UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO DE LA UAPUAZ EN UN ESCENARIO DE LABORATORIO EMPLEANDO EL BINOMIO MODELACIÓN-GRAFICACIÓN

Tesis para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

Jaime Ramos Gaytán

Directores de Tesis

Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís
Dr. José David Zaldívar Rojas

Zacatecas, Zac., Diciembre 2015

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de tesis que lleva por nombre **"Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de bachillerato de la UPUAZ en un escenario de laboratorio empleando el binomio Modelación-Graficación"** y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el **C. Jaime Ramos Gaytán,** con número de matrícula 93401640, estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 7 de Diciembre del 2015

Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís
Universidad Autónoma de Zacatecas

Dr. José David Zaldivar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 3 del mes de Noviembre del año 2015, el que suscribe Jaime Ramos Gaytán alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato número de matrícula 93401640; manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado intitulado DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO DE LA UAPUAZ EN UN ESCENARIO DE LABORATORIO EMPLEANDO EL BINOMIO MODELACIÓN-GRAFICACIÓN bajo la dirección de los Doctores Eduardo Carlos Briceño Solís y José David Zaldívar Rojas.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Jaime Ramos Gaytán

Nombre y Firma del estudiante

Dedicatoria

A mis hijos Leo y Lalo que siempre han tenido fe en mí y han sido la inspiración de mis estudios.

A mí querida esposa Luz que siempre ha trabajado hombro a hombro y me ha apoyado en el desarrollo de este proyecto.

A mis padres y hermanos quienes siempre me han aconsejado y apoyado en las buenas y en las malas.

A mis compañeros de maestría con quienes tuve la oportunidad de convivir y trabajar.

A mis maestros y colegas.

Al grupo de estudiantes que con toda la disponibilidad desarrolló las situaciones planteadas.

Y a esa persona que por un tiempo estuvo esperando esta oportunidad y aceptó la revancha.

Agradecimientos

Al Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís por su tiempo, paciencia, ánimo, consejos y apoyo incondicional en todo momento durante la realización de este proyecto.

Al Dr. José David Zaldívar Rojas por sus pertinentes y buenas observaciones.

A la Universidad Autónoma de Zacatecas por su apoyo al proporcionar las condiciones para poder efectuar los estudios de posgrado.

A la Unidad Académica de Matemáticas por permitirme completar esta fase de mi formación profesional.

A mis profesores de la maestría por compartir sus conocimientos y estrategias de enseñanza.

A todos ustedes… Gracias

CONTENIDO

RESUMEN

La Matemática Educativa se ocupa de atender problemas que se presentan en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, particularmente desarrolla herramientas que permiten explicar cómo se construye, adquiere y difunde el conocimiento matemático. En esta investigación nos centramos en significados variacionales que se pueden obtener sobre la derivada cuando se incorpora el binomio Modelación-Graficación en un escenario de laboratorio experimental con el uso de tecnología. Tomamos como eje fundamental la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV). Se atienden algunas problemáticas documentadas que se generan en torno al aprendizaje de la derivada, las cuales reportan que el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la misma, suele restringirse al empleo de métodos algorítmicos o se privilegia el empleo de ciertas notaciones. Por otra parte, asumimos un rol importante para la gráfica de una función en un sentido más amplio que su representación visual, el cual la considera, en su uso, argumentativa en situaciones específicas para el cálculo diferencial. Estamos interesados en aportar evidencia de que el conocimiento matemático sobre la derivada no es preexistente, sino que su construcción es normada mediante prácticas sociales como la predicción y la modelación desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

En ese sentido se reportan resultados de situaciones experimentales que fueron rediseñadas considerando los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional, articulados con los elementos del binomio Modelación-Graficación y las construcciones de la Socioepistemología del Cálculo para una situación de variación. Con esta postura epistemológica de prácticas generamos un marco de referencia distinto a como usualmente se trabaja en el discurso Matemático Escolar, en donde el alumno de bachillerato al realizar la modelación de situaciones físicas concretas en un escenario de laboratorio, desarrolla su pensamiento variacional y resignifica la derivada.

De esta forma brindamos el rediseño de situaciones experimentales bajo la perspectiva variacional, donde el conocimiento sobre la derivada, se usa y a su vez, se resignifica.

Palabras clave: Modelación, graficación, tecnología, pensamiento y lenguaje variacional, derivada.

ABSTRACT

The Mathematics Education deals with addressing problems encountered in learning and teaching mathematics, particularly developing tools that explain how to build, acquire and disseminate mathematical knowledge In this research we focus on variational meanings that can be obtained on the derivative when the binomial Modeling-Use of Graphs on a stage of experimental laboratory with the use of technology is incorporated. We as a fundamental axis of the research Thought and Language Variational (PyLV). Some documented problems that are generated around learning of the derivative, which reported that the study of the teaching and learning of it, usually restricted to the use of algorithmic methods or the use of certain notations are favored are met. Moreover, we assume an important role in the graph of a function in a broader sense than its visual representation, which considers, in use, argumentative in specific situations for the differential calculus. We are interested in providing evidence that the mathematical knowledge of the derivative is not existing, but its construction is normed by social practices as forecasting and modeling from the Socioepistemological Theory of Mathematics Education.

In this regard results of experimental situations that were redesigned considering the elements Thought and Language Variational are reported, articulated elements Modeling-Use of Graphs and constructions of Socioepistemology of Calculus to a situation of variation. With this epistemological stance practices generate a different frame of reference to work as usual in the speech Mathematical School, where high school students to perform modeling of specific physical situations on stage laboratory develops its thinking and redefines the variational derivative.

Thus we provide redesign experimental situations under variational perspective, where knowledge about the derivative is used and in turn, it is redefined.

Keywords: Modeling, graphing, technology, thought and language variational, derivative.

INTRODUCCIÓN

En esta investigación se aborda una problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de un concepto de gran relevancia en la enseñanza del cálculo tanto por su relación con otros conceptos como por su aplicabilidad en diversas ramas científicas: la derivada. En el nivel medio superior este concepto es abordado en el quinto semestre, en particular en el bachillerato de físico-matemático de las preparatorias de la Universidad Autónoma de Zacatecas, donde me desempeño como docente. La motivación para realizar este estudio subyace, por una parte, en la experiencia que como docente he adquirido al impartir el curso de cálculo diferencial, misma que me ha permitido detectar ciertas deficiencias en el aprendizaje de la derivada, sobre todo cuando el alumno no sabe cómo y cuándo emplear el concepto de derivada en ciertas situaciones problemáticas; además recurrentemente estudiantes que han llevado el curso de cálculo diferencial emplean frases como: “esto en dónde se aplica”, “para sacar la derivada sólo hay que aplicarle la fórmula”, “qué le hago, con cuál fórmula”, entre muchas otras. Geométricamente se quedan más con la idea momentánea de que la derivada tiene que ver con la pendiente de la recta tangente, en este caso puntual. Por otra parte, se encuentran aportes de investigaciones en Matemática Educativa sobre la comprensión del concepto de derivada y la construcción de significados de la misma. Éstas reportan conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas por los alumnos y lo que se presenta formalmente en los libros de texto, la falta de contextualización, entre otras cosas. Coincidimos con algunas de ellas, en que la enseñanza de este tópico se suele centrar en lo algorítmico, el empleo de las reglas de derivación (fórmulas) o el tratamiento geométrico desconectado de lo numérico y lo algebraico. Por lo tanto se propone un acercamiento a la noción de derivada mediante la generación de un marco de referencia que permita resignificarla a través de la Modelación-Graficación y la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV). Es decir, de acuerdo con las observaciones que hace Cantoral (2013), conviene que el alumno de bachillerato reconozca aspectos constantes y variables en las gráficas de funciones empleando para ello no sólo la tabulación, el punteo y el trazo, sino además se auxilie con tecnología (software, calculadoras y sensores) al modelar una situación real, esto al trabajarse con la derivada.

En el Capítulo 1 se presentan los aportes de una serie de investigaciones que nos permiten clarificar, apoyar y delimitar la problemática que hemos detectado en la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Se da cuenta de las investigaciones que se centran en la enseñanza de la derivada, atendiendo algunas: las relacionadas con experiencias docentes y otras que se enfocan en distintos niveles educativos. Por otra parte, se presenta la derivada desde diferentes perspectivas de la matemática educativa, así como investigaciones que trabajan con los elementos teóricos que incorporamos en este proyecto: algunos aportes sobre la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional; la gráfica considerada mucho más que una simple representación de una función, es decir, la gráfica como generadora de argumentos sobre la derivada; el proceso de modelación matemática; los efectos de un entorno tecnológico sobre la enseñanza de la derivada. También se brinda una revisión de algunos textos que se utilizan con más frecuencia como apoyo en la Preparatoria de la Universidad Autónoma de Zacatecas para el estudio de la derivada, que se complementa con la derivada desde la perspectiva variacional. Cerramos el capítulo estableciendo la pregunta de investigación, el objetivo genera, los objetivos específicos y la hipótesis de la investigación.

