy bien, entonces, ya que tienen esto ocultemos la recta ya no nos sirven quería los puntos las ocultamos, y vamos a unir los segmentos AC, BC y AB, si, muy bien, hay que eliminar la basura la basura es éste esa letrillas que salen ahí vamos a quitarlas por el momento la letras; propiedades ya saben que es mostrar etiqueta y lo vamos quitando… muy bien, estamos ahí, muy bien…exacto ahí… ya sé mueve el triángulo pueden moverlo...el triángulo…es justamente…observen muévanle vean como se mueve el triángulo ok…..
88. M: muy bien el segmento AC ¿que observan con el segmento así AC? Esta es la pregunta:¿ que observan respecto al segmento AC y BC cuando h es muy pequeño, háganlo muy pequeño,¿ que observen con este con esto segmentos que le va a pasar cuando hagan muy pequeño h lo más pequeño que puedan? que no sea cero ni –1
89. M: Cada vez pequeño, háganlo pequeño y háganle un zoom hay ahí, este, dónde está el… háganlo muy pequeño que no sea cero, lo más que pueda y este… y hagan un zoom a ver qué les aparece acérquense lo más que pueden… que puedan ¿ahí que aparece?
90. E: Un triángulo bebé
91. M: Un triángulo bebé cada vez más pequeño el triángulo verdad, es más vamos a hacer lo siguiente cambien a h denle doble clic al deslizador que el incremento sea de .05, denle clic al deslizador
92. E: ¿a cuál?
93. M: A h que sea de .05, háganlo más pequeño todavía
94. E: .5
95. M: .05…aja… más pequeño que no sea cero más más ahí está ¿siguen viendo el mismo triángulo ahí?
96. E: Si
97. M: ¿y si lo hago infinitamente pequeño va a ver un triángulo?
98. E: Si
99. M: Sí verdad… entonces cuando h se hace cero esto sigue existiendo, ¿no? de alguna manera claro infinitamente pequeño se hace esta distancia y está distancia (señala los segmentos AC y CB)
100. 

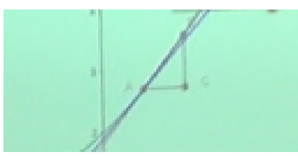
101. M: No es así… tracen el segmento AB este segmento AB no miento control z… mejor tracen, tracen la recta que pasa por A por B… recta, comando recta tracen que pasen por A y por B y pongan ahí un color, tracen esa recta…color, pónganle un color el que quieran que pasen por A y por B… ¿esa es secante o tangente?
102. E: Secante
103. M: Secante, verdad, si, muy bien vamos a darle doble clic a esta recta que pusieron como secante en propiedades vamos a ponerle secante, escriban en el rótulo secante y le dicen que muestre rótulo escríbanle a aquí el rótulo secante y

aquí les dice mostrar rótulo para que ya aparezca con ese nombre secante (realiza lo siguiente)

104. 

105. M: Ya les pusieron secante porque corta en dos puntos y ahí está aquí aparece… muy bien ya tenemos la secante vamos a trazar la tangente por el punto A aquí hay un comando que se llama tangente lo tenemos directo aquí está, en el cuarto icono un comando que se llama tangente seleccionamos el punto A y seleccionamos a la curva a la que debe ser tangente a la que tiene que ser tangente y va a aparecer este, cambien de color propiedades rotúlenlo como tangente, lo rotulan como tangente póngale un color, el color que usted guste… muy bien ahí está… todos están acá secante y tangente ahí están los dos candidatos a explorar ahora hagan la h cada vez pequeña y díganme qué pasa con esas dos rectas aquí están las dos rectas fíjense que puede ver aquí y visualmente pueden ver qué pasa cuando h se hace cada vez pequeño que pueden decirle esas dos rectas (señala lo siguiente)

106. 

107. 

108. E: Se van a pegar
109. M: Se van a pegar será la misma ¿quién se comporta como quién?
110. E: La secante se va acercando a la tangente
111. M: Sí Sofía como tú dices se pega… Héctor que dices qué pasa la secante cuando h es 0
112. E: Se queda la misma
113. M: ¿quién? a quien a quien se está comportando ¿cómo quien se comporta? como la tangente verdad estás de acuerdo Sinaí, Luis estás de acuerdo… cada vez que h se hace pequeño que le pasa, es más háganlo pequeño ahorita, háganlo pequeños... ya lo hicieron pequeño, por ejemplo yo lo voy a hacer lo más pequeño… lo más pequeño… ahí está, bueno esto es lo más pequeño que puedo .1 …ahí está, ahí está lo más pequeño para mí, si yo le hago un súper zoom, un súper zoom así en esta parte de aquí… ahí están pero no son iguales (señala lo siguiente)

114. 

115. M: Pero si nos acercamos al punto A si yo me acerco me estoy acercando todavía estoy haciendo más zoom ahí, ya no los puedo ver separados aunque… están separados o ¿no?

116. E: Si

117. M: Si, la prueba es ésta es la ecuación de la recta como habíamos dicho la roja era la recta tangente, no, secante, y la azul la recta tangente fíjense en sus pendientes, ¿qué pendiente tiene esta? (señala la ecuación azul)

118. 

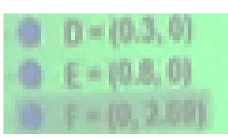
119. E: 2.6

120. M: Y la otra 0.27 casi igual…entonces cuando h es pequeño vamos hacer el teorema cuando h es cero, la secante se comporta como la tangente, se comporta, más no es la misma, son muy infinitesimalmente muy pequeñas, yo aquí no lo veo… van hacer lo mismo, cada vez que h tiende a ser cero ya no los veos son parejas, casados, enjaulados… no... bueno voy a regresar… no le puedo regresar ya le hice mega-zoom… muy bien… déjenme regresar hijos…

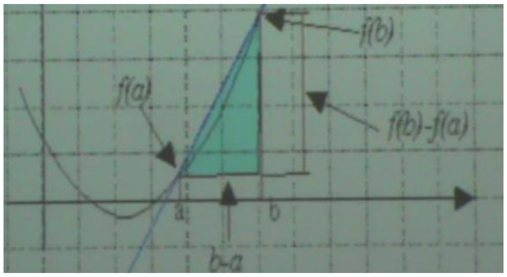
121. M: Ok, vamos a hacerlo lo siguiente, oculten en la secante y la tangente ocúltenlas y vamos a quedarnos con el triángulo vamos a dejarlo este archivo vamos a dejarlo, como les decía bonito precioso entonces…

122. M: vamos a hacer lo siguiente vamos a regresar con las rectas… regresamos con las rectas (primera imagen) y busquen este punto de intersección el de acá este, este, este y este ok (segunda imagen).

123. 

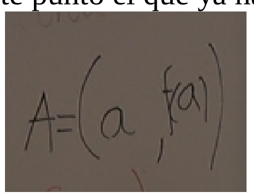
124. 

125. M: Busquen esos punto de intersección acuérdense tratemos de hacer la Ilustración tratemos de hacer esa ilustración (se refiere a la siguiente imagen)

126. 

127. M: Vamos a manejar estas simbologías $f(b), a, b, f(a), b-a$…Ok entonces este punto D sería la abscisa a, rotúlenlo, ya sabemos cómo rotular, este punto D vamos a llamarle la abscisa a y lo rotulamos, ya aparece aquí como a, si, rotulen todo este…este punto E vamos a rotularlo como b, decimos… rotulen, ya, ya apareció…a, b vamos a rotular como la ilustración de la tasa de variación media, la imagen de va a ser este punto está F esta distancia hasta aquí este punto F

128. M: Entonces los vamos a rotular cómo $f(a)$… y por último este punto de intersección qué va a hacer la $f(b)$ la altura de la imagen de b la rotulamos también como $f(b)$, Ok aquí está $a, b, f(a), f(b)$…este punto A ya habíamos dicho es $f(a)$, a es este punto el que ya habíamos escrito este de aquí (señala lo siguiente)

129. 

130. M: sí y este de aquí como lo habíamos escrito es $a+h$ este pedacito (señala la siguiente imagen) quién será…quién es este pedacito de aquí

131. 

132. E: h

133. M: Es la h es la que dice qué distancia estoy cuando yo me acerco esta distancia se hace pequeña verdad, esta es la h entonces este punto es $a+h$, $f(a)$ más (señala la siguiente imagen)

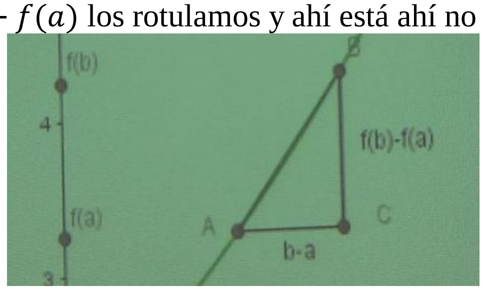
134. 

135. M: Pero vamos a manejar estos términos de la tasa de variación media vamos a regresar a esa fórmula ahorita vamos…. explicado hasta ahorita la tasa de variación media la única idea que les estoy dando… ¿qué es? es una fórmula ¿qué es el cálculo de qué?

136. E: Pendiente

137. M: Pendiente, es hasta ahorita lo estoy diciendo ahora lo que he visto cuando h es pequeño esa pendiente se parece a la pendiente de otra, no, la pendiente de la recta…. la secante se está comportando como la tangente cuando h es pequeño estoy dando ideas, todavía no he formalizado a eso se le llama la tasa de variación media la tasa de variación media está calculando pendiente ¿de la letra cuál? los puntos que cortan está calculando la pendiente de la secante si yo h lo hago pequeño sigue siendo secante muy cercano a la tangente… muy bien, entonces vamos a ocultar otra vez las rectas nada más quería esos puntos aquí están $f(a), f(b)$ ve esto se hace esto se hace +9 cada vez se hace más pequeño, muy bien

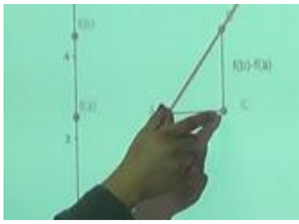
138. M: Esta distancia AC acuérdense que hicieron un segmento aquí lo tenemos puesto, cuando yo lo seleccionó se debe de iluminar cuando yo lo sé la selección este segmento se ilumina aquí, cuáles, se debe de iluminar, entonces, vamos a darle este segmento y le vamos a dar propiedades y le vamos rotular también como b menos a, qué es la distancia que hay en el segmento AC, lo rotulamos…hay no se ve… le doy rótulo… ahí está ya salió esta distancia de $b - a$, y esta altura es $f(b) - f(a)$ la resta de las alturas también vamos a rotular este segmento…cómo $f(b) - f(a)$ los rotulamos y ahí está ahí no se ve lo tienen (se refiere a lo siguiente)

139. 

140. E: Si

141. M: Si, entonces así debe de estar… muy bien…aparecemos la secante… y ahí la tenemos muy bien, vamos a calcular este la tasa de variación media, la tasa de variación media es un $f(b) - f(a)$, qué significa esto, qué vamos a calcular la pendiente que es ésta distancia(señala lo siguiente), esta distancia, dividido entre esta distancia(lo señala en las siguientes imágenes)

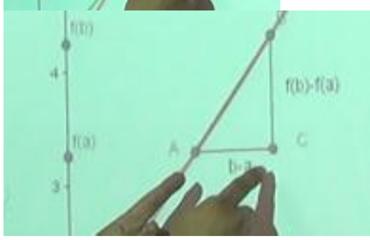
142. 

143. 

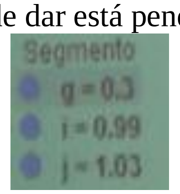
144.

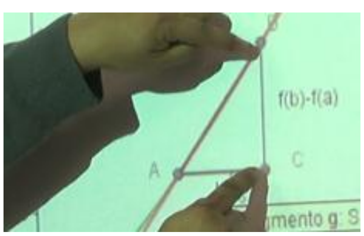
145. M: Esto es justamente la pendiente, no, lo que estamos haciendo aquí es calcular la distancia de las ordenadas que se está (señala la primer imagen) entre la distancia de las abscisas (señala la segunda imagen)

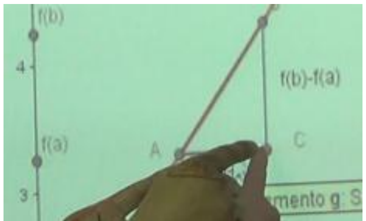
146. 

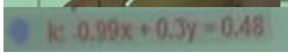
147. 

148. M: Esa es la pendiente, entonces, hagamos un cálculo en Geogebra y hagamos la pendiente aquí esa división, quién es este segmento este de aquí lo tienen alrededor de b, j, yo lo tengo aquí como i y el segmento $b - a$ si yo lo seleccionó lo tienen como g bueno yo lo tengo como g no sé ustedes qué letra pues ahí (se refiere a la primera imagen), hagamos la división de la pendiente para calcular esta distancia dividido entre esta distancia(segunda y tercer imagen) les debe de dar está pendiente 0.99(cuarta imagen)

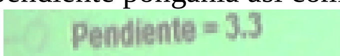
149. 

150. 

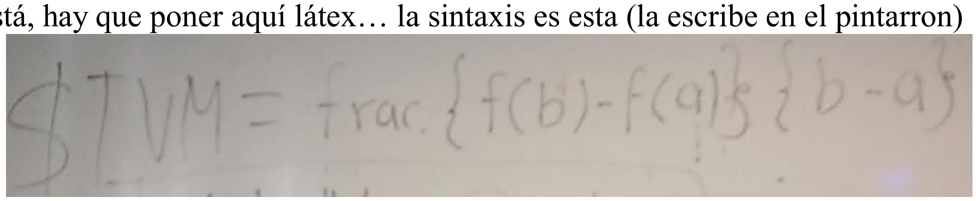
151. 

152. 

153. M: Qué es la pendiente de la secante hagamos el cálculo, vamos a llamarle pendiente es igual y pongamos el segmento este que en mi caso es la letra i dividido entre este segmento que es la letra g y aquí aparece, i entre g, ahí, si, Ok yo le puse como pendiente pónganla así como pendiente

154. 

155. M: Muy bien entonces vamos a escribir el texto vamos a dejar este archivo porque es el que vamos a usar la siguiente clase por eso deben de tenerlo de esta manera vamos a escribir la fórmula de la tasa de variación media (TVM), tasa de variación media (TVM) es igual, vamos a ver la fórmula en látex ¿saben usar látex? Ok pónganle un signo aquí de pesos, antes de la fórmula, ¿dónde está el signo de pesos? un signo de pesos a ver si me funciona igual una diagonal invertida, una diagonal invertida vamos a escribir $frac$, creo que no va a salir… no, déjenme ver si funciona el látex…Ok, Ah no cómo va a funcionar sí aquí tengo que poner látex, aquí está, hay que poner aquí látex… la sintaxis es esta (la escribe en el pintarron)

156. 

157. M: Hay que escribir ya debe de aparecer en fórmula látex vamos a ver $b-a$ …ahí está, le debe salir así más o menos como división… ahí muestra cómo aparece si logran ver, Diego, si estás muy lejos ahí está la fórmula está (se refiere a la imagen anterior) escríbela

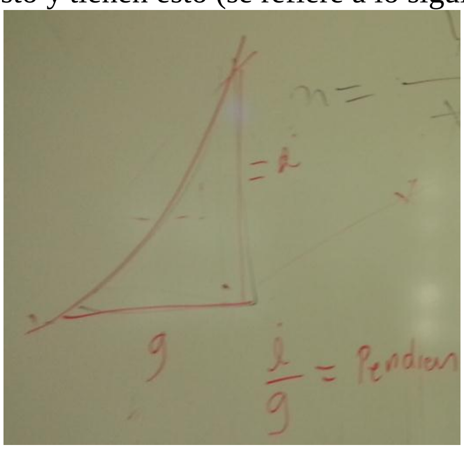
158. Nota: el profesor se acerca a un estudiante cuando tiene problemas de utilizar látex, ya que el docente le ayuda a escribir, ya que la alumno tuvo problemas con escribir la diagonal y el signos de peso

159. M: Muy bien ya tenemos esta fórmula de látex que es la que estamos buscando es la tasa de variación media vamos a poner igual sí…no hay son zoom no sé cómo hacerlo grande, vamos a poner esto igual a $f(b)-f(a)$, si, qué es el segmento a ver… que es este segmento qué letra tiene puesta este segmento en Geogebra busquen qué letra tiene puesta yo tengo puesta, se me fue la letra, la letra este…. i, no sé qué letra tengan puesta, entonces ahí van a poner ustedes i, vamos a poner $frac$, en objeto busquen esa letra, ahí está i, como objeto la tienen insertada como variable es una variable qué va a ir cambiando dividido entre este segmento $b-a$, yo aquí lo tengo puesto como la letra g lo inserto como objeto igual a la división que yo le llamé pendiente(se refiere a la primera imagen) les debe de aparecer esto(se refiere a la segunda imagen)

160. M=\frac(f(b)-f(a))(b-a)=i /g =Pendiente

161. $TVM = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.99/0.3 = 3.3$

162. M: Cada vez que yo mueva el h esto debe cambiar
163. E: Igual a pendiente
164. M: Yo le llamé pendiente la división no sé cómo le llamaron ustedes igual le llamaron pendiente, yo le llamé pendiente, pero no sé ustedes y le llamaron así, Ok, ahí va, este… no logran ver esto está muy chica la letra miren… tienen esto que en esto y tienen esto (se refiere a lo siguiente)

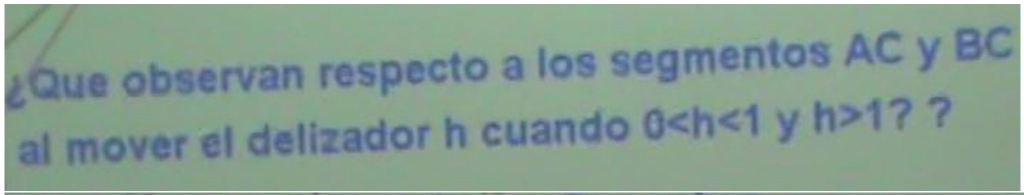
165. 

