UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Conocimiento de dos profesoras de matemáticas en formación continua sobre las dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas en el nivel Secundaria.

Tesis que para obtener el grado de:

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

I.Q. Marlene Vianney Guzmán Castro

Asesora de Tesis:

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Coasesor de tesis:

Dr. Carlos Miguel Ribeiro

Zacatecas, Zac., septiembre 2016

Este trabajo ha sido realizado gracias al
apoyo financiero otorgado por el
Consejo Nacional de Ciencia y
Tecnología (CONACyT) de
Septiembre de 2014 a Julio de 2016.

No. de Becario: 336552

AGRADECIMIENTOS

A mi familia

Por su apoyo y comprensión.

A mi asesora Dra. Leticia Sosa Guerrero

Por sus consejos y guía en la realización de esta tesis. Por su actitud humana, responsable, motivadora.

A mi coasesor Dr. Carlos Miguel Ribeiro

Por sus valiosas observaciones y apoyo durante la realización de este documento.

A M1 y M2

Las dos profesoras que participan en esta investigación, por su disposición.

A mis Maestros

Por enseñarme con paciencia, ética y profesionalismo.

A la Secretaria de Educación del Estado de Zacatecas

Por la Beca Comisión otorgada.

En memoria de mi hermano Juan Alberto.

Zacatecas, Zac., a 31 de Agosto de 2016.

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "Conocimiento de dos profesoras de matemáticas en formación continua sobre las dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas en el nivel Secundaria" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Marlene Vianney Guzmán Castro de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido a las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte de su comité evaluador, por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente.

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Asesora de la tesista

Dr. Carlos Miguel Ribeiro

Coasesor de la tesita

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 31 del mes de Agosto del año 2016, la que suscribe Marlene Vianney Guzmán Castro, alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 20002968; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado “Conocimiento de dos profesoras de matemáticas en formación continua sobre las dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas en el nivel Secundaria” bajo la asesoria de la Dra. Leticia Sosa Guerrero y coasesoramiento del Dr. Carlos Miguel Ribeiro.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Marlene Vianney Guzmán Castro.

Tabla de Contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

RESUMEN

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar el conocimiento de dos profesoras de matemáticas en formación continua, sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático, que ponen en acción al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora sobre el tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria. Para ello utilizamos el modelo del Mathematical Teacher Specialized Knowledge (MTSK), y, de él, el subdominio de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Empleando el estudio de caso instrumental y la observación no participante como método, se lleva a cabo la recolección de datos, para su posterior análisis. El caso está constituido por dos profesoras (M1 y M2) alumnas de un curso de Desarrollo Profesional. Las profesoras observadas tienen conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de los alumnos en el tema de adición de expresiones algebraicas, dando tratamiento desde la planificación.

Palabras clave: conocimiento del profesor de matemáticas, dificultades de aprendizaje, expresiones algebraicas.

Summary

The objective of this research is to characterize the knowledge of two math teachers in continuous training about the difficulties of learning inherent to the mathematical content, that they put in action to plan, execute and make suggestions for improvement on the theme of adding algebraic expressions for second grade of secondary education. We use the model of Mathematical Teacher Specialized Knowledge (MTSK), and, of this, the subdomain of the Knowledge of features of learning mathematics (KFLM). Using the instrumental case study and not participant observation, it is carried out data collection for subsequent analysis. The case consists of two teachers (M1 and M2) students of a course of Professional Development. The teachers observed have knowledge about the difficulties of learning on the subject of addition of algebraic expressions, giving treatment from planning.

Keywords: mathematical teacher knowledge, learning difficulties, algebraic expressions.

ESTRUCTURA DEL TRABAJO

En este apartado describimos la organización que se ha propuesto para la presentación de este reporte de investigación, con el fin de que el lector pueda tener una visión general de la estructura del trabajo y lo que puede encontrar en cada uno de los capítulos que se despliegan.

En el Capítulo I, presentamos la problemática, el problema, la pregunta, el objetivo general y los antecedentes de la investigación. Partimos de la detección de la importancia del conocimiento del profesor en los principios pedagógicos del Plan de Estudios 2011 (SEP, 2011) para lograr la calidad de la enseñanza. El problema de investigación se delimita a la escasa investigación del conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008) específicamente sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático, que ha incidido en la atención de las necesidades del profesor, en este caso en su competencia (Shön, 1987) de ajustar la ayuda didáctica a la individualidad de cada aprendiz (SEP, 2011).

Se dirige la aportación de la investigación a avanzar en la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas, a partir de la pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático ponen en acción dos profesoras en formación continua al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora del tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria? En consecuencia, como objetivo general se plantea su caracterización.

Antes de pasar al siguiente capítulo se hace una revisión de estudios, centrados en los conceptos claves de nuestra investigación: contenido; naturaleza y desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas puesto en acción, así como la naturaleza y clasificación del error.

En el Capítulo II, encontramos el marco teórico, en éste se considera la definición que hemos adoptado por conocimiento profesional del profesor, su naturaleza, su desarrollo y respecto a su contenido el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Dentro del MTSK, se despliega el subdominio del conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de las matemáticas y en éste, la categoría de fortalezas y dificultades asociadas a su aprendizaje, misma que engloba el conocimiento que tiene el profesor sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático y que permite indagar en el conocimiento de las profesoras a partir de sus indicadores de error, obstáculo y dificultad.

En el Capítulo III, describimos el diseño metodológico que se emplea en esta investigación con el propósito de comprender e interpretar sobre el conocimiento de las profesoras que nos ocupa. Dentro del paradigma interpretativo y en sintonía una metodología cualitativa, consideramos el estudio de caso instrumental (Stake, 2007), así como una descripción del mismo. Además, indicamos las técnicas de recolección de información y los instrumentos para su análisis. Finalmente, siguiendo los objetivos particulares de nuestra investigación, se desglosa el método seguido para el análisis de las fuentes primarias (planificación, ejecución y propuesta de mejora) y secundarias (cuestionario), y el cual comprende la identificación del conocimiento de las profesoras considerando los indicadores de conocimiento provenientes de MTSK a partir de la utilización de nuestros instrumentos, seguido de un análisis longitudinal y transversal (Ribeiro, Carrillo y Monteiro, 2012) para triangular y refinar el conocimiento identificado que nos lleva a una caracterización por agrupación en subindicadores de conocimiento.

En el Capítulo IV, se presenta el fruto del método descrito en el capítulo anterior, es decir, el acercamiento hipotético, la identificación del conocimiento de las profesoras en los escenarios propuestos, el agrupamiento por similitud del conocimiento evidenciado y la caracterización del mismo.

En el Capítulo V, se da respuesta a la pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático ponen en acción dos profesoras en formación continua al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora del tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria?, presentando los subindicadores evidenciados; en primer momento, a partir de una tabla resumen y en segundo a partir de la evidencia. Así mismo, se presenta un contraste del análisis hipotético con los subindicadores evidenciados con la finalidad de enriquecer aún más los subindicadores caracterizados.

Por último en el Capítulo VI se presenta a manera de conclusión una serie de observaciones realizadas durante la investigación, en primer momento del conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido y, su relación con otras características de aprendizaje y formas de enseñanza, dentro del modelo MTSK, seguido de las conclusiones obtenidas sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas puesto en acción en los distintos escenarios, sobre la metodología, el análisis de la información, las aportaciones del trabajo, limitaciones y finalmente las recomendaciones para futuros estudios.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Varios estudios en las últimas cinco décadas han sugerido que lo que más impacto tiene en el aprendizaje de las matemáticas es lo que los profesores hacen en el aula (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016), la instrucción. Es el profesor quien con su conocimiento y creencias da forma a la instrucción que recibe el alumno dentro de un contexto social, político, institucional, etc. Por ello, enfocándonos en este ente, es de nuestro interés comprender qué conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático, pone en acción[1] en tres escenarios; la planificación, la ejecución y la propuesta de mejora, con el objetivo de caracterizar dicho conocimiento. En este capítulo comenzaremos por abordar la problemática que se desarrolla alrededor de nuestro problema de investigación, después los objetivos, la justificación y finalmente las investigaciones que anteceden nuestro trabajo y que nos permiten introducir los aspectos clave que se toman en nuestro marco teórico.

Problemática, motivación y contexto.

Motivación personal y contexto.

La motivación por el conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje surge en un ambiente de atención a la diversidad en el aula, donde, desde un punto de vista enfocado en brindar la misma oportunidad de acceso al aprendizaje de las matemáticas, se toma consciencia de la importancia del conocimiento del profesor, como un factor clave para lograrlo.

Considerando esta motivación y con una identificación clara y a la vez burda de un problema, una pregunta y un objetivo de investigación, se eligen intencionalmente dos profesoras de nivel secundaria dentro de un banco de datos de un curso de desarrollo profesional, en el cual, durante un semestre, trabajaron como equipo para obtener una planificación, una ejecución y una propuesta de mejora para el tema de problemas aditivos en segundo grado de secundaria, apoyadas del modelo Mathematical Teacher Specialized Knowledge (Carrillo, et al., 2013), detalles que serán abordados en la metodología y contexto de investigación.

Nuestro proceso de afinamiento, comienza con indagar las exigencias de conocimiento del profesor en los principios pedagógicos del Plan de Estudios 2011 (SEP, 2011) para lograr la calidad de la enseñanza y el contraste con la realidad, como se verá en el siguiente apartado.

[1] Para Ponte (1994), el conocimiento en acción, es un conocimiento que puede hacerse evidente en el desarrollo de su labor docente, mismo que puede basarse tanto en el conocimiento teórico, la experiencia y la reflexión de la experiencia.

Problemática.

En México, el Plan de Estudios 2011 (SEP, 2011) es el documento rector que en educación básica define, el perfil de egreso, los estándares curriculares y los aprendizajes esperados que constituyen el trayecto formativo de los estudiantes de secundaria. Éste, reconoce que la equidad en la Educación Básica constituye uno de los componentes irrenunciables de la calidad educativa. Asimismo, dentro de las condiciones esenciales para la implementación del currículo, la transformación de la práctica docente, el logro de los aprendizajes y la mejora de la calidad educativa considera algunos principios pedagógicos, entre los cuales menciona centrar la atención en los estudiantes y en sus procesos de aprendizaje. Para ello, es necesario reconocer la diversidad en la escuela, manifestada entre otros por la variedad de capacidades, de estilos y ritmos de aprendizaje de la comunidad educativa. A su vez, distingue la planificación como un elemento sustantivo de la práctica docente para potenciar el aprendizaje de los estudiantes, la cual requiere del conocimiento del profesor sobre qué se espera que aprendan los alumnos y de cómo aprenden.

Lo anterior sustenta nuestra reflexión sobre la importancia del conocimiento del profesor, de su relevancia en aportar los elementos adecuados para planificar y realizar su trabajo profesional (Socas, Camacho y Hernández, 1998). Entendiendo que es el profesor quien, con su conocimiento y creencias, da forma a la instrucción que recibe el alumno (dentro de un contexto social, político, institucional, entre otros), jugando un papel central en el proceso de enseñanza y aprendizaje, conocimiento que incide directamente en las matemáticas que está aprendiendo el alumno y en el cómo las aprende (e.g., Kersting, Givvin, Thompson, Santagata, y Stigler, 2012; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016).

Profesores con más conocimiento utilizable[2] son capaces de aplicar ese conocimiento para diseñar y mejorar la instrucción en sus aulas, los estudiantes expuestos a instrucciones de alta calidad aprenden más que los estudiantes que no lo son (Kersting, et al., 2012). Es decir. existe una relación entre el conocimiento del profesor y el aprendizaje de los alumnos, relación que es mediada por la instrucción. En este sentido, el conocimiento del profesor de matemáticas le permite apoyar a los estudiantes durante la instrucción, responder de forma apropiada a las respuestas erróneas de los alumnos y capitalizar sobre sus trabajos para hacer frente a las dificultades de aprendizaje (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016).

Sin embargo, a pesar de que es conocido el impacto del conocimiento del profesor en el aprendizaje de los alumnos, según Ball, et al. (2008) la atención que se le ha dado a su investigación ha sido desigual. Después de esfuerzos realizados, los investigadores señalan que, su naturaleza sigue siendo malentendida y los marcos teóricos que lo abordan, subdesarrollados. Más aún, argumentan que desde finales de la década de los ochenta, la

[2] Conocimiento al que un profesor es capaz de acceder al diseñar y mejorar la instrucción (Kersting, et al., 2012).

mayoría de las investigaciones se han enfocado a apoyar la existencia del Conocimiento Didáctico del Contenido y su papel dentro de la enseñanza-aprendizaje, a partir de argumentos lógicos, dejando de lado su observación en el aula.

Lo anterior se agudiza si de forma paralela consideramos la crisis de confianza en el conocimiento profesional, problema latente detectado por Shön (1987), sobre la incapacidad del profesional de satisfacer todas las expectativas respecto a su actuación competente, volviéndose sujeto de expresiones de desaprobación e insatisfacción. Crisis de confianza a la que podemos aunar aspectos específicos mencionados en otras investigaciones, como el de que los profesores muchas veces suponen cómo los niños ejecutan los cálculos, basados en sus propios métodos, o bien en alguna noción de lo que creen deberían hacer (Resnick y Ford, 1998), o, de forma general, la existencia de una tendencia a ver la planificación como la secuenciación de contenidos y a considerar la enseñanza como un “cubrimiento” de éstos, sin contemplar las dificultades de aprendizaje a las que se enfrenta el alumno en el tema matemático específico (Rico, 1997).

Problema, pregunta y objetivo de investigación.

Partiendo de la problemática detectada, delimitamos nuestro problema a **la escasa investigación del conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas (Ball, et al., 2008) específicamente sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático, que ha incidido en la atención de las necesidades del profesor, en este caso en su competencia (Shön, 1987) de ajustar la ayuda didáctica a la individualidad de cada aprendiz (SEP, 2011).**

Reflexionamos en la comprensión del conocimiento del profesor como un primer paso para atender este problema y problemática asociada. Misma que nos enfoca en una línea de investigación, el contenido del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. En esta dirección, es de nuestro interés, por un lado, identificar el conocimiento que manifiestan las profesoras en formación continua sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático y de forma asociada, comprender qué de éste pone en acción en tres escenarios, la planificación, ejecución y propuesta de mejora (planificación actualizada producto de la reflexión de la puesta en escena). Para tal efecto tomaremos el tema de adición de expresiones algebraicas en segundo grado de educación secundaria, debido a las dificultades que presentan los alumnos principiantes en el álgebra en su transición desde la aritmética (e.g., Ruano, Socas y Palarea, 2008; Palarea, 1999; Kieran, 2006; Kieran y Filloy, 1989; Socas, Camacho y Hernández, 1998).

En ese sentido, nuestra pregunta de investigación es:

¿Qué conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático ponen en acción dos profesoras de matemáticas en formación continua, al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora del tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria?

Centrados en esta pregunta, hemos considerado la aportación de Kersting, et al. (2012), quienes mencionan que avances importantes en la comprensión del conocimiento del profesor han resultado de la identificación de categorías de conocimiento que pueden afectar directamente la instrucción, además de los esfuerzos por estudiarlo a través de instrumentos desarrollados. En consecuencia, como una vía a la categorización, nos sumamos a estos esfuerzos de comprensión del conocimiento del profesor a través de los instrumentos desarrollados, planteado como objetivo general:

Caracterizar el conocimiento sobre dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático que ponen en acción dos profesoras de matemáticas en formación continua al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora sobre el tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria.

Dado nuestro interés, en primer momento de identificar y de forma asociada comprender qué de éste ponen en acción teniendo como objetivo la caracterización. Entendemos que caracterizar es comprender las diferencias y similitudes del conocimiento del profesor que nos ocupa y agruparlas en consecuencia. Así pues, nuestro objetivo general se concreta a partir de tres objetivos particulares secuenciados:

- Objetivo Particular 1: Identificar el conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas que revelan y ponen en acción las profesoras de matemáticas en formación continua al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora.
- Objetivo Particular 2: Comprender de forma más amplia las diferencias y similitudes del conocimiento identificado.
- Objetivo Particular 3: Caracterizar el conocimiento de las profesoras de matemáticas en formación continua sobre dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas en segundo de secundaria.

Justificación.

Del conocimiento del profesor.

La comprensión de los temas principales en el proceso de enseñanza y aprendizaje no pueden estudiarse solo mirando al estudiante (Ponte, 1994), frente a la diversidad de los alumnos, el conocimiento del profesor es un factor clave, ya que subyace a la comprensión flexible y polifacética que le permite impartir explicaciones alternativas de los mismos conceptos y principios para el alumno, representando una oportunidad equitativa y adecuada para aprender (Shulman, 1987).

Aunado a lo anterior, las investigaciones no han logrado aún establecer definiciones acordadas que, sumado a la falta de pruebas empíricas, han limitado el avance de la comprensión sobre la relación entre el conocimiento del profesor, la enseñanza y el aprendizaje (Ball, et al., 2008). Es así, que, dentro de la Matemática Educativa indagar en el conocimiento que ponen en acción las dos profesoras en formación continua sobre las dificultades de aprendizaje de las matemáticas, puede permitirnos avanzar en la comprensión de esta relación.

Asimismo, analizar en profundidad el conocimiento de las profesoras de matemáticas, puede contribuir, por un lado, a la comprensión del conocimiento didáctico del contenido de otros profesores y, por otro, a la vinculación investigación-práctica ya que las categorías e indicadores pueden servir como fuente para el trabajo de la enseñanza y ser tomados en cuenta para la formación del profesor (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015).

Del conocimiento del profesor puesto en acción en diferentes escenarios.

Basados en las ideas de Shulman (1987), partimos de que el proceso de enseñanza comienza con un desafío para las profesoras, comprender el tema matemático y transformarlo en un contenido apropiado para la instrucción. Visualizamos y no limitamos esta etapa en la planificación, es decir, consideramos la planificación como parte de un proceso de desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas que comienza con un razonamiento dirigido a la comprensión de aquello que se ha de aprender y cómo se debe enseñar, para después a través de una serie de actividades, ofrecer la oportunidad de aprender a todos los estudiantes (la ejecución), proceso que culmina a partir de la reflexión en la acción (Shön, 1987) en una nueva compresión de las profesoras[3] y, en una oportunidad dado el desarrollo de su conocimiento, para realizar una propuesta de mejora a la planificación inicial, que puede utilizarse como punto de partida hasta que el ciclo pueda reiniciarse.

De este proceso que se fundamenta en la reflexión sobre lo que se está haciendo y de la utilización de su conocimiento para fundamentar sus decisiones e iniciativas (Shulman, 1987), entendemos al igual que Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) que el conocimiento en acción se demuestra en la planificación y en el acto mismo de enseñar, la ejecución. Siendo además la propuesta de mejora el acto final y de inicio en este ciclo de razonamiento. Por tal, las tres

[3] Postulado que deriva desde la perspectiva del profesor sin pretender restarle importancia al aprendizaje del alumno, al contrario, admitiendo que un tratamiento adecuado de resultados educacionales tiene que considerar tanto los resultados para los profesores como los alumnos (Shulman, 1987).

fuentes consideradas son importantes en medida que dan evidencia del conocimiento del profesor.

Del enfoque del conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas.

El álgebra escolar es considerada como una de las partes de la matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo, por su potencia y simplicidad, pero que su aprendizaje genera muchas dificultades mismas que siguen presentándose en alumnos de niveles superiores (Socas, et al., 1998; Kieran y Filloy, 1989). Incluso algunos de los alumnos más capaces para las matemáticas, encuentran grandes dificultades cuando inician su aprendizaje en el álgebra (e.g., Ruano, et al., 2008, Socas, et al., 1998). En ese sentido, un enfoque en el conocimiento del profesor en el tema del álgebra se torna esencial.

Antecedentes.

Nuestro interés por la comprensión del conocimiento del profesor del cual se desprende nuestra pregunta y objetivo de investigación nos lleva a desglosar qué se ha hecho respecto al papel de las dificultades de aprendizaje en el contenido del conocimiento del profesor cuando éste es observado en su labor docente, en acción. Lo anterior, en un panorama particular, con profesoras en formación continua que han utilizado el modelo MTSK (Carrillo, et al. 2013) como herramienta para el diseño de planificación dentro de un curso de desarrollo profesional.

En esta dirección, para efectos de encuadre, se desarrollan cuatro ejes no disjuntos para abordar este apartado. En primer momento abordamos algunos estudios sobre los intentos que se han realizado con la intención de caracterizar el conocimiento del profesor y de los cuales han surgido categorías de conocimiento, específicamente cuál ha sido el papel de las dificultades de aprendizaje en estos hasta llegar al MTSK, seguido de algunos sobre la naturaleza del conocimiento que se identifica, para después exponer otros sobre el desarrollo del conocimiento profesional del profesor centrado en el aprendizaje del alumno, dado el panorama anterior. Por último, siendo conscientes de la importancia de la psicología cognitiva y psicolingüística para la comprensión del conocimiento de nuestro interés abordamos algunos estudios sobre el análisis las dificultades de aprendizaje en los alumnos principiantes de álgebra concentrándonos en aquellos que empatan con el tema de adición de expresiones algebraicas.

Sobre el papel del error en el contenido del conocimiento del profesor.

En este apartado iniciamos como ya mencionamos dando un panorama que engloba algunos de los esfuerzos realizados para comprender el conocimiento del profesor en general y de matemáticas en particular. Esfuerzos que han derivado en su caracterización, ofreciendo una lente para indagar en el conocimiento qué pone en acción el profesor a la hora de enseñar matemáticas.

Comenzamos por el trabajo de Shulman (1986), considerado como la mayor aportación teórica dentro del dominio del conocimiento del profesor (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016) y en el cuál se han sustentado las bases para el surgimiento de los modelos que dentro de lo que nos compete abordaremos en este apartado.

Shulman (1986) con la intención de comprender el conocimiento del profesor, la transición del alumno experto al profesor principiante y, replantear las formas en que se atiende el desarrollo del profesor, propone que para indagar en la mente de los profesores se tiene que distinguir entre tres categorías de conocimiento: Conocimiento del Contenido (*Subject Matter Content Knowledge, SMK*); Conocimiento Curricular (*Curricular Knowledge*); Conocimiento Didáctico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge, PCK*).

Es precisamente en el PCK que Shulman (1986) considera el conocimiento del profesor sobre "*las maneras de representar y formular la materia que la hacen comprensible a los demás (…), de lo que hace el aprendizaje de temas específicos, fácil o difícil*" (p. 9), las concepciones y preconcepciones que el alumno puede traer consigo a la hora de abordar un tema y la consideración de que éstas pueden ser erróneas, en cuyo caso, considerando su influencia en el posterior aprendizaje, el profesor necesitaría del conocimiento de estrategias para la reorganización de la comprensión de los estudiantes.

Ball et al. (2008) identifican que el conocimiento matemático del profesor de matemáticas para las tareas de enseñanza demanda formas distintas a las descritas por Shulman (1986) bajo la etiqueta del conocimiento didáctico del contenido. Reconocen que las líneas entre sus subdominios de conocimiento pueden ser sutiles. Ejemplifican que una respuesta errónea, en primer lugar, puede ser reconocida por el conocimiento común del contenido, mientras que dimensionar la naturaleza del error de los estudiantes puede ser un conocimiento del contenido especializado o conocimiento del contenido y los estudiantes dependiendo de las habilidades y experiencia del profesor, además, decidir cuál es la mejor forma de remediar el error puede requerir conocimiento de contenido y enseñanza.

Carrillo, et al. (2013) en la conceptualización del Mathematical Teacher Specialized Knowledge (MTSK) engloban el conocimiento y habilidades del profesor de matemáticas sobre las características de aprendizaje de las matemáticas de manera integral a través de un subdominio del PCK denominado conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas. En este subdominio se considera como foco principal el contenido matemático como objeto de aprendizaje y no el estudiante. Reconocen que el conocimiento del profesor puede ser fundamentado en teorías sobre el aprendizaje matemático o en la reflexión del profesor sobre su experiencia. Consideran, además, la importancia del conocimiento sobre dificultades de aprendizaje a través de los indicadores de conocimiento: error, obstáculo y dificultad. En el Capítulo II, se aborda de manera más amplia este modelo, referente principal de esta investigación dada la naturaleza de nuestro caso de estudio.

Por último, en la misma línea, partiendo de nuestra pregunta de investigación la cual enfoca a identificar, qué conocimiento ponen en acción dos profesoras en formación continua sobre dificultades de aprendizaje inherentes al contenido, nos orienta a detectar otro estudio focalizado a realizar una caracterización más fina, específicamente en lo que respecta a dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático.

Así, Sosa, et al. (2015) con el objetivo de comprender e interpretar el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas dentro del marco de desarrollo del MTSK, se enfocan en el conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas, evidenciado en la práctica. Obtienen un sistema de categorías construido a partir de indicadores basados en literatura especializada y en datos empíricos propios de la investigación. Respecto a indicadores del conocimiento del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas, identifican:

- Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
- Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo, con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).
- Conocer las confusiones y errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente, o no respetar las convenciones matemáticas.
- Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.
- Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.
- Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.

Por otro lado, entendemos que el conocimiento que identificaremos a partir de su observación en la práctica que engloban nuestros escenarios tiene cierta naturaleza, por ello desglosamos el siguiente apartado.

Sobre la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Uno de nuestros intereses es identificar el conocimiento del profesor que pone en acción en tres escenarios para posteriormente caracterizarlo.

En esta dirección, Shön (1987) llama la atención al terreno de la práctica profesional, donde en nuestro caso las profesoras de matemáticas se enfrentan a las situaciones problema de formas muy diferentes, en función de su experiencia disciplinar, las situaciones del pasado, intereses y perspectivas de enseñanza. Es así que, el conocimiento que ponen en acción las profesoras ante una situación de error del alumno puede ser diferente. El autor menciona que existen zonas indeterminadas en la práctica, tal es el caso de la incertidumbre y la singularidad de los casos que se presentan. Por eso, cuando un práctico reconoce una situación como única, no puede tratarla solamente mediante la aplicación de teorías y técnicas derivadas de su conocimiento profesional. Por ejemplo, un profesor de matemáticas es capaz de detectar algún tipo de confusión y, en simultáneo, algún tipo de comprensión intuitiva por el simple hecho de escuchar la pregunta que le hace un alumno y para lo que no dispone de una respuesta inmediata. Por lo que, si se pretende abordar el problema con competencia habrá que recurrir a algún tipo de improvisación, inventando y probando en la situación concreta estrategias propias. Es así que un profesor de matemáticas puede saber más de lo que puede decir (en cierta forma no es consciente de cómo lo hace), fenómeno que acuña según el autor, el concepto sobre la naturaleza tácita del conocimiento. Así mismo, el autor reconoce que este conocimiento a su vez es dinámico, contextualizado y práctico. Aspectos que se desarrollan de manera más amplia en el capítulo II.

En la misma dirección, Ponte (1994) nos menciona que la espontaneidad con que se da el mundo de la experiencia es diferente de otros mundos, es decir, la experiencia es personal, dando respuesta al por qué en un evento similar una persona puede responder de maneras muy distintas desde esta experiencia y justificando, del mismo modo, el porqué las diferentes formas de actuar entre los profesores, ante la presencia de una misma manifestación de error.

Por otro lado, en cuanto a su identificación del conocimiento en acción, Ribeiro, Carrillo y Monteiro (2012) han desarrollado un instrumento para observar el conocimiento en la acción a partir de reconocer que el proceso de enseñanza depende en gran medida del papel interpretado por el profesor, ya que sus decisiones influyen directamente durante todo el proceso. Por ello, consideran que centrarse en las acciones del profesor, permite obtener una mayor comprensión de cómo las decisiones influencian o son influenciadas por el conocimiento y de cómo las cogniciones (creencias, conocimiento y objetivos) subyacen a las acciones del profesor. Aluden a que, el profesor de matemáticas es capaz de construir, adaptar o remodelar los objetivos de acuerdo a su experiencia y su conocimiento, por ello, de cara a la investigación del conocimiento profesional del profesor aquellos que se tornan explícitos en la acción son los que ofrecen información más rica y fidedigna.

Es entonces que, consideramos la importancia de la toma de decisiones didácticas en los tres escenarios, un reflejo del conocimiento en acción del profesor de matemáticas. Además, somos conscientes de que es en el proceso cíclico de razonamiento donde se construyen y, por tanto, un medio para el desarrollo del conocimiento profesional del profesor. Esta reflexión nos lleva a considerar otros estudios como se abarca en la siguiente sección.

Sobre el desarrollo del conocimiento profesional del profesor y el error.

Shulman (1987) enfocado en comprender cuáles son las fuentes base de conocimiento para la docencia, en qué términos pueden ser conceptualizadas y cuáles son sus implicaciones para las políticas educativas, contempla, sobre la idea de una enseñanza que enfatiza en la comprensión, el razonamiento, la transformación y la reflexión, el modelo de razonamiento y acción pedagógica.

A partir de reconocer que el conocimiento base[4] debe ocuparse de los objetivos de la educación, de los métodos y las estrategias de enseñanza, menciona que en cada proceso de enseñanza el profesor debe poseer la comprensión y capacidades de transformación, es decir, la capacidad de captar la idea, sondearla y comprenderla para luego darle vueltas en la cabeza con el objetivo de advertir sus diversas facetas lo que le permitirá moldear o adaptar la idea hasta que pueda ser captada a su vez por los alumnos, acto que no considera pasivo ya que requiere de la interacción enérgica con las ideas (naturaleza dinámica del conocimiento profesional, Shön, 1987).

En esta capacidad de transformación considera una etapa de adaptación y ajuste a las características de los alumnos, donde se considera la diversidad en el aula, los conceptos erróneos, las dificultades y las estrategias de los alumnos que pueden influir en la manera en que ellos abordan, interpretan, comprendan o malentiendan el contenido.

Por su parte, Rowland, et al. (2005) se interesan en la identificación de oportunidades de mejora a partir del conocimiento de estudiantes para profesor. Parten de las ideas de Shulman (1987) y de considerar que la aplicación del conocimiento de la materia en el aula es clara siempre que se base en el conocimiento funcional.

Identifican 4 dimensiones: fundamentos, transformación, conexiones y contingencias. Modelo conocido como Knowledge Quartet.

A través de la dimensión de transformación distinguen la importancia de recoger el comportamiento del profesor dirigido al alumno fruto de la deliberación y juicio informado por los fundamentos. Aluden a que el conocimiento que le permite confrontar y resolver ideas erróneas en los alumnos, es puesto en acción en la planificación y en el acto mismo de enseñanza.

Del mismo modo, a través de la dimensión de contingencias, distinguen el potencial que tiene el alumno para movilizar el conocimiento del profesor a partir de declarar que existen eventos

[4] Cuando se refiere al conocimiento base, entiende un conjunto codificado o codificable de conocimientos, destrezas, comprensión, entre otros, así como un medio para comunicarlo.

casi imposibles de planificar (lo que podemos relacionar a la naturaleza tácita del conocimiento profesional, Shön, 1987), mismos en los que el conocimiento del profesor ayuda a decidir si es necesario apartarse de su propia planificación, en caso de considerar la contribución del estudiante, un beneficio para la clase.

Por otro lado, en el estudio de los conceptos erróneos de los estudiantes y su influencia en el posterior aprendizaje ha sido uno de los tópicos más fértiles para la investigación cognitiva una fuente de conocimiento para los profesores, ya que tal conocimiento es un componente importante de la comprensión didáctica de la materia. En esta dirección rescatamos algunos estudios que han surgido y que empatan con el contenido matemáticos de nuestro interés.

Sobre la naturaleza y caracterización del error.

Consideramos investigaciones como la realizada por Matz (1980), quien manifiesta los solucionadores de problemas principiantes tienden a cometer los mismos errores, presentando una tendencia uniforme. Explica esta regularidad al proponer que el alumno emplea dos componentes razonables ante la resolución de un problema: el conocimiento de una regla (base) que el alumno extrae de un prototipo o directamente de un libro (uso de una regla inapropiada); o la extrapolación de un conjunto de técnicas que especifican formas de conectar las reglas conocidas con problemas desconocidos (adaptar una regla conocida a un problema nuevo).

Por su parte, Brousseau (1983) menciona que un conocimiento es siempre el fruto de una interacción del alumno con su medio y más precisamente con una situación que hace el conocimiento “interesante”, óptimo, en un cierto dominio definido. Indicando que es inevitable que esta interacción desemboque concepciones erróneas, por ello, dado que éstas son comandadas por las condiciones de interacción, el objeto de la didáctica es buscar cuáles son las que el profesor puede más o menos modificar. Del mismo modo, establece que, si se quiere desestabilizar una concepción errónea bastante enraizada, es ventajoso que el alumno pueda invertir suficientemente sus concepciones dentro de situaciones bastante importantes para él, ya que, si las situaciones resultan evidentemente ventajosas, el alumno renunciará y establecerá nuevas estrategias.

Kieran y Filloy (1989) efectúan una descripción de algunos procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del algebra. Del mismo modo, dentro de las tendencias del pensamiento algebraico, destacan la influencia de la psicolingüística y la teoría del procesamiento de la información, como disciplinas que se relacionan con la didáctica de las matemáticas ya que permiten delimitar un modelo procesual de las habilidades humanas que explica la aparición del error en los procedimientos sintácticos de los usuarios del lenguaje algebraico. Prestan atención al significado, con preferencia al abstracto que ha proporcionado un punto de vista pragmático, y ha conducido a un cambio de dirección en el interior del trabajo del álgebra que se aparta de la competencia y se va a la actuación del usuario del lenguaje algebraico. Se pretende que la gramática -el sistema formal abstracto del álgebra- y la pragmática -principios del uso del lenguaje algebraico- sean dominios complementarios en el estudio de la psicología del aprendizaje. Proponen una noción de "*sistemas matemáticos de signos*" (SMS) suficientemente capaz como para tratar con una teoría de producción de SMS que a su vez incorpore los sistemas de signos intermediarios [5] que el aprendiz tendrá que rectificar eventualmente, de manera que al final del proceso de enseñanza el alumno llegue a ser competente.

Socas, et al. (1998) realizan entre otros, un análisis de los errores, obstáculos y dificultades en el aprendizaje del lenguaje algebraico en secundaria y reflexionan sobre su posible implicación en una propuesta de formación del profesorado en secundaria. Diferencian del conocimiento didáctico y del conocimiento de la práctica educativa, este último como otro componente del conocimiento profesional del profesor. Mencionan que el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático debe aportar los elementos de análisis adecuados para planificar y realizar el trabajo profesional mismo que puede desarrollar de la profundización en el currículo. Caracterizan los errores en los que tienen su origen en un obstáculo, en la ausencia de sentido y en actitudes afectivas y emocionales. Las dificultades son de naturaleza diferente y tienen que ver con la complejidad de los objetos del algebra, con los procesos del pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con los métodos de enseñanza y con las actitudes emocionales y afectivas hacia el álgebra.

A su vez, bajo la misma caracterización del error, Ruano, Socas y Palarea (2008) realizan un análisis y clasificación (según el origen) de los errores cometidos por estudiantes de secundaria en los procesos de generalización, sustitución formal y la modelización. Concluyen que en general los errores dependen de las tareas presentadas y del proceso desarrollado. Expresan además que es conveniente prestar atención a la prevención y remedio de estos errores en el tratamiento del lenguaje algebraico fijándose principalmente en el origen de los mismos. De modo que las estrategias de remedio van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las matemáticas. Para ello, el profesor debe provocar conflicto en la mente del alumno sustituir los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada.

Por su parte, Palarea (1999), realiza una detección de comunes cometidos por alumnos de 12 a 14 años, con la finalidad de tener elementos para elaborar una propuesta curricular para la

[5] Que no pueden ser considerados SMS por el carácter personal del código (inventado por el alumno) que no le permiten utilizar el sistema en un proceso de comunicación debido a que carecen de una convención socialmente aceptada. Sin descartar que se debe estar preparado para estudiar este sistema de signos (ya que también es necesario observar el pensamiento matemático del alumno) con el fin de intentar interpretar los códigos personales, necesario para develar los obstáculos que produce la tensión de tratar con los SMS diferentes a los que el usuario tiene disponibles mientras está tratando de crear un nuevo SMS (Kieran y Filloy, 1989).

enseñanza/aprendizaje del algebra, en esta detección utiliza la misma clasificación de error que Ruano, et. al. (2008).

Dados los anteriores, visualizamos la existencia natural de mensajes y procesamientos lógicos o razonables que surgen en la construcción del significado estricto del tema matemático en cuestión y que tienen según Matz (1980) una tendencia uniforme. Nuestro enfoque al respecto se guía a la detección de estas regularidades, mismas que abordaremos en el siguiente capítulo.

Finalmente, en este capítulo presentamos el problema de investigación, el cual se delimita a la escasa investigación del conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas (Ball, et al., 2008) específicamente sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático, que ha incidido en la atención de las necesidades del profesor, en este caso en su competencia (Shön, 1987) de ajustar la ayuda didáctica a la individualidad de cada aprendiz (SEP, 2011). Lo anterior aunado a una revisión de antecedentes, centrados en los conceptos claves de nuestra investigación: contenido, naturaleza y desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas puesto en acción, así como, de las dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas. Revisión que es plataforma esencial para la identificación de los aspectos a considerar en el Marco Teórico que se desglosa en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Teniendo en vista profundizar en qué conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las matemáticas ponen en acción dos profesoras de matemáticas en formación continua, al planear, ejecutar y hacer la propuesta de mejora en el tema de adición de expresiones algebraicas, surge la necesidad de desarrollar tres ejes fundamentales en este capítulo. Para efectos de encuadre, primero presentamos la matemática elemental en esta investigación, después exponemos la conceptualización de conocimiento profesional del profesor y su naturaleza, para dar paso a su contenido a través de la presentación del modelo MTSK, referente principal en este estudio sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, enfocándonos en detallar uno de sus subdominios, el conocimiento referente a las características del aprendizaje de las matemáticas y de éste el conocimiento sobre las fortalezas y dificultades de aprendizaje de las matemáticas a partir de los indicadores de conocimiento: error, obstáculo y dificultad.

Matemática elemental.

Para desarrollar el siguiente apartado nos hemos apoyado de González y Mancill (1974).

Consideramos pertinente empezar por clarificar que entendemos por *expresión algebraica* a toda combinación de números y símbolos numéricos (letras), o de letras solamente mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (ejemplo: $\boldsymbol{3x^2+5x+\frac{x}{2}}$)

Los autores indican que las expresiones algebraicas se clasifican en monomios, binomios, trinomios y polinomios. Considerando como un *monomio* a todo número, letra, o el producto o cociente de tales números y letras (ejemplo: $\boldsymbol{3x^2}$, $\boldsymbol{5x}$, $\boldsymbol{\frac{x}{2}}$). Así mismo, cuando un monomio contiene varios factores, a cada factor o grupo de factores se le llama *coeficiente* de los restantes. Cabe señalar, que cuando se habla de coeficiente de un monomio se entiende generalmente que es un factor numérico, aunque, éstos también pueden estar representados por letras. En la misma dirección, los coeficientes $\boldsymbol{+1}$ o $\boldsymbol{-1}$ pueden siempre sobreentenderse a los monomios que no tienen factores numéricos expresos.

Ahora, cuando en un monomio existen factores repetidos las potencias correspondientes se indican por medio de *exponentes* (ejemplo: $\boldsymbol{5xxa}$, se escribe $\boldsymbol{5x^2a}$). Del mismo modo que, cuando el factor solo aparece una vez se sobreentiende que el exponente es $\boldsymbol{1}$.

Por su parte, los *binomios* son la suma o diferencia indicada de dos monomios (ejemplo: $\boldsymbol{5+3}$; $\boldsymbol{a+b}$).

Los *trinomios* son la suma o diferencia indicada de tres monomios (ejemplo: $\boldsymbol{5+3+a}$).

Los *polinomios* son la suma o diferencia indicada de más de tres monomios (ejemplo: $\boldsymbol{x+5+3+a}$). Es necesario considerar que en ocasiones el concepto de polinomio se amplía en una denominación más general comprendiendo también a los monomios, binomios y trinomios. Los monomios que componen un polinomio se llaman también *términos del polinomio*. Debe aclararse que cuando no se pone signo delante del primer término debe entenderse que es positivo (+), y además que, el signo que precede a cada término se considera como formando parte del coeficiente numérico del mismo. En este sentido, de acuerdo con los convenios establecidos $\boldsymbol{3x-8g+3-a}$, no es sino una manera breve de expresar la suma algebraica $(+\boldsymbol{3x})+(-\boldsymbol{8g})+(+\boldsymbol{3})+(-\boldsymbol{a})$.

Dos *términos son semejantes* cuando ambos son numéricos (ejemplo: $+\boldsymbol{5}$ y -2) o cuando ambos se componen de los mismos factores (o divisores) literales con exponentes correspondientes iguales (ejemplo: $+\boldsymbol{5xyz}$ y $-\boldsymbol{20xyz}$).

Ahora, cuando en un polinomio figuran términos semejantes estos se pueden reducir en un solo término (ejemplo: $\boldsymbol{x+5+3+a=x+8+a}$).

Se llama *suma algebraica* a la suma de números relativos o de símbolos que representen números relativos (ejemplo: $(+\boldsymbol{5})+(+\boldsymbol{3})+(-\boldsymbol{1})$; $\boldsymbol{a+b+c}$).

La *adición de expresiones* algebraicas:

- Suma de monomios: sumar varios monomios es formar un polinomio cuyos términos son los monomios dados.

- Suma de polinomios: sumar varios polinomios es formar un nuevo polinomio cuyos términos sean todos y cada uno de los términos de los polinomios dados

La adición de expresiones algebraicas cumple con las siguientes *propiedades*:

Conmutativa: $\boldsymbol{a+b=b+a}$

Asociativa: $\boldsymbol{a+[b+c]=[a+b]+c}$.

Existencia del idéntico aditivo de la suma, elemento neutro: $\boldsymbol{p+0=p}$.

Existencia del inverso aditivo: $\boldsymbol{p+[-p]=0}$.

Por último, para proceder con la *adición de expresiones algebraicas* (algoritmo), se reagrupan los términos semejantes usando las propiedades conmutativa y asociativa, y luego utilizamos la propiedad distributiva para combinar los coeficientes de los términos semejantes (ejemplo: $\boldsymbol{bx+cx=x(b+c)=(b+c)x}$).

El conocimiento matemático es considerado como un dominio de conocimiento del profesor de matemáticas. En la siguiente sección una vez aterrizada la matemática elemental, reorientamos la visión para mostrar que entendemos por conocimiento, sin olvidar que el conocimiento profesional que observaremos tiene cierta naturaleza, por lo que dentro del mismo apartado desarrollamos algunos aspectos al respecto.

Conocimiento profesional del profesor y su naturaleza.

Antes de abordar el conocimiento profesional del profesor es necesario explicitar qué entendemos por conocimiento, para esto, nos apoyamos en la definición de Ponte (1994). Es así que, el conocimiento de un individuo puede ser considerado como una amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que posee el ser humano, en dónde, tanto las concepciones que lo subyacen, como las creencias[6] que las permean y, son permeadas a su vez en una relación bidireccional, forman parte de él.

En sintonía con esta definición adoptamos que el conocimiento profesional del profesor se refiere a *"la conjunción de todos los saberes* y *experiencias que un profesor posee* y *de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente, que va construyendo desde su formación inicial* y *durante toda su carrera profesional"* (Climent, 2002, p. 53).

De esta la anterior toma particular relevancia un elemento discriminador "*de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente*", haciendo alusión a que no todo saber y experiencia tiene cabida como conocimiento profesional del profesor.

Por otro lado, consideramos que la identificación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas que nos ocupa, tiene cierta naturaleza.

Comenzamos por aludir que, la competencia de un profesor de matematicas no depende de su capacidad de descibir lo que sabe, cómo lo hace o de albergar conscientemente el conocimiento que revelan sus acciones. Para Shön (1987), pensar en lo que se hace no implica, pensar qué hacer y a la vez hacerlo, es decir, se realiza una sola cosa y no dos, por esa razón se dice saber más de lo que se puede decir. Segùn el autor, los tipos de conocimiento que revela el profesor a través de las acciones inteligentes, en las ejecuciones espontáneas y hábiles que paradojicamente se es incapaz de hacerlo explicítamente verbal por su naturaleza *tácita[7] e intuitiva* (Shön,1987), manifiestan la importancia de observar, el conocimiento en acción.

De la misma forma, también debemos reconocer, que aunque el conocimiento en ación es *dinámico*, algunas veces es posible realizar una descripción del conocimiento tácito implícito

[6] Para definir creencia Ponte (1994) se apoya en Pajares (1992), considerando que son las 'verdades' personales que tiene cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen una fuerte componente afectiva y evaluativa. Estas pueden tener diferentes grados de convencimiento. Mientras que las concepciones son según el mismo autor los esquemas subyacentes de organización de conceptos que tienen esencialmente naturaleza cognitiva. La diferencia entre concepción y creencia puede entenderse a la diferencia entre la implicación de la componente afectiva y emocional, frente a la racionalización de las concepciones.

[7] Es un conocimiento que se desarrolla sobre todo con la experiencia, se reconoce a través de aquellos juicios, decisiones y acciones eficientes, que se realizan de modo espontáneo sin ser capaces de establecer las reglas o procedimientos seguidos, por lo que, si se pide dar respuesta al cómo lo hace, generalmente se hará de forma incorrecta (Shön, 1987).

en las acciones a través de la observación y la reflexión sobre la acción[8] (Shön, 1987). El conocimineto en la acción y la reflexión en la acción forman parte de la experiencia del pensar y del hacer que, en el contexto de una práctica profesional es significaticamente distinto al de otros contextos. Es decir, su naturaleza *contextual* le otorga un control especial sobre asuntos propios de su pericia, en este sentido el conocimineto en la acción de un profesor esta inscrustado en un contexto estructurado a nivel social e institucional que comparte una comunidad de prácticos (Shön, 1987).

Esta raíz *social* del conocimiento profesional del profesor, moldeado por la *experiencia*, justifica porqué en la acción las concepciones y las creencias no pueden verse con determinación, ya que es la misma naturaleza de las instituciones sociales (el contexto) en las que se mueve el profesor, las que en su mayoría las forman, además, de que, dependiendo del individuo pueden tener diferente grado de densidad y consistencia (Ponte, 1994).

Lo anterior le da un margen en el conocimiento profesional del profesor al ente *individual*, que puede ser ampliado por la reflexión sobre la acción, permitiéndole: interpretar con base en esta red de conceptos, imágenes y habilidades las situaciones que acontecen en el desarrollo de su labor; darles sentido; y tomar decisiones didácticas que aterricen en acciones inteligentes/eficaces.

Con base en lo anterior, el conocimiento profesional del profesor es *integrador* de diferentes niveles en una estructura de conocimientos, así como *complejo* y *detallado* por el tipo de información que proporciona y la gran cantidad de fuentes, contextos y tipologías que lo integran (Ponte, 1994).

Por último, los términos de conocimiento en la acción y reflexión en la acción (Shön, 1987) empatan bien con el proceso de transformación del contenido para su enseñanza, la reflexión y la nueva comprensión descritos por Shulman (1987), así como con el modelo del KQ (Rowland, et al., 2005) en sus categorías de transformación y contingencias, en totalidad con el desarrollo del conocimiento profesional del profesor como pretendemos desarrollar en el siguiente apartado.

Desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Considerando que nuestro objetivo particular número uno es la identificación del conocimiento puesto en acción en los distintos escenarios que se desarrollan de forma consecutiva en un lapso de tiempo, es importante no sólo considerar el contenido y la

[8] La reflexion sobre la acción es vista como un medio para desarrollar el conocimiento profesional del profesor, para no perder la capacidad de sorpresa, para no despreciar los casos que salen de la norma, para pensar en lo que se hace, intento que obedece realmente a una distorción, una construcción dada la naturaleza dinámica del conocimiento profesional (Shön, 1987).

naturaleza del conocimiento profesional del profesor sino, cómo éste se desarrolla, en primer momento, a partir de comprender y transformar el contenido matemático a fin de hacerlo comprensible a los demás, seguido, una vez llevada a la escena, de una reflexión que engloba el contraste entre los dos escenarios y a partir de esta nueva comprensión proponer una mejora a dicha planificación, esto hasta que el ciclo de enseñanza del tema en particular vuelva a desarrollarse. Por tal, podemos vincular la comprensión[9] del profesor al razonamiento y a la acción, es decir, a su uso adecuado para avanzar en la toma de decisiones pedagógicas (Shulman, 1987), específicamente para el profesor de matemáticas en la toma de decisiones didácticas de forma fundamentada, no como un hábito o imitación (Rowland, et al., 2005).

Estas etapas pueden ser planteadas a partir del modelo cíclico de razonamiento y acción pedagógica de Shulman (1987) como se muestra en la siguiente figura.

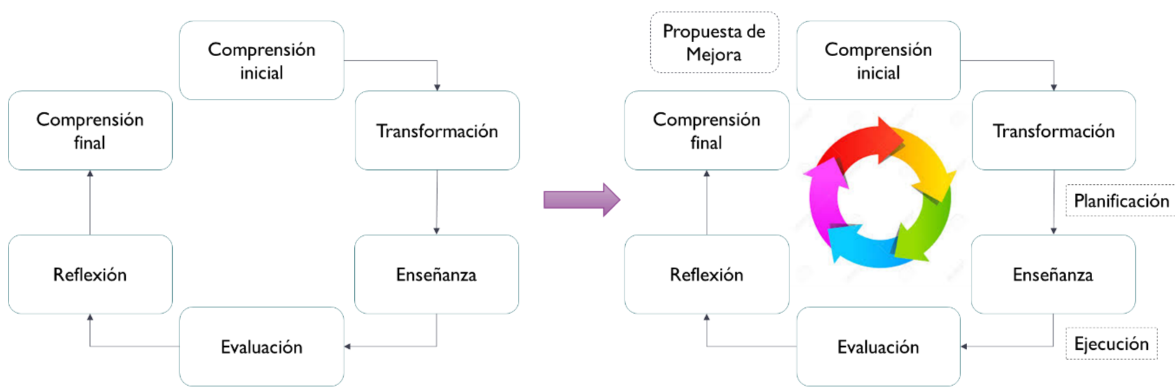


Figura 1. Ubicación de la planificación, ejecución y propuesta de mejora en el modelo de razonamiento y acción pedagógica de Shulman (1987).

Vemos este ciclo como una herramienta que en los cursos de formación continua permiten pensar sobre la manera en que, el conocimiento del contenido del profesor de matemáticas entra en juego en el aula, considerando las características de aprendizaje de los alumnos, así mismo, un medio para de manera integral generar consciencia sobre la importancia de su conocimiento sobre: el contenido, la enseñanza, el aprendizaje y el currículo de las matemáticas. Lo anterior bajo una perspectiva del desarrollo del conocimiento profesional. Por ello, construyendo sobre las ideas de Shulman (1987), partimos de que el proceso de enseñanza comienza con la comprensión del tema matemático; su estructura, sus finalidades (objetivos, dentro de la estructura matemática), así como, las ideas dentro y fuera de la propia disciplina (por ejemplo, los usos y aplicaciones del objeto matemático), entre otros.

[9] Entendemos que el conocimiento del profesor de matemáticas es un término ligado a su comprensión que puesto en acción le da la habilidad de tomar decisiones didácticas para la planificación y su puesta en escena, es decir, su ejecución.

Proceso que continúa con un subproceso de razonamiento para la transformación del objeto matemático en un contenido apropiado para la instrucción, como un contenido a enseñar y a aprender. Transformar el conocimiento del profesor sobre el contenido matemático en formas didácticamente impactantes (motivación de los alumnos) y aun así adaptables a la variedad que presentan sus alumnos en cuanto habilidades y bagajes. Transformación que derrama en un plan o un conjunto de estrategias para presentar el objeto matemático, la planificación.

Cabe señalar que, dentro de estas fases de comprensión y transformación, reconocemos al igual que Rowland et al. (2005) que el profesor de matemáticas en formación, en nuestro caso continua, puede recurrir a diferentes "*tipos de guía e inspiración*" (ideas, planificaciones preparadas, ejemplos de ejercicios, demostraciones, etc.) como un apoyo en su transcurso hacia la enseñanza y cuya elección surge de un proceso de reflexión y crítica. Esta fuente inspiradora puede emanar y no limitarse a catálogos de actividades, artículos especializados, tesis, libros e internet.

Dada la comprensión del tema matemático y su transformación, se procede a través de una serie de actividades a, ofrecer la oportunidad de aprender, al desempeño observable de la diversidad de actos de enseñanza (Shulman, 1987), etapa que recoge el comportamiento del profesor dirigido al alumno fruto de la deliberación y juicio informado por su conocimiento (Rowland, et al., 2008).

El ciclo prosigue con una fase de evaluación, vista como un control inmediato de la comprensión y de interpretaciones erróneas del alumno, proceso que requiere a su vez de la comprensión[10] y transformación propia del profesor (Shulman, 1987).

En este proceso el profesor reflexiona (autoevalúa) su propio desempeño y el de la clase (revisando, reconstruyendo, representando y analizando críticamente) fundamentando las explicaciones en evidencias. Finalmente aprende (se adapta) de las experiencias al comparar la revisión de la enseñanza con los objetivos que se pretendían alcanzar, obteniendo una nueva forma de comprender los objetivos, el objeto matemático como un contenido a enseñar y aprender y de sí mismo como profesor de matemáticas.

Es así, que la reflexión sobre la acción se convierte en un medio para desarrollar el conocimiento profesional del profesor (Shön, 1987), donde a partir de estrategias de documentación, análisis y debate se consolidan las nuevas formas de comprender y aprender de la experiencia (Shulman, 1987). Punto que la da su potencialidad a la propuesta de mejora como fuente para indagar en el conocimiento del profesor.

Por último, bajo el término "conocimiento profesional del profesor" desde el ámbito de la investigación en Matemática Educativa, han surgido varios estudios con la intención de

[10] Para entender que es lo que comprende un alumno es preciso comprender profundamente el material a enseñar y los procesos de aprendizaje (Shulman, 1987).

caracterizarlo y explicar los factores que influyen en su desarrollo. A continuación, dado que nuestro caso de estudio utiliza el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas como herramienta para la planificación que desemboca en una ejecución y propuesta de mejora, introducimos el modelo, no sin antes identificar las potencialidades e inconvenientes de otras conceptualizaciones.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematics Teacher´s Specialized Knowledge*, MTSK).

Antes de abordar el MTSK (Carrillo, et al., 2013), nos permitimos realizar algunas observaciones de los modelos mencionados en los estudios sobre el error y conocimiento del profesor en el Capítulo I.

En cuanto a elementos comunes: por un lado, la separación implícita o explícita del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido; por otro, la consideración del conocimiento del profesor desde la práctica (génesis de los modelos).

En cuanto a sus potencialidades e inconvenientes para la observación del conocimiento que nos ocupa, observamos que:

- Si bien, la identificación del conocimiento especializado del contenido[11] en términos matemáticos específicos de la profesión es una de las principales características que los creadores del modelo le atribuyen al MKT, como señalan los propios autores sus líneas son sutiles y la observación del conocimiento del profesor de matemáticas sobre el error desde varios subdominios implica inconvenientes para analizarlo y caracterizarlo.
- Del mismo modo, detectamos que, aunque las nociones expresadas por Shulman (1986; 1987) revitalizaron el interés por investigar el conocimiento del profesor, éstas son muy generales y no permite determinar qué tipos de conocimientos específicos se encuentran involucrados (Ball, et al., 2008).

Dado lo anterior, nuestra intención es enfocarnos en el MTSK, referente principal de esta investigación ya que es un modelo que considera las potencialidades provenientes de distintos modelos de conocimiento profesional del profesor (Shulman, 1987; Ball, et al., 2008; Rowland, et al., 2005, etc.), además de posibilitar la observación e identificación del conocimiento de nuestras profesoras sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático desde un solo subdominio y dentro de él, desde una categoría a partir de

[11] De cara a desarrollar las tareas propias de su profesión el profesor de matemáticas requiere un conocimiento especializado de las mismas, entendiendo que este conocimiento no necesario para otras profesiones (Ball, et al., 2008).

indicadores de conocimiento (error, obstáculo y dificultad). En los siguientes párrafos desplegamos su descripción.

El MTSK (Figura 2), es un modelo teórico que permite estudiar de forma analítica a través de sus categorías el conocimiento del profesor de matemáticas. Entre sus potencialidades se distingue el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas, entendido que excluye consideraciones pedagógicas generales.