El Capítulo 2 contiene la delimitación de marco teórico, se establecen los nexos entre nuestra problemática particular y las que son atendidas por la Socioepistemología. Describimos brevemente en qué consiste esta teoría, algunos elementos teóricos que empleamos en la investigación, sobre todo haciendo hincapié en la importancia que tiene la práctica social en la construcción de conocimiento matemático. En el cuarto apartado se retoman los elementos del binomio Modelación-Graficación y su incorporación en la investigación. También se adhiere la reorganización del cálculo propuesta por Cordero (1998), denominada Socioepistemología del Cálculo, particularmente en la situación de variación identificamos nuestra propuesta. En el apartado seis retomamos de la investigación de Caballero y Cantoral (2013) algunos elementos teóricos del PyLV que se emplean para justificar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, y finalizamos el capítulo con la descripción del escenario en que se desarrollaron las situaciones experimentales.

En el Capítulo 3 se presentan las consideraciones metodológicas del proyecto. Se describen las características de los sujetos de estudio y la forma de organizarlos, se detallan los instrumentos de recolección de datos, instrumento de diagnóstico y situaciones de variación (experimentos); así como las características de los medios tecnológicos utilizados para la recopilación de datos. También se establecen los materiales requeridos en cada situación, y los diferentes momentos de cada una. En total se implementaron tres situaciones en las cuales el eje rector fue la variación, y fueron complementadas con tres actividades de simulación en software de geometría dinámica.

El Capítulo 4 concentra el análisis de los datos que, describe las producciones de los equipos mediante extractos de registros escritos, de audios y videos. Lo anterior se lleva a cabo en cada momento de la situación. Se consensan en una tabla los significados, procedimientos, proceso-objeto y argumentaciones generados en cada experimento. Enseguida se conjunta esta Socioepistemología del Cálculo con los elementos del binomio Modelación-Graficación y se identifican estrategias variacionales y códigos variacionales que se ven reflejados en los argumentos variacionales. También se analizan las actividades de cierre, comparando lo que registran por escrito y lo que simularon en el software Geogebra.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo realizado, señalando logros y limitantes que se detectaron. Se incluyen algunas proyecciones de investigación derivadas de este trabajo, así como algunas reflexiones personales.

Después de las referencias se enlista una serie de anexos, éstos contienen, entre otras cosas, cada una de las situaciones de variación tal y como se implementaron, así como las imágenes de las simulaciones en Geogebra.

Capítulo I. Antecedentes

En este apartado se presentan algunos aportes de investigaciones realizadas en Matemática Educativa enfocados al estudio de la derivada: su enseñanza; experiencias docentes; propuestas de trabajo; y que emplean la graficación, la modelación y la tecnología para el estudio de la misma. Se analiza brevemente la conceptualización de la derivada en algunos libros de texto y desde la perspectiva variacional. Delimitamos las características del escenario de trabajo, y finalizamos estableciendo la problemática, pregunta, objetivos e hipótesis de la investigación.

I.1. Enseñanza del Cálculo: La Derivada

El problema de la enseñanza y aprendizaje del cálculo es mucho más complejo de lo que nos pudiéramos imaginar, en particular el aprendizaje de la derivada. Los resultados de numerosas investigaciones así lo evidencian. Por ejemplo Artigue (1995) reporta que si bien, se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, pero es difícil que logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento del cálculo; también señala que:

> ... la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio (Artigue, 1995, p. 97).

Al respecto Cantoral y Farfán (1998) reportan que tradicionalmente los cursos de precálculo se conforman por un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica. Influyendo en la enseñanza del cálculo en donde se sobrevaloran los aspectos analíticos y procedimientos algorítmicos, dejando de lado a los argumentos visuales o a los enfoques numéricos al no considerarlos como procesos plenamente matemáticos. Por lo que consideramos importante analizar investigaciones centradas en el profesor en este tópico matemático y que a continuación reportamos.

I.1.1. La Enseñanza de la Derivada en el Aula: Experiencias Docentes

Entre las investigaciones centradas en los profesores en relación a la noción de derivada podemos distinguir aquellas relativas al conocimiento del profesor sobre este concepto, y aquellas que investigan sobre la práctica del profesor.

Respecto de las primeras podemos mencionar el aporte de García, Azcárate y Moreno (2006), quienes estudian y caracterizan las concepciones y creencias del profesor universitario de matemáticas que enseña cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Destaca de sus resultados que casi todos los profesores siguen una metodología tradicional para enseñar el concepto de derivada, basándose en aspectos fisicomatemáticos o geométricos y descartando alternativas innovadoras relacionadas con el campo profesional del estudiante. Además, el desarrollo del tema de la derivada y sus aplicaciones es concebido y orientado por el profesor más a resolver ejercicios que a la resolución de problemas. También reportan que no existe una unificación de las concepciones entre los profesores para introducir la noción de derivada.

Por su parte Badillo, Azcárate, y Font (2011), analizan y describen los niveles de comprensión de profesores de matemáticas en ejercicio respecto del concepto de derivada, específicamente de la relación entre el objeto complejo derivada en un punto *f'(a)* y el objeto complejo función derivada *f'(x)*. Para ello emplean la Teoría APOE de Dubinsky incorporando elementos de la teoría de los registros semióticos de Duval y el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática de Godino, Batanero y Font (2007)[1]. El esquema de la derivada que elaboran es el resultado de la coordinación de dos esquemas previos (uno algebraico y otro gráfico), que son el resultado de la coordinación de los objetos complejos *f'(a)* y *f'(x)*, los cuales a su vez son el resultado de la conexión interna de tres objetos previos: pendiente de la recta, límite de las tasas medias de variación y razón de cambio. Los investigadores detectaron, entre otras cosas, en las respuestas de algunos profesores que confunden o no diferencian claramente entre *f'(a)* y *f'(x)*.

En la misma línea de investigación Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares (2012) presentan una caracterización de cómo el profesor en formación con especialidad en matemáticas, interpreta el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato en el ámbito específico de la derivada de una función en un punto. Para ello diseñaron un cuestionario mediante la selección de algunos problemas de otras investigaciones. Los resultados obtenidos indican que aunque muchos profesores tienen una formación matemática adecuada para este contenido matemático, a algunos les resultó difícil describir las resoluciones de los estudiantes usando los elementos matemáticos del concepto, por lo que no lograron reconocer las características de la comprensión de los estudiantes. De esta manera:

> …tener un cierto nivel de conocimiento del contenido matemático no implica el ser capaz de hablar de cómo ese contenido aparece en la resolución de un problema realizada por un estudiante de bachillerato y generar información sobre su comprensión (p. 506).

Por otra parte, entre las investigaciones que se enfocan sobre la práctica del profesor tenemos el estudio realizado por Cantoral y Reséndiz (2003), en él encontramos un análisis del papel que juegan las explicaciones[2] del profesor en la clase de matemáticas cuando usa la noción de variación, específicamente sobre las nociones de función y derivada. De acuerdo con los autores la interacción discursiva con los alumnos da cuenta de cómo se va construyendo y se van negociando las explicaciones en la interactividad del docente con los alumnos. Por lo que el uso de diversos mecanismos discursivos por parte del profesor orienta la participación de los alumnos hacia los acuerdos. Es decir, como producto de la investigación, los profesores no recurren a la imposición sino más bien recurren a diversos recursos o procedimientos hasta convencer a sus alumnos a fin de validar el contenido establecido en el aula.

Las observaciones hechas por Cantoral y Reséndiz (2003) contemplan también las interacciones de los alumnos ante el discurso[3] del profesor. Por tanto, las explicaciones son un

---

[1] Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education***,** *39*(1-2), pp. 127-135.

[2] Por *explicación* se entiende aquellos recursos discursivos que tienden a comprender una noción o idea, un hecho, objeto, fenómeno, esto es, que van más allá de una descripción, para tratar de encontrar las causas que lo provocan o permiten entenderlo (Cantoral y Reséndiz, 2003, p. 6).

[3] … el *discurso* se utiliza para subrayar los modos en que el conocimiento se construye e intercambia en el salón de clases, quién habla, acerca de qué se habla, dé qué manera se habla, qué preguntas son importantes para quienes hablan, de quién se aceptan ideas y modos de conocer y de quién no, etc. (Sfard, 2002; citado en Cantoral y Reséndiz, 2003).

recurso del cual se apropian los alumnos para construir versiones distintas a las del profesor y las cuales modifican la dinámica en el aula. Concluyen su estudio destacando algunas explicaciones de los profesores en torno a su propia noción de variación:

- La variación de parámetros (rota, traslada, la sube).
- La asignación de un significado geométrico a las funciones: traslación, inclinación, rotación, desfasamiento, sube o baja, crece o decrece.
- Nociones de movimiento (se desplaza, sube o baja, se recorre, se mueve, corrimiento) de
    - Las gráficas.
    - Puntos de referencia como el vértice, el origen, asíntota y línea.
- Aproximar valores a un número.
- $\frac{df}{dx}$ como la variación de los valores del cociente, la variación de un ángulo, o de un punto de referencia.
- La sucesión de puntos intermedios.