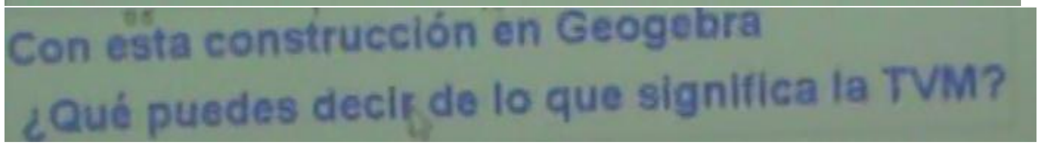
166. M: Sólo lo que hay que hacer en Geogebra esta distancia que letra tiene en Geogebra la mía tenía i y esta distancia en Geogebra tenía g y la división de i entre g yo le llamé pendiente lo que aparece ahí, entonces lo que van hacer, lo que van hacer después describir la tasa de variación media… lo que van hacer después de esto ponen un igual van a poner un i el segmento este cómo le llamaron ustedes como objeto busquen aquí la variable i dividido entre la variable g que es esta distancia igual a pendiente, yo le llamé pendiente no sé ustedes cómo le llamaron (señala lo siguiente)

167. $TVM=\frac(f(b)-f(a))(b-a)=i /g =Pendiente

168. Nota: el profesor se acerca a un estudiante que tuvo problema con utilizar la sintaxis de látex, además de los objetos que está utilizando de Geogebra y cómo usarlos en látex. Después pasa con otro estudiante que también tiene problemas con utilizar látex.

169. M: Está bien Sofi, a todos les dio así, bueno pues ahí está bueno la pregunta es (primera imagen)… y me responde allí mismo no me la tienen que decir ya lo habíamos platicado…ahí está la pregunta respóndanla ahí mismo…ahorita lo hago más grande…no se ve ahí está lo ven… muy bien una pregunta más(segunda imagen) y ya vamos a ver…respóndala ya

170. 

171. 

172. M: Ya lo voy a guardar como…guarden el archivo así, TVM_Sesión1, súbanla al Drop, así lo van a guardar suban a su carpeta… la próxima clase vamos a ver que escribieron de respuesta y seguimos con esta idea de tasa de variación media… alguien tiene dudas…lo que vimos aquí cómo consideran estas preguntas qué es para ustedes ahorita con este rollo de Geogebra, lo va viendo que es una tasa de variación lo que les venga, bueno Maricruz todo bien más o menos cómo vas… Luis, Sinaí, Juan, Carlos, Diego, Juan Manuel, Héctor, Sofi….ya nos vamos, ya estuvo Sofía, Noemí todo bien, Esther, Pacheco, Marilú, muy bien respondan eso y suban al Drop…el archivo ya saben cómo guardarlo…en la carpeta de cálculo ahí se guarda, ¿se pudo Sofía?

173. E: ¿lo de la formula?

174. M: Lo de látex

175. E: No

176. M: No entiendo, porque, si este,

177. E: Lo que quería primero era poner esto y no

178. M: ¿y lo realizaste así?

179. E: No

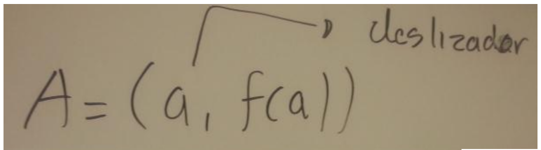
180. M: Pues está bien, por el signo de pesos, igual, $frac$, llave, cierra, no lo hace, no sé no lo tiene instalada, está bien, ¿tienes en tu casa Geogebra?

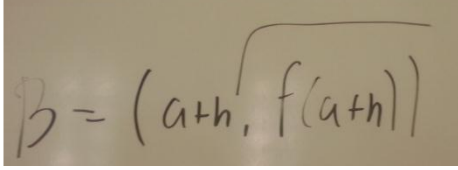
181. E: Si

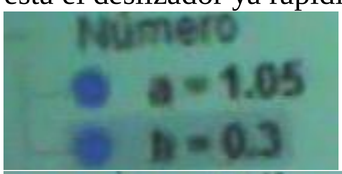
182. M: Ahí está, vuélvelo hacer ahí….bueno es todo por hoy nos vemos el viernes a las 10:30 en punto

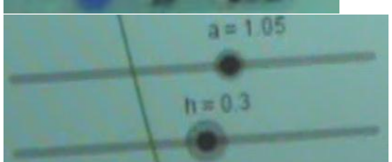
Transcripción de la clase del día 04/03/2016

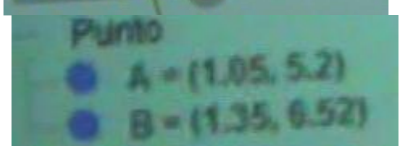
1. M: Bueno muy bien vamos a empezar no hay internet no sé qué hacer me van a grabar estoy en líos, ok bueno vamos hacerlo rápido vamos a volverlo hacer, no sé si tienen el archivo guardado en su computadora el último
2. E: No, se borra
3. M: Bueno rápido escribamos la ecuación, abran el Geogebra, abran en el Geogebra, vamos escribir la ecuación $f(x) = (x + 1)^2 + 1$, escriban esa palabra $(x + 1)^2 + 1$, vamos a empezar rápidamente vamos a poner los puntos A y B se acuerdan, otra vez, vamos a poner los puntos A y B otra vez el punto A ya habíamos dicho es $(a, f(a))$ acuérdense que tienen qué crear un deslizador para el punto A(escribe lo primera siguiente), y un punto B que va a hacer $(a + h, f(a + h)$(se refiere a la segunda imagen) para h hay que crear otro deslizador

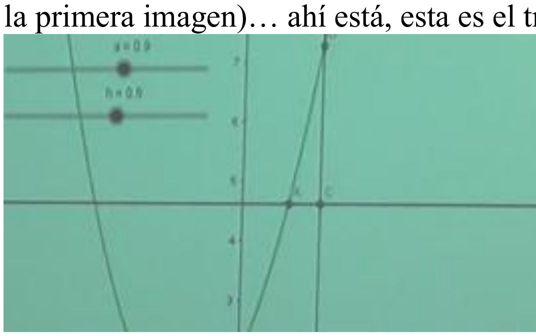
4. 

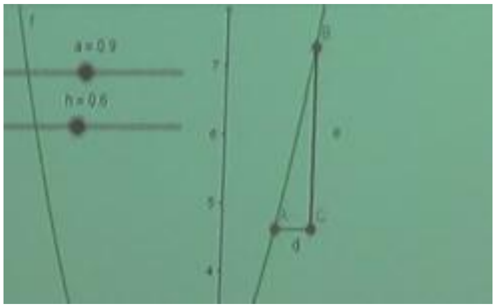
5. 

6. M: No tenemos internet no pueden acceder a ese archivo
7. E: no puedo entrar a computadora
8. M: Con Mariano, ha estado fallando a algunos, también la otra clase fallo, pregúntale a Mariano lo soluciono… tu contraseña no sirve
9. E: No si le ponga bien
10. M: Pregúntale a Mariano
11. E: Él ya sabe
12. M: Bueno, A igual a…. pongan esos puntos A y B… $A = (a, f(a))$ tenemos el deslizador…ahí está y el punto $B = (a + h, f(a + h))$ eso debe ser acuérdense ahí está el deslizador ya rapidito eso (se refiere a la siguiente imagen)
13. 

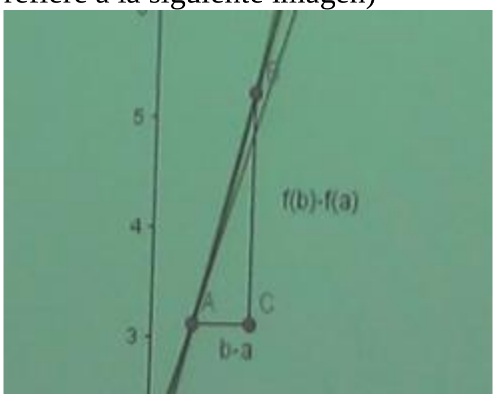
14. 

15. 

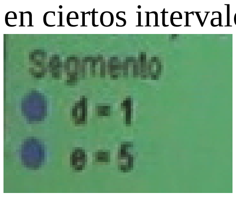
16. M: Tu si lo tienes, ¿quién más lo tiene? el que no lo tiene va a tener que hacerlo así rápido, ok muy bien, algunos ya lo tienen vamos hacer lo siguiente miren… déjenme poner los segmentos rápidamente los que no lo tienen vamos a tener que hacer esta parte perpendiculares por acá rapidito perpendiculares por acá(se refiere a la primera imagen)… punto de intersección hay que buscar el triangulito(se refiere a la primera imagen)… ahí está, esta es el triangulito (se refiere a la segunda imagen)
17. 

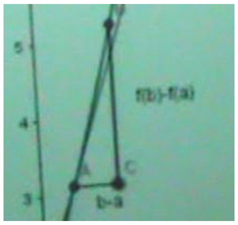
18. 

19. M: Esta d es $b-a$, y esta es $f(b)-f(a)$ (se refiere a la siguiente imagen), ok, bueno ahí está muy bien listo se traza una recta tangente… y la recta secante (se refiere a la siguiente imagen)

20. 

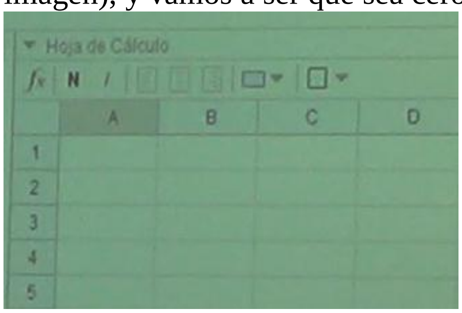
21. M: ok bueno algo así debemos tener estamos viendo el teorema de tasa de variación media, bueno vamos hacer lo siguiente aquí lo que vamos a estudiar es cómo se comporta esta función cuadrática, cuando hacemos la tasa de variación media, es, vamos a analizar cómo se comporta, esto tiene que ver más adelante, lo van a ver qué es la tasa de variación diferencial que es la derivada, pero vamos a analizar esa función en unos puntos, si, vamos hacer lo siguiente, todos estamos hasta aquí o espero un minuto, si no tienen ese archivo porque ahorita vamos a usar Excel
22. E: es lo mismo que hicimos la vez pasada
23. M: fue lo que hicimos la vez pasada, si ya lo tienen etiqueten todo, pero como no hay internet… esté, muy bien, ok… ocultar esto ok, este segmento lo deben tener ustedes ahí etiquetado, en mi caso es $b-a$ pero es la letra d, es la variable d del segmento éste(se refiere a l segmento $b-a$), está distancia, y está distancia la tengo etiquetada como e (se refiere al segmento $f(b)-f(a)$) vean bien esas dos variables, este segmento que es la distancia con respecto a x yo lo tengo aquí etiquetado como d y éste lo tengo etiquetado como e como variable e, son las variables que estamos que vamos a usar vamos a ver cómo se comporta esta función en ciertos intervalos

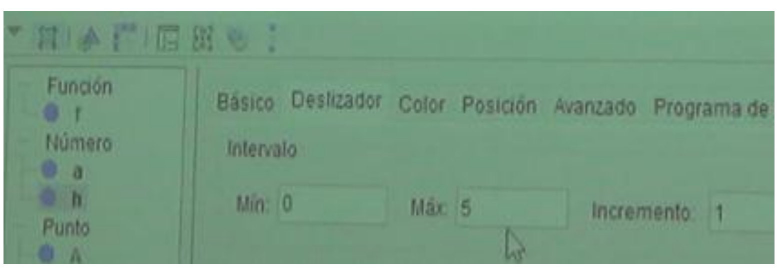
24. 

25. 

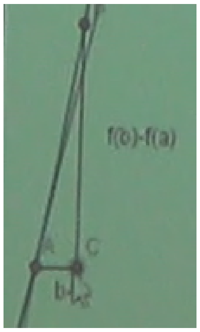
26. M: Vamos hacer lo siguiente en vista, abran la hoja de cálculo (primera imagen) tendrán que mostrar esta parte, ok…

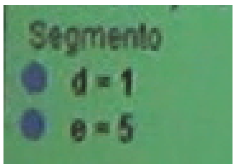
27. M: Recuerden que el deslizador a mueve el punto, y h se va haciendo más pequeño se va acercando más a a o se va alejando, no, es lo que hace h, denle doble clic a h, vamos a darle doble clic al deslizador, vamos a poner qué sea con incrementos de 1, a ese deslizador h póngale incrementos de 1, sí, y lo vamos a dejar en cero… es más vamos hacer lo siguiente doble clic sobre el deslizador que sea de 0 a 5 como mínimo 0 y que llegue a máximo de 5 con incrementos de 1(se refiere a la segunda imagen), y vamos a ser que sea cero, sí

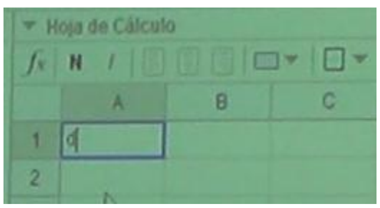
28. 

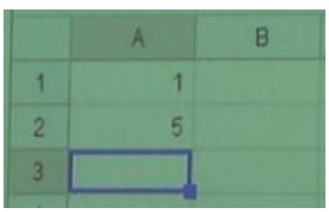
29. 

30. M: Que h valga cero al valor de a vamos a posicionarlo en cuando sea 1, también le vamos a dar doble clic al deslizador a que sea de 0 a 5, con incrementos también de 1, si, ahí está, los dejamos los dos en cero muy bien…ok, vamos a ver cómo se comporta esa función en ciertos intervalos, ok, vamos hacer que h valga 1, 2, 3, 4 hasta 5, no, desde cero, pero vamos a dejarlo así, ok, en la hoja de cálculo vamos a poner qué variable tiene el segmento…bueno voy a mover un poquito este… qué variable tiene este segmento, es importante, este de aquí (primera imagen) qué variable tiene, el mío tiene la letra la d, yo le pongo aquí en la hoja de cálculo la letra d(tercera imagen), ya me sale valor de lo que vale en este caso vale 1, y este segmento qué es la altura con respecto al eje y, yo tengo la variable e y le pongo aquí la letra e le doy entre y me pone 5(cuarta imagen), lo que vale, una distancia de 5 aquí(señala el segmento $b - a$), y una distancia de 1

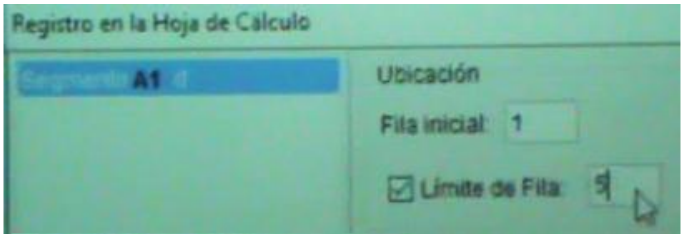
31. 

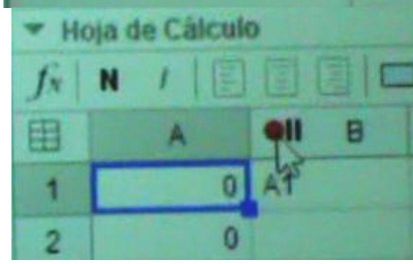
32. 

33. 

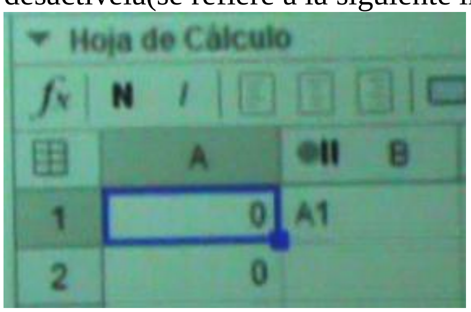
34. 

35. E: ¿El uno de dónde salió profe?
36. M: El uno sale de buscar esta distancia
37. E: De AC
38. M: De AC que lo tienes que tener identificado este segmento cómo segmento, no sé qué letra tenga en tu caso, en mi caso en la letra d la pongo y aparece el valor de la distancia de que yo tengo la e la pongo y me parece lo que vale, vale 5 acá 5, ok, una vez que tengamos esto regresemos los deslizadores a 0 es importante que pongamos en 0 para estudiar su comportamiento, es muy importante dejarlos en cero, y en este qué es la distancia con respecto al eje x le van a dar botón derecho, y hay una opción que se llama registro de hoja de cálculo, le dan ahí y aparece esta ventana, sí, denle ahí límite de filas, vamos a decir y que sean hasta 5, que pongas 5 datos, más 5 filas (primera imagen) y le damos cierre, debe aparecer una bonita roja aquí(segunda imagen)

39. 

40. 

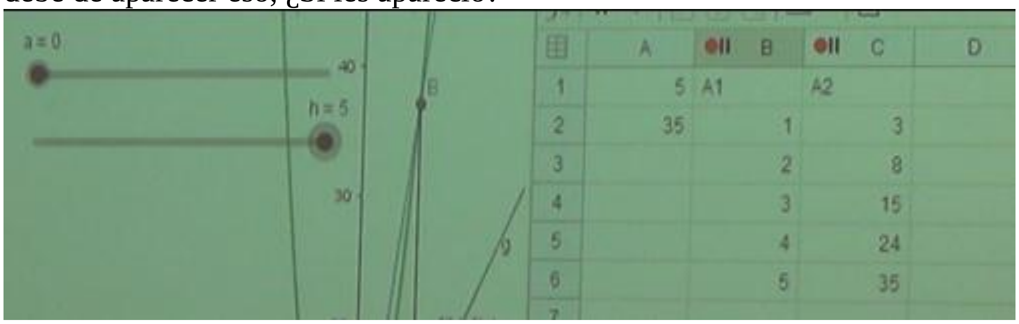
41. E: sí
42. M: Denle pausa, desactívenla, que no aparezca, nos vamos con la siguiente a variable que es la distancia verticales y le damos botón derecho y otra vez registro en la hoja de cálculo, volvemos a darle como límite 5 filas nada más y cerramos, desactívela(se refiere a la siguiente imagen), ok, muy bien

43. 