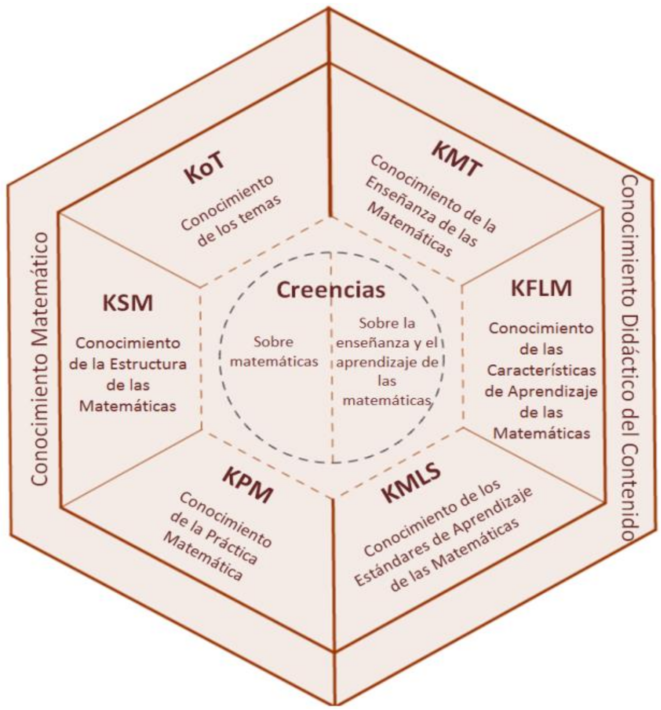


Figura 2. Mathematical teacher specialized knowledge- MTSK (Carrillo, et al., 2013)

En esta figura observamos la división que caracteriza al modelo. La partición principal distingue dos dominios de conocimiento, el conocimiento matemático (*Mathematical Knowlwdge*, MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). En el círculo concéntrico con una línea punteada rescata las creencias, como ya hemos descrito en nuestra definición de conocimiento construida a partir de las ideas de Ponte (1994). Éstas hacen alusión al sesgo entre la teoría y la práctica, que permite al profesor adaptar metodologías que, bajo sus creencias sobre el aprendizaje, la enseñanza y las matemáticas, considere deseables (Flores-Medrano, Escudero, Montes y Aguilar, 2014).

Cada dominio es moldeado por distintos subdominios que hasta el momento han surgido de la retroalimentación bidireccional entre la teoría y la práctica, como se muestra a continuación.

Dominio: conocimiento matemático

Análogo al SMK propuesto por Shulman (1986), bajo una visión especializada del conocimiento del profesor de matemáticas, referimos a este conocimiento, como la cantidad y organización del conocimiento matemático per se en la mente del profesor, el cual incluye el entendimiento de la estructura de las matemáticas y el porqué un tema determinado es especialmente central a una disciplina mientras que otro puede ser algo periférico.

Así mismo, entendemos que la comprensión del contenido de la materia del profesor debe ser al menos igual a la del alumno, reconociendo una necesidad mayor en el profesor de matemáticas, la comprensión de por qué algo es así, bajo qué perspectiva se considera acertado y bajo qué circunstancias su creencia en esta justificación podría ser débil e incluso negada (Shulman, 1986; Ball, et al., 2008).

El MTSK, se integra de tres subdominios: el conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT), conocimiento de la estructura matemática (*Knowledge of the Structure of Mathematics*, KSM) y el conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of the practice of Mathematics*, KPM).

<u>Conocimiento de los Temas</u>

El KoT, integra el conocimiento del profesor sobre el concepto o tema que se quiere enseñar de manera fundamentada y con un nivel de profundización mayor al esperado por los alumnos. Podemos visualizar este subdominio como una red intraconceptual que tiene lugar en la proximidad de un único concepto, por lo que para caracterizar el conocimiento que contempla esta subestructura se han propuesto cinco categorías: *la fenomenología; propiedades y fundamentos; definiciones; registros de representación y procedimientos* (Flores-Medrano, et al., 2014).

- El conocimiento *fenomenológico* del profesor sobre el concepto/tema contempla la visualización de los fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, entre ellos los que aparecen en la génesis del propio concepto, así como, el conocimiento de las conexiones extramatemáticas a través de sus usos y aplicaciones.

- El conocimiento de las *propiedades y fundamentos teóricos* atribuibles al concepto/tema o procedimiento en particular.

- El conocimiento del profesor sobre el conjunto de propiedades que hacen *definible* un objeto matemático (considerando dentro de esta categoría de conocimiento las formas alternativas que utilice el profesor para definirlo).

- El conocimiento de los conceptos involucrados en el conocimiento de un tema específico, y, visualizando el proceso de enseñanza-aprendizaje como un proceso de comunicación, los diferentes *registros de representación* de éste (algebraico, gráfico, verbal, etc.). Conocimiento que implica conocer la notación y vocabulario adecuado asociado a las mismas.

- El conocimiento del profesor sobre los *procedimientos*, considera, el conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos. Las anteriores acompañadas del conocimiento del cómo, cuándo y por qué se hace o se utiliza así.

De cara a la enseñanza, este conocimiento le permite al profesor de matemáticas:

- Distinguir un vocabulario y notación matemática adecuada.
- Formular ejemplos que, sustentados en el conocimiento fenomenológico, le den sentido/significado al concepto/tema en el contexto del alumno (incluso concientizar de la necesidad de su surgimiento).
- Relacionar los conceptos/temas con otras disciplinas a través de su uso y aplicación (conexiones transversales, extramatemáticas).
- Esbozar los fundamentos teóricos, los procedimientos y registros de representación, que con base a los conocimientos en construcción del alumno le sean cercanos y comprensibles (conexiones matemáticas intraconceptuales).
- Proyectar cierto nivel de seguridad y deshago dentro de la clase por el dominio del concepto/tema.
- Predecir los conceptos matemáticos que dentro de la red intraconceptual pueden surgir en el aula y en consecuencia responder a las demandas de conocimiento de sus alumnos.
- Reconocer la coherencia de los argumentos dados por los alumnos.
- Evaluar la validez del conocimiento de los alumnos.

<u>Conocimiento de la estructura matemática</u>

El KSM, hace referencia al constructo personal que el profesor desarrolla sobre el cómo están distribuidos matemáticamente los temas tanto en la propia disciplina como en otras excluyendo el conocimiento estructurador del currículo escolar. Así mismo, le permite al profesor visualizar un panorama en el cuál desarrolla su labor docente (Ball, et al., 2008).

Contempla dos categorías que a su vez distinguen tipos de conexiones no excluyentes: una línea que contempla las *conexiones de temporalidad*, como una visión secuenciadora que genera tanto conexiones de complejización como de simplificación; otra que contempla las *conexiones de contenidos transversales*, delimitando los conceptos/temas matemáticos que genera conexiones intraconceptuales, interconceptuales y auxiliares (Flores-Medrano, et al., 2014).

- Las *conexiones de temporalidad* generan las *conexiones de complejización* que captan el conocimiento del profesor sobre cómo se relaciona el objeto matemático con otros contenidos posteriores, ya sea dentro del mismo curso que se está impartiendo o con niveles superiores. De forma complementaria a la anterior, las *conexiones de simplificación* capturan esta relación con los contenidos anteriores.

- Por otro lado, el conocimiento de las *conexiones transversales*, contemplan el conocimiento del profesor sobre cómo las *conexiones intraconceptuales* (visualizadas en el KoT) e *interconceptuales*, permiten conectar los conceptos dentro de un mismo tema por cualidades comunes o por los modos de pensamiento asociados a dichos temas que contemplan esta característica en común. El conocimiento de las *conexiones auxiliares* alude al uso de un objeto matemático como auxiliar en el desarrollo de otro objeto matemático a partir de las ideas que subyacen a dichos conceptos, la característica en común que otorga la conexión interconceptual.

El profesor puede hacer uso de este conocimiento matemático en su tarea diaria para:

- Formular preguntas que le permita visualizar los conocimientos previos del alumno.

- Situar el conocimiento del alumno dentro de la estructura matemática y en consecuencia visualizar en qué punto del desarrollo de la construcción matemática se encuentra y proyectar una serie de etapas por las que podría pasar para construir el concepto.

- Explicar los objetivos matemáticos de los temas dentro de la estructura matemática y su importancia en el desarrollo de los modos de pensamiento.

- Percibir las formas de hacer de una actividad algo más sencillo o complejo.

- Encontrar los razonamientos matemáticos que subyacen a la utilización de algoritmos alternativos.

Conocimiento de la práctica matemática

El KPM, destaca la importancia de que el profesor, aparte de conocer los resultados matemáticos establecidos (reproducir las matemáticas, KoT) también sepa cómo se procede para llegar a ellos, su sintaxis (Santana y Climent, 2015), considerando así las características del trabajo matemático. En el KPM, pueden diferenciarse dos formas de proceder en matemáticas que constituyen a su vez dos categorías para distinguir el conocimiento, por un lado, *conectado a la matemática en general y por otro a la idea de temática en matemáticas* (Flores-Medrano, et al., 2014).

- El conocimiento de las *prácticas ligadas a la matemática en general,* aparece cuando el profesor sabe cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto abordado.

- El conocimiento de las *prácticas ligadas a una temática en matemáticas,* le permite al profesor ser consciente de cómo se razona y produce en matemáticas, para dar un sustento sólido a su propio conocimiento.

Este conocimiento representa una fuente de información que de cara a su enseñanza le permite:

- Gestionar los razonamientos matemáticos de sus alumnos, a la hora de aceptarlos, refutarlos, o refinarlos, en caso de ser necesario (Flores-Medrano, et al., 2014).

- Proveer de razonamientos por los que puede guiar al alumno para construir la definición y los algoritmos relacionados a un concepto/tema evitando la memorización de los mismos.

- Formular preguntas matemáticamente constructivas.

- Vislumbrar una gama de prácticas matemáticas adecuadas para abordar tema matemático.

Dominio: conocimiento didáctico del contenido

El PCK como la categoría que identifica los cuerpos distintivos para la enseñanza, representa la amalgama entre la didáctica y el contenido "*por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza*" (Shulman, 1987, p. 8). El PCK, alude al conocimiento de las matemáticas para la enseñanza por el que tanto el alumno como el profesor llegan a una nueva comprensión. Se define, como ya habíamos mencionado, como "*las maneras de representar y formular la materia que la hacen comprensible a los demás*", contempla "*una comprensión de lo que hace el aprendizaje de temas específicos, fácil o difícil*" (Shulman, 1986, p. 9). La distinción entre saber las matemáticas para ti y saber para ayudarle a alguien a aprender (Rowland, et al., 2005).

En el MTSK, reconoce la importancia de conocer el contenido matemático como un contenido a enseñar, a aprender y en los que el nivel de desarrollo conceptual y procedimental está definido por estándares de aprendizaje. Se conforma por tres subdominios: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching,* KMT), conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Learning Standards,* KMLS,) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

(*Knowledge of Features of Learning Mathematics*, KFLM). Mismos que en su conjunto, no considera el conocimiento pedagógico adaptado a las actividades matemáticas, sino aquel donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje (Flores-Medrano, et al., 2014).

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

El KMT, alude a la comprensión del contenido matemático de cara a su enseñanza. Contempla (Flores-Medrano, et al., 2014):

- El conocimiento de *formas de enseñanza*, es decir de las teorías de enseñanza institucionalizadas o personales.
- El conocimiento de los *recursos materiales y virtuales asociados al contenido a enseñar*, conocimiento que puede estar fundamentado en resultados de investigaciones en Educación Matemática o en la observación y reflexión de la actividad matemática en el aula. Contempla el conocimiento de los beneficios o dificultades asociadas a su uso sin considerarlo como una herramienta pedagógica motivadora.
- El conocimiento de las *actividades, tareas, ejemplos, ayudas*. Si bien este conocimiento podría considerarse como parte de la categoría anterior, se considera aparte por fines analíticos. Detonan la intencionalidad del profesor en la enseñanza del tema determinado, por ejemplo, saber en qué momento y qué tipo de ayuda brindar a los estudiantes.

En la práctica podemos distinguirlo cuando el profesor:

- Transforma el contenido matemático para su enseñanza a través de métodos, modelos, secuencias, diseño de las distintas actividades, etc.
- Selecciona las analogías, metáforas, demostraciones, ejemplos, explicaciones, recursos y materiales, para la enseñanza de las matemáticas, consciente de los beneficios y dificultades que puede representar su utilización en un contenido matemático concreto.
- Adapta su instrucción a las características, ritmos y estilos de aprendizaje de sus alumnos ante el contenido matemático.
- Selecciona factores que la investigación ha revelado ser significativos en la enseñanza de las matemáticas.
- Ofrece una variedad de estrategias de enseñanza.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

A partir de las ideas de Shulman (1986) podemos definirlo como el conocimiento del rango completo de programas diseñados para la enseñanza de las matemáticas y tópicos concretos en el grado escolar específico, así como, por los materiales instruccionales, las indicaciones y contraindicaciones sobre los anteriores. A diferencia del KSM, el KMLS, no considera constructos personales, por ello contempla el conocimiento del profesor adquirido de documentos rectores acerca del contenido con los temas y cuestiones que han sido y se impartirán en el mismo tema durante los años anteriores y posteriores, lo que está estipulado que aprenda un estudiante y el nivel conceptual con el que se espera que lo aprenda en un determinado momento escolar. En sintonía, Flores-Medrano, et al. (2014) entienden por estándar de aprendizaje "*aquello que indica el nivel de capacidad atribuible a los estudiantes en un determinado momento escolar, para saber, entender y construir matemáticas*" (p.12).

Según los mismos autores, este subdominio considera tres categorías de conocimiento:

- El conocimiento de *qué contenidos matemáticos se requieren enseñar*; las capacidades matemáticas específicas que requiere desarrollar en sus estudiantes en el grado escolar en el que esté impartiendo clases o en ese momento escolar.
- El conocimiento del *conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado* para un tema.
- El conocimiento de la *secuenciación de diversos temas*, en el que se abarcan las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que el estudiante debe/puede o ha alcanzado en un curso escolar determinado.

En la práctica este conocimiento se visualiza cuando:

- Identifica a partir del currículo la estructura matemática de los contenidos a enseñar, los aprendizajes previos estipulados y los esperados en el tema matemático específico, así como la secuenciación en que se verán/ se han visto los distintos contenidos.
- Analiza, interpreta, selecciona, etc. en función de los estándares de aprendizaje los libros de texto matemáticos.
- Selecciona ejemplos adecuados para cumplir con los objetivos de aprendizaje estipulados en los estándares de aprendizaje.

Finalmente, hacemos mención del subdominio del KFLM, dejado intencionalmente hasta el final para profundizar en las dificultades de aprendizaje inherentes al tema de adición de expresiones algebraicas en el nivel secundaria.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas

El KFLM, contempla el conocimiento del profesor de matemáticas que está relacionado con las características de aprendizaje derivadas de la interacción del alumno con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo.

En este subdominio se contempla cuatro categorías (Flores-Medrano, et al., 2014): *formas de aprendizaje de las matemáticas, formas de interacción del alumno con el contenido matemático, concepciones del alumno sobre las matemáticas* y *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas*.

- El conocimiento de las *formas de aprendizaje de las matemáticas*, acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático, incluyendo el conocimiento de teorías personales o institucionalizadas sobre el desarrollo cognitivo del estudiante tanto para la matemática en general como para contenidos particulares.

- El conocimiento de las *formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*, refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales, y a los conocimientos sobre el posible vocabulario usado por el alumno (comúnmente) al abordar un determinado contenido.

- El conocimiento de las *concepciones de los alumnos sobre matemáticas*, conocer sobre las expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas, le permite predecir dimensiones afectivas de los estudiantes que influyen en la toma de decisiones didácticas del profesor sobre cómo abordar los temas.

- El conocimiento de las *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas*, el cual engloba el conocimiento sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas concretos. En esta misma categoría se considera el conocimiento de las ventajas o potencialidades que podrían aprovecharse para el aprendizaje y las cuales son proyectadas desde la planificación. Permitiendo al profesor prever, identificar y tomar decisiones para el aprendizaje bajo la existencia de dificultades que surgen en la actividad matemática conjunta en el aula.

En la práctica este conocimiento se refleja cuando el profesor ajusta su práctica para:

- Considerar las características generales de aprendizaje de las matemáticas de los alumnos.

- Considerar las formas específicas de aprendizaje de las matemáticas de cada niño en la clase (estilos, ritmos de aprendizaje, etc.).

- Considerar los conocimientos previos de los alumnos, los conceptos erróneos y dificultades de aprendizaje.

- Considerar la motivación, intereses y atención del alumno frente al aprendizaje de las matemáticas.
- Seleccionar factores que la investigación ha revelado ser significativos en el aprendizaje de las matemáticas.
- Diseñar una diversidad de estrategias de atención frente a las ideas erróneas en los alumnos.
- Justificar o refutar concepciones del alumno respecto a las matemáticas.
- Seleccionar estrategias que ayuden al alumno a construir el concepto.

En esta categoría hacemos hincapié en varios aspectos de conocimiento que serán clave para el análisis de la información, por un lado, el conocimiento del profesor de matemáticas sobre error, obstáculo y dificultad, y por otro, de forma asociada al conocimiento de las ventajas y potencialidades que se aprovechan para potenciar el aprendizaje del tema de adición de expresiones algebraicas, las desventajas, que son proyectadas desde la planificación. Conocimiento que le permite prever, identificar y tomar decisiones para el aprendizaje bajo la existencia de dificultades que surgen en la actividad matemática conjunta en el aula. En esta dirección, en el siguiente apartado pretendemos establecer qué entendemos por error, obstáculo y dificultad, así como una aproximación a partir de la literatura de cómo se visualizan en el aula.

Error, obstáculo y dificultad.

El alumno a lo largo del aprendizaje del álgebra, de la construcción del conocimiento, se encuentra con muchas dificultades que en la práctica escolar generalmente podemos identificar por la manifestación de errores. Estos aparecen cuando se enfrenta a un conocimiento novedoso que lo obligan a hacer una reestructuración de lo que ya saben. En este sentido, entendemos, que el aprendizaje es el proceso en virtud del cual el individuo se adapta a la experiencia del mundo físico y social (Hernández, 2004). Proceso que es el producto del equilibrio entre la asimilación y la acomodación. Es decir, el producto de una acomodación de una estructura cognitiva anterior, que permite recobrar el equilibrio, producido por un conflicto ocasionado cuando el conocimiento nuevo se añade al antiguo (Ruano, et al. 2008). Esta posición nos permite entender que se incurre en el error cuando se realizan intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación (Matz, 1980). Lo anterior sin considerar a los errores que no se destacan por nada en especial, en este proceso de adaptación, los “ordinarios”, es decir aquellos que son según Brousseau (1983) fugaces, al azar o consecuencia según Ruano et al. (2008) de una falta de conocimiento de un despiste o un descuido.

Los errores en el aprendizaje del álgebra, sin considerar a estos errores “ordinarios” se puede caracterizar en dos grupos, los errores que tienen su origen en una dificultad o los que tienen su origen en una estructura de éstas, un obstáculo.

Dificultad

Un término siempre relacionado a la dificultad es comprensión[12] (e.g., Kieran, 2006; Ruano, et al., 2008; Palarea, 1999; Socas, et al., 1998). Por ello, consideramos como dificultad a una manifestación de error, que demuestra que el estudiante no ha podido comprender “algo” (un concepto, un problema, un algoritmo, etc.) del objeto matemático de aprendizaje en nuestro caso de la adición de expresiones algebraicas. Falta de comprensión que ligamos a una ausencia de significación, una falta de sentido (Socas, et al., 1998) que conflictúa su asimilación.

Detectamos que su naturaleza (Palarea, 1999; Socas, et al., 1998, Ruano, et. al, 2008) puede estar asociada a:

- La complejidad de los objetos del álgebra. Estos operan en dos niveles, el semántico (los signos son dados con un significado claro y preciso) y el sintáctico (los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado). Estos dos aspectos son los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

- Las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra. Pueden distinguirse las faltas de concentración por una excesiva confianza, las distracciones debidas a la presencia de palabras clave, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, la tensión y miedo hacia el álgebra, etc.

- Los procesos de pensamiento en álgebra. Se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica del álgebra y en las rupturas que se dan necesariamente en relación a los modos de pensamiento algebraico.

- Los métodos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje del álgebra. Los relacionados con la institución escolar, el currículo y los métodos de enseñanza misma.

- Los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Con los estadios generales del desarrollo intelectual (semiótico, estructural y autónomo[13]), representado cada uno de ellos por

[12] Según Rico, (2009) la comprensión resulta ser un modo destacado del conocimiento, significa percibir mentalmente algo, captar el significado de algo, entender con claridad lo que quiere decir alguien, conocer en un objeto todo lo que en él es conocible, llegar a conocer la naturaleza o modo de ser de una cosa.

[13] Semiótico, es el estadio en que el alumno aprende y usa los nuevos signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y manipulados por el alumno.

Estructural, en este estadio el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamiento de patrones para dotarlos de significado.

un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de álgebra que los alumnos son capaces de hacer.

Al originarse estos errores en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación podemos identificar errores en tres etapas distintas (Socas, et al., 1998):

- Errores del álgebra que tienen su origen en aritmética, para entender la generalización de relaciones y procesos, se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético. Los errores cometidos por los alumnos que no dominan un conocimiento previo.

- Errores de procedimiento, son errores consecuencia del uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento, parecen indicar que los alumnos generalizan procedimientos que se verifican en determinadas ocasiones.

- Errores en álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico, errores de naturaleza estrictamente algebraica (no tienen referencia explícita en la aritmética), los que proceden del mal uso del signo "=" en su paso de la aritmética al algebra y de la sustitución formal.

Obstáculo

Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas. Cuando estas relaciones entre dificultades resultan en una estructura compleja que ha sido utilizada y ha demostrado su efectividad (concepción aprendida) se manifiestan por errores solidarios y persistentes que resulta difícil resolver. Nos encontramos con un obstáculo. Un obstáculo, dentro del avance en el acto mismo de conocer, aparece por una especie de necesidad funcional. Según Brousseau (1983) es el efecto de un conocimiento adquirido que en cierto contexto se muestra exitoso, pero que, en otros, se revela falso, o simplemente inadaptado. La característica de sus errores es que no son fugaces ni al azar, sino que son reproducibles, persistentes, ligados por una concepción característica, además es resiste el rechazo ya que tiende a adaptarse y modificarse para no desestabilizarse. En este caso la concepción nueva requiere una desestructuración o reestructuración de la concepción aprendida.

Brousseau (1983) distingue diversos orígenes para los obstáculos didácticos (aquellos que se presentan en el sistema didáctico), dicha distinción está asociada a la modificación del sistema de interacción que podría evitarlo, es así que encontramos obstáculos didácticos de origen ontogenético (sobrevienen del hecho de las limitaciones del sujeto en un momento de su desarrollo), epistemológico (se encuentran en la historia de los conceptos mismos) y didáctico (no dependen más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo).

Autónomo, aquel estadio en que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior (Socas, 1997)

Podemos representar entonces, distintos tipos de error y origen para los mismos como se muestra en la siguiente estructura:

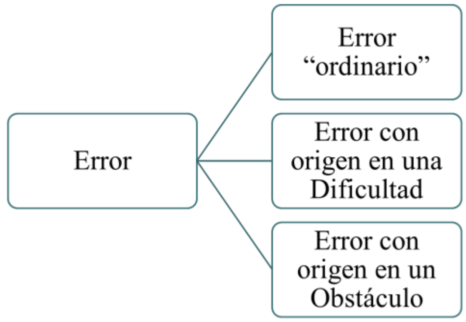


Figura 3: Esquema para organizar los tipos de errores.

Estas observaciones implican que en la construcción del conocimiento matemático aparecerán de manera inevitable errores y por tanto el proceso mencionado implica el conocimiento del profesor sobre su diagnóstico, corrección y superación mediante estrategias, de modo que, en algunos casos, incluso, la manifestación del error se utilice como un elemento de contribución en la potencialización del proceso de aprendizaje. Un conocimiento deficiente e incompleto, que puede verse como una posibilidad permanente de adquisición y consolidación del mismo (Rico, 1998). En este sentido consideramos pertinente de cara al análisis de la información, hacer una revisión de la literatura y extraer las dificultades y obstáculos a los que el alumno se enfrenta en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas.

Aspectos que involucran dificultades en el aprendizaje.

Al iniciar el álgebra los estudiantes traen consigo las nociones y enfoques que usaban en aritmética. En algebra, los signos[14] y símbolos[15] son interpretados de diferente manera, tal es el caso del signo "=" y las letras (Kieran, 2006; Kieran y Filloy, 1989). Esta discontinuidad obliga al alumno principiante a realizar un cambio de significado, un cambio en el pensamiento de las situaciones numéricas concretas a posiciones más generales sobre números y operaciones, proceso que se ve reflejado en un camino de dificultades (Kieran y Filloy, 1989). De la literatura retomamos las siguientes dificultades y obstáculos:

[14] En aritmética los signos de operación indican una acción que se va a realizar con números y que da como resultado otro número. En algebra los signos tienen un carácter de representación, ya que indican operaciones que no siempre tienen que realizarse y pueden quedar indicadas como operaciones en potencia (Palarea, 1999).

[15] Un símbolo es un recurso que permite denotar múltiples abstracciones. Es necesario el reconocimiento de la naturaleza y significado de los símbolos para poder comprender cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados. Este conocimiento le permitirá la transferencia de conocimiento aritmético hasta el álgebra, aceptando las diferencias entre ambos (Palarea,1999).

- *Sentido del signo "=".* La idea que tiene el alumno del signo "=", es la "señal de hacer algo", antes que un símbolo de equivalencia entre los lados derecho e izquierdo, viene indicada por su renuencia a aceptar proposiciones como $\mathbf{4+3=6+1}$, al pensar que el lado derecho debería indicar el resultado, es decir, los alumnos conciben el signo "=" como un mero separador entre operación y resultado (Palarea, 1999; Kieran y Filloy, 1989; Kieran, 2006).

- *Aceptación de falta de clausura.* Aunado a esta pobre interpretación del signo "=" encontramos la aceptación de falta de clausura, misma que tiene su origen en un obstáculo. Suele mostrar la fijación del alumno con el pensamiento numérico y las dificultades para pensar algebraicamente[16]. Consiste en ver las expresiones algebraicas como enunciados que son, algunas veces incompletos. Por ello, surge la necesidad de: obtener un resultado numérico, pues no acepta que una expresión no pueda cerrarse; de expresarlas como parte de una igualdad "= algo" para que sea la solución de un problema (Ruano, et al., 2008; Kieran y Filloy, 1989, Ursini, Escareño, Montes y Trigueiros, 2008).

- *Malinterpretación de la literal como número general.* La necesidad de obtener un resultado numérico puede ser relacionada a su vez con la malinterpretación de la literal, es decir, con la tendencia a asignarle un valor arbitrario para calcular un resultado.

Esta malinterpretación ha sido vinculada a las formas de proceder en aritmética. Si bien los alumnos han tenido experiencia en la escuela primaria con letras, esta se reduce a menudo a fórmulas geométricas, como $\boldsymbol{A=bxh}$, donde se acostumbra usarlas como etiquetas que se refieren a entidades especificas o a la inicial de una palabra (Ursini, et al., 2008; Kieran y Filloy, 1989). Su uso involucra reemplazarlas por valores concretos para después encontrar un resultado numérico. Esta interpretación apoya la tendencia de los alumnos a ver la letra como incógnita, cuyo valor es necesario determinar (Ursini, et al., 2008).

- *Particularización:* Ligado a la malinterpretación de la literal puede surgir la necesidad de particularización de las expresiones algebraicas, error que tiene su origen en una ausencia de sentido. El alumno no le encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no sabe cómo trabajar con letras o estas no tienen significado para él, por lo que necesita retroceder a lo numérico, particularizando expresiones (Ruano, Socas y Palarea, 2008).

- *Trato de expresiones multitérmino:* Los estudiantes pueden tener dificultades para tratar con expresiones multitérmino como unidad simple y no percibir su estructura (por ejemplo, no percibir que $\boldsymbol{4(2r+1)+7}$ es lo mismo que $\boldsymbol{4x+7}$)(Kieran, 2006).

[16] El pensamiento algebraico requiere aceptar la existencia de lo desconocido para luego representarlo y operarlo sobre ello.

- *Uso de paréntesis y forma de enseñanza:* Si bien, la presencia de *paréntesis* parece ayudar a los estudiantes a visualizar la estructura, enfocando su atención en lo que parece término y rompiendo la larga cadena de símbolos, existen errores que demuestran que el alumno no utiliza los paréntesis donde es necesario (Kieran, 2006). El uso de paréntesis puede ser considerado innecesario para el alumno, por ejemplo, en la jerarquía de operaciones, al considerar que el orden de cálculo es de izquierda a derecha (Filloy y Kieran, 1989). Error que puede tener su origen en la ausencia de significado o en un obstáculo. En relación al primero podrían ser problemas de aritmética no superados. En cuanto al segundo podría estar relacionado con la forma de enseñanza de los paréntesis; "de adentro hacia afuera" provocando que el alumno se bloquee cuando ve paréntesis del tipo $\boldsymbol{-(a-2b)+b}$, llevándolo a omitir los paréntesis y actuar como si no estuvieran (Ruano, et al., 2008).

- *Sustitución formal:* Las dificultades ligadas a la sustitución formal tienen su origen en la falta de sentido y están relacionadas con las concepciones afectivas y emocionales hacia el álgebra (Kieran y Filloy, 1989). Se basa en la confianza del alumno en métodos informales o intuitivos utilizados en aritmética, en los que se centra en conseguir una respuesta en vez de prestar atención al método que usan, contrario a los que pasa en álgebra que los fuerza a formalizar el procedimiento. Los alumnos piensan en las operaciones que necesitan para resolver un problema en lugar de operaciones que ellos necesitan usar para representar la situación problema, esto ocasiona que el alumno no logre darse cuenta de que el procedimiento es a menudo la respuesta (Kieran, 2006).

- *Concatenación y malinterpretación de términos algebraicos:* Los errores que se manifiestan por la generalización del significado aritmético de la concatenación al álgebra, claramente tienen su origen en un obstáculo, relacionado con la malinterpretación del sentido de los términos algebraicos ya que la concatenación, en aritmética denota adición, contrario a su significado algebraico que denota multiplicación (Kieran y Filloy, 1989).

- *Reglas de sintaxis del álgebra:* Relacionado con las reglas de sintaxis del álgebra podemos considerar la comprensión errónea del uso del coeficiente, es decir, los alumnos parecen no reconocer a la unidad como coeficiente de una literal, considerando que se le puede asignar un coeficiente cualquiera (Ursini, et al., 2008).

- *Uso inapropiado de propiedades:* Pueden existir errores en el procedimiento por el uso inapropiado de las propiedades, mismos que tienen su origen en la ausencia de sentido (Ruano, et al., 2008).

- *Cambio de registro:* Otro error que suele tener su origen en la ausencia de sentido es el cambio de registro incorrecto, este error encuentra su origen en las características propias del lenguaje algebraico (Palarea, 1999; Ruano, et al., 2008).

- *Relacionadas a una pobre comprensión de conocimientos previos:* Se consideran aquí la posible tendencia a confundir la multiplicación con la potencia, de diferenciar el coeficiente y el exponente de una expresión algebraica ($\boldsymbol{m^2 + m^2 = 4m}$). (Ursini, et al., 2008).

- *Distinción de expresiones equivalentes:* Está relacionada con la pobre comprensión de los conocimientos previos, así pues, el alumno puede interpretar que $\boldsymbol{m^4} = \boldsymbol{m^2 + m^2 = 4m}$, es decir que $\boldsymbol{m^4}$ es equivalente a $\boldsymbol{4m}$ (Ursini, et al., 2008).

- *Extrapolación de reglas:* Relacionadas con la adaptación de reglas conocidas a situaciones nuevas, por ejemplo, evaluar $\boldsymbol{4m}$ cuando $\boldsymbol{m = 6}$ como $\boldsymbol{46}$, o simplificar $\boldsymbol{3xy + 4xz = 7xyz}$. Entra aquí también la concatenación aplicada como suma en algebra y el no uso de jerarquía de operaciones (Matz, 1980).

En este capítulo se consideró la definición que hemos adoptado por conocimiento profesional del profesor, su naturaleza, su desarrollo y respecto a su contenido el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) (Carrillo, et al., 2013). De forma específica, se despliega el subdominio del conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de las matemáticas y en éste, la categoría de fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas; categoría que engloba el conocimiento que tiene el profesor sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático y que permite indagar en el conocimiento de las profesoras a partir de sus indicadores de error, obstáculo y dificultad en la adición de expresiones algebraicas. En el próximo capítulo se establecen y discuten los aspectos de la metodología a seguir y el contexto de trabajo, para lograr el objetivo que persigue esta investigación.

CAPÍTULO III: CONTEXTO Y METODOLOGÍA

La investigación en educación matemática demanda una serie de enfoques para entender el proceso sistemático a través del cual se pretende encontrar la solución a un problema. Nos interesa dar respuesta a ¿qué conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático ponen en acción dos profesoras en formación continua, al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora del tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria? Para lo que se estableció como objetivo general: caracterizar el conocimiento sobre dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático que ponen en acción dos profesoras en formación continua, al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora sobre el tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria.

Delimitados por nuestra pregunta y objetivo general de investigación, se emplean métodos cualitativos vinculados al paradigma [17] interpretativo con el propósito de comprender e interpretar sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, entendiendo que la interpretación directa de los acontecimientos (y no la medición) juega un papel importante (Stake, 2007).

Se considera el estudio de caso instrumental como diseño de investigación (Stake, 2007). Mismo que se presenta en primer momento, para después pasar a las técnicas de recolección de datos, el instrumento de análisis y el método para analizar la información obtenida.

Paradigma y tipo de investigación

El paradigma en el cual nos enfocaremos es el interpretativo. Ya que nuestro interés está orientado al estudio de las interacciones entre las personas y el entorno, así como los pensamientos de los participantes y no en utilizar métodos cuantitativos para confirmar una hipótesis o encontrar una ley acerca de las conductas que nos permitan predecirlas y controlarlas, posición del paradigma positivista (Godino, 1993). Posición que en el campo de las ciencias sociales es considerada una limitante, puesto que se aleja de los problemas reales, de situaciones concretas en de terminado contexto, impidiendo ofrecer soluciones a los eventos particulares de la práctica (González, 2003).

[17] Visulaizamos la importancia del paradigma para definir la diferencia de una comunidad científica a otra, así como para legitimar la metodología utilizada y los criterios para enjuiciar la validez de las soluciones propuestas (González, 2003), es decir, el conjunto de principios que unifican a un grupo de investigadores (Hernández, 2004).

En sintonía con nuestro paradigma pretendemos realizar la investigación a partir de la metodología cualitativa ya que no pretendemos investigar para ofrecer una explicación causal (característica de la investigación cuantitativa) sobre el conocimiento del profesor, sino comprender su naturaleza compleja, en donde la interpretación directa de los acontecimientos y no la de datos de medición juega un papel importante y en la que además el trato holístico o de descubrimiento del conocimiento del profesor es existencial (no determinista) y constructivista (Stake, 2007).

Método: el estudio de caso.

Un rasgo característico de la ciencia es su naturaleza empírica, su verificación a partir de la observación y la evidencia, es por ello que para garantizar el empate de las afirmaciones (o resultados) con lo que ocurre en el mundo real es de vital importancia el conjunto de procedimientos que se han utilizado para llegar a tales hallazgos (Cohen, et al., 2007). En esta investigación nos hemos centrado en uno de los protagonistas de la actividad del aula, el profesor. Buscamos profundizar en el conocimiento de dos profesoras de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido que nos ocupa, dado nuestro interés en primer momento de identificar este conocimiento y de forma asociada comprender qué de este ponen en acción.

En el campo de la matemática educativa, especialmente para el estudio del conocimiento del profesor en el aula, se utiliza el estudio de caso para la identificación de elementos relevantes para su caracterización (e.g., Sosa, et al., 2015; Santana y Climent, 2015; Ball, et al., 2008; Rowland, et al., 2005). Método asociado al paradigma interpretativo e investigación cualitativa (e.g. Stake, 2007; Cohen, et al., 2007).

Según Cohen, et al. (2007), el estudio de caso consiente profundizar en un sistema acotado, basado en situaciones reales, que permite comprender las ideas con claridad. En ese sentido consideramos pertinente abordar nuestro objetivo a través de un estudio de caso instrumental (Stake, 2007). Esta opción se fundamenta en el hecho de que no estamos interesados en aprender sobre el caso en particular (estudio intrínseco) sino comprender el conocimiento del profesor sobre dificultades de aprendizaje, más que el caso en sí mismo, sin llegar a ser un estudio grupal o acumulación de individuales (estudio colectivo de casos).

En la misma vía, nuestro estudio es de tipo descriptivo, ya que pretendemos identificar elementos clave del conocimiento (no se busca descubrir vínculos entre variables y fenómenos en este caso el conocimiento y a la vez dotar las observaciones de racionalidad teórica – estudio explicativo; ni examinar los límites de la teoría – estudio predictivo) (Martínez, 2006).

Selección del caso.

En los estudios de caso no se selecciona una muestra representativa, sino teórica (Martínez, 2006) definida por el objeto de investigación (Stake, 2007). Este último al igual que la nuestra pregunta de investigación, surgen del interés por comprender el conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades inherentes al contenido matemático que encuentran los alumnos principiantes en la adquisición del lenguaje algebraico específicamente en el tema de adición de expresiones algebraicas. Por ello, entendemos, que el caso debe definirse por ser un instrumento que nos permita profundizar en este conocimiento a modo de avanzar en su comprensión.

Dado lo anterior, apoyados en los criterios establecidos por Stake (2007) buscamos un caso, dispuesto a participar, rentable, capaz de adoptar nuestro objetivo de investigación al brindar facilidades para abordar e indagar en el conocimiento del profesor de matemáticas de interés y que permita el progreso del análisis de la información desde los primeros momentos de la investigación.

En esta dirección, considerando las posibilidades de acceso a la información, la opción para la selección del caso toma dos vertientes, por un lado, profesores en servicio y por otro un banco de datos obtenido durante un semestre en un curso de desarrollo profesional. Dentro de la primera vertiente se consideraron cuatro profesores, que por diversas causas limitaron su participación, dirigiendo nuestra atención al banco de datos del curso de desarrollo profesional.

Este banco está integrado por seis equipos de profesores de tres niveles educativos, secundaria, preparatoria y nivel superior (todos alumnos del mismo curso). Dentro de esta gamma de niveles se consideran temas que van desde los números racionales, expresiones algebraicas, recta numérica, concepto de limite, concepto de derivada y proporcionalidad. En él los profesores trabajan en equipo durante un lapso de seis meses para obtener una planificación, una ejecución y una propuesta de mejora, una vez que se ha introducido el modelo MTSK (Carrillo, et al., 2013), el cual utilizan como apoyo. Consideramos este aspecto valioso, dado que cada una de las categorías descritas en el modelo les permite identificar u/y organizar sus conocimientos a manera de contemplar los aspectos disciplinares y didácticos que necesitan tomar en cuenta para realizar la planificación, al tiempo que da acceso a realizar una reflexión continua centrada en la especificidad del tópico matemático. Lo anterior pudiendo sumergirlos, con el fin de contemplar todas las categorías del MTSK, en una labor de investigación que funciona como un "*tipo de guía o inspiración*" (Rowland et al., 2005), con impacto en el desarrollo de su conocimiento profesional (Shulman, 1987).

Cabe mencionar que los profesores, han tenido dentro de otro curso, un acercamiento a literatura especializada sobre error, obstáculo y dificultad sin que estos se centren en un contenido matemático en particular. Lo anterior consideramos, puede permitirles identificar líneas de investigación especializadas y profundizar sobre el tópico matemático de su interés.

Una característica particular de las planificaciones obtenidas con este modelo es que, señala específicamente las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido que pudiera presentar el alumno a la hora de abordar el tópico frente al aula, dando muestra a detalle de su conocimiento y por ende información sobre el contenido del conocimiento que pone en acción.

Expuesto nuestro interés se consideró que el caso fuera de educación secundaria y que se abordará un tópico relacionado con la adquisición del lenguaje algebraico, semblantes que delimitaron el caso instrumental a dos profesoras que por consideraciones éticas nombramos M1 y M2.

M1, es una profesora en servicio y Licenciada en Sistemas; actualmente se desempeña como profesora de telesecundaria, cuenta con 11 años de experiencia. M2, es Licenciada en Educación, con especialidad en matemáticas, cuenta con experiencia en prácticas profesionales y seis meses como profesora de primaria.

Técnica de recolección de datos y fuentes de información.

Para la recolección de los datos tomamos como punto de partida un video de ejecución, realizado en el contexto natural, en la práctica, sin existir intervención por parte del investigador (observación no participante), asimismo, se contempla la planificación y propuesta de mejora como fuentes primarias de información y un cuestionario, todas para garantizar la validez de la investigación (Yin, 1989, citado por Martinez, 2006).

Cabe señalar que las fuentes primarias de información se obtuvieron en un lapso de seis meses y que son producto de un esfuerzo colaborativo de M1 y M2 dentro del curso de desarrollo profesional. Es así que:

- La planificación contempla antes del diseño de las actividades una introducción en donde se utiliza el modelo MTSK, para identificar y organizar los conocimientos que las profesoras consideran necesarios para llevar a cabo el diseño de las actividades y posterior ejecución de las mismas. También, las actividades son acompañadas de las posibles dificultades inherentes al contenido que pueden visualizarse.
- El video de ejecución, contempla la puesta en escena de las actividades diseñadas, donde en una clase tanto M1 y M2 interactúan con los estudiantes.

- La propuesta de mejora contempla el contraste entre los objetivos planificados y los logrados en la ejecución, y, como consecuencia de éste, las actividades que se anexan a la planificación original.

Reconocemos a partir de las aportaciones de Savola (2008) algunas fortalezas del video como herramienta de observación en el aula:

- La permanencia de la grabación de video permite un reanálisis ilimitado, así como múltiples puntos de vista, aumentando la posibilidad de una observación neutral contrario a cualquier registro de papel y lápiz. En el proceso de análisis de la información, el uso de video permite llevar las acciones observables en el aula, a la socialización con otros investigadores, situación que no podría darse en una observación en vivo y que representa confiabilidad en la investigación. Al permitir varios puntos de vista, puede tener un efecto correctivo o abrir la mente a diferentes perspectivas, así como permitirnos crear un lenguaje común a partir de la observación.

- Asimismo, el video constituye un registro audiovisual en tiempo real en el que podemos reconstruir los eventos que tuvieron lugar en un tiempo específico dentro del aula. Con las bondades de reproducción a velocidad variable, o fuera de secuencia, para detectar el conocimiento del profesor en episodios incluso dentro de un diálogo denso.

- El uso de video como fuente primaria de información ayuda a eliminar discrepancias entre lo que se hace y se dice. Ya que expone los antecedentes de un trabajo, nos permite analizar cómo la planificación es llevada a escena, contrastar los dos episodios y comprender el origen de las reflexiones que sustentan la elaboración de la propuesta de mejora (proceso que a su vez permite una triangulación del conocimiento identificado).

En cuanto a las fuentes secundarias, consideramos un cuestionario de preguntas abiertas sobre dificultades de aprendizaje considerando que las profesoras pueden responder bajo sus propios términos, evitando limitaciones de categorías preestablecidas (Cohen, et al., 2007) (anexo IV).

Consideraciones éticas.

Para la recolección de información por medio de nuestras fuentes primarias y secundarias, hace necesario tener presente las consideraciones éticas con las que se llevará a cabo la investigación. Siguiendo a Cohen, et al. (2007), existe un consentimiento informado de las profesoras que fueron elegidas como estudio de caso, así como el permiso de la profesora a cargo del curso de desarrollo profesional del cual fueron tomadas. Además, se ofrecen condiciones y garantías de anonimato (manteniendo la confidencialidad de los datos, dando la oportunidad a las profesoras involucradas de verificar las declaraciones en la fase de redacción del informe para demandar su validación, así mismo, ofrecer una copia del informe final) siempre procediendo con ética dentro de la investigación.

Instrumento de análisis.

Una vez recolectados los datos, para el análisis adaptamos el modelo elaborado por Sosa (2011), que corresponde a una adaptación del modelo que presenta Ribeiro (2008 citado en Sosa, 2011). Los autores manifiestan que este modelo es desarrollado para efectuar el análisis de la práctica del profesor, permitiendo ilustrar de forma detallada y simple algo que por su naturaleza es complejo. Consideran la clase como un todo que está constituido por partes disjuntas (episodios) coherentes entre ellos, a su vez cada episodio está asociado a un objetivo referente a lo que el profesor pretende enseñar en la clase y se delimita por las acciones necesarias (evento desencadenante y de término) que en aras de alcanzarlo lo constituyen. Entendemos que es precisamente en estos episodios y la secuencia de acciones (ya sean planificadas o esporádicas) que se identifica los indicadores del conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje manifestados en el MTSK. Reconocemos la importancia de ligar las acciones del profesor a un objetivo de enseñanza a manera de justificar cómo el conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje puede justificar la toma de decisiones didácticas que subyacen a dichas acciones.

Ribeiro et al. (2012) sugieren que, para identificar los episodios de una forma más manejable y comprensible, el nombre del episodio esté directamente relacionado con el objetivo del profesor en la situación concreta. En nuestro caso, los objetivos son aspectos que se hacen explícitos en la planificación y que son estructurales en la ejecución, sin embargo, no descartamos que, como individuo, el profesor es capaz de adaptar estos objetivos de acuerdo a su experiencia y conocimiento, a las posibles contingencias que aparecen a lo largo de la clase. Por ello, consideramos que también pueden ser declarados durante el discurso en el aula, refiriendo de forma explícita cuál se pretende que sea el aprendizaje del (de los) estudiante(s) (Ribeiro, et al., 2012).

Nuestra adaptación parte de la adaptación de Sosa (2011) (Figura 4), con el objetivo de realizar un análisis para caracterizar el conocimiento del profesor. Este considera que tanto los objetivos como los conocimientos son dos elementos centrales. También, señala que, las acciones que toma el profesor juegan un papel muy importante porque sirven de apoyo para comprender y moldear el objetivo del profesor para enseñar el contenido matemático.

[i.j] Descripción del episodio. (línea de inicio – línea de fin)

Objetivo general: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.

Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del episodio.

[A, i.j][15] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

Conocimientos:
Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese episodio.

Conocimiento Común del Contenido (**CCC**)
Subdescriptores
Conocimiento Especializado del Contenido (**CEC**)
Subdescriptores
Horizonte Matemático (**HM**)
Subdescriptores
Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (**CC-Es**)
Subdescriptores
Conocimiento del contenido y de la Enseñanza (**CC-En**)
Subdescriptores
Conocimiento Curricular (**CC**)
Subdescriptores

Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese episodio.

[16][i.j.k] Descripción del subepisodio. (línea de inicio – línea de fin)
Objetivo particular: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.
Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del subepisodio.
[A, i.j.k] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.
Conocimientos:
Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese subepisodio.
CCC
Subdescriptores
CEC
Subdescriptores
HM
Subdescriptores
CC-Es
Subdescriptores
CC-En
Subdescriptores
CC
Subdescriptores

Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese subepisodio.

Figura 4. Modelo para efectuar el análisis del conocimiento del profesor de Sosa (2011)

Consideramos que este modelo es adecuado para nuestro objetivo de investigación ya que al igual que Rowland, et al. (2005) y Shulman (1987) contemplamos que el conocimiento en acción se visualiza en la ejecución y la planificación (por ende, en la propuesta de mejora), a través del proceso de transformación. Nos interesa en primer momento identificar el conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas que pone en acción en los tres escenarios (Objetivo Particular 1 de nuestra investigación), por ello en nuestra adaptación del modelo consideraremos una de las categorías del KFLM. Como se ha mencionado el MTSK tiene la dualidad de ser marco teórico y metodológico, ya que permite analizar el conocimiento del profesor en este caso a través de sus distintos indicadores, en nuestro caso de error, obstáculo y dificultad (Flores-Medrano, et al., 2014).

Dado la anterior, los indicadores a partir de los cuales se buscarán los subindicadores de conocimiento en las fuentes de información son los siguientes:

Indicador
KFLM 1: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.
KFLM 2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.
KFLM 3: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.

Tabla 1: Indicadores de conocimiento del profesor sobre dificultades de aprendizaje.

Utilizamos el proceso de categorización mixto (deductivo-inductivo). Por un lado, deductivo ya que nuestra investigación consistirá en adaptar cada evidencia de conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas, a través de los distintos indicadores (mostrados en la tabla anterior). Sin descartar la formulación de alguno más cuando a partir del análisis de la información, este repertorio se muestre insuficiente, es decir, cuando no contenga dentro de su sistema de indicadores alguno capaz de cubrir la evidencia detectada en el análisis. Los modelos para analizar el conocimiento del profesor en las distintas fuentes de información se presentan a continuación.

Instrumento para el análisis de la ejecución.

❖ **[Es, Ep] [18] Descripción del episodio (línea inicial – línea final).**

Objetivo general[19]: Identificación el objetivo matemático que el profesor pretende enseñar.

Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del episodio.

[A] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM). Conocimiento evidenciado por la profesora referente a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

[Es, Ep, No.] Numeración progresiva dentro del escenario y descripción del subindicador de conocimiento sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas evidenciado, considerando los Indicadores referidos en la Tabla 1, u otros emergentes.

Evidencia [20] : "Evidencia que se toma del escenario con la finalidad de corroborar el subindicador identificado" (línea(s) a la que hace referencia la evidencia).

> Revisión longitudinal: Como parte de la evidencia se contempla aquellas líneas que dentro del mismo escenario pueden aclarar o reforzar el subindicador identificado.
>
> Revisión transversal: Como parte de la evidencia se contempla aquellas líneas que dentro de los otros escenarios pueden aclarar o reforzar el subindicador identificado.
>
> Revisión del Cuestionario: Líneas de cuestionario que pueden aclarar o reforzar el subindicador identificado.

Evento de término: Evento que funciona como causa de término del episodio.

Figura 5. Instrumento para efectuar el análisis del conocimiento del profesor en la ejecución.

[18] En esta adaptación, la etiqueta del Episodio hubo que contemplar el escenario en este caso "E" (ejecución), ya que a diferencia del original (análisis de video) nuestro objetivo de investigación abarca la planificación y propuesta de mejora, siendo esto importante para distinguir que el análisis corresponde al escenario de ejecución. A su vez, esta etiqueta impacta en los subindicadores evidenciado.

[19] En el instrumento original de Sosa (2011) el objetivo matemático está enfocado a lo que el profesor pretende enseñar, en nuestro caso se reorienta debido nuestro objetivo de investigación a lo que el profesor pretende que el alumno aprenda.

20 En esta adaptación consideramos la evidencia que sustenta al subindicador.

Instrumento de análisis de la planificación y propuesta de mejora.

Se construye a partir de la adaptación del instrumento de ejecución, en este caso no se considera el evento de inicio y término del episodio, ya que la propia naturaleza de la información estos están determinados por el inicio y fin de la actividad diseñada.

❖ **[Es, Ep][21] Descripción del episodio (línea inicial – línea final).**

Objetivo general: Identificación el objetivo matemático que el profesor pretende enseñar.

[A] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM). Conocimiento evidenciado por la profesora referente a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

[Es, Ep, No.]: Numeración progresiva dentro del escenario y descripción del subindicador de conocimiento sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas evidenciado, considerando los Indicadores referidos en la Tabla 1, u otros emergentes.

Evidencia: "Evidencia que se toma del escenario con la finalidad de corroborar el subindicador identificado" (línea(s) a la que hace referencia la evidencia).

Revisión longitudinal: Como parte de la evidencia se contempla aquellas líneas que dentro del mismo escenario pueden aclarar o reforzar el subindicador identificado.

Revisión transversal: Como parte de la evidencia se contempla aquellas líneas que dentro de los otros escenarios pueden aclarar o reforzar el subindicador identificado.

Revisión del Cuestionario: Líneas de cuestionario que pueden aclarar o reforzar el subindicador identificado.

Figura 6. Instrumento para efectuar el análisis del conocimiento del profesor en la planificación y propuesta de mejora.

[21] [Es, Ep] hace referencia al escenario "P"-(Planificación) o "M" (Propuesta de mejora), sirve para ubicar el episodio dentro de un escenario corresponde a la planificación o a la propuesta de mejora.

Instrumento de análisis de fuentes secundarias.

En cuanto al análisis de fuentes secundarias (cuestionario) se utilizará:

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM). Conocimiento revelado (u evidenciado) por la profesora referente a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.
[C, M1/M2, No.][22]: Numeración progresiva dentro del cuestionario aplicado a M1 o M2 y evidencia de conocimiento sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas evidenciado.

Figura 7. Instrumento para efectuar el análisis del conocimiento del profesor en el cuestionario.

Método de análisis de la información

El análisis de la información se rige por nuestros tres objetivos particulares:

Objetivo particular 1.

Identificar el conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas que revelan y ponen en acción las profesoras de matemáticas en formación continua al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora.

Este objetivo contempla 2 acercamientos, uno hipotético y uno a las fuentes de información primarias. El acercamiento hipotético tiene como objetivo construir una imagen previa de los posibles subindicadores que podríamos evidenciar dentro de los escenarios en el segundo acercamiento. En el segundo acercamiento, se identifica el conocimiento de las profesoras sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático puesto en acción en las fuentes primarias de información tomando como referencia los indicadores de conocimiento desprendidos del MTSK. Los subindicadores de conocimiento de las profesoras fueron identificados por agotamiento.

[22] Esta etiqueta en su parte M1/M2 es para ubicar si el análisis corresponde al cuestionario contestado por M1 o por M2.

En este segundo acercamiento es preciso en primer momento realizar la transcripción del video en función de las declaraciones o turnos de palabra de los participantes. Una vez realizada la transcripción, el texto de ésta al igual que el de las demás fuentes de información se divide, línea por línea.

Plasmadas la información línea por línea se procede a delimitar los episodios indicando la línea inicial y final del mismo, recordamos que estos están vinculados a un objetivo matemático que el profesor pretende el alumno aprenda y las acciones que se llevan a cabo en aras de alcanzar dicho objetivo. Así mismo que, en el caso de la ejecución los episodios se identifican por el evento desencadenante y de término, y que, en la planificación y propuesta de mejora son identificados por las actividades diseñadas.

Después, se identifican frases clave utilizando la línea inicial y final, se describe el subindicador de conocimiento evidenciado y se corroboran a través de una revisión longitudinal y transversal de las fuentes de información.

Objetivo particular 2.

Comprender de forma más amplia las diferencias y similitudes del conocimiento identificado.

Una vez identificados y corroborados las descripciones de los subindicadores evidenciados hasta este momento identificados con la etiqueta [Es, Ep, No.], se lleva a cabo las siguientes etapas: en la primera, se realiza un análisis longitudinal (Ribeiro, et al. 2012) por escenario, subordinado a la descripción de subindicadores evidenciados, esto nos permite reforzar la evidencia del subindicador haciendo el proceso más consistente, reduciendo por triangulación los subindicadores asignados a cada escenario identificándolos en un grupo aún sin identificación; en la segunda se realiza un análisis transversal (Ribeiro, et al., 2012) comparando los tres escenarios del mismo modo al anterior esto refuerza aún más los subindicadores evidenciados, haciendo nuevamente una reducción por triangulación al mismo tiempo que permite refinar las descripciones de los subindicadores evidenciados.

Objetivo particular 3.

Caracterizar el conocimiento de las profesoras de matemáticas en formación continua sobre dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas en segundo de secundaria.

Una vez organizadas y refinadas las descripciones de los subindicadores evidenciados se procede a caracterizar, a agruparlas por similitud.