Finalmente, en el estudio López-Gay y Martínez-Torregrosa (2005) encontramos un ejemplo de análisis sobre lo que hacen y entienden los estudiantes y profesores cuando usan el cálculo diferencial en las aplicaciones físicas. Parte de sus resultados muestran que el uso del cálculo se limita a la aplicación mecánica de reglas. Cuando se les solicita tanto a profesores como a estudiantes que expresen comentarios y aclaren la solución de algunos problemas que muestra la ausencia generalizada de explicaciones o justificaciones, sean éstas correctas o incorrectas. En consecuencia las expectativas sobre las posibilidades de entender y usar con seguridad el cálculo se ve afectada, opinión que comparten los profesores de física de bachillerato sujetos al estudio. Y por consiguiente la mayoría de los estudiantes al captar esa falta de expectativas en sus profesores adopta una actitud mecánica en la solución de problemas.

Nuestro proyecto de investigación está diseñado de tal manera que la participación del profesor (investigador) sea de orientador, de acompañamiento cuando el estudiante desarrolla los experimentos que tienen que ver con problemas concretos ajenos a la enseñanza tradicional que está acostumbrado. Pues al no trabajar con expresiones algebraicas el estudiante tiene que poner en juego una matemática funcional (sus conocimientos previos y habilidades para ir desarrollándolos), otros recursos para justificar sus respuestas y trabajar en equipo para consensar las mismas. Sin embargo, la problemática de enseñanza de la derivada a estudiantes es compleja, por lo que requiere investigación y reflexión de su didáctica en la práctica docente.

I.1.2. Problemáticas en torno a la Enseñanza y Aprendizaje de la Derivada

El concepto de derivada, al igual que muchos otros de la matemática, ha sido objeto de estudio y análisis por lo complejo que resulta su enseñanza y aprendizaje, principalmente en los niveles educativos medio superior y superior. En este apartado destacamos algunas de las principales problemáticas detectadas por investigadores.

La investigación de Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) muestra, entre muchas otras cosas, una categorización de dificultades evidentes en el aprendizaje del cálculo, asociadas con: la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones y funciones); la conceptualización y la formalización de la noción de límite; y las vinculadas con las rupturas que se producen en los modos de pensamiento puramente algebraicos y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo. Particularmente, en la segunda categoría identifican obstáculos relacionados con el sentido común que evoca el término límite (favoreciendo una concepción del límite como una barrera intraspasable y no alcanzable, último término de un proceso); o cuando se trata el proceso del límite como un proceso algebraico "finito". También mencionan que algunas dificultades están relacionadas con las concepciones geométricas (si "geométricamente" un objeto tiende hacia otro, todas las magnitudes que le están asociadas tendrán por límite valores correspondientes a las magnitudes del objeto límite) y con el status operacional y estructural del límite (separarse de una visión del límite en simples términos de proceso para disociar con claridad el objeto límite del proceso que ha permitido construirlo). En esa misma categorización hacen referencia y similitud con la clasificación de Sierpinska (1985; citada en Artigue *et al.*, 1995) sobre los obstáculos: "Horror Infiniti", que agrupa el rechazo al status operacional que permite el paso al límite y continuidad; los asociados con la noción de función; los "geométricos"; los "lógicos"; y los simbólicos.

Los autores concluyen entre otras cosas, que:

- Las dificultades y obstáculos son múltiples y pretender evitarlos, los refuerza.
- Los conocimientos adquiridos nos ayudan a comprender mejor el funcionamiento de nuestros estudiantes, a anticipar sus dificultades, a buscar con paciencia medios de acción adaptados en vez de oscilar entre la búsqueda del método milagroso y la resignación fatalista.
- Nuestra enseñanza no debe vivir sobre la ficción de un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino sobre la imagen de un desarrollo más caótico donde no se excluyen las regresiones vinculadas con los desequilibrios.

Orton (1980; citado en Rendón, Ruiz y Córdoba, 2014) presenta una clasificación de los errores de los estudiantes al manipular la derivada clasificándolos en:

> 1. Errores estructurales. Se relacionan con los conceptos esenciales implicados.
> 2. Errores arbitrarios. No se tienen en cuenta los datos del problema para su solución.
> 3. Errores ejecutivos. Errores en la manipulación de los conceptos implicados (p. 48)

De esa misma referencia nos parece interesante la siguiente afirmación: *"¿Cómo se pretende definir la derivada como un límite de la función cociente incremental cuando los estudiantes no dominan estas ideas básicas?"*

De acuerdo con Dolores (1996a) una de las dificultades en la formación del concepto de derivada por la vía geométrica es la concepción griega de tangente formada en los estudiantes en la escuela primaria, ya que puede obstaculizar el paso de una concepción global (propia de la Geometría Euclidiana) a una concepción local (propiedad fundamental del cálculo). Según el investigador, ésta puede dificultar la aceptación de que la recta (además de tocar) pueda cortar a la curva y ser tangente en la zona del corte. También menciona que la manera en que la tangente es abordada en la Geometría Euclidiana, definida como un lugar geométrico, no permite arribar a una concepción dinámica (sucesión de secantes) de la misma, sino a verla como algo estático. El mismo investigador dos años más tarde (Dolores, 1998) afirma que:

> … lograr la comprensión de los conceptos básicos del cálculo no es una tarea fácil. Pues se ha reconocido que existen tanto dificultades intrínsecas al conocimiento mismo (los obstáculos epistemológicos) como aquéllos que le son exteriores al conocimiento (como el método de enseñanza, el enfoque, la influencia de los textos, etc.), que también pueden obstaculizar o incluso dejar de lado la comprensión de los conceptos (p. 2).

Por su parte Badillo, Azcárate, y Font (2011) consideran que la confusión de los profesores entre los objetos *f'(a)* y *f'(x)* son el reflejo de: la dificultad en la comprensión gráfica de los objetos complejos *f(x)*, *f'(a)* y *f'(x*); la reducción de la expresión simbólica de la función derivada *f'(x)* a la ecuación de la recta tangente y la gráfica de *f'(x)* de la recta tangente; la no justificación del uso de las técnicas de derivación directas e indirectas (definición en término del límite y las reglas de derivación); y el uso prioritario que le dan los profesores a la notación incremental en las definiciones de *f'(a)* y *f'(x)*.

Cañas (s.f.) analiza problemas concretos de matemáticas universitarias y preuniversitarias, retoma algunas dificultades que se presentan durante el aprendizaje de la derivada, entendida ésta como razón de cambio instantáneo. Hace énfasis en el cambio instantáneo y no en la razón instantánea, mencionando que esa sutileza conlleva a un obstáculo, pues el estudiante debe aceptar la comparación entre cambios acumulados y cambios totales (Thompson, 1994; Balderas, 1998; citados en Cañas, s.f.). También señala al aprendizaje de la noción numérica de límite como un obstáculo para entenderlo como un proceso (Tall y Vinner, 1981; citados en Cañas, s.f.).

Considerando que la mayoría de los cursos y libros de texto de cálculo de bachillerato en México emplean el concepto de límite para eventualmente definir la derivada (Dolores, 2006); en este trabajo no se trató de afrontar directamente algún obstáculo específico, de los ya mencionados anteriormente, ni mucho menos de alcanzar el objetivo de la enseñanza tradicional, es decir, llegar a la formalización de la derivada o de sus propiedades. El enfoque que se asume tiene como punto de partida ideas básicas de los estudiantes, estableciendo un acercamiento intuitivo por medio de situaciones experimentales adaptadas, en donde el uso de las gráficas es determinante en la construcción de conocimiento sobre la variación.

En el siguiente apartado mostramos los resultados de algunas investigaciones que se han enfocado al estudio de la derivada, éstas difieren, en parte, por el enfoque particular del marco teórico que las sustenta y el peso que le conceden a las dimensiones esenciales del saber: la epistemológica, la cognitiva y la didáctica[4].

I.1.3. La Derivada desde diferentes Marcos Teóricos de la Matemática Educativa

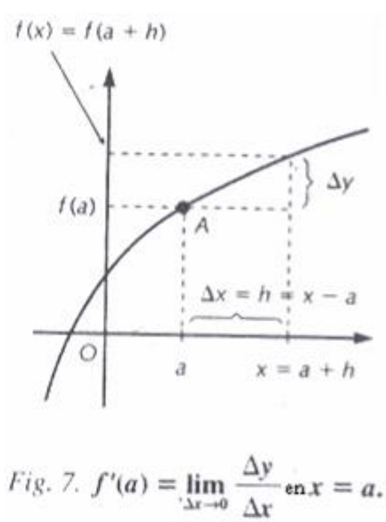
Las dificultades en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje del concepto derivada han detonado en propuestas concretas de trabajo en la Matemática Educativa, a decir verdad, este concepto se ha analizado desde una gran variedad de marcos teóricos. En los siguientes apartados de éste capítulo se mencionan algunas contribuciones distintas a la que trabajamos, y profundizaremos un poco más sobre lo que guía la investigación.