44. M: Ya tenemos eso todos Maricruz,
45. E: No puedo entrar
46. M: No puedes entrar, chispas, ¿quién tiene dudas? Sofía muy bien antes de empezar
47. **Nota: El profesor se le acerca a una estudiante porque tiene problemas con las variables asignadas a los segmentos AC y CB y con la hoja de cálculo le vuelve a repetir lo pasos rápidos, se acerca a otro estudiante y verifica que va bien en la práctica.**
48. M: Pongan todo a y h en cero muy bien, sí algunos ya movieron ya pusieron cosas ya pusieron datos por aquí ya hicieron antes de empezar ya se me adelantaron, para borrar todo selecciona la letra y le dan del para qué borren los datos, ya pusieron algunos datos todavía, no, por eso le puse que desactiven esto para que no… porque si yo muevo esto no pasa nada, si los tengo desactivado, si lo activo si pasa, pero para borrar esto aquí selecciona aquí y le damos del, y lo borra, sí, desactívenlo, todavía quedamos en cero, vamos a estudiar cómo se comporta si estamos todos ahí antes de empezar en cero, cero, muy bien, la tarea es que h lo vamos a ir variando, el deslizador h lo vamos a ir variando de 1 hasta 5, ósea con la flechita vayan moviendo eso, pero hay que activar, vamos a activar ahora las celdas le damos clic

acá, tiene el valor 0 ya vieron porque, porque está en cero (se refiere a la siguiente imagen), vayan moviendo después con la flecha el teclado

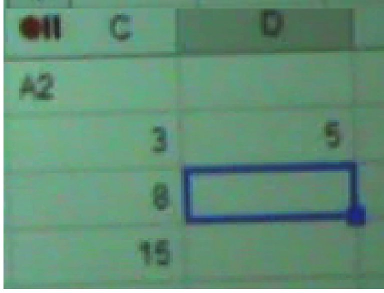
49. 

50. M: hacia, hacia delante tienen que seleccionar esto el deslizador, 1, 2 3 4 y 5, si
51. E: ¿Que movemos?
52. M: La flecha de teclado, selecciona el deslizador y lo vas moviendo con la fecha para ir avanzando de uno en uno, y se debe de registrar los valores que toma este este segmento, fue 1, 2 después fue 3 y las alturas cuáles fueron 3,8, 15, 24 y 35, debe de aparecer eso, ¿Si les apareció?
53. 

54. E: Si
55. M: ¿Diego? muy bien, ok, que pasa cuando avanza cada vez 1, cuando h avanza cada vez 1, ósea cuando avanza se aleja del punto B, aquí estamos viendo cómo se comporta la distancias en esta parte cuando van aumentado ¿de cuánto en cuánto lo ven hay en la tabla?
56. E: De uno en uno
57. M: De uno en uno, h lo hemos definido así, sus alturas ¿cómo van aumentando 3, de 3 pasó a 8?
58. E: 5
59. M: De 8 paso a 15 ¿cuánto fue?
60. E: De 7
61. M: Aumento, de 15 a paso a 24
62. E: 9
63. M: sigue aumentando, y de 24 a 35 pasó a..
64. E: 11
65. M: 11, sigue aumentando para esta función, cada vez que avanzó 1 va creciendo, cada vez más rápido vamos a ver sus variaciones, aquí vamos a darle igual y vamos a ver cuánto avanza, vamos a restar la celda como en Excel las celdas C3 menos la anterior la celda C2, vamos hacer esas rectas como en Excel vamos a poner $C3 - C2$ y me da la variación

66. 

	A	B	C	D
1	5	A1	A2	
2	35	1	3	=c3-c2
3		2	8	
4		3	15	
5		4	24	
6		5	35	

67. 

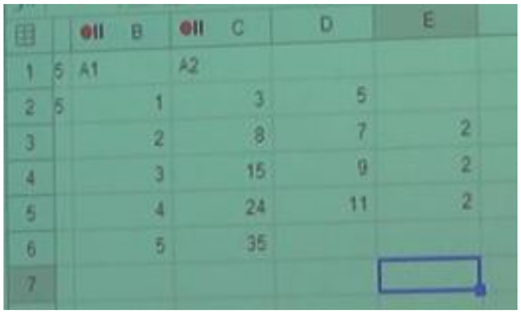
C	D
A2	
3	5
8	
15	

68. M: Ósea avanzó 5, ya con esta sólo arrastró lo arrastró y me da las otras variaciones avanzó 5, después avanzó 7, después avanzó 9, después avanzó 11, que me está diciendo en esta curva lo único que me está diciendo que cada vez que avanza qué le pasa va incrementándose cada vez más, ósea que incrementó 5, se incremento en 7, se incrementó de 9, se incrementó en 11(se ve en la siguiente imagen), si vuelvo a sacar otra variación que va a dar van hacer una resta de este con este que va a dar(se refiere a la resta de 7 y 5)

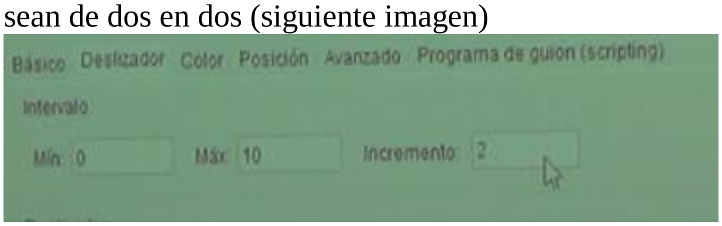
69. 

	A	B	C	D
1	5	A1	A2	
2	35	1	3	5
3		2	8	7
4		3	15	9
5		4	24	11
6		5	35	

70. E: 2
71. M: la siguiente
72. E: 0
73. M: No, de aquí pasó a 7 ¿cuánto aumentó?
74. E: 2
75. M: De aquí a paso a 9 ¿cuánto aumento?
76. E: 2
77. M: De aquí pasó a 11 ¿cuánto aumentó?
78. E: 2
79. M: Entonces la variación ahí siempre es la misma, hagámosla comprobemos en Excel, vamos hacer esta resta va a ser la celda C3 menos C2 y la arrastramos (el resultado aparece en la siguiente imagen)… siempre aumento en 2 y si vuelvo a hacer otra resta ¿qué va a dar?

80. 

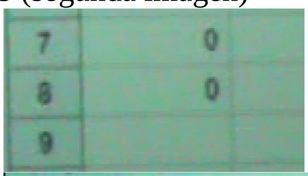
	A	B	C	D	E
1	5	A1	A2		
2	5	1	3	5	
3		2	8	7	2
4		3	15	9	2
5		4	24	11	2
6		5	35		
7					

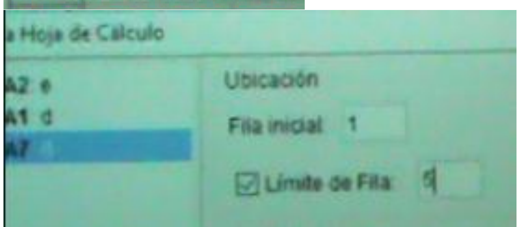
81. E: cero
82. M: cero verdad, porque… tiene algún algo similar no sé cómo decirles, porque en la segunda variación en la segunda restas dio puro números constantes ¿Por qué? tienen alguna idea
83. E: Por la parábola
84. M: Porque es una parábola, qué tiene que ser una parábola
85. E: Que es cuadrática
86. M: Que es cuadrática por lo tanto ¿a las cuadráticas les pasará eso?… si derivo una cuadrática la primera derivada de x^2 ¿cuál es? la primera derivada de x^2 ¿cuál es?
87. E: $2x$
88. M: $2x$ la segunda derivada, vuelven a derivar ¿qué te da?
89. E: 2
90. M: 2¿Cuántas derivadas hiciste?
91. E: 2
92. M: 2 llegaste a un…. vuelve a derivar ¿qué te da?
93. E: 0
94. M: 0, primera derivada ¿cuál es? una variación, una resta, segunda derivada ¿qué te da? una constante, tercera derivada 0, la cuadrática tiene 2 variaciones, por eso da constante, en una cuadrática al derivar esto es el análisis numérico cuando llegué a una constante podemos entender que curva es…. ah es una cuadrática porque tiene dos variaciones si fuera una cúbica hasta qué valores llegarás la constante cuantas variaciones haremos… si fuera una cúbica cuántas variaciones haremos cuántas restas haremos para que llegamos a una constante, si, hablen, se entienden esa idea…muy bien…
95. M: vamos a hacer lo siguiente, vamos a cambiar, desactiven las celdas, desactívenlas está y está para que no se perjudique desactívela (se refiere a que tiene que desaparecer el punto rojo), vamos a ponerlas hasta cero la h, pero esta vez vamos hacer lo siguiente, que sus incrementos sean de 0 a 10 y que sus incremento sean de dos en dos (siguiente imagen)
96. 

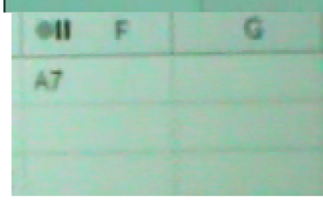
97. E: ¿Del h?
98. M: Del h de 0 a 10 y que se incrementó sea de dos en dos si, muy bien, ya todos acá

99. E: la h

100. M: La h de 0 a 10 y sus incrementos de 2 en 2, vamos a volver a darle clic a esta variable que habíamos puesto acá y le vamos a decir otra vez registro de hoja de cálculo, bueno, vamos a ponerla aquí, vuelven a ponerlo aquí, aquí abajito la variable que tenían puesto como la distancia en el eje x lo que yo lo tenía puesto como d y la distancia en el eje y cómo e(primera imagen), vuelvan hacer en esta parte, lo que hicimos acá, lo vuelven hacer y otra vez ponemos registro de hoja de cálculo para que aparezca este lado si, y como filas otra vez le vamos a decir que ponga 5 (segunda imagen)

101. 

102. 

103. 

104. E: profe yo no puedo

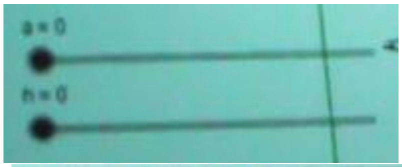
105. M: si, hay que poner otra vez aquí, las variables, esta variable acuérdense es la misma que está, no hay que volver a ponerla aquí, para que aparezcan aquí en esta fila, por eso hay que hacerlo así de nuevo, quien ya pudo hacerlo

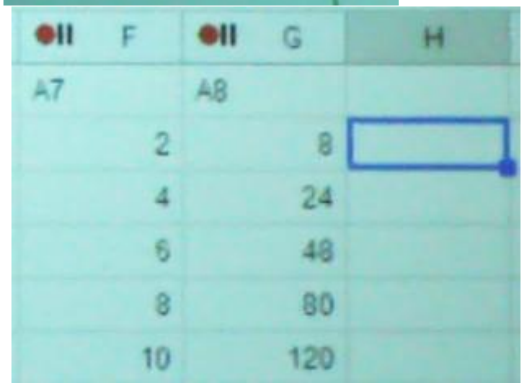
106. E: profe ¿El limite de fila 5?

107. M: Si, 5 el límite de fila

108. Nota: el docente se acerca revisar los avances de los alumnos.

109. M: Vuelvan a poner las variables el límites de filas 5,ok, una vez que tengamos esto otra vez volvemos a poner, pongan aquí registro de hoja de cálculo y número de fila 5, seleccionan a otra variable y otra vez registro de hoja de cálculo te la pongo por aquí juntito, y límites de filas 5… desactivó para que no me pase nada, muy bien, deben de tener a cero y h cero (se refiere a los deslizadores a y h igual a cero, primera imagen) antes de pensar empezar, cuando vayamos a empezar, actívenlas, ahora sí las activos y voy a mover mis deslizador de uno en uno, bueno de dos en dos mejor dicho, 2,4, 6, 8 y 10 (segunda imagen) para que me registren datos aquí le tenemos la distancia en x y la distancia en y…es muy fácil ver que la variación en x va de dos en dos, esto porque lo decidimos en el deslizador 2, 4, pero aquí vamos a hacer las variaciones calcúlenla de 8 pasó a 24, de 24 paso a 48 (segunda imagen), y así calcúlenla en Excel con una resta, voy a restar esta celda menos ésta celda y después arrastró para ver las demás, sí, calculen esa resta

110. 

111. 

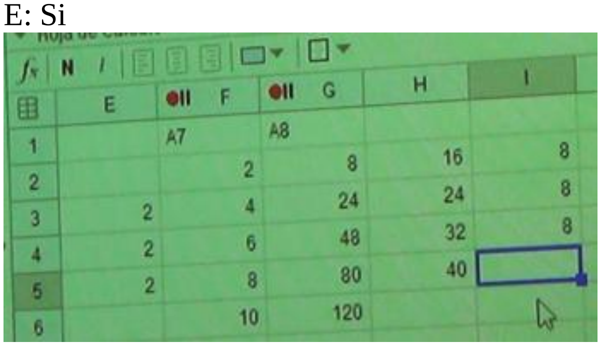
F	G	H
A7	A8	
2	8	
4	24	
6	48	
8	80	
10	120	

112. M: Hay que hacer las restas dos rectas tienen que llegar a la constante, tienen que llegar a la constante

113. Nota: el docente sigue pasando a revisar los avances de los alumnos para que no se tracen en la actividad y encasillar al mismo ritmo de sus demás compañeros

114. M: Si sale un signo de interrogación es que no tiene con quién restar, ok ya, ya sacaron las versiones variaciones, muy bien este, igual a $G3 - G2$ déjenme lo hago, ahí está 16 así les tienen que dar, ¿así si les dio?

115. E: Si

116. 

	E	F	G	H	I
1		A7	A8		
2		2	8	16	8
3	2	4	24	24	8
4	2	6	48	32	8
5	2	8	80	40	
6		10	120		

117. M: Otra vez la variación de $H3 - H2$ esta variación debe ser constante, ahí está, aquí sale el signo de interrogación porque no hay con quien resta, este con este me da este con este me da este y éste con este me da este, la segunda variación debe de ser constante porque es una cuadrática, sí, qué diferencia ven ustedes de la anterior a ésta como crecía esta función el otro avanzaba de uno en uno y ahora esta avanzó de dos en dos, si tienen estos datos vean cómo avanzaba esta avanzó 3, 8, 15, cuando avanzo de uno en uno y esta son sus variaciones, su variación son estas, y está de acá avanzó 8, 24, 48, 80 y 120 qué pueden decir de eso, a ver… este es uno que ponerlo y este es otro verdad… esta son sus variaciones de una(primera imagen de color amarillo), y estás son sus variaciones de otra(segunda imagen de color verde)

118.

A1	A2		
1	3	5	
2	8	7	2
3	15	9	2
4	24	11	2
5	35		

119.

A7	A8		
2	8	16	8
4	24	24	8
6	48	32	8
8	80	40	
10	120		

120. M: Qué pueden decir le voy a pregunta a alguien chéquenlo…chequen eso, obsérvenselo, analícenlo, cuando iba de uno en uno es amarillo cuando iba de 2 en 2 es el verde, ¿por qué me da una constante diferente? ¿por qué me da 2 y 8?, sí dime por qué crees Luis

121. E: no sé

122. M: Analícelo Noemí porque crees

123. E: no sé maestro

124. M: Como no sabes, fíjate ahí cuando varía uno

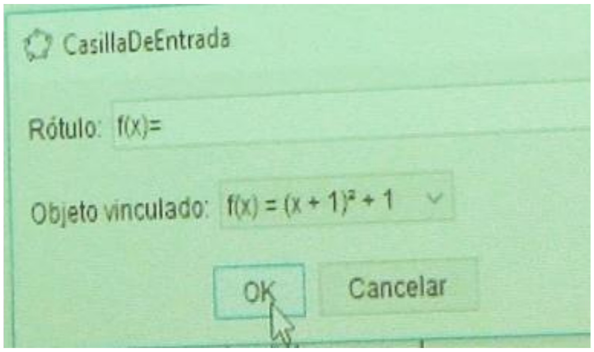
125. E: No tiene que ver con él con el incremento que le pusimos al deslizador

126. M: Tiene que ver verdad, de alguna manera si, mientras más alejo que le pasa a las alturas qué, les pasa a las alturas mientras más avanza mientras más amplio sea qué pasa, estamos analizando esta curva, mientras más me alejo ¿qué pasa la curva?

127. E: Crece exponencialmente

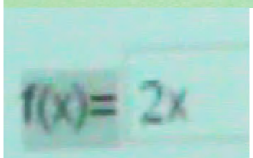
128. M: crece no, si es más pequeño pues también crece ¿sí o no? …sigue creciendo, pero si el intervalo es más amplio también sigue creciendo, pero ¿crecen iguales?, no, la idea es que se fijen que no crecen iguales porque es 2 y 8 la variación es más grande aquí (se refiere a la parte verde de la tabla anterior), porque mientras más te alejas más crece la curva, mientras más crece el intervalo pues sí crece pero no tanto, si, esa es la moraleja, sí Noemí jejeje…sí Sofía, Manuel, a ver hagan esto ustedes a ver si es cierto, esto es ya la tarea quiero que estudien y me expliquen,

129. M: pongan esto para que no pongan otra función aquí hay una opción que se llama y ya hemos usado *casilla de entrada*, si, y la ponemos, en el *rótulo* póngale $f(x) =$ y el *objeto vinculado* va a hacer la función que había puesto $f(x)$(se refiere a la siguiente imagen)

130. 

131. M: Van a cambiar esta función de curva a la muy básica x, van a poner la función identidad bueno vamos a poner 2x la 2x, ahí está, ya, si

132. 

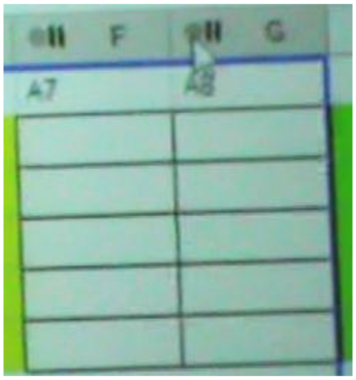
133. 

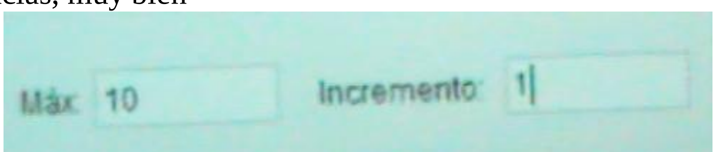
134. M: Ya que la pongan, vamos a tener que borrar todo esto, o lo guardan mejor, lo pueden guardar en un archivo ahí aparte, el anterior lo puede lo pueden guardar este archivo en otro diferente guárdelo en su computadora

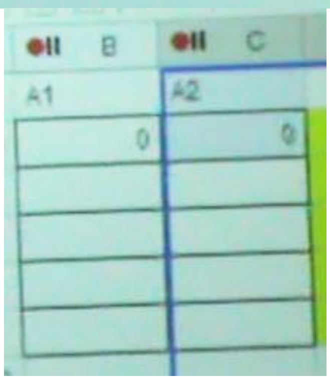
135. E: Es que está tiene carpeta temporal y se borra

136. M: Entonces no, bueno vamos en distinto lugar para que hagan el análisis, el hecho de eliminar objetos, para eliminar esto así, no tienen que eliminar esto, simplemente desactiven(se refería a la bolita roja, segunda imagen), así debe de estar no tienen que eliminar nada(primera imagen), ya está todo listo ya están todas las variables ahí

137. 