Finalmente, en este capítulo se describe el diseño metodológico que se emplea en esta investigación con el propósito de comprender e interpretar sobre el conocimiento de las profesoras que nos ocupa. Dentro del paradigma interpretativo y en sintonía una metodología cualitativa, consideramos el estudio de caso instrumental (Stake, 2007), así como una descripción del mismo. Además, indicamos las técnicas de recolección de información y los instrumentos para su análisis. Por último, siguiendo los objetivos particulares de nuestra investigación, se desglosa el método seguido para el análisis de las fuentes primarias (planificación, ejecución y propuesta de mejora) y secundarias (cuestionario), método que comprende la identificación del conocimiento de las profesoras tomando en cuenta los indicadores de conocimiento provenientes de MTSK a partir de la utilización de nuestros instrumentos, seguido de un análisis longitudinal y transversal (Ribeiro, et al., 2012) para triangular y refinar el conocimiento identificado que nos lleva a una caracterización por agrupación en subindicadores de conocimiento. En el siguiente capítulo, se presenta el fruto del método descrito.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En este capítulo en primer momento mostramos el análisis de la información en el que se identifica el conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje en el tema de la adición de expresiones algebraicas que ponen en acción dos profesoras del nivel secundaria al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora. Lo anterior a través de la categoría del KFLM, que dentro del modelo MTSK.

Después con el objetivo de comprender de forma más amplia las diferencias y similitudes del conocimiento del conocimiento de estas dos profesoras sobre nuestro foco de estudio, presentamos una tabla en donde se organiza el conocimiento identificado, misma que nos permite llevar a cabo la caracterización en aras de responder a qué conocimiento pone en acción el profesor sobre dificultades de aprendizaje en la adición de expresiones algebraicas en segundo de secundaria.

Identificación del conocimiento.

En este apartado se persigue el Objetivo Particular 1. Como se mencionó en el capítulo anterior, el análisis de la información se realiza a partir de dos acercamientos con la intención de revisar y corroborar lo que se va obteniendo en dicho análisis, utilizando para ello, nuestras fuentes primarias de información y la adaptación realizada al modelo de Sosa (2011). En cada escenario se realiza una división de episodios fenomenológicamente coherentes a partir de la identificación del objetivo declarado por el profesor, respecto al contenido matemático a enseñar.

Con fines prácticos recordamos dos aspectos, los referentes de interpretación respecto a error, obstáculo y dificultad, y los indicadores construidos a partir de la categoría de KFLM para el conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. Así pues, entendemos por *error* a los intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación (Matz, 1980). Haciendo hincapié en que en los indicadores de conocimiento nos referiremos por error al “ordinario”, a aquellos que son fugaces o al azar consecuencia según Ruano et al. (2008) de una falta de conocimiento de un despiste o un descuido. Mientras que, por *dificultad* a una manifestación de error, que demuestra que el estudiante no ha podido comprender “algo” (un concepto, un problema, un algoritmo, etc.) del objeto matemático de aprendizaje en nuestro caso de la adición de expresiones algebraicas. Y, por o*bstáculo* al efecto de un conocimiento adquirido que en cierto contexto se muestra exitoso, pero que, en otros, se revela falso, o simplemente inadaptado (Brousseau, 1983).

En cuanto a nuestros indicadores de conocimiento partimos de:

Indicador
KFLM 1: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.
KFLM 2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.
KFLM 3: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.

Tabla 2: Indicadores de conocimiento.

Análisis hipotético

Este primer acercamiento corresponde a un acercamiento hipotético producto de la experiencia como docente y discente (Climent, 2002), pretendemos construir una imagen previa de los posibles subindicadores que podríamos evidenciar dentro de los escenarios en el segundo acercamiento, antes de llegar a una caracterización del conocimiento del profesor. En este punto se hace necesario advertir al lector que este análisis se realiza antes de tener un primer acercamiento a las fuentes primarias de información y cuando el desarrollo del marco teórico necesario para la interpretación de los resultados no es basto para tales fines.

Estos subindicadores se muestran a continuación.

KFLM1: Conoce los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas

[H, 1, 1]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al realizar la adición de términos semejantes, suma los coeficientes y al poner el término resultante, omite la parte literal.

Ejemplo: $\boldsymbol{27x + 38x = 65}$

[H, 1, 2]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque cuando utiliza el cálculo mental no anota lo que obtiene y cuando ocupa ese resultado, recuerda y sustituye con un dato erróneo, afectando el resultado final.

Ejemplo: En la adición siguiente:

$25x + 13x + 16x + 3y + 14y + 2x = 58x + 17y$

El alumno procede a sumar los coeficientes de los primeros tres términos:

$25x + 13x + 16x = 54x$

Luego efectúa la adición de:

$3y + 14y = 17y$

Al realizar la adición del término $\boldsymbol{2x}$, recuerda erróneamente el resultado de la primera adición, sustituyendo por $\boldsymbol{56x}$, afectando el resultado final.

[H, 1, 3]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por no aplicar la propiedad conmutativa omitiendo la suma de algún término semejante.

Ejemplo: $\boldsymbol{25x + 13x + 16x + 3y + 14y + 2x = 54x + 17y}$

[H, 1, 4]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al no aplicar la propiedad asociativa procede a sumar los coeficientes sin percatarse de que en cierto momento comienza a sumar términos no semejantes.

Ejemplo: $\boldsymbol{25x + 13x + 16x + 3y + 14y + 2x = 59x + 14y}$

[H, 1, 5]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al no aplicar la propiedad distributiva cambia la parte literal de un término resultante.

Ejemplo: $\boldsymbol{25x + 13x + 16x + 3y + 14y + 2x = 56z + 17y}$

[H, 1, 6]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por no ejecutar el algoritmo de forma ordenada.

Ejemplo: $\boldsymbol{25x + 13x + 16x + 3y + 14y + 2x = 54\mathrm{x} + 17y + 2x}$

[H, 1, 7]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque su caligrafía torna indescifrable algún número sustituyéndolo por otro incorrecto.

Ejemplo: Confundir $\mathbf{6}$ con $\mathbf{0}$; $\boldsymbol{25x + 13x + 16x + 3y + 14y + 2x = 50\mathrm{x} + 17y}$

[H, 1, 8]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por omitir algún término algebraico resultante al aplicar de forma mental las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva del algoritmo.

Ejemplo: $\boldsymbol{3x^2 + 8x + 9x^2 + 7 + 6x = 12x^2 + 6x + 7}$

[H, 1, 9]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por sumar términos no semejantes ya que en su búsqueda se concentra solo en la literal y no visualiza el exponente.

Ejemplo: $\boldsymbol{25x + 13x + 16\mathrm{x} + 3\mathrm{y} + 14\mathrm{y} + 2x^2 = 56\mathrm{x} + 17\mathrm{y}}$

[H, 1, 10]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al comprobar el resultado de la adición, el alumno omite el signo "=" y suma el coeficiente del término algebraico resultante.

Ejemplo: $\boldsymbol{25x + 13x + 16\mathrm{x} + 3\mathrm{y} + 14\mathrm{y} + 2\mathrm{x} = 112\mathrm{x} + 17\mathrm{y}}$

[H, 1, 11]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque se confunde cuando se cambia la forma de abordar el tema y cambia los datos.

Ejemplo: Abordar el tema con material didáctico y luego sin él.

[H, 1, 12]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al escribir el resultado pierde concentración y cambia la literal en el término algebraico.

Ejemplo: $\boldsymbol{25x + 13x + 16\mathrm{x} + 3\mathrm{y} + 14\mathrm{y} + 2\mathrm{x} = 56\mathrm{x} + 17\mathrm{x}}$

[H, 1, 13]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda el nombre de las propiedades de la suma.

> Ejemplo: Cuando el profesor se dirige a la propiedad asociativa el alumno procede de forma equivocada porque no recuerda a que propiedad se refiere el profesor.

[H, 1, 14]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda la teoría de los exponentes.

> Ejemplo: $4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{4x} = \boldsymbol{8x^2}$

[H, 1, 15]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda la ley de los signos.

> Ejemplo: $(\boldsymbol{25x} + \boldsymbol{13y} + \boldsymbol{16x}) + (\boldsymbol{-3x} + \boldsymbol{14y}) = \boldsymbol{25x} + \boldsymbol{13y} + \boldsymbol{16x} + \boldsymbol{3y} - \boldsymbol{14y}$

[H, 1, 16]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda el algoritmo para la suma de fracciones.

> Ejemplo: $\boldsymbol{\frac{3}{5}x} + \boldsymbol{\frac{3}{4}x} = \boldsymbol{\frac{6}{9}x}$

[H, 1, 17]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque pierde la concentración al distraerse con otro objeto u procedimiento matemático.

> Ejemplo: $\boldsymbol{3x} + \boldsymbol{6y} + \boldsymbol{2x} = \boldsymbol{9xyz}$
>
> $\boldsymbol{3xyz} + \boldsymbol{6xyz} =$

[H, 1, 18]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque el alumno no sabe dirigirse a las propiedades por su nombre.

> Ejemplo: Sabe el procedimiento que tiene que realizar en el algoritmo de la adición de expresiones algebraicas, pero no reconoce las propiedades que está aplicando.

[H, 1, 19]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque el alumno tiene una excesiva confianza en el dominio del algoritmo y no razona lo que ésta haciendo.

[H, 1, 20]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque malinterpreta la información de un problema y cambia las indicaciones.

Ejemplo: Al plasmar una expresión algebraica en ejercicios de modelación.

[H, 1, 21]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas al cambiar la información de una forma de representación a otra.

[H, 1, 22]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al aparecer un término cuyo coeficiente sea un número relativo olvide el signo y lo trate como positivo.

Ejemplo:$\boldsymbol{2x + 3x + -8x = 13x}$

KFLM2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas.

[H, 2, 1]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque aún presenta dificultades en temas previos relacionados.

Ejemplo: $\boldsymbol{\frac{3}{5}x + \frac{3}{4}x = \frac{6}{9}x}$

[H, 2, 2]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque aún no dominan la adición con números naturales.

Ejemplo:$\boldsymbol{27x + 38x = 55x}$

[H, 2, 3]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque considera que los términos semejantes tienen la misma parte literal sin importar el exponente de la variable.

Ejemplo: $\boldsymbol{3a^2 + 3a = 6a^2}$

[H, 2, 4]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque su preferencia a utilizar el razonamiento aritmético le impida apropiarse del lenguaje algebraico.

Ejemplo: Poner $\mathbf{3x}\boldsymbol{a}$ para expresar $\mathbf{3}\boldsymbol{a}$.

[H, 2, 5]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no diferencia el exponente de la literal con el coeficiente.

Ejemplo:$\boldsymbol{m^3 + 3m = 6m}$

[H, 2, 6]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no reconoce como términos semejantes a dos términos algebraicos, si uno de ellos tiene a la unidad como coeficiente de la literal.

Ejemplo: $\boldsymbol{3m + 4m + m + 2 = 7m + m + 2}$

[H, 2, 7]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque el algoritmo o el tema en sí, no tiene sentido procediendo a la aplicación de pasos de forma memorística, mecánica.

Ejemplo: $(\boldsymbol{a + b}) + (\boldsymbol{a + b}) = (\boldsymbol{a + b})^{\mathbf{2}}$

[H, 2, 8]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no distingue que una expresión es equivalente a otra.

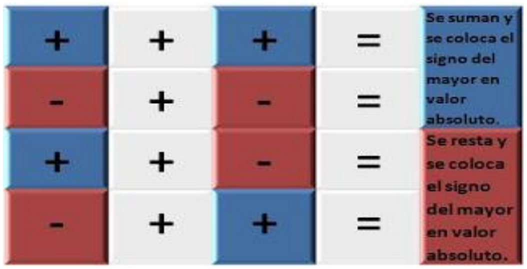
Ejemplo: Que $\boldsymbol{3.x.x.x}$ es equivalente a $\boldsymbol{3x^3}$

[H, 2, 9]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque el nombre de las propiedades involucradas en el algoritmo de adicción no tienen sentido para él, no las distingue tiende a memorizarlas y confundirlas.

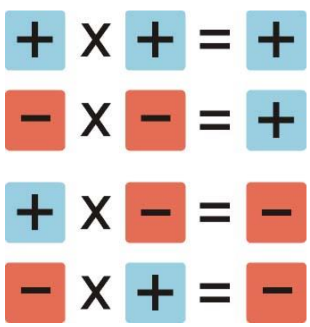
Ejemplo: No sabe a qué se refiere el profesor cuando maneja el término de propiedad conmutativa, distributivo, procede a memorizarlas y confundirlas etc.

[H, 2, 10]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque al proceder de forma memorística confunde la ley de los signos de la multiplicación con la ley de los signos en la adición.

Ejemplo:



En suma, se coloca el signo del mayor en valor absoluto. Mientras que la ley de los signos para la multiplicación



[H, 2, 11]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no distingue términos semejantes.

Ejemplo: $\mathbf{3x + 4 + 8y + 5x = 20xy}$

[H, 2, 12]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no asocia los conocimientos previos con la adición de expresiones algebraicas.

Ejemplo: El alumno considera las leyes de los exponentes como un tema independiente de la suma de expresiones algebraicas y suma el exponente de la parte literal en términos semejantes. $\mathbf{3x + 4x = 7x^2}$

[H, 2, 13]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no distingue términos semejantes si la parte literal se muestra en diferente orden.

Ejemplo: Que el alumno no distinga que $\mathbf{4xyz}$ es semejante a $\mathbf{4zxy}$

[H, 2, 14]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para sumar números que no son concretos, porque no comprende que pueden representar números.

Ejemplo: El alumno no comprende que existan sumas como $\boldsymbol{x+y+z}$

KFLM3: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas

[H, 3, 1]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que en la solución de problemas siempre existe un signo "=" por lo que interpreta las expresiones como enunciados incompletos surgiendo una necesidad de clausura.

Ejemplo: $\boldsymbol{3x+2+4t}$= "algo"

[H, 3, 2]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido en aritmética, que las letras son valores que se sustituyen por un número para obtener un resultado, impidiéndole ver a la literal como un número general.

Ejemplo: $\boldsymbol{A=b}$ x $\boldsymbol{a}$

[H, 3, 3]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido en aritmética que el signo "x" es el signo de la multiplicación por lo que cuando ve la literal "x" piensa que se trata de una multiplicación mal planteada.

Ejemplo: **3xy**

[H, 3, 4]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que la palabra semejante involucra algún parecido, por lo tanto, no distingue como términos semejantes a los términos independientes (no distingue que en un polinomio el término independiente la parte literal tiene exponente cero).

Ejemplo: El alumno no distingue que la semejanza entre $\mathbf{8}$ y **-$\mathbf{5}$** porque no visualiza la parte semejante $\boldsymbol{8x^0}$y $\boldsymbol{-5x^0}$

[H, 3, 5]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que la parte literal representa cualquier valor, lo anterior puede confundirlo y llevarlo a pensar que él puede asignarle un valor.

Ejemplo: $\boldsymbol{5x+8x=26}$ (asigna valor de 2 a la literal)

[H, 3, 6]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que "y" significa conjunción por lo que no puede visualizarla como literal en una expresión algebraica.

Ejemplo: $\mathbf{3yx}$

[H, 3, 7]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que "no puede sumar peras y manzanas" y no pueda llevar a cabo la adición si se presentan términos no semejantes.

Ejemplo: $\boldsymbol{3x+3y+2x}$

[H, 3, 8]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que el signo "-" involucra resta, por eso cuando operan números relativos omiten el signo negativo considerando que se trata de un error.

Ejemplo: $\boldsymbol{3x+\ -8x=11x}$

[H, 3, 9]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no reconoce la unidad como coeficiente de la literal, considerando que puede asignarle un coeficiente cualquiera.

Ejemplo: $\boldsymbol{3m + 4m + m + 2 = 9m + 2}$

Análisis de la información.

En este apartado se muestra un ejemplo de cómo se llevó a cabo el análisis de la información que se presenta en los anexos I-V.

Planificación.

❖ **[P, 1] Adición de expresiones algebraicas (1-329)**

Objetivo general: Organizar e identificar el conocimiento necesario para el diseño de actividades para la enseñanza-aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas.

[A] Las profesoras organizan e identifican los conocimientos necesarios para llevar a cabo el diseño de actividades dentro de la planificación.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[P, 1, 1]: Saber las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimientos previos, en este caso porque no identifica los números reales.

Evidencia: Las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas necesario para el desarrollo de la clase es el mencionado por Kieran (1997) sobre que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales… la finalidad es que puedan presentar el menor número de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157), "*es imprescindible reconocer que los números son las bases para una expresión algebraica*" (158).

Revisión longitudinal: Las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que* *los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*” (444-447).

[P, 1, 3]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.

Evidencia: Las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje que “*para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a utilizar el significado de la variable como incógnita*” (159-160).

Revisión longitudinal: En la planificación dentro de la categoría formas de enseñanza aluden a que se puede “*Representar a la literal con distintos valores, principalmente representados en valores que cambian con respecto a algo, para que el estudiante establezca a la variable con su significado de número* $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$)” (238-240).

Declarado lo anterior dentro de la categoría de recursos y materiales, enuncian la utilización de material tangible como “*los bloques de Dienes, para el manejo de las variables*” (260). “*Cada pieza se define por cuatro variables: color, forma, tamaño y grosor. A su vez, a cada una de las piezas se le asignan diversos valores*…” (263-264). Así mismo, “*se pueden utilizar fichas de colores que representen las distintas variables*” (273) o “*representar el perímetro de una figura con una expresión algebraica*”. (274). Argumentos que empatan con el diseño de las actividades: “Geometría para calcular” (359-374) y “Los tapetes de Rosa” (375-391).

Ejecución.

❖ **[E, 1] Integrar el lenguaje común en una expresión algebraica (1-158).**

Objetivo general: Integrar el lenguaje común en una expresión algebraica, partiendo del conocimiento previo del alumno (números enteros y operaciones aritméticas).

Evento desencadenante: M1 empieza la actividad pidiendo a sus alumnos piensen en un número.

[A] Se les solicita a los alumnos que piensen en un número, después M1 dicta una serie de operaciones aritméticas con él, mientras va cambiando la forma de dirigirse a este por la literal "n". Una vez terminado pasan 4 alumnos a llenar una tabla donde plasman los resultados obtenidos, en la que además visualizan que independientemente del número que pensaron el resultado siempre fue el mismo. M1 guía a la obtención de la expresión algebraica.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[E, 1, 1]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos, en este caso en la multiplicación.

Evidencia: M1 solicita a sus alumnos que piensen en un número, les sugiere que sea "*pequeño*" (1), al indicarles que el número que pensaron lo multiplicarán por tres (7), menciona "*por eso dije que pequeño para que no batallen*" (8).

<u>Revisión transversal</u>: En la planificación se menciona que la actividad "adivinanza de números" "*Se establece con el propósito de recordar los conocimientos previos, haciendo alusión a los números enteros y las operaciones aritméticas*" (404-405)

En la planificación, las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" (444-447).

[C, M1, 1]: "*por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…"* (73-75).

En la planificación, citan a Kieran (1997) aludiendo que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan* *presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157).

Mejora.

❖ **[M, 1] Conocer las reglas para la sintaxis del lenguaje algebraico. (21-102).**

Objetivo general: Conocer las reglas para la sintaxis del lenguaje algebraico.

[A] Se planifica como parte de la propuesta de mejora, llenar una tabla donde el alumno identifique el coeficiente, la parte literal y exponente de ciertas expresiones algebraicas indicadas.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[M, 1, 1]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético.

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que "*el alumno conozca la sintaxis del lenguaje algebraico*" (39-40) a partir de la identificación de las partes de una expresión algebraica (coeficiente, literal, exponente) (46-47).

Expresión	Coeficiente	Exponente	Literal
$6m^3$			
$-4bx$		1	
xy			xy
x^2	1		
$-7a^2$			

(48-53)

Para después profundizar en algunas reglas de sintaxis (54-55), como:

56 Que, si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1), lo mismo sucede

57 cuando el exponente no está indicado.

58 Que existen coeficientes negativos.

59 Que una expresión algebraica puede tener una o más literales.

Asimismo, las profesoras expresan que "*es importante a través de las tablas anteriores se vaya familiarizando con algunas reglas del lenguaje algebraico*" (70-71).

[M, 1, 2]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético en este caso, porque no identifica la unidad como coeficiente en un término algebraico cuando éste no está indicado.

Evidencia: En la mejora se planifica que después de que los alumnos llenen la tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios x y xy , entre otros (46-53), el profesor enfatizará en "*que, si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1)*" (56).

Agrupación por similitud y caracterización.

Una vez identificados y corroborados las descripciones de los subindicadores evidenciados hasta este momento identificados con la etiqueta [Es, Ep, No.] se procedió a organizarlos y refinarlos llevando a cabo la etapa de análisis longitudinal y transversal (Ribeiro, et al. 2012). Para esto fue necesario a su vez identificar las diferencias y similitudes de los mismos en los tres escenarios (Objetivo Particular 2), proceso que en etapa avanzada comienza a evolucionar de forma simultánea con su caracterización (Objetivo Particular 3). De forma similar al apartado anterior, solo mostramos un ejemplo de cómo se llevó a cabo, pudiendo consultar el extenso en el Anexo VI.

KFLM 1.1: Conocer el origen de los errores que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas (en un obstáculo, la ausencia de significado). [P, 1, 6]: (183). [P, 1, 7]: (184).

[P, 1, 6]: Conocer que los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en un obstáculo.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en un obstáculo*" (183).

[C, M1, 2]: "*Considero que los errores antes mencionados pueden provenir de un origen diferente como:*

- *Es un momento difícil el paso de aritmética al algebra, … hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética" (108-113).*

[P, 1, 7]: Conocer que los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado.

Evidencia: Las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184).

[C, M1, 3]: "*En cuanto a la adición de expresiones algebraicas puedo mencionar tres errores más comunes a los que me he enfrentado.*

- *Falta de significado…*" (83-85)

KFLM 2.1: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado (relacionada con la complejidad misma del objeto matemático, con los procesos del pensamiento, con las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra). [P, 1, 8]: (184-186). [P, 1, 9]: (184-187). [P, 1, 10]: (184-187).

[P, 1, 8]: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, en este caso relacionadas con la complejidad misma del objeto matemático.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan procedencias distintas una de ellas relacionada con las "*dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos*" (185-186).

[C, M2, 1]: el alumno presenta errores debido a "*a la dificultad propia del contenido*" (29).

[P, 1, 9]: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, <u>en este caso relacionadas a los procesos del pensamiento</u>.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan dos procedencias distintas una de ellas relacionada con las "*dificultades asociadas a la complejidad de … y los procesos del pensamiento*" (185-186).

[C, M1, 4]: "*El conocimiento que el profesor posee le permitirá entender un poco sobre la manera de pensar del estudiante, asimismo detenerse a pensar en las posibles complicaciones que el estudiante tendrá al estar involucrado con algún contenido…*" (12-15).

[P, 1, 10]: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, en este caso <u>relacionadas a las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra</u>.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan procedencias distintas una de ellas relacionada con las "*dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra*" (186-187).

[C, M1, 5]: "*Otro posible origen de los errores que se presentan con relación a este tópico pudiera ser el valor afectivo, es decir las creencias que el alumno posee y que son difíciles de cambiar…"* (120-122).

KFLM 2.2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimientos previos (no identificar números reales, no poder trabajar aritméticamente con números reales). [P, 1, 1]: (155-158). [P, 1, 2]: (155-157). [E, 1, 1]: (1-8).

> [C, M1, 1]: "*Considero la importancia de explorar los conocimientos previos en los estudiantes porque con base en ello se diseñarán situaciones didácticas con actividades adecuadas que permitan la explotación de esos conocimientos previos, es decir enfrentar al alumno a sus ideas para reflexionar sobre ellas y descubrir nuevos conocimientos; de la misma manera por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…"* (69-75).

[P, 1, 1]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas <u>por un aprendizaje deficiente de conocimientos previos, en este caso porque no identifica los números reales.</u>

> Evidencia: Citan a Kieran (1997) quien menciona que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales… la finalidad es que puedan presentar el menor número de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157), "*es imprescindible reconocer que los números son las bases para una expresión algebraica*" (158).

> <u>Revisión longitudinal:</u> Las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" (444-447).

[P, 1, 2]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas <u>por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos, en este caso porque no puede trabajar de manera aritmética con los números reales.</u>

> Evidencia: Citan a Kieran (1997) aludiendo que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157).

> <u>Revisión longitudinal:</u> Las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta*

actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar” (444-447).

[E, 1, 1]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos, en este caso en la multiplicación.</u>

Evidencia: M1 solicita a sus alumnos que piensen en un número, les sugiere que sea “*pequeño*” (1), al indicarles que el número que pensaron lo multiplicarán por tres (7), menciona “*por eso dije que pequeño para que no batallen*” (8).

<u>Revisión transversal</u>: En la planificación se menciona que la actividad “adivinanza de números” “*Se establece con el propósito de recordar los conocimientos previos, haciendo alusión a los números enteros y las operaciones aritméticas*” (404-405)

En la planificación, las profesoras mencionan que “*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*” (444-447).

[C, M1, 1]: “*por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…”* (73-75).

En la planificación, citan a Kieran (1997) aludiendo que “*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*” (155-157).

KFLM 3.5: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo “=” (porque tienen la idea de hacer algo al lado izquierdo y derecho de una igualdad, por la carencia de sentido; por las formas de proceder en aritmética, al encontrar una expresión abierta la considera incompleta, asumiendo que debe de existir un resultado que generalmente es un número; lo cual ocasiona que se produzca el error de carencia de sentido, al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros). [P, 1, 16]: (199-200). [P, 1, 18]: (208-210). [P, 1, 21]: (218-220). [E, 2, 9]: (390-397).

[P, 1, 16]: Saber los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>relacionados con la concepción aritmética del signo “=”, en este caso</u>

porque tienen la idea de hacer algo al lado izquierdo y derecho de una igualdad, por la carencia de sentido.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1998) quienes mencionan la "*carencia de sentido en el signo igual; para los estudiantes la idea que tienen sobre el signo igual es la de hacer algo ante los lados izquierdo y derechos de una igualdad*" (199-200).

[C, M1, 8]: "*el estudiante al encontrarse con un signo igual ellos la mayoría de las ocasiones tienden a cerrarlo en un valor numérico que obtienen de la expresión algebraica que está antes o después del signo igual*" (93-96).

[P, 1, 18]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=", en este caso porque, por las formas de proceder en aritmética, al encontrar una expresión abierta la considera incompleta, asumiendo que debe de existir un resultado que generalmente es un número.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes expresan que existen "*errores a la falta de un cierre, cuando los estudiantes se encuentran con expresiones como 5 + b consideran que esta expresión es incompleta, asumen que debe existir un resultado que generalmente es un número*" (208-210).

[C, M2, 2]: un posible error en la adición de expresiones algebraicas es "*querer cerrar las operaciones a un número en particular"* (24-25).

[C, M1, 16]: "… *es difícil para él entender … y que no necesariamente cuando exista un signo igual tendrá un valor numérico*" (117-119).

[P, 1, 21]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque por la concepción aritmética del signo "=", lo cual ocasiona que se produzca el error de carencia de sentido, al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que "*otra forma de interactuar con el contenido es la igualdad aritmética la apliquen en el contexto algebraico, esto puede ocasionar que se produzca el error de la carencia de sentido al signo igual al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros*" (218-220).

[E, 2, 9]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=", en este caso porque no acepta una expresión algebraica como resultado, llevándolo a sustituir un valor en ambos lados de la igualdad.

Evidencia: M1 pregunta a una bina como obtuvieron la respuesta del ejercicio dos (en el cual el material gráfico no es suficiente para dar respuesta), antes de que contesten otro alumno menciona que "*sacaron la calculadora*" (390), ante esto, M1 pregunta a la bina "*pero, ¿cómo saben cuánto mide p?"* (392), "*¿cuánto mide la pluma?*" (393), recordando al grupo "*dijimos lo que queremos son las expresiones que van saliendo*" (397).

[C, M1, 17]: "… *es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales…o se le asigna un valor a la variable*" (170-172).

KFLM 3.6: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas ligados a la concepción de concatenación, porque ha aprendido que en aritmética significa adición, contrario a su significado algebraico de multiplicación. [P, 1, 17]: (206-207).

[P, 1, 17]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas ligados a la concepción de concatenación, porque ha aprendido que en aritmética significa adición, contrario a su significado algebraico de multiplicación.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes expresan que "*en aritmética la concatenación significa adición como 37 significa 30 + 7, sin embargo, en álgebra la concatenación significa multiplicación*" (205-206) "*esto conducirá a que los jóvenes malinterpreten el sentido de los términos algebraicos*" (206-207).

[C, M1, 9]: "*Los errores del álgebra ocasionados por las características del lenguaje. Uno de ellos es la concatenación en expresiones aritméticas es de suma, mientras que en el álgebra se pueden dar concatenaciones de multiplicación y suma. Por ejemplo, 3x tiene una concatenación de multiplicación, muy frecuentemente los alumnos no llegan a entender la diferencia*." (97-101)

KFLM 4.1: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque en el procedimiento por un despiste no plasma algún signo/símbolo (un paréntesis o la parte literal). [P, 1, 18]: (216-217); [E, 2, 13]: (552-553) y [E, 2, 15]: (582).

[P, 1, 20]: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque al hacer agrupaciones de términos algebraicos olvida algún signo, como un paréntesis.

> Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que "*los estudiantes pueden hacer agrupaciones donde olviden el signo*" (216-217). Para ejemplificar utilizan "$(\boldsymbol{5a}+\boldsymbol{8a}-\boldsymbol{4ab})+\boldsymbol{3b}+\boldsymbol{7b}-\boldsymbol{4ab})$" (216-217).
>
> > [C, M1, 10]: "*Otro error es en el registro algebraico es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales se emplean mal los datos, se omiten signos…*" (170-171).

[E, 2, 13]: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque en el procedimiento por un despiste no plasma algún signo/símbolo, en este caso el factor literal de un término algebraico.

> Evidencia: M1 al ver que un alumno durante el procedimiento de Adición de expresiones algebraicas omite el factor literal menciona "*acuérdense que cuando estén utilizando expresiones algebraicas nunca se les debe olvidar la literal*" (552-553).

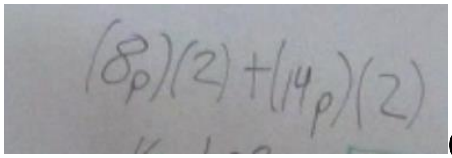
[E, 2, 15]: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque en el procedimiento por un despiste no plasma algún signo/símbolo, en este caso la literal de un término algebraico.

> Evidencia: Cuando un alumno pasa a compartir el resultado de la obtención de un perímetro pone como resultado 44, M1 le pregunta "*44 ¿qué?*" (582) el alumno corrige, mientras la profesora advierte que en un sumando también falta especificar el factor literal *"¿aquí también tiene p o es sin p?"* (582)

KFLM 4.2: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema (poner 14 en vez de 48). [E, 2, 14]: (580-581).

[E, 2, 14]: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema.

Evidencia: Un alumno de la bina 3 le menciona a la profesora que ellos han hecho el ejercicio de manera diferente, por lo que M1 lo invita a pasar al pintarrón, cuando el alumno escribe



(580)

M1 le dice, "*Ah ok ¿ustedes pusieron 14 en vez de 48*? (580) a lo que el alumno contesta con un "*si*" (581).

Finalmente, en este capítulo presentamos el fruto de los tres objetivos particulares de nuestra investigación, abordando en primer momento el análisis hipotético, la identificación del conocimiento de las profesoras en los escenarios propuestos y en segundo momento el agrupamiento por similitud del conocimiento evidenciado y la caracterización del mismo. En el próximo capítulo se da respuesta a nuestra pregunta de investigación.

CAPÍTULO V. RESULTADOS

En este Capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de seguir los objetivos planteados para responder a nuestra pregunta de investigación ¿qué conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático ponen en acción dos profesoras, al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora del tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria?

Para estructurarlo se muestra una tabla en la que se resumen los resultados del análisis de la información y el contraste con el acercamiento hipotético, después, se presenta el agrupamiento de los subindicadores evidenciados, el cual es resultado de la triangulación longitudinal y transversal de las tres fuentes primarias de información y de los cuestionarios.

Resumen de resultados.

Con la intención de visualizar de manera global cómo los subindicadores de conocimiento se evidenciaron a través de los distintos escenarios donde son puestos en acción, se presenta la tabla 4. Ésta es producto de nuestros tres objetivos particulares, por tanto, muestra la identificación del conocimiento de las profesoras sobre dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático identificados a través de la etiqueta [Es, Ep, No.][23], la diferencia y similitud de conocimiento a través de las columnas P, E y M[24] y la caracterización en la columna que refiere a el subindicador. Además, es posible observar el producto de la triangulación de nuestras fuentes primarias de información y nuestra fuente secundaria, identificada en las columnas C M1 y C M2[25], así como, el contraste entre lo que se esperaba encontrar y lo que se evidencio, a través de las columnas He y Hne[26].

[23] Es: escenario donde se evidencio el conocimiento; Ep: episodio dentro del escenario; No.: número consecutivo de conocimientos evidenciados dentro del escenario.

[24] P: planificación; E: ejecución; M: propuesta de Mejora.

[25] C M1: respuestas al cuestionario aplicado a M1; C M2: respuestas al cuestionario aplicao a M2.

[26] He: subindicador hipotético que se evidencia en las fuentes primarias; Hne: subindicador hipotético no evidenciado.

Es importante, antes de visualizar la tabla 4, distinguir que basados en la evidencia, hubo necesidad de refinar[27] los indicadores de conocimiento error, obstáculo y dificultad, que surgieron del modelo MTSK. como se muestra en la siguiente tabla:

Indicadores Originales:	Indicadores Refinados:
KFLM 1: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.	**KFLM 1:** Conocer el origen de los errores que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas.
KFLM 2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.	**KFLM 2:** Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.
KFLM 3: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.	**KFLM 3:** Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.
	KFLM 4: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de expresiones algebraicas.

Tabla 3: Refinación de indicadores de conocimiento del profesor sobre dificultades de aprendizaje basados en la evidencia obtenida.

[27] Entendemos que un indicador de conocimiento es una descripción que sirve para identificar y comprender las categorias de concomiento de los distintos subdominios del MTSK, en este sentido, un indicador refinado es el resultado de la observación del conocimiento en acción, dónde los indicadores desarrollados no fueron suficientes para cumplir su fin, por ende ayudan a detallar y matizar con mayor profundidad una categoría de conocimiento.

KFLM 1: Conocer el origen de los errores que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas.								
Subindicador	P	E	M	C M1	C M2	He	Hne	Literatura
KFLM 1.1: Conocer el origen de los errores que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas (en un obstáculo, en una dificultad).	[P, 1, 5] [P, 1, 6]			[C, M1, 2] [C, M1, 3]				Ruano, et al. (2008) Palarea (1999) Socas, et al. (1998)

KFLM 2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas.								
Subindicador	P	E	M	C M1	C M2	He	Hne	Literatura
KFLM 2.1: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado (relacionada con la complejidad misma del objeto matemático, con los procesos del pensamiento, con las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra).	[P, 1, 8] [P, 1, 9] [P, 1, 10]			[C, M1, 4] [C, M1, 5]	[C, M2, 1]			Ruano, et al. (2008) Palarea (1999)

	KFLM 2.2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimientos previos (no identificar números reales, no poder trabajar aritméticamente con números reales).	[P, 1, 1] [P, 1, 2]	[E, 1, 1]		[C, M1, 1]		[H, 2, 1] [H, 2, 2] [H, 2, 5]		Ursini, et al. (2008)
	KFLM 2.3: Conocer las dificultades que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático (desencadenar la necesidad de un pensamiento aritmético y no algebraico, porque no es capaz de plasmar lo que se le dice a manera de juego en una expresión algebraica, para utilizar el lenguaje algebraico, por abordar el tema con modelos geométrico y después evaluar sin su utilización).	[P, 1, 5] [P, 2, 27] [P, 3, 31] [P, 5, 34]	[E, 1, 3]		[C, M1, 12]		[H, 2, 4]		
	KFLM 2.4: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición ignora las diferencias, suma coeficientes con la parte literal diferente, suman todos los términos sin respetar si son semejantes o no)	[P, 1, 15] [P, 1, 19] [P, 3, 32] [P, 4, 33]							

	KFLM 2.5: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con las concepciones del alumno sobre las matemáticas (para comprender el concepto de expresión algebraica porque su creencia de que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que solo se utiliza en matemáticas, puede crear una ausencia de significado, en el que el aprendizaje sea solo memorístico, por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar con el lenguaje algebraico).	[P, 1, 24] [P, 2, 28]							Ruano, et al. (2008) Palarea (1999) Socas, et al. (1998)
	KFLM 2.6: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para comprender el lenguaje algebraico/un aspecto de él por falta de significado (no lo vincula con algún aspecto de su vida cotidiana).	[P, 1, 26]	[E, 2, 7]						Ruano, et al. (2008) Palarea (1999) Socas, et al. (1998)
	KFLM 2.7: Conocer las dificultades que son propias del objeto matemático que se pudieran presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas (por ejemplo: no comprender la configuración de un término algebraico; no identificar los componentes de una expresión algebraica).	[P, 1, 4] [P, 3, 29]							Ruano, et al. (2008) Palarea (1999) Socas, et al. (1998)

	KFLM 2.8: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque procede de forma mecánica/procedimental (dar respuestas sin razonar lo que hace, sin haber una reflexión y argumento del porqué del procedimiento).		[E, 1, 2]	[M, 3, 7]	[C, M1, 13]		[H, 2, 7]		
	KFLM 2.9: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.	[P, 1, 3]	[E, 1, 4]		[C, M1, 14]		[H, 2, 14]		Ursini, et al. (2008) Kieran y Filloy (1989)
	KFLM 2.10: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para coordinar las múltiples formas de representación verbal de una expresión algebraica.		[E, 1, 5]				[H, 2, 8]		Palarea (1999)
	KFLM 2.11: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado (no lo asocia a un conocimiento previo; por falta de sentido).		[E, 2, 6] [E, 2, 10] [E, 2, 12]				[H, 2, 12]		
	KFLM 2.12: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque se concentra en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje.		[E, 2, 8]	[M, 3, 9]	[C, M1, 15]				

KFLM 2.13: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para utilizar el lenguaje algebraico porque no lo visualiza como una forma de comunicación.			[M, 1, 5] [M, 4, 10]					Ruano, et al. (2008) Palarea (1999) Socas, et al. (1998)
KFLM 2.14: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para asimilar que una literal se puede sustituir con un número.			[M, 2, 6]					
KFLM 2.15: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para identificar términos semejantes porque no están familiarizados con sus características.			[M, 3, 8]			[H, 2, 3] [H, 2, 6] [H, 2, 11] [H, 2, 13]		
KFLM 2.16: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ante la carencia de significado, procede de forma memorística.	[P, 1, 25]					[H, 2, 9] [H, 2, 10]		Kieran (2006)

KFLM 3: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas.

Subindicador	P	E	M	C M1	C M2	He	Hne	Literatura
KFLM 3.1: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas vinculados a las operaciones con signo.	[P, 1, 12]							

	KFLM 3.2: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en un aprendizaje deficiente de conocimientos previos (por ejemplo, las operaciones con signo).	[P, 1, 11]							Socas, et al. (1998)
	KFLM 3.3: Conocer la forma en que pueden manifestarse los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas que están vinculados a los números negativos (ignorar el signo y consideran los valores como enteros positivos, realizar la adición de términos, sin considerar algunas características particulares como el signo).	[P, 1, 14]			[C, M1, 7]		[H, 3, 8]		Ruano, et al. (2008)
	KFLM 3.4: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética (cuando comienza el estudio del álgebra, cuando interactúa con el lenguaje algebraico sin comprender que los símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse al álgebra).	[P, 1, 13] [P, 1, 22]			[C, M1, 6]		[H, 3, 2] [H, 3, 3]		

	KFLM 3.5: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=" (por la carencia de sentido, los estudiantes tienen la idea de hacer algo al lado izquierdo y derecho de una igualdad; por las formas de proceder en aritmética, al encontrar una expresión abierta la considera incompleta, asumiendo que debe de existir un resultado que generalmente es un número; lo cual ocasiona que se produzca el error de carencia de sentido, al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros).	[P, 1, 16] [P, 1, 21] [P, 1, 18]	[E, 2, 9]		[C, M1, 8]	[C, M2, 2]	[H, 3, 1]		Palarea (1999) Kieran y Filloy (1989) Kieran (2006)
	KFLM 3.6: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas ligados a la concepción de concatenación, porque ha aprendido que en aritmética significa adición, contrario a su significado algebraico de multiplicación.	[P, 1, 17]			[C, M1, 9]				Kieran y Filloy (1989)
	KFLM 3.7: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en su creencia de que el lenguaje algebraico es igual al lenguaje aritmético, esto los llevan a realizar las operaciones de la misma manera, y a una consecuente carencia de significado.	[P, 1, 23]							Ruano, et al. (2008) Palarea (1999) Socas, et al. (1998)

	KFLM 3.8: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético (no distingue el exponente de una literal cuando éste no está indicado, porque no identifica la unidad como coeficiente en un término algebraico cuando éste no está indicado).	[P, 3, 30]		[M, 1, 1] [M, 1, 2] [M, 1, 3]			[H, 3, 9]:		Ursini, et al. (2008)
	KFLM 3.9: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas relacionados la concepción aritmética de la palabra “más”, la cual entiende como suma y cuando se emplea como una suma reiterada no lo asocia con la multiplicación.		[E, 2, 11]						
	[H]KFLM 3.1: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por el empleo de palabras dentro del lenguaje común (“y” como conjunción, semejante con su sinónimo similar).[28]							[H, 3, 4] [H, 3, 6]	
	[H]KFLM 3.2: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por el discurso que ha empleado el profesor para enseñar temas previos (la literal puede tomar cualquier valor, no se pueden sumar peras y manzanas).							[H, 3, 5] [H, 3, 7]	Ruano, et al. (2008)

[28] La etiqueta [H] que antecede a las siglas KFLM, alude a los subindicadores hipotéticos no evidenciados que se caracterizaron en subindicadores de conocimiento.

Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas.								
Subindicador	P	E	M	C M1	C M2	He	Hne	Literatura
KFLM 4.1: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque por un despiste no plasma algún signo/símbolo (un paréntesis, la parte literal o la literal).	[P, 1, 20]	[E, 2, 13] [E, 2, 15]		[C, M1, 10]		[H, 1, 1] [H, 1, 22]		Sosa, et al. (2015)
KFLM 4.2: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema (cambia un número).		[E, 2, 14]				[H, 1, 12] [H, 1, 20] [H, 1, 21]		
KFLM 4.3: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que están vinculados a la falta de conocimiento (ignora la existencia de coeficientes negativos).			[M, 1, 4]			[H, 1, 18]		

	[H]KFLM 4.1: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al no proceder de forma ordenada cambia/omite/aumenta datos (al utilizar cálculo mental y no apunta lo que obtiene, al no aplicar alguna propiedad del algoritmo de adicción de expresiones algebraicas, al realizar el algoritmo de adición mentalmente, por concentrarse en solo una parte del término algebraico y no visualizarlo completo, al no escribir bien los números, pone el resultado en otra operación).							[H, 1, 2] [H, 1, 3] [H, 1, 4] [H, 1, 5] [H, 1, 6] [H, 1, 7] [H, 1, 8] [H, 1, 9] [H, 1, 10] [H, 1, 17]	Sosa, et al. (2015) Socas, et al. (1998)
	[H]KFLM 4.2: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al cambiar la forma de abordar el tema en primer momento se confunde y cambia los datos.							[H, 1, 11]	Sosa, et al. (2015)
	[H]KFLM 4.3: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda un conocimiento previo (el nombre de las propiedades, la teoría de los exponentes, la ley de los signos, algoritmo de la suma de fracciones).							[H, 1, 13] [H, 1, 14] [H, 1, 15] [H, 1, 16]	

	[H]KFLM 4.4: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al tener una excesiva confianza en el algoritmo procede sin razonar.							[H, 1, 19]	Socas, et al. (1998)

Tabla 4: Resumen de resultados.

Presentación del agrupamiento de los conocimientos evidenciados en subindicadores.

En este apartado se presenta la evidencia que da respuesta a nuestra pregunta de investigación a través del objetivo general, la caracterización de conocimiento de las profesoras sobre dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático que ponen en acción en los escenarios propuestos. Con la finalidad de ubicar la evidencia de forma práctica dentro de las fuentes de información hemos considerado una etiqueta, siguiendo la estructura de las anteriores, para su localización, [Es, línea inicial-línea final] o [C, M1/M2, línea inicial-línea final], según corresponda. El desglose se muestra a continuación.

¿Qué conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático ponen en acción dos profesoras al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora del tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria?

KFLM 1.1: Conocer el origen de los errores que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas (en un obstáculo, la ausencia de significado).

Las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en un obstáculo*" [P, 183] y "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" [P, 184].

Aunado a lo anterior, M1 alude a que "*en cuanto a la adición de expresiones algebraicas"* puede *"mencionar tres errores más comunes a los que"* se ha *"enfrentado",* entre ellos la *"falta de significado…*" [C, M1, 83-85].

Dando incluso una justificación al porqué se pueden presentar cierto tipo de errores, "*que los errores… pueden provenir de un origen diferente"* en primer instante porque "e*s un momento difícil el paso de aritmética al algebra, … hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética*" y por "*la ausencia de sentido"* [C, M1, 108-113].

KFLM 2.1: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado (relacionada con la complejidad misma del objeto matemático, con los procesos del pensamiento, con las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra).

Las profesoras identifican el origen de los errores que los alumnos pueden cometer antes del diseño de las actividades, citando a Socas (2011) quien menciona "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" [P, 184], a los que asigna procedencias distintas una de ellas relacionada con: las "*dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos del pensamiento*" [P, 185-186]; y a las "*dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra*" [P, 186-187].

Como un sustento a esta evidencia, retomamos algunas frases, en primer momento de M1, cuando alude a que "*el conocimiento que el profesor posee le permitirá entender un poco sobre la manera de pensar del estudiante ... detenerse a pensar en las posibles complicaciones que el estudiante tendrá al estar involucrado con algún contenido…*" [C, M1, 12-15]. Así mismo, cuando enuncia que "o*tro posible origen de los errores que se presentan con relación a este tópico pudiera ser el valor afectivo, es decir las creencias que el alumno posee y que son difíciles de cambiar"* [C, M1, 120-122]. Por otro lado, de manera más directa M2 menciona que los alumnos presentan errores debido "*a la dificultad propia del contenido*". [C, M2, 29].

KFLM 2.2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos (no identificar números reales, no poder trabajar aritméticamente con números reales).

Dentro de la planificación las profesoras diseñan la actividad "adivinanza de números", en la que se visualiza solicitar a los alumnos piensen en un número, para después indicar una serie de operaciones aritméticas con él. Es necesario tomar en cuenta que en esta actividad tienen como propósito "*recordar los conocimientos previos, haciendo alusión a los números enteros y las operaciones aritméticas*" [P, 404-405], ya que consideran que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" [P, 444-447].

Sin embargo, antes de diseñar esta actividad las profesoras, mostraron evidencia de las posibles dificultades que el alumno podría presentar, citando a Kieran (1997) aludiendo a que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" [P, 155-157].

Conocimiento que se refuerza con las respuestas del cuestionario de M1 cuando indica que, considera "*la importancia de explorar los conocimientos previos en los estudiantes porque con base en ello se diseñarán situaciones didácticas con actividades adecuadas que permitan la explotación de esos conocimientos previos, es decir enfrentar al alumno a sus ideas para reflexionar sobre ellas y descubrir nuevos conocimientos; de la misma manera por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…*" [C, M1, 69-75].

En este punto podemos decir que las profesoras conocen que es importante recordar los conocimientos previos que son el punto de partida para las actividades que se realizarán, por ello diseñan actividades en donde, además, son cognoscentes de que pueden detectar algunas dificultades para operar aritméticamente con los números reales. M1 vuelve a poner este conocimiento en acción, en la ejecución, cuando al solicitarle a los alumnos que piensen en un número, sugiere que sea "*pequeño*" [E, 1], "*para que no batallen*" [E,8], cuando lo multipliquen por tres.

KFLM 2.3: Conocer las dificultades que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático (desencadenar la necesidad de un pensamiento aritmético y no algebraico, porque no es capaz de plasmar lo que se le dice a manera de juego en una expresión algebraica, para utilizar el lenguaje algebraico, por abordar el tema con modelos geométrico y después evaluar sin su utilización).

Las profesoras conocen que, "*los sistemas de representación elegidos pueden provocar en el estudiante un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución*" [P, 166-168]. Conocimiento que vuelve a hacerse evidente cuando identifican citando a Socas (2011), "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" [P, 184], mismos que pueden estar relacionados con las "*dificultades asociadas a … los procesos del pensamiento*" [P, 185-186].

Este conocimiento se pone en acción primero, cuando, en el diseño, dentro de la actividad "adivinanza de números", saben que puede presentarse como dificultad "*que los alumnos no sean capaces de plasmar lo que se les ha dicho en manera de juego a una expresión algebraica, es decir"* que *"la forma de interactuar no es la deseada*" [P, 434-435].

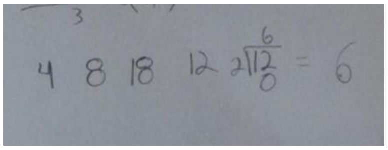
Es decir, hasta el momento, la evidencia muestra, que las profesoras conocen que las actividades que diseñan pueden desencadenar la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para la solución, y que existen dificultades asociadas a los procesos del pensamiento. En consecuencia, la forma en que aborden el objeto matemático, influirá en la capacidad del alumno para plasmar en la actividad "adivinanza de números" lo que se les ha dicho a manera de juego en una expresión algebraica, esto porque la forma de interactuar no fue la deseada por las profesoras (el objetivo de aprendizaje se desvía).

Así mismo, también conocen que la forma de abordar el objeto matemático puede facilitar/dificultar a el alumno la utilización del lenguaje algebraico, ya que diseñan la actividad "geometría para calcular" "*con la intención de que el estudiante tenga un acercamiento más estructurado con respecto a las expresiones algebraicas y pueda utilizar con mayor facilidad un lenguaje algebraico*" [P, 460-461] y que, las distintas formas utilizadas dentro de una clase para abordar el objeto matemático puede confundir al estudiante[29], esto cuando en la actividad de cierre "cuadrados mágicos", expresan que los alumnos "*probablemente tengan alguna confusión por el hecho de trabajar con modelos geométricos y después no tenerlos*" [P, 565-566].

En la ejecución este conocimiento vuelve a ponerse en acción cuando, M1 decide guiar a los alumnos columna por columna para obtener cada uno de los términos algebraicos, ya que, antes de solicitar la expresión algebraica, M1 recuerda a los alumnos la forma de representarla, sin embargo, cuando solicita se le dicte el primer término, un alumno recurre al resultado concreto, mostrando que la forma de abordar el objeto matemático desencadeno la necesidad de un pensamiento aritmético (situación prevista en la planificación, la forma de interactuar no fue la deseada), por lo que M1 les indica que el número que pensaron lo representarán con la letra "n" [E, 69-76].

Una vez concluido este ejercicio, M1 dicta a los alumnos un nuevo ejercicio, señalándoles que lo que busca es la expresión [mientras señala la del ejercicio anterior] [E, 103]. Terminado el ejercicio solicita la participación de los alumnos para escribirla en el pintarrón [E, 106-113]. Cuando la alumna participante escribe:

[29] En cuanto a confusión M1 entiende que "*es cuando los alumnos utilizan conceptos, contenidos o procedimientos equivocados en el desarrollo de un tema. Pienso que la confusión está relacionada con las creencias del estudiante que lo llevan a utilizar conceptos equivocados*" [C, M1, 192-195]. Así mismo alude a una dificultad puede ser una confusión del pensamiento del alumno cuando expone que "…*esto le genera una dificultad, una confusión en su pensamiento*" [C, M1,52-53]. Por último, indica que se da "*cuenta si un alumno está confundido cuando no logra comprender el tema*" [C, M1, 201-202], redundando en que "*para erradicar la confusión en un estudiante es necesario que el alumno comprenda*…" [C, M1, 204-205].

 [E, 132]

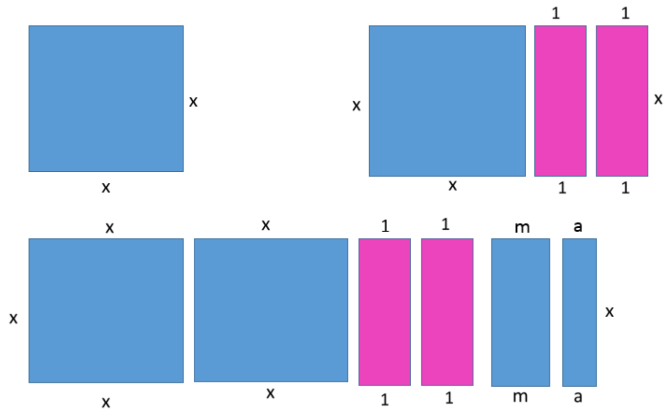
M1 menciona "*pero, ¿cómo te quedaría así?* [señala expresión algebraica del pintarrón]" [E, 133], guiando a la alumna a obtener la expresión algebraica.

KFLM 2.4: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para proceder con la adición porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes (ignora las diferencias, suma coeficientes con la parte literal diferente, suman todos los términos sin respetar si son semejantes o no).

Antes de abordar el diseño de actividades, las profesoras expresan que una dificultad en el aprendizaje es la "*conjunción de términos no semejantes"* mencionando que *"en álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo:* $\mathbf{3+5x=8x}$" [P, 196-198]

En la misma dirección, mencionan que los estudiantes "*llegan a realizar una conjunción de términos, sin considerar algunas características particulares como el signo*" [P, 215-216].

Conocimiento que ponen en acción cuando diseñan la actividades de "geometría para calcular" y "los tapetes de rosa", en la primera indicando que una dificultad que puede presentarse, es "*querer hacer conjunciones de muchas expresiones algebraicas en donde su parte literal es diferente, lo cual no se puede realizar*" [P, 482-483] y en la segunda al expresar que "*dentro de la categoría fortalezas y dificultades se visualizó el tratamiento o interacción que pudieran tener al estar realizando las sumas, esto debido a que se puede presentar el error de querer sumar todas las expresiones algebraicas sin respetar la esencia de cada término, queriendo "juntar" cuantos términos tengan en la situación*" [P, 521-523], cuando se realiza, por ejemplo, el cálculo de los siguientes perímetros.



[P, 387]

KFLM 2.5: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que tienen su origen en las concepciones del alumno sobre las matemáticas (para comprender el concepto de expresión algebraica porque su creencia de que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que solo se utiliza en matemáticas, puede crear una ausencia de significado, en el que el aprendizaje sea solo memorístico, por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar con el lenguaje algebraico; porque le impide hacer una referencia algebraica).

Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan que el alumno puede "*creer*" [P, 225] que "*el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que sólo se utiliza en matemáticas; esto puede crear en el estudiante una carencia de significado en el que su aprendizaje únicamente sea memorístico, no podrá comprender el concepto de expresión algebraica y por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar en el lenguaje algebraico*."[P, 228-231].

Conocimiento que se pone en acción cuando presentan la actividad "adivinanza de números" para, "*que el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede utilizar en sus actividades cotidianas*" [P, 425-426], aunque siguen identificando que, puede presentarse como dificultad "*que su concepción de matemáticas le impida hacer una referencia algebraica al juego presentado*" [P, 436-437].

Este conocimiento vuelve a ponerse en acción cuando como parte del conocimiento identificado en la categoría de formas de enseñanza de las matemáticas las profesoras mencionan "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*" [P, 235-237].

KFLM 2.6: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para comprender el lenguaje algebraico/un aspecto de él por falta de significado (no lo vincula con algún aspecto de su vida cotidiana).

Como parte del conocimiento identificado en la categoría de formas de enseñanza de las matemáticas las profesoras mencionan "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*" [P, 235-237].

Conocimiento que se pone en acción cuando presentan la actividad "adivinanza de números" para que "*el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede utilizar en sus actividades cotidianas*" [P, 425-426].

En la ejecución, actividad los tapetes de Rosa, podemos ver nuevamente este conocimiento en acción cuando M1 dicta un ejercicio en donde el ancho de un rectángulo (tapete) mide 2 plumas [E, 308-309] y al preguntarle a los alumnos "*¿cómo es eso?*" [E, 310], toma dos plumas y ejemplifica. Después dicta un segundo ejercicio donde el ancho mide 8 plumas, para corroborar que el alumno ha entendido dice "*ahora, no va a medir "a" ¿cuánto va a medir?, muchachos*…" [E, 330], cuando un alumno, menciona "*pens*" [P, 331], M1 los incita a decir cómo lo van a representar "*lo vamos a representar con la letra…*" [P, 334], obteniendo como respuesta "*p*" [P, 335] a lo que asiente mencionando "*p", ¿verdad? para no ponerle pluma completo*" [P, 336].