I.1.3.1. Aprendizaje de la derivada desde el enfoque Ontosemiótico

La investigación de Font (2008) se ocupó en buscar alternativas a la definición de la función derivada por límites, es decir ¿Cómo calcular *f´(x)* a partir de *f(x)*? Para el autor:

> Las nociones de derivada en un punto y de función derivada son tradicionalmente difíciles de comprender para muchos de los alumnos de bachillerato. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto en la aplicación de las reglas formales o en el uso de las fórmulas (p. 1).

Para contestar la pregunta inicial comienza presentando un episodio de aula, donde el profesor no deja claro al alumno (y éste no la entiende) la diferencia que existe entre lo que representan las expresiones $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, la primera corresponde en un punto y la segunda a la función derivada (ver Figura 1).



Derivada de una función en un punto

La tasa de variación de una función $y=f(x)$ en un punto $x=a$, que se ha estudiado en el apartado anterior, se llama **derivada de la función $y=f(x)$ en el punto $x=a$,** y se representa por $f'(a)$ (fig. 7).

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_{(en\ x=a)}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Figura 1 Definición de derivada en términos de límite (Font, 2008)

[4] La dimensión social se contempla en la TSME, marco teórico de referencia en este trabajo, ver Capítulo II.

El autor retoma de un estudio anterior (Font, 2000) que el cálculo de *f ´(x)* a partir de *f(x)* se puede interpretar como un proceso, en el que a su vez se han de considerar tres subprocesos:

1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar *f(x)*
2) El paso de una representación de *f(x)* a una forma de representación de *f ´(x)*.
3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar *f ´(x)*.

Para este análisis propone una tabla considerando simultáneamente una función y su función derivada (ver Figura 2). Y sugiere ampliar el abanico de técnicas de cálculo de la función derivada, para lo cual se puede recurrir a las posibilidades de los graficadores de funciones y a la historia de las matemáticas.

¿Cómo se calcula f´(x)?

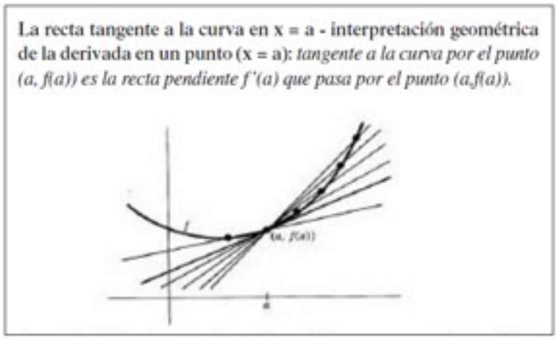
- Directamente
  - 1) Utilizando límites. Calcular $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
  - 2) Gráficamente
    - 2.1) Hallar una condición que cumplan todas las rectas tangentes
    - 2.2) Hallar f´(x) a partir de la condición anterior
  - 3) Por aproximación
    - 3.1) Dibujar la gráfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para un valor de h muy pequeño.
    - 3.2) Considerar que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\approx\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$
    - 3.3) Hallar la expresión de f´(x) a partir la gráfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Indirectamente: 4) Utilizando las reglas de derivación

Figura 2 Esquema para calcular f´(x) (Font, 2008; Inglada y Font, 2003)

En otro estudio Font (2009) analiza formas de argumentación en dos secuencias de actividades con alumnos de bachillerato, cuando calculan la derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición de función derivada como límite de las tasas medias de variación. Para ello, los alumnos saben que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente, que calculan geométricamente en algunos puntos. Destaca que la construcción con el ordenador permite acciones que facilitan encontrar a los alumnos una condición que cumplen todas las tangentes (utilizando el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, o bien otro semejante), pero sin utilizar límites (interpretación geométrica).

I.1.3.2. Perspectiva de la teoría APOE

Tenemos por ejemplo el trabajo de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) quienes tratan de caracterizar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada en el nivel de bachillerato y primer año de la Universidad. Para ello se cuestionan sobre cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto derivada; caracterizando su desarrollo en niveles (esquema de derivada). Para dar respuesta emplearon dos tipos de instrumentos: tres cuestionarios (de acuerdo al currículo) y un guión de entrevista (apoyo en las respuestas producidas por los estudiantes al cuestionario). Para el trabajo tomaron en cuenta los modos de representación (analítico y gráfico) y el carácter local (puntual) o global, también manejado como intervalo, de la derivada (ver Figura 3).



La condición suficiente para que *f* sea una función constante, creciente o decreciente:

Si f '(x) = 0 en (a, b) → f es constante en el intervalo (a, b).
Si f '(x) > 0 en (a, b) → f es creciente en el intervalo (a, b).
Si f '(x) < 0 en (a, b) → f es decreciente en el intervalo (a, b).

La condición necesaria para que *f* sea una función constante, creciente o decreciente: Sea f una función derivable en (a, b)

Si f es constante para todo x de (a, b) → f '(x) = 0 en (a, b).
Si f es creciente para todo x de (a, b) → f '(x) > 0 en (a, b).
Si f es decreciente para todo x de (a, b) → f '(x) < 0 en (a, b).

Figura 3 Elementos matemáticos: Gráfico puntual (izquierda) y analíticos globales (derecha) de la derivada

Sugieren que la introducción al cálculo diferencial a través de la variación del movimiento debería desarrollarse en un contexto numérico, y el aspecto gráfico se complementaría con el uso de dispositivos tecnológicos; como la calculadora gráfica. Por lo que un primer acercamiento al estudio del cálculo diferencial debería incluir un análisis de la variación del movimiento y quizá de otros fenómenos. Desarrollando este análisis en un contexto numérico, manejando objetos aritméticos, las formas gráficas y sus propiedades, con lo que se podrán brindar nuevos significados a este concepto.

Un poco después Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) hacen un recuento (y categorización) de investigaciones que se enfocaron en la comprensión del concepto de derivada desde distintos planteamientos. El objetivo fue identificar el conocimiento generado y las áreas donde es necesario contribuir con información, señalando que algunas de esas investigaciones se centraron en describir las características de los significados del concepto de derivada construidos por el estudiante, mostrando la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas y significados formales presentados por los libros de texto. Subrayan también la influencia de los contextos donde los estudiantes no relacionan automáticamente una concepción, proceso de las ideas, de razón, límite y función vinculadas a las ideas de derivada dados en contextos diferentes.

I.1.3.3. Perspectiva Socioepistemológica

Tenemos el estudio sobre la evolución didáctica del punto de inflexión de Castañeda (2002). El objetivo de su investigación fue ampliar y reconstruir el significado de este concepto, por ende recomienda buscar escenarios alternativos donde se exhiban características, propiedades o relaciones, de tal forma que el proceso para acercarse a un concepto sea a través de múltiples referencias y no sólo por las definiciones. Además sostiene que en la didáctica tradicional domina lo algorítmico (reglas de derivación) y se presta más atención a la regla de los cuatro pasos o a un cociente, que a actividades que tienden a favorecer el estudio de la derivada, como lo es el favorecimiento de un lenguaje gráfico.

Por su parte Rosado (2004) afirma que un fenómeno didáctico relativo a la derivada consiste en que el estudiante no incorpora significados, no le basta conocer que la derivada es la pendiente de una recta. En su estudio propone formular una resignificación de la derivada, basándose en la construcción de argumentos gráficos para una propiedad peculiar de los polinomios, a la que designa como linealidad del polinomio (ver Figura 4). Esta propiedad se centra en resaltar la relación que existe entre la recta tangente de una función en un punto con el comportamiento de la misma en un intervalo de dicho punto.

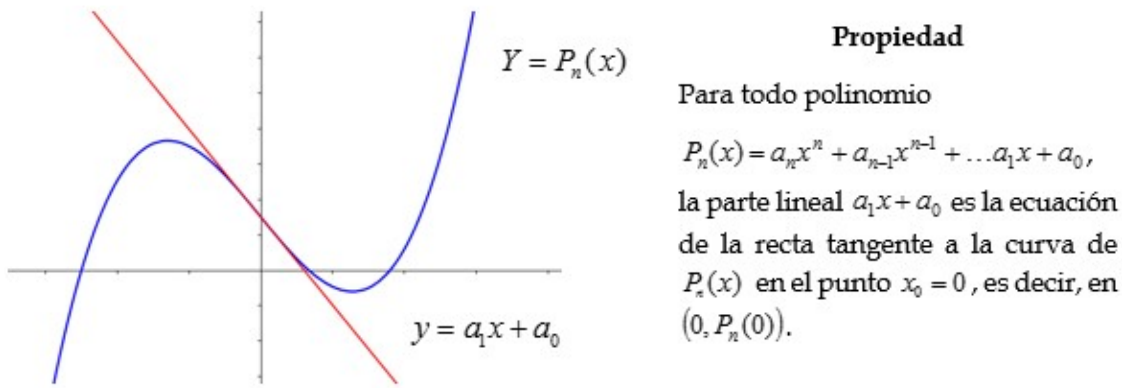


Figura 4 Linealidad el Polinomio (Rosado, 2004)

En el estudio de Morales, Mena, Vera y Rivera (2012) se reporta el conocimiento matemático que en el discurso Matemático Escolar (dME) es utilitario, pues el centro de atención es la fórmula y no los procesos de construcción de conocimientos. Considerando que es de suma importancia reformular la enseñanza de las matemáticas de una matemática utilitaria a una matemática funcional, contemplando significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos. Aspectos que opta esta investigación y que detallaremos en el siguiente capítulo.