138. 

139. E: Eliminar objetos nada más
140. M: No, sólo eliminar los valores de la celda, lo seleccionan le doy botón derecho eliminar ya está todo diseñado para utilizarlo no tiene que borrar nada entonces acuérdense desactiven antes de empezar desactiven… desactiven todo, todas las bolitas que le puse desactívenlo y vamos a poner otra vez $h = 0,$ lo vamos a hacer los incrementos de uno en uno, cómo vamos hacer los incrementos de uno en uno, hay que decirle que sea de uno en uno en el deslizador, hay que decirle que sea de uno en uno (primera imagen), entonces ya que lo hagamos me pongo yo aquí activo estas celdas (segunda imagen) y muévalo y registren las diferencias eso sí hay que hacerlo hay que calcularlo porque eso ya lo borre, muévanlo y también hagan el de dos en dos acuérdense que cuando ya lo registren desactiven las bolitas porque después lo mueven y se parecen otra cosa y hagan las diferencias, muy bien
141. 

142. 

143. E: ¿El incremento de cuanto tiene que ser?
144. M: El primero es de uno en uno y el otro es de dos en dos, vamos a ver
145. Nota: el docente se acerca ayudarle a un estudiante que no fue la clase pasada, de tal manera que se ponga al corriente con la clase y comprenda que se está estudiando en la clase. También se acerca a un estudiante a orientarlo con la actividad que se está realizando para que no se confunda y no atrase.
146. M: Muy bien, ya analizaron la recta, ya analizaron la recta, a ver cómo van…

147. Nota: se acerca a otros tres estudiantes para ver cómo va realizando la práctica y apoyarlo.

148. M: Hay que ser uno en uno y dos en dos, ya, que les dio en la primera variación ¿qué pasó? en la primera variación en la primera resta ¿qué sucedió con esa función? ¿qué les dio? ¿un valor se repite siempre? la primera variación la primera resta que hicieron, sí ¿cuánto varía?

149. E: 2

150. M: a todos les dio 2

151. E: Si

152. M: La derivada de recta ¿cuál es? la primera derivada una recta ¿cuál es?

153. E: La constante

154. M: La constante, por eso cuando la primera resta lo hace les da una constante, si lo vuelvo a derivar ¿qué pasa a la recta?, 0, si vuelvo hacer una resta más ¿qué va a dar?

155. E: 0

156. M: 0, es el análisis numérico de la variación lo que está haciendo la tasa de variación media, analizar qué tanto varía esa función y esa función varía, en este caso, la primera variación siempre da una constante, en el caso cuando aumenta 1 cuando aumenta dos, son diferentes variaciones en una dio 2 y una dio 4 así les dio a todos

157. E: Si

158. M: Que significa eso que mientras más separados estén ¿qué pasa, más rápido que?

159. E: Crece

160. M: Crece verdad, pero siempre va a ser la segunda variación de una recta siempre va a ser 0, la derivada una recta dos veces siempre va a ser 0 la derivada ahí fíjense son restas son restas lo que hacen talachudamente eso que hacen es esto, ósea, es ver cómo se comporta una función, cómo varía una función, cómo crece una función verdad

161. Nota: se acerca a una alumna que tiene una duda.

162. M: Cambien no tienen que poner nada, cambien a una cubica, vamos rápido cambien a una cúbica rápido

163. E: ¿Con los datos que teníamos?

164. M: Sólo pangan datos en el Excel y ahí donde está la ficha de casilla sólo ponga la curva

165. E: ¿La variable x^3?

166. M: Si la cúbica

167. Nota: el profesor le sigue ayudando a los alumnos que van atrasados para que no se atrasen y vayan avanzándole a tema de la derivada.

168. E: profe ¿incremento de cuánto?

169. M: Que Esther

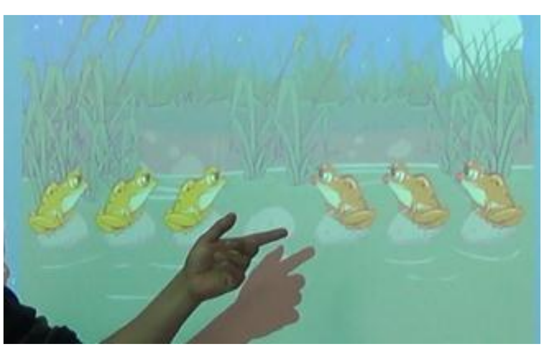
170. E: ¿Incremento de cuánto?

171. M: De 1 y 2 ahí están puestas las tablas ya, primero hay que cambiar a h en 1 y después en dos

172. Nota: el profesor le ayuda a una alumna que tiene problemas con la nueva actividad que le ha puesto, es decir sacar la variación para una función cubica.

173. M: Muy bien…no tenemos Dropbox pero guárdenlo en su computadora como tasa de variación media… en la cúbica tienen que llegar a la constante ¿cuántas restas son?
174. E: 3
175. M: 3 verdad, aguas tienen que llegar a la constante, todos llegaron a la constante, si no dan las filas inserten una columna más… hay que inserta una columna más porque si no, no alcanza la resta…bueno guárdenlo como tasa de variación media
176. E: Lo subimos al Dropbox profe
177. M: No hay internet, no
178. E: yo sí tengo
179. M: Ya llegó súbanlo,
180. E: ¿Los tres?
181. M: Pues la verdad es que lo cambiamos, ese es el archivo ultimo con el que se quedaron, acuérdense era la cubica, la cuadrática, el ultimo, con la última que se quedaron…bueno terminamos

Transcripción de la clase del día 07/03/2016

1. M: Abram el Google, háganme caso no es broma… pongan por allá… ranas saltarina, así como lo oyen,
2. E: ¿Cómo?
3. M: Ranas saltarinas, búsquenlo
4. E: ¿Es un juego profe?
5. M: Si es un juego
6. E: ah, esta difícil
7. M: Ranas saltarinas, ¿ya la encontraron?
8. E: Ya
9. M: Resuélvanlo tienen que pasar las ranas al otro lado, las cafés y verdes, dígame ¿cuántos movimientos tienen que hacer para hacerlo?
10. E: Lo buscamos así
11. M: Si ranas saltarinas… a ver si lo abro acá, ya lo tenía abierto, ahí está,
12. E: Entonces cómo lo buscó
13. M: Pues así, ranas saltarinas, tienen que pasar todas estas ranas para este lado y estás aquí (se refiere a la siguiente imagen), y contabilicen ¿cuántos movimientos harían para hacer eso? Contabilicen
14. 

15. 

16. E: nada más pueden saltar de una en una
17. M: si, pueden brincar, pueden moverse o una puede aparecer junto a ella
18. E: ¿Cómo?
19. M: Véanlo, sólo puede moverse acá, y si hay una frente a ella puede saltarla, si, entonces ¿cuántos movimientos? cuente cuántos hacen para pasar todas de un lado a otro, si

20. 
21. 

22. E: ¿Cómo lo busco?
23. M: Ranas saltarinas, a ver ¿cuántos?
24. E: ¿Seguro que se puede resolver?
25. M: Todo en la vida se puede resolver matemáticamente, todo se resuelve… aquí ya estuvo ya fallaste ahora reinicia
26. E: Ya falle dos veces
27. M: Hay que ver…cómo le haría piénsele, muy bien… no veas la solución, no seas tramposo
28. E: Pues ahí estaba
29. M: No, no vean la solución traten de hacerlo… no pueden estar dos de colores juntos porque se atoran…no vayan a ser como Valentín ya vio la solución
30. E: Hay Valentín
31. M: Esté… muy bien, vamos a darles un tiempo traten de resolverlo sin ver la solución, no pueden estar dos del mismo color juntos porque ya no puedes hacer nada…listo ¿cuantos movimientos hiciste?¿Cuantos contaste?
32. E:Noooo

33. M: Tendrás que empezar, no es cierto, Sofía ya lo hizo, ¿ya lo hicieron?
34. E: ya
35. M: Muy bien, ¿ya Pacheco?
36. E: Ya
37. M: Más o menos ¿cuánto constaste?
38. E: 15
39. M: Muy bien… ¿Cómo cuánto contaste? ¿cómo 10?¿cuántos movimientos? (le pregunta a un alumno)
40. E: Ya profe
41. M: ¿Cuántos movimientos más o menos contaste?
42. E: 10
43. M: 10, muy bien… ¿cuantos movimientos son Valentín?
44. E: 17
45. M: 17… ya abran el Dropbox… ¿cuántos te salen Valentín?
46. E: 15
47. M: 15, muy bien ¿quién ya lo hizo? ¿ya lo hicieron?
48. E: 15
49. **Nota: el docente pasa a revisar la práctica de cada alumno, con la intención de fueran avanzando sin ningún problema.**
50. M: 15, muy bien… muy, abran el Dropbox, ahí hay una situación que se llama ranas saltarinas
51. E: ¿En dónde?
52. M: En Drop en su carpeta… hay una opción que se llama situación de ranas saltarinas me parece, si le puse nombre… situación de la rana saltarina… a ver si la subí, cálculo, si en la carpeta de cálculo ahí esta situación de la rana… vamos a ver,
53. E: Y es en cálculo (se refiere a la carpeta)
54. M: Si esta en cálculo… situación de la rana… vamos a ver, cálculo, cursos, laboratorio 2, día de clase, situación de la rana, vamos hacer lo siguiente, aquí tienen una tabla dónde están las tres ranas cafés(C) y 3 ranas verdes (V), el número cero es el espacio vacío(se refiere al cero de la siguiente imagen), vayan registrando su movimiento, este ya lo tienen ahí cópienlo, está es la solución, ya tiene la solución haya, lo pueden desplegar no, pero pueden copiar su solución y vean ¿cuántos movimientos hacen en este caso?

Registra cada uno de los movimiento:

0	C	C	C	0	V	V	V
1							
2							
3							
4							

55.

56. M: Van a ser cuando sea una rana de bueno aquí son cuando son tres ranas de un lado se registra todos los movimientos (primera y segunda imagen), no

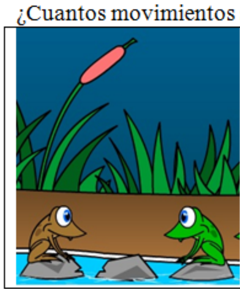
Registra cada uno de los movimiento:

0	C	C	C	0	V	V	V
1							
2							
3							
4							

57.

58. M: Bien cuando sea una rana de un lado, una rana café como aquí, ¿cuántos movimientos se harían?

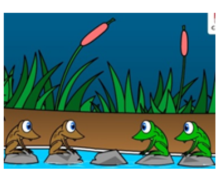
¿Cuantos movimientos se harían con una rana en cada lado?



0	C	0	V
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

59.

60. M: Cuando son dos ranas de cada lado ¿cuántos movimientos se harían para pasarlas? Y el de 3 es el que acaban de hacer, vayan registrando en la tabla todos los movimientos



0	C	C	0	V	V
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

61.

62. M: Por ejemplo, aquí puse un ejemplo, si en un primer movimiento que hice esta rana se movió para acá y aquí el cero es un espacio vacío lo deja vacío (primera imagen), entonces así hay que registrar todos los movimientos para de 3 que ya la tienen ahí pueden copiarla, la de una rana de un lado, cuando hay dos ranas de un lado, en esta tabla y lo van a registrar aquí (segunda imagen), cuando es una rana

¿cuántos movimientos fue? cuando fueron dos ranas de un lado y del otro ¿cuántos? y el de 3 ya lo dijeron por ahí que eran, como, ¿cuántos?

63.

0	C	C	C	0	V	V	V
1	C	C	0	C	V	V	V

64.

N° de ranas en cada lado (r)	Número de movimientos (M) M=f(r)	
1		
2		
3		
4		
5		

65. E: 15
66. M: Como 15, no, a ver registren, pero vayan registrando en la tabla esos movimientos, a ver si, ¿si me explique?
67. E: Si profe
68. M: Bueno adelante, voy a salir un minuto… registren en Word, descárguenlo para poder editar hay que descargar el archivo...para poder descargar...
69. **Nota: El docente se acerca a una alumna que tuvo un problema con el documento de la actividad.**
70. M: Por ejemplo aquí pueden hacer la práctica cuando es una rana… en realidad cuando es una rana, pues los usos que voy a mover son estos tres no, ¿cuántos movimientos son? fácil 1,2, 3 (segunda imagen), no

71. 

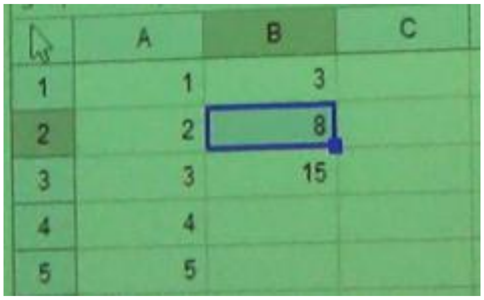
72. 

73. M: Ahora cuando son 2 sólo vamos a mover estos y estos (se refiere a las dos ramas verdes y cafés) no le hacemos caso a este ni a este (se refiere a las otra rana restante la verde y cafés) aquí pueden practicar los movimientos (primera imagen), lo van a registrando, por ejemplo si ya hice este, este movimiento pues en el archivo tengo que registrar aquí C, V, 0, es el primer movimiento que hice, eso es lo que voy a registrar

74. 

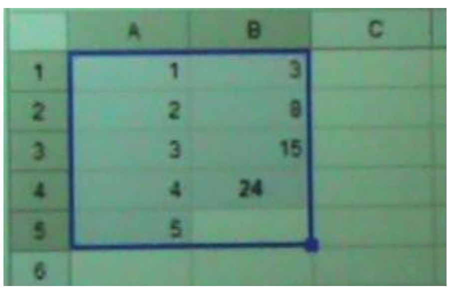
75. 

76. E: Profe todavía no abre
77. M: Nada… vayan registrando, exacto ahí, el primero ya lo tienen el de tres ranas
78. **Nota: el docente se acerca con los estudiantes para ver que lo que están haciendo y vayan bien en la práctica, además apoya a un alumno que llego tarde a la clase, con el propósito que no se atrase en la actividad. En otro caso un estudiante va adelantado y el docente le revisa lo que ha realizado y lo orienta a que siga con la actividad.**
79. M: Voy a salir un minuto ahorita regreso, vayan llenando las tablas hasta tres ranas… ya, voy por lo otro… pensé que ustedes eran hábiles todo el día se la pasan jugando video juegos
80. E: No
81. M: Noemí te va a llevar mucho tiempo eso, mira sólo para… si lo puede hacer pero mira, tú pusiste este dato no, cuando es 5, bueno ok, ¿qué te respalda que sea 24?, ¿por qué dice?, 35 también, estás usando esta herramienta, porque usaste la referencia pero eso tú lo intuiste 24…...(checar audio1:19 segundo video…quitar)
82. E: Si
83. M: Qué te apoya, bueno voy a comprobar que si 24 ¿quién te dice a ti qué es el número que debe ser?
84. E: La primera diferencia
85. M: La primera diferencia verdad, ¿Qué están haciendo la diferencia? ¿cómo van aumentando las diferencias? exacto ¿qué función es?
86. E: Cuadrática
87. M: Ajá, bueno voy a darle con los demás después le siguen trabajando, pero abran el Geogebra, abran el Geogebra a ver, donde esta Geogebra, pues miren… en esta tabla que tienen aquí de registro vamos a ponerlo en el Geogebra abran una vista de hoja de cálculo y dejen eso ahorita, después lo siguen, pero miren cuando es una rana en un lado ¿cuántos movimientos hubo?

88. M: 3
89. M: 3, no, ¿cuándo son dos ranas? ¿cuántos movimientos hubo?
90. E: 8
91. M: 8 con las 3 que hicimos son 15, luego nos piden con una de 4, después una 5, hacer eso en una tabla pues si es un poco tedioso, pero algo nos puede permitir este patrón de 3 aumento a 8 y después pasó a 15 alguien puede intuir (se refiere a la siguiente imagen), bueno algunos ya lo hicieron pero ¿qué número sigue aquí sin hacer la tabla?
92. 

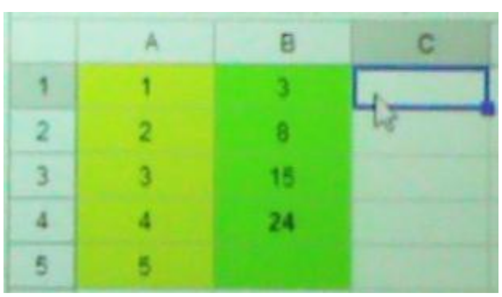
	A	B	C
1	1	3	
2	2	8	
3	3	15	
4	4		
5	5		

93. E: 24
94. M: Ustedes se van por el 24(siguiente imagen) ¿cómo respaldar este número es el correcto? ¿cómo lo respaldo?

95. 

	A	B	C
1	1	3	
2	2	8	
3	3	15	
4	4	24	
5	5		
6			

96. E: Sacando la diferencia que hay y luego la variación
97. M: Muy bien, este pues una vez en la clase que vivos la diferencia, vimos la diferencia, pues vamos a sacar las diferencias de esta tabla, vamos a ponerle un color aquí este es uno es otro

98. 

	A	B	C
1	1	3	
2	2	8	
3	3	15	
4	4	24	
5	5		

99. M: Muy bien, las diferencia de estos vamos a ver cuántos nos da en este caso es de $B2 - B1$(primera imagen) sólo lo arrastró y me queda esto (segunda imagen), vemos que la diferencia después van aumentando de… si me siguen haya atrás…Maricruz si me sigues Maricruz dejen la tablita un momento, pongan atención en este caso porque es importante, vean son los número de movimientos puede decir que este 24... la idea que respalda esto es que vamos a ver que sus diferencias tienen un patrón constante o sea de 5 aumento a 7, las diferencias he, y de 7 aumento a un 9 (segunda imagen) o sea que la diferencia ahí ¿es de cuánto?

100. 

	A	B	C
1	1	3	
2	2	8	=b2-b1
3	3	15	
4	4	24	
5	5		

101. 

	A	Derecha	C	D
1	1	3		
2	2	8	5	
3	3	15	7	
4	4	24	9	
5	5			

102. E: De 2

103. M: De 2 esto quiere decir hice yo hago una segunda variación me va a dar aquí 2, 2, 2(se refiere a la siguiente imagen), con estos datos ustedes pueden pensar ¿qué función es? ¿qué tipo de función está modelando el número de movimientos de la rana? ¿qué función es?