KFLM 2.7: Conocer las dificultades que son propias del objeto matemático que se pudieran presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas (por ejemplo: no comprender la configuración de un término algebraico; no identificar los componentes de una expresión algebraica).

M1, menciona que el alumno puede presentar errores debido a "*a la dificultad propia del contenido*". [C, M2, 29].

Así mismo, las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje que *"para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a utilizar el significado de la variable como incógnita, para comprender la configuración de un término algebraico (coeficiente, literal, signo)"* [P, 159-161].

Este conocimiento lo ponen en acción cuando planifican al inicio de la actividad "geometría para calcular", preguntar a los alumnos "*sobre los componentes que ya se ubicaron, esperado que identifiquen en primera instancia el coeficiente y la parte literal*" [P, 457-458] señalando que "*posiblemente pudieran señalar también el exponente*"[P, 458].

KFLM 2.8: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque procede de forma mecánica/procedimental (dar respuestas sin razonar lo que hace, sin haber una reflexión y argumento del porqué del procedimiento).

"*Para evitar que el alumno no proceda de manera mecánica, él debe razonar, reflexionar y construir su propio conocimiento*" [C, M1, 130-132]. "*Para lograrlo como docente debo evitar el actuar de manera tradicionalista, es decir que el maestro provea una clase completamente expositiva donde el alumno sólo sea un receptor de conocimientos hará que el alumno mecanice lo que está viendo y escuchando*" [C, M1, 133-136].

En la ejecución, actividad "adivinanza de números", M1 pone en acción este conocimiento cuando, solicita que los alumnos pasen a llenar una tabla donde se plasman los resultados obtenidos del lenguaje común al aritmético, menciona "*entonces, a todos a todos les dio 10, ¿cierto?*" [P, 58], cuando los alumnos les responden "*si*" [P, 59], les pregunta *"¿siempre será así, pues?*" [P, 60] al obtener nuevamente una respuesta afirmativa ahora les pregunta "*¿de qué depende?*" [P, 62].

Así mismo, en la propuesta de mejora ponen en acción este conocimiento cuando anexan una actividad en la que, refiriéndose al alumno expresan "*sería conveniente que reflexionaran y pudieran argumentar como lo hacen para tratar de llegar a un algoritmo o procedimiento que les signifique la mejor manera de realizarlo*" [P, 204-206], pretenden " *que los alumnos concluyan que para realizar la suma de expresiones algebraicas se tienen que agrupar los términos semejantes y realizar la operación con sus coeficientes conservando la parte literal*" [P, 208-210].

KFLM 2.9: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.

Las profesoras identifican como parte del conocimiento sobre las formas de aprendizaje que "*para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a utilizar el significado de la variable como incógnita*" [P, 159-160].

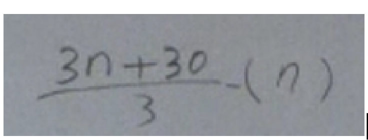
Aunado a lo anterior, dentro de la categoría formas de enseñanza aluden a que se puede "*representar a la literal con distintos valores, principalmente representados en valores que cambian con respecto a algo, para que el estudiante establezca a la variable con su significado de número* $x = -3, -2, -1,0,1,2,3$)" [P, 238-240]. Por ello dentro de la categoría de recursos y materiales, declaran la utilización de material tangible como "*los bloques de Dienes, para el manejo de las variables*" [P, 260]. En el cual "*cada pieza se define por cuatro variables: color, forma, tamaño y grosor. A su vez, a cada una de las piezas se le asignan diversos valores*…" [P, 263-264]. Así mismo, "*se pueden utilizar fichas de colores que representen las distintas variables*" [P, 273] o "*representar el perímetro de una figura con una expresión algebraica*". [P, 274]. Argumentos que dan una justificación del porqué se diseñaron la actividad de "Geometría para calcular" [P, 359-374] y "Los tapetes de Rosa" [P, 375-391], actividades dónde las profesoras ponen en acción este conocimiento.

En la misma dirección apuntan a que "*el alumno no se encuentra suficientemente familiarizado con el lenguaje algebraico y esto hace que no lo utilice de manera adecuada es decir no comprende que las literales pueden tomar valores diferentes*" [C, M1, 115-117].

Este conocimiento vuelve a ponerse en acción dentro de la ejecución en dos momentos diferentes. El primer momento cuando en la actividad "adivinanza de números", M1 solicita a los alumnos que piensen un número les indica una serie de operaciones aritméticas con él y en la última indicación M1 les dice:

19	M1	Y luego le van a restar n
20		¿Qué quiere decir n?
21		Es el número que pensaron
22		¿Sí?
23		Le van a restar n
24	A	¡Ohhhh!

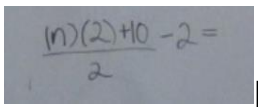
Guiándolos después a la obtención de la expresión algebraica:



[E,96]

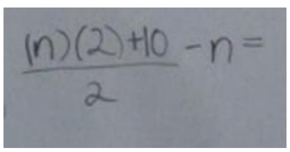
Cabe señalar que cuando se realizó la planificación de esta actividad, las profesoras planificaron llamar “n” al número que pensaron después de haber operado aritméticamente con él.

En un segundo momento bajo un ejercicio similar, M1 vuelve a poner en acción este conocimiento, cuando una alumna está participando escribe en la expresión algebraica el número que pensó, al realizar el ejercicio, y le dice “*pero tú pensaste en dos y ¿qué tal que fuera otro número?*” [E, 142] [señalando el error]



[E, 143]

“*¿Cómo lo vas a hacer?*” [E, 143], la alumna responde con un “*ahhh*” y corrige.



[E, 145]

KFLM 2.10: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para coordinar las múltiples formas de representación verbal de una expresión algebraica.

M2 muestra un rectángulo a los alumnos y especifica que para ese “primer ejercicio va a medir “*a*” en su ancho y por el largo “*3a*”, por el triple de “*a*”, [énfasis] “*“a” y el triple de “a’*””. Acto seguido un alumno le pregunta “*¿el lado cuánto?*” [E, 214] por lo que M1 decide realizar el rectángulo en el pintarrón para que el alumno pueda visualizarlo (coordinar las múltiples formas de representación verbal, con su representación gráfica y algebraica). M2 rectifica “*el largo del rectángulo va a ser tres veces mayor a su ancho*” [E, 219] y pregunta a los alumnos “*¿cuánto va a medir el an… el largo?*” [E, 220].

KFLM 2.11: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a qué se refiere el lenguaje algebraico utilizado (no lo asocia a un conocimiento previo; por falta de sentido).

M1 comienza a dictar una serie de ejercicios donde una artesana está elaborando un tapete para el que no tiene las medidas, pero, sabe que el ancho mide dos plumas [E, 308-309], en ese momento M1 les pregunta a los alumnos “*¿cómo es eso?*” [E, 310], uno de los alumnos responde “*pens*” [E, 311], a lo que M1 contesta “*sí, pero, esta es una pluma y luego la otra pluma, el alto mide eso*” [E, 312] mostrando a los alumnos a que se refiere el ejercicio [E, 313].

Una vez dado este evento, M1 dicta un problema similar, “*Rosa va a ser otro tapete ahora el ancho mide 8 plumas*” [E, 323], “*y el largo mide 6 veces más, ¿cuánto listón necesita para la orilla?*” [E, 326], cuando los alumnos se encuentran resolviendo, se acerca a la bina 4 y les dice “*si yo digo 8 veces más ¿cuánto sería?*” [refiriéndose al problema] [E, 468], al no responder la alumna cambia la interrogante, “*si digo 2 y luego digo 2 veces el dos ¿cuánto es sería?*” [E, 469] cuando la alumna responde “*4*” [E, 470], utiliza la misma estrategia para preguntar “*si digo 3 veces el 2*” [E, 471], a lo que la alumna responde “*seis*” [E, 472], llevándola de esa forma a comprender las indicaciones del problema.

En un segundo momento, M1 se acerca a verificar el trabajo de la bina 2, y les menciona que se tiene un error, para hacerlo notar les vuelve a repetir la indicación “*el ancho mide 5 veces más*” [E, 412], señalando el ancho del rectángulo expresa “*cinco veces más que esto*”[E, 413], al notar la no comprensión de la alumna, M1 se remite a un ejercicio anterior y explica, “*si aquí mide 2, ¿el ancho mide?*”[E, 414], ahora toma dos plumas, “*mira, si aquí mide dos*” [E, 415], empalma plumas para ejemplificar a que se refiere, ahora la alumna asiente mostrando que comprende [E, 416].

KFLM 2.12: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque se concentra en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje.

M1 señala que “*los estudiantes pueden cambiar el sentido de la actividad ya que como se utilizan figuras geométricas y su área, en este caso en específico, se hace uso de rectángulos y cuadrados, puede suceder que los alumnos se inclinen por pensar que el objetivo de la clase es la geometría; entonces el fin de la actividad ya no se cumple y se trunca la secuencia didáctica empleada*” [C, M1, 165-169].

En la ejecución, actividad “los tapetes de Rosa”, M1 intencionalmente dicta un ejercicio a los alumnos donde el material didáctico no les es suficiente [E, 323-326], cuando los alumnos empiezan a mencionar que no se puede resolver el problema ella aclara “*pero acuérdense que lo que quiero saber es el listón que va a llevar alrededor he*” [E, 362], por su parte M2 recuerda cual es la pregunta y les menciona “*chicos hay que recordar que estamos trabajando con las expresiones algebraicas*” [E, 376].

Como parte de la propuesta de mejora reducen el número de problemas en los cuales se busca que los alumnos se concentren en obtener el perímetro de las figuras geométricas, sin embargo, llaman a tomar en cuenta que “*esa no es la verdadera intención de la actividad sino sumar expresiones algebraicas*” [M, 215-216].

KFLM 2.13: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para utilizar el lenguaje algebraico porque no lo visualiza como una forma de comunicación.

En la propuesta de mejora, las profesoras planifican que el alumno llene una tabla donde se identifique el coeficiente, la parte literal y exponente de ciertas expresiones algebraicas indicadas. Enuncian que “*cuando el alumno resuelva las tablas planteadas por el maestro, se pretende que se familiarice con las partes de una expresión algebraica, para que posteriormente las utilice sin dificultad, como una forma de comunicación*” [M, 100-102].

De igual forma en el mismo escenario se planifica que pedir al alumno llene una tabla donde se pase de la representación verbal a algebraica de la expresión algebraica. Las profesoras consideran que “*el objetivo principal de esta actividad que el alumno pueda desarrollar su competencia lingüística para que perciba a los signos, símbolos o íconos… como parte del lenguaje algebraico y como una forma de comunicarse*” [M, 230-232], “*es importante que el docente retome oraciones en las que el alumno pueda representar una situación dada en lenguaje común a la representación por medio de una expresión algebraica, con ello percibirá que el lenguaje algebraico puede ser una manera de comunicarse*” [M, 237-239]. Para ello proponen que los alumnos representen en una expresión algebraica oraciones como “*la mitad de un número*” [M, 243] o “*la suma de dos números*” [M, 244].

KFLM 2.14: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para asimilar que una literal se puede sustituir con un número.

Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que el alumno transite del lenguaje aritmético al algebraico a partir de identificar en figuras geométricas, el ancho, el largo y el perímetro, los cuales en un inicio estarán representados por números naturales y en un segundo por expresiones algebraicas. Mencionan que con esta tabla agregada a la actividad, “*es posible que el alumno perciba la relación que existe entre cantidades por medio de un valor numérico de la expresión algebraica; es decir, al completar la tabla*” [M, 142-143] pretenden que el alumno perciba “*como se relacionan las cantidades y* *podrá asimilar que una literal se puede sustituir por un número*” [M, 144-145], esto después de haber contemplado “*que una expresión algebraica se utiliza como un símbolo… que permite un razonamiento”* [M, 139-141].

KFLM 2.15: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para identificar términos semejantes porque no están familiarizados con sus características.

Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad en la que se planifica que el profesor lleve al alumno a reflexionar y argumentar cómo se lleva a cabo la adición de expresiones algebraicas cuyo objetivo es que “*los alumnos concluyan que para realizar la suma de expresiones algebraicas se tienen que agrupar los términos semejantes y realizar la operación con sus coeficientes*” [M, 208-209]. Mencionan que “*para ello es preciso que los alumnos se familiaricen con las características de los términos semejantes y tengan la capacidad para identificarlos*” [M, 211-212].

KFLM 2.16: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para comprender el concepto de expresión algebraica porque ante la carencia de significado procede de forma memorística.

Las profesoras mencionan que las creencias del alumno pueden generar “*una carencia de significado en el que su aprendizaje únicamente sea memorístico, no podrá comprender el concepto de expresión algebraica y por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar en el lenguaje algebraico.*” [P, 229-231].

KFLM 3.1: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas vinculados a las operaciones con signo.

Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras expresan la existencia de “*errores en aritmética como de operaciones con signo*” [P, 188].

KFLM 3.2: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en un aprendizaje deficiente de conocimientos previos (por ejemplo, las operaciones con signo).

Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras expresan la existencia de “*errores en aritmética como de operaciones con signo*” [P, 188].

KFLM 3.3: Conocer la forma en que pueden manifestarse los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas que están vinculados a los números negativos (ignorar el signo y consideran los valores como enteros positivos).

En primer momento las profesoras citan a Pizón y Gallardo (2000) quienes expresan que "*operar con números negativos representa serias dificultades para los que se inician en el álgebra*" [P, 193-194] complementan a los autores mencionando que los estudiantes, "*ignoran el signo y consideran los valores como enteros positivos*" [P, 195]. Aunado a lo anterior M1 indica que "*es difícil para él entender que existen expresiones negativas*" [C, M1, 117-118] refiriéndose al alumno.

KFLM 3.4: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética (cuando comienza el estudio del álgebra, cuando interactúa con el lenguaje algebraico sin comprender que los símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse al álgebra).

Las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes mencionan que "*los estudiantes, al comenzar con el estudio del álgebra traen consigo nociones de aritmética y los enfoques que usaban en ella*" [P, 189-190]. Aunado a lo anterior M1 en las respuestas al cuestionario alude a que "*hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética*" [C, M1, 111-113].

Así mismo, las profesoras mencionan que "*el alumno interactúa con un lenguaje algebraico, pero sin comprender que sus símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse de la aritmética*" [P, 221-222].

KFLM 3.5: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=" (por la carencia de sentido, los estudiantes tienen la idea de hacer algo al lado izquierdo y derecho de una igualdad; por las formas de proceder en aritmética, al encontrar una expresión abierta la considera incompleta, asumiendo que debe de existir un resultado que generalmente es un número; lo cual ocasiona que se produzca el error de carencia de sentido, al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros).

M1 como parte de las respuestas al cuestionario manifiesta que "*el estudiante al encontrarse con un signo igual ellos la mayoría de las ocasiones tienden a cerrarlo en un valor numérico que obtienen de la expresión algebraica que está antes o después del signo igual*" [C, M1, 93-96]. Así mismo, señala que "… *es difícil para él entender … y que no necesariamente cuando exista un signo igual tendrá un valor numérico*" [C, M1, 117-119] y que "… *es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales…o se le asigna un valor a la variable*" [C, M1, 170-172]

Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1998) quienes mencionan la "*carencia de sentido en el signo igual; para los estudiantes la idea que tienen sobre el signo igual es la de hacer algo ante los lados izquierdo y derechos de una igualdad*" [P, 199-200].

Así mismo, en la planificación, como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes expresan que existen "*errores a la falta de un cierre, cuando los estudiantes se encuentran con expresiones como 5 + b consideran que esta expresión es incompleta, asumen que debe existir un resultado que generalmente es un número*" [P, 208-210]. Además, dentro de las respuestas del cuestionario M2 enuncia que un posible error en la adición de expresiones algebraicas es "*querer cerrar las operaciones a un número en particular"* [C, M2, 24-25].

Del mismo modo, como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que "*otra forma de interactuar con el contenido es la igualdad aritmética la apliquen en el contexto algebraico, esto puede ocasionar que se produzca el error de la carencia de sentido al signo igual al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros*" [P, 218-220].

En la ejecución, M1 pone en acción este conocimiento para reconocer el obstáculo, cuando en un evento, pregunta a una bina como obtuvieron la respuesta del ejercicio dos (en el cual el material gráfico no es suficiente para dar respuesta) y antes de que contesten otro alumno menciona que "*sacaron la calculadora*" [E, 390], ante esto, M1 pregunta a la bina "*pero, ¿cómo saben cuánto mide p?*" [E, 392], "*¿cuánto mide la pluma?*" [E, 393], recordando al grupo "*dijimos lo que queremos son las expresiones que van saliendo*" [E, 397].

KFLM 3.6: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas ligados a la concepción de concatenación, porque ha aprendido que en aritmética significa adición, contrario a su significado algebraico de multiplicación

Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes expresan que "*en aritmética la concatenación significa adición como 37 significa 30 + 7, sin embargo, en álgebra la concatenación significa multiplicación*" [P, 205-206] "*esto conducirá a que los jóvenes malinterpreten el sentido de los términos algebraicos*" [P, 206-207].

Aunado a lo anterior M1 como parte de las respuestas al cuestionario indica "*Los errores del álgebra ocasionados por las características del lenguaje. Uno de ellos es la concatenación en expresiones aritméticas es de suma, mientras que en el álgebra se pueden dar concatenaciones de multiplicación y suma. Por ejemplo, 3x tiene una concatenación de multiplicación, muy frecuentemente los alumnos no llegan a entender la diferencia*." [C, M1, 97-101]

KFLM 3.7: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en su creencia de que el lenguaje algebraico es igual al lenguaje aritmético, esto los llevan a realizar las operaciones de la misma manera, y a una consecuente carencia de significado.

Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan el alumno puede tener "*concepciones erróneas como creer que el lenguaje algebraico es igual que el lenguaje aritmético y realizan operaciones de la misma manera; esto conducirá al estudiante a la carencia de significado, puede cometer errores que ya se han mencionado en este documento*" [P, 225-227].

KFLM 3.8: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético (para distinguir el exponente de un término algebraico cuando éste no está indicado, para identificar la unidad como coeficiente en un término algebraico cuando éste no está indicado). [P, 3, 30]: (458-459). [M, 1, 1]: (46-55; 70-71). [M, 1, 2]: (56). [M, 1, 3]: (57)

En la planificación, actividad "geometría para calcular" las profesoras esperan que en primer momento los alumnos identifiquen la parte literal y el coeficiente y especifican que "*posiblemente pudieran señalar también el exponente*" [P, 458] ya que en ese "*acercamiento será uno*" [P, 459].

En la propuesta de mejora, las profesoras anexan una actividad cuyo objetivo es que "*el alumno conozca la sintaxis del lenguaje algebraico*" [M, 39-40] a partir de la identificación de las partes de una expresión algebraica (coeficiente, literal, exponente) [M, 46-47].

Expresión	Coeficiente	Exponente	Literal
$6m^3$			
$-4bx$		1	
xy			xy
x^2	1		
$-7a^2$			

[M, 48-53]

Para después profundizar en algunas reglas de sintaxis [M, 54-55], como:

56 Que, si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1), lo mismo sucede

57 cuando el exponente no está indicado.

También, las profesoras expresan que "*es importante a través de las tablas anteriores se vaya familiarizando con algunas reglas del lenguaje algebraico*" [M, 70-71].

KFLM 3.9: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas relacionados la concepción aritmética de la palabra "más", la cual entiende como suma y cuando se emplea como una suma reiterada no lo asocia con la multiplicación.

En la ejecución, actividad "los tapetes de Rosa", M2 se acerca a verificar el trabajo de un alumno (bina 3) y le pregunta *"¿por qué 14?*" [E, 419] [señalando la base del rectángulo], el alumno menciona "porque es seis veces más" [E, 420], es decir, el alumno entiende "seis veces más" como una suma y no como una suma reiterada. M2 trata de explicar diciendo "e*h, seis veces, este…* [hace remolinos con los dedos], *lo que te mide el ancho*" [E, 425], y reitera "*seis veces lo que mide el ancho*" [haciendo una señal de brinco con los dedos] [E, 426].

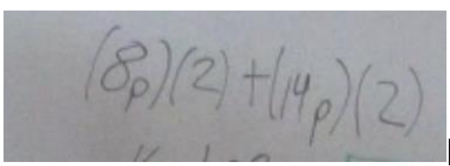
Inmediatamente de haber atendido a la bina 3, se acerca a la bina 1, y verifica que los alumnos hacen a misma interpretación, han indicado una suma en vez de una multiplicación, les hace ver el error diciendo "*pones más seis*" [E, 459] "*en vez de poner 6 veces más*" [E, 460], mientras dice esto M2 utiliza la misma estrategia que en la bina 3 (explica mediante lenguaje corporal) y busca confirmación de comprensión por parte del alumno, cuando se cerciora que la bina 1 ha comprendido, les pregunta "*¿cómo quedaría la expresión algebraica?*" [E, 460].

KFLM 4.1: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque en el procedimiento por un despiste no plasma algún signo/símbolo (un paréntesis o la parte literal).

Las profesoras conocen que "*los estudiantes pueden hacer agrupaciones donde olviden el signo"* [P, 216-217], errores, que es común encontrarlos dentro del procedimiento [C, M1, 170-171]. En la ejecución M1, al percatarse que un alumno ha omitido el factor literal, menciona a la clase "*acuérdense que cuando estén utilizando expresiones algebraicas nunca se les debe olvidar la literal*" [E, 552-553]. Aunque los alumnos siguen cometiendo el mismo error ya que cuando un alumno pasa a compartir el resultado en la obtención de un perímetro pone como resultado 44, a lo que M1 le pregunta "*44 ¿qué?*" [E, 582].

KFLM 4.2: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema (poner 14 en vez de 48). [E, 2, 14]: (580-581).

Un alumno de cierta bina le menciona a la profesora que ellos han hecho el ejercicio de manera diferente, por lo que M1 lo invita a pasar al pintarrón, cuando el alumno escribe



[E, 580]

M1 le dice, "*Ah ok ¿ustedes pusieron 14 en vez de 48*? [E, 580] a lo que el alumno contesta con un "*si*" [E, 581].

KFLM 4.3: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno pude presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que están vinculados a la falta de conocimiento (ignora la existencia de coeficientes negativos).

Las profesoras sugieren que después de que los alumnos llenen una tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios $-4bx$ y $-7a^2$, entre otros (46-53), el profesor mencionará que "*existen coeficientes negativos*" (58).

Ruano et al. (2008) reconoce la falta de conocimiento como una fuente de errores "ordinarios".

Algunas observaciones.

De la presentación del agrupamiento de los conocimientos evidenciados en subindicadores de conocimiento del profesor sobre dificultades de aprendizaje hacemos la siguiente serie de observaciones:

- Aunque se trate de un esfuerzo colaborativo podemos observar como el conocimiento profesional de las profesoras por su propia naturaleza (Shön, 1987; Ponte, 1994), así como los grados de densidad y consistencia (Ponte, 1994) siguen permeando en el producto de dicho esfuerzo como puede observarse en los distintos escenarios (KFLM1.1).
- La consciencia de las profesoras sobre la existencia de errores que tienen diferente origen, también las hace conscientes de la importancia del conocimiento profesional de profesor como un medio que le permite entender en cierto nivel la manera de pensar del estudiante, así como las posibles complicaciones que se pueden presentar cuando está involucrado con el contenido matemático, consciencia que tiene un impacto en la planificación (KFLM 2.1). Es así que podemos visualizar la importancia del desarrollo profesional del profesor de matemáticas como un medio para mitigar la visualización de la planificación como una secuenciación de temas donde se deja de lado las posibles dificultades que el alumno puede presentar (Rico, 1997).
- El conocimiento de las profesoras sobre las dificultades de aprendizaje no se enfoca en un solo tema, teniendo una visión de la estructura matemática (KSM) y de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), le dan importancia a los conocimientos previos como punto de partida para el desarrollo del tema de adición de expresiones algebraicas, lo que las lleva a considerar las posibles dificultades que pudieran presentar los alumnos cuando en el diseño de actividades y posterior ejecución partan de concepciones mismas que pueden ser erróneas (Shulman, 1986) (KFLM 2.2).
- Las profesoras conocen que la forma de abordar el tema de adición de expresiones algebraicas puede desencadenar dificultades: relacionadas a los procesos del pensamiento y la transición del lenguaje aritmético al algebraico; para la utilización del lenguaje algebraico; y, por la confusión provocada cuando se utilizan diferentes formas de abordar el contenido matemático (KFLM 2.3). Podemos visualizar entonces que las profesoras son conscientes desde la planificación de las posibles dificultades que se presentaran en la ejecución por la

selección de la forma de enseñanza y, de los recursos y materiales (KMT), pudiendo simplemente preverlos (KFLM 2.4), o tomar decisiones desde la planificación y en la ejecución misma de cómo guiar a los alumnos dentro de las actividades (KFLM 2.3). Lo que podemos ligar a la competencia del profesor (Shön, 1987).

- Las profesoras son conscientes de que algunas dificultades que el alumno presentará en el tema de adición de expresiones algebraicas estará ligado a las creencias del alumno, por ejemplo, creer que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana, conocimiento que ponen en acción en al seleccionar las formas de enseñanza (KMT) (KFLM 2.6) para el diseño de las actividades, sin embargo, leyendo entre líneas podemos observar que aún y con que las actividades se diseñen para contrarrestar esta creencia, las profesoras conocen que seguirán presentándose dificultades con este origen (KFLM 2.5, KFLM 2.6), por ejemplo, la falta de significado (Ruano, et al. 2008; Palarea, 1999; Socas, et al. 1998) (KFLM 2.6), que puede dar una justificación del porque el alumno procede de forma memorística (KFLM 2.16).

- Existen subindicadores que son muy cercanos entre ellos, tal es el caso del subindicador KFLM 2.5 y el KFLM 2.6, aunque bien la evidencia muestra que el primero representa una forma justificada de ligar las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático a las concepciones de los alumnos sobre las matemáticas, mientras que el segundo puede tener otro origen como la dificultad misma de objeto matemático (el lenguaje algebraico).

- Pareciera que existen errores con un cierto aspecto de temporalidad (pudiera ser la relación de esta categoría de conocimiento con las conexiones de simplificación y complejización), por un lado, la existencia de dificultades u obstáculos que no se han podido superar y que están asociadas a un aprendizaje deficiente de conocimientos previos (KFLM 2.2), por otro las dificultades propias del contenido actual como la complejidad misma de los objetos matemáticos (KFLM 2.7) y como consecuencia de las anteriores el impacto del aprendizaje deficiente o potencial del contenido matemático actual con aprendizajes posteriores.

- Podemos observar que las profesoras son conscientes de las dificultades que pueden surgir cuando el alumno procede de forma mecánica/procedimental cuando se pretende que aprenda la adición de expresiones algebraicas, esto las lleva a monitorear y realizar preguntas cuando detecta que el alumno responde sin haber razonado sus respuestas (KFLM 2.8).

- El conocimiento de las profesoras sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático les permite anticipar cómo pueden diseñarse las actividades para que el alumno comprenda algún concepto (por ejemplo, el de variable) (KFLM 2.9), sin embargo, existen dificultades asociadas a la complejidad misma del objeto matemático que son casi imposibles de evitar (Palarea, 1999).

- La reflexión sobre la acción posibilita el desarrollo del conocimiento profesional del profesor (Shön, 1987) e informa de las posibles actividades que se pueden diseñar para mejorar una planificación (KFLM 2.12; KFLM 2.13; KFLM 2.14, KFLM 2.15).

- Es posible observar la naturaleza tácita e intuitiva del conocimiento del conocimiento profesional del profesor (Shön, 1987), cuando surgen dificultades que no fueron previstas y en las que podemos argumentar, como mencionan Rowland, et, al. (2005), que existen eventos casi imposibles de planificar, y en los cuales es posible observar el potencial que tiene el alumno para movilizar el conocimiento del profesor (KFLM 2.11). En este caso ofreciendo a partir una gama de tratamientos a las dificultades encontradas. Observamos también lo rico en información que pueden ser estos eventos.

- En general sobre el obstáculo observamos la dificultad para detectar su origen y en consecuencia dar un tratamiento adecuado, así como la posible angustia o actitud evasiva que puede generar ante su manifestación.

- Observamos la importancia distinguir entre los errores que son una manifestación de dificultades de aprendizaje de los errores "ordinarios", desde los indicadores de conocimiento dentro del modelo MTSK.

- Ante una misma manifestación de error las profesoras utilizan una diversidad de estrategias para su tratamiento, por ejemplo, en la actividad los "Tapetes de Rosa" M1 dicta "Rosa va a ser otro tapete ahora el ancho mide 8 plumas" [E, 323], "y el largo mide 6 veces más, ¿cuánto listón necesita para la orilla?" [E, 326], las profesoras al ver el error en los alumnos, utilizan las siguientes estrategias:

    - Recurrir al conocimiento previo del alumno para corregir el error.

      "*si yo digo 8 veces más "¿cuánto sería?*", al no responder la alumna cambia la interrogante, "*si digo 2 y luego digo 2 veces el dos ¿cuánto es sería?*" cuando la alumna responde "*4*", utiliza la misma estrategia para preguntar "*si digo 3 veces el 2*", a lo que la alumna responde "*seis*", llevándola de esa forma a comprender las indicaciones del problema.

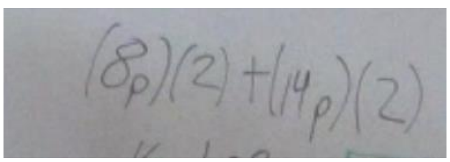
    - Utilizar el lenguaje corporal para tratar de que el alumno relacione la palabra "más" con una suma reiterada.

      M2 se acerca a verificar el trabajo de un alumno (bina 3) y le pregunta *"¿por qué 14?"* [señalando la base del rectángulo], el alumno menciona "*porque es seis veces más*", es decir, el alumno entiende "*seis veces más*" como una suma y no como una multiplicación. M2 trata de explicar diciendo "*eh, seis veces, este… [hace remolinos con los dedos], lo que te mide el ancho*", y reitera "*seis veces lo que mide el ancho [haciendo una señal de brinco con los dedos]*".

- Utilizar un ejemplo concreto.

M1 se acerca a verificar el trabajo de la bina 2, y les menciona que se tiene un error, para hacerlo notar les vuelve a repetir la indicación "*el ancho mide 5 veces más*", señalando el ancho del rectángulo expresa "*cinco veces más que esto*", al notar la no comprensión de la alumna, M1 se remite a un ejercicio anterior y explica, "*si aquí mide 2, ¿el ancho mide?*", ahora toma dos plumas, "*mira, si aquí mide dos*", empalma plumas para ejemplificar a que se refiere, ahora la alumna asiente mostrando que comprende.

- Diagnosticar un error "ordinario" y no utilizar estrategia de tratamiento.



M1 le dice al alumno, "*ah ok ¿ustedes pusieron 14 en vez de 48?* "a lo que el alumno contesta con un "*si*". Cabe señalar que este es el alumno que manifiesta un obstáculo con la palabra "*más*" (segunda estrategia).

- De esta última, observamos la necesidad del alumno de comprender ¿por qué no está obteniendo el mismo resultado que sus compañeros?, primero solicitando ayuda a M2 y después recurriendo a M1, sin embargo, en la primera instancia a M2 se le agotan las estrategias, evadiendo la manifestación de error, mientras que M1 al considerarlo un error "ordinario" no formula estrategia de tratamiento, de aquí que consideramos la importancia de conocer el origen y la manifestación del error a medida de ofrecer un tratamiento adecuado y oportuno.

Contraste de resultados con acercamiento hipotético.

El fin de éste apartado es hacer un contraste con lo que se pensó se vería en un primer momento con la realidad, el objetivo es proporcionar subindicadores no evidenciados, para ofrecer una gama más amplia considerando que estos pueden ser utilizados con posterioridad en diversos fines, en los que podemos considerar futuras investigaciones o diseño de actividades. Para llevar a cabo este fin se contemplan dos vertientes en primer momento los subindicadores de conocimiento hipotéticos evidenciados de manera general seguidos de la caracterización de los no evidenciados.

Los conocimientos del profesor hipotéticos evidenciados.

KFLM 2.2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos (no identificar números reales, no poder trabajar aritméticamente con números reales).

[H, 2, 1]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque aún presenta dificultades en temas previos relacionados.

[H, 2, 2]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque aún no dominan la adición con números naturales.

[H, 2, 5]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no diferencia el exponente de la literal con el coeficiente.

KFLM 2.8: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque procede de forma mecánica/procedimental (dar respuestas sin razonar lo que hace, sin haber una reflexión y argumento del porqué del procedimiento.

[H, 2, 7]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque el algoritmo o el tema en sí, no tiene sentido procediendo a la aplicación de pasos de forma memorística, mecánica.

KFLM 2.9: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.

[H, 2, 14]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para sumar números que no son concretos, porque no comprende que pueden representar números.

KFLM 2.10: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para coordinar las múltiples formas de representación verbal de una expresión algebraica.

[H, 2, 8]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no distingue que una expresión es equivalente a otra.

KFLM 2.11: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado (no lo asocia a un conocimiento previo; por falta de sentido).

[H, 2, 12]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no asocia los conocimientos previos con la adición de expresiones algebraicas.

KFLM 2.15: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para identificar términos semejantes porque no están familiarizados con sus características.

[H, 2, 3]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque considera que los términos semejantes tienen la misma parte literal sin importar el exponente de la variable.

[H, 2, 6]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no reconoce como términos semejantes a dos términos algebraicos, si uno de ellos tiene a la unidad como coeficiente de la literal.

[H, 2, 11]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no distingue términos semejantes.

[H, 2, 13]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no distingue términos semejantes si la parte literal se muestra en diferente orden.

KFLM 2.16: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ante la carencia de significado, procede de forma memorística.

[H, 2, 9]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque el nombre de las propiedades involucradas en el algoritmo de adicción no tienen sentido para él, no las distingue tiende a memorizarlas y confundirlas.

[H, 2, 10]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque al proceder de forma memorística confunde la ley de los signos de la multiplicación con la ley de los signos en la adición.

KFLM 3.3: Conocer la forma en que pueden manifestarse los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas que están vinculados a los números negativos (ignorar el signo y consideran los valores como enteros positivos, realizar la adición de términos, sin considerar algunas características particulares como el signo).

[H, 3, 8]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que el signo "-" involucra resta, por eso cuando operan números relativos omiten el signo negativo considerando que se trata de un error.

KFLM 3.4: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética (cuando comienza el estudio del álgebra, cuando interactúa con el lenguaje algebraico sin comprender que los símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse al álgebra).

[H, 3, 2]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido en aritmética, que las letras son valores que se sustituyen por un número para obtener un resultado, impidiéndole ver a la literal como un número general.

[H, 3, 3]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido en aritmética que el signo "x" es el signo de la multiplicación por lo que cuando ve la literal "x" piensa que se trata de una multiplicación mal planteada.

KFLM 3.8: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético (no distingue el exponente de una literal cuando éste no está indicado, porque no identifica la unidad como coeficiente en un término algebraico cuando éste no está indicado).

[H, 3, 9]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no reconoce la unidad como coeficiente de la literal, considerando que puede asignarle un coeficiente cualquiera.

KFLM 4.1: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque por un despiste no plasma algún signo/símbolo (un paréntesis, la parte literal o la literal).

[H, 1, 1]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al realizar la adición de términos semejantes, suma los coeficientes y al poner el término resultante, omite la parte literal.

[H, 1, 22]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al aparecer un término cuyo coeficiente sea un número relativo olvide el signo y lo trate como positivo.

KFLM 4.2: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema (cambiar un número).

[H, 1, 12]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al escribir el resultado pierde concentración y cambia la literal en el término algebraico.

[H, 1, 20]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque malinterpreta la información de un problema y cambia las indicaciones.

[H, 1, 21]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas al cambiar la información de una forma de representación a otra.

KFLM 4.3: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que están vinculados a la falta de conocimiento (ignora la existencia de coeficientes negativos).

[H, 1, 18]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque el alumno no sabe dirigirse a las propiedades por su nombre.

Los conocimientos del profesor hipotéticos no evidenciados.

[H]KFLM 2.1: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque su preferencia a utilizar el razonamiento aritmético le impida apropiarse del lenguaje algebraico.

[H, 2, 4]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque su preferencia a utilizar el razonamiento aritmético le impida apropiarse del lenguaje algebraico.

[H]KFLM 3.1: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por el empleo de palabras dentro del lenguaje común ("y" como conjunción, semejante con su sinónimo similar).

[H, 3, 4]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que la palabra semejante involucra algún parecido, por lo tanto, no distingue como términos semejantes a los términos independientes (no distingue que en un polinomio el término independiente la parte literal tiene exponente cero).

[H, 3, 6]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que "y" significa conjunción por lo que no puede visualizarla como literal en una expresión algebraica.

[H]KFLM 3.2: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por el discurso que ha empleado el profesor para enseñar temas previos (la literal puede tomar cualquier valor, no se pueden sumar peras y manzanas).

[H, 3, 5]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que la parte literal representa cualquier valor, lo anterior puede confundirlo y llevarlo a pensar que él puede asignarle un valor.

[H, 3, 7]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque ha aprendido que "no puede sumar peras y manzanas" y no pueda llevar a cabo la adición si se presentan términos no semejantes.

[H]KFLM 4.1: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al no proceder de forma ordenada cambia/omite/aumenta datos (al utilizar cálculo mental y no apunta lo que obtiene, al no aplicar alguna propiedad del algoritmo de adicción de expresiones algebraicas, al realizar el algoritmo de adición mentalmente, por concentrarse en solo una parte del término algebraico y no visualizarlo completo, al no escribir bien los números, al poner el resultado en otra operación).

[H, 1, 2]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque cuando utiliza el cálculo mental no anota lo que obtiene y cuando ocupa ese resultado, recuerda y sustituye con un dato erróneo, afectando el resultado final.

[H, 1, 3]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por no aplicar la propiedad conmutativa omitiendo la suma de algún término semejante.

[H, 1, 4]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al no aplicar la propiedad asociativa procede a sumar los coeficientes sin percatarse de que en cierto momento comienza a sumar términos no semejantes.

[H, 1, 5]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al no aplicar la propiedad distributiva cambia la parte literal de un término resultante.

[H, 1, 6]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por no ejecutar el algoritmo de forma ordenada.

[H, 1, 7]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque su caligrafía torna indescifrable algún número sustituyéndolo por otro incorrecto.

[H, 1, 8]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por omitir algún término algebraico resultante al aplicar de forma mental las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva del algoritmo.

[H, 1, 9]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por sumar términos no semejantes ya que en su búsqueda se concentra solo en la parte literal y no visualiza el exponente.

[H, 1, 10]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al comprobar el resultado de la adición, el alumno omite el signo “=” y suma el coeficiente del término algebraico resultante.

[H, 1, 17]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque pierde la concentración al distraerse con otro objeto u procedimiento matemático.

[H]KFLM 4.2: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al cambiar la forma de abordar el tema en primer momento se confunde y cambia los datos.

[H, 1, 11]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque se confunde cuando se cambia la forma de abordar el tema y cambia los datos.

[H]KFLM 4.3: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda un conocimiento previo (el nombre de las propiedades, la teoría de los exponentes, la ley de los signos, algoritmo de la suma de fracciones).

[H, 1, 13]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda el nombre de las propiedades de la suma.

[H, 1, 14]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda la teoría de los exponentes.

[H, 1, 15]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda la ley de los signos.

[H, 1, 16]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no recuerda el algoritmo para la suma de fracciones.

[H]KFLM 4.4: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque al tener una excesiva confianza en el algoritmo procede sin razonar.

[H, 1, 19]: Conocer los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque el alumno tiene una excesiva confianza en el dominio del algoritmo y no razona lo que esta lo que hace.

Algunas observaciones sobre el contraste.

Entre los subindicadores hipotéticos evidenciados y no evidenciados podemos mencionar que es posible observar el desarrollo del conocimiento del investigador a partir del estudio de casos. En específico en esta investigación se toma conciencia de:

- La importancia de distinguir entre error "ordinario" y un error manifestación de un obstáculo o dificultad, ya que de esto dependerá la formulación de estrategias.
- La importancia de conocer formas en que el error se puede manifestar, ya que de esto dependerá el diagnóstico adecuado y el éxito de la estrategia de aprendizaje.
- De la importancia de detectar las necesidades de aprendizaje del alumno, entre ellas la manifestación de no estar comprendiendo y en consecuencia del conocimiento del profesor para interpretar los mensajes no explícitos del alumno en el proceso de aprendizaje.
- La importancia de ser conscientes desde la planificación de las posibles dificultades y obstáculos de aprendizaje, así como, de la consideración de estrategias de tratamiento, a fin de prevenir la evasión ante la manifestación del error.

Por otro lado, observamos que los errores "ordinarios" pueden caer en la clasificación de dificultades por actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra (Socas, 1997). Cayendo en la importancia de considerar las dificultades que provienen de las concepciones de los estudiantes.

Por último, en este capítulo se presentó los subindicadores evidenciados; en primer momento, a partir de una tabla resumen y en segundo a partir de la evidencia. Así mismo, se presentó un contraste del análisis hipotético con los subindicadores evidenciados con la finalidad de enriquecer aún más los subindicadores caracterizados, considerando futuras investigaciones que tomen de referencia la presente. En el próximo capítulo desarrollamos las conclusiones, estas son el producto de las observaciones realizadas durante este proceso de investigación.

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES

Todos los estudiantes tienen oportunidad de aprender más de lo que están aprendiendo actualmente (e.g., Kersting, et al. 2012). El compromiso con la calidad educativa (SEP, 2011) frente a esta diversidad del alumnado, lleva a demandar más del profesor de matemáticas para hacer frente al desarrollo de su labor. Los profesores de matemáticas necesitan apoyo. Apoyo que demanda en un primer paso comprender qué conocimiento necesita (e.g., Shulman, 1986; Shulman, 1987; Ball, et al. 2008; Rowland, et al., 2005; Carrillo, et al., 2013), a manera de satisfacer las expectativas respecto a su actuación competente (Shön, 1987), su necesidad como planificador, estratega, explorador de conocimiento de los alumnos entre otros, así como su capacidad para ajustar la ayuda didáctica a la necesidad de cada aprendiz.

A lo largo de este proceso de investigación se realizaron una serie de observaciones que derivan en las conclusiones que conforman este capítulo. Para estructurarlo en primer momento se presentan, las conclusiones del conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido y, su relación con otras características de aprendizaje y formas de enseñanza, dentro del modelo MTSK, para después abordar las conclusiones obtenidas sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas puesto en acción en los distintos escenarios, sobre la metodología y el análisis de la información, las aportaciones de la investigación, finalmente limitaciones del estudio y recomendaciones para futuras investigaciones.

Sobre el conocimiento del profesor respecto a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

El aprendizaje de las matemáticas requiere un conocimiento integral del profesor sobre la materia a enseñar. Conocimiento matemático necesario para una instrucción de calidad (e.g., Kersting, et al., 2012), que dé al profesor la capacidad de: comprender la materia y transformarla para brindar la oportunidad de aprender a alguien más (Shulman, 1987), dentro de una estructura organizada con sentido y significado, fundamentada y razonada (e.g., Ruano, et al., 2008; Palarea, 1999; Socas, et al., 1998; Kieran, 2006; Kieran y Filloy, 1989), conectada con los conocimientos previos y anticipando los temas avanzados, etc.

Partimos de que los modos de pensamiento provocan rupturas que se transforman en dificultades que en general no pueden evitarse, apareciendo de manera natural en el proceso de construcción del conocimiento matemático (e.g., Socas, et al., 1998; Palarea, 2008). Por ello el profesor de matemáticas debe conocerlas y más allá reflexionar sobre ellas para facilitar el aprendizaje de los alumnos, ya que si quedan implícitas será difícil que se pueda incorporar un saber nuevo.

La reflexión del profesor sobre su actuación, la del estudiante y el contraste con el objetivo de enseñanza, puede aportar información entre otros, de cómo los alumnos interpretan el tema de adición de expresiones algebraicas, lo que le permitirá tomar decisiones sobre el tratamiento efectivo para ayudar al alumno en la corrección oportuna o reestructurar la comprensión que subyace a la presencia de dichos errores.

Ante esta realidad comprendemos que se pueden formular estrategias preventivas y correctivas. Por un lado, las estrategias preventivas como aquellas que se informan del conocimiento sobre las dificultades inherentes al contenido, que se sabe, podrían manifestarse en el aula, dándole al profesor la capacidad de formular estrategias de tratamiento desde la planificación. Del mismo modo, entendemos que la prevención puede estar dirigida a minimizar las dificultades de aprendizaje, desde una visión global con estrategias orientadas por la dificultad propia del tema de adición de expresiones algebraicas, los procesos de pensamiento, de desarrollo cognitivo, de enseñanza y, actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra, de manera específica por los obstáculos y errores concretos al objeto de aprendizaje (Socas, 1997). De lo anterior podemos vislumbrar un tamiz general y específico en estas estrategias preventivas, dirigidas a evitar o minimizar los obstáculos para que puedan ser superados, crear una actitud racional hacia las matemáticas dando un sentido lógico a los objetos y al pensamiento matemático. Por otro lado, las estrategias correctivas, aquellas que por diversos factores no se previó que aparecerían y que precisan del conocimiento del profesor para formular estrategias de tratamiento en el acto mismo de enseñanza, por ejemplo, cuando el alumno no comprende algún aspecto del lenguaje algebraico empleado en un problema.

Sea cual fuere la necesidad que lleve al profesor a poner en acción su conocimiento para formular estrategias, es evidente que el profesor de matemáticas precisa estar preparado para la instrucción del tema específico, dentro de una estructura matemática general, es decir, contar con un bagaje que le permita formular y tomar decisiones sobre la estrategia adecuada para hacer frente a la manifestación del error, e incluso, aprovechar su potencial didáctico para el aprendizaje. En cualquiera de los dos escenarios, visualizando la continuidad en el aprendizaje.

En el aula, esta formulación de estrategias de intervención preventiva o correctiva para atender la manifestación de un error, pueden conducir a un cierto nivel de éxito o fracaso. Nivel, que puede depender en un inicio de la diferenciación entre error “ordinario”, dificultad u obstáculo, así como de la detección de su origen. Esto, ya que consideramos que, en gran medida de esta distinción pende la formulación adecuada de la estrategia de tratamiento.

En esta misma línea, cuando la estrategia de intervención fracasa, se pueden encontrar algunos comportamientos interesantes del profesor, entre ellos, el que es fruto de un proceso cíclico finito de prueba y error. En este ciclo, ante la no comprensión continua del alumno, el profesor iniciaría en primer momento con la formulación y selección de una primera estrategia de tratamiento, para después continuar con una nueva, proceso que se repetirá hasta que llegue un punto en el que se agoten las estrategias de tratamiento. En dicha situación, el profesor podría adoptar una postura de evasión ante la dificultad de aprendizaje.

Dado lo anterior, discurrimos en que el profesor de matemáticas necesita apoyo para ofrecer la ayuda didáctica que se ajuste a la necesidad de cada aprendiz. Mismo que puede encontrar en el KFLM, específicamente en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje. A través de subindicadores de conocimiento que muestren de forma explícita, qué dificultades encuentra el alumno para comprender y una posible justificación del por qué se presentan. En este sentido, se necesita seguir trabajando en la misma línea y profundizar aún más en la comprensión de qué conocimiento necesita/tiene el profesor de matemáticas a partir de subindicadores, de su relación con otros subindicadores, de cómo informan o se informan de ellos, para sustentar la toma de decisiones respecto al tratamiento de dificultades y el aprendizaje (qué formas de interactuar, qué actividades, qué ejemplos, qué conocimientos previos, qué recursos materiales, qué ruta de enseñanza y aprendizaje, etc.)

En este punto y en cuestión de la toma de decisiones didácticas observamos algunas relaciones del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje inherentes al contenido con otras características de aprendizaje y en general en su conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (figura, Anexo XIII) dentro del modelos MTSK (Carrillo, et al., 2013), que se presentan en el siguiente apartado.

Sobre su relación con otras características de aprendizaje y formas de enseñanza, dentro del modelo MTSK.

El conocimiento del profesor de matemáticas sobre las creencias que tienen los estudiantes con respecto al álgebra le puede permitir predecir dimensiones afectivas que influyen en la toma de decisiones didácticas sobre cómo abordar los temas para propiciar una interacción razonada con el objeto matemático y evitar dificultades causadas por proceder de forma memorística[30].

Abrimos un paréntesis para referir que, dentro de esta relación, comprendemos, que a los profesores se les puede complicar diferenciar entre las dificultades de aprendizaje inherente al contenido matemático (cognitivas) y las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas. Aspecto que justificamos ya que las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra son uno de los posibles orígenes de la falta de significado del tema matemático (Ruano, et al. 2008).

Dicho lo anterior, consideramos que la categoría concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas, como tal, queda corta, ya que, en su carácter predictivo de aspectos afectivos del estudiante, reflexionamos, en un margen más amplio, en el que se haga explícito el conocimiento del profesor sobre las emociones de los alumnos frente al tema matemático y en la cual pueda justificarse, su conocimiento sobre la resistencia de los estudiantes a abordar los contenidos del álgebra. Lo anterior cambiando de concepciones a el conocimiento de los estudiantes sobre las matemáticas.

Cerrando el paréntesis y continuando con las relaciones, meditamos en que conocer sobre las posibles dificultades que aparecen dependiendo de la forma de abordar el contenido matemático[31] le permite al profesor formular estrategias de tratamiento preventivas y en caso de visualizar un panorama no favorable cambiar la ruta de enseñanza. Es decir, el profesor puede dar tratamiento a las posibles dificultades de aprendizaje desde la selección e intencionalidad de, la forma de enseñanza, los recursos materiales y virtuales, y, las actividades, tareas y ejemplos; en la forma de transformar la materia para hacerla comprensible a los demás (Shulman, 1986)

Es así, que el profesor puede prever que, de la forma en que diseñe las actividades conducirán al alumno a una determinada forma de interacción con el contenido matemático, siendo en este

[30] El profesor puede conocer que sus estudiantes creen que el álgebra y la aritmética son iguales, esto los llevaría a ejecutar los cálculos de la misma manera, generalizar las concepciones aritméticas y aplicarlas en álgebra, de igual forma, puede conocer que los estudiantes creen que las expresiones algebraicas no se utilizan en su vida cotidiana, lo cual podría llevarlos a memorizar el contenido matemático. En ambos casos, el profesor puede utilizar su conocimiento sobre las creencias de sus estudiantes para elegir una forma de enseñanza donde el alumno pueda visualizar cómo la utilización de expresiones algebraicas se utilizan en su vida cotidiana y cómo en el álgebra los signos y símbolos adquieren un significado distinto al de la aritmética, permitiéndole incidir en cierto grado en las creencias del alumno. De igual forma, en la ejecución podría utilizar este conocimiento para monitorear y realizar preguntas cuando detecte que el alumno responde sin haber razonado sus respuestas.

[31] Dificultades que pueden estar relacionadas entre otros, con los proceso de pensamiento.

caso importante crear una actitud racional hacia las matemáticas, ya que de esta puede depender que se alcance el objetivo matemático de aprendizaje.

Del mismo modo, puede contemplar, que los recursos y materiales utilizados pueden jugar diversos papeles dentro del proceso de aprendizaje, por un lado, desviar la atención del estudiante a aspectos irrelevantes al objetivo de la actividad, llevarlos a interactuar de manera memorística, mecánica o procedimental o por otro, motivarlos y, en consecuencia, influir en el tiempo de interés del alumno hacia el objeto matemático y en el que tiene para poder aclarar los conceptos[32].

No podemos dejar de lado la consideración de que el conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje no puede enfocarse en un solo tema, teniendo una visión de la estructura matemática y de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, necesita darle importancia a los conocimientos previos como punto de partida para el desarrollo del tema de adición de expresiones algebraicas, lo que las lleva a considerar las posibles dificultades que pudieran presentar los alumnos cuando en el diseño de actividades y posterior ejecución, partan de concepciones que incluso pudieran ser erróneas (tal como lo visualizó Shulman, 1986).

Consideramos que lo anterior, le da al conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje un cierto aspecto de temporalidad. Por un lado, el conocimiento del profesor sobre la existencia de dificultades u obstáculos que no se han podido superar y que están asociadas a un aprendizaje deficiente de conocimientos previos, por otro el conocimiento sobre las dificultades propias del contenido actual y, por último, su conocimiento sobre la estructuración deficiente o potencial para aprendizajes posteriores (dentro del mismo tema o temas futuros).

Finalmente, para cerrar este apartado aludimos a que, el conocimiento del profesor de matemáticas sobre la existencia de errores que tienen diferente origen, puede hacerlos conscientes de la importancia del conocimiento profesional de profesor como un medio para comprender en cierto nivel la manera de pensar del estudiante, así como las posibles dificultades que se pueden presentar cuando éste, está en interacción con el contenido matemático. Visualizando así, la importancia del desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas como un medio para mitigar la concepción de la planificación como una secuenciación de temas donde se deja de lado las posibles dificultades que el alumno

[32] Esta observación realizada durante el analisis, coincide con la idea de Socas (2011) cuando alude en un papel de investigador a plantearse el importante reto de cómo organizar el material para capturar y sostener el interés para que los estudiantes puedan implicarse en los procesos intelectuales y adquirir el conocimiento preciso del álgebra.

puede presentar (e.g., Rico, 1997). En este sentido, las conclusiones obtenidas abarcan también la forma en que se puede visualizar el conocimiento del profesor dependiendo de la diversidad de factores que influyen en los tres escenarios, como se muestra a continuación.

Sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas puesto en acción en los distintos escenarios.

En nuestra investigación identificamos, agrupamos y caracterizamos el conocimiento del profesor de matemáticas puesto en acción en tres escenarios, la planificación, la ejecución y la propuesta de mejora. Cada uno con diferente potencial para la extracción de evidencias de conocimiento. En particular queremos resaltar, lo valioso que pueden tornarse modelos como el MTSK, en la identificación y organización del conocimiento que necesita/tiene el profesor de matemáticas antes del diseño de las actividades. Esfuerzo que puede evidenciar además los diferentes tipos de guías e inspiración (Rowland, et al., 2005), que los profesores conocen y ponen en acción a la hora de diseñar las actividades, así como la manera en que se lleva a cabo la vinculación entre la teoría y la práctica.

El modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) puede llevar al profesor a contemplar aspectos que tal vez de forma independiente no consideraría necesarios.

Del mismo modo la observación del conocimiento puesto en acción en la ejecución, permite observar la naturaleza tácita e intuitiva del conocimiento del conocimiento profesional del profesor (Shön, 1987), cuando surgen dificultades que no fueron previstas y en las que podemos argumentar, como mencionan Rowland, et, al. (2005), que existen eventos casi imposibles de planificar, y en los cuales es posible observar el potencial que tiene el alumno para movilizar el conocimiento del profesor. En este caso ofreciendo una gama de tratamientos a las dificultades manifestadas. Prestamos atención también, a lo sustancioso que pueden tornarse estos eventos para la comprensión del contenido del conocimiento profesional del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático. Reconociéndolos como una oportunidad para profundizar en las diferentes estrategias que utiliza el profesor para atender las causas de manifestación del error desencadenadas por una misma falta de comprensión. Matices que moldean la toma de decisiones didácticas y que pueden traducirse en subindicadores de conocimiento. En esta relación bidireccional entre el conocimiento y la toma de decisiones (Ribeiro, et al. 2012).

Visualizamos la importancia de cerrar el ciclo de reflexión y acción pedagógica (Shulman, 1987) con una propuesta de mejora. Y dentro de ésta, de la reflexión en la acción para generar conocimiento en la acción (Shön, 1987). La reflexión sobre el error permite mejorar la comprensión del profesor, el desarrollo de su conocimiento profesional como profesor de matemáticas.

Es importante a manera de sugerencia, que el profesor reflexione sobre el por qué y el para qué de sus acciones desde la planificación, para que después evalué su actuación en el aula y el contraste con los objetivos de aprendizaje planteados, a manera de detectar cuando no se están considerando las dificultades de aprendizaje de las matemáticas del alumno, su posible origen, las formas de manifestarse y las consecuentes estrategias de tratamiento. Ya que consideramos que esto puede aumentar su capacidad de satisfacer las expectativas respecto a su actuación competente (Shön, 1987).