En este marco teórico nace la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) de la cual se desprenden investigaciones como la de Cantoral y Farfán (1998), para quienes la enseñanza y el aprendizaje de situaciones variacionales plantean un gran número de problemas no triviales. Su hipótesis de su estudio fue:

> … previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico (p. 6).

Dichos investigadores sostienen que la combinación de tareas de construcción de un universo (amplio y estructurado) de formas gráficas y el desarrollo de la noción de predicción de los fenómenos de flujo[5] apoyados en el binomio de Newton, favorecen al desarrollo del PyLV.

Sus hallazgos, favorecen la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza que traten sobre el qué enseñar y no sólo, como ha sido habitual en las investigaciones educativas, sobre el cómo enseñar. También determinaron que la enseñanza y el aprendizaje de situaciones variacionales plantean un gran número de problemas no triviales. Para ilustrar lo anterior proponen a sus estudiantes una colección de cuatro gráficas idénticas, como la que se muestra en la Figura 5, y se les pide que utilicen una para cada inciso, de modo que deben marcar *sobre la gráfica* la porción en la que se cumpla sólo uno de los cuatro incisos (en la figura se indican en la parte izquierda, se presenta la primer condición).

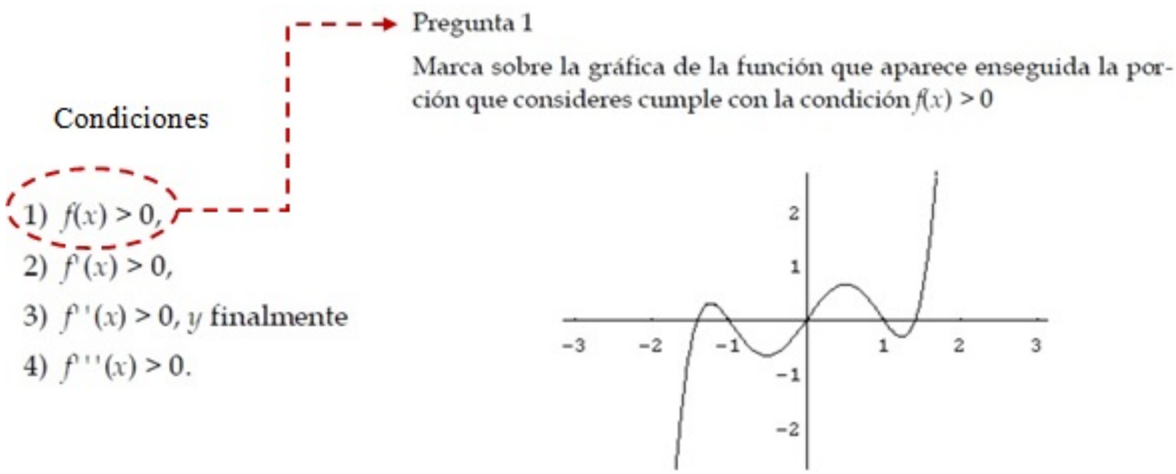


Figura 5 Problema sobre el PyLV en el contexto gráfico (Cantoral y Farfán, 1998).

De acuerdo con las respuestas de los estudiantes: el primer inciso no es difícil de contestar, pues recurren a la identificación del signo de la imagen en los cuadrantes; en el segundo la mayoría de los estudiantes confundieron el signo de la derivada con el de la función, mientras que otros recuerdan que las pendientes de tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, pero sus explicaciones son escasas; para la segunda derivada los alumnos recurrieron principalmente a la memoria, recordando que la segunda derivada positiva se corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo está asociada con la segunda derivada negativa, por lo que no implicaron estrategias variacionales en sus respuestas; finalmente, la porción en donde la tercera derivada es positiva impide a los estudiantes recurrir a algún conocimiento previo o memorístico, no lograron proporcionar respuestas convincentes, tienen que construirlas, descifrando códigos variacionales y articulándolos en signos variacionales.

[5] Los autores consideran el estudio de los fenómenos de flujo: de la cinemática de una partícula que se desplaza rectilíneamente; y del examen del planteamiento y resolución de la ecuación de la cuerda vibrante.

Los autores concluyen de su análisis que: la enseñanza y el aprendizaje de situaciones variacionales plantean un gran número de problemas no triviales; la predicción de la evolución de los sistemas complejos de cambio precisa, como necesidad básica del funcionamiento, de una centración en la manera de variar por encima incluso de la variable misma. Esto presupone una centración en mecanismos de constantificación de las variables y de sus variaciones, por lo que la evolución de un sistema está determinada completamente por sus variaciones primeras. De esta manera, el PyLV será entendido como una línea de investigación que permitirá tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales[6] que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos.

En Cantoral, Molina, y Sánchez (2005) se resumen los planteamientos del Taller denominado "Socioepistemología de la Predicción", presentado a través de reflexiones teóricas y de una variedad de ejemplos didácticos usando recursos tecnológicos. Resaltan el papel que juega la predicción en la construcción de conocimiento matemático, debido a la imposibilidad que tienen los grupos sociales de controlar el tiempo a voluntad, y por tanto de anticipar eventos. Señalan que es importante diferenciar entre los conceptos de adivinación y predicción:

> La adivinación es un pronóstico generado por señales o sucesos sin un fundamento científicamente aceptado, mientras que la predicción es una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce (p. 5).

En dicho taller, logran identificar patrones gráficos asociados a las derivadas de orden mayor o igual a 1. Las actividades del Taller constaron de una serie de diseños secuenciados: partiendo de la relación entre lo tabular, lo gráfico y la determinación de la expresión algebraica (Actividad 1); y calculando la aproximación a la derivada de una relación funcional tiempo (Actividad 2). Además se utiliza la idea de diferencia para calcular una aproximación a la derivada de la forma $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ con base en las mediciones realizadas (se consideró la función $f(x) = sen(x)$ por tener derivadas sucesivas acotadas, observándose patrones gráficos en cuanto al signo de $f'(x)$).

Lograron que la mayoría de los profesores en la primera actividad utilizaran como estrategia inicial la graficación o formularan sistemas de ecuaciones lineales para determinar una respuesta; el trabajo con lo lineal permitió que emergieran de forma natural estrategias y argumentos de tipo variacional. Surgieron ideas de pendiente y variación (al trabajar con la tabla de valores asociada) ya sea mediante el cálculo de la magnitud $y_{i+1} - y_i$ para cuales quiera par de ordenadas consecutivas como medio de identificación de una variación constante, o por medio de la aplicación de la fórmula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ para determinar la ecuación de la recta. Concluyen que el cálculo de las variaciones sucesivas en un contexto numérico permite identificar patrones y el grado del polinomio al que corresponde cada una de

[6] Concepto de la Socioepistemología detallado en el Capítulo II.

las tablas de la primera actividad, creando un vínculo entre la actividad inicial y el estudio del concepto de derivada. Además la predicción está íntimamente relacionada con la variación, porque para predecir un estado futuro correspondiente a un sistema es necesario cuantificar y analizar los cambios de sus causas y efectos y con base en esto, generar modelos matemáticos que permitan anticipar consecuencias. Por consiguiente, la variación se convierte en una herramienta de análisis necesaria para el ejercicio de la predicción.

En Sánchez y Molina (2006) encontramos una descripción del taller denominado "pensamiento y lenguaje variacional, una aplicación al estudio de la derivada". En la primera parte del taller se buscó provocar la emergencia del concepto de diferencia; esto es, el residuo de la sustracción $E_1 - E_2$. En la segunda parte del taller se trató de mostrar la utilidad de esas diferencias en el estudio del concepto de derivada en un contexto numérico, utilizando la actividad matemática contenida en el trabajo de Cantoral y colaboradores (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). Como resultados los autores sugieren que, un primer acercamiento al estudio del cálculo diferencial debería incluir un análisis de la variación del movimiento y quizá de otros fenómenos. Además este análisis podría desarrollarse en un contexto numérico, porque la historia muestra que es la forma natural en que se desarrolló. Aunado a esto la relevancia de incorporar las formas gráficas y sus propiedades como un medio para apreciar la derivada de orden superior y brindar nuevos significados a este concepto (ver por ejemplo la Figura 6). Por lo tanto, el concepto de variación es entendido como una cuantificación del cambio (Cantoral *et al*. 2005) y se deben considerar diferencias sucesivas para identificar si se trata de una función lineal, cuadrática o cúbica.