104. 

	A	B	C	D
1	1	3		
2	2	8	5	2
3	3	15	7	2
4	4	24	9	2
5	5			

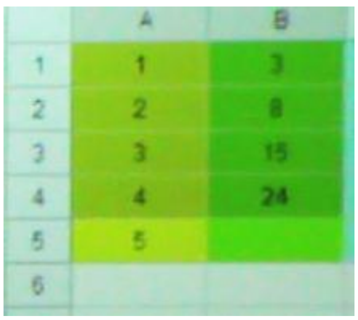
105. E: Cuadrática

106. M: ¿Cuadrática lineal o cúbica? ¿qué función es?

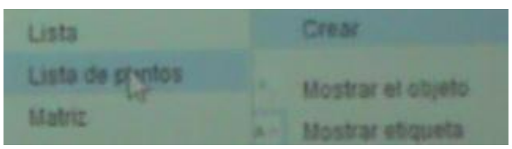
107. E: Cuadrática

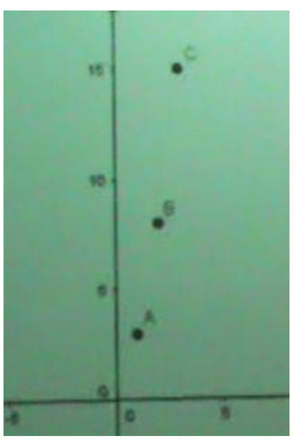
108. M: Cuadrática, porque es cuadrática, Luis ¿por qué dices que es cuadrática?

109. E: Porque se realizaron dos restas para llegar a la constante
110. M: ¿Cuantas resta fueron?
111. E: Dos
112. M: dos verdad, como al hacer dos diferencias y me da una constante yo sé que estos datos modelan una función cuadrática, ahora cuál es esa función cuadrática, vamos a buscarla ya lo menos tenemos los datos de Excel, pero las diferencias nos van a permitir saber qué tipo de función es cómo se comporta, si se comporta como una cuadrática, va aumentando rápido, entonces muy bien, ahí mismo vamos a seleccionar estas dos columnas, bueno en este caso hasta 4 (primera imagen), 5 no lo tenemos vamos a buscar ese dato y le vamos a dar en crear,, lista de puntos para que nos grafique estos puntos en el plano cartesiano y pues ya lo gráfico (tercera imagen), ahí está si, ya tenemos los puntos, ahora que función será, chíspales, hay que buscarla cómo le hacemos álgebra

113. 

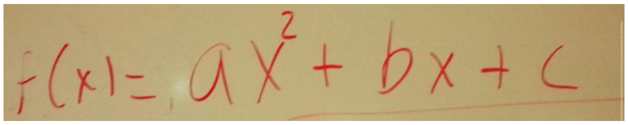
	A	B
1	1	3
2	2	8
3	3	15
4	4	24
5	5	
6		

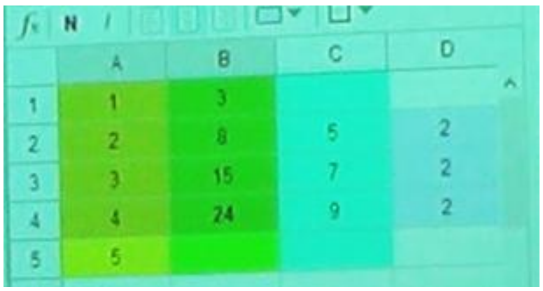
114. 

115. 

116. E: No se puede (una alumna tuvo un problema con esta parte de la actividad)
117. M: No se puede
118. Nota: el profesor se acerca a la alumna para ayudarle en el problema que tuvo con Geogebra, debido a que no puede graficar los puntos con los datos de la tabla.

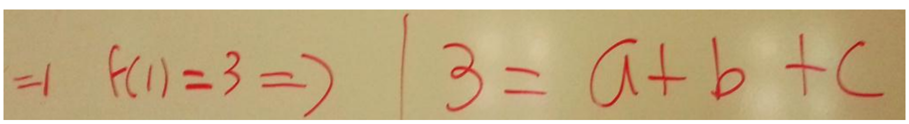
119. M: Muy bien vamos a usar algebra muchachos ¿cuál es la fórmula general de una cuadrática se acuerdan?
120. E: más o menos
121. M: La fórmula general de una función cuadrática $f(x)$ ¿a que es igual?
122. E: Menos b
123. M: La fórmula general, no canónica ¿se acuerdan?
124. E: ax
125. M: $ax^2 + bx + c$, no, es la fórmula general ya tengo datos aquí, cuándo este es el valor de x este es el valor de $f(x)$, si x vale 1 en este caso, $f(1)$ ´¿cuánto vale en la tabla?

126. 

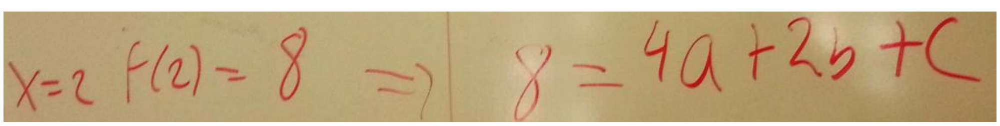
127. 

	A	B	C	D
1	1	3		
2	2	8	5	2
3	3	15	7	2
4	4	24	9	2
5	5			

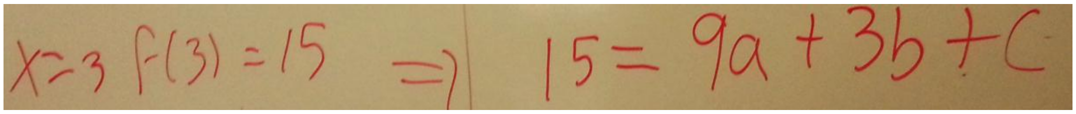
128. E: 3
129. M: Vale 3 no, entonces esto lo voy a sustituir a mi función, $f(x)$ cuando vale 1 es 3 va a ser igual la x cuánto vale aquí 1 va a ser $a + b + c$ (escribe lo siguiente) ¿no es así?

130. 

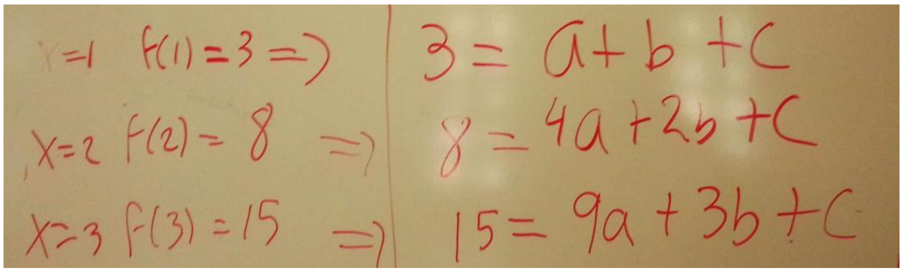
131. E: Aja
132. M: Vamos hacer lo siguiente cuando x vale 2 y $f(2)$ vale 8 ,no, según la tabla, entonces tenemos que 8 es igual aa,, en este caso x vale 2 al cuadrado va a ser igual a $4a + 2b + c$

133. 

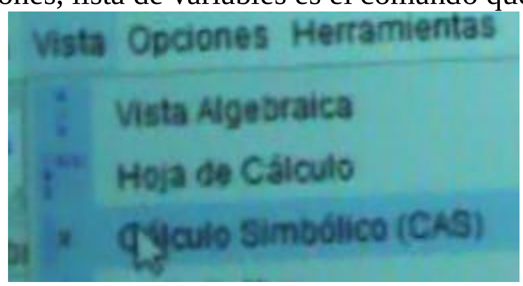
134. M: Y cuando x vale 3 me dice que mi $f(3)$ vale 15 como movimientos no, entonces va a ser 15 es igual a 9a 3 al cuadrado, $9a + 3b + c$

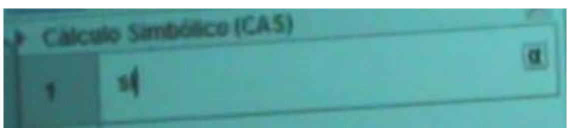
135. 

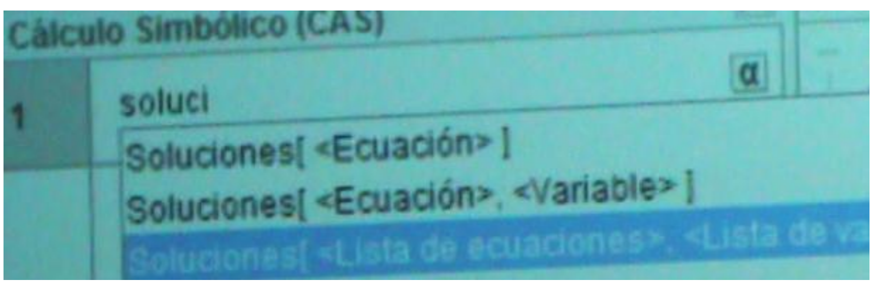
136. M: Ya tenemos un sistema de ecuaciones de tres por tres (se refiere a la siguiente imagen), resuélvanla, no es cierto, lo vamos a resolver directamente en el Geogebra, se entiende esto (señala la siguiente imagen)

137. 

138. M: Muy bien entonces, vamos a resolver eso en el Geogebra habrán aquí una vista que se llama vista simbólica cálculo simbólico CAS (primera imagen) y va a parecer esto (segunda imagen)…solución lista de ecuaciones, soluciones lista de ecuaciones, lista de variables es el comando que vamos a usar (tercera imagen)

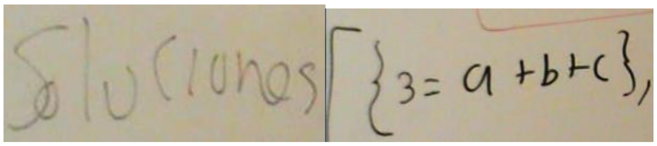
139. 

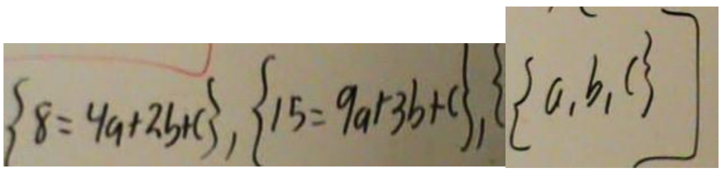
140. 

141. 

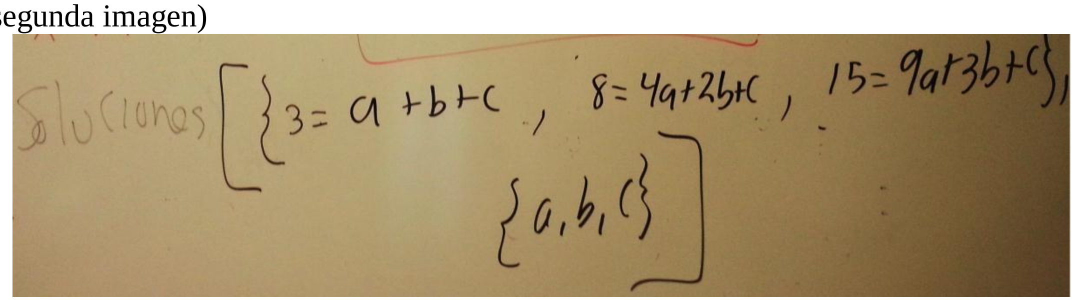
142. M: Y lo vamos a editar de la siguiente manera, vamos a ponerlo así, ahí vamos a poner las listas de ecuaciones que son 3 son estas (se refiere al sistema de ecuaciones 3 por 3) los vamos a poner de la siguiente manera, esta es la sintaxis, va ser soluciones se abre un corchete, y aquí abren una primera llave y ponen la

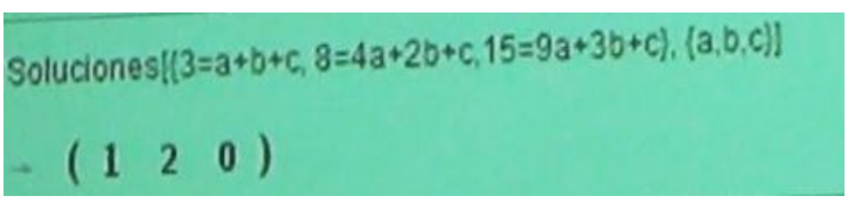
primera ecuación así 3 =, ¿cuál es el coeficiente que tiene esta letra a esta variable a es 1, bueno es $3 = a + b + c$ y cierran el corchete ponen una coma, y abren el corchete y vuelven hacer lo mismo aquí $8 = 4 + 2b + c$ y cierran el corchete, abren el otro y ponen el siguiente ecuación $15 = 9a + 3b + c$ cierran el corchete y abren otro para poner las listas de variables, las variables son a, b y c y cierran, esta es la sintaxis, las tres ecuaciones las ponen entre llave la separan con una coma cada una las tres ecuaciones y después vine a la lista de variables a, b y c son las únicas variables que tenemos aquí a ver hagan eso, a ver si funciona

143. 

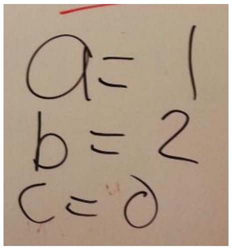
144. 

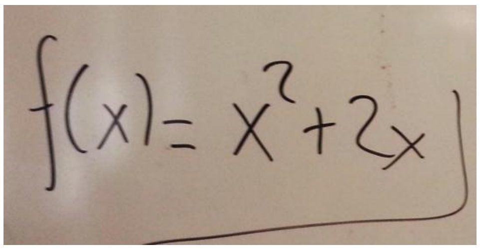
145. M: Entre llaves son las ecuaciones, no paréntesis porque si no falla déjenme ver creo que lo había hecho antes a ver… no, miento está mal, es todo esto entre llaves, separadas por una coma si, son todo esto entre llaves, separados por una coma (primera imagen), lo demás ya está bien, y aquí cuando cierran la llave ponen una coma y abren otra para la lista de las variables que son a, b y c, y debe aparecer esto (segunda imagen)

146. 

147. 

148. M: Cuando aparezca esto, me está diciendo que cuánto vale la a, la a vale en este caso 1 y la b vale 2 y se c vale cero ya sé cuál es la ecuación cuál es la ecuación ahí la cuadrática pues la ecuación es $f(x) = x^2 + 2x$, ya la encontré, sí ya la encontré póngala en Geogebra a ver si pasa por los puntos, edítenla en Geogebra… ok bueno aquí va, ya hicieron todo esto

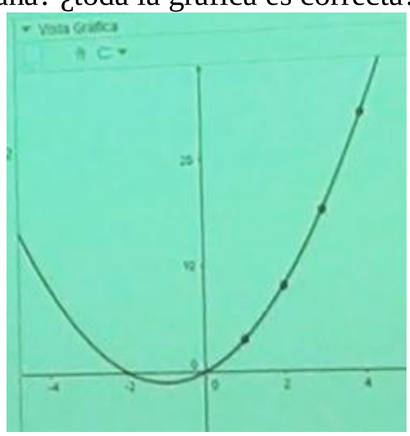
149. 

150. 

151. Nota; el docente se acerca dos alumnos apoyarlos, ya que estos tuvieron problemas con utilizar CAS con el Geogebra que estan utilizando.

152. E: A mí no

153. M: No sé porque, igual a Fanny le pasa...ok antes que nada, ustedes modelaron esto, está modelando esto, ósea ¿esta gráfica es correcta para la actividad de la rana? ¿toda la gráfica es correcta?

154. 

155. E: No

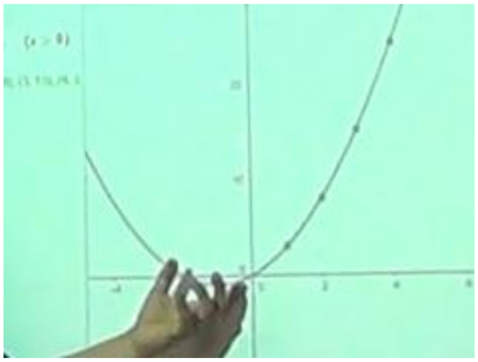
156. M: ¿por qué no? ¿cuándo no es correcta?

157. E: porque de ranas es positivos

158. M: número de que

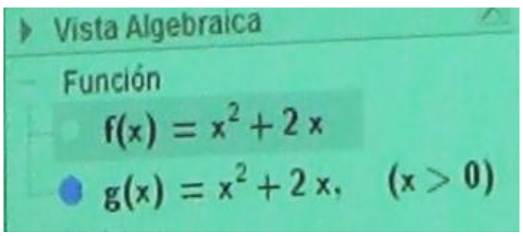
159. E: De ranas es positivos

160. M: El número de ranas es positivos, ósea no puedo agarrar ranas negativas, no puedo tomar eso verdad, por lo tanto tengo que restringir, esta es una respuesta errónea no puedo tomar esta parte de la gráfica ¿a partir de dónde voy a tomar?

161. 

162. E: De los positivos

163. M: Entonces hay qué condicionar la función acuérdense esto ya lo habíamos hecho, él sí entonces, la condicionan, condiciónenla esta acá, como la condición para que aparezca lo que realmente debe de ser hay un comando si entonces, donde yo defino de dónde a dónde la quiero ver, defínela esa función (se refiere a la segunda función de bolita azul de la siguiente imagen)

164. 

165. M: Bueno aquí ya lo hizo Noemí… el caso de Fanny yo no sé por qué Fanny ayuda dale ayuda qué versión es este Geogebra… en tu caso tampoco pasó verdad… bueno ya nos vamos

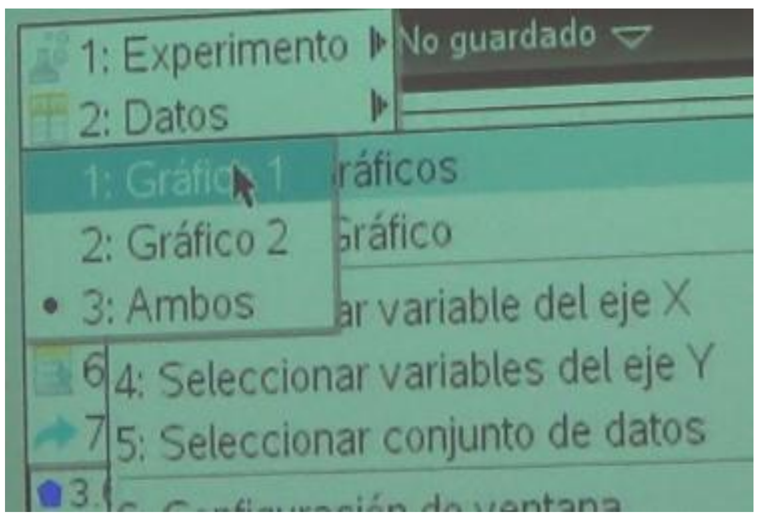
166. Nota: El docente pasa a revisar la práctica de los alumnos que tuvieron problemas con utilizar el CAS de Geogebra, y también con los alumnos que tuvieron dudas.