En la misma dirección, prestamos atención al hecho de que, aunque se trate de un esfuerzo colaborativo podemos observar como el conocimiento profesional de las profesoras por su propia naturaleza (Shön, 1987; Ponte, 1994), así como los grados de densidad y consistencia (Ponte, 1994) siguen permeando en las fuentes de información como puede observarse en el escenario de ejecución y el cuestionario. Esta observación nos lleva a explicitar otras conclusiones que surgieron alrededor de la metodología y análisis de la información como se desarrolla en el siguiente punto.

Sobre la metodología y el análisis de la información.

Consideramos importante contemplar dentro de la evidencia aquellos aspectos que fortalecen tanto la interpretación como el indicador en sí mismo, esto a partir de un análisis longitudinal y transversal (Ribeiro, et al. 2012), a medida de aprovechar la información proporcionada para ofrecer resultados conectados a cómo esos indicadores viven en la práctica y cómo se relacionan con otros subdominios de conocimiento. Para visualizar como la toma de decisiones didácticas que contemplan las dificultades de aprendizaje pueden surgir desde el conocimiento de la estructura matemática, al contemplar los conocimientos previos de la aritmética y los posibles obstáculos y dificultades que pueden presentarse en consecuencia.

Para la selección de casos de estudio, contemplamos que la conciencia del profesor sobre la existencia de errores que tienen diferente origen, también los hace conscientes de la importancia del conocimiento profesional de profesor como un medio para entender en cierto nivel la manera de pensar del estudiante, así como las posibles complicaciones que se pueden presentar cuando está involucrado con el contenido matemático (algo que puede verse plasmada desde la planificación). Aspecto en el que podemos visualizar la importancia del desarrollo profesional del profesor de matemáticas cómo un medio para mitigar la visualización de la planificación como una secuenciación de temas donde se deja de lado las posibles dificultades que el alumno puede presentar (Rico, 1997).

Por otro lado, consideramos la importancia del estudio de caso como un medio para el desarrollo del conocimiento del profesor o futuro profesor en su faceta como investigador y el cual puede reflejarse en el contraste entre un análisis hipotético y el análisis de las fuentes de información.

Aportaciones de la investigación.

Nuestra investigación contribuye a comprender en mejor medida el conocimiento del profesor sobre dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas, así como, en la obtención de subindicadores de conocimiento para este tema, mismo que pueden servir de plataforma para la planificación. Aporta, además, un acercamiento a cómo esos subindicadores son puestos en acción en la labor del profesor lo cual contribuye a visualizar como la teoría vive en la práctica. En el cómo los profesores en formación continua están comprendiendo la literatura en didáctica de las matemáticas y transformándola para llevarla a su labor docente. Aspecto que consideramos puede contribuir a la observación realizada por Kieran (2006) sobre las dificultades que existen para que los profesores aprendan de los hallazgos de la investigación y cómo aplicarlos en la instrucción.

Cabe señalar que al comenzar la investigación se partió de tres indicadores de conocimiento, error, obstáculo y dificultad, indicadores que hubo necesidad de refinar. En primer momento se hizo distinción entre los errores que son una manifestación de un obstáculo o una dificultad y de aquellos que según Brousseau (1983) son fugaces o al azar, a los cuales llamamos errores “ordinarios”. Del mismo modo consideramos que no basta con conocer que existen errores, obstáculos y dificultades sino la importancia de identificar cuál es su origen, como menciona Socas (2011) conocer el origen del error permite aportar un trato sistemático a los mismos, permite arbitrar procedimientos que ayuden a los alumnos a corregir sus errores.

En cuanto a la metodología empleada, nos permite aportar una serie de subindicadores que, aunque no fueron evidenciados, pero que pueden ser considerados como una fuente informativa para futuras investigaciones u para el diseño de actividades.

Limitaciones del estudio y futuras investigaciones.

La presente investigación representa un primer acercamiento a la caracterización del conocimiento del profesor sobre dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas evidenciados por dos profesoras de un curso de desarrollo profesional. Como un segundo acercamiento, consideramos que sería interesante:

- Hacer el contraste entre una planificación y ejecución de un profesor de matemáticas en formación continua sin acercamiento a subindicadores de conocimiento y otra utilizando los subindicadores como fuente inspiradora para la realización de la misma labor. Esto como medio para ofrecer evidencias del uso de modelos cómo el MTSK para el desarrollo del conocimiento profesional del profesor.

- Caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje que pone en acción un profesor en formación continua al realizar un proceso de investigación utilizando alguna teoría de enseñanza (como la de situaciones didácticas) en el tema de adición de expresiones algebraicas, y utilizar esta información como base para la realización de una propuesta de mejora.

- Utilizar la presente investigación para realizar un contraste profundo con la literatura especializada y ver el papel de las creencias sobre dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas.

- Utilizar los subindicadores que surgieron de esta investigación como fuente para un proceso de investigación acción.

- Del mismo modo, en esta investigación identificamos que existen evidencias de conocimiento del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje que se relacionan con otras categorías de conocimiento, entre ellas, las formas de aprendizaje, las formas de interactuar del alumno con el contenido matemático, las formas de abordar el contenido matemático (formas de enseñanza) y las concepciones sobre las matemáticas. Creemos que es interesante indagar en el conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido que pueden surgir en cada una de esta estas categorías, en específico en esta última relación a modo de profundizar en el conocimiento del profesor sobre las emociones de los estudiantes (motivación, resistencia, angustia, etc.) al abordar los contenidos del álgebra que son origen de dificultades de aprendizaje inherentes al contenido.

- Realizar la misma investigación cambiando el caso de estudio a un profesor experto.

- Como recomendación, a manera de fortalecer las fuentes de información consideramos podría ser de gran ayuda, para indagar en el conocimiento del profesor de matemáticas en formación continua sobre dificultades de aprendizaje que se estableciera en la planificación las rutas hipotéticas de solución de los alumnos (correctas e incorrectas) de manera fundamentada. Rutas que podrían ayudarle a fortalecer sus reflexiones hacia la propuesta de mejora y en el desarrollo de su conocimiento profesional.

A modo de consideraciones finales podríamos destacar la necesaria coordinación de los diversos hallazgos de la investigación en álgebra que existen en el campo de dificultades de aprendizaje con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas a modo de contar con una visión integrada como un medio para nutrir los programas de formación continua. Del mismo modo consideramos. que es necesario organizar los avances que se tienen en cuestión del propio modelo del MTSK en un banco de subindicadores referenciado, para proporcionar una guía de investigación y facilitar las tareas de búsqueda de profesores de matemática que los consideren como una guía en el diseño de actividades.

REFERENCIAS

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(4), 165-198.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., y Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8*, (pp. 2985-2994). Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática*. Un estudio de caso. Tesis de doctorado publicada en http://goo.gl/KJA4Yb. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Cohen, L., Manion L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Sixth Edition. United Kingdom: Taylor y Francis e-library.

Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on Priority Mathamatics Education. En Lyn D. English and David Kirshner. *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Third Edition), (pp. 19-59). New York, NY: Routledge.

Flores-Medrano, E., Escudero, D., Montes, M. y Aguilar, A. (2014). *Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK*. Documento inédito.

Godino, J. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en didáctica de la matemática. *Quadrante*, *2*(1), 9-22.

González, A. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. *Islas*, *45*(138), 125-135.

González, M. y Mancill, J. (1974). *Álgebra Elemental Moderna*. Cuba: Instituto Cubano del Libro.

Hernández, G. (2004). *Paradigmas en psicología de la educación*. México: Paidós.

Kersting, N., Givvin, K., Thompson, B., Santagata, R. y Stigler, J. W. (2012). Measuring usable knowledge teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. *American Educational Research Journal*, *49*(3), 568-589

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En Angel Gutierrez and Paolo Boero. *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future*, (pp. 11-49). UK: Sense Publishers.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989) El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*(3), 229-240.

Matz, M. (1980). Towards a computational Theory of Algebraic Competence. *Journal of Children´s Mathematics Behavior*, *3*(1), 93-166.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión: Revista de la división de Ciencias Administrativas de la Universidad del Norte*, (20), 165-193

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, (40), 3-28

Ponte, J. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte, & F. Matos (Eds.). *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp.195-210) Lisboa: Portugal.

Resnick, L. y Ford, W. (1998). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Ribeiro, M., Carrillo, J., y Monteiro, R. (2012). *Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *15*(1), 93-121.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39- 59). Barcelona: ICE- Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1). 1-14.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281.

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *2*(2), 61-74.

Santana, N. y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de Geogebra en el Aula de Matemáticas. *Números*, (88), 75-91.

Savola. L. (2008). *Video-based analysis of mathematics classroom practice: examples from Finland and Iceland. Doctoral dissertation*. Universidad de Columbia. United States.

Secretaria de Educación Pública (2011). *Plan de estudios 2011*, Educación Básica. México: SEP.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, 125-154.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (77), 5-34.

Socas, M., Camacho, M. y Hernandez, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza Secundaria. *Revista Interuniversitaria de formación del Profesorado*, (32), 73-86.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189.

Sosa, L., Aguayo, L. y Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. *Matemática Educativa: La formación de profesores*, 279-297.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Cuarta Edición. Madrid: Morata, S.L.

ANEXOS

Anexo I: Análisis planificación.

❖ **[P, 1] Adición de expresiones algebraicas (1-329)**

Objetivo general: Organizar e identificar el conocimiento necesario para el diseño de actividades para la enseñanza-aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas.

[A] Las profesoras organizan e identifican los conocimientos necesarios para llevar a cabo el diseño de actividades dentro de la planificación.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[P, 1, 1]: Saber las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas <u>por un aprendizaje deficiente de conocimientos previos, en este caso porque no identifica los números reales.</u>

Evidencia: Las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas necesario para el desarrollo de la clase es el mencionado por Kieran (1997) sobre que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales… la finalidad es que puedan presentar el menor número de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157), "*es imprescindible reconocer que los números son las bases para una expresión algebraica*" (158).

<u>Revisión longitudinal:</u> Las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" (444-447).

[P, 1, 2]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas <u>por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos, en este caso porque no puede trabajar de manera aritmética con los números reales</u>.

Evidencia: Las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas necesario para realizar la planificación en el tema de adición de expresiones algebraicas es el mencionado por Kieran (1997) sobre que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157).

<u>Revisión longitudinal:</u> Las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" (444-447).

[P, 1, 3]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.

Evidencia: Las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje que "*para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a utilizar el significado de la variable como incógnita*" (159-160).

Revisión longitudinal: En la planificación dentro de la categoría formas de enseñanza aluden a que se puede "*Representar a la literal con distintos valores, principalmente representados en valores que cambian con respecto a algo, para que el estudiante establezca a la variable con su significado de número* $x = -3, -2, -1,0,1,2,3$)" (238-240).

Declarado lo anterior dentro de la categoría de recursos y materiales, enuncian la utilización de material tangible como "*los bloques de Dienes, para el manejo de las variables*" (260). "*Cada pieza se define por cuatro variables: color, forma, tamaño y grosor. A su vez, a cada una de las piezas se le asignan diversos valores…*" (263-264). Así mismo, "*se pueden utilizar fichas de colores que representen las distintas variables*" (273) o "*representar el perímetro de una figura con una expresión algebraica*". (274). Argumentos que empatan con el diseño de las actividades: "Geometría para calcular" (359-374) y "Los tapetes de Rosa" (375-391).

[P, 1, 4]: Conocer las dificultades que son propias del objeto matemático que se pudieran presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas, por ejemplo, no comprender la configuración de un término algebraico.

Evidencia: Las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje que "*para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a utilizar el significado de la variable como incógnita, para comprender la configuración de un término algebraico (coeficiente, literal, signo)*" (159-161).

[P, 1, 5]: Saber las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con las formas de abordar el objeto matemático, en este caso porque en la estrategia de enseñanza, el sistema de representación utilizado puede desencadenar un pensamiento aritmético y no algebraico para la solución.

Evidencia: Las profesoras expresan como parte de la identificación del conocimiento sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas que, "*los sistemas de representación elegidos pueden provocar en el estudiante un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución*" (166-168).

Revisión longitudinal: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado" (184), a la que se le asignan dos procedencias distintas una de ellas relacionada con las "dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos del pensamiento*" (185-186).

[P, 1, 6]: Conocer que los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en un obstáculo.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en un obstáculo*" (183).

[C, M1, 2]: "*Considero que los errores antes mencionados pueden provenir de un origen diferente como:*

- *Es un momento difícil el paso de aritmética al algebra, ... hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en algebra de la misma manera que en aritmética" (108-113).*

[P, 1, 7]: Saber que los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184).

[C, M1, 3]: "*En cuanto a la adición de expresiones algebraicas puedo mencionar tres errores más comunes a los que me he enfrentado.*

- *Falta de significado…*" (83-85).

[P, 1, 8]: Saber que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, en este caso relacionadas con la complejidad misma del objeto matemático.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan procedencias distintas una de ellas relacionada con las "*dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos*" (185-186).

[C, M2, 1]: el alumno presenta errores debido a "*a la dificultad propia del contenido*" (29).

[P, 1, 9]: Saber que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, en este caso relacionadas a los procesos del pensamiento.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan dos procedencias distintas una de ellas relacionada con las "dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos del pensamiento” (185-186).

[C, M1, 4]: “*El conocimiento que el profesor posee le permitirá entender un poco sobre la manera de pensar del estudiante, asimismo detenerse a pensar en las posibles complicaciones que el estudiante tendrá al estar involucrado con algún contenido…*” (12-15).

[P, 1, 10]: Saber que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, en este caso asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a “*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*” (184), a la que se le asignan procedencias distintas una de ellas relacionada con las “*dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra*” (186-187).

[C, M1, 5]: “*Otro posible origen de los errores que se presentan con relación a este tópico pudiera ser el valor afectivo, es decir las creencias que el alumno posee y que son difíciles de cambiar…”* (120-122).

[P, 1, 11]: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en un aprendizaje deficiente de conocimientos previos (por ejemplo, las operaciones con signo).

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras expresan la existencia de “*errores en aritmética como de operaciones con signo*” (188).

[P, 1, 12]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas vinculados a las operaciones con signo.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras expresan la existencia de “*errores en aritmética como de operaciones con signo*” (188).

[P, 1, 13]: Saber los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética en este caso cuando comienza en el estudio del algebra.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989)[33] quienes mencionan que “*los estudiantes, al comenzar con el estudio del álgebra traen consigo nociones de aritmética y los enfoques que usaban en ella*” (189-190).

[33] Cita corroborada en la página 229

[C, M1, 6]: "*hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética*" (111-113).

[P, 1, 14]: Conocer la forma en que pueden manifestarse los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas que están vinculados a los números negativos, en este caso porque ignoran el signo y consideran los valores como enteros positivos.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Pizón y Gallardo (2000)[34] quienes expresan que "*operar con números negativos representa serias dificultades para los que se inician en el álgebra*" (193-194) complementan a los autores mencionando que los estudiantes, "*ignoran el signo y consideran los valores como enteros positivos*" (195).

[C, M1, 7]: "*es difícil para él entender que existen expresiones negativas*" (117-118).

[P, 1, 15]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición, en este caso porque ignora las diferencias.

Evidencia: Las profesoras expresan que una dificultad en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas es la "*conjunción de términos no semejantes: en álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo:* $3+5x=8x$" (196-198).

[P, 1, 16]: Saber los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=", en este caso por la carencia de sentido, los estudiantes tienen la idea de hacer algo al lado izquierdo y derecho de una igualdad**.**

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1998)[35] quienes mencionan la "*carencia de sentido en el signo igual; para los estudiantes la idea que tienen sobre el signo igual es la de hacer algo ante los lados izquierdo y derechos de una igualdad*" (199-200).

[C, M1, 8]: "*el estudiante al encontrarse con un signo igual ellos la mayoría de las ocasiones tienden a cerrarlo en un valor numérico que obtienen de la expresión algebraica que está antes o después del signo igual*" (93-96).

[P, 1, 17]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas ligados a la concepción de concatenación, porque ha aprendido que en

[34] Cita corroborada en libro pero propia de autores como…
[35] Cita corroborada en la página 230

aritmética significa adición, contrario a su significado algebraico de multiplicación.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989)[36] quienes expresan que "*en aritmética la concatenación significa adición como 37 significa 30 + 7, sin embargo, en álgebra la concatenación significa multiplicación*" (205-206) "*esto conducirá a que los jóvenes malinterpreten el sentido de los términos algebraicos*" (206-207).

[C, M1, 9]: "*Los errores del álgebra ocasionados por las características del lenguaje. Uno de ellos es la concatenación en expresiones aritméticas es de suma, mientras que en el álgebra se pueden dar concatenaciones de multiplicación y suma. Por ejemplo, 3x tiene una concatenación de multiplicación, muy frecuentemente los alumnos no llegan a entender la diferencia*." (97-101)

[P, 1, 18]: Saber los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=", en este caso porque por las formas de proceder en aritmética, al encontrar una expresión abierta la considera incompleta, asumiendo que debe de existir un resultado que generalmente es un número.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989)[37] quienes expresan que existen "*errores a la falta de un cierre, cuando los estudiantes se encuentran con expresiones como 5 + b consideran que esta expresión es incompleta, asumen que debe existir un resultado que generalmente es un número*" (208-210).

[C, M2, 2]: un posible error en la adición de expresiones algebraicas es "*querer cerrar las operaciones a un número en particular"* (24-25).

[C, M1, 16]: "*… es difícil para él entender … y que no necesariamente cuando exista un signo igual tendrá un valor numérico*" (117-119)

[P, 1, 19]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición, en este caso porque realizan la adición de términos, sin considerar algunas características particulares como el signo.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que los estudiantes "*llegan a realizar una conjunción de términos, sin considerar algunas características particulares como el signo*" (215-216).

Revisión longitudinal: Cuando las profesoras utilizan la palabra conjunción se refieren a la adición como se ve en las líneas siguientes, donde expresan: "*conjunción de términos no semejantes: en álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo:* $3 + 5x = 8x$" (196-198).

[36] Cita corroborada en la página 230
[37] Cita corroborada en la página 231

[P, 1, 20]: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque al hacer agrupaciones de términos algebraicos olvida algún signo.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que "*los estudiantes pueden hacer agrupaciones donde olviden el signo*" (216-217). Para ejemplificar utilizan "$(5a + 8a - 4ab) + 3b + 7b - 4ab)$" (216-217).

[C, M1, 10]: "*Otro error es en el registro algebraico es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales se emplean mal los datos, se omiten signos…*" (170-171).

[P, 1, 21]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque por la concepción aritmética del signo "=", lo cual ocasiona que se produzca el error de carencia de sentido, al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que "*otra forma de interactuar con el contenido es la igualdad aritmética la apliquen en el contexto algebraico, esto puede ocasionar que se produzca el error de la carencia de sentido al signo igual al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros*" (218-220).

[P, 1, 22]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética en este caso cuando interactúa con el lenguaje algebraico, sin comprender que sus símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse hacia el álgebra.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que una forma de interactuar con el contenido es que "*el alumno interactúa con un lenguaje algebraico, pero sin comprender que sus símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse de la aritmética*" (221-222).

[P, 1, 23]: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en su creencia de que el lenguaje algebraico es igual al lenguaje aritmético, esto los llevan a realizar las operaciones de la misma manera, y a una consecuente carencia de significado.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan el alumno puede tener "*concepciones erróneas como creer que el lenguaje algebraico es igual que el lenguaje aritmético y realizan operaciones de la misma manera; esto conducirá al estudiante a la carencia de significado, puede cometer errores que ya se han mencionado en este documento*" (225-227).

[P, 1, 24]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para comprender el concepto de expresión algebraica porque su creencia de que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que solo se utiliza en matemáticas, puede crear una ausencia de significado, en el que el aprendizaje sea solo memorístico, por lo tanto, no desarrollará habilidades que le permitan trabajar con el lenguaje algebraico.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan que el alumno puede "creer" que "*el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que sólo se utiliza en matemáticas; esto puede crear en el estudiante una carencia de significado en el que su aprendizaje únicamente sea memorístico, no podrá comprender el concepto de expresión algebraica y por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar en el lenguaje algebraico.*"(228-231).

Revisión longitudinal: Como parte del conocimiento identificado en la categoría de formas de enseñanza de las matemáticas las profesoras mencionan "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*" [P, 235-237].

Presentan la actividad adivinanza de números, "*para que el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede utilizar en sus actividades cotidianas*" (425-426).

[C, M1, 12]: "*…ya que los conocimientos previos pueden estar apegados a sus creencias…*" (75-76).

[P, 1, 25]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para comprender el concepto de expresión algebraica porque ante la carencia de significado procede de forma memorística.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan que el alumno puede "*una carencia de significado en el que su aprendizaje únicamente sea memorístico, no podrá comprender el concepto de expresión algebraica y por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar en el lenguaje algebraico.*" (229-231).

[P, 1, 26]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para comprender el lenguaje algebraico porque no tiene significado para él, no lo vincula con algún aspecto de su vida cotidiana.

Evidencia: Como parte del conocimiento identificado en la categoría de formas de enseñanza de las matemáticas las profesoras mencionan "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*" (235-237).

Revisión longitudinal: Presentan la actividad "adivinanza de números" para que "*el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede utilizar en sus actividades cotidianas*"

(425-426).

❖ **[P, 2] Integrar el lenguaje común en una expresión algebraica (332-358 y 403-452).**

Objetivo general: Integrar el lenguaje común en una expresión algebraica, partiendo del conocimiento previo del alumno (números enteros y operaciones aritméticas).

[A] Se planifica plantear que los alumnos piensen en un número, para después realizar una serie de operaciones aritméticas con él. Una vez terminado pasarán 4 alumnos a llenar una tabla donde podrán visualizar que independientemente del número que pensaron el resultado siempre es el mismo. Se les solicita a los alumnos que escriban las operaciones que realizaron llamando a este número "n". Por último, el profesor "institucionaliza" la expresión algebraica obtenida y se les pregunta "¿cuáles son los elementos de un término?, esto para especificar las partes de una expresión algebraica".

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[P, 2, 27]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático, en este caso porque no es capaz de plasmar lo que se le dice en lenguaje común ("a manera de juego") a una expresión algebraica, es decir, la forma de interactuar no es la deseada.</u>

<u>**Evidencia:**</u> dentro esta actividad, las profesoras identifican que pueden presentarse como dificultad "*que los alumnos no sean capaces de plasmar lo que se les ha dicho en manera de juego a una expresión algebraica, es decir, la forma de interactuar no es la deseada*" (434-435).

[P, 2, 28]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que tienen su origen en las concepciones del alumno sobre las matemáticas, <u>en este caso porque le impide hacer una referencia algebraica.</u>

Evidencia: Las profesoras identifican que puede presentarse como dificultad "*que su concepción de matemáticas le impida hacer una referencia algebraica al juego presentado*" (436-437).

❖ **[P, 3] Sumar términos semejantes (359-374 y 453-498).**

Objetivo general: Sumar términos semejantes apoyados del conocimiento de los alumnos en el cálculo de perímetros de figuras geométricas.

[A] Se planifica organizar al grupo en binas y entregarles 7 rectángulos y 8 cuadrados, figuras que representaran números positivos, después se les da una serie de instrucciones especificando el tamaño de las figuras geométricas (tamaños representados por expresiones algebraicas). Se les solicita a las binas que armen una serie de figuras geométricas con determinado ancho y largo a partir de las figuras geométricas anteriores. Por último, se les recuerdan las partes de una expresión algebraica, además de mencionar y hacer énfasis en la realización de adición de expresiones algebraicas semejantes (que en este caso todo está representado en términos de "a").

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[P, 3, 29]: Conocer las dificultades que son propias del objeto matemático que se pudieran presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas, por ejemplo, <u>no identificar los componentes de una expresión algebraica.</u>

Evidencia: Las profesoras planifican al inicio de la actividad preguntar a los alumnos "sobre los componentes que ya se ubicaron, esperado que identifiquen en primera instancia el coeficiente y la parte literal" (457-458) señalando que "*posiblemente pudieran señalar también el exponente*"(458)

[P, 3, 30]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético, en este caso porque no distingue el exponente de una literal cuando éste no está indicado.</u>

Evidencia: En primer momento en esta actividad las profesoras esperan que identifiquen la parte literal y el coeficiente y especifican que "*posiblemente pudieran señalar también el exponente*" (458) ya que en ese "*acercamiento será uno*" (459).

[P, 3, 31]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático, en este caso para utilizar el lenguaje algebraico.</u>

Evidencia: Las profesoras diseñan esta actividad "*con la intención de que el estudiante tenga un acercamiento más estructurado con respecto a las expresiones algebraicas y pueda utilizar con mayor facilidad un lenguaje algebraico*" (460-461).

[P, 3, 32]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición, en este caso porque suma coeficientes con la parte literal diferente.</u>

Evidencia: Las profesoras identifican que una dificultad que puede presentarse en esta actividad, es "*querer hacer conjunciones de muchas expresiones algebraicas en donde su parte literal es diferente, lo cual no se puede realizar*" (482-483).

Revisión longitudinal: Cuando las profesoras se refieren a la palabra conjunción hacen alusión a adición como se muestra en las siguientes líneas "*conjunción de términos no semejantes: en álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo:* $3 + 5x = 8x$" (196-198).

❖ **[P, 4] Distinguir términos semejantes y no semejantes (375-391 y 499-541).**

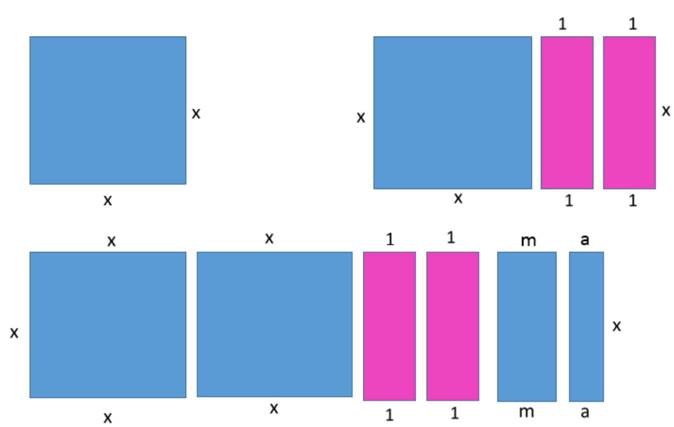
Objetivo general: Distinguir términos semejantes y no semejantes para efectuar la adición de expresiones algebraicas a partir de su visualización con figuras geométricas**.**

[A] Se planifica dictar dos problemas de adición de expresiones algebraicas, a partir de su representación con figuras geométricas. En el primero se involucran solo términos semejantes y en el segundo términos semejantes y no semejantes.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[P, 4, 33]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición, en este caso porque suman todos los términos sin respetar si son semejantes o no.

Evidencia: Después de que el alumno ha realizado la adicción de términos semejantes, se planifica dictar un problema en el que existen términos no semejantes (387-391).



(387)

Las profesoras expresan "*dentro de la categoría fortalezas y dificultades se visualizó el tratamiento o interacción que pudieran tener al estar realizando las sumas, esto debido a que se puede presentar el error de querer sumar todas las expresiones algebraicas sin respetar la esencia de cada término, queriendo "juntar" cuantos términos tengan en la situación*" (521-523).

❖ **[P, 5] Evaluar la aplicación del algoritmo de adición y sustracción de expresiones algebraicas (392-395 y 542-574).**

Objetivo general: Evaluar la aplicación del algoritmo de adición de expresiones algebraicas.

[A] Se planifica evaluar la aplicación del algoritmo resolviendo un cuadrado mágico donde se efectúa adición de expresiones algebraicas.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[P, 5, 34]: Conocer las dificultades que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático, en este caso porque al abordar el tema con modelos geométricos y después evaluar ya sin su utilización puede confundir al alumno.</u>

Evidencia: Las profesoras expresan que los alumnos "*probablemente tengan alguna confusión por el hecho de trabajar con modelos geométricos y después no tenerlos, pero esperamos que la realización del cuadro mágico genere menos estrés en el estudiante y pueda resolver de manera eficaz cada uno de ellos*" (565-567).

[C, M1, 12]: "*es cuando los alumnos utilizan conceptos, contenidos o procedimientos equivocados en el desarrollo de un tema. Pienso que la confusión está relacionada con las creencias del estudiante que lo llevan a utilizar conceptos equivocados*" (192-195).

"*…me doy cuenta si un alumno está confundido cuando no logra comprender el tema*" (201-202).

"*Para erradicar la confusión en un estudiante es necesario que el alumno comprenda…*" (204-205).

"*…esto le genera una dificultad, una confusión en su pensamiento*" (52-53).

Evento de término: No existe otra actividad planificada.

Tabla 5: Análisis de la Planificación.

Anexo II: Análisis ejecución.

❖ **[E, 1] Integrar el lenguaje común en una expresión algebraica (1-158).**

Objetivo general: Integrar el lenguaje común en una expresión algebraica, partiendo del conocimiento previo del alumno (números enteros y operaciones aritméticas).

Evento desencadenante: M1 empieza la actividad pidiendo a sus alumnos piensen en un número.

[A] Se les solicita a los alumnos que piensen en un número, después M1 dicta una serie de operaciones aritméticas con él, mientras va cambiando la forma de dirigirse a este por la literal "n". Una vez terminado pasan 4 alumnos a llenar una tabla donde plasman los resultados obtenidos, en la que además visualizan que independientemente del número que pensaron el resultado siempre fue el mismo. M1 guía a la obtención de la expresión algebraica.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[E, 1, 1]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos, en este caso en la multiplicación.

Evidencia: M1 solicita a sus alumnos que piensen en un número, les sugiere que sea "*pequeño*" (1), al indicarles que el número que pensaron lo multiplicarán por tres (7), menciona "*por eso dije que pequeño para que no batallen*" (8).

<u>Revisión transversal</u>: En la planificación se menciona que la actividad "adivinanza de números" "*Se establece con el propósito de recordar los conocimientos previos, haciendo alusión a los números enteros y las operaciones aritméticas*" (404-405)

En la planificación, las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" (444-447).

[C, M1, 1]: "*por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…"* (73-75).

En la planificación, citan a Kieran (1997) aludiendo que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157).

[E, 1, 2]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque después de ejecutar cálculos puede dar respuestas sin razonar lo que hace.

Evidencia: M1 solicita que los alumnos pasen a llenar una tabla donde se plasman los resultados obtenidos del lenguaje común al aritmético, menciona "*entonces, a todos a todos les dio 10, ¿cierto?*" (58), cuando los alumnos les responden "*si*" (59), les pregunta "*¿siempre será así, pues?*" (60) al obtener nuevamente una respuesta afirmativa ahora les pregunta "*¿de qué depende?*" (62).

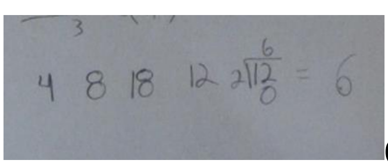
[C, M1, 13]: "*para evitar que el alumno no proceda de manera mecánica, él debe razonar, reflexionar y construir su propio conocimiento*" (130-132).

"*Para lograrlo como docente debo evitar el actuar de manera tradicionalista, es decir que el maestro provea una clase completamente expositiva donde el alumno sólo sea un receptor de conocimientos hará que el alumno mecanice lo que está viendo y escuchando*" (133-136).

[E, 1, 3]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con las formas de abordar el objeto matemático, en este caso porque el sistema de representación utilizado puede desencadenar un pensamiento aritmético y no algebraico para la solución.

Evidencia: Después de que M1 les recuerda a los alumnos la forma de representar una expresión algebraica, la profesora les solicita obtener el término algebraico de cada operación aritmética, cuando un alumno empieza a dictarle el resultado concreto, les menciona que el número que pensaron lo representarán con la letra "n" y solicita nuevamente se le dicte el término algebraico, mientras los guía columna por columna (69-76).

Una vez concluido este ejercicio, M1 dicta a los alumnos un nuevo ejercicio, señalándoles que lo que busca es la expresión [mientras señala la del ejercicio anterior] (103). Terminado el ejercicio solicita la participación de los alumnos para escribirla en el pintarrón (106-113). Cuando el alumno participante escribe

(132)

M1 menciona "*pero, ¿cómo te quedaría así?* [señala expresión algebraica del pintarrón]" (133)

[E, 1, 4]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.</u>

Evidencia: En un primer momento M1 solicita a los alumnos que piensen un número, enseguida empieza a indicar una serie de operaciones aritméticas. En la última indicación M1 les dice:

19	M1	Y luego le van a restar n
20		¿Qué quiere decir n?
21		Es el número que pensaron
22		¿Sí?
23		Le van a restar n
24	A	¡Ohhhh!

Terminado este evento pasan 4 alumnos a llenar una tabla en el pintarrón, misma en la que se visualiza que, independientemente del número que pensaron el resultado siempre es diez, después M1 guía a los alumnos a obtener la expresión algebraica:

$$\frac{3n+30}{3}-(n)$$

En un segundo momento bajo un ejercicio similar, cuando una alumna está participando M1 ve que la estudiante escribe en la expresión algebraica el número que pensó al realizar el ejercicio, por lo que le dice "*pero tú pensaste en dos y ¿qué tal que fuera otro número?*" (142) [señalando el error]

$$\frac{(n)(2)+10}{2}-2=$$ (143)

"*¿Cómo lo vas a hacer?*" (143), la alumna responde con un "ahhh" y corrige.

$$\frac{(n)(2)+10}{2}-n=$$ (145)

<u>Revisión longitudinal</u>: Dentro de la categoría formas de enseñanza aluden a que se puede "*Representar a la literal con distintos valores, principalmente representados en valores que cambian con respecto a algo, para que el estudiante establezca a la variable con su significado de número* $x=-3,-2,-1,0,1,2,3$)" (238-240).

[C, M1, 14]: “*el alumno no se encuentra suficientemente familiarizado con el lenguaje algebraico y esto hace que no lo utilice de manera adecuada es decir no comprende que las literales pueden tomar valores diferentes*” (115-117).

Evento de término: M1 pregunta a los alumnos si están de acuerdo con la expresión algebraica obtenida en el último ejercicio, antes de pasar a la siguiente actividad.

❖ **[E, 2] Sumar términos semejantes (159-587).**

Objetivo general: Sumar términos semejantes apoyados del conocimiento de los alumnos en el cálculo de perímetros de figuras geométricas.

Evento desencadenante: M1 empieza la actividad solicitando al grupo se acomoden en binas mientras se distribuye cierta cantidad de figuras geométricas (cuadrados y rectángulos).

[A] Calcular el listón que ocupara una artesana (perímetro de ciertas figuras geométricas) para ponerle en la orilla a unos “tapetes” (rectángulos) que se armaran a partir de una serie de cuadrados y rectángulos cuya medida de lados está representada por una expresión algebraica.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[E, 2, 5]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>para coordinar las múltiples formas de representación verbal de una expresión algebraica.</u>

Evidencia: M2 muestra un rectángulo a los alumnos y especifica que para ese “*primer ejercicio va a medir “a” en su ancho y por el largo “3a”, por el triple de “a”, [énfasis] “a” y el triple de “a”*”. Acto seguido un alumno le pregunta “*¿el lado cuánto?*” (214) por lo que M1 decide realizar el rectángulo en el pintarrón para que el alumno pueda visualizarlo (coordinar las múltiples formas de representación verbal con su representación gráfica y algebraica). M2 rectifica “*el largo del rectángulo va a ser tres veces mayor a su ancho*” (219) y pregunta a los alumnos *“¿cuánto va a medir el an… el largo?*” (220).

[E, 2, 6]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas <u>para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado, en este caso por falta de sentido.</u>

Evidencia: M1 comienza a dictar una serie de ejercicios donde una artesana está elaborando un tapete para el que no tiene las medidas, pero, sabe que el ancho mide dos plumas (308-309), en ese momento M1 les pregunta a los alumnos "*¿cómo es eso?*" (310), uno de los alumnos responde "*pens*" (311), a lo que M1 contesta "*sí, pero, esta es una pluma y luego la otra pluma, el alto mide eso*" (312) mostrando a los alumnos a que se refiere el ejercicio (313).

[E, 2, 7]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque no comprende la literal de un término algebraico por falta de significado.</u>

Evidencia: M1 dicta un ejercicio en donde el ancho de un rectángulo (tapete) mide 2 plumas (308-309), les pregunta a los alumnos "*¿cómo es eso?*", toma dos plumas y ejemplifica, después dicta un segundo ejercicio donde el ancho mide 8 plumas, para corroborar que el alumno ha entendido dice "*ahora, no va a medir "a" ¿cuánto va a medir?, muchachos…*", cuando un alumno, menciona "*pens*" (331), M1 los incita a decir cómo lo van a representar "*lo vamos a representar con la letra…*" (334), obteniendo como respuesta "*p*" (335) a lo que asiente mencionando "*"p", ¿verdad? para no ponerle pluma completo*" (336).

<u>Revisión transversal</u>**:** Las profesoras mencionan "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*" (235-237).

[E, 2, 8]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque se concentra en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje</u>.

Evidencia: M1 intencionalmente dicta un ejercicio a los alumnos donde el material didáctico no les es suficiente (323-326), cuando los alumnos empiezan a mencionar que no se puede resolver el problema ella aclara "*pero acuérdense que lo que quiero saber es el listón que va a llevar alrededor he*" (362), por su parte M2 recuerda cual es la pregunta y les menciona "*chicos hay que recordar que estamos trabajando con las expresiones algebraicas*" (376).

[E, 2, 9]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>relacionados con la concepción aritmética del signo "=", en este caso porque no acepta una expresión algebraica como resultado, llevándolo a sustituir un valor en ambos lados de la igualdad.</u>

Evidencia: M1 pregunta a la bina 2 como obtuvieron la respuesta del ejercicio dos (en el cual el material gráfico no es suficiente para dar respuesta), antes de que contesten otro alumno menciona que "*sacaron la calculadora*" (390), ante esto, M1 pregunta a la bina "*pero, ¿cómo saben cuánto mide p?*" (392), "*¿cuánto mide la pluma?*" (393), recordando al grupo "*dijimos lo que queremos son las expresiones que van saliendo*" (397).

[C, M1, 17]: "*… es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales…o se le asigna un valor a la variable*" (170-172).

[E, 2, 10]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado, en este caso, por no asociarlo con un conocimiento previo.

Evidencia: M1 dicta "*Rosa va a ser otro tapete ahora el ancho mide 8 plumas*" (323), "*y el largo mide 6 veces más, ¿cuánto listón necesita para la orilla?*" (326), cuando los alumnos se encuentran resolviendo, se acerca a la bina 4 y les dice "*si yo digo 8 veces más "¿cuánto sería?*" [refiriéndose al problema] (468), al no responder la alumna cambia la interrogante, "*si digo 2 y luego digo 2 veces el dos ¿cuánto es sería?*" (469) cuando la alumna responde "*4*" (470), utiliza la misma estrategia para preguntar "*si digo 3 veces el 2*" (471), a lo que la alumna responde "*seis*" (472), llevándola de esa forma a comprender las indicaciones del problema.

[E, 2, 11]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas relacionados la concepción aritmética de la palabra "más", la cual entiende como suma y cuando se emplea como una suma reiterada no lo asocia con la multiplicación.

Evidencia: M2 se acerca a verificar el trabajo de un alumno (bina 3) y le pregunta "*¿por qué 14?*" (419) [señalando la base del rectángulo], el alumno menciona "*porque es seis veces más*" (420), es decir, el alumno entiende "*seis veces más*" como una suma y no como una suma reiterada. M2 trata de explicar diciendo "*eh, seis veces, este…* [hace remolinos con los dedos], *lo que te mide el ancho*" (425), y reitera "*seis veces lo que mide el ancho*" [haciendo una señal de brinco con los dedos] (426).

Inmediatamente de haber atendido a la bina 3, se acerca a la bina 1, y verifica que los alumnos hacen a misma interpretación, han indicado una suma en vez de una suma reiterada, les hace ver el error diciendo "*pones más seis*" (459) "*en vez de poner 6 veces más*" (460), mientras dice esto utiliza la misma estrategia que en la bina 3 (explica mediante lenguaje corporal) y busca confirmación de comprensión por parte del alumno, cuando se cerciora que la bina 1 ha comprendido, les pregunta *"¿cómo quedaría la expresión algebraica?*" (460).

[E, 2, 12]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado, en este caso, por falta de sentido.

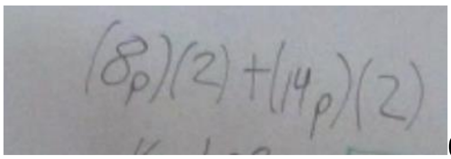
Evidencia: M1 se acerca a verificar el trabajo de la bina 2, y les menciona que se tiene un error, para hacerlo notar les vuelve a repetir la indicación "*el ancho mide 5 veces más*" (412), señalando el ancho del rectángulo expresa "*cinco veces más que esto*"(413), al notar la no comprensión de la alumna, M1 se remite a un ejercicio anterior y explica, "*si aquí mide 2, ¿el ancho mide?*"(414), ahora toma dos plumas, "*mira, si aquí mide dos*" (415), empalma plumas para ejemplificar a que se refiere, ahora la alumna asiente mostrando que comprende (416).

[E, 2, 13]: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque por un despiste no plasma algún signo/símbolo, en este caso el factor literal de un término algebraico.

Evidencia: M1 al ver que un alumno omite la parte literal menciona "*acuérdense que cuando estén utilizando expresiones algebraicas nunca se les debe olvidar la literal*" (552-553).

[E, 2, 14]: Conocer los errores que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema.

Evidencia: Un alumno de la bina 3 le menciona a la profesora que ellos han hecho el ejercicio de manera diferente, por lo que M1 lo invita a pasar al pintarrón, cuando el alumno escribe



(580)

M1 le dice, "*Ah ok ¿ustedes pusieron 14 en vez de 48? (580*) a lo que el alumno contesta con un "*si*" (581).

[E, 2, 15]: Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque por un despiste no plasma algún signo/símbolo, en este caso la parte literal de un término algebraico.

Evidencia: Cuando un alumno pasa a compartir el resultado de la obtención de un perímetro pone como resultado 44, M1 le pregunta "*44 ¿qué?".* el alumno corrige, mientras la profesora advierte que en un sumando también falta especificar el factor literal *"¿aquí también tiene p o es sin p?"* (582).

Evento de término: Antes de pasar a la siguiente actividad M1 menciona a los alumnos que pueden surgir varias expresiones para un mismo ejercicio.

Tabla 6: Análisis de la Ejecución.

Anexo III: Análisis propuesta de mejora.

❖ **[M, 1] Conocer las reglas para la sintaxis del lenguaje algebraico. (21-102).**

Objetivo general: Conocer las reglas para la sintaxis del lenguaje algebraico.

[A] Se planifica como parte de la propuesta de mejora, llenar una tabla donde el alumno identifique el coeficiente, la parte literal y exponente de ciertas expresiones algebraicas indicadas.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[M, 1, 1]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético.

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que "*el alumno conozca la sintaxis del lenguaje algebraico*" (39-40) a partir de la identificación de las partes de una expresión algebraica (coeficiente, literal, exponente) (46-47).

Expresión	Coeficiente	Exponente	Literal
$6m^3$			
$-4bx$		1	
xy			xy
x^2	1		
$-7a^2$			

(48-53)

Para después profundizar en algunas reglas de sintaxis (54-55), como:

56 Que, si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1), lo mismo sucede

57 cuando el exponente no está indicado.

58 Que existen coeficientes negativos.

59 Que una expresión algebraica puede tener una o más literales.

Asimismo, las profesoras expresan que "*es importante a través de las tablas anteriores se vaya* *familiarizando con algunas reglas del lenguaje algebraico*" (70-71).

[M, 1, 2]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético en este caso, porque no identifica la unidad como coeficiente en un término algebraico cuando éste no está indicado.

Evidencia: En la mejora se planifica que después de que los alumnos llenen la tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios x y xy , entre otros (46-53), el profesor enfatizará en "*que, si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1)*" (56).

[M, 1, 3]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético, en este caso, porque no distingue el exponente de una literal cuando éste no está indicado.

Evidencia: En la mejora se planifica que después de que los alumnos llenen la tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios $-4bx$ y xy , entre otros (46-53), el profesor mencionará que, "*si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1)*" menciona que "*lo mismo sucede cuando el exponente no está indicado*" (56-57).

[M, 1, 4]: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno pude presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que están vinculados a la falta de conocimiento, en este caso porque ignora la existencia de coeficientes negativos.

Evidencia: En la mejora se planifica que después de que los alumnos llenen la tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios $-4bx$ y $-7a^2$, entre otros (46-53), el profesor mencionará que "*existen coeficientes negativos*" (58).

[M, 1, 5]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para utilizar el lenguaje algebraico porque no lo visualiza como una forma de comunicación, en este caso, específicamente las partes de una expresión algebraica.

Evidencia: Las profesoras expresan que "*cuando el alumno resuelva las tablas planteadas por el maestro, se pretende que se familiarice con las partes de una expresión algebraica, para que posteriormente las utilice sin dificultad, como una forma de comunicación*" (100-102).

- **[M, 2] Observar que las expresiones algebraicas conservan un valor numérico (149-199).**

Objetivo general: Observar que las expresiones algebraicas conservan un valor numérico (166-167).

[A] En la propuesta de mejora se planifica que el profesor solicite al alumno calcular perímetros de ciertos rectángulos y cuadrados (material didáctico), cuya medida de los lados será especificada por los alumnos. Después la profesora les pedirá llenen una tabla, donde calcularan los perímetros de figuras geométricas (cuadrados y rectángulos), cuyos lados están representados en primer momento por números naturales y en segundo por expresiones algebraicas. Así mismo, pretenden cambiar la forma para que no solo sean figuras prototipo.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[M, 2, 6]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>para asimilar que una literal se puede sustituir con un número.</u>

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que el alumno transite del lenguaje aritmético al algebraico a partir de identificar en figuras geométricas el ancho, el largo y el perímetro, los cuales en un inicio estarán representados por números naturales y en un segundo por expresiones algebraicas. Mencionan que con esta tabla agregada a la actividad, "*es posible que el alumno perciba la relación que existe entre cantidades por medio de un valor numérico de la expresión algebraica; es decir, al completar la tabla*" (142-143) pretenden que el alumno perciba "*como se relacionan las cantidades y podrá asimilar que una literal se puede sustituir por un número*" (144-145), esto después de haber contemplado "*que una expresión algebraica se utiliza como un símbolo… que permite un razonamiento"* (139-141).

❖ **[M, 3] Reflexionar para llegar al algoritmo de la adición de expresiones algebraicas (200-236).**

Objetivo general: Reflexionar y argumentar sobre el procedimiento de adición de expresiones algebraicas para tratar de llegar al algoritmo **(204-205)**

[A] Se planifica que el profesor lleve al alumno a reflexionar y argumentar como se lleva a cabo la adición de expresiones algebraicas para de ahí inducir el algoritmo.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[M, 3, 7]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque procede de forma mecánica/procedimental, en este caso sin haber una reflexión y argumento del porqué ese procedimiento (algoritmo de adición de expresiones algebraicas) le significa la mejor manera de realizarlo.

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad en la que, refiriéndose al alumno expresan "*sería conveniente que reflexionaran y pudieran argumentar como lo hacen para tratar de llegar a un algoritmo o procedimiento que les signifique la mejor manera de realizarlo*" (204-206), pretenden " *que los alumnos concluyan que para realizar la suma de expresiones algebraicas se tienen que agrupar los términos semejantes y realizar la operación con sus coeficientes conservando la parte literal*" (208-210).

[M, 3, 8]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para identificar términos semejantes porque no están familiarizados con sus características.

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que "*los alumnos concluyan que para realizar la suma de expresiones algebraicas se tienen que agrupar los términos semejantes y realizar la operación con sus coeficientes*" (208-209). Mencionan que "*para ello es preciso que los alumnos se familiaricen con las características de los términos semejantes y tengan la capacidad para identificarlos*" (211-212).

[M, 3, 9]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque se concentra en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje.

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora reducen el número de problemas en los cuales se busca que los alumnos se concentren en obtener el perímetro de las figuras geométricas, sin embargo, llaman a tomar en cuenta que "*esa no es la verdadera intención de la actividad sino sumar expresiones algebraicas*" (215-216).

❖ **[M, 4] Representar el lenguaje común por medio de una expresión algebraica (237-287).**

Objetivo general: Representar el lenguaje común por medio de una expresión algebraica (237-238).

[A] En la propuesta de mejora se planifica que el profesor pida al alumno llene una tabla donde se pasa de la representación verbal a algebraica de la expresión algebraica.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[M, 4, 10] Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para utilizar el lenguaje algebraico porque no lo visualiza como una forma de comunicación. **Evidencia:** Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora en esta actividad, consideran que "*el objetivo principal de esta actividad que el alumno pueda desarrollar su competencia lingüística para que perciba a los signos, símbolos o íconos… como parte del lenguaje algebraico y como una forma de comunicarse*" (230-232), "*es importante que el docente retome oraciones en las que el alumno pueda representar una situación dada en lenguaje común a la representación por medio de una expresión algebraica, con ello percibirá que el lenguaje algebraico puede ser una manera de comunicarse*" (237-239). Para ello proponen que los alumnos representen en una expresión algebraica oraciones como "*la mitad de un número*" (243) o "*la suma de dos números*" (244).

Tabla 7: Análisis de la Propuesta de Mejora.

Anexos IV: Análisis respuestas de M1 en cuestionario.

CONOCIMIENTO SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM).

[C, M1, 1]: "*Considero la importancia de explorar los conocimientos previos en los estudiantes porque con base en ello se diseñarán situaciones didácticas con actividades adecuadas que permitan la explotación de esos conocimientos previos, es decir enfrentar al alumno a sus ideas para reflexionar sobre ellas y descubrir nuevos conocimientos; de la misma manera por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…*" (69-75).

[C, M1, 2]: "*Considero que los errores antes mencionados pueden provenir de un origen diferente como:*

- *Es un momento difícil el paso de aritmética al algebra, … hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética" (108-113).*

En otro fragmento del cuestionario menciona: *"cometer errores que si estos se repiten con cierta regularidad pueden convertiste en obstáculos*" (196-197).

[C, M1, 3]: "*En cuanto a la adición de expresiones algebraicas puedo mencionar tres errores más comunes a los que me he enfrentado.*

- *Falta de significado…*" (83-85)

[C, M1, 4]: "*El conocimiento que el profesor posee le permitirá entender un poco sobre la manera de pensar del estudiante, asimismo detenerse a pensar en las posibles complicaciones que el estudiante tendrá al estar involucrado con algún contenido…*" (12-15).

[C, M1, 5]: "*Otro posible origen de los errores que se presentan con relación a este tópico pudiera ser el valor afectivo, es decir las creencias que el alumno posee y que son difíciles de cambiar…"* (120-122)

[C, M1, 6]: "*hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética*" (111-113).

[C, M1, 7]: "*es difícil para él entender que existen expresiones negativas*" (117-118)

[C, M1, 8]: "*el estudiante al encontrarse con un signo igual ellos la mayoría de las ocasiones tienden a cerrarlo en un valor numérico que obtienen de la expresión algebraica que está antes o después del signo igual*" (93-96)

Mencionan además que "*… es difícil para él entender ... y que no necesariamente cuando exista un signo igual tendrá un valor numérico*" (117-119)

"*… es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales…o se le asigna un valor a la variable*" (170-172)

[C, M1, 9]: "*Los errores del álgebra ocasionados por las características del lenguaje. Uno de ellos es la concatenación en expresiones aritméticas es de suma, mientras que en el álgebra se pueden dar concatenaciones de multiplicación y suma. Por ejemplo, 3x tiene una concatenación de multiplicación, muy frecuentemente los alumnos no llegan a entender la diferencia*." (97-101)

[C, M1, 10]: "*Otro error es en el registro algebraico es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales se emplean mal los datos, se omiten signos… "* (170-171).

[C, M1, 11]: "*…el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee; ya que los conocimientos previos pueden estar apegados a sus creencias, mismas que pudieran estar equivocadas*" (74-77)

[C, M1, 12]: "*es cuando los alumnos utilizan conceptos, contenidos o procedimientos equivocados en el desarrollo de un tema. Pienso que la confusión está relacionada con las creencias del estudiante que lo llevan a utilizar conceptos equivocados*" (192-195).

"*…me doy cuenta si un alumno está confundido cuando no logra comprender el tema*" (201-202).

"*Para erradicar la confusión en un estudiante es necesario que el alumno comprenda…*" (204-205).

"*…esto le genera una dificultad, una confusión en su pensamiento*" (52-53).

[C, M1, 13]: "*para evitar que el alumno no proceda de manera mecánica, él debe razonar, reflexionar y construir su propio conocimiento*" (130-132).

"*Para lograrlo como docente debo evitar el actuar de manera tradicionalista, es decir que el maestro provea una clase completamente expositiva donde el alumno sólo sea un receptor de conocimientos hará que el alumno mecanice lo que está viendo y escuchando*" (133-136).

[C, M1, 14]: "*el alumno no se encuentra suficientemente familiarizado con el lenguaje algebraico*

y esto hace que no lo utilice de manera adecuada es decir no comprende que las literales pueden tomar valores diferentes" (115-117). **[C, M1, 15]:** "*los estudiantes pueden cambiar el sentido de la actividad ya que como se utilizan figuras geométricas y su área, en este caso en específico, se hace uso de rectángulos y cuadrados, puede suceder que los alumnos se inclinen por pensar que el objetivo de la clase es la geometría; entonces el fin de la actividad ya no se cumple y se trunca la secuencia didáctica empleada*" (165-169). **[C, M1, 16]:** "*… es difícil para él entender … y que no necesariamente cuando exista un signo igual tendrá un valor numérico*" (117-119) **[C, M1, 17]:** "*… es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales…o se le asigna un valor a la variable*" (170-172)

Tabla 8: Análisis del cuestionario aplicado a M1.

Anexos V: Análisis respuestas de M2 en cuestionario.

CONOCIMIENTO DE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS (KFLM)
[C, M2, 1]: el alumno presenta errores debido **a** "*a la dificultad propia del contenido*". (29) **[C, M2, 2]:** un posible error en la adición de expresiones algebraicas es "*querer cerrar las operaciones a un número en particular"* (24-25).

Tabla 9: Análisis del cuestionario aplicado a M2.

Anexos VI: Caracterización del conocimiento de las profesoras de matemáticas puesto en acción en los distintos escenarios.

KFLM 1.1: Conocer el origen de los errores que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas (en un obstáculo, la ausencia de significado). [P, 1, 6]: (183). [P, 1, 7]: (184).

[P, 1, 6]: Conocer que los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>pueden tener su origen en un obstáculo</u>.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en un obstáculo*" (183).

[C, M1, 2]: "*Considero que los errores antes mencionados pueden provenir de un origen diferente como:*

- *Es un momento difícil el paso de aritmética al algebra, … hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética" (108-113).*

[P, 1, 7]: Conocer que los errores que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>pueden tener su origen en una ausencia de significado</u>.

Evidencia: Las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184).

[C, M1, 3]: "*En cuanto a la adición de expresiones algebraicas puedo mencionar tres errores más comunes a los que me he enfrentado.*

- *Falta de significado…*" (83-85)

KFLM 2.1: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado (relacionada con la complejidad misma del objeto matemático, con los procesos del pensamiento, con las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra). [P, 1, 8]: (184-186). [P, 1, 9]: (184-187). [P, 1, 10]: (184-187).

[P, 1, 8]: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, <u>en este caso relacionadas con la complejidad misma del objeto matemático</u>.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan procedencias distintas una de ellas relacionada con las "*dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos*" (185-186).

[C, M2, 1]: el alumno presenta errores debido a "*a la dificultad propia del contenido*" (29).

[P, 1, 9]: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, en este caso relacionadas a los procesos del pensamiento.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan dos procedencias distintas una de ellas relacionada con las "*dificultades asociadas a la complejidad de … y los procesos del pensamiento*" (185-186).

[C, M1, 4]: "*El conocimiento que el profesor posee le permitirá entender un poco sobre la manera de pensar del estudiante, asimismo detenerse a pensar en las posibles complicaciones que el estudiante tendrá al estar involucrado con algún contenido…*" (12-15).

[P, 1, 10]: Conocer que las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en una ausencia de significado, en este caso relacionadas a las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan procedencias distintas una de ellas relacionada con las "*dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra*" (186-187).