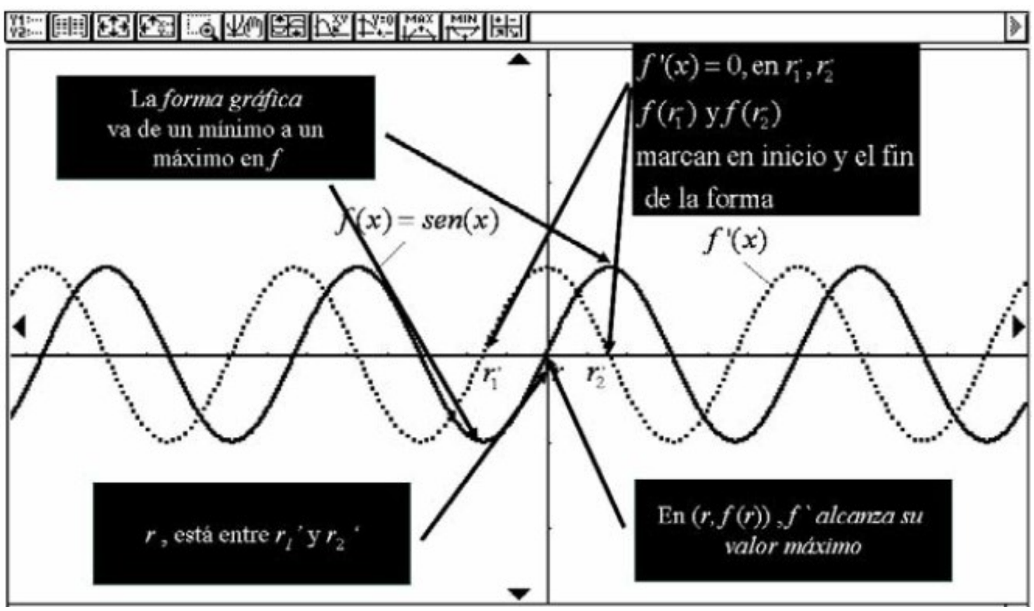


Figura 6 Comportamiento de la función seno y su derivada

Por su parte, Cabrera (2009) realiza un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato, partiendo del planteamiento de cualquier reforma educativa trae consigo la necesidad de realizar un sinnúmero de cambios, que necesariamente abarcan las concepciones sobre los modelos de enseñanza y aprendizaje, los fines educativos y objetivos que se persiguen. Sin embargo, no se habla de los cambios metodológicos que son necesarios para abordar los nuevos contenidos, los cambios planteados y la forma de concretarlos por medio del trabajo docente (Barriga e Inclán, 2001). Sugiere que para esto último el profesor podría utilizar las estrategias variacionales de predicción, comparación, seriación y estimación, como elementos alrededor de los cuales reestructurar su desempeño docente.

Sus resultados dejan entrever, entre otras cosas, que el PyLV (como línea de investigación) proporciona elementos para la constitución de situaciones de aprendizaje propicias para el desarrollo de competencias. Hace énfasis en que las situaciones problema deben permitir construir y significar los conocimientos, pero a su vez, generando estrategias adecuadas para actuar ante los problemas que se enfrentan, por lo que se requiere el diseño de Situaciones de Aprendizaje, especialmente situaciones bajo prácticas que puedan llevar al desarrollo de competencias significadas en contextos específicos. Finaliza afirmando que el PyLV se perfila como una competencia (transversal) matemática importante, y se presentan como una alternativa adecuada para el desarrollo de competencias.

En dirección similar, y concentrando los resultados de varias investigaciones, Cantoral (2013a) describe y ejemplifica la línea de investigación: Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza según el cual, el maestro enseña y el alumno aprende, desaprovechando las formas naturales en que estos últimos razonan sobre matemáticas y sobre lo que aporta la investigación en Matemática Educativa en este aspecto. Para Cantoral aprender matemáticas no puede limitarse a la mera copia del exterior a través de resultados previamente elaborados, o digamos que, a su duplicado; sino más bien, es el resultado de construcciones sucesivas cuyo objetivo es garantizar el éxito ante una cierta situación de aprendizaje. Parte de la hipótesis de que el PyLV desarrollado por los estudiantes, evidenciado en el análisis de sus diálogos, les ha brindado las siguientes herramientas: reconocer variaciones referidas a elementos que a su vez varían; estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficos; y establecer relaciones entre la variación de una función y las funciones derivadas sucesivas.

Para Cantoral (2013a)

> …la enseñanza del cálculo en el bachillerato tiene poca relación con dominios de la ingeniería, con episodios de la vida cotidiana que precisan del estudio del cambio, e incluso con ejemplos de la física, química o biología, y se caracteriza más bien por estar regida por un discurso matemático escolar tradicionalista, donde predominan algoritmos del tipo algebraico y algunos aspectos formales de la matemática (p. 21).

La enseñanza de esta materia se centra en objetos formales y suele carecer de referentes concretos para la variación y el cambio. Es decir, existe una ausencia de ideas variacionales en la enseñanza del nivel medio superior, lo cual no contribuye en el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial e integral.

Pero

> Se enseña el cálculo como un aparato algorítmico, la derivada por ejemplo, se presenta como la "regla de los cuatro pasos" y se apoya en el empleo de fórmulas para derivar, inhibiendo de este modo el desarrollo de ideas propiamente variacionales (Cantoral, 2013a, p. 22).

Y señala que a pesar de que la derivada surge como una herramienta para el estudio del cambio, y con ello sirve para predecir comportamientos futuros,

> … se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos, dejando de lado la formación de ideas esenciales sobre la derivada; en particular, no se presta atención a la formación de las ideas variacionales tan necesarias para la comprensión y uso de este concepto (Dolores, 2013, citado en Cantoral, 2013, p. 22).

Las investigaciones en Matemática Educativa (ME) muestran algunos de los esfuerzos que desde diferentes marcos teóricos se han llevado a cabo con el objetivo de abordar el concepto de derivada de una manera más aprehensible, tanto para estudiantes como para profesores. Tratando de integrar más significados a este concepto que los que actualmente tiene dentro del dME. Los diseños propuestos y alternativas de trabajo tienen sus peculiaridades, dependiendo de sus objetivos y lo que se deseé observar como investigador, esto es, dependiendo del marco de referencia que utilicemos.

En este trabajo de investigación abordamos la derivada no desde su definición formal, consideramos como centro de estudio no el objeto matemático; sino un acercamiento a éste desde una perspectiva variacional. Pues como lo han justificado Dolores (2006) y Cantoral (2013a), la derivada permite cuantificar el cambio y qué mejor si se relaciona con situaciones de variación de otros dominios de la ciencia (física, química o ingeniería), o con episodios de la vida cotidiana. Por otra parte es cierto, como ya se ha revisado en este apartado, que en la enseñanza de la derivada se privilegia el empleo de ciertos algoritmos, notaciones, acercamientos a la definición (por límites) o la aplicación de reglas que se perciben como preestablecidas. Sin embargo, consideramos que es necesario además de lo anterior tener un acercamiento intuitivo a este concepto, ya sea antes, durante o después de su estudio en el curso de CD. En otras palabras, está fuera de nuestro alcance el modificar la enseñanza tradicional del concepto de derivada, pero lo que buscamos es enriquecer el conocimiento que tiene el estudiante sobre el mismo, estableciendo un acercamiento funcional a este concepto matemático. Favoreciendo el empleo de estrategias de solución no algorítmicas, así como el uso de la idea diferencia en el contexto numérico y con apoyo del uso de la gráfica. A este uso se le da un rol importante en la construcción de conocimiento matemático y que está ampliamente reportado en trabajos de investigación. Este rol considera a la graficación, en su uso, como argumentativa en situaciones de cálculo y que a continuación describimos.

I.2. Perspectiva de la Gráfica como Argumentativa en Situaciones de Cálculo Diferencial

Respecto a la graficación como productora de argumentos, tenemos el estudio de Campos (2003), quien realiza un estudio sobre las argumentaciones gráficas en situaciones de transformación de funciones cuadráticas desde la teoría socioepistemológica. Su objetivo fue establecer a la graficación como una forma de argumentación para la matemática en contraparte de ver a la gráfica como la representación del concepto de función. Los resultados más sobresalientes son: para el caso de la parábola, la confrontación entre las concepciones de curva y función desde un contexto propiamente gráfico más que analítico, esto generó en los alumnos un conflicto que les ayudó a considerar argumentos de comportamientos específicos de la curva y de comportamiento tendencial de las funciones para llegar a resignificar a la parábola. Así se consideró a la graficación propiamente como una práctica en uso en una situación específica. Al poner en juego el argumento gráfico variando los parámetros de la expresión algebraica, propició que los estudiantes predijeran el comportamiento general de la curva; también al tratar de dibujar el trazo de nuevas curvas (suma de rectas con parábolas, composición de una función con la parábola y producto de una función con la parábola) desde un contexto puramente gráfico (ver Figura 7), se logró que los estudiantes reconocieran patrones de comportamientos de las curvas y encontraran propiedades intrínsecas de éstas.