167. M: Muy bien guárdenlo situación ranas saltarinas, el archivo de Word también tienen que enviarlo tienen que guardarlo ahí si no lo terminaron lo terminen su casa, pero miren una cosa muchachos vean una cosa, fíjense de una cosa antes de cerrar, fíjense lo que hicieron ayer nos permite de alguna manera saber cómo se comporta una función no sabía cuál era pero la variación las restas nos dice qué tipo de función es y bueno esta cuestión que es álgebra para saber cuál es, qué tipo de cuadrática es la que estamos hablando, si pero éste es una herramienta poderosa para saber cuál función estamos hablando, yo no les di la función ustedes la analizaron a partir de aquí y la herramienta que lo hace es la tasa de variación media, si, bueno, vámonos

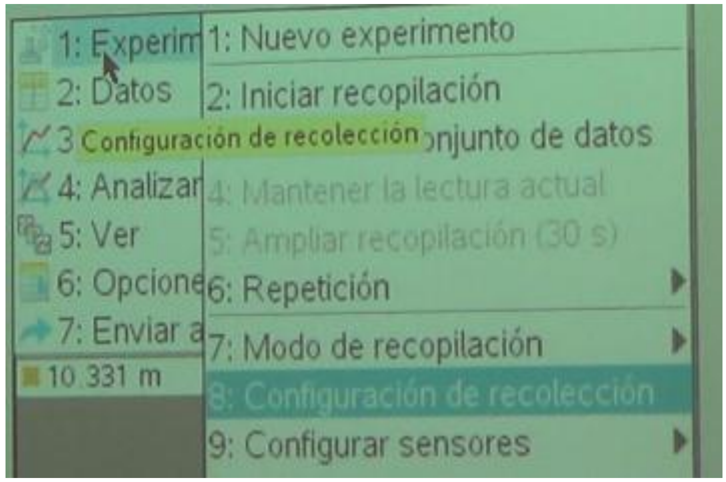
Transcripción de la clase del día 11/03/2016

En esta clase el profesor realiza un pequeño tutorial de cómo utilizar el sensor y la calculadora gráfica. Inicia la clase repartiendo los sensores y las calculadoras a los estudiantes, después les mencionan que deben de colocar pilas a los sensores, en seguida explica que la calculadora en su centro es Touch, posteriormente les da instrucciones sobre cómo conectar el sensor con la calculadora, cabe mencionar que la calculadora que utiliza el profesor es un software virtual instalado en su laptop que simula ser la calculadora con las mismas herramientas de la misma y el sensor está conectado a la laptop mediante una cable de Ethernet.

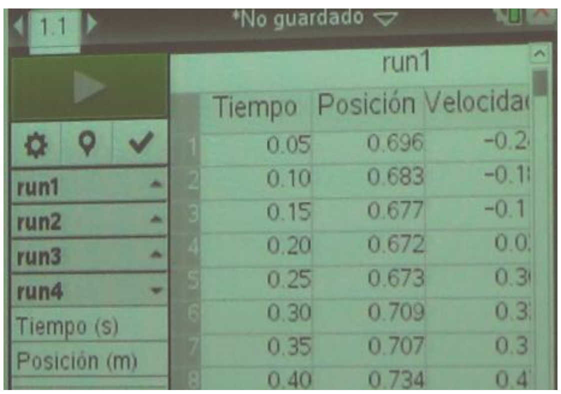
Después, explica sobre las opciones de herramientas que tiene la calculadora, en particular las que más le van a servir a los alumnos en la siguiente clase, como configurar la calculadora a la opción Gráfico 1 y guardar la gráfica con el icono de la palomita o del archivero, de igual manera enseña cómo poder utilizar la calculadora y el sensor para crear gráficas con las participaciones de los estudiantes.

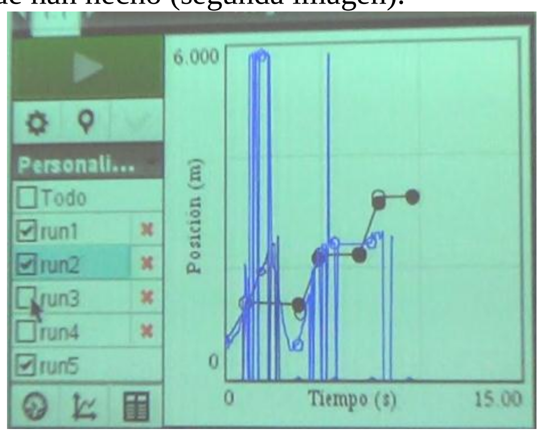


También indica cómo poder manipular las unidades de distancias y el tiempo en la calculadora, en seguida mención la forma en la hay que configurar la calculadora (opción menú de la calculadora, primera imagen) para que recolecte y almacene los datos del sensor (segunda imagen).



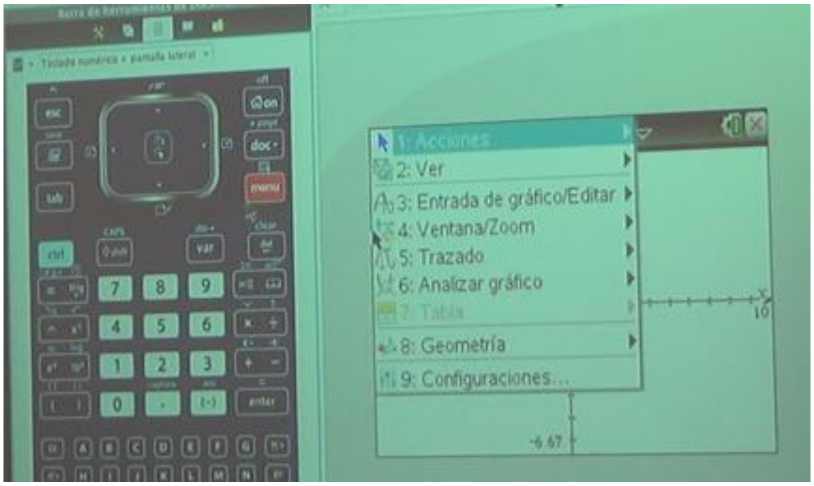
Finalmente ejemplifica que cuando ya se tenga los datos recolectado y almacenados por el sensor y la calculadora, les aparecerá una tabla con información numérica y que sólo se tomaran el tiempo y la posición (primera imagen) para llevarlos a graficar a Geogebra, e indica como poder visualizar las gráficas que han hecho (segunda imagen).



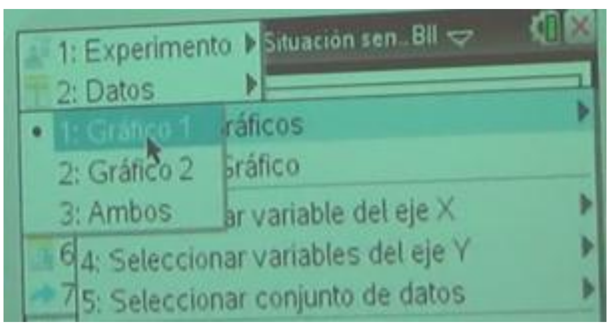


Transcripción de la clase del día 14/03/2016

1. **Nota: El profesor antes de iniciar su clase realiza equipo de dos o de tres estudiantes para que realicen la actividad, también le proporciona los sensores y calculadoras para que vayan conectándolas e infatúen con los botones y el software integrado en la calculadora.**
2. M: Muy bien vamos a empezar, este ahorita se integra Fanny contigo, Alexis con Sofía…y este vamos hacer lo siguiente, le voy a pasar la situación que van a modelar hoy, lo que me interesa es que hagan la gráfica van a salir como ayer, van tratar de hacer esa gráfica, esta es la situación que van hacer, esta modelación, aquí, tú vas a estar con Alexis esta es la situación, ustedes este, ¿aquí quien está? no hay nadie verdad… aquí…y aquí ¿quién está?... bueno, vayan leyéndola conecten el sensor con las calculadoras ¿ya?

3. 

4. E: Ya
5. M: Si, ya…vamos a ver documentos... bueno ahí dice cómo van configurar los tiempos, conecten primero debe de parpadear el sensor, bueno esta es la mía pero…ah les va aparecer dos gráficos, cuando la prenden aparecen dos gráficos, hay que ponerlo grafico 1, si no se acuerdan aquí va: menú, gráficos, grafico1…si menú, gráficos, mostrar gráficos

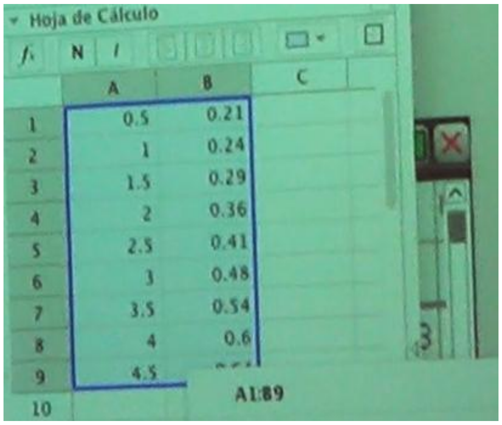
6. 

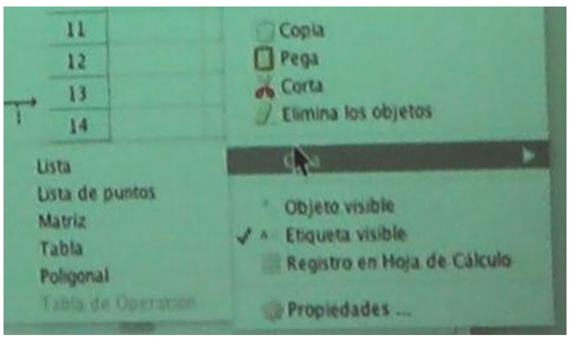
7. M: Menú, gráficos, mostrar gráfico, grafico1, si...muy bien, perfecto
8. **Nota: El profesor se acerca con cada equipo para observar cómo van con la práctica y que no se tracen ningún equipo con la actividad.**
9. M: Ok, el movimiento no es de hoja, es de metros, ósea tiene que salir a… tienen que salir al parque, o haya a la bufa, no sé dónde vayan hacerlo…este pero salgan a modelar, yo voy a estar ahí con ustedes, por si tiene problemas pero tienen que salir, si, vámonos…lleven su situación (se refiere a la siguiente imagen), es de persona, no vayan hacer su manita ni nada de eso, acuérdense que no hay que apuntar, es de persona la perna que se mueva… ahorita voy con ustedes para que vaya asesorarles tienen que estar una gráfica lo más bonita posible, hagan lo más bonita

10. Movimiento 2 (Run2)

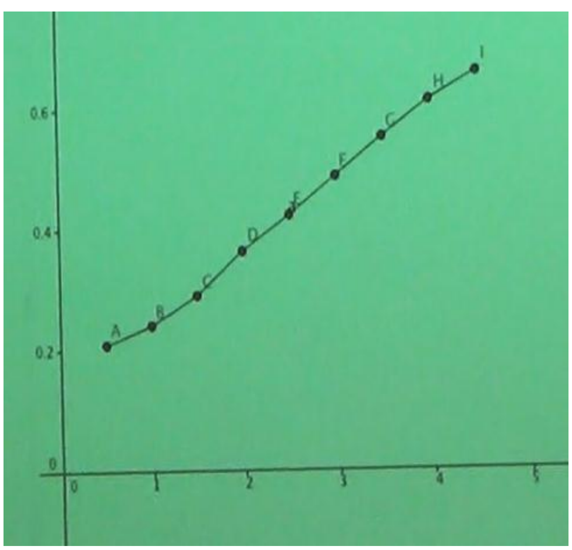
Partiendo de un punto que se encuentre a un metro del sensor, caminarás a paso aproximadamente constante, alejándote rápidamente del sensor. El intervalo de tiempo será de 8 segundos

11. **Nota: Los alumnos salen del salón para realizar la actividad al aire libre, el profesor se acerca con cada equipo para revisar que la calculadora y el sensor este bien configurado de acuerdo a la actividad, y así pueda realizar la gráfica del movimiento de la persona.**
12. **También les explica a cada equipo como guardar la gráfica que vayan realizando con la calculadora y el sensor, de igual manera da sugerencias de como poder realizar los movimientos de tal manera que se grafique una excelente gráfica.**
13. **Posteriormente ayuda a cada equipo como poder obtener los datos de la información de las calculadoras correspondiente a la gráfica para utilizarlos en el siguiente paso de la actividad, es decir, en una hoja de cálculo en Geogebra.**
14. M: Muy bien, este ¿no todos pudieron entrar a su computadora?
15. E: Nooo
16. M: Hay que entrar y hay pasar los datos de las gráficas a la hoja de cálculo de Geogebra, entonces hay dos columnas en la hoja de cálculo que son estas: tiempo y posición, hay que pasarlas en la hoja de cálculo de Geogebra las primeras dos columnas de su gráfica en la tabla de datos… las primeras dos columnas son como 9 puntos, hay pasarlas esos datos, hay pasarlas en la hoja de cálculo de Geogebra ¿ya buscaron su tabla?
17. E: No
18. **Nota: El profesor pasa con cada equipo a verificar que hayan ingresado a los datos arrojados por la gráfica realizada por el sensor y la calculadora, debido a que esa información la tendrán que pasar a una hoja de cálculo de Geogebra.**
19. M: Las primeras dos columnas en una hoja de cálculo, hay que registrar sus tablas… hay ponerlos en la hoja de cálculo en Geogebra
20. E: ¿Y después que hacemos?
21. M: Ahorita voy… bueno hay que graficarlos, bueno hay que pasarlos a la hoja de cálculo, cuando lo hayan hecho lo seleccionan (primera imagen) y le dan en el botón derecho, y le decir que cree una poligonal (segunda imagen)… botón derecho y le dicen que cree una poligonal… ¿ya las tiene Luis?
22. E: Si
23. M: Botón derecho, exacto, ya está, poligonal

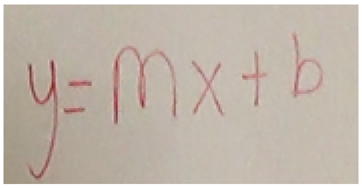
24. 

25. 

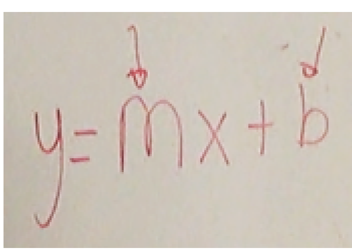
26. **Nota: El docente pasa con cada equipo para verificar si están siguiendo las instrucciones que él está diciendo hasta ese momento, con el propósito de que todos vayan al mismo ritmo, y que no se atrasen.**
27. M: Ok, muy bien… esa es la mía (se refiere a su gráfica poligonal), muy bien saquen la primera variación esa ya lo saben hacer, saquen su primera variación de la tabla

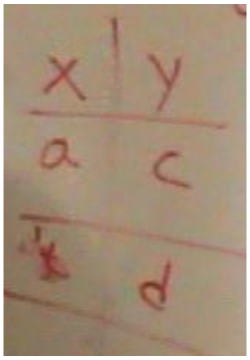
28. 

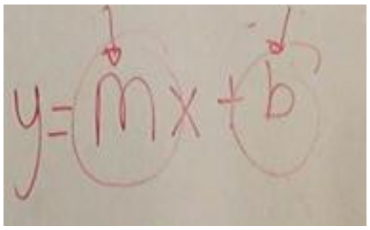
29. M: Saquen la primera variación… tienen que buscar la función, qué tipo función fue su movimiento

30. **Nota: El docente sigue pasando con cada equipo para cerciorarse que vayan al mismo ritmo de sus demás estudiantes, también para apoyarlos en caso de que estén atorados en la actividad.**
31. M: Muy bien… a ver, pónganme atención aquí después siguen, después siguen, miren, este, la mayoría piensa que es una lineal, no, es una función lineal, ok, estamos en una aproximación no exactitud, entonces, una función lineal generalmente cómo se define, como y igual a una pendiente más b (escribe la siguiente imagen en el pintarron)
32. 

33. M: Acuérdense como les dije, ya tengo los puntos x, y (primera imagen), no, necesito hallar este valor y este valor (segunda imagen), pero ya tengo varios valores, ya tengo un valor aquí de x y un valor de y, un valor aquí de x y un valor de aquí de y (tercera imagen), los puedo sustituir los valores en la ecuación, me va generar dos ecuaciones, verdad, y la resuelvo y ya doy estos valores de aquí (cuarta imagen), eso lo vimos una vez se lo mostré en la rana ¿se acuerdan del problema de la rana?
34. 

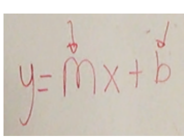
35. 

36. 

37. 

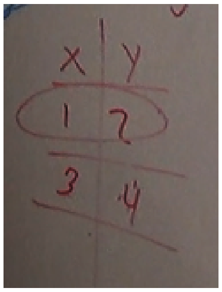
38. E: Aja
39. M: Eso es lo que hay que hacer aquí, hay que buscar quién es, cuál es su formula de su movimiento, hay que buscarla, entonces, ya tienen su tabla y hay que sustituir un valor de x y un valor de y y me genera una ecuacion en terminos de m y b necesito dos ecuaciones para resolverlas y hayar eso, si, entonces hay hacer el álgebra, hay que hacer eso
40. E:¿Y luego?
41. M: Y luego la graficas, y a ver si se aproxima ahi
42. E: ¿ x seria el tiempo?
43. M: Exacto x seria el tiempo y y la posición
44. E: ¿Asi como esta?
45. M: Si mira es una formula general de una recta tu agarras dos puntos pueden ser $D, F\ldots$ ¿Cuánto vale la x en el punto E aquí esta vale 4 y su y cuanto vale 2.09 (primera imagen) lo susutituyes ahí y te queda una ecuacion en terminos de variable m y de b, lo vas a susituir aquí Valentin, esa x esa y (se refiere a la ecuación), esa es tiempo y esto es posicion

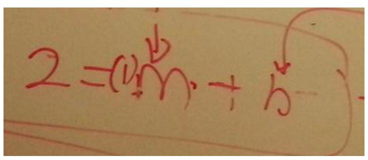
46. 