[C, M1, 5]: "*Otro posible origen de los errores que se presentan con relación a este tópico pudiera ser el valor afectivo, es decir las creencias que el alumno posee y que son difíciles de cambiar…"* (120-122).

KFLM 2.2: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos (no identificar números reales, no poder trabajar aritméticamente con números reales). [P, 1, 1]: (155-158). [P, 1, 2]: (155-157). [E, 1, 1]: (1-8).

[C, M1, 1]: "*Considero la importancia de explorar los conocimientos previos en los estudiantes porque con base en ello se diseñarán situaciones didácticas con actividades adecuadas que permitan la explotación de esos conocimientos previos, es decir enfrentar al alumno a sus ideas para reflexionar sobre ellas y descubrir nuevos conocimientos; de la misma manera por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…"* (69-75).

[P, 1, 1]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimientos previos, en este caso porque no identifica los números reales.

Evidencia: Citan a Kieran (1997) quien menciona que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales… la finalidad es que puedan presentar el menor número de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157), "*es imprescindible reconocer que los números son las bases para una expresión algebraica*" (158).

<u>Revisión longitudinal:</u> Las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" (444-447).

[P, 1, 2]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas <u>por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos, en este caso porque no puede trabajar de manera aritmética con los números reales.</u>

Evidencia: Citan a Kieran (1997) aludiendo que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157).

<u>Revisión longitudinal:</u> Las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" (444-447).

[E, 1, 1]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos, en este caso en la multiplicación.</u>

Evidencia: M1 solicita a sus alumnos que piensen en un número, les sugiere que sea "*pequeño*" (1), al indicarles que el número que pensaron lo multiplicarán por tres (7), menciona "*por eso dije que pequeño para que no batallen*" (8).

<u>Revisión transversal</u>: En la planificación se menciona que la actividad "adivinanza de números" "*Se establece con el propósito de recordar los conocimientos previos, haciendo alusión a los números enteros y las operaciones aritméticas*" (404-405)

En la planificación, las profesoras mencionan que "*es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar*" (444-447).

[C, M1, 1]: "*por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…"* (73-75).

En la planificación, citan a Kieran (1997) aludiendo que "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*" (155-157).

KFLM 2.3: Conocer las dificultades que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático (desencadenar la necesidad de un pensamiento aritmético y no algebraico, porque no es capaz de plasmar lo que se le dice a manera de juego en una expresión algebraica, para utilizar el lenguaje algebraico, por abordar el tema con modelos geométrico y después evaluar sin su utilización). [P, 1, 5]: (166-168;185-186). [P, 2, 27]: (434-435). [P, 3, 31]: (460-461). [P, 5, 34]: (565-567). [E, 1, 3]: (69-133).

[P, 1, 5]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático, en este caso porque, el sistema de representación elegido puede provocar en el estudiante un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético y no algebraico para la solución.

Evidencia: Las profesoras expresan que, "*los sistemas de representación elegidos pueden provocar en el estudiante un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución*" (166-168).

Revisión longitudinal: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona a "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*" (184), a la que se le asignan dos procedencias distintas una de ellas relacionada con las "dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos del pensamiento" (185-186).

[P, 2, 27]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático, en este caso porque no es capaz de plasmar lo que se le dice en lenguaje común ("a manera de juego") a una expresión algebraica, es decir, la forma de interactuar no es la deseada.

Evidencia: Dentro de la actividad "adivinanza de números", las profesoras identifican que pueden presentarse como dificultad "*que los alumnos no sean capaces de plasmar lo que se les ha dicho en manera de juego a una expresión algebraica, es decir, la forma de interactuar no es la deseada*" (434-435).

[P, 3, 31]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático, en este caso para utilizar el lenguaje algebraico.

Evidencia: Las profesoras diseñan esta actividad "*con la intención de que el estudiante tenga un acercamiento más estructurado con respecto a las expresiones algebraicas y pueda utilizar con mayor facilidad un lenguaje algebraico*" (460-461).

[P, 5, 34]: Conocer las dificultades que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático, en este caso porque al abordar el tema con modelos geométricos y después evaluar ya sin su utilización puede confundir al alumno.

Evidencia: Las maestras expresan que los alumnos "*probablemente tengan alguna confusión por el hecho de trabajar con modelos geométricos y después no tenerlos, pero esperamos que la realización del cuadro mágico genere menos estrés en el estudiante y pueda resolver de manera eficaz cada uno de ellos*" (565-567).

[C, M1, 12]: "*es cuando los alumnos utilizan conceptos, contenidos o procedimientos equivocados en el desarrollo de un tema. Pienso que la confusión está relacionada con las creencias del estudiante que lo llevan a utilizar conceptos equivocados*" (192-195).

"…*me doy cuenta si un alumno está confundido cuando no logra comprender el tema*" (201-202).

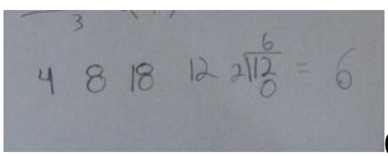
“*Para erradicar la confusión en un estudiante es necesario que el alumno comprenda…*” (204-205).

“*…esto le genera una dificultad, una confusión en su pensamiento*” (52-53).

[E, 1, 3]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con las formas de abordar el objeto matemático, en este caso porque el sistema de representación utilizado puede desencadenar un pensamiento aritmético y no algebraico para la solución.

Evidencia: Después de que M1 les recuerda a los alumnos la forma de representar una expresión algebraica, la profesora les solicita obtener el término algebraico de cada operación aritmética, cuando un alumno empieza a dictarle el resultado concreto, les menciona que el número que pensaron lo representarán con la letra “n” y solicita nuevamente se le dicte el término algebraico, mientras los guía columna por columna (69-76).

Una vez concluido este ejercicio, M1 dicta a los alumnos un nuevo ejercicio, señalándoles que lo que busca es la expresión [mientras señala la del ejercicio anterior] (103). Terminado el ejercicio solicita la participación de los alumnos para escribirla en el pintarrón (106-113). Cuando el alumno participante escribe



(132)

M1 menciona “*pero, ¿cómo te quedaría así?* [señala expresión algebraica del pintarrón]” (133)

KFLM 2.4: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición (ignora las diferencias, suma coeficientes con la parte literal diferente, suman todos los términos sin respetar si son semejantes o no). [P, 1, 15]: (196-198). [P, 1, 19]: (215-216). [P, 3, 32]: (482-483). [P, 4, 33]: (521-523).

[P, 1, 15]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición, en este caso ignora las diferencias.

Evidencia: Las profesoras expresan que una dificultad en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas es la “*conjunción de términos no semejantes: en álgebra los términos difieren por lo* *que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo:* $\mathbf{3+5x=8x}$" (196-198).

[P, 1, 19]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición, en este caso porque realizan la adición de términos, sin considerar algunas características particulares como el signo.</u>

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que los estudiantes "*llegan a realizar una conjunción de términos, sin considerar algunas características particulares como el signo*" (215-216).

Revisión longitudinal: Cuando las profesoras utilizan la palabra conjunción se refieren a la adición como se ve en las líneas siguientes, donde expresan: "*conjunción de términos no semejantes: en álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo:* $3+5x=8x$" (196-198).

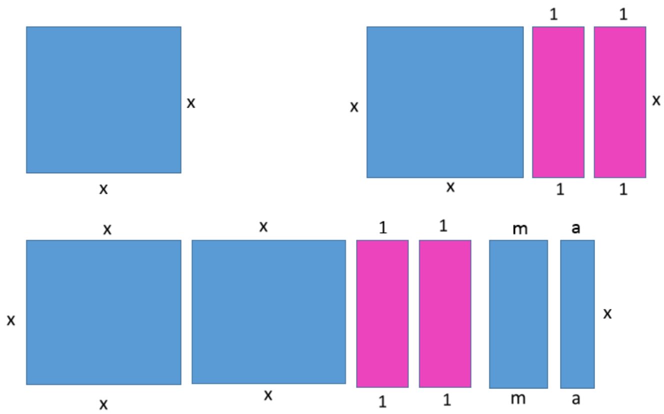
[P, 3, 32]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición, en este caso porque suma coeficientes con la parte literal diferente.</u>

Evidencia: Las profesoras identifican que una dificultad que puede presentarse en esta actividad, es "*querer hacer conjunciones de muchas expresiones algebraicas en donde su parte literal es diferente, lo cual no se puede realizar*" (482-483).

Revisión longitudinal: Cuando las profesoras se refieren a la palabra conjunción hacen alusión a adición como se muestra en las siguientes líneas "*conjunción de términos no semejantes: en álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo:* $3+5x=8x$" (196-198).

[P, 4, 33]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes para proceder con la adición, en este caso porque suman todos los términos sin respetar si son semejantes o no.</u>

Evidencia: Después de que el alumno ha realizado la adicción de términos semejantes, se planifica dictar un problema en el que existen términos no semejantes (387-391).



(387)

Las profesoras expresan "*dentro de la categoría fortalezas y dificultades se visualizó el tratamiento o interacción que pudieran tener al estar realizando las sumas, esto debido a que se puede presentar el error de querer sumar todas las expresiones algebraicas sin respetar la esencia de cada término, queriendo "juntar" cuantos términos tengan en la situación*" (521-523).

KFLM 2.5: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que tienen su origen en las concepciones del alumno sobre las matemáticas (para comprender el concepto de expresión algebraica porque su creencia de que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que solo se utiliza en matemáticas, puede crear una ausencia de significado, en el que el aprendizaje sea solo memorístico, por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar con el lenguaje algebraico; porque le impide hacer una referencia algebraica). [P,1, 24]: (228-231). [P, 2, 28]: (436-437).

[P, 1, 24]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para comprender el concepto de expresión algebraica porque su creencia de que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que solo se utiliza en matemáticas, puede crear una ausencia de significado, en el que el aprendizaje sea solo memorístico, por lo tanto, no desarrollará habilidades que le permitan trabajar con el lenguaje algebraico.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan que el alumno puede "*creer*" (225) que "*el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que sólo se utiliza en matemáticas; esto puede crear en el estudiante una carencia de significado en el que su aprendizaje únicamente sea memorístico, no podrá comprender el concepto de expresión algebraica y por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar en el lenguaje algebraico*."(228-231).

Revisión longitudinal: Puede visualizarse este conocimiento en acción cuando como parte del conocimiento identificado en la categoría de formas de enseñanza de las matemáticas las profesoras mencionan "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*" [P, 235-237].

Presentan la actividad adivinanza de números, "*para que el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede utilizar en sus actividades cotidianas*" (425-426).

[C, M1, 12]: "*…ya que los conocimientos previos pueden estar apegados a sus creencias…*" (75-76).

[P, 2, 28]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>que tienen su origen en las concepciones del alumno sobre las matemáticas, en este caso porque le impide hacer una referencia algebraica.</u>

Evidencia: Las profesoras identifican que puede presentarse como dificultad "*que su concepción de matemáticas le impida hacer una referencia algebraica al juego presentado*" (436-437).

KFLM 2.6: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para comprender el lenguaje algebraico/un aspecto de él por falta de significado (no lo vincula con algún aspecto de su vida cotidiana). [P, 1, 26]: (235-237). [E, 2, 7]: (308-336).

[P, 1, 26]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>para comprender el lenguaje algebraico porque no tiene significado para él, en este caso porque no lo vincula con algún aspecto de su vida cotidiana.</u>

Evidencia: Como parte del conocimiento identificado en la categoría de formas de enseñanza de las matemáticas las profesoras mencionan "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*" (235-237).

Revisión longitudinal: Presentan la actividad "adivinanza de números" para que "*el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede utilizar en sus actividades cotidianas*" (425-426).

[E, 2, 7]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque no comprende la literal de un término algebraico por falta de significado.</u>

Evidencia: M1 dicta un ejercicio en donde el ancho de un rectángulo (tapete) mide 2 plumas (308-309), les pregunta a los alumnos "*¿cómo es eso?*", toma dos plumas y ejemplifica, después dicta un segundo ejercicio donde el ancho mide 8 plumas, para corroborar que el alumno ha entendido dice "*ahora, no va a medir "a" ¿cuánto va a medir?*, muchachos…", cuando un alumno, menciona "*pens*" (331), M1 los incita a decir cómo lo van a representar "*lo vamos a representar con la letra…*" (334), obteniendo como respuesta "*p*" (335) a lo que asiente mencionando ""*p", ¿verdad? para no ponerle pluma completo*" (336).

Revisión transversal: las profesoras mencionan "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*" (235-237).

KFLM 2.7: Conocer las dificultades que son propias del objeto matemático que se pudieran presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas (por ejemplo: <u>no comprender la</u>

configuración de un término algebraico; no identificar los componentes de una expresión algebraica). [P, 1, 4]: (160-161). [P, 3, 29]: (457-458).

[C, M2, 1]: el alumno presenta errores debido a "*a la dificultad propia del contenido*". (29)

[P, 1, 4]: Conocer las dificultades que son propias del objeto matemático que se pudieran presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas, por ejemplo, no comprender la configuración de un término algebraico.

Evidencia: Las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje que *"para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a utilizar el significado de la variable como incógnita, para comprender la configuración de un término algebraico (coeficiente, literal, signo)"* (159-161).

[P, 3, 29]: Conocer las dificultades que son propias del objeto matemático que se pudieran presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas, por ejemplo, no identificar los componentes de una expresión algebraica.

Evidencia: Las profesoras planifican al inicio de la actividad preguntar a los alumnos "*sobre los componentes que ya se ubicaron, esperado que identifiquen en primera instancia el coeficiente y la parte literal*" (457-458) señalando que "*posiblemente pudieran señalar también el exponente*"(458).

KFLM 2.8: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque procede de forma mecánica/procedimental (dar respuestas sin razonar lo que hace, sin haber una reflexión y argumento del porqué del procedimiento). [E, 1, 2]: (58-62). [M, 3, 7]: (204-210).

[E, 1, 2]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque después de ejecutar cálculos puede dar respuestas sin razonar lo que hace.

Evidencia: M1 solicita que los alumnos pasen a llenar una tabla donde se plasman los resultados obtenidos del lenguaje común al aritmético, menciona "*entonces, a todos a todos les dio 10, ¿cierto?*" (58), cuando los alumnos les responden "*si*" (59), les pregunta *"¿siempre será así, pues?"* (60) al obtener nuevamente una respuesta afirmativa ahora les pregunta "*¿de qué depende?*" *(*62).

[C, M1, 13]: "*para evitar que el alumno no proceda de manera mecánica, él debe razonar, reflexionar y construir su propio conocimiento*" (130-132).

"*Para lograrlo como docente debo evitar el actuar de manera tradicionalista, es decir que el maestro provea una clase completamente expositiva donde el alumno sólo sea un receptor de conocimientos hará que el alumno mecanice lo que está viendo y escuchando*" (133-136).

[M, 3, 7]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque procede de forma mecánica/procedimental, en este caso sin haber una reflexión y argumento del porqué ese procedimiento (algoritmo de adición de expresiones algebraicas) le significa la mejor manera de realizarlo.

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad en la que, refiriéndose al alumno expresan "*sería conveniente que reflexionaran y pudieran argumentar como lo hacen para tratar de llegar a un algoritmo o procedimiento que les signifique la mejor manera* *de realizarlo*" (204-206), pretenden "*que los alumnos concluyan que para realizar la suma de expresiones algebraicas se tienen que agrupar los términos semejantes y realizar la operación con sus coeficientes conservando la parte literal*" (208-210).

KFLM 2.9: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas porque no comprende que la literal puede representar cualquier número. [P, 1, 3]: (159-160). [E, 1, 4]: (142-145).

[P, 1, 3]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas <u>porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.</u>

Evidencia: Las profesoras identifican que uno de los conocimientos sobre las formas de aprendizaje que "*para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a utilizar el significado de la variable como incógnita*" (159-160).

Revisión longitudinal: Dentro de la categoría formas de enseñanza aluden a que se puede "*representar a la literal con distintos valores, principalmente representados en valores que cambian con respecto a algo, para que el estudiante establezca a la variable con su significado de número* $x = -3, -2, -1{,}0{,}1{,}2{,}3$)" (238-240).

Declarado lo anterior dentro de la categoría de recursos y materiales, declaran la utilización de material tangible como "*los bloques de Dienes, para el manejo de las variables*" (260). "*Cada pieza se define por cuatro variables: color, forma, tamaño y grosor. A su vez, a cada una de las piezas se le asignan diversos valores…*" (263-264). Del mismo modo, "*se pueden utilizar fichas de colores que representen las distintas variables*" (273) o "*representar el perímetro de una figura con una expresión algebraica*". (274). Argumentos que dan una justificación del porqué se diseñaron la actividad de "Geometría para calcular" (359-374) y "Los tapetes de Rosa" (375-391).

[E, 1, 4]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.</u>

Evidencia: En un primer momento M1 solicita a los alumnos que piensen un número, enseguida empieza a indicar una serie de operaciones aritméticas. En la última indicación M1 les dice:

19	M1	Y luego le van a restar n
20		¿Qué quiere decir n?
21		Es el número que pensaron
22		¿Sí?
23		Le van a restar n
24	A	¡Ohhhh!

Terminado este evento pasan 4 alumnos a llenar una tabla en el pintarrón, misma en la que se visualiza que, independientemente del número que pensaron el resultado siempre es diez. Después M1 guía a los alumnos a obtener la expresión algebraica:

$$\frac{3n+30}{3}-(n)$$ (96)

En un segundo momento bajo un ejercicio similar, cuando una alumna está participando M1 ve que la estudiante escribe en la expresión algebraica el número que pensó al realizar el ejercicio, por lo que le dice "*pero tú pensaste en dos y ¿qué tal que fuera otro número?*" (142) [señalando el error]

$$\frac{(n)(2)+10}{2}-2=$$ (143)

"*¿Cómo lo vas a hacer?*" (143), la alumna responde con un "*ahhh*" y corrige.

$$\frac{(n)(2)+10}{2}-n=$$ (145)

Revisión transversal: En la planificación dentro de la categoría formas de enseñanza aluden a que se puede "*Representar a la literal con distintos valores, principalmente representados en valores que cambian con respecto a algo, para que el estudiante establezca a la variable con su significado de número* $x=-3,-2,-1,0,1,2,3$)" (238-240).

[C, M1, 14]: "*el alumno no se encuentra suficientemente familiarizado con el lenguaje algebraico y esto hace que no lo utilice de manera adecuada es decir no comprende que las literales pueden tomar valores diferentes*" (115-117).

KFLM 2.10: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para coordinar las múltiples formas de representación verbal de una expresión algebraica. [E, 2, 5]: (214-220)

[E, 2, 5]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para coordinar las múltiples formas de representación verbal de una expresión algebraica.

Evidencia: M2 muestra un rectángulo a los alumnos y especifica que para ese "primer ejercicio va a medir "*a*" en su ancho y por el largo "*3a*", por el triple de "*a*", [énfasis] "*"a" y el triple de "a"*". Acto seguido un alumno le pregunta "*¿el lado cuánto?*" (214) por lo que M1 decide realizar el rectángulo en el pintarrón para que el alumno pueda visualizarlo (coordinar las múltiples formas de representación verbal con su representación gráfica y algebraica). M2 rectifica "*el largo del rectángulo va a ser tres veces mayor a su ancho*" (219) y pregunta a los alumnos "*¿cuánto va a medir el an… el largo?*" (220).

KFLM 2.11: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado (no lo asocia a un conocimiento previo; por falta de sentido). [E, 2, 6]: (310-313). [E, 2, 10]: (468-472). [E, 2, 12]: (421-416).

[E, 2, 6]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado, en este caso por falta de sentido.

> Evidencia: M1 comienza a dictar una serie de ejercicios donde una artesana está elaborando un tapete para el que no tiene las medidas, pero, sabe que el ancho mide dos plumas (308-309), en ese momento M1 les pregunta a los alumnos "*¿cómo es eso?*" (310), uno de los alumnos responde "*pens*" (311), a lo que M1 contesta "*sí, pero, esta es una pluma y luego la otra pluma, el alto mide eso*" (312) mostrando a los alumnos a que se refiere el ejercicio (313).

[E, 2, 10]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado, en este caso, por no asociarlo con un conocimiento previo.

> Evidencia: M1 dicta "*Rosa va a ser otro tapete ahora el ancho mide 8 plumas*" (323), "*y el largo mide 6 veces más, ¿cuánto listón necesita para la orilla?*" (326), cuando los alumnos se encuentran resolviendo, se acerca a la bina 4 y les dice "*si yo digo 8 veces más "¿cuánto sería?*" [refiriéndose al problema] (468), al no responder la alumna cambia la interrogante, "*si digo 2 y luego digo 2 veces el dos ¿cuánto es sería?*" (469) cuando la alumna responde "*4*" (470), utiliza la misma estrategia para preguntar "*si digo 3 veces el 2*" (471), a lo que la alumna responde "*seis*" (472), llevándola de esa forma a comprender las indicaciones del problema.

[E, 2, 12]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema porque no comprende a que se refiere el lenguaje algebraico utilizado, en este caso, por falta de sentido.

> Evidencia: M1 se acerca a verificar el trabajo de la bina 2, y les menciona que se tiene un error, para hacerlo notar les vuelve a repetir la indicación "*el ancho mide 5 veces más*" (412), señalando el ancho del rectángulo expresa "*cinco veces más que esto*"(413), al notar la no comprensión de la alumna, M1 se remite a un ejercicio anterior y explica, "*si aquí mide 2, ¿el ancho mide?*"(414), ahora toma dos plumas, "*mira, si aquí mide dos*" (415), empalma plumas para ejemplificar a que se refiere, ahora la alumna asiente mostrando que comprende (416).

KFLM 2.12: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque se concentra en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje. [E, 2, 8]: (362 y 376). [M, 3, 9]: (215-216).

> [C, M1, 15]: "*los estudiantes pueden cambiar el sentido de la actividad ya que como se utilizan figuras geométricas y su área, en este caso en específico, se hace uso de rectángulos y cuadrados, puede suceder que los alumnos se inclinen por pensar que el objetivo de la clase es la geometría; entonces el fin de la actividad ya no se cumple y se trunca la secuencia didáctica empleada*" (165-169).

[E, 2, 8]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque se concentra en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje.

Evidencia: M1 intencionalmente dicta un ejercicio a los alumnos donde el material didáctico no les es suficiente (323-326), cuando los alumnos empiezan a mencionar que no se puede resolver el problema ella aclara "*pero acuérdense que lo que quiero saber es el listón que va a llevar alrededor he*" (362), por su parte M2 recuerda cual es la pregunta y les menciona "*chicos hay que recordar que estamos trabajando con las expresiones algebraicas*" (376).

[M, 3, 9]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>porque se concentra en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje.</u>

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora reducen el número de problemas en los cuales se busca que los alumnos se concentren en obtener el perímetro de las figuras geométricas, sin embargo, llaman a tomar en cuenta que "*esa no es la verdadera intención de la actividad sino sumar expresiones algebraicas*" (215-216).

KFLM 2.13: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas para utilizar el lenguaje algebraico porque no lo visualiza como una forma de comunicación. [M, 1, 5]: (101-102). [M, 4, 10]**:** (230-232; 237-239)

[M, 1, 5]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas <u>para utilizar el lenguaje algebraico porque no lo visualiza como una forma de comunicación, en este caso, específicamente las partes de una expresión algebraica.</u>

Evidencia: Las profesoras expresan que "*cuando el alumno resuelva las tablas planteadas por el maestro, se pretende que se familiarice con las partes de una expresión algebraica, para que posteriormente las utilice sin dificultad, como una forma de comunicación*" (100-102).

[M, 4, 10]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas <u>para utilizar el lenguaje algebraico porque no lo visualiza como una forma de comunicación.</u>

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora en esta actividad, consideran que "*el objetivo principal de esta actividad que el alumno pueda desarrollar su competencia lingüística para que perciba a los signos, símbolos o íconos… como parte del lenguaje algebraico y como una forma de comunicarse*" (230-232), "*es importante que el docente retome oraciones en las que el alumno pueda representar una situación dada en lenguaje común a la representación por medio de una expresión algebraica, con ello percibirá que el lenguaje algebraico puede ser una manera de comunicarse*" (237-239). Para ello proponen que los alumnos representen en una expresión algebraica oraciones como "*la mitad de un número*" (243) o "*la suma de dos números*" (244).

KFLM 2.14: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>para asimilar que una literal se puede sustituir con un número.</u> [M, 2, 6]: (144-145)

[M, 2, 6]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>para asimilar que una literal se puede sustituir con un número</u>.

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que el alumno transite del lenguaje aritmético al algebraico a partir de identificar en figuras geométricas el ancho, el largo y el perímetro, los cuales en un inicio estarán representados por números naturales y en un segundo por expresiones algebraicas. Mencionan que con esta tabla agregada a la actividad, "*es posible que el alumno perciba la relación que existe entre cantidades por medio de un valor numérico de la expresión algebraica; es decir, al completar la tabla*" (142-143) pretenden que el alumno perciba "*como se relacionan las cantidades y podrá asimilar que una literal se puede sustituir por un número*" (144-145), esto después de haber contemplado "*que una expresión algebraica se utiliza como un símbolo… que permite un razonamiento"* (139-141).

KFLM 2.15: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para identificar términos semejantes porque no están familiarizados con sus características. [M, 3, 8]: (211-212).

[M, 3, 8]: Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>para identificar términos semejantes porque no están familiarizados con sus características</u>.

> Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que "*los alumnos concluyan que para realizar la suma de expresiones algebraicas se tienen que agrupar los términos semejantes y realizar la operación con sus coeficientes*" (208-209). Mencionan que "*para ello es preciso que los alumnos se familiaricen con las características de los términos semejantes y tengan la capacidad para identificarlos*" (211-212).

KFLM 2.16: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para comprender el concepto de expresión algebraica porque ante la carencia de significado procede de forma memorística. [P, 1, 25]: (229-231).

[P, 1, 25]: Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>para comprender el concepto de expresión algebraica porque ante la carencia de significado procede de forma memorística</u>.

> Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan que el alumno puede "*una carencia de significado en el que su aprendizaje únicamente sea memorístico, no podrá comprender el concepto de expresión algebraica y por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar en el lenguaje algebraico.*" (229-231).

KFLM 3.1: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas vinculados a las operaciones con signo. [P, 1, 12]: (188).

[P, 1, 12]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>vinculados a las operaciones con signo.</u>

> Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras expresan la existencia de "*errores en aritmética como de operaciones con signo*" (188).

KFLM 3.2: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en un aprendizaje deficiente de conocimientos previos (por ejemplo, las operaciones con signo). [P, 1, 11]: (188).

[P, 1, 11]: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en un aprendizaje deficiente de conocimientos previos (por ejemplo, las operaciones con signo).

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras expresan la existencia de "*errores en aritmética como de operaciones con signo*" (188).

KFLM 3.3: Conocer la forma en que pueden manifestarse los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas que están vinculados a los números negativos (ignorar el signo y consideran los valores como enteros positivos). [P, 1, 14]: (193-195).

[P, 1, 14]: Conocer la forma en que pueden manifestarse los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas que están vinculados a los números negativos, en este caso porque ignoran el signo y consideran los valores como enteros positivos.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Pizón y Gallardo (2000) quienes expresan que "*operar con números negativos representa serias dificultades para los que se inician en el álgebra*" (193-194) complementan a los autores mencionando que los estudiantes, "*ignoran el signo y consideran los valores como enteros positivos*" (195).

[C, M1, 7]: "*es difícil para él entender que existen expresiones negativas*" (117-118)

KFLM 3.4: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética (cuando comienza el estudio del álgebra, cuando interactúa con el lenguaje algebraico sin comprender que los símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse al álgebra). [P, 1, 13]: (189-190). [P, 1, 22]: (221-222).

[P, 1, 13]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética en este caso cuando comienza en el estudio del algebra.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes mencionan que "*los estudiantes, al comenzar con el estudio del álgebra traen consigo nociones de aritmética y los enfoques que usaban en ella*" (189-190).

[C, M1, 6]: "*hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética*" (111-113).

[P, 1, 22]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética en este caso cuando interactúa con el lenguaje algebraico, sin comprender que sus símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse hacia el álgebra.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que una forma de interactuar con el contenido es que "*el alumno interactúa con un lenguaje algebraico, pero sin comprender que sus símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse de la aritmética*" (221-222).

KFLM 3.5: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=" (porque tienen la idea de hacer algo al lado izquierdo y derecho de una igualdad, por la carencia de sentido; por las formas de proceder en aritmética, al encontrar una expresión abierta la considera incompleta, asumiendo que debe de existir un resultado que generalmente es un número; lo cual ocasiona que se produzca el error de carencia de sentido, al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros). [P, 1, 16]: (199-200). [P, 1, 18]: (208-210). [P, 1, 21]: (218-220). [E, 2, 9]: (390-397).

[P, 1, 16]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=", en este caso porque tienen la idea de hacer algo al lado izquierdo y derecho de una igualdad, por la carencia de sentido.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1998) quienes mencionan la "*carencia de sentido en el signo igual; para los estudiantes la idea que tienen sobre el signo igual es la de hacer algo ante los lados izquierdo y derechos de una igualdad*" (199-200).

[C, M1, 8]: "*el estudiante al encontrarse con un signo igual ellos la mayoría de las ocasiones tienden a cerrarlo en un valor numérico que obtienen de la expresión algebraica que está antes o después del signo igual*" (93-96).

[P, 1, 18]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=", en este caso porque, por las formas de proceder en aritmética, al encontrar una expresión abierta la considera incompleta, asumiendo que debe de existir un resultado que generalmente es un número.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes expresan que existen "*errores a la falta de un cierre, cuando los estudiantes se encuentran con expresiones como 5 + b consideran que esta expresión es incompleta, asumen que debe existir un resultado que generalmente es un número*" (208-210).

[C, M2, 2]: un posible error en la adición de expresiones algebraicas es "*querer cerrar las operaciones a un número en particular"* (24-25).

[C, M1, 16]: "… *es difícil para él entender … y que no necesariamente cuando exista un signo igual tendrá un valor numérico*" (117-119).

[P, 1, 21]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque por la concepción aritmética del signo "=", lo cual ocasiona que se produzca el error de carencia de sentido, al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que "*otra forma de interactuar con el contenido es la igualdad aritmética la apliquen en el contexto algebraico, esto puede ocasionar que se produzca el error de la carencia de sentido al signo igual al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros*" (218-220).

[E, 2, 9]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=", en este caso porque no acepta una expresión algebraica como resultado, llevándolo a sustituir un valor en ambos lados de la igualdad.

Evidencia: M1 pregunta a una bina como obtuvieron la respuesta del ejercicio dos (en el cual el material gráfico no es suficiente para dar respuesta), antes de que contesten otro alumno menciona que "*sacaron la calculadora*" (390), ante esto, M1 pregunta a la bina "*pero, ¿cómo saben cuánto mide p?"* (392), "*¿cuánto mide la pluma?*" (393), recordando al grupo "*dijimos lo que queremos son las expresiones que van saliendo*" (397).

[C, M1, 17]: "… *es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales…o se le asigna un valor a la variable*" (170-172).

KFLM 3.6: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas ligados a la concepción de concatenación, porque ha aprendido que en aritmética significa adición, contrario a su significado algebraico de multiplicación. [P, 1, 17]: (206-207).

[P, 1, 17]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas ligados a la concepción de concatenación, porque ha aprendido que en aritmética significa adición, contrario a su significado algebraico de multiplicación.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes expresan que "*en aritmética la concatenación significa adición como 37 significa 30 + 7, sin embargo, en álgebra la concatenación significa multiplicación*" (205-206) "*esto conducirá a que los jóvenes malinterpreten el sentido de los términos algebraicos*" (206-207).

[C, M1, 9]: "*Los errores del álgebra ocasionados por las características del lenguaje. Uno de ellos es la concatenación en expresiones aritméticas es de suma, mientras que en el álgebra se pueden dar concatenaciones de multiplicación y suma. Por ejemplo, 3x tiene una concatenación de multiplicación, muy frecuentemente los alumnos no llegan a entender la diferencia*." (97-101)

KFLM 3.7: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en su creencia de que el lenguaje algebraico es igual al lenguaje aritmético, esto los llevan a realizar las operaciones de la misma manera, y a una consecuente carencia de significado. [P, 1, 23]: (225-227).

[P, 1, 23]: Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en su creencia de que el lenguaje algebraico es igual al lenguaje aritmético, esto los llevan a realizar las operaciones de la misma manera, y a una consecuente carencia de significado.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan el alumno puede tener "*concepciones erróneas como creer que el lenguaje algebraico es igual que el lenguaje aritmético y realizan operaciones de la misma manera; esto conducirá al estudiante a la carencia de significado, puede cometer errores que ya se han mencionado en este documento*" (225-227).

KFLM 3.8: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético (para distinguir el exponente de un término algebraico cuando éste no está indicado, para identificar la unidad como coeficiente en un término algebraico cuando éste no está indicado). [P, 3, 30]: (458-459). [M, 1, 1]: (46-55; 70-71). [M, 1, 2]: (56). [M, 1, 3]: (57)

[P, 3, 30]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético, en este caso porque no distingue el exponente de una literal cuando éste no está indicado.

Evidencia: En primer momento en esta actividad las profesoras esperan que identifiquen la parte literal y el coeficiente y especifican que "*posiblemente pudieran señalar también el exponente*" (458) ya que en ese "*acercamiento será uno*" (459).

[M, 1, 1]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético.

Evidencia: Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que "el alumno conozca la sintaxis del lenguaje algebraico" (39-40) a partir de la identificación de las partes de una expresión algebraica (coeficiente, literal, exponente) (46-47).

Expresión	Coeficiente	Exponente	Literal
$6m^3$			
$-4bx$		1	
xy			xy
x^2	1		
$-7a^2$			

(48-53)

Para después profundizar en algunas reglas de sintaxis (54-55), como:

56 Que, si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1), lo mismo sucede

57 cuando el exponente no está indicado.

58 Que existen coeficientes negativos.

59 Que una expresión algebraica puede tener una o más literales.

Asimismo, las profesoras expresan que "*es importante a través de las tablas anteriores se vaya familiarizando con algunas reglas del lenguaje algebraico*" (70-71).

[M, 1, 2]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético en este caso, porque no identifica la unidad como coeficiente en un término algebraico cuando éste no está indicado.

Evidencia: En la mejora se planifica que después de que los alumnos llenen la tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios x y xy , entre otros (46-53), el profesor enfatizará en "*que, si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1)*" (56).

[M, 1, 3]: Conocer los obstáculos que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético, en este caso, porque no distingue el exponente de una literal cuando éste no está indicado.

Evidencia: En la mejora se planifica que después de que los alumnos llenen la tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios $-4bx$ y xy , entre otros (46-53), el profesor mencionará que, "*si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1)*" menciona que "*lo mismo sucede cuando el exponente no está indicado*" (56-57).

KFLM 3.9: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas relacionados la concepción aritmética de la palabra "más", la cual entiende como suma y cuando se emplea como una suma reiterada no lo asocia con la multiplicación.

[E, 2, 11]: Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adicción de expresiones algebraicas relacionados la concepción aritmética de la palabra "más", la cual entiende como suma y cuando se emplea como una suma reiterada no lo asocia con la multiplicación.

Evidencia: M2 se acerca a verificar el trabajo de un alumno (bina 3) y le pregunta *"¿por qué 14?*" (419) [señalando la base del rectángulo], el alumno menciona "porque es seis veces más" (420), es decir, el alumno entiende "seis veces más" como una suma y no como una suma reiterada. M2 trata de explicar diciendo "e*h, seis veces, este…* [hace remolinos con los dedos], *lo que te mide el ancho*" (425), y reitera "*seis veces lo que mide el ancho*" [haciendo una señal de brinco con los dedos] (426).

Inmediatamente de haber atendido a la bina 3, se acerca a la bina 1, y verifica que los alumnos hacen a misma interpretación, han indicado una suma en vez de una multiplicación, les hace ver el error diciendo "*pones más seis*" (459) "*en vez de poner 6 veces más*" (460), mientras dice esto M2 utiliza la misma estrategia que en la bina 3 (explica mediante lenguaje corporal) y busca confirmación de comprensión por parte del alumno, cuando se cerciora que la bina 1 ha comprendido, les pregunta "*¿cómo quedaría la expresión algebraica?*" (460).

KFLM 4.1: Conocer los errores “ordinarios” que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque en el procedimiento por un despiste no plasma algún signo/símbolo (un paréntesis o la parte literal). [P, 1, 18]: (216-217); [E, 2, 13]: (552-553) y [E, 2, 15]: (582).

[P, 1, 20]: Conocer los errores “ordinarios” que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque al hacer agrupaciones de términos algebraicos olvida algún signo, como un paréntesis.

Evidencia: Como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que “*los estudiantes pueden hacer agrupaciones donde olviden el signo*” (216-217). Para ejemplificar utilizan “$\boldsymbol{(5a+8a-4ab)+3b+7b-4ab}$)” (216-217).

[C, M1, 10]: “*Otro error es en el registro algebraico es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales se emplean mal los datos, se omiten signos…”* (170-171).

[E, 2, 13]: Conocer los errores “ordinarios” que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque en el procedimiento por un despiste no plasma algún signo/símbolo, en este caso el factor literal de un término algebraico.

Evidencia: M1 al ver que un alumno durante el procedimiento de Adición de expresiones algebraicas omite el factor literal menciona “*acuérdense que cuando estén utilizando expresiones algebraicas nunca se les debe olvidar la literal*” (552-553).

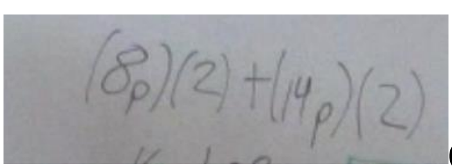
[E, 2, 15]: Conocer los errores “ordinarios” que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque en el procedimiento por un despiste no plasma algún signo/símbolo, en este caso la literal de un término algebraico.

Evidencia: Cuando un alumno pasa a compartir el resultado de la obtención de un perímetro pone como resultado 44, M1 le pregunta “*44 ¿qué?*” (582) el alumno corrige, mientras la profesora advierte que en un sumando también falta especificar el factor literal *“¿aquí también tiene p o es sin p?”* (582)

KFLM 4.2: Conocer los errores “ordinarios” que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema (poner 14 en vez de 48). [E, 2, 14]: (580-581).

[E, 2, 14]: Conocer los errores “ordinarios” que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema.

Evidencia: Un alumno de la bina 3 le menciona a la profesora que ellos han hecho el ejercicio de manera diferente, por lo que M1 lo invita a pasar al pintarrón, cuando el alumno escribe



(580)

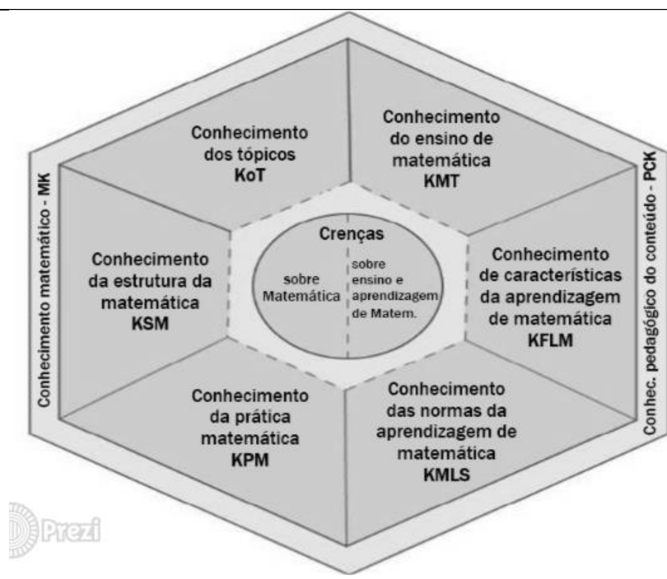
M1 le dice, "*Ah ok ¿ustedes pusieron 14 en vez de 48*? (580) a lo que el alumno contesta con un "*si*" (581).

KFLM 4.3: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno pude presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que están vinculados a la falta de conocimiento (ignora la existencia de coeficientes negativos). [M, 1, 4]: (58).

[M, 1, 4]: Conocer los errores "ordinarios" que el alumno pude presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas <u>que están vinculados a la falta de conocimiento, en este caso porque ignora la existencia de coeficientes negativos.</u>

Evidencia: En la mejora se planifica que después de que los alumnos llenen una tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios $-4bx$ y $-7a^2$, entre otros (46-53), el profesor mencionará que "*existen coeficientes negativos*" (58).

Anexos VII: Planificación.

1	Introducción
2	En el presente trabajo se realiza un *análisis del tópico de expresiones* algebraicas abordado en segundo
3	grado de secundaria, con la finalidad de identificar y organizar los conocimientos especializados que
4	debe poseer el profesor de matemáticas para el desarrollo de su clase específicamente con la suma y resta
5	de monomios y polinomios, tema que se aborda en el primer bloque del libro de matemáticas en las
6	primeras semanas del ciclo escolar.
7	Para ello se tomará como base el MTSK propuesto por Flores-Medrano, Escudero y Aguilar.
8	El Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) es una propuesta teórica que modela el
9	conocimiento núcleo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y a su vez puede ser una
10	herramienta metodológica que permite analizar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través
11	de sus categorías (Flores, Escudero & Aguilar).
12	La siguiente imagen muestra la descripción del modelo y los conocimientos del profesor que son
13	necesarios para el mismo.
14	

15	Comenzaremos por el primer dominio MK dividido en tres subdominios KoT, KMT y KPN.
16	En el primer subdominio KoT
17	Se divide en 5 categorías mismas que describimos a continuación.
18	La categoría Fenomenología
19	El lenguaje común es el que comúnmente utilizamos a través de un denominado código o lenguaje, por
20	lo que a partir de este podemos relacionarnos mutuamente, ya que lo ocupamos en la vida diaria.
21	El lenguaje algebraico consta principalmente de las letras de alfabeto y algunos vocablos griegos.
22	La principal función de lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las
23	diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética (Hernández, 2002).
24	El álgebra es el alargamiento de la aritmética, es decir el calcular con letras (Freudenthal, 1983).
25	El desarrollo del lenguaje algebraico, se produjo mediante la introducción de las variables; las letras se
26	usaron inicialmente para indicar números arbitrarios, pero pronto también funciones arbitraria.
27	Hoy en día, usamos letras para todo tipo de objetos matemáticos como conjuntos, relaciones,
28	proposiciones, espacios, métricas y todo tipo de estructuras.
29	Las expresiones algebraicas simples pueden ser usadas en física para modelar observaciones o resultados
30	experimentales sobre diferentes longitudes, masas y escalas de tiempo.
31	Torres (2011) hace alusión que las expresiones algebraicas tienen un vínculo directo con el mundo de la
32	cantidad y la magnitud como objeto de experiencia matemática, asimismo con las magnitudes
33	geométricas, en este caso, son utilizadas para validar y probar las reglas de resolución de ecuaciones; en
34	específico el modelo de área es usado para representar cuadrados de binomios y ecuaciones cuadráticas.
35	Otro uso de las expresiones algebraicas es la resolución de problemas en lenguaje verbal mediante una
36	transformación al lenguaje algebraico.

37	Otra categoría es el conocimiento de las Propiedades y sus Fundamentos
38	Al hablar de expresiones algebraicas es preciso hablar de igualdad, existen dos tipos de igualdad: la
39	ecuación y la identidad.
40	La identidad cuenta con las siguientes propiedades: reflexiva, simetría, sustitución, transitiva.
41	Teorema de la propiedad aditiva de la igualdad y propiedad multiplicativa de la igualdad.
42	Identidad: Una expresión algebraica está formada por números y letras.
43	Un término tiene cuatro elementos: signo, coeficiente, parte literal y grado (Baldor, 1983).
44	En la siguiente categoría son los registros de representación:
45	Existe la representación gráfica, mediante la utilización de figuras y el uso de gráficas, representación
46	en lenguaje algebraico por medio de su representación en términos.
47	También podemos añadir que otra manera de representación es el lenguaje verbal.
48	En la categoría Definiciones
49	Baldor (1983) se refiere al álgebra como la generalización de cantidades, que se representan por medio
50	de letras, las cuales pueden representar cualquier valor.
51	Una expresión algebraica es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones
52	algebraicas.
53	Silva (2003) reconoce que las variables que intervienen en las expresiones algebraicas pertenecen a los
54	números reales; por esta razón es importante el estudio de las mismas, siempre se hace a base de las
55	propiedades de las igualdades y de los números reales.
56	Es importante conocer estas expresiones puesto que son la base para la comprensión del lenguaje
57	algebraico y el desarrollo de habilidades algebraicas.
58	Una identidad es una proposición de igualdad que es válida para todos los valores permisibles de las
59	letras que aparecen en ella y se denotará por el símbolo =.
60	Una ecuación es una permisión de igualdad valida sólo para algunos valores permisibles de las letras que

61	aparecen en ella.
62	Una expresión algebraica, en una o más variables (letras), es una combinación cualquiera de estas
63	variables y de números, mediante una cantidad finita de operaciones: adición, sustracción,
64	multiplicación, división, potenciación o radicación.
65	Un término es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados
66	por el signo + o -. La suma es una operación que reúne dos o más expresiones algebraicas en una sola
67	expresión algebraica.
68	Es por ello que podemos decir que una ecuación es una expresión algebraica.
69	Cada término consta de un factor numérico llamado coeficiente y un factor literal.
70	Los términos semejantes son los términos que tienen el mismo factor literal sólo se diferencian en su
71	coeficiente.
72	Y la última categoría es la de procedimientos.
73	Los procedimientos del manejo de las expresiones algebraicas dentro de la educación secundaria son:
74	Clasificación de expresiones algebraicas de acuerdo al número de términos (monomios, binomios y
75	polinomios) y al el valor de sus exponentes (segundo grado, tercer grado,…, (n) grado).
76	Reducción de términos semejantes, hacer más pequeña y simple una expresión algebraica,
77	Suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas.
78	Simplificación de expresiones algebraicas.
79	Utilizando propiedades de las operaciones, y agrupando los términos semejantes, una expresión
80	algebraica se puede transformar en una expresión más simple, o simplificar.
81	El subdominio KSM
82	Dentro de este subdominio existen tres diferentes categorías que lo conforman:
83	Las conexiones de complejización:
84	Encontramos conexiones con la resolución de ecuaciones puesto que dos una ecuación está integrada por
85	dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual, en geometría, mediante el modelo de

	área el
86	cual se puede resolver con una ecuación, ya que mediante una expresión algebraica podemos encontrar
87	el perímetro, área y volumen de una figura, funciones, pudiéramos decir que sería la evaluación de una
88	expresión algebraica, ya que toma ciertos valores para obtener un resultado que será representado por un
89	conjunto de puntos, productos notables.
90	Binomios al cuadrado que pueden ser una ecuación que tiene la particularidad de identidad.
91	Las conexiones de simplificación:
92	Se encuentran conexiones con números naturales, formulas pues podemos decir que las fórmulas son el
93	valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene cuando se sustituyen las letras
94	de la expresión por números.
95	De una expresión algebraica, Godino (2003) reporta en su investigación que en los libros de texto usados
96	en primaria se proponen actividades que podemos calificar de algebraicas (uso de símbolos para designar
97	objetos, ecuaciones, fórmulas y patrones).
98	Incluso encontramos elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura
99	algebraica de los conjuntos y operaciones con números.
100	Tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de
101	las operaciones aritméticas y su aplicación en la solución de problemas.
102	Conexiones transversales:
103	Existe la conexión que dentro de aritmética pues consideramos que los números reales son un contenido.
104	transversal utilizado lo largo de todo el contenido de matemáticas, podemos decir que las expresiones
105	numéricas se utilizan dentro de las expresiones algebraicas, dentro de probabilidad, en geometría.
106	Las conexiones auxiliares:

107	Como conexión auxiliar podemos enunciar a las sucesiones numéricas utilizándolas como la manera de
108	generalizar un patrón regular dentro de un conjunto de números.
109	En el subdominio KPM.
110	Dentro de este subdominio se encuentran dos categorías:
111	Las prácticas ligadas a la matemática en general
112	Como docentes debemos comprender los procesos del pensamiento algebraico: la sustitución formal, la
113	generalización y la modelización, son los procesos característicos del lenguaje algebraico que se utilizan
114	también en otras partes de las Matemáticas y en otras ramas del saber (Socas, 2011).
115	La modelización implica, en primer lugar, una fase de formulación que se completa con una de
116	validación, de manera que durante la fase de formulación se examina un fenómeno o situación para
117	establecer alguna relación entre las variables implicadas.
118	Estas relaciones proceden de las observaciones o simplemente de conjeturas hechas sobre la situación
119	bajo estudio.
120	Además, comprende una serie más o menos compleja de transformaciones u operaciones matemáticas
121	que, por último, lleva a un modelo expresado simbólicamente.
122	La fase de validación consiste en comprobar la validez del modelo regresando a la realidad que se supone
123	representa, Janvier (1996).
124	Para Freudenthal (1983), todas las Matemáticas están impregnadas de la sustitución formal.
125	Así, la sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo
126	de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos tales como: generalización,
127	simplificación, eliminación, complicación estructural, particularización; se puede afirmar que para
128	Freudenthal, la modelización y la generalización son partes explicitas de un proceso más general que él

129	describe como sustitución formal.
130	El docente tiene que comprender que el lenguaje algebraico es una forma de traducir a símbolos y
131	números lo que normalmente tomamos como expresiones particulares.
132	De esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir lo que
133	permite simplificar teoremas, formular ecuaciones e inecuaciones y el estudio de cómo resolverlas.
134	Este lenguaje nos ayuda a resolver problemas matemáticos mostrando generalidades.
135	Socas (2011) argumenta que las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden
136	realizar, son instrumentos de modelización matemática de problemas procedentes de la propia
137	matemática (aritméticos, geométricos), o problemas aplicados de toda índole (de la vida cotidiana,
138	financieros, físicos, etc.).
139	Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que
140	se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución.
141	La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las
142	soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas.
143	Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.
144	Las prácticas ligadas a una temática en matemáticas
145	La Aritmética, sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de
146	Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al
147	cuadrado de la hipotenusa.
148	La Aritmética sólo da casos particulares de esta relación, por ejemplo, 3, 4 y 5, ya que 32 + 42 = 52.
149	El Álgebra, por el contrario, puede dar una generalización del tipo: a2 + b2 = c2.
150	En sucesiones al generalizar su patrón de comportamiento y designar su regla.
151	El dominio correspondiente al PCK
152	El primer subdominio correspondiente al Conocimiento de las características del aprendizaje

	(KFLM).
153	Se compone de las siguientes categorías:
154	La categoría Formas de Aprendizaje:
155	Los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo
156	trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan
157	presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra Kieran (1997), de manera que
158	se pueda es imprescindible reconocer que los números son las bases para una expresión algebraica.
159	Para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a
160	utilizar el significado de la variable como incógnita, para comprender la configuración de un término
161	algebraico (coeficiente, literal, signo).
162	Palarea (1998) expresa que no existen elementos suficientes para clasificar un problema verbal en
163	aritmético o algebraico.
164	El proceso de traslación puede realizarse mediante varios sistemas de representación que siendo
165	cualitativamente distintos conducen a expresiones equivalentes.
166	Los sistemas de representación elegidos pueden provocar en el estudiante un tipo de imagen mental que
167	desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución.
168	Consideramos que la teoría de representaciones semióticas propuesta por Duval es una manera
169	interesante por medio de la cual el alumno podrá hacer significativo el concepto de expresión algebraica.
170	La categoría Fortalezas y Dificultades asociadas al Aprendizaje
171	Como fortalezas podemos mencionar las características de razonamiento algebraico sencillas y fáciles
172	de adquirir por los estudiantes que Godino (2003) identifica
173	Patrones o regularidades que aparecen de manera natural y pueden ser reconocidos, ampliados o

174	generalizados, podemos encontrarlos en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
175	Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
176	Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.
177	Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de
178	manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto.
179	Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.
180	Conocer que el lenguaje puede ser adaptado a lenguaje común
181	Dificultades:
182	Socas (2011) expresa que los errores que los alumnos pueden tener son:
183	Los errores que tienen su origen en un obstáculo.
184	Los errores que tienen su origen en una ausencia de significado; a esta última, se le asigna dos
185	procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos
186	matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades
187	asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra.
188	Errores en aritmética como de operaciones con signo, como menciona Kieran y Filloy (1989)
189	los estudiantes, al comenzar con el estudio del álgebra traen consigo nociones de aritmética y los
190	enfoques que usaban en ella.
191	Pizón y Gallardo (2000) puntualizan otra dificultad común en los alumnos es las transformaciones entre
192	números positivos y negativos en expresiones algebraicas.
193	Operar con números negativos representa serias dificultades para los que se inician en el álgebra y es
194	esencial para resolver ecuaciones.
195	Los alumnos ignoran el signo y consideran los valores como enteros positivos.
196	Conjunción de términos no semejantes:
197	En álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distinto y es común que el estudiante ignore

198	las diferencias, por ejemplo: 3 + 5x= 8x.
199	Carencia de sentido en el signo igual; para los estudiantes la idea que tienen sobre el signo igual es la de
200	hacer algo ante los lados izquierdo y derechos de una igualdad o de una ecuación, esto funciona para
201	ecuaciones como 2x + 3 = 7; sin embargo, no funciona para ecuaciones como 2x + 3 = x + 4; esto ocasiona
202	que los estudiantes vulneren las propiedades simétrica y transitiva de una igualdad (Kieran y Filloy,
203	1989).
204	Errores al manipular fórmulas
205	En aritmética la concatenación significa adición como 37 significa 30 + 7, sin embargo, en álgebra la
206	concatenación significa multiplicación; esto conducirá a que los jóvenes malinterpreten el sentido de los
207	términos algebraicos (Kieran y Filloy, 1989).
208	Errores a la falta de un cierre, cuando los estudiantes se encuentran con expresiones como 5 + b
209	consideran que esta expresión es incompleta, asumen que debe existir un resultado que generalmente es
210	un número (Kieran y Filloy, 1989).
211	Puede existir una resistencia por parte de los alumnos para abordar los contenidos de algebra
212	La categoría de conocimiento sobre las Formas de Interacción de los Alumnos con el Contenido
213	Matemático:
214	Consideramos a la estrategia de memorización recitando, “signos iguales se suman, signos diferentes se
215	restan y se deja el signo de la mayor cantidad”, también llegan a realizar una conjunción de términos, sin
216	considerar algunas características particulares como el signo $(5a + 3b - 8a + 7b - 4ab)$, los
217	estudiantes pueden hacer agrupaciones donde olviden el signo $(5a + 8a - 4ab) + 3b + 7b - 4ab)$.
218	Otra forma de interactuar con el contenido es la igualdad aritmética la apliquen en el contexto algebraico,
219	esto puede ocasionar que se produzca el error de la carencia de sentido al signo igual al

	abordar las
220	igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros.
221	El alumno interactúa con un lenguaje algebraico, pero si no comprender que sus símbolos adquieren un
222	distinto significado al trasladarse de la aritmética hacia el álgebra produciría distintos errores como el de
223	concatenación antes mencionado en este documento.
224	La categoría del conocimiento de Concepciones de los Estudiantes sobre Matemáticas:
225	Puede haber concepciones erróneas como creer que el lenguaje algebraico es igual que el lenguaje
226	aritmético y realizan operaciones de la misma manera; esto conducirá al estudiante a la carencia de
227	significado, puede cometer errores que ya se han mencionado en este documento.
228	Que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que sólo se utiliza en matemáticas; esto
229	puede crear en el estudiante una carencia de significado en el que su aprendizaje únicamente sea
230	memorístico, no podrá comprender el concepto de expresión algebraica y por lo tanto no desarrollará
231	habilidades que le permitan trabajar en el lenguaje algebraico.
232	El siguiente subdominio es el KMT
233	Incluye dos categorías:
234	La categoría Formas de Enseñanza:
235	Utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como
236	parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v
237	(vacas) y 14c (caballos)).
238	Representar a la literal con distintos valores, principalmente representados en valores que cambian con
239	respecto a algo, para que el estudiante establezca a la variable con su significado de número
240	$(x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$.
241	Otra forma de enseñanza sería la utilización de fórmulas utilizando la representación por medio de figuras