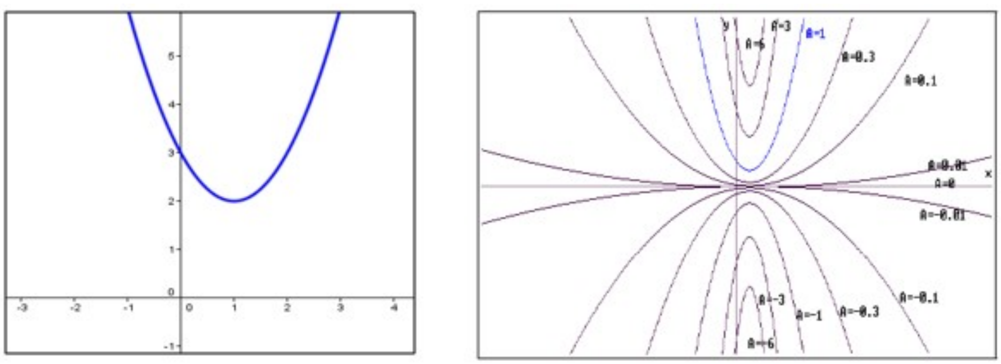


Figura 7 Variación de parámetros con calculadora graficadora para la función $f(x)=x^2-2x+3$ y su efecto gráfico, Actividad IV, (Campos, 2003)

Para Morales, Mena, Vera y Rivera (2012) uno de sus principales resultados es que el "uso de la gráfica" es considerado como un elemento de argumentación que permite identificar las variables que intervienen en la situación (velocidad, aceleración, rapidez, etc.), además consideran la funcionalidad de la gráfica como un patrón de comportamiento (análisis variacional).

Por su parte Rosado (2004) formula un marco de referencia que ayuda a resignificar la derivada a través del diseño de la situación de la linealidad del polinomio. La autora estudió el uso y la modelación de la gráfica del polinomio, así como epistemologías de prácticas que generan argumentaciones situacionales en el marco socioepistemológico (las gráficas son argumentaciones que permiten construir significados). En el diseño utilizó calculadoras graficadoras como apoyo tecnológico y realizó el análisis de los resultados con elementos de la Ingeniería Didáctica. Como resultado formuló la epistemología de la linealidad del polinomio (ver Figura 8), brindando un marco argumentativo donde los significados, procedimientos, procesos y objetos del comportamiento tendencial de las gráficas (y de las funciones) resignifican la derivada de funciones polinómicas. Debatiéndose el funcionamiento y la forma del comportamiento lineal intrínseco al polinomio. Por lo tanto habremos de entender que la propiedad de linealidad del polinomio es un patrón de comportamiento tendencial local, es decir, que el polinomio en cuestión se comporta como su parte lineal cuando cruza el eje de las ordenadas.

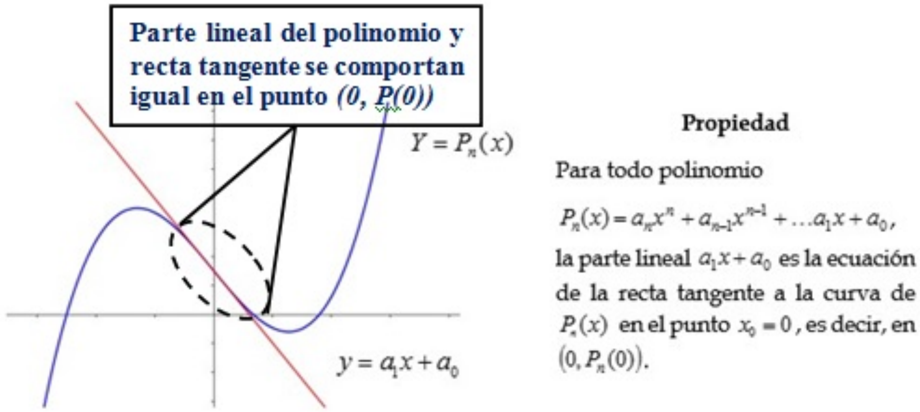


Figura 8 Linealidad del polinomio (Rosado, 2004)

Finalmente, Briceño (2013) realiza un estudio sobre el uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos. Su objetivo fue mostrar cómo el uso de la gráfica en una situación específica de modelación-graficación se construye en el estudiante como instrumento para la comprensión de una función en un sistema cartesiano. Para ello implementó una situación de modelación de movimiento (SMoMov) de un objeto que se desliza por una cuerda (Tirolesa), modelada por la función $f(x)=Ax^2+D$ (ver Figura 9). Por lo que se concibe a la gráfica como una cualidad de movimiento que está llevando a generar argumentos desde la experimentación.

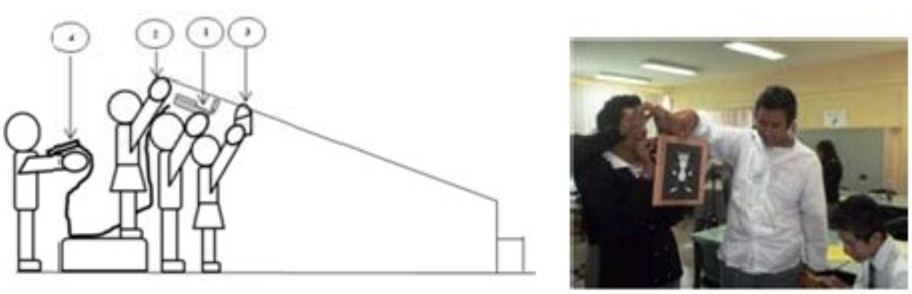


Figura 9 Toma de datos con sensor de movimiento en la Tirolesa (Briceño, 2013)

El uso de la gráfica en la construcción de conocimiento ha adquirido un estatus epistemológico (Briceño, 2013), que se ha ido fortaleciendo con investigaciones de corte socioepistemológico, entre las que podemos mencionar: el estudio realizado por Cordero, Cen y Suárez (2010) en donde caracterizan los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto de nivel de bachillerato; los trabajos de Suárez y Cordero (2010), Cordero (2008), Torres (2004), Cantoral *et al.* (2008) y Suárez (2014), identificando algunos usos de las gráficas en situaciones de modelación de movimiento. Por otra parte, como menciona Briceño (2013), también se han diseñado situaciones específicas para resignificar el uso de las gráficas en ámbitos escolares, como en Rosado (2004), y no escolares como en Briceño (2013) y en Zaldívar (2014); así como el estudio de Parra y Cordero (2007) y Mendoza y Cordero (2014) en el dominio científico de la ingeniería.

A partir de nuestra revisión, tenemos el siguiente panorama del uso de la gráfica en Socioepistemología (ver Figura 10).

Figura 10 Usos de la gráfica en estudios de corte socioepistemológico

Por tanto, el hecho de que la graficación pueda llevar a cabo múltiples realizaciones y al mismo tiempo permita hacer ajustes en su propia estructura para producir un patrón deseable o generalización deseable, aporta elementos para concebir que la graficación también es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación (Cordero, 2006b, citado en Suárez y Cordero, 2008; Cordero, 2008).

En el proyecto nos interesan las construcciones de los estudiantes al trabajar con actividades de modelación que involucran el cambio (áreas, equilibrio térmico, movimiento), donde el uso de la gráfica en su funcionamiento y forma, es un elemento epistemológico importante para nuestros resultados. Las situaciones que proponemos están inmersas en un contexto de modelación de fenómenos físicos. A continuación brindamos un panorama de investigaciones desde la perspectiva de la modelación.

I.3. El Proceso de Modelación Matemática: Tratamiento de la Derivada

La modelación matemática ha tenido un desarrollo diferente debido a la relación que guardan las matemáticas con otras ciencias (Suárez y Cordero, 2008). Desde la perspectiva

Socioepistemológica la modelación es una construcción de conocimiento de un individuo cuando enfrenta una tarea matemática en la que pone en juego su saber. De acuerdo con Suárez y Cordero (2008), las características de esta construcción son:

> Posee su propia estructura, está constituida por un sistema dinámico, la simulación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un resultado deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones (p. 52).

Por consiguiente, y de acuerdo con los mismos autores, la modelación es una construcción que norma la selección del lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos. Para justificar lo antes dicho distinguen primero entre obra matemática y la matemática escolar[7], y enseguida resaltan que mientras la actividad matemática se centra en los conceptos como la parte central de la construcción de conocimiento matemático, en la actividad humana ésta centralización se desplaza hacia las prácticas que implican hacer de las matemáticas una herramienta para modelar. Finalmente, a partir de este estudio del uso de las gráficas establecen como constructo teórico el binomio Modelación-Graficación (M-G), el cuál profundizaremos con más detalle en el siguiente capítulo.