47. 

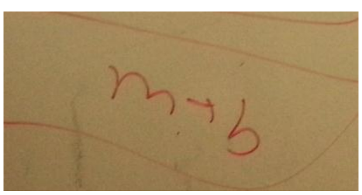
48. E: ¿Entonces lo sustituyo?

49. M: Si, vas necesitar dos ecuaciones pero vas a necesitar dos puntos para sustituir y resuelve la ecuacion y vas hayar este valor de m y este valor de b que es la recta ¿ no lo entiendes?
50. E: No
51. M: Bueno, supon que esto es tu Excel (primera imagen), yo voy a agarrar este primer punto, lo sustituyo cuanto vale la y aquí 2 (segunda imagen), la m no la se, pero la x vale aquí 1, entonces va hacer por 1 mas b ya tengo una ecuacion

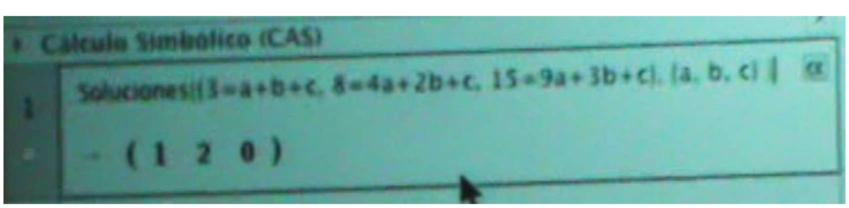
52. 

53. 

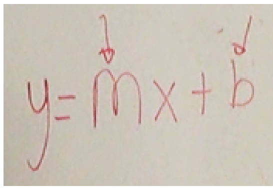
54. E: y asi en otra
55. M: Y asi la otra y despues la resuelve
56. E: ¿Y ya esa va hacer la ecuacion?
57. M: Y aquí te va a dar otra ecuacion (se refiere la imagen), y resuleve esta ecuacion, sistema de ecuaciones, si en el geoegebra hay una forma de hacerlo directo, pero hagan el álgebra pueden hacerlo a mano

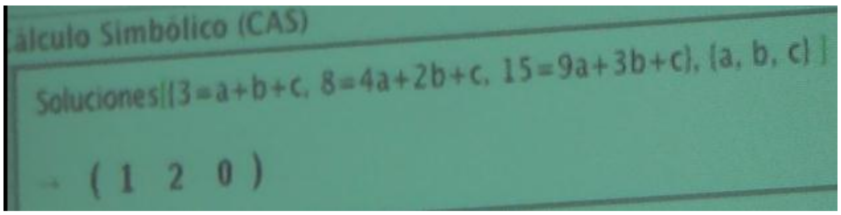
58. 

59. **Nota: El docente ayuda a un equipo a resolver el sistema de ecuaciones en el CAS de Geogebra, la alumna le pregunta: ¿que si lleva llaves? El profesor acude a revisar un archivo que ya había utilizado para verificar si se pondrá llaves para resolver el sistema de ecuaciones y muestra lo siguiente**

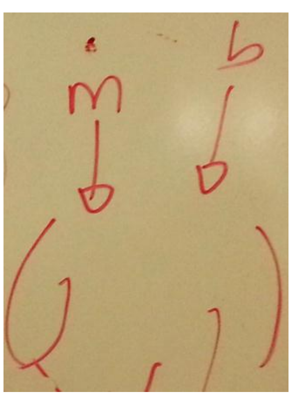
60. 

61. E: ¿Así se pone? ¿y así se van a poner las dos ecuaciones?
62. M: Si las letras que le pongan aquí (primera imagen), son las que van acá (segunda imagen)... hay que crear una lista de cálculo simbólico

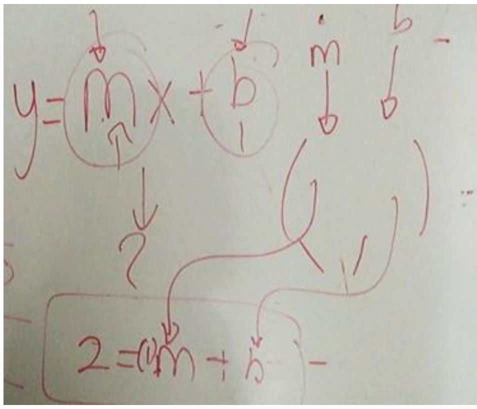
63. 

64. 

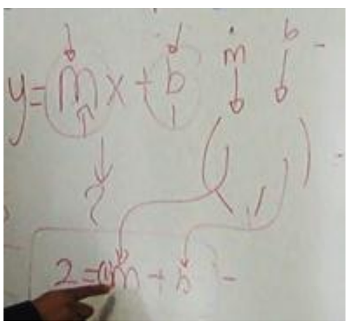
65. E: ¿Dónde está eso? ¿ lista de cálculo, lista de ecuaciones, lista de variables?
66. M: Exacto, lista de ecuaciones, lista de variables, pon soluciones, escribe soluciones ahí, y debe de haber una opción que diga lista de ecuaciones y lista de variables, ahí está, está saliendo, búscala ahí (se lo dice a un alumno)
67. E: ¿Lista de ecuaciones, lista de variables?
68. M: Si, y hay que ponerlas más o menos entre llaves, las ecuaciones, busquen y hay que ponerlas entre llaves… hay que buscar las ecuaciones, hay que buscar las ecuaciones, que van a resolver
69. **Nota: El profesor asesora a los alumnos que tiene dificultades con la sintaxis del CAS para que no tengan dificultades al momento de calcular el sistema de ecuaciones. Además de que los asesora a cómo resolver el sistema de ecuaciones de manera algebraica que les permitirá a los alumnos saber cuál es la función.**
70. M: Cuando hagan el sistema, les va dar, el Geogebra les va dar una coordenada, este es el valor de m y este es el valor de b (se refiere a la siguiente imagen)

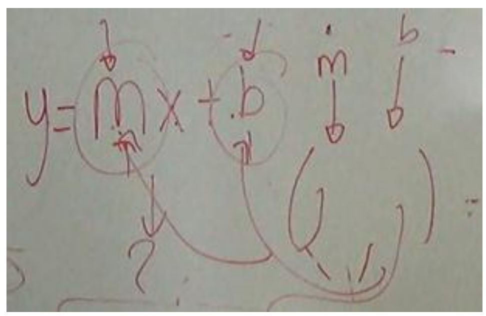
71. 

72. M: Si, lo sustituyen aquí, cuanto te dio tu m lo sustituye aquí, cuanto te dio tu b, y graficas en el Geogebra y debe de pasar por los puntos

73. 

74. E: ¿Qué graficamos?
75. M: Esta ecuación, cuando ya tiene tu m y tu b, es lo único te falta a ti, sustituir aquí (primera imagen), no, aquí (segunda imagen), perdón aquí (segunda imagen)… ya tiene la m y la b, grafica la ecuación, y debe pasar por los puntos

76. 

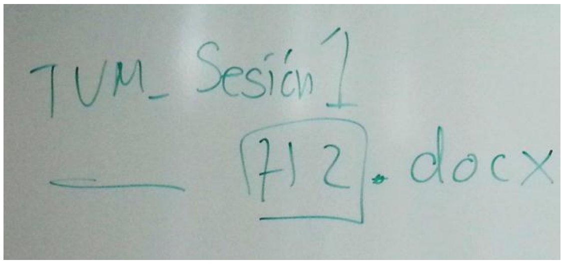


77. Nota: El profesor pasa otra vez a revisar a cada equipo, para ver cómo los equipos están realizando la actividad y como van avanzando, con el propósito de que todos los equipos estén al mismo ritmo de la actividad y que no se atrasen. De igual manera pasa a ayudar a cada equipo con la actividad, con el fin de que vayan comprendiendo que están haciendo.
78. M: Bueno pues ya, lo guardan como situación de movimiento en el Geogebra por favor, pónganle nombre ahí en el archivo, si son por equipo pónganle los dos nombre, si lo hicieron individual cada quien pues pónganlo
79. E: ¿Situación qué?
80. M: Situación de movimiento lineal… situación de movimiento lineal, situación de movimiento lineal, por favor, así le van a llamar… situación de movimiento lineal… ya estuvo, están despedidos

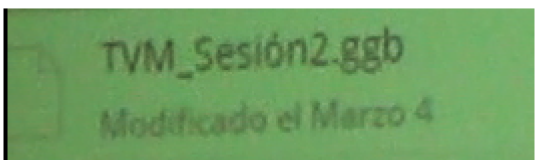
Transcripción de la clase del día 19/03/2016

1. M: Abran su, abran sus Dropbox, por favor, chispas no puede ser, abran su Dropbox, habrán el Dropbox, abran el archivo que ya tienen hecho que se llama creo que se llama: TVM_sesión1, no, este, abran ese archivo que ya lo tienen en la

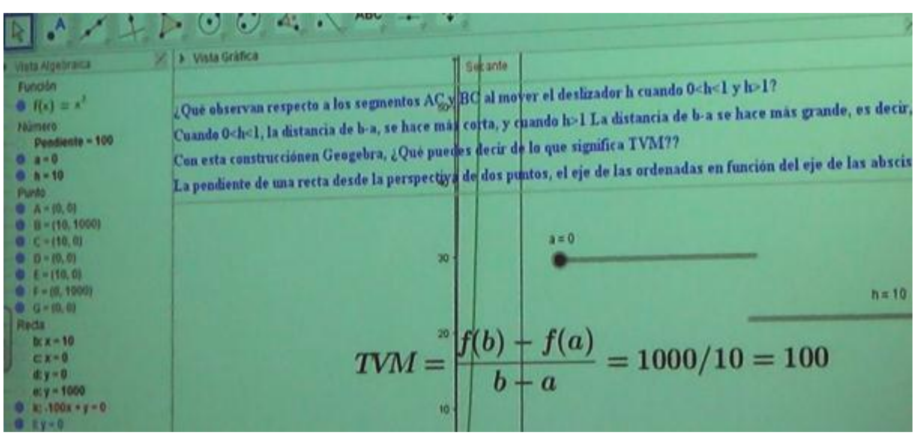
carpeta de cálculo y también en esa carpeta hay otro archivo Word... hay ya se me olvidó creo que termina en H2.docx (siguiente imagen) ese archivo en Word que termina en esto (siguiente imagen)

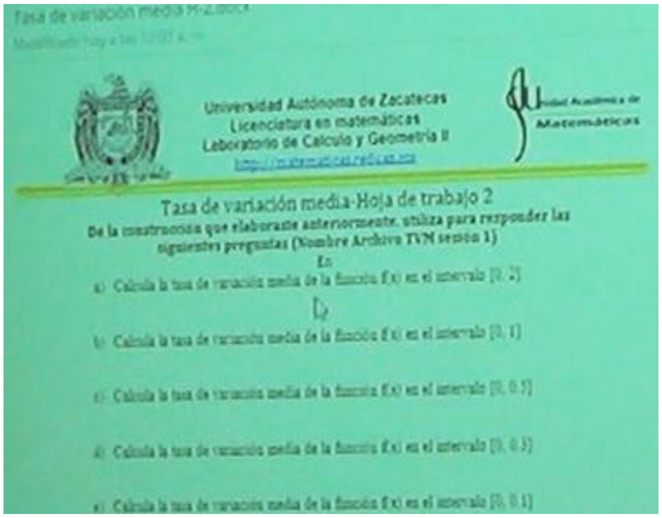
2. 

3. M: Abre el Dropbox Sofi y abre el archivo TVM_sesión1 es uno que habías hecho antes, así le llamamos… abran el Dropbox y… vamos a ver… cursos, dos, Enero-Julio… si no me equivoco hay un archivo que por ejemplo se encuentra en la carpeta de Estefany vamos a ver debe tener un archivo Geogebra que se llama este (siguiente imagen), creo que es este (siguiente imagen) vamos abrirlo

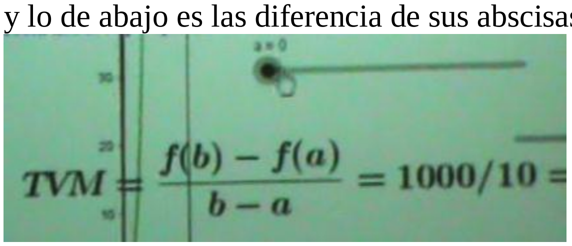
4. 

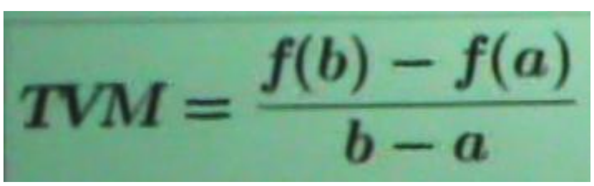
5. M: Muy bien, ahí está es este, que habíamos hecho se acuerdan este de aquí (primera imagen, este ejercicio se realizó el día 29/02/2016), si, si este archivo, por favor Nohemi, por favor Ester, ya lo tiene ahí, Luis tú no lo has hecho verdad ahorita lo vemos… ok, déjenme… y también hay un archivo allá este Tasa de variación media H-2 (segunda imagen), abran ese archivo documento, este que dice Tasa de variación media H-2, ábranlo por favor

6. 

7. 

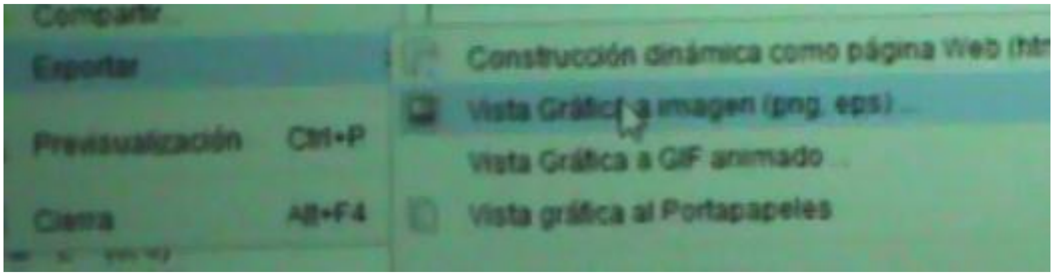
8. M: Este, este es el que deben de abrir y lo que pide ahí es que calculen la tasa de variación media de la función tal, la función cuál la que tienen en este, en este Geogebra, pero la van a calcular de 0 a 2, entonces cómo van hacer esto en Word, vamos a hacer este, cuál es la tasa de variación media ustedes ya la tienen definida aquí (primera imagen), pero tengo que mover los parámetros a y h de tal manera que analicen el intervalo de 0 a 2, si, esto, si de 0 a 2 analizar cuál es la tasa de variación media ya la tienen calculada ya la tiene hecha, esta es la fórmula de la tasa de variación media tienen dos puntos lo de arriba son la diferencia de las ordenadas y lo de abajo es las diferencia de sus abscisas(segunda imagen)

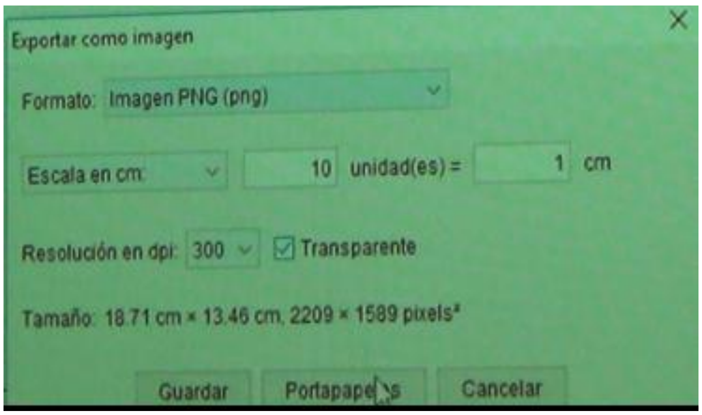
9. 

10. 

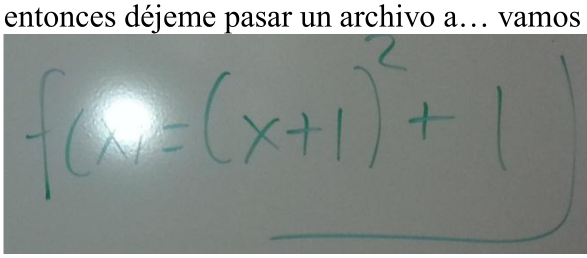
11. M: Entonces, cuando ubiquen ya el intervalo de 0 a 2 copian la imagen, cómo copian una imagen si saben cómo o sino aquí hay una expresión que se llama hay una opción que se llama exportar, vista gráfica como imagen (primera imagen), si, aquí hay una opción que exporta la imagen que ya tienen hecha aquí, se guarda automáticamente la imagen, vamos hacerlo exportar, vista gráfica imagen, guardar; en descarga lo guardan, vamos a ver... descargas no sé qué nombre tenía… ay no sé dónde la guardo… exportar como imagen, mejor dicho es por exportar, exportar vista como imagen (primera imagen), vamos a ponerle está, guardar (segunda

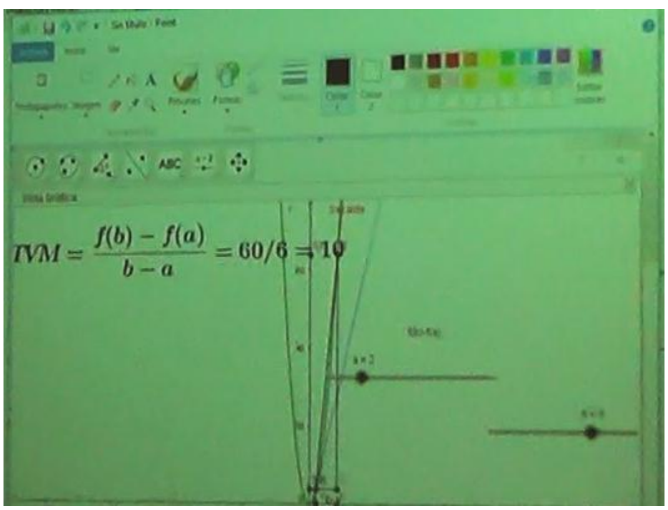
imagen) y le ponemos TVM_sesion2 así lo guardó, descargas TVM_sesion2 estaca y ahí está, no sé porque se ve oscuro ese está

12. 

13. 