242	geométricas, ya que las expresiones algebraicas una de sus utilidades puede ser obtener el área, perímetro
243	o volumen de cualquier figura o cuerpo geométrico
244	El uso de sucesiones es otra forma de enseñanza que consideramos para este tópico pues permite ver de
245	una manera sencilla el patrón de una sucesión mismo que es equivalente con una expresión algebraica.
246	La representación verbal es otra forma de asimilar las expresiones algebraicas por parte de los
247	estudiantes, es por ello que Palarea (1999) propone a las representaciones semióticas como una
248	alternativa para pasar de una representación a otra.
249	La categoría de Recursos y Materiales:
250	Programas interactivos, para despertar su motivación y que identifiquen otra manera diferente de
251	interactuar con las expresiones algebraicas.
252	Los juegos didácticos pueden modificar los sentimientos contrarios que tienen los alumnos hacia las
253	matemáticas, provocando una actitud positiva y haciendo el trabajo mucho más motivador, estimulante
254	e incluso agradable.
255	Permiten aclarar conceptos o mejorar destrezas de álgebra que, de otra forma, los alumnos encontrarían
256	aburridas y repetitivas.
257	Ayudan al alumno a desarrollar su mente para la resolución de problemas, matemáticos y no
258	matemáticos, mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y manifestar una actitud positiva ante la
259	resolución de problemas, muestran confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito.
260	Utilizar material tangible como los bloques de Dienes, para el manejo de las variables.
261	Material ideado por Z. P. Dienes, constan de 48 piezas sólidas, generalmente de madera o plástico, y de
262	fácil manipulación.
263	Cada pieza se define por cuatro variables: color, forma, tamaño y grosor. A su vez, a cada una de las

264	piezas se le asignan diversos valores:
265	El color: rojo, azul y amarillo.
266	La forma: cuadrado, círculo, triángulo y rectángulo.
267	Tamaño: grande y pequeño.
268	Grosor: grueso y delgado.
269	Cada bloque se diferencia de los demás al menos en una de las características, en dos, en tres o en las
270	cuatro.
271	La utilización de este recurso permitirá involucrar al alumno en situaciones que les lleven a adquirir
272	determinados conceptos matemáticos y contribuir así al desarrollo de su pensamiento lógico.
273	Se pueden utilizar fichas de colores que representen las distintas variables.
274	Representar el perímetro de una figura con una expresión algebraica.
275	Utilizar las actividades de su libro de texto.
276	Ultimo subdominio de este modelo es el KMLS
277	Se divide en tres categorías.
278	La primera se refiere al conocimiento que el profesor tiene acerca de qué Contenidos Matemáticos se
279	requieren Enseñar
280	De acuerdo a los planes y programas (2011) de matemáticas que se utilizan para la educación secundaria
281	en segundo se espera que los estudiantes desarrollen las siguientes competencias:
282	Resuelvan problemas de manera autónoma,
283	Sean capaces de comunicar información matemática,
284	Validen sus procedimientos y resultados
285	Manejen técnicas eficientemente
286	Dentro del bloque dos se espera que los alumnos resuelvan problemas aditivos con monomios y
287	polinomios, asimismo, resuelvan problemas en los que sea necesario calcular cualquier variable de las
288	fórmulas para obtener el volumen de los cubos, prismas y pirámides rectos, estableciendo relaciones de
289	variación entre dichos términos; para que esto sea posible es necesario que el alumno resuelva

	problemas
290	que impliquen adición y sustracción de expresiones algebraicas, resuelva problemas que impliquen la
291	adición y sustracción de polinomios, identifique y busque expresiones algebraicas equivalentes a partir
292	del empleo de modelos geométricos.
293	En la segunda categoría se considera el Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y
294	Procedimental esperado para un tópico en un determinado momento escolar.
295	Dentro del plan de estudios de segundo grado se establece que en el bloque dos los alumnos deberán
296	saber cómo resolver problemas de adición y sustracción de expresiones algebraicas, para ello identificara
297	los términos y su clasificación, realizarán la sustitución de valores en una igualdad y manipularán
298	sucesiones geométricas y numéricas.
299	El objetivo es que se utilicen las expresiones algebraicas en contextos diferentes, como problemas que
300	sean contextualizados, por ejemplo el problema de la granja Juan (visto anteriormente).
301	La tercera categoría se refiere a la secuenciación de diversos temas
302	Los estudiantes en primer grado de secundaria abordaron, la resolución de problemas aditivos con
303	números fraccionarios y decimales, también utilizaron procedimientos informales y algoritmos de
304	adición y sustracción de números con signo.
305	Utilizaron otros conceptos como el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, asimismo
306	resolvieron problemas geométricos que implican el uso de propiedades de las alturas, medianas,
307	mediatrices y bisectrices en triángulos y cuadriláteros por medio de expresiones numéricas.
308	En segundo grado deberán resolver problemas de adición y sustracción de expresiones algebraicas,
309	utilizar la jerarquía de operaciones, para posteriormente resolver problemas que impliquen el
310	planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado.
311	Mientras que en tercer grado ejecutaran simplificaciones y cálculos de expresiones

	algebraicas y
312	utilizaran ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas utilizando la factorización, el
313	objetivo es que resuelvan problemas que impliquen el teorema de Pitágoras.
314	Este modelo permite la organización de los conocimientos del profesor para que pueda realizar de manera
315	efectiva su tarea.
316	El reflexionar sobre la práctica docente, permitirá darse cuenta que no solo es necesario saber
317	matemáticas si no conocer la manera en que será enseñada a los estudiantes para permitirle modificar la
318	manera en que se enseña y a su vez darse cuenta que siempre existe algo nuevo para aprender.
319	Es necesario realizar un análisis profundo de nuestra práctica para ir perfeccionando la manera de
320	enseñar.
321	Nos damos cuenta de que la enseñanza de un tópico debe considerar aspectos relevantes que la mayoría
322	de las veces no tomamos en cuenta, la planeación como tal nos permitirá registrar y darnos cuenta de la
323	necesidades para la enseñanza de contenidos
324	Es evidente que el camino no es fácil se requiere de la profesionalización docente y de una continua
325	reflexión por parte del docente que le permita evaluar su desempeño, en el que se resalte sus fortalezas
326	y debilidades, para utilizarlas en beneficio de su aprendizaje.
327	El modelo MTSK permite darnos cuenta de que el diseño de una clase no es tan sencillo se debe
328	considerar el tema, las características de los alumnos así como el currículo, para que en conjunto puedan
329	reflejar un aprendizaje en el estudiante y el profesor de matemáticas.
330	DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES
331	Actividad 1 “Presentación”, se les dará a los estudiantes un dulce y al tomarlo ellos dirán su nombre.
332	Actividad 2 “Adivinanza de números”, se iniciará a trabajar con las expresiones algebraicas, mediante

<table>
<tr><td>333</td><td>la representación verbal, pidiéndoles que escriban lo que se les irá diciendo, lo cual son una serie de</td></tr>
<tr><td>334</td><td>operaciones que llevaran a que el resultado sea siempre 10 en un primer ejercicio y 2 en otro de los</td></tr>
<tr><td>335</td><td>ejercicios.</td></tr>
<tr><td>336</td><td>Las instrucciones son las siguientes:</td></tr>
<tr><td>337</td><td>1. Piensa un número</td></tr>
<tr><td>338</td><td>2. Multiplícalo por 3</td></tr>
<tr><td>339</td><td>3. Súmale 30</td></tr>
<tr><td>340</td><td>4. Divídelo entre 3</td></tr>
<tr><td>341</td><td>5. Réstale el número original</td></tr>
<tr><td>342</td><td>Para posteriormente pedirles que llenen la siguiente tabla, que se les presentará en una lámina.</td></tr>
<tr><td>343</td><td>Para su llenado se les pedirá a 4 alumnos que pasen a escribir sus números. Al final de llenar la tabla con</td></tr>
<tr><td>344</td><td>números y operación aritmética se les pedirá que escriban lo que hicieron con un número n, para poder</td></tr>
<tr><td>345</td><td>llegar a la fórmula $\frac{3n+30}{3} - n$</td></tr>
<tr><td>346</td><td>
<table>
<tr><td>Escoge un Número</td><td>Multiplícalo por 3</td><td>Súmale 10</td><td>Resta 6</td><td>Divídelo entre 2</td><td>Resta el no. original</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>347</td><td>Después de llenar la tabla se les dirán unas nuevas instrucciones, para realizar lo mismo que la actividad</td></tr>
<tr><td>348</td><td>anterior.</td></tr>
<tr><td>349</td><td>1. Piensa un número</td></tr>
<tr><td>350</td><td>2. Multiplícalo por 2</td></tr>
<tr><td>351</td><td>3. Súmale 10</td></tr>
<tr><td>352</td><td>4. Réstale 6</td></tr>
<tr><td>353</td><td>5. Divídelo entre 2</td></tr>
<tr><td>354</td><td>6. Réstale el número original</td></tr>
<tr><td>355</td><td>Llegando a la fórmula $\frac{2n+4}{2} - n$</td></tr>
<tr><td>356</td><td>Después de haber institucionalizado la fórmula se les preguntará ¿cuáles son los elementos de un</td></tr>
<tr><td>357</td><td>término?: Coeficiente, Literal, Término, Exponente: $3p^2$ esto para especificar las partes en una expresión</td></tr>
</table>

algebraica.

Actividad 3 “Rectángulos y cuadrados”

Para esta actividad se les pedirá que se organicen en binas, solamente girando hacia la izquierda y derecha (respectivamente), evitando mucho movimiento en el salón.

A cada bina se les entregará 7 rectángulos de color rosa y 8 cuadrados azules, estas figuras representarán números positivos.

Se les darán las siguientes instrucciones: estas figuras miden de ancho a y de largo 3 veces el valor del ancho 3a, y con ellas vamos a armar las siguientes figuras:

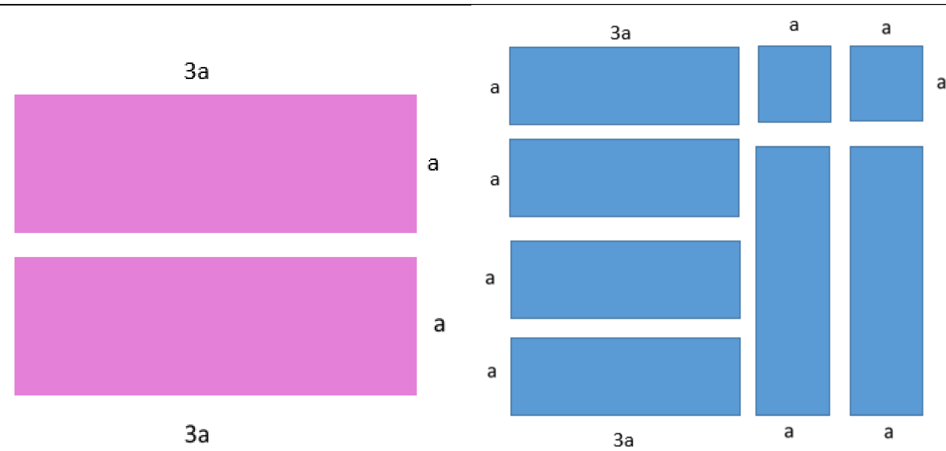
Una figura que tenga:

de ancho 2a y de largo 3a

de ancho 4a y de largo 5a

de ancho 7a y de largo 3a

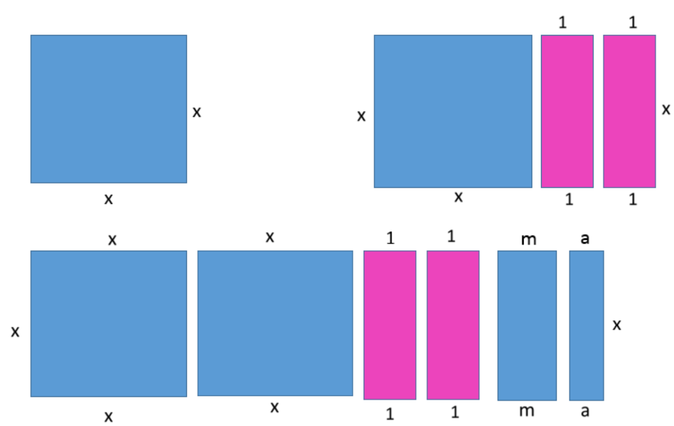
Pidiéndoles que armen con el material la figura y las plasmen en su libreta.

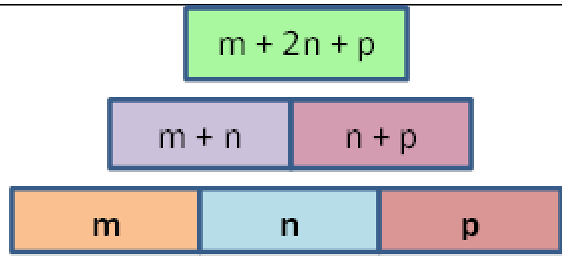


Con esta actividad se les recordarán las partes de las expresiones algebraicas y se hará mención y énfasis en la realización de sumas entre expresiones semejantes, en este caso todo se podrá sumar pues todo está representado en términos de a.

Actividad 4 “Los tapetes de Rosa”

En esta actividad se les dictarán dos problemas, que se les pedirá que resuelvan con el material:

377	Rosa es una artesana y está haciendo un tapete, no tiene las medidas exactas, pero sabe que el ancho mide lo mismo
378	que dos plumas, una sobre la otra, y el largo es 5 veces más grande que la medida del ancho y quiere ponerle un
379	listón en la orilla ¿cuánto listón necesita?
380	$2p + 2p + 10p + 10p = 24p$
381	Con este problema se espera que sumen términos semejantes y puedan dar un solo término como respuesta.
382	Ahora tiene que elaborar un tapete más grande con el mismo diseño, esta vez utilizó un vaso y una pluma para
383	medir el tapete.
384	Las medidas del tapete son: 8 plumas de ancho y 40 vasos de largo.
385	$8p + 8p + 40v + 40v = 16p + 80v$
386	Con este problema se espera que utilicen dos términos y pongan en práctica la suma de expresiones equivalentes.
387	Rosa tiene que elaborar diferentes tapetes, como los siguientes: 
388	En esta actividad se les presentará poco a poco en cartulinas con las figuras en grande, en el pizarrón, una a una
389	siendo cada vez que se agregue una pieza un nuevo tapete, y se les pedirá que obtengan el perímetro de cada nuevo
390	tapete.
391	Aquí se pondrá en práctica la suma de diferentes términos que no son equivalentes.
392	Actividad 5 “Cuadros mágicos”
393	Con esta actividad se espera evaluar la clase, se les pedirá que de manera individual resuelvan

	los cuadros mágicos
394	que se les entregará en una hoja de máquina. Los cuadros mágicos que resolverán son los siguientes:
395	
396	CONOCIMIENTOS DEL PROFESOR INVOLUCRADOS DENTRO DE ESTA PLANEACION
397	Presentación ante el grupo y Actividad lúdica:
398	Esta actividad está planteada por el docente con el objetivo de conocer al menos los nombres de los alumnos y
399	hacerlos sentir en más confianza, ya que el grupo es nuevo para nosotras, esto debido a que nos prestaron el grupo,
400	creemos que con ello se fortalece el interés y comunicación con los estudiantes.
401	Consideramos que los conocimientos del profesor están ubicados en el subdomino de KMT en recursos, al
402	considerar que la actividad puede despertar su interés hacia el trabajo que se realizará posteriormente.
403	Juego de adivinar números:
404	Se establece con el propósito de recordar los conocimientos previos, haciendo alusión a los números enteros y las
405	operaciones aritméticas, por una parte, y por otra comenzar a integrar el lenguaje común en una expresión
406	algebraica.
407	Consideramos que el conocimiento del profesor interviene en los siguientes subdominios:
408	KoT.
409	Al diseñar esta actividad tomamos en cuenta las propiedades de los números enteros y sus operaciones básicas,
410	porque posiblemente para ellos sea en un principio “magia” pero realmente se están aplicando operaciones que
411	permiten llegar a un mismo resultado.

412	Asimismo tomamos en cuenta la definición de expresión algebraica, para guiar a los alumnos al reconocimiento de
413	cada una de sus partes.
414	Por otro lado conocemos los distintos modos de representación para conducir a sus alumnos por todas desde la
415	representación verbal, la aritmética y mediante otra actividad posterior comenzar con la representación algebraica,
416	con ello conducir a los a los estudiantes a transitar con las distintas representaciones.
417	De igual manera se refleja el procedimiento de una serie de algoritmos que permiten llegar a un mismo resultado.
418	KSM.
419	Consideramos que se puede establecer una relación con un lenguaje común y realizar los cálculos para resolver la
420	expresión, este conlleva una conexión con los números enteros y operaciones aritméticas, consideramos que
421	específicamente es una conexión de simplificación, al momento de reconocer los términos de una expresión
422	algebraica, existe una conexión de complejización con las igualdades y las ecuaciones; puesto que posteriormente
423	las expresiones algebraicas serán utilizados por los alumnos en el siguiente bloque del curso.
424	KPM.
425	Esta actividad está presentada para que el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede
426	utilizar en sus actividades cotidianas, para ello entendemos que la expresión algebraica es un modelo generalizado
427	de las expresiones aritméticas.
428	KFLM.
429	Consideramos que una forma de aprendizaje es la tradicional donde el maestro se convierte en emisor y el alumno
430	solo en un receptor pasivo, sin embargo consideramos que el presentar la actividad de una manera diferente, en
431	este caso como un juego puede influir en las formas de aprendizaje.
432	Consideramos que una fortaleza es el hecho de que se comience esta actividad con el lenguaje verbal, ya que es la
433	manera de comunicarse del alumno, esto le permitirá comunicar y utilizar la información

	matemática con mayor
434	facilidad; como dificultades podemos identificar que los alumnos no sean capaces de plasmar lo que se le ha dicho
435	en manera de juego a una expresión algebraica, es decir la manera de interactuar no es la deseada, pues no se puede
436	respetar la secuencia o bien que su concepción de matemáticas le impida hacer una referencia algebraica al juego
437	presentado.
438	KMT.
439	Consideramos que el juego en sí mismo es un recurso que ayuda al docente para que los estudiantes identifiquen y
440	puedan percibir un cambio “sencillo” de la aritmética al algebra; para ello se utiliza como teoría las representaciones
441	semióticas, la cual permitirá que el alumno transite de un registro a otro.
442	KMLS.
443	El docente pretende que los alumnos puedan comunicar la información y realizar sus procedimientos y técnicas
444	satisfactoriamente de acuerdo a los estándares de aprendizaje de matemáticas, es importante tener en cuenta que
445	los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de
446	las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes
447	actividades a realizar.
448	Después de pedirles que escriban el algoritmo de las operaciones que se trabajaron durante la adivinanza de
449	números, se hará una lluvia de ideas, en donde se espera que se exprese la “formula”.
450	En la parte final de esta actividad se reafirma y ratifica los términos de una expresión algebraica.
451	Consideramos que esta actividad se aplica por el hecho de no dejar de lado el juego y poder entrelazar la siguiente
452	actividad.
453	Geometría para calcular.
454	Con figuras geométricas (estilo Dienes), se les entregara el material, para resolver sumas.

455	Explicando que los rectángulos tienen mayor valor que los cuadrados.
456	Para comenzar esta actividad se les mostraran los dos tipos de figuras que se les dará (rectángulos y cuadrados) y
457	se les preguntara sobre los componentes que ya se ubicaron, esperado que identifiquen en primera instancia el
458	coeficiente y la parte literal, posiblemente pudieran señalar también el exponente, donde en este primer
459	acercamiento sólo será uno y posteriormente pudieran identificar 2 o 3.
460	Esta actividad está diseñada con la intención de que el estudiante tenga un acercamiento más estructurado con
461	respecto a las expresiones algebraicas y pueda utilizar con mayor facilidad un lenguaje algebraico, pues
462	identificaran un valor que se le dará mediante una expresión algebraica, para que posteriormente pueda ubicar
463	conjuntos de expresiones algebraicas (monomios).
464	Que serán representados con los rectángulos y cuadrados.
465	KoT.
466	Consideramos como docentes que es importante conocer los distintos modos de representación para que la actividad
467	se plantee utilizando la representación geométrica y algebraica, es decir el alumno utilizara figuras geométricas en
468	este caso los rectángulos y complementando con las expresiones algebraicas, posterior a ello obtendrá el perímetro
469	de las mismas.
470	KSM.
471	Creemos que se establece una relación de simplificación mediante la utilización de operaciones de números con
472	signo y estrategias de conteo, para realizar esta actividad y que los alumnos puedan asimilar las figuras que se les
473	piden.
474	Al expresar las expresiones resultantes del perímetro el docente establecerá una conexión de complejización con
475	la igualdad.
476	KPM.

477	En esta actividad se refleja el conocimiento del profesor al plantear que la práctica de conteo es útil para la adición
478	de expresiones algebraicas, por lo tanto el provocar un conteo, lleva al alumno a interpretar una suma que resultará
479	en primera instancia sencilla.
480	KFLM.
481	Dentro de la categoría de fortalezas y dificultades; resulta una fortaleza que tengan la representación algebraica en
482	una figura geométrica, la cual les dará la certeza de lo que realiza, al mismo tiempo una dificultad al querer hacer
483	conjunciones de muchas expresiones algebraicas en donde su parte literal es diferente, lo cual no se puede realizar.
484	KMT.
485	El recurso principal de esta actividad es el material concreto con el cual representaran las figuras para encontrar las
486	expresiones algebraicas, y estas permitirán que ubiquen un valor con la expresión algebraica para que los
487	estudiantes trabajen con expresiones algebraicas de una manera natural y mediante un juego.
488	KMLS.
489	Pretendemos que los alumnos puedan comunicar la información y realizar sus procedimientos y técnicas
490	satisfactoriamente de acuerdo a los estándares de aprendizaje de matemáticas, es importante tener en cuenta que
491	los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de
492	las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes
493	actividades a realizar, hasta que el conocimiento adquirido por el estudiante sea la adición de expresiones
494	algebraicas.
495	Siguiendo el orden de identificar y contar (rectángulos y cuadrados) expresiones algebraicas, se les planteara una
496	problema real, en el que se le preguntara por el perímetro de una figura.
497	Esto para pasar a la siguiente actividad en la que se espera que ya no utilicen las figuras geométricas que sirvieron

498	para el conteo, sino que utilicen solo las figuras geométricas para sumar expresiones algebraicas.
499	Los tapetes de Rosa.
500	Resolverán situaciones en donde habrá que localizar el perímetro de figuras geométricas, en donde se les dará la
501	medida de alguno de los lados de manera algebraica.
502	Se les complejizaran las situaciones con cantidades mayores, para que ya no utilicen el material, esto para que
503	puedan pasar a una representación algebraica y ya no gráfica.
504	Después de haber identificado a un conjunto de letras y números como parte de un lenguaje, con esta actividad
505	pretendemos que el estudiante ya utilice una expresión algebraica como un valor y pueda hacer sumas en las que
506	una expresión algebraica les represente un valor y puedan conjuntar varias expresiones algebraicas.
507	KoT.
508	El conocimiento en esta actividad se refleja con la secuenciación que llevarán a los al estudiantes a realizar conteos
509	y sumas para que posteriormente les sea familiar trabajar con productos notables.
510	KSM.
511	Localizando la secuencia que se va teniendo en la clase, en este punto después de haber utilizado técnicas de conteo,
512	el estudiante podrá trabajar con expresiones algebraicas y se espera que ya puedan identificar y resolver adiciones,
513	probablemente sin saberlo como tal.
514	KPM.
515	Esta actividad refleja el conocimiento tanto de los estudiantes como de los profesores, pues los estudiantes
516	comienzan a hacer sumas y el profesor puede ir poniendo las figuras necesarias para que realicen sumas de
517	polinomios hasta el momento de que estén dando respuesta a productos notables.
518	KFLM.
519	En esta actividad se trabaja con problemas de perímetro y área y se utiliza la imagen de los tapetes para apoyar a

520	los estudiantes propiciando que su aprendizaje sea acorde a sus necesidades.
521	Dentro de la categoría fortalezas y dificultades se visualizó el tratamiento o interacción que pudieran tener al estar
522	realizando las sumas, esto debido a que se puede presentar el error de querer sumar todas las expresiones algebraicas
523	sin respetar la esencia de cada término, queriendo "juntar” cuantos términos tengan en la situación.
524	La fortaleza seria la el problema presentado provocó en los alumnos una representación verbal, por tratarse del
525	lenguaje común sería más fácil de asimilar.
526	KMT.
527	Aquí se refleja nuestro interés por provocar en los alumnos que relacionen el lenguaje común con el álgebra, para
528	tal motivo utilizamos la representación gráfica intentando que realicen conteo de expresiones siguiendo un patrón
529	geométrico, para que los alumnos perciban a la expresión algebraica sin dificultad.
530	KMLS.
531	Dentro de los estándares se encuentran las 4 competencias generales de educación matemática de las cuales se
532	cumple la de comunicar información matemática de manera efectiva, resolver problemas y manejar procedimientos
533	eficientemente.
534	Dentro del plan de estudios se establece que es el momento se estará iniciando de manera “formal” la adición y
535	sustracción de expresiones algebraicas, para lo cual se espera que puedan realizar conteo y comiencen a realizar
536	sumas, para ello se enfrenta a los alumnos a un problema real en el que pongan en juego sus procedimientos y
537	técnicas.
538	Para este momento se espera que la representación gráfica sea innecesaria y puedan ya resolver adiciones de
539	expresiones algebraicas, de tal forma que puedan realizar cualquier suma y con base en ello se les presentara un
540	cuadro mágico para resolver en equipo, para posteriormente entregarles la evaluación que se les dará en cuadros

541	mágicos.
542	Cuadros mágicos para cerrar la clase
543	Estando en el mismo contexto de los cuadros mágicos se les pedirá que de manera individual resuelvan los cuadros
544	mágicos.
545	Esta actividad está pensada como una evaluación, para identificar que reconocen el algoritmo, asimismo que
546	pueden resolver operaciones de adición y sustracción de expresiones algebraicas.
547	KoT.
548	Reconocer que el lenguaje que generaliza diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética
549	(Hernández, 2002).
550	También en esta actividad es necesario conocer principalmente el algoritmo de la adición ya que los cuadros
551	mágicos permitirán que den a conocer su conocimiento ante la adición de expresiones algebraicas.
552	KSM.
553	Siendo el álgebra la generalización de la aritmética, que se representa por medio de letras, las cuales pueden
554	representar cualquier valor, que se revise este contenido provoca conexiones de complejización que van desde las
555	ecuaciones y funciones, fórmulas en cualquier asignatura y contenidos matemáticos más complejos como derivadas
556	e ingenierías.
557	KPM.
558	El conocimiento que permite crear una definición sobre expresiones algebraicas, para que sea utilizada
559	posteriormente en ecuaciones o igualdades, asimismo la aplicación de sus propiedades.
560	KFLM.
561	Consideramos que para saber si se cumplieron los aprendizajes esperados es necesario realizar una evaluación, en
562	esta actividad se considera la oportunidad de que los estudiantes realicen una evaluación sin tener el régimen de un
563	examen, sin embargo evalúa la manera en la que ellos resolverán situaciones de adición y

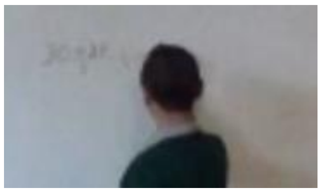
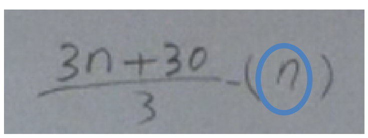
	sustracción de
564	expresiones algebraicas.
565	Es necesario tomar en cuenta que probablemente tengan alguna confusión por el hecho de trabajar con modelos
566	geométricos y después no tenerlos, pero esperamos que la realización del cuadro mágico genere menos estrés en el
567	estudiante y pueda resolver de manera eficaz cada uno de ellos.
568	KMT.
569	En realidad, los alumnos están realizando sumas y restas con expresiones algebraicas, sin embargo, consideramos
570	que cuadros mágicos puede ser una manera distinta de enseñar este tópico.
571	KMLS. Estamos hablando de que los conceptos sean suma y resta de expresiones algebraicas contenidos en el
572	bloque uno de segundo grado de secundarias, reconocer una expresión algebraica.
573	De acuerdo con el currículo se espera que los alumnos sean capaces de validar sus procedimientos y resultados.
574	Se abordará este tema con resolución de problemas, productos notables.

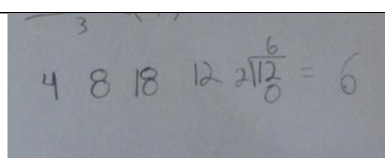
Anexo VIII: Ejecución.

1	M1	Pequeño “heee”
2		O bueno, la que quieran, es igual, ¿sí?
3		Lo va a escribir, yo no lo voy a ver
4		¿Ya?
5	A	Ya
6	M1	Vamos a comenzar por estas instrucciones
7		Van a multiplicar ese número por tres
8		Por eso dije que pequeño para que no batallen.
9	A	Ya
10	M1	¿Ya?
11	A	Ya
12		Ahora le van a sumar 30.
13	A	Ya
14	M1	Y luego le van a dividir entre 3.
15	A	Ya
16	A	Noooo [Segundo alumno]
17	A	Ya
18	A	¿Y sí le restamos?
19	M1	Y luego le van a restar n
20		¿Qué quiere decir n?
21		Es el número que pensaron
22		¿Sí?
23		Le van a restar n
24	A	¡Ohhhh!
25	A	Ya.
26	M1	Y entonces me van a notar el resultado, pero todavía no me lo digan ¿sí?
27	A	El resultado de la resta
28	M1	Si, lo que le dio ya todo, de la resta ¿sí?
29		[se espera un momento para que los alumnos terminen de realizar el ejercicio]

30		Ahora, necesito… 4 voluntarios que vengan a llenar esta tablita.
31	A	¡Yo! [levantando la mano para pedir participar]
32	M1	Ok, comenzamos.
33	A	Aquí… [alumno participante, mientras llena tabla en el pintarrón]
34	M1	¿Alguien pensó en 3? [después de mirar el número en el que pensó el Ap]
35		[Murmullos]
36	A	¿Alguien pensó 3?
37		[Murmullos]
38	A	¿10? [alumno participante, buscando confirmación por parte de la maestra]
39	A	Si están bien ¿verdad?
40	A	Yo, a mí también me dio 10. [alumno buscando participar]
41	M1	¿A todos les dio 10? [buscando afirmación en los alumnos]
42		¿A todos les dio 10?
43	A	A mí no, ¿nos tiene que dar 10?
44		[Murmullos]
45	M1	¡No!, a ver pásale
46		[dirigiéndose a alumno que no le dio 10, que decide no pasar al pintarrón]
47		¿Otro?
48	A	Yo
49	M1	Tú y luego tú [organizando los turnos de participación]
50		¿Otro?
51		¿Último?
52	A	Yo
53	A	Yo también fui 5
54	M1	Ahhh, entonces no.
55		¿Otro? [pasa otro alumno]
56	A	Yo también pensé en dos
57	M1	¿Alguien pensó en dos? ¨[busca respuesta por parte de los alumnos]
58		Entonces, a todos a todos les dio 10, ¿cierto?
59	A	Si

60	M1	¿Siempre será así, pues?
61	A	Si
62	M1	¿De qué depende?
63	A	De la forma en la que están acomodadas las operaciones, ¿no?
64	M1	De la forma en la que están acomodadas las operaciones, muy bien.
65		Bueno, el tema que vamos a abordar hoy, van a ser expresiones algebraicas
66		Se acuerdan ustedes ya han visto en años anteriores que una expresión se puede
67		representar tanto con números como con letras, ¿cierto?
68	A	Si
69	M1	Entonces, si tratáramos de sacar una formulita para esta, para este ejercicio que
70		hicimos, para este jueguito, ¿cómo nos quedaría?
71	A	13
72	M1	El número que pensamos lo vamos a representar con n
73		[Murmullos]
74	M1	Si nos vamos por pasos, ¿aquí que sería? 
75		¿Haber cómo sería n?
76	A	n… 3n
77	M1	¿3n?, ¿todos están de acuerdo? [busca aceptación y lo anota]
78		¿Y aquí que sería?
79	A	Más 30
80	M1	¿Aquí?
81	A	Entre 3
82	A	Sobre 3
83	M1	[M1 señala otra columna]
84	A	menos n

85	M1	Si la pudiera escribir toda junta, ¿quién pasa?
86	A	Yo
87	A	¿Dónde le escribe?
88	M1	Ahí en el pizarrón
89		¿Cómo quedaría, entonces?... 
90	M1	¿Están de acuerdo? [mientras e alumno va plasmando la expresión algebraicas]
91	A	Si
92	M1	O ¿alguien tiene otra manera de representar?
93		¿Creen que se puede representar de otra forma?
94	A	No le pongas paréntesis porque se va a multiplicar [alumno dirigiéndose al alumno participante]
95		[Antes de que el alumno ponga el signo circulado en la figura siguiente]
96	A	Tiene signo no se multiplica [alumno participante] 
97	M1	¿Cierto? [dirigiéndose a alumno que hizo la observación]
98	A	Si
99	M1	Muy bien…
100		Bueno entonces, para comprobar, si es cierto lo que dicen, yo les voy a dar las
101		instrucciones y ahora ustedes me van a sacar la fórmula "esa" del siguiente
102		ejercicio, ¿sí?
103		Lo que busco es esta, la expresión [señalando la expresión en el pizarrón].
104		Entonces vamos otra vez, ahora pensar un número lo notan o lo hacen o cómo
105		quieran, ¿sí?
106		Pensar un número, multiplicarlo por 2, sumarle 10, restarle 5, ¡perdón! restarle 6

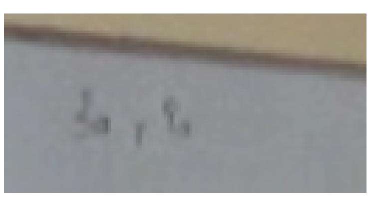
107		dividirlo entre 2 y luego restamos el número original.
108		Me dicen si estoy equivocada, pero a todos les va a dar el número 2
109	A	Si
110	M1	¿Sí?, entonces, ahora lo que me interesa es ésta
111		[Señalando la expresión en el pintarrón]
112		¿Sale?
113		¿Quién la tiene para que me la diga?
114	A	Yo
115	M1	¿Ya?, pasas y la escribes por favor.
116	A	¿La expresión?... A no, no que pase otra persona.
117	M1	¿Por qué?, ¿estoy muy fea o qué?
118		De acá de estas filas nos están dejando atrás.
119		¿Quién pasa y la escribe?, ¿quién la tiene por acá? [señalando filas]
120		¿No?, no la tienen todavía
121		Aquí, ¿nadie la tiene? más que tú [refiriéndose a un alumno que ya participo]
122		[Murmullos]
123	M1	¿De aquí nadie?
124	A	Paso, yo paso
125	M1	¿Alguien que no ha pasado?
126	A	Él va a pasar ya la tiene
127	M1	¿Quién la tiene?
128	A	Yo
129	M1	Pásale
130	A	¿Dónde la escribo? [alumno participante]
131	M1	Ahí donde sigue
132	A	
133	M1	Pero, ¿cómo te quedaría así? [señala expresión algebraica del pintarrón]
134	A	¿Con letras? [alumno participante]

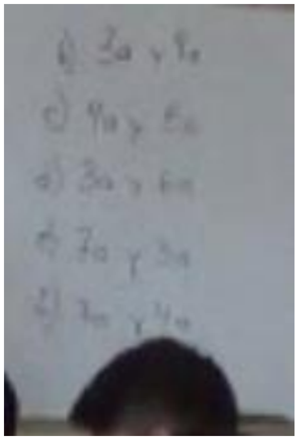
135	M1	Con letra
136	A	[Escribe en el pintarrón]
137		¿Y luego es más 10?
138	M1	¿Más diez?, mmmm, si
139	A	Si verdad, ¿y luego es entre….?
140	M1	Dos
141	A	¿Cuánto dijimos que da?, ahhh
142	M1	Pero tú pensaste en dos y ¿qué tal que fuera otro número? [señala el error]
143		$\frac{(n)(2)+10}{2}-2=$
144		¿Cómo lo vas a hacer?
145	A	Ahhh [corrige expresión] $\frac{(n)(2)+10}{2}-n=$
146	M1	¿Estamos de acuerdo?
147		Otra manera de representarlo, ¿puede ser?
148		Es correcto, esta manera $\frac{(n)(2)+10}{2}-n=$
149		Pero también podría estar representado como este ¿verdad?
150		[Refiriéndose al ejercicio anterior]
151		$\frac{3n+30}{3}-(n)$
152		¿Qué faltaría aquí? para quitar esos paréntesis
153		¿Cómo le haría?
154	A	Juntarlos
155	M1	¿Qué me daría?

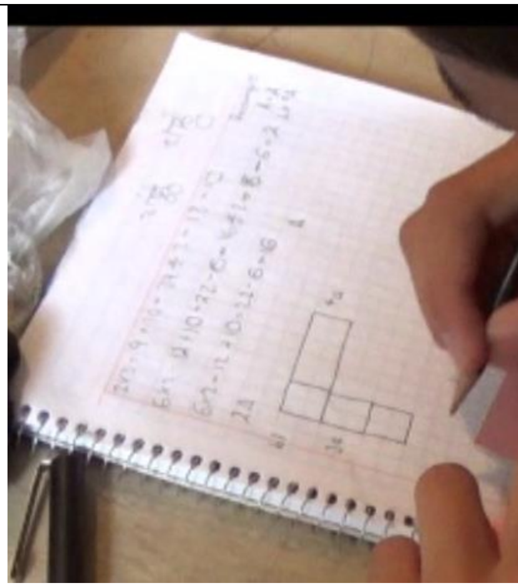
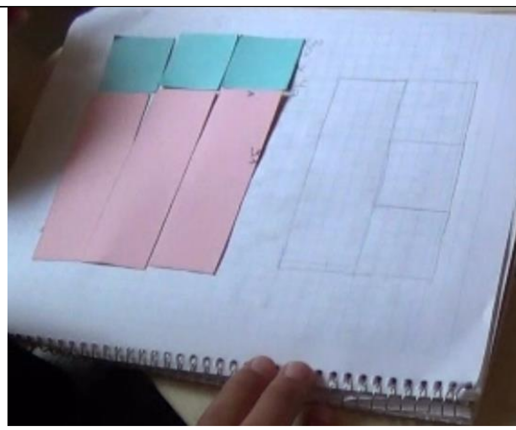
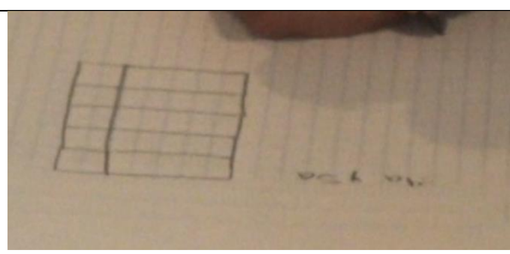
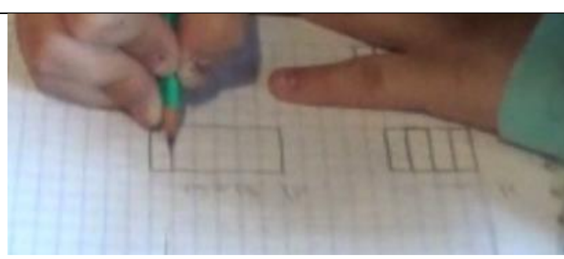
156	A	2n
157	M1	Muy bien.
158		¿Estamos de acuerdo?
159	M1	Bueno ahora vamos a pasar a otra actividad.
160		Pero va a ser por binas
161		Escoja cada quien su pareja.
162		Bueno los que ya están en las mesas ya están por parejas.
163		Acá ustedes ya están.
164		¿Román con quién te vas a juntar?
165	M2	Solamente 6 por favor. Toma 6 y pasan los… otros.
166		[La maestra entrega material a los alumnos que se encuentra al frente de la fila].
167		Vamos a hacer lo mismo de este lado.
168		Cada bina tiene que tener seis rectángulos.
169		[Murmullos]
170	M2	Y de estos cuadrados, cada quien… cada bina va a tener 7 cuadrados.
171		[Mostrando el material correspondiente].
172	M1	Toman siete y pasan atrás por favor…
173		¿Sí son siete? [dirigiéndose a alumno]
174	M2	7 y pasan los demás.
175		Si alguien falta sólo levanta la mano para darle los que les faltan.
176		[Murmullos]
177		¿Alguien falta?
178	M1	¿De azul quién falta?
179		[Murmullos mientras se reparte el material]
180	M2	Seis, si siete azules [dirigiéndose a alumno]
181		¿Perdón?
182		Ellos ya tienen
183	M1	¿Cuántas binas son?
184	M2	17
185	A	Ya

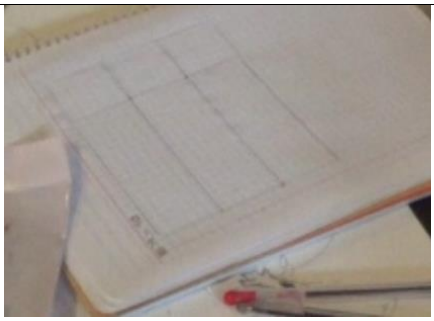
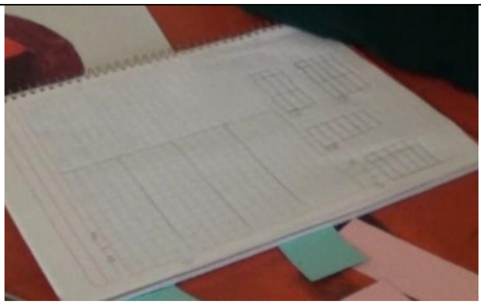
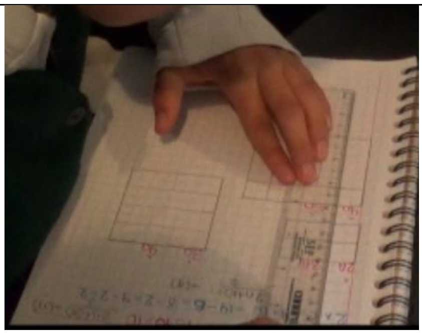
186	M2	¿Faltan o sobran?
187	A	Sobran.
188	A	[Murmullos]
189	A	¿Son 7 para los dos?
190	M2	Si porque van a trabajar en binas.
191	M1	Van hacer 8 de los de azul, ¿sí?
192		[Murmullos]
193		8 de azul
194	A	¿Qué vamos a hacer?
195	M1	Ahorita les vamos a decir.
196	M1	¿Ya?
197	M2	Ya
198		¿Sobran… rectángulos? [pasa y recoge el material sobrante]
199	A	¿Y de estos seis?
200	M2	Son de esos seis
201		¿Sobraron?
202		[Murmullos]
203		Bueno, nuestra actividad…
204	M1	Revisa por favor que este grabando [dirigiéndose a M1].
205		[M2 interrumpe discurso para checar que la cámara este grabando]
206	M2	Bien, nuestro cuadrado va a tener o va a medir por cada lado “a”.
207		Cada lado de nuestro cuadrados mide “a”.
208	A	¿Lo vamos a escribir?
209	M2	Si escríbelo o lo ponen ahí en el …
210		De preferencia con lápiz.
211		Y nuestro rectángulo por esta ocasión y para este primer ejercicio va a medir “a”
212		en su ancho y por el largo “3a”, por el triple de “a”, [énfasis] “a” y el triple de
213		“a” [mostrando la figura].
214	A	¿El lado cuánto?
215		Murmullos [M1 dibuja el rectángulo en el pintarrón, escribe la expresión algebraica y

216		lo señala a los alumnos para que aprecien la indicación]
217	M2	Bien el ancho del cuadrado y del rectángulo va ser “a”.
218		El ancho del cuadrado y del rectángulo va ser “a”.
219		El largo del rectángulo va a ser tres veces mayor a su ancho.
220		¿Cuánto va a medir el an… el largo?
221	A	3a
222	M2	3a, muy bien.
223		Bueno.
224		Con los cuadritos...
225		Con la figura que tiene les voy a dar unas expresiones y ustedes las van a armar.
226		Como no les van a caber todas en una hoja, esteeee, si gustan marcarlas en su
227		libreta la primera y las otras ya pueden hacer pequeñitas.
228		Respetando siempre la expresión.
229		Anotan por favor.
230	M1	En su libreta.
231	M2	En su libreta van a anotar para… ese.
232		Este material les va a servir para que hagan las figuras que yo les voy a decir y
233		las van a ir armando ahí con su pareja.
234		¿Sí?...
235		Es 2a de ancho y 3a de largo [dictando primer ejercicio].
236	M1	Que la armen [dirigiéndose a M2]
237	M2	¿Perdón?
238	M1	Que la armen, primero
239	M2	Si, esa la arman con las fichitas que tienen.
240	M1	¿Cómo quedaría?
241		La vamos a pasar a revisar.
242	M2	¿Cómo quedaría esa?
243		¿Cómo?
244	A	Maestra, ¿así, cómo este?, ¿así no?
245	M1	¿Tienes duda? [dirigiéndose al alumno que pregunta]

246	A	[no se distingue pregunta que realiza alumno a M2]
247	M2	¿Sí?, 2a de ancho, ajá y de largo 3a.
248		Bien, así [señalando algún trabajo que le muestran].
249	M1	¿Cómo quedaría?
250	A	¿Así maestra?
251	M2	Si también.
252		Aquí hay otra manera de hacerlo [no se aprecia lo que M2 observa en el
253		cuaderno de los alumnos].
254		¿De qué otra manera creen que lo hicieron sus compañeros?
255		Normalmente usaron dos rectángulos.
256		¿De qué otra manera lo pudieran hacer?
257	A	Con 6 cuadritos.
258	M2	Con 6 cuadritos
259		Bien, como nos van a…
260		Tenemos que re… llevarnos ese material.
261		Tenemos que llevarnos ese material.
262		Este…lo anotan…
263		Hacen el dibujo en su libreta por favor.
264		Nada más…calcan.
265		Si las calcan.
266	M1	Marca solo el contorno [dirigiéndose a un alumno].
267	M2	Para que se queden ustedes sólo con la evidencia del trabajo.
268		Nosotros nos tenemos que llevar el material.
269		[Murmullos]
270		[M1 auxilia a M2 para que esta última anote los ejercicios en el pintarrón]
271	M2	Esta va a ser la siguiente figura [anotando en el pintarrón $3a$ y $4a$] 

272		[Continua escribiendo los siguientes ejercicios] 
273	A	¿Las vamos a ir calcando aquí?
274	M2	Si las van a ir calcando en su libreta, por favor.
275	A	Tiene que ser así como este.
276	M2	Tiene que ser así, ¿cómo?
277		[M2 se acerca a ver lo que la alumna está haciendo en su libreta]
278	A	¿Las vamos a calcar así?
279	M2	¿Ya hiciste las primeras así?
280	A	Si
281	M2	Ok, las puedes hacer ya en pequeño.
282	A	[No se entiende lo que el alumno le pregunta a M2]
283	M2	3a
284	A	¿De ancho o de largo? [refiriéndose al primer ejercicio, 3a y 4a]
285	M2	Podría ser
286		En el pizarrón la primer medida que les pusimos es el ancho o el largo.
287		Es el ancho y el largo.
288	A	¿No importa?
289	M2	No importa
290		[Grabación del trabajo de los alumnos]

291		
292		
293		
294		

295		
296		
297		
298	M1	Ahora me van a resolver con ese mismo material, pero va a ser problema,
299		lo anotan por favor. ¿Listos?
300		Rosa. ¿No hay Rosas aquí?
301		No verdad.
302		Bueno.
303		Rosa es una artesana.
304	A	¿Lo escribimos?
305	M1	Si por favor
306	A	¿Artesana?
307	M1	Si
308		Rosa es una artesana y está haciendo un tapete, no tiene las medidas exactas,

309		pero sabe, que el ancho mide 2 plumas.
310		¿Cómo es eso?
311	A	Pens
312	M1	Sí, pero, esta es una pluma y luego la otra pluma, el alto mide eso
313		[Toma dos plumas y muestra a los alumnos]
314		Está en función ahora de las plumas, ¿sí?
315		Que estaban en su casa y el largo es 5 veces más grande.
316		La pregunta es, si quiere poner un listón en la orilla.
317		¿Cuánto listón necesita?
318	A	Si quiere ponerle ¿qué?
319	M1	En la orilla, ¿cuánto listón necesita?
320		Inciso b, va a ser otro tapete "heee", es igual.
321	A	De una vez lo respondemos.
322	M1	Falta otro, de una vez se los voy a dictar, es igual.
323		Rosa va a ser otro tapete ahora el ancho mide 8 plumas
324	A	¿Cuántas?
325	M1	8, ¿listo?
326		Y el largo mide 6 veces más, ¿cuánto listón necesita para la orilla?
327		La pregunta es la misma.
328		Lo vamos a tratar de hacer con las figuritas.
329		¿Lo van a resolver verdad?
330		Ahora, no va a medir "a" ¿cuánto va a medir?, muchachos…
331	A	pens
332	M1	Muchachassss….
333	A	¿Plumas?
334	M1	Lo vamos a representar con la letra…
335	A	P
336	M1	"P", ¿verdad? para no ponerle pluma completo.
337		Ok, entonces si este mide "P", ¿cuánto va a medir este?
338		[Indicando el lado en la figura geometrica]

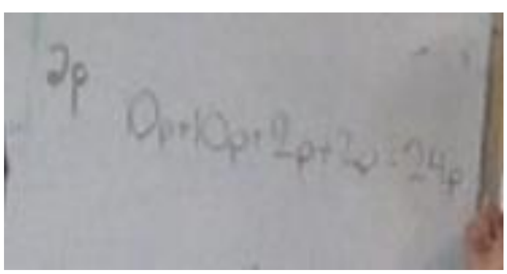
339	A	3P
340	M1	3P, van a tratar de armar el tapete y luego ya,
341		lo dibuja como lo estaban haciendo.
342	A	Maestra, ¿lo vamos a dibujar aquí?
343	M1	Si por favor
344	A	El 2 no se puede, ¿o sí?
345	M1	¿Por qué?
346	A	Porque no ajustamos con los cuadritos.
347	M1	¿Alguien pudo?
348	A	Si
349	M1	¿Sí se puede?
350	A	Si puede
351	M1	¿El 2 si?
352	A	Ahhh no el 2 no
353	M1	Ahh el 2, el uno ella dice que, si se puede, pero el 2 no se puede.
354		Pregunto ¿si alguien ya llegó al 2?
355	A	Con los cuadros no se puede, pero se puede representar en la libreta.
356	M1	¿Cómo lo podemos hacer?
357	A	Representados en la libreta
358	M1	Representados en la libreta, dice el compañero
359	A	Faltan dos cuadros
360	M2	¿Cuántos te faltan?
361	M1	Faltan 2.
362		Pero acuérdense que lo que quiero saber es el listón que va a llevar alrededor he
363		¿Cuánto va a gastar de listón?
364		No es suficiente que me hagan la figura, si no que…
365	M2	¿Cuál es la pregunta que se les pide?
366	A	¿Cuánto listón?
367	M1	¿Cuánto va a medir ese listón? ok
368	A	24 y 112

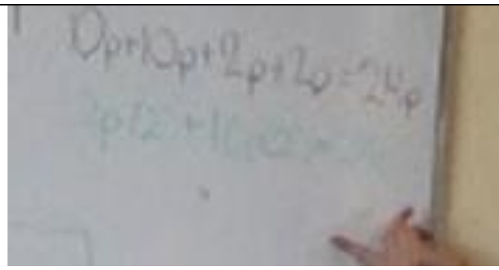
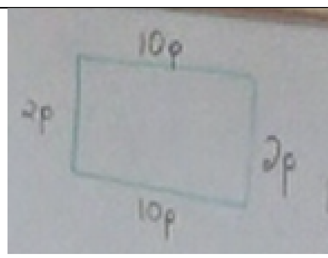
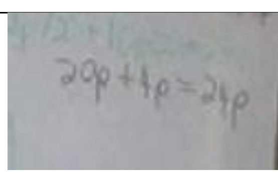
369	A	Yo ya, ya acabe
370	M1	¿Cuál?, ¿ya lo tiene?
371		Y ¿el del 2?
372	A	También
373		¿También?
374	M2	Ahora una expresión con la que puedas representar esas operaciones
375		[Dirigiéndose a dos alumnos]
376		Chicos hay que recordar que estamos trabajando con las expresiones algebraicas.
377		Entonces lo que están haciendo, las operaciones que están haciendo
378		represéntelas con una expresión algebraica.
379	M1	Como lo hicimos aquí con el jueguito de los números, ¿sí?...
380	M2	¿Si?
381	M2	Como lo hicimos con el juego de los números, algo así.
382	A	Está bien largote hasta acá ¿no?
383	M1	A ver por ejemplo sus compañeros ya lo hicieron.
384		Muchachas. Jocelyn este…
385		¿Ocuparon las figuras para segundo
386	A	No
387		O ¿cómo lo sacaron?
388	A	No
389	M1	No ocuparon las figuras
390	A2	Sacaron la calculadora.
391	M1	¿Sacaron la calculadora?
392		Pero, ¿cómo sabes cuánto mide P?
393		¿Cuánto mide la pluma?
394	A	No sé
395		Ya tengo…
396	M1	A ver…[dirigiéndose a los alumnos]
397		Dijimos lo que queremos son las expresiones que van saliendo
398	A	Pero, si estoy bien maestra

399	M1	A ver… ¿Alguien va a pasar?
400		[Murmullos]
401		[M1 se acerca a ver qué fue lo que hicieron las alumnas de la bina 2 que ya
402		terminaron el ejercicio, después va y verifica el resultado de la bina 1]
403		¿Cuánto les dio? [dirigiéndose a los alumnos de la bina 1 mientras
404		espera la justificación de su respuesta]
405		Ahora el otro
406	A	Ya lo hicimos maestra.
407	M1	Ah y ¿dónde está la expresión?
408		Es esta, ¿verdad?
409		Nada más que aquí ¿por qué se comieron la p?
410		[M1 se acerca a la bina 2]
411		Estamos mal en esta, ¿no?
412		El ancho mide 5 veces más.
413		Cinco veces más que esto [señalando el ancho del rectángulo]
414		Si aquí mide 2 ¿el ancho mide?
415		Mira, si aquí mide dos
416		[toma dos plumas para ejemplificar que significa 5 veces más hasta que la alumna asiente]
417		[Mientras M1 está explicando lo que significa 5 veces más a la bina 2 alumnas anteriores, M2, se acerca a la bina 3]
418	A	Así estoy bien, ¿o no? [dirigiéndose a M2]
419	M2	¿Por qué 14? [analizando el trabajo del alumno]
420	A	Porque es seis veces más
421	M2	Aja, y ¿el ancho mide?
422	A	8
423	M2	¿Y el 6 veces más?…
424	A	¿14?
425	M2	Eh, seis veces, este… [hace remolinos con los dedos], lo que te mide el ancho.
426		Seis veces lo que mide el ancho [haciendo una señal de brinco con los dedos]
427		Mira, así está bien, porque lo entendiste de esa manera

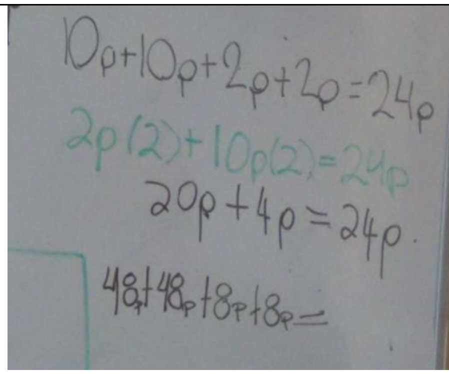
428		No hay problema
429		Este es el ancho, está bien.
430		[Mientras M1 se traslada a otra bina donde atiende la misma inquietud, no se aleja hasta que la bina menciona que es 48, aunque no se percibe lo que argumentan en la interacción]
431		Tú lo haces con este y el problema es el ancho.
432		Y el largo mide 8veces, perdón, 6 veces lo que mide el… ancho.
433		Sip
434		Pero hazlo con las dos
435		Con esta
436		Y luego con seis veces lo que mide el ancho.
437		¿Si?
438		Hazlo con las dos
439		Pero compártele a tu compañero lo que estás haciendo
440	A	Estoy mal [compañero de bina 3, del alumno con el que acaba de interaccionar M2]
441	M2	A ver ¿por qué estas mal?
442	A	Conté de más
443	M2	¿Por qué constaste de más?
444	A	[No se escucha]
445	M2	Ok, no importa
446		Háganlo así con 14
447		Y este…hagan el otro también.
448		Pero trabajen en binas
449		[Murmullos]
450		¿Cómo van ya están terminando?
451		¿Ya?
452		A ver.
453		Ándale [al ver las respuestas de la bina 1]
454	A	¿Verdad que nosotros también teníamos que representar el 2?
455	M1	¿Mande?

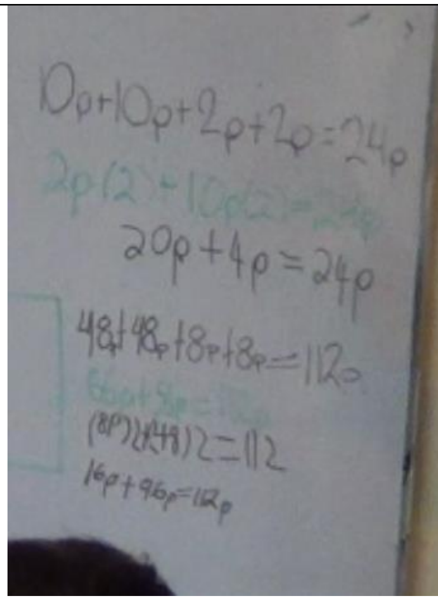
456	A	¿El segundo también lo tenemos que representar?
457	M1	Sí, pero con las figuras no te va alcanzar
458		Haces un cuadrado [indicando como le haga en la libreta]
459	M2	Pones más seis [Al revisar la expresión de la libreta de la bina 1]
460		En vez de poner 6 veces más [mientras dice esto M2 explica mediante lenguaje corporal y busca confirmación de comprensión por parte del alumno]
461		¿cómo quedaría la expresión algebraica?
462		[Murmullos]
463		La mayoría ya terminó la figura número 2.
464		Levanten la mano los que ya terminaron la figura número 2.
465		Bueno los esperamos un poquito más porque todavía son pocos.
466	A	[Murmullos]
467	M1	Dice que es 5 veces más [explicando a la bina 4]
468		Si yo digo 8 veces más ¿cuánto seria? [refiriéndose al problema]
469		Si digo 2 y luego digo dos veces el dos ¿cuánto sería?
470	A	4
471	M1	Si digo 3 veces el 2
472	A	Seis
473	M1	Seis
474		Entonces, cinco veces, cinco veces el 2
475		Yo lo que quiero saber
476		Si ¿ok?
477	Ao	Ya, ya acabamos [bina 1]
478	M1	A ver, entonces, como dibujaremos…
479		Ok, ¿ya lo tienen?
480	A	No, espérese poquito ya ….[no se entiende]
481	M1	Estos son los dos tapetes que dicen que Rosa va a
482		hacer [señalando dos rectángulos en el pintarrón].
483		El primero dice que mide 2p
484	M2	Haber chicos, vamos a poner atención.
485		Ya la mayoría termino al menos el primer ejercicio.

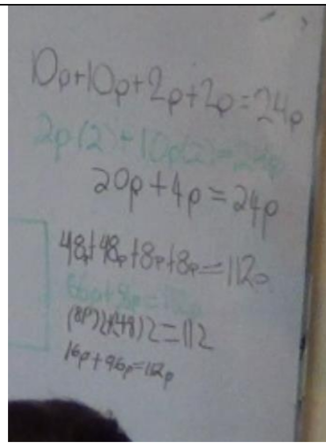
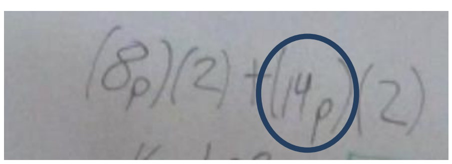
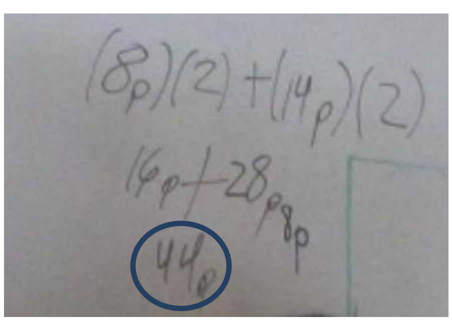
486		Entonces vamos a poner atención acá en el pizarrón.
487	M1	El primero dice que de un lado mide 2p y que del otro lado del ancho de largo
488		mide 5 veces más que lo que me dé aquí [señalando].
489		Entonces ¿cuánto sería en 5 veces más?
490	A	10
491	M1	10, ¿sí?, ahora, alguien pase por favor y escríbeme aquí.
492		Bueno antes ¿cuánto va a medir aquí arriba? 
493	A	10p
494	M1	10p ¿y de este lado?
495	A	2p
496	M1	2p, lo que yo busco es la expresión que me represente el perímetro, o sea, el
497		listón que va a ocupar Rosa alrededor.
498		¿Quién la tiene por favor?, pase. [indicando a alumno de la bina 1 que pase]
499		Y los demás a ver si les salió así, o estamos algo mal [el alumno escribe su expresión en el pintarrón]
500	A	10p+10p+2p+2p=24 
501	M1	¿Si estamos de acurdo?
502		¿Qué hicimos? nada más, sumar todo, ¿verdad?
503		10p+10p+2p+2p=24p.

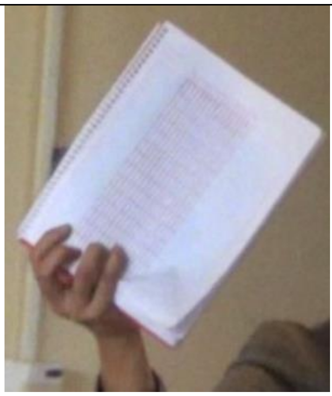
		
504		Pásale por favor.
505		Le ponemos P [dirigiéndose a la alumna participante, al notar que utiliza la literal “a” con el objetivo de homogenizar con los demás alumnos].
506		Esta es otra manera, se fijan.
507		¿Cierto?
508	A	Si
509	M1	Ella dijo 2p de aquí, por 2, porque son dos lados y 10 p de aquí por dos porque
510		son dos lados.
511		
512		Entonces en total le dio 24p.
513		Esta es otra manera de representar.
514		¿Alguien me sabe otra?, ¿no?
515	A	Si
516	M1	Ella dice que también otra manera de representar es 20p más 4p igual a 24p.
517		
518		Entonces a todos, utilizando la expresión que… consideraron, el resultado
519		independiente me salió, 24p.
520		¿Estamos de acuerdo en eso?

521	A	Si
522	M1	Ahora este [señalando el otro rectángulo en el pintarrón]
523		Decía que el tapete de Rosa, tiene de ancho, 8p, pero de largo, mide, ¿cuántas
524		veces más?
525	A	Seis
526	M1	¿Entonces cuánto va a medir?
527	A	48 [solo una alumna]
528	M1	Sí, ¿están de acuerdo?
529	A	Si
530	M1	¿Por qué?
531	A	Porque 8x6=48
532	M1	8 por 6, 48.
533		Entonces ahora quiero la expresión.
534		¿Quién pasa?
535	A	Yo
536	M1	¿Quién por allá dijo?
537		Espérenme [dirigiéndose a alumno de la bina 1]
538		¿Alguien más la tiene? [señalando otra fila]
539		O la puede anotar, pásale
540	A	Yo
541	M1	Tú, anotarla, ¿qué difícil? [sarcasmo]
542		Aquí ya sabes cuánto es.
543		Luego sigues tú, ¿ok?
544	A	¿Cuánto sale?

545		
546	SA	40
547	M1	¿Cuánto sale?
548	A	112
549	M1	¿112 qué? ¿Es correcto?
550	A	Si
551	M1	P.
552		Acuérdense, que cuando estén utilizando expresiones, nunca se les debe de
553		olvidar, la literal.
554		Pásale.
555		Ah, mira esta es otra.
556		¿Por qué?
557		¿Cómo le hizo aquí?
558		¿Qué sumo?
559	A	Pero no da 112
560	M1	Ah, es que aquí se equivocó

		
561	A	Era un 56
562	M1	¿Es correcto? ¿Alguien me dice cómo le hizo?
563	A	48+8
564	M1	Sumo estos dos y luego de este lado sumo estos dos y le dio 112p
565	A	Yo tengo otra
566	M1	Pásale.
567		¿Por allá tienen otra?
568		Esa es otra.
569		Pero aquí te falta algo ¿no?
570	A	P
571	M1	¿Y al final?...

		
572		Ok, esta es otra, ¿sí?
573		¿Estamos de acuerdo?
574		¿Él qué hizo?
575	A	sumo 8+8 y 48+48
576	M1	8+8 y por eso le dio 16 y, 48+48, y le dio 96, ¿el resultado?
577	A	112
578	A	Nosotros lo hicimos diferente [alumno bina 3]
579	M1	A ver, pásale…
580	M1	Ah ok ¿ustedes pusieron 14 en vez de 48? [Refiriéndose al 14p, encerrado en el círculo] 
581	A	Si
582	M1	Ok, 44 ¿qué?...¿aquí también tiene p o es sin p?[En este ultimo refiriendose a un sumando] 

583	M1	Ok, ¿estamos de acuerdo todos?
584		¿Entonces a todos les dio esto?,
585		Se fijan aquí solo nos salieron 3.
586		¿Aquí ya nos salieron? 4 expresiones ¿verdad?
587		Entonces, igual y si le seguimos buscando es más fácil y podemos encontrar más
588		Bueno, vamos a seguir con la siguiente actividad.
589	A	Hey! maestra yo ya acabe de hacer el dibujo de ese, del segundo
590		Yo también ya acabe
591	M1	El dibujo del segundo…. Todos estos para completar el segundo, imagínense.
592		
593		Muy bien, bueno, entonces, ahora vamos a seguir sacando lo perímetros de estas
594		figuras, con las expresiones algebraicas
595		¿Sí?
596		De estas nueva. 
597		Vamos a recoger el material de esas.
598		Me lo pasan por favor.
599		Y van copiando así la figura.
600		Que la maestra tiene ahí en el pizarrón.
601	A	¿Hacemos esa figura?

602	M2	Si, la primera figura ya la hicieron, era solamente el cuadrado rosa, ¿y era?
603		
604	M2	3… 4x [refiriéndose al perímetro del cuadrado rosa]
605	M1	La nueva figura es así
606	M2	La nueva figura son las dos, ¿cuál es el perímetro?
607	A	6x
608	M2	¿3x?
609	A	6x
610	M2	6x.
611		Así lo van a hacer y yo les voy a este…
612		Cada vez que agregue yo un cartoncito más, este…
613		Va a ser una figura nueva.
614		¿Si?
615		Ustedes lo van trazando en el… en el… en su libreta por favor.
616		¿Ya sacaron esa… segunda?
617	A	Ya
618	M2	Bien. Estas que estamos haciendo son este… otras formas de tapetes.
619		Como los que ya hicieron ustedes.
620		Vamos a ir sacando el perímetro.
621		Y el último tapete, que va a hacer Rosa va a ser este.

		
622		¿Qué listón? o ¿cuánto listón se necesita para el contorno de esta figura?
623	A	6x más 8 o más 2…
624	M1	¿Haber quién me la dice?
625	A	6x+8+2m…
626	A	¿Ya son todas las que va a poner? [otro alumno]
627	M2	Ya
628	A	6x+8+2m+2a
629	M1	A ver, ¿cuánto va a medir de este lado?
630	A	x
631	M2	¿x?, ¿sí?
632	A	x
633		Si es x
634		Si
635	M2	X, ¿y de este lado?
636	A	Lo mismo de abajo
637	M2	Pero ordenándolo
638	A	2x+4+m+a
639	M2	Dice, 2x+4+m+a, ¿sí?
640	A	Si

641	M2	Ok, ahora si ¿quién la saca?
642	A	Yo
643		Ya está maestra
644	M2	¿Ya está?, ¿ya la tienen?
645	A	Ya

Anexo IX: Propuesta de mejora

1	Planeación con mejoras
2	Las mejoras realizadas a la planeación original tienen como propósito evidenciar los conocimientos
3	del profesor que no fue posible observar en la planeación anterior por ende mejorar la estructura de la
4	clase para que los alumnos construyan conocimiento significativo.
5	La secuencia se modificó de la siguiente manera:
6	Actividades
7	Presentación ante el grupo
8	Juego de adivinar números, con su respectiva institucionalización de las partes de una expresión
9	algebraica.
10	Geometría para calcular: utilizando diferentes figuras geométricas se calcularán sus perímetros,
11	llenando una tabla donde vayan de lo aritmético a lo algebraico.
12	A medir contornos: resolverán situaciones en donde tienen que realizar sumas y restas de contornos
13	de figuras, utilizando expresiones algebraicas.
14	Los tapetes de Rosa: resolverán situaciones en donde habrá que localizar el perímetro de figuras
15	geométricas, en donde se les dará la medida de alguno de los lados de manera algebraica.
16	Se modificó mediante la observación de una de las situaciones problemáticas presentadas en la
17	actividad de la cual se realizaron preguntas a los estudiantes con el fin de que reflexionen sobre lo que
18	realizan y sean capaces de asimilarlo y por ende argumentarlo.
19	Cuadros mágicos para cerrar la clase.
20	En los que tendrán que realizar adiciones y sustracciones de expresiones algebraicas.
21	En la primera actividad el juego de números, se observó durante la ejecución que a los alumnos les
22	motivo la idea de que la primera actividad inicial después de la presentación fuera un juego, se
23	mostraron muy participativos, el maestro pudo observar que la mayoría de los alumnos

	realizaban las
24	operaciones, posteriormente cuando se realizó la tabla en el pizarrón varios alumnos participaron, se
25	observó que a otros que deseaban participar, podemos decir que el juego les gustó.
26	Es importante señalar que el propósito de esta actividad era que el alumno transite de un lenguaje
27	común al decirles las reglas del juego, a un lenguaje aritmético, puesto que se llegaba a un resultado
28	esto sucedía cuando de manera individual cada estudiante realizaba operaciones en su cuaderno para
29	llegar a dicho resultado; posteriormente en plenaria el docente trata que el estudiante después de probar
30	con varios números para verificar que en todas las ocasiones se cumple dicho resultado, con ello
31	incentivar a los mismos educandos a descubrir una expresión general que sirva para cualquier número
32	pensado.
33	Después de observar la ejecución creemos que esta actividad cumplió parcialmente con los objetivos
34	propuestos ya que los alumnos pudieron llegar a la expresión general con la orientación del maestro;
35	En esta etapa de mejoras consideramos que es importante en la parte final de esta actividad que el
36	docente retome la expresión general y de alguna manera se pudiera decir que se institucionalice las
37	partes de una expresión algebraica como son:
38	$2x^2$ Coeficiente Exponente Literal
39	Consideramos que con esta actividad se pretende que el alumno conozca la sintaxis del lenguaje
40	algebraico, pues de acuerdo con Freudenthal (1992) el lenguaje algebraico, frecuentemente se.
41	subestima y no es explicativo por sí mismo, ya que su sintaxis consiste en un largo número

de reglas basadas en principios que, parcialmente, contradicen el lenguaje cotidiano y el lenguaje de la aritmética y que, además, son mutuamente contradictorios

En esta actividad anexamos una tabla, así el alumno podrá identificar el exponente, la literal y el coeficiente de cada expresión algebraica.

Instrucciones: Completa la siguiente tabla, observando las expresiones algebraicas siguientes e identificando cada una de sus partes, anótalas en la columna correspondiente.

Expresión	Coeficiente	Exponente	Literal
$6m^3$			
$-4bx$		1	
xy			xy
x^2	1		
$-7a^2$			

Posterior a la tabla, el maestro tiene que enfatizar en los siguientes aspectos mediante el análisis de la tabla, realizado en plenaria.

Que, si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1), lo mismo sucede cuando el exponente no está indicado.

Que existen coeficientes negativos.

Que una expresión algebraica puede tener una o más literales.

Es importante hacer saber a los estudiantes que una expresión algebraica puede constar de uno o varios términos, de acuerdo a ellos se le nombran monomio, binomio o polinomio.

Asimismo, en otra lista de expresiones algebraicas en la parte de adelante clasifique, según los términos de la expresión en monomios, binomios o polinomios.

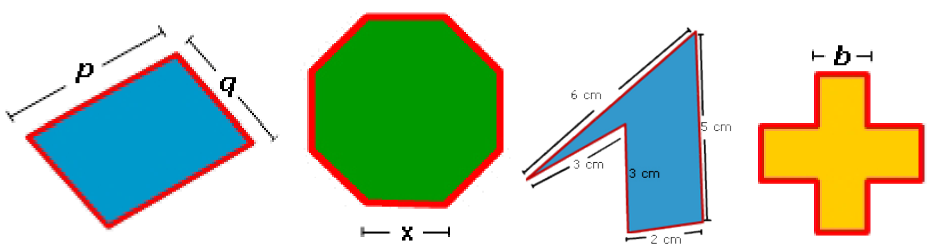
Expresión algebraica	Clasificación
$4m + x + 7a$	

66	-x +2x
67	8m
68	$a^3 + a^2 - a$
69	$9ax + 7mn – 3x^2$ Polinomio
70	De acuerdo con esta aportación es importante que a través de las tablas anteriores se vaya
71	familiarizando con algunas reglas del lenguaje algebraico, así como la definición de expresión
72	algebraica.
73	Las actividades propuestas en esta actividad se introducen con el propósito de evidenciar los
74	conocimientos en el profesor que en la planeación realizada anteriormente no se lograron demostrar,
75	es preciso aclarar, que no fue posible;
76	Sin embargo, pretendemos que con las mejoras realizadas a esta actividad se pueda demostrar su
77	existencia.
78	En la siguiente tabla puntualizamos los conocimientos del profesor movilizados en el modelo MTSK.
79	Subdominio Categoría Indicador Evidencia
80	KoT
81	*Definiciones*
82	Conoce la definición de expresiones algebraicas.
83	Al final de la clase cuando el maestro hace referencia a las partes de la expresión algebraica como tal,.
84	permite a sus alumnos el conocimiento y comprensión de las mismas
85	KSM
86	*Conexiones de complejización*
87	El profesor sabe que una ecuación está constituida por dos expresiones algebraicas.
88	Cuando el alumno asimila las partes de la expresión algebraica, el docente pretende que el alumno se
89	dirija a establecer una conexión con las ecuaciones, que abordará en los contenidos posteriores;.
90	esperando que el estudiante pueda hacer una identificación y reconocimiento de las

	expresiones
91	algebraicas como una parte de una ecuación
92	*Conexiones de simplificación*
93	Conoce que una expresión algebraica, es aquella que contiene números, variables y operaciones
94	aritméticas.
95	Es evidente cuando los alumnos realizan las operaciones aritméticas que lo llevarán al resultado
96	pedido, para posteriormente encontrar la expresión algebraica general.
97	KFLM
98	*Formas de interacción con los alumnos y el contenido matemático*
99	Sabe cómo utilizar el lenguaje algebraico
100	Cuando el alumno resuelva las tablas planteadas por el maestro, se pretende que se familiarice con
101	las partes de una expresión algebraica, para que posteriormente las utilice sin dificultad, como una
102	forma de comunicación dentro.
103	En la siguiente actividad de *cuadrados y rectángulos* no fue posible identificar las categorías de
104	fenomenología y definiciones del subdominio KoT.
105	Lo cual nos lleva a observar y agregar una actividad en la cual se refleje la fenomenología, es decir, el
106	cambio hacia el álgebra, por tal razón se agregó la tabla en donde los estudiantes reflejarán este cambio
107	de lo aritmético a una expresión algebraica, con el cálculo de perímetros.
108	Asimismo se puede dar evidencia de que conoce al menos la definición en la que se expresa que una
109	expresión algebraica es una escritura simbólica de un cálculo aritmético.
110	Por otro lado en un primer acercamiento no logramos observar la conexión transversal que tiene, sin
111	embargo es posible ver como el profesor conoce que un tema transversal que se logra trabajar es el
112	cálculo de perímetros y áreas, aunque en esta primer actividad se visualiza sólo el perímetro el profesor

113	sabe que ambos temas van a la par para el trabajo con expresiones algebraicas, sabe que el perímetro
114	de una figura geométrica conserva la propiedad aditiva.
115	Después de un trabajo en el que se recaudó información para considerar el KPM de las expresiones
116	algebraicas, pudimos localizar diferentes lecturas tales como: Ruiz, Bosh y Gascón (2011) señalan a
117	las expresiones algebraicas como una escritura simbólica de un programa de cálculo aritmético, que
118	en general **sirve para modelizar tanto el proceso de resolución de un problema aritmético como**
119	**su estructura**, lo cual nos lleva a reflexionar que la expresión algebraica es utilizada para modelizar
120	un proceso de resolución aritmética, considerando entonces como un lenguaje que permite generalizar
121	los cálculos aritméticos.
122	Por otro lado Kieran y Filloy (1989)expresa que el álgebra es manejar lo desconocido, invertir y
123	deshacer operaciones, ver lo general en lo particular, así como también dar significado a los símbolos.
124	Por otra parte Socas 2011, expresa de igual manera que el álgebra es un conjunto de razonamientos
125	que debieran de cambiar, para poder usarla y señala que la podemos ilustrar tomando como referencia
126	el trabajo de Drijvers y Hendrikus (2003), entre otros autores, en la que el Álgebra tiene sus raíces en
127	la Aritmética y depende fuertemente de su fundamentación Aritmética, puesto que la Aritmética tiene
128	muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente.
129	Asimismo hace una diferenciación entre lo que se ha conocido como pre-álgebra y Early álgebra”,
130	donde se considera el álgebra en una concepción amplia que abarca el estudio y generalización de
131	patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación
132	del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la

	modelización (Kaput,
133	1998, 2000; Schliemann, et al., 2003), comprende en definitiva la instrucción a alumnos de 6 a 12 años
134	tanto del razonamiento algebraico como de las relaciones algebraicas.
135	Estas aseveraciones nos llevan a consensar que el álgebra sí bien no es sólo un simbolismo, sí parte de
136	una generalización o modelización aritmética, lo cual permitirá hacer un cambio de pensamiento,
137	llevando al estudiante a razonar, invertir y deshacer operaciones, así como generalizar y desarrollar
138	estructuras abstractas de cálculos y relaciones.
139	Considerando que una expresión algebraica se utiliza como un símbolo el profesor conoce esta práctica
140	y a su vez sabe que el álgebra en general es una herramienta matemática que permite un razonamiento,
141	generalización y por tanto una modelización, que será utilizada como tal en las matemáticas.
142	Consideramos que con la tabla que se agregó a la actividad es posible que el alumno perciba la relación
143	que existe entre cantidades por medio del valor numérico de una expresión algebraica; es decir, al
144	completar la tabla el alumno percibirá como se relacionan las cantidades y podrá asimilar que una
145	literal se puede sustituir por un número; de acuerdo con Trigueros, Ursini, Escareño y Montes (2005)
146	La variable puede ser usada como número general, abarca la interpretación de una literal como la
147	representación de un número, el reconocimiento de patrones y deducción de métodos generales:
148	tautologías, fórmulas y parámetros en ecuaciones.
149	Por otro lado, el cambio de algunas figuras geométricas en la actividad, permitirá identificar que el
150	profesor parte de una de las concepciones que tienen los estudiantes, pues admite que el estudiante
151	utilice la concepción que tiene de las operaciones “ordinarias” e ir modificándola para utilizar al

152	álgebra como lenguaje matemático.			
153	La actividad quedará de la siguiente manera:			
154				
155	Se les entregará el mismo material de cuadrados y rectángulos y se les pedirá que modifiquen los			
156	valores de la figura, partiendo de la aritmética, y que llenen la siguiente tabla y después de algunos			
157	cuadrados y rectángulos cambiar la forma para que no sean figuras prototipo.			
158		Largo	Ancho	Perímetro
159		2	3	10
160		3	4	14
161		4	4	16
162		a	a	$4a$
163		a	b	$2a + 2b$
164		$2a$	$3b$	$4a + 6b$
165				
166	Esta actividad pretende que el estudiante observe que las expresiones algebraicas conservan un valor			
167	numérico; como los sustenta Trigueros, Ursini, Escareño & Montes (2005) se percibe a la variable			
168	como una en una relación funcional se refiere al reconocimiento de que existe una correspondencia			
169	entre los valores de las variables involucradas, la determinación de una de las variables cuando se			
170	conoce el valor de la otra; identificando a su vez la relación entre cantidades y la variación de una			

171	cantidad que afecta a la otra independientemente de cómo se proporcione la información (verbal, tabla
172	o gráfica).
173	Dominio Subdominio Categoría Indicador Evidencia
174	Conocimiento Matemático (MK)
175	KoT
176	*Fenomenología*
177	Sabe que la expresión algebraica es un cambio de símbolo de lo aritmético a lo algebraico.
178	Cuando se les pida que completen la tabla, se puede observar que inicialmente se trabaja en con
179	aritmética y posteriormente con expresiones algebraicas.
180	*Definiciones*
181	Conoce que una de las definiciones, de la expresión algebraica expresa que es una escritura simbólica
182	de un cálculo aritmético.
183	En el momento en el cual se les pedirá a los estudiantes que hagan un cambio de las operaciones
184	aritméticas a las operaciones algebraicas.
185	KSM
186	*Conexiones transversales*
187	Sabe que se puede establecer una conexión transversal haciendo uso del el perímetro.
188	Sabe que el perímetro de una figura geométrica conserva la propiedad aditiva.
189	Cuando el alumno utilice diferentes figuras geométricas, y pedir que calcule el perímetro, realizará
190	una adición de expresiones algebraicas.
191	KPM
192	*Prácticas ligadas a una temática en matemática*
193	Sabe que una expresión algebraica puede generalizar un número.
194	Al identificar un cambio de lenguaje y poder utilizar al álgebra como indicador que generaliza el
195	cálculo que realicen.
196	KFLM

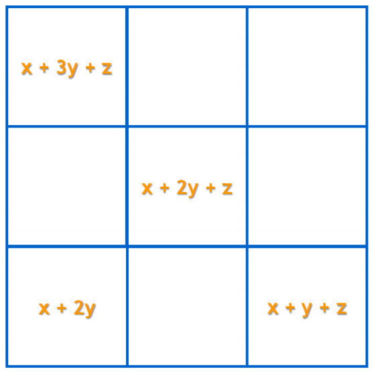
197	*Concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas*
198	Sabe que una de las concepciones de los alumnos es la suma aritmética.
199	Cuando el profesor les pida a sus estudiantes que calculen el perímetro y lo escriben en la tabla.
200	En la tercer actividad "Los tapetes de Rosa", consideramos pertinente realizar algunas mejoras, con
201	base en el registro que obtuvimos de la ejecución puesto que la actividad fue buena, sin embargo
202	observamos un poco de complejidad para los estudiantes, asimismo observamos que faltó concretar
203	en la suma de expresiones algebraicas, pues aunque en la actividad los alumnos realizan la suma de
204	expresiones algebraicas, analizando sería conveniente que reflexionaran y pudieran argumentar como
205	lo hacen para tratar de llegar a un algoritmo o procedimiento que les signifique la mejor manera de
206	realizarlo, por otra parte nos parece pertinente en esta actividad comenzar a introducir expresiones
207	algebraicas con coeficientes negativos.
208	El propósito de mejorar esta actividad es pretender que los alumnos concluyan que para realizar la
209	suma de expresiones algebraicas se tienen que agrupar los términos semejantes y realizar la operación
210	con sus coeficientes conservando la parte literal.
211	Es preciso para ello que los alumnos se familiaricen con las características de los términos semejantes
212	y tengan la capacidad para identificarlos con ello conseguir que las sumas de expresiones algebraicas
213	tengan significados.
214	Para ello en la actividad los tapetes de rosa se reducen dejando como contenido dos problemas en los
215	cuales los alumnos se concentren en obtener el perímetro; tomando en cuenta que esa no es la
216	verdadera intención de la actividad sino sumar expresiones algebraicas.
217	Al final se les presenta una figura simulando un tapete con las expresiones algebraicas de

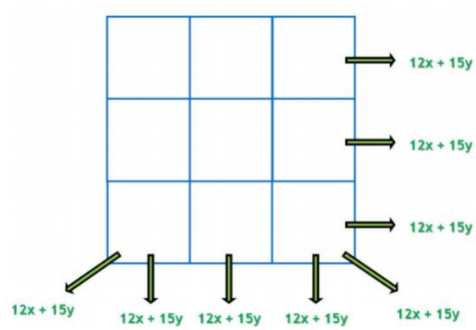
	cada uno de
218	sus lados pero con la instrucción de realizar la suma del perímetro agrupando directamente los términos
219	semejantes, para que puedan sumarlos y visualizar que las expresiones resultantes pueden ser
220	equivalentes.
221	Por último se cuestiona a los estudiantes sobre lo que han realizado y se concluye con la argumentación
222	por parte de ellos sobre el procedimiento para la suma de expresiones algebraicas, se pretende que el
223	alumno pueda ver a las letras y a los signos como símbolos para apropiarse del lenguaje algebraico
224	pues de acurdo con Godino Font, (2003) los signos o símbolos pueden representar cualquier tipo de
225	situación entre los que destaca:
226	Representación icónica: este tipo de representación permite representar una situación por medio de
227	dibujos, figuras o iconos que tengan algún tipo de parecido con aquello que se representa.
228	Representación simbólica: este tipo de representación va ligada a la competencia lingüística y permite
229	representar las situaciones mediante símbolos.
230	Consideramos que ese sería el objetivo principal de esta actividad que el alumno pueda desarrollar su
231	competencia lingüística para que perciba a los signos, símbolos o íconos como los llama Godino y
232	Font, (2003) como parte del lenguaje algebraico y como una forma de comunicarse.
233	Esto es percibido cuando el alumno argumente el procedimiento para realizar la suma de expresiones
234	algebraicas, en realidad está realizando una reducción de términos semejantes, cuando logre realizarlo
235	el estudiante posiblemente reconocerá las literales como símbolos que forman parte del lenguaje
236	algebraico.
237	Es importante que el docente retome oraciones en las que el alumno pueda representar una situación

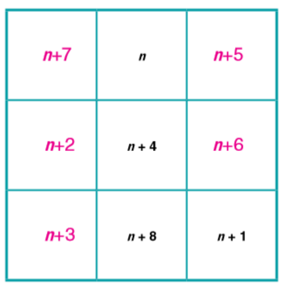
238	dada en lenguaje común a la representación por medio de una expresión algebraica, con ello percibirá
239	que el lenguaje algebraico puede ser una manera de comunicarse.
240	Al maestro pedirá a sus estudiantes representen las siguientes oraciones con una expresión algebraica.
241	Un número cualquiera: x
242	El doble de un número: 2x
243	La mitad de un número:
244	La suma de dos números:
245	El producto de dos números:
246	Concluimos esta actividad con la instrucción del maestro para que los estudiantes realicen una serie
247	de sumas con monomios con la intención de poner en práctica las propiedades de la suma algebraica
248	como unicidad, asociativa, distributiva, el elemento neutro de la adición, el inverso aditivo en el caso
249	de los coeficientes negativos; para que el alumno se involucre más con el tópico y le sea más fácil
250	resolver posteriormente problemas que involucren la suma de expresiones algebraicas.
251	Obtén el resultado de:
252	$x + x =$
253	$-x + x =$
254	$3a + 3 =$
255	$5b + 5b^2 =$
256	$7a + 2b – 3a =$
257	$8b + a + 2x^2 -a =$
258	$(15m + 5) + (2m +3b) =$
259	$(2a – 3x) + (2x + 2) + (5m – 2a – 3)=$
260	Consideramos que los docentes al planear una clase o al diseñar o elegir actividades acorde a sus
261	necesidades y las de sus estudiantes, está poniendo en juego distintos conocimientos.
262	En el análisis de la actividad propuesta en la primera planeación observamos que se identificaron los

263	conocimientos en los diferentes subdominios KoT, KSM, KPM, KFLM, KMT y KLMS.
264	Aunque no fue posible evidenciar la categoría conexiones de simplificación dentro del subdominio
265	KSM, así como el KPM, de la misma manera, el KMLS en la categoría secuenciación de diversos
266	temas.
267	Con la modificación de la actividad se pretende que el profesor utilice y demuestre que dichos
268	conocimientos se encuentran presentes:
269	Subdominio Categoría Indicador Evidencia
270	KSM
271	*Conexiones de simplificación*
272	Conoce que se puede establecer una conexión con aritmética al utilizar expresiones algebraicas por
273	medio de la operación suma.
274	Es evidente cuando los alumnos realizan las operaciones aritméticas que lo llevarán al resultado
275	pedido, para posteriormente encontrar la expresión algebraica general.
276	Es evidente en la parte final de esta actividad que el alumno perciba que está realizando una suma
277	tomando las literales como números.
278	KPM
279	*Practicas ligadas a una temática en matemáticas*
280	Sabe que se puede utilizar una expresión algebraica como la representación de un número.
281	En la primera parte de la actividad se percibe como un número que se utiliza para obtener el perímetro.
282	KMLS
283	*Contenidos matemáticos que se requieren enseñar*
284	El profesor conoce que uno de los estándares de aprendizaje es: transitar del lenguaje cotidiano a un
285	lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.
286	Se puede observar en esta actividad cuando el alumno está representando las oraciones que son

287	dictadas por su maestro y las representa con una expresión algebraica.
288	Para la *evaluación* se consideraron unos cuadros mágicos y se logró identificar algunas dificultades
289	que mostraron los estudiantes, así que considerando esto, se propuso cambiar el cuadro mágico y
290	agregar un poco de dificultad, asimismo se ha considerado reducir el número de cuadros, dejando
291	solamente dos en los cuales es posible que como conexión transversal se vea, que el profesor sabe que
292	las restas de expresiones algebraicas son necesarias en el tema de expresiones por tal motivo las toma
293	en cuenta, como conexión auxiliar se puede visualizar el uso del cuadro mágico, donde el funge como.
294	tal para realizar sumas y restas en expresiones algebraicas, y el profesor sabe que puede ser útil
295	Asimismo se ven reflejadas las formas de enseñanza y aprendizaje al abordar un cuadro mágico siendo
296	como un juego y puede resultar favorable para que el alumno comprenda y aplique las operaciones
297	con expresiones algebraicas.
298	De igual manera el profesor sabe que el álgebra se puede utilizar como generalizador de operaciones
299	y lleva a los estudiantes a realizar diferentes operaciones, en este momento se puede dar evidencia de
300	que conoce el uso de las expresiones en una matemática general, asimismo las utiliza como símbolos
301	dejando de evidente que conoce su *definición, uso y origen.*
302	La actividad queda de la siguiente manera:
303	Los siguientes cuadrados son mágicos, debido a que si sumas de manera vertical, horizontal y diagonal
304	las cantidades que están en las casillas el resultado, siempre será el mismo.
305	Completa correctamente los cuadrados mágicos para que sean mágicos.
306	







307	Subdominio Categoría Indicador Evidencia
308	KSM
309	*Definiciones*
310	Conoce que una de las definiciones de la expresión algebraica es la combinación numérica de números,
311	letras y signos de operación.
312	Al observar los ejercicios de evaluación, el estudiante se dará cuenta de la definición.
313	*Conexiones transversales*
314	Sabe que se puede establecer una conexión transversal por medias las restas de expresiones
315	algebraicas.
316	Cuando el alumno este resolviendo los cuadros mágicos y utilice la propiedad del inverso aditivo
317	para realizar la resta de expresiones algebraicas.
318	*Conexiones auxiliares*
319	Sabe que puede utilizar un recurso material, diferente que permite poner en práctica lo aprendido en
320	el aula.
321	Pueden utilizar y responder correctamente los cuadros mágicos.

322	KFLM
323	*Formas de aprendizaje*
324	Sabe que una de las formas de aprendizaje es el uso de diferentes representaciones puede favorecer
325	el aprendizaje.
326	Cuando los estudiantes se muestren atraídos por la actividad se dan cuenta que es una manera de
327	representación diferente.
328	KMT
329	*Formas de enseñanza*
330	Sabe que la evaluación puede favorecer el aprendizaje.
331	Cuando los estudiantes resuelvan los cuadros mágicos, el profesor se dará cuenta si el alumno se
332	apropió del aprendizaje.

Anexo X: Cuestionario

Nombre: ____

Máximo grado de estudios: ____

Años de experiencia enseñando Matemáticas: ___________________________________

Por favor se le solicita contestar desde su propia postura y lo más ampliamente posible las siguientes cuestiones. Se les recuerda que la información personal es confidencial.

1. ¿Qué impacto tiene su conocimiento como profesor en el aprendizaje del alumno?

Objetivo: Comprobar la sensibilidad del profesor sobre su papel en el aprendizaje del alumno.

2. ¿Por qué considera que es importante el tema de adición de expresiones algebraicas dentro del desarrollo del pensamiento algebraico?

Objetivo: Corroborar el conocimiento del profesor sobre la importancia del tema en la adquisición del lenguaje algebraico y su impacto en futuros cursos de álgebra.

3. ¿Qué aspectos considera en la selección de estrategias para el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas?

Objetivo: Conocer si el profesor diseña las estrategias de enseñanza considerando las dificultades de aprendizaje del alumno y su aprendizaje.

4. ¿Qué papel juega el conocimiento previo del alumno a la hora de planificar y abordar el tema de adición de expresiones algebraicas?

Objetivo: Visualizar el conocimiento del profesor sobre las posibles concepciones erróneas, obstáculos de aprendizaje o dificultades que el alumno trae consigo a la hora de abordar el tema de adición de expresiones algebraicas, así como, las acciones que realiza el profesor para llegar a la comprensión o re- comprensión de los conocimientos previos de forma que pueda en la medida de lo posible garantizar la calidad de la enseñanza en el tema de adición de expresiones algebraicas.

5. ¿Cuáles son los posibles errores referentes al aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que usted anticipa antes de o al momento de preparar sus clases?

Objetivo: Corroborar el conocimiento del profesor sobre los errores, obstáculos y dificultades que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas.

6. ¿A qué cree usted que se debe que los estudiantes estén presentando este tipo de errores?

Objetivo: Visualizar la conciencia del profesor sobre el papel del plan de estudios, el conocimiento del profesor, las concepciones de corte afectivo, las capacidades y ritmos de aprendizaje, etc. de los alumnos como amalgama para llevar al alumno al aprendizaje.

7. ¿Cómo evita que el alumno proceda de forma mecánica, sin razonar lo que está haciendo?

Objetivo: Visualizar la las habilidades y capacidad del profesor de detectar la falta de comprensión del alumno y sus estrategias de intervención para brindarle la atención oportuna aún y cuando éstas no estén planificadas.

8. ¿Qué papel juegan los diferentes registros de representación de una expresión algebraica en el aprendizaje del alumno?

Objetivo: Indagar en el conocimiento del profesor sobre el diseño de actividades propuestas para el aprendizaje del estudiante, el sustento que lo llevo a la elección de estrategias de las mismas.

9. ¿Qué errores ha observado se presentan en el tránsito de un registro de representación a otro?

Objetivo: Corroborar el conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje durante la ejecución o evaluación observadas o previstas desde la planificación y por las cuales se eligieron las estrategias.

10. ¿Qué aspectos verifica para corroborar que el alumno está comprendiendo el tema?

Objetivo: Verificar el conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje en el aula, así como su capacidad de modificar la planificación en la ejecución, considerando que el alumno no está aprendiendo.

11. ¿Qué entiende por confusión?

Objetivo: Comprender que entiende el profesor por confusión.

12. ¿Cómo detecta que un alumno se ha confundido cuando aborda el tema de adición de expresiones algebraicas? ¿A qué se debe?

Objetivo: Comprender el conocimiento del profesor sobre las formas en que la confusión impacta el aprendizaje de los estudiantes, y el origen de éstas.

GRACIAS!!!

Anexo XI: Respuestas cuestionario M1

1	¿Qué impacto tiene su conocimiento como profesor en el aprendizaje del
2	alumno?
3	Considero que si bien es cierto que el aprendizaje del docente no garantiza que
4	el alumno aprenda, si puede facilitar su aprendizaje, ya que el docente tiene
5	que tener claro cuál es su objetivo y hasta donde quiere llevar al estudiante.
6	Pudiera decir que desde mi perspectiva el conocimiento docente permitirá
7	gestionar los conocimientos y la manera adecuada para lograr que el alumno
8	pueda obtener su propio conocimiento.
9	Siento que el aprendizaje del estudiante depende del conocimiento que el
10	profesor posea y de la manera en la cual el profesor lo utilice en el proceso de
11	enseñanza aprendizaje.
12	El conocimiento que el profesor posee le permitirá entender un poco sobre la
13	manera de pensar del estudiante, asimismo detenerse a pensar en las posibles
14	complicaciones que el estudiante tendrá al estar involucrado con algún
15	contenido y encontrar la manera más efectiva para gestionar el aprendizaje de
16	los estudiantes; ya que si yo como docente tengo poco o nulo conocimiento
17	sobre un tópico, resultará muy difícil encontrar la forma adecuada para que el
18	estudiante adquiera ese conocimiento.
19	¿Por qué es importante el tema de adición de expresiones algebraicas dentro
20	del desarrollo del pensamiento algebraico? Considero que el desarrollo del pensamiento algebraico es uno de los objetivos
21	de los planes y programas de matemáticas en la educación secundaria.
22	El lenguaje algebraico sirve para expresar situaciones relacionadas con la vida
23	cotidiana, utilizando letras y números de forma combinada.
24	El desarrollo del pensamiento algebraico es una meta muy compleja, que
25	implica un proceso evolutivo en el pensamiento del estudiante.
26	Así como en aritmética las operaciones básicas son adición sustracción
27	multiplicación y división. En el lenguaje algebraico, considero que una de las

bases del lenguaje algebraico es la adición de expresiones algebraicas, ya que las operaciones con expresiones algebraicas es un contenido con el cual el alumno tiene que familiarizarse, en especial cuando el alumno comprenda la adición de expresiones algebraicas, este contenido lo llevará a otros contenidos relacionados como la multiplicación y sus propiedades.

¿Qué aspectos considera en la selección de estrategias para el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas?

- Pues considero que como base me fijo en los temas relacionados con el contenido matemático, en este caso adición de expresiones algebraicas tomo en cuenta: objetivo de aprendizaje: es decir me pregunto ¿Qué conocimientos pretendo que el alumno adquiera? Es importante que el maestro domine el contenido matemático para facilitar al momento de elegir las estrategias de aprendizaje. En caso de no ser así debe esclarecer todas sus dudas y ampliar su conocimiento.

Las características de mis estudiantes, es decir las posibles fortalezas o dificultades que los alumnos de manera personal tienen o pueden desarrollar.

- Las posibles dificultades que los alumnos manifiestan al enfrentarse con la adición de expresiones algebraicas. En este tópico, como docente nos enfrentamos con dificultades naturales, las llamo así porque estoy consciente que un alumno al salir de la primaria cree que las matemáticas son difíciles y considera que aritmética es lo único que existe. Cuando llega a secundaria, se rompe ese esquema, ya que el alumno enfrenta un nuevo reto, es decir, el alumno tiene que desarrollar el pensamiento algebraico. Se enfrenta con otra parte de las matemáticas que el no conocía, esto le genera una dificultad, una confusión en su pensamiento. Además existen otras dificultades propias del tópico debidas a que un tema no solo involucra un contenido sino varios a la vez, en este caso involucran la expresión algebraica, la adición, números con signo.

57	• Saberes previos, es importante saber de dónde partir, que el maestro
58	sepa cuales conocimientos de los alumnos potencializar, que tanto
59	avance tienen ellos en cuanto a dicho concepto.
60	¿Qué papel juega el conocimiento previo del alumno a la hora de planificar la
61	adición de expresiones algebraica?
62	Pues contesté un poco de esta pregunta en la respuesta anterior, considero que
63	los saberes previos serán el parte aguas de la clase. Pues te muestran desde que
64	momento partir, que parte de la clase debes enfatizar, asimismo algunas de las
65	dificultades que puedes enfrentar.
66	Los conocimientos previos son el punto de partida sobre el cual se van a
67	formar nuevos conocimientos, son los cimientos por así llamarlos de nuevos
68	aprendizajes.
69	Considero la importancia de explorar los conocimientos previos en los
70	estudiantes porque con base en ello se diseñarán situaciones didácticas con
71	actividades adecuadas que permitan la explotación de esos conocimientos
72	previos, es decir enfrentar al alumno a sus ideas para reflexionar sobre ellas y
73	descubrir nuevos conocimientos; de la misma manera por medio de los
74	conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos
75	errores y dificultades que el estudiante posee; ya que los conocimientos previos
76	pueden estar apegados a sus creencias, mismas que pudieran estar
77	equivocadas.
78	¿Cuáles son los errores referentes al aprendizaje de adición de expresiones
79	algebraica que usted anticipa antes de o al momento de preparar sus clases?
80	Definitivamente en el transcurso de mi trabajo docente me he enfrentado con
81	diferentes errores que me permiten ahora anticiparme un poco antes de
82	planear la clase.
83	En cuanto a la adición de expresiones algebraicas puedo mencionar tres errores
84	más comunes a los que me he enfrentado.
85	• Falta de significado; es decir, en cuanto al signo negativo el alumno
86	tiende a realizar una resta pues para ellos el signo más en aritmética

representa una adición y ellos pretenden que en álgebra sea de la misma manera.

- En cuanto a las literales: el error al cual me anticipo en la planeación, sería que los estudiantes tienden a darle un valor siempre para que la expresión algebraica siempre tenga un valor numérico. Por ejemplo, si tienen “2x” eliminan la “x” y solo dicen “2”, entonces 2x=2
- En cuanto al signo igual siempre sucede algo parecido, el estudiante al encontrarse con un signo igual ellos la mayoría de las ocasiones tienden a cerrarlo en un valor numérico que obtienen de la expresión algebraica que está antes o después del signo igual.
- Los errores del álgebra ocasionados por las características del lenguaje. Uno de ellos es la concatenación en expresiones aritméticas es de suma, mientras que en el álgebra se pueden dar concatenaciones de multiplicación y suma. Por ejemplo 3x tiene una concatenación de multiplicación, muy frecuentemente los alumnos no llegan a entender la diferencia.

Esos son de los errores que ahora tengo presentes en este momento y que contemplo a la hora de realizar mi planeación.

Cabe mencionar que esos errores, al presentarse en clase, llevan al alumno a cometer otros errores.

¿A qué cree que se debe que los estudiantes estén presentando este tipo de dificultades?

Considero que los errores antes mencionados pueden provenir de un origen diferente como:

- Es un momento difícil el paso de aritmética al algebra, pues como ya mencione en alguna pregunta de la entrevista; hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética.
- Pudiera ser que otra causa fuera la ausencia de sentido, es decir el alumno no se encuentra suficientemente familiarizado con el lenguaje

algebraico y esto hace que no lo utilice de manera adecuada es decir no comprende que las literales pueden tomar valores diferentes, es difícil para él entender que existen expresiones negativas o positivas y que no necesariamente cuando exista un signo igual tendrá un valor numérico.

- Otro posible origen de los errores que se presentan con relación a este tópico pudiera ser el valor afectivo, es decir las creencias que el alumno posee y que son difíciles de cambiar, por ejemplo creen que en matemáticas no se pueden utilizar letras, solo numero, esto los conduce a crear esa creencia la cual puede ser resistente al cambio y lo conduce a formar cierta resistencia en cuanto al lenguaje algebraico. Este tipo de errores impide que los alumnos intenten realizar un ejercicio o resolver un problema.

¿Cómo evita que el alumno proceda de forma mecánica, sin razonar lo que está haciendo?

Es difícil esta pregunta, pero creo que para evitar que el alumno no proceda de manera mecánica, él debe razonar reflexionar y construir su propio conocimiento.

Para lograrlo como docente debo evitar el actuar de manera tradicionalista, es decir que el maestro provea una clase completamente expositiva donde el alumno sólo sea un receptor de conocimientos hará que el alumno mecanice lo que está viendo y escuchando.

¿Cómo puedo hacer que el alumno reflexione, analice y construya su propio conocimiento? Pues por medio de la planeación, es decir, con las secuencias didácticas que yo utilice podre favorecer que los estudiantes se enfrenten a sus ideas, las movilicen y construyan nuevos conocimientos, las actividades que yo incluya dentro de la secuencia didáctica me permitirán movilizar los saberes de mis estudiantes.

Para este tópico planeo mis cases con base a la teoría de situaciones didácticas. Es decir, en la secuencia didáctica adecuada que yo utilizo esta las cuatro fases de esta teoría que son: Acción, Formulación, Validación e Institucionalización.

Es muy importante comenzar con la exploración de los conocimientos previos en la fase de acción esto permitirá enfrentar a los alumnos a sus propias ideas y con ello pasar por las distintas etapas de la clase. Cabe mencionar que no solo se puede utilizar una teoría dentro de una secuencia didáctica, desde mi perspectiva.

¿Qué papel juega los diferentes registros de representación de una expresión algebraica en el aprendizaje del alumno?

El hacer que el alumno transite de un registro pretende que el alumno obtenga una mejor conceptualización de lo que es una expresión algebraica y le resulte más sencillo realizar distintas operaciones con ella entre ellas la adición de expresiones algebraicas. Es importante comenzar con el registro numérico, ya que es con el único que el alumno se encuentra familiarizado, posteriormente llevarlo al registro grafico ya que resulta más atractivo para él y finalmente el registro algebraico que es al que se pretende llegar.

¿Qué errores ha observado se presenten en el tránsito de un registro de representación a otro?

Puede ser que se presente alguno de los errores antes mencionados. Sin embargo, he podido observar que en el momento que se utiliza el registro gráfico los estudiantes pueden cambiar el sentido de la actividad ya que como se utilizan figuras geométricas y su área, en este caso en específico, se hace uso de rectángulos y cuadrados, puede suceder que los alumnos se inclinen por pensar que el objetivo de la clase es la geometría; entonces el fin de la actividad ya no se cumple y se trunca la secuencia didáctica empleada. Otro error es en el registro algebraico es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales se emplean mal los datos, se omiten signos o se le asigna un valor a la variable.

¿Qué aspectos verifica para corroborar que el alumno este comprendiendo el tema?

Pues creo que la respuesta a esta pregunta es un poco complicada, espero haberla entendido.

Considero que para darme cuenta que el alumno comprendió me baso en varios aspectos. Como son:

Propósito de la sesión,

Los aprendizajes esperados ya que estos me darán pauta para continuar en cada sesión, me permitirán saber si mis estudiantes han obtenido dichos aprendizajes.

Los conceptos involucrados por ejemplo este tema involucra, equivalencias, números con signo, operaciones básicas por mencionar algunos; entonces tengo que fijarme si los están utilizando dentro del desarrollo de la clase.

Que las competencias empleadas por los estudiantes puedan ser visibles de acuerdo a la planeación.

Y al final de la secuencia didáctica, después de la institucionalización, se recurre a una pequeña evaluación con el propósito corroborar si el objetivo final se ha cumplido.

¿Qué entiende por confusión?

Es cuando los alumnos utilizan conceptos, contenidos o procedimientos equivocados en el desarrollo de un tema.

Pienso que la confusión está relacionada con las creencias del estudiante que lo llevan a utilizar conceptos equivocados. La confusión en un estudiante lleva al docente y al estudiante a cometer errores que si estos se repiten con cierta regularidad pueden convertiste en obstáculos.

¿Cómo detecta que un alumno sea confundido cuando aborda el tema de adición de expresiones algebraica? ¿A qué se debe?

Considero que todas las preguntas se relacionan.

En particular en este tema me doy cuenta si un alumno está confundido cuando no logra comprender el tema, es decir, presenta algunos de los errores antes mencionados como la ausencia de sentido, los errores de procedimiento.

Para erradicar la confusión en un estudiante es necesario que el alumno comprenda de manera amplia las expresiones algebraicas, es decir, dicho alumno será capaz de transitar de un registro a otro, así mismo podrá realizar la adición de expresiones algebraicas.

¿Cuál es el objetivo de lo que en su planificación nombra como institucionalización?

Como ya mencione antes, en el desarrollo de mi clase utilizo cuatro etapas.

- Fase de Acción: Es aquí donde se exploran los conocimientos previos.
- Fase de Formulación: en esta fase los estudiantes confrontan sus ideas
- Fase de Validación: en esta fase ellos comienzan a validar sus juicios.
- Fase de institucionalización: Es esta fase no menos importante que las demás es aquí donde como docente se reafirman los conocimientos obtenidos. En las otras fases el protagonista principal es el estudiante, pero en la fase de institucionalización el maestro es el encargado de reafirmar el concepto a trabajar, es en esta fase donde se cierra la secuencia didáctica, es aquí con la ayuda de todos como se construye el concepto que ha sido trabajado por los estudiantes durante toda la secuencia. Es importante porque considero que el alumno termina de construir su conocimiento en esta fase, pues si existía alguna duda del concepto, en esta fase se debe disipar, considero que en esta etapa el alumno gracias a la intervención del maestro puede clarificar sus conocimientos y obtener el aprendizaje esperado.

Anexo XII: Respuestas cuestionario M2

¿Qué impacto tiene su conocimiento como profesor en el aprendizaje del alumno? Creo que directamente tal vez no se vea el aprendizaje como tal haciendo “algo” en los alumnos, sin embargo, mi conocimiento me permite diseñar estrategias, organizar el contenido, planear las sesiones, preparar la información que se abordará, es decir con mi conocimiento realizó las actividades que me permiten transmitir y por lo tanto tener un impacto en los estudiantes.

¿Por qué considera que es importante el tema de adición de expresiones algebraicas dentro del desarrollo del pensamiento algebraico? Porque es una forma en la que se comienza a hacer claro la aplicación, aunque algunas veces se realiza de manera estricta, es una parte básica del operar con las expresiones algebraicas que fomentan y desarrollan el pensamiento algebraico de manera que puedan seguir construyendo conocimiento y habilidades.

¿Qué aspectos considera en la selección de estrategias para el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas? Pues primeramente el conocimiento previo de los estudiantes, acerca de lo que conocen del álgebra en general, para poder partir de esa idea más adaptable de que son parte indispensable de la matemática que permite facilitar el manejo de la misma.

¿Qué papel juega el conocimiento previo del alumno a la hora de planificar y abordar el tema de adición de expresiones algebraicas? Un papel fundamental, que permite partir de pensamientos pre-algebraicos de conocimiento en torno a trabajar con álgebra

¿Cuáles son los posibles errores referentes al aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que usted anticipa antes de o al momento de preparar sus clases? La dificultad de operar con los signos, y el querer cerrar las operaciones a una número en particular y a su vez a las literales “juntas” todas, es decir, hay que procurar que los aspectos de signo y agrupación de literales, hayan quedado ya aprendidos, de manera que pueda ser fácil operar con ellos.

¿A qué cree usted que se debe que los estudiantes estén presentando este tipo de errores? A la dificultad propia del contenido y también a la poca importancia que se le da en ciclos anteriores al desarrollo del pensamiento algebraico

¿Cómo evita que el alumno proceda de forma mecánica, sin razonar lo que está haciendo? Planteando situaciones que lo lleven a razonar el problema, que representen un reto y que dentro de lo posible no permita caer en una mecanización, es decir, que no sean sólo ejercicios por resolver.

¿Qué papel juegan los diferentes registros de representación de una expresión algebraica en el aprendizaje del alumno? De apoyo y guía para establecer una relación estrecha entre lo que puede manipular en un problema, lo que de alguna manera puede modelar y porque no lo que algún momento podrá graficar o tabular.

¿Qué errores ha observado se presentan en el tránsito de un registro de representación a otro? Creo que el mayor problema se presenta al graficar y tabular, esa representación “imaginativa” considero que es la que mayor dificultad tiene, al querer visualizar como un movimiento en un plano, que de cierta manera es imaginario para el adolescente.

¿Qué aspectos verifica para corroborar que el alumno está comprendiendo el tema? La aplicación, en los aspectos matemáticos y situacionales con otras aplicaciones, cómo la física en primera mano.

¿Qué entiende por confusión? Haber adquirido un conocimiento de manera errónea, muy parecida a la realidad, pero con ciertas rupturas que producirán un error en lo consecutivo.

¿Cómo detecta que un alumno se ha confundido cuando aborda el tema de adición de expresiones algebraicas? ¿A qué se debe? Cuando implementa en situaciones no aptas para la resolución con adición, la adición como método de respuesta.

¿Cuál es el objetivo de lo que en su planificación nombra como “institucionalización”? no lo nombro así… a qué te refieres?

Anexo XIII: Gráfico que relaciona el conocimiento del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas con otras categorías de conocimiento.