14. E: ¿Cómo era imagen qué?
15. M: Es archivo, exportar, vista gráfica de imagen, entonces le damos aquí y aquí le dan el formato los que quieran pero creo que es esta png (se refiere a la opción formato de la imagen anterior)… vamos a ver cómo la guarda, ver, ahí está, quítale la transparencia, hay una cuestión ahí que dice transparencia (se refiere a la quitar la palomita verde de la opción transparente de la imagen anterior) porque queda negra, y ya guardamos la imagen, entonces lo que vamos a hacer ahorita es ir calculando en este archivo y ahí mismo van a ir escribiendo, calculen la tasa de 0 a 2, de 0 a 1, la tasa de variación media de 0 a 0.5, me va reduciendo de 0 a 0.3 y de 0 a 0.1, rapidito así, lo calculen y copian la imagen y vamos lo suben
16. E: No puedo pasarlo
17. M: Ahorita te pasó a ti el archivo, ahorita voy contigo Fanny
18. E: ¿Con qué función lo hacemos profe?
19. M: Con laaa, vamos a hacer esta, con la que teníamos antes la primera vez esta función la que vamos a usar $(x+1)^2+1$ la inicial que habíamos manejado entonces déjeme pasar un archivo a… vamos a ver Dropbox

20. 

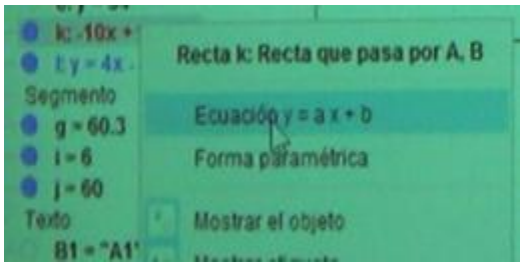
21. M: Muy bien, empiecen hacer esa cuestión, graban a imagen y la pegan, graban la imagen y la pegan, si, ¿si se abrió Estefanía?
22. **Nota: El docente empieza a revisar la actividad de cada estudiante con el propósito de que no se atrasen y que vayan al mismo ritmo que los demás compañeros**
23. M: Si falla, si falla guardar la imagen, en el teclado hay una opción que se llama… este imprimir pantalla, sí saben esa opción el teclado imprime pantalla, ósea dónde está… imprimir pantalla hay una tecla que se llama imprimir pantalla y hay que buscar aquí el Paint, cómo buscó el Paint
24. E: La puede pegar directamente en Word
25. M: Bueno, está bien vamos hacerlo en Word… cuando yo uso Paint, también lo pueden hacer en Word como dicen, y lo pego control V, y ya tengo la imagen, si, entonces la verdad no quiero pegar toda, yo quiero un pedacito, no todo… pues recortan la parte que quieren, esta parte no más, no todo control X, control N, no lo guardo, control V, y ya está es la parte, y ya lo guardó (siguiente imagen), si entonces así puede ser otra opción por medio de imprimir pantalla lo pegan en el Word, o péguenlo en el Word directamente, o se quieren un pedazo lo recortan en el Paint
26. 

27. M: Tienen que poner ahí en el escrito cuánto vale la tasa de variación media si, ponen la imagen y vale tanto, ponen la imagen y vale tanto la tasa de variación media si, Fanny, Esther hay que escribir cuánto vale aparte de la imagen que pongan, por ejemplo, aquí vale 2, le ponemos en este ejemplo vale 2, para que se den cuenta de algo, cada vez se hace más pequeño este el intervalo
28. **Nota: El profesor siguen pasando a revisar el trabajo que están realizando los estudiantes, y que lo estén realizando con las instrucciones que dio. Además los ayuda con la actividad para que los alumnos vayan comprendiendo lo que están haciendo y que de verdad vayan siguiendo las instrucciones de la actividad.**
29. M: ¿Ya Fanny?
30. E: No se quiere guardar

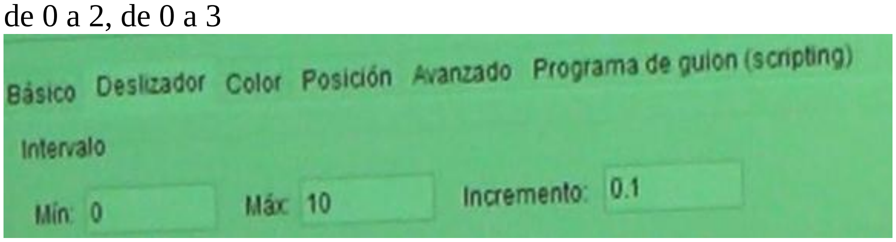
31. M: ¿Ya llegaron al f? ¿quién llegó al f? ¿ustedes?
32. E: Si
33. M: ¿Ya lo hicieron?
34. E: No
35. M: En el f hay que cambiar los incrementos del deslizador a y h a .01 los dos para que puedan hacerlo .01, .01 como ustedes dicen no jala .01 los dos h y a para poder buscar esos intervalos, ahora ubíquenlos hay dos intervalos que les piden de 0 a 0.5 y de 0 a 0.01
36. M: Muy bien, al f, ya casi todos están en el f ¿verdad?... muy bien creo que casi todos llegaron al f, ya llegaron al f ustedes tambien, vean una cosa díganme, Héctor, cada vez que se hace más pequeño ese intervalo 2, 1, .5, qué le pasa a la tasa de variación media, esa es la pregunta g, escríbanla ahí, lo que ustedes consideren, vayan viendo cómo va cambiando los valores de la tasa de variación media y respondan la pregunta g haya en el Word, después me lo dicen pero escríbanlo ahí, sí… todos los cálculos que hicieron cada vez que es pequeño el intervalo ¿qué le pasa a la tasa de variación media?
37. E: Disminuye
38. M: Disminuye pero… tienen que observar cada vez que disminuye cómo disminuye, sólo quiero que entiendan bien esa parte, cada vez que se reduce el intervalo cómo disminuye esa cosa, hay una, hay una preguntan, en la pregunta número i te dice cuándo hiciste el inciso a cuánto le dio la tasa de variación del inciso a la primera ¿cuánto les dio? Diego
39. E: 4
40. M: 4, a todos le dio 4 bueno Diego no porque hiso otra variación cuánto le dio tedio esa función
41. E: 2
42. E2: A mí también
43. M: ¿Hicieron la x^2?
44. E: Si
45. M: Ahí está, entonces y el último cuánto les da la variación la tasa de variación media
46. E: .01
47. M: A ti te da igual (se refiere a una alumna), ¿a ti no te da Maricruz el último el inciso F?
48. E: 2.01
49. M: 2.01, a ti te dio eso (se refiere a otro alumno)
50. E: Si
51. M: ¿Igual a ti Pacheco?
52. E: Si
53. M: Entonces al principio redujo de 4 redujo a 2.01, de 4 a la siguiente redujo a ,3 verdad, de 3 redujo a 2.5, después a 2.3, después a 2.1, ¿qué observan con eso cada vez se hace más pequeño el intervalo?
54. E: Se acerca a dos
55. M: Se acerca a dos, en el caso de ustedes ¿se acerca a qué?
56. E: A cero

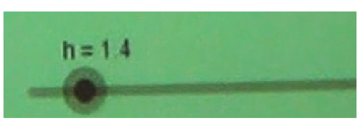
57. M: A cero, pero si la tasa de variación media tiene un intervalo grande pues hay una variación ahí, pero cada vez que se reduce en un punto, hay una cuestión, hay una cosa ahí qué dice sobre la recta secante en el Geogebra… en el Geogebra… aquí está la ecuación de la recta secante(primera imagen), le dan botón derecho y ponen esta forma (segunda imagen), aquí debe aparecer la ecuación de su recta (primera imagen), botón derecho y lo ponen de la forma (segunda imagen) está $y = 10x - 16$ en mi caso no

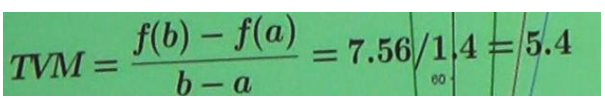
58. 

59. 

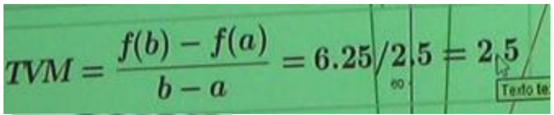
60. M: Si, ok le cambió esto (primera imagen), cada vez que h se va haciendo pequeño cuando el punto se va haciendo pequeño cuánto vale $h = 1.4$ (segunda imagen) la tasa de variación media cuánto vale aquí (tercera imagen), qué relación ven de las tasa de variación media con la ecuación de la recta secante, cada vez que se reduce de 0 a 2, de 0 a 3

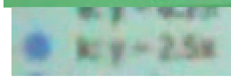
61. 

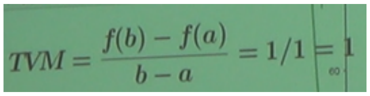
62. 

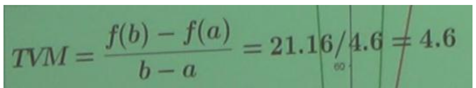
63. 

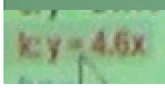
64. M: Fíjense aquí 2.5 y ¿cuál es la ecuación de la recta? Está (segunda imagen la ecuación es $y = 2.5x$), voy reduciendo aquí es 1 (tercera imagen) ¿cuál es la ecuación de la recta? $y = x$, si yo aumento aquí por ejemplo es 4.6 (cuarta imagen) ¿cuál es la ecuación de la recta? (la respuesta es la quinta imagen $y = 4.6x$) ¿ven en algo similar qué?

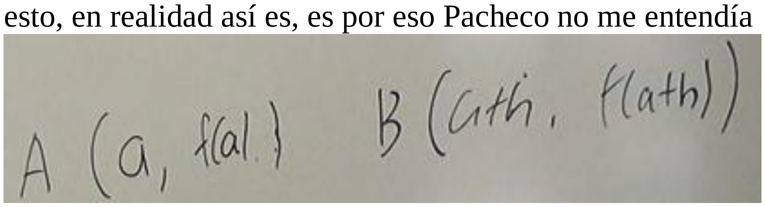
65. 

66. 

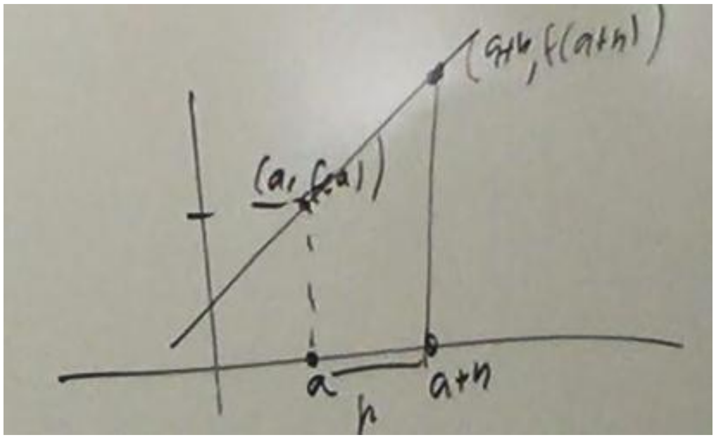
67. 

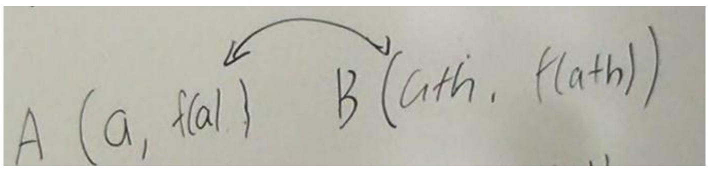
68. 

69. 

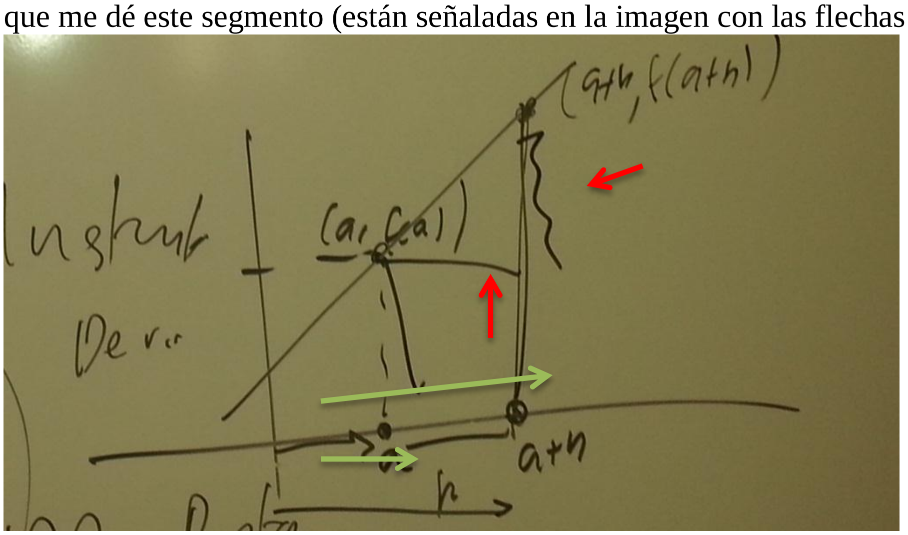
70. E: El coeficiente se reduce a la tasa de variación
71. M: Y el coeficiente de una recta que está junto a la x qué representa
72. E: Pendiente
73. M: La pendiente, y cada vez que nos acercamos a un punto la secante se empieza a convertir, en una recta, que lo que justo está hablando es la pendiente… bueno vamos a ver, creo que ya respondí el inciso j,
74. M: pero inciso k... aquí vienen lo interesante, aquí vienen interesante pongan atención aquí, esto es muy importante, pongan atención, esto es muy importante chequen el inciso k dice ya saben la fórmula de la tasa de variación media ya la saben
75. E: No
76. M: Ya la saben cómo calcular está aquí
77. E: aaah
78. M: Ya la hicieron en Geogebra, ahora hay dos puntos ahí, uno que es $a, a+h$ vamos a llamarle punto A y otro punto B qué es la imagen $f(a)$, $f(a+h)$, en realidad no es así, es así $f(a)$, por eso Pacheco me está diciendo que está mal es esto, en realidad así es, es por eso Pacheco no me entendía
79. 

80. M: Es así, como ubicó esto en el plano cartesiano un punto es a y su imágenes $f(a)$ este es el punto le sumó una h y se vuelve este punto $a+h$ verdad, y su imagen va por acá va a ser $f(a)+h$ como ordenada como abscisa $a+h$, calculen con estos puntos la tasa de variación media eso es algebraico (lo explicado anteriormente lo represento en la primera imagen), háganlo ahí en el Word, lo pueden hacer en Word en un editor de ecuaciones, pero calculen esto, estos son los dos puntos, calcúlenlos cuál es la tasa de variación media de uso dos puntos(segunda imagen)

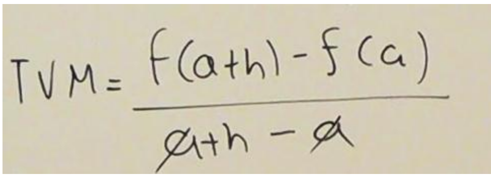
81. 

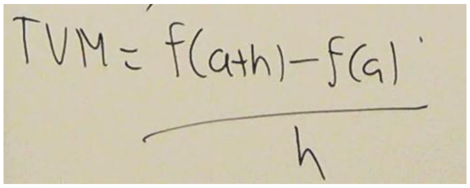
82. 

83. M: Vamos a terminar, ok nomas quiero que entiendan esto… bueno está, ok, cómo hacemos esto, vamos a ver lo que me interesa es esta parte, lo que tiene que ver con lo que hicieron ahorita más que se lleven esto, miren cuando yo hago la fórmula de la tasa de variación media de a esto, siempre son las restas de las imágenes esta imagen menos esta imagen(están señaladas en imagen con las flechas rojas) para que me dé este segmento (están señaladas en la imagen con las flechas rojas),

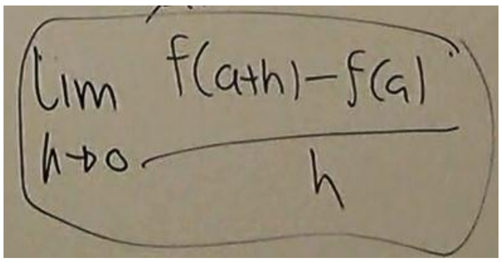
84. 

85. M: Entonces es $f(a+h)-f(a)$ verdad dividido entre las diferencias de sus abscisas está menos está entonces es $a + h - a$ (está marcado con las flechas verdes en la imagen anterior) cancelan esto (primera imagen), y me queda que la tasa de variación media es esto, no, (segunda imagen), en realidad es esto, en realidad esto es lo que estaban haciendo en el 0 a 2, 0 a 1, pero cuando hacia este 0 a 2, 0 a 1, 0 a 0.01, ¿quién está cambiando?¿qué variable está cambiando ahí?

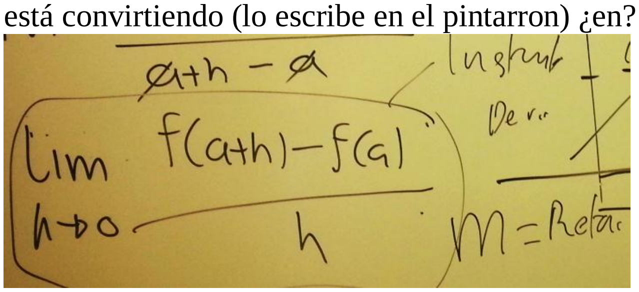
86. 

87. 

88. E: La h
89. M: La h se está haciendo qué, entonces en la siguiente pregunta yo les decía, si a h yo le pongo esta cuestión porque h está tendiendo a cero ¿qué significa para ustedes esto?

90. 

91. E: Es el cambio instantáneo
92. M: Si, ¿Si saben qué es eso del cambio instantáneo? Luis dímelo
93. E: La derivada
94. M: La derivada veían a qué tendían esto, en el caso de Nohemí tendía ¿a qué valor?
95. E: A 6
96. M: En el caso de ustedes ¿tendía a que valor?
97. M: A 2
98. M: A 2, pero si entre intervalo es muy grande no hay un cálculo muy exacto, verdad, pero lo que quería que entendieran la tasa de variación media nos permite calcular el intervalo, pero cuando yo me acerco en un punto esto se llama instantáneo y esto es la derivada, y esto es la pendiente de la recta secante que se está convirtiendo (lo escribe en el pintarron) ¿en?

99. 

100. E: Tangente
101. M: Tangente, si ya me voy porque me están presionando, todavía falta pero lo terminan en la casa, váyanse