Ahora bien, de acuerdo con Córdoba (2011) la modelación matemática no tiene como preocupación central que ésta sea considerada como un contenido a enseñar o como un medio o herramienta para enseñar conceptos matemáticos. Por el contrario, el centro de interés radica en considerar la modelación en matemática como:

> … una práctica que se comparte y se ejerce en comunidades específicas y en contextos particulares y que al ser ejercida por estudiantes y profesores (actores del sistema didáctico) permite la resignificación de conocimiento matemático escolar, lo cual a su vez modifica esas prácticas bien sea incorporando nuevos elementos, enriqueciendo los ya existentes o aportando nuevos significados, y modifica también a los individuos involucrados (p. 65).

Y según López, Juárez y Arrieta (2007; citados en Córdoba, 2011), las prácticas de modelación son:

> … aquellas prácticas sociales que se desarrollan en un contexto determinado (en nuestro caso la clase de matemáticas) y en interacción con fenómenos del mundo real y para los cuales las herramientas que se construyen para comprender o predecir su comportamiento, son precisamente los modelos que desarrollan los estudiantes como fruto de sus interacciones. Es entonces en el ejercicio de esas prácticas sociales que se construye conocimientos matemáticos y éstos a su vez modifican esas prácticas sociales (Arrieta, 2003).

[7] La obra matemática se desarrolla al seno de la actividad matemática, estudia los objetos matemáticos y propone una organización explícita de conceptos, en tanto en la matemática escolar tiene a la actividad humana como la base de su desarrollo, estudia la adquisición tanto de objetos como de herramientas matemáticas y propone su organización a través de categorías que no son explícitas (Cordero, 2006a; citado en Suárez y Cordero, 2008).

Córdoba (2011) ve a la modelación como un proceso de descubrimiento de debilidades de aprendizaje, de formas de relacionarse con el conocimiento, con los otros y con el entorno. Mientras que para Suárez y Cordero (2010) la modelación es considerada como

> …una construcción teórica que un individuo realiza al enfrentar una tarea matemática en la que pone en juego sus conocimientos, es un medio que propicia el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones (p. 320).

Por su parte Morales, Mena, Vera y Rivera (2012), en su trabajo sobre el rol del tiempo en un proceso de modelación, utilizan videos de experimentos físicos para establecer que las gráficas adquieren un estatus que difiere de lo que comúnmente se trata en el discurso Matemático Escolar. Además, consideran que la variación permite establecer la conexión de un modelo matemático (variacional parabólico) con un modelo físico (de la cinemática); mientras que el rol del tiempo será evidenciar la funcionalidad de las gráficas. Concretamente, analizan cómo el tiempo es una variable que puede ser identificada y utilizada por los estudiantes para entender un fenómeno físico observado. Para ello emplean la galería de experimentos del Proyecto Galileo. Como resultado obtuvieron primeramente que el "uso de la gráfica" es considerado como un elemento de argumentación que permite identificar las variables que intervienen en la situación (velocidad, aceleración, rapidez, etc.), además consideran la funcionalidad de la gráfica como un patrón de comportamiento (análisis variacional). Finalizan afirmando que, establecer un tránsito de una matemática utilitaria a una matemática funcional –con significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos– resulta de suma importancia en la enseñanza de las matemáticas para la formación de ingenieros y científicos, elementos sintetizados en la Socioepistemología del Cálculo.

Arrieta y Canul (2004) realizan un estudio centrado en las prácticas sociales de modelación del enfriamiento de un líquido. Para ello diseñaron e implementaron una secuencia didáctica como montaje de ingeniería didáctica de modelación: "Lo exponencial: la ley de enfriamiento de Newton" (ver Figura 11) con estudiantes de Ingeniería de Bioquímica. Toman como base las prácticas centradas en los modelos numéricos, las cuales después de recolectar datos y hacer predicciones, les permiten identificar lo exponencial.

Con el arreglo experimental que se muestra a continuación haga uso del sensor de temperatura y tome datos de las temperaturas del líquido del tubo de ensaye cada 5 segundos y de la temperatura ambiente.

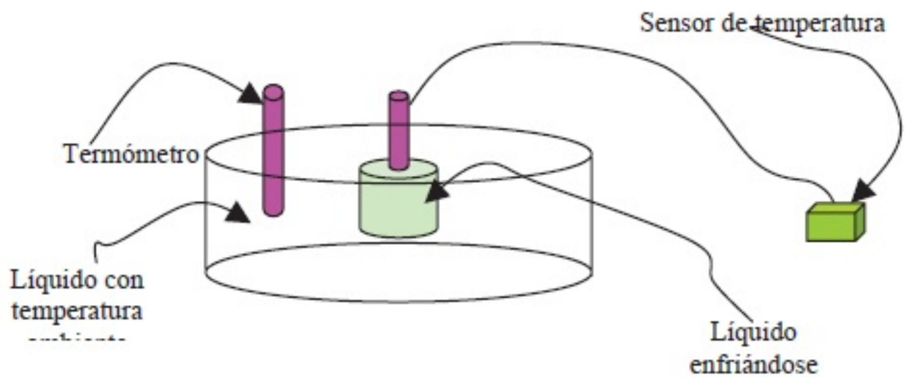


Figura 11 Diseño experimental (Arrieta y Canul, 2004, p.211)

Entre sus conclusiones más relevantes mencionan que los estudiantes construyen como modelo exponencial una tabla de datos caracterizando lo que es exponencial, distinguiéndola de otras tablas de datos, es particular con modelos lineales y cuadráticos. También caracterizan la temperatura como proporcional a las razones de cambio de la temperatura con respecto del tiempo, planteando finalmente un modelo analítico (ecuación en diferencias).

Zaldívar (2014) diseña e implementa una situación de modelación del movimiento de un resorte en un escenario no escolar de divulgación científica (ver Figura 12). Su objetivo fue analizar cómo el conocimiento del cotidiano se revela cuando los individuos afrontaban el diseño. Es decir, las resignificaciones de la estabilidad en la situación del resorte cuando se modela mediante gráficas.

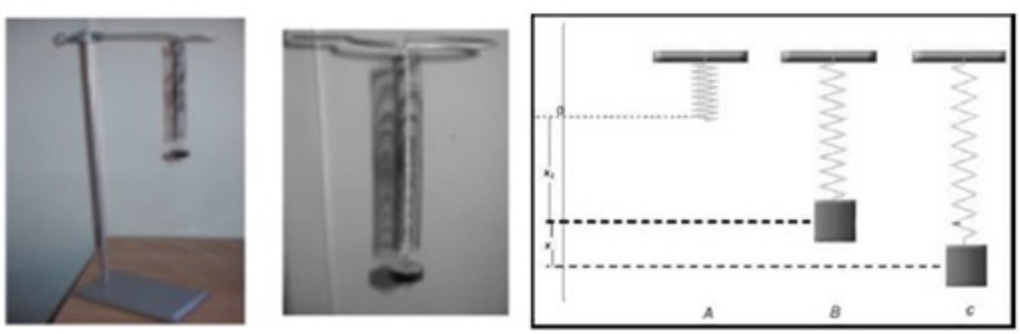


Figura 12 Diseño sistema masa resorte y su diagrama de cuerpo libre (Zaldívar, 2004)

Analiza tres momentos en su diseño: momento de mantenimiento; momento de crisis; y momento de funcionalidad. Y concluye, entre otras cosas, identificando tres usos de la gráfica derivados de la construcción de significados, realización de procedimientos y la constitución de procesos-objetos. Formulados en argumentos de estabilidad.

En los estudios de Torres (2004), Cardona (2009) y Suárez (2014), entre otros, se trabaja una situación de modelación de movimiento con el empleo de tecnología (sensores y calculadoras graficadoras). En dicha situación las gráficas permitieron "ver" las características globales de la función (variaciones y períodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, periodicidad, etc.), así como intuir comportamientos. La situación consiste en hacer la gráfica del movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos. Pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos. Sus conclusiones se refieren a aspectos globales y locales de las gráficas producidas por los estudiantes, y en el mejor de los casos establecen un uso de las gráficas. Como los ya mencionados en el apartado anterior.

Finalmente, Méndez (2013) estudió el funcionamiento de una categoría de modelación la cual devela un desarrollo de redes de usos de conocimiento matemático (*drucm*). Para ello enlaza elementos como la experimentación, la variación local y global, el ajuste y la tendencia, en el estudio de situaciones de transformación, variación y aproximación. Se enfocó en el uso que tienen en el funcionamiento las gráficas, las tablas de datos y las expresiones analíticas ante situaciones específicas - la elasticidad de los resortes y sus variantes, el plano inclinado y sus variantes y el enfriamiento del silicón- ver Figura 13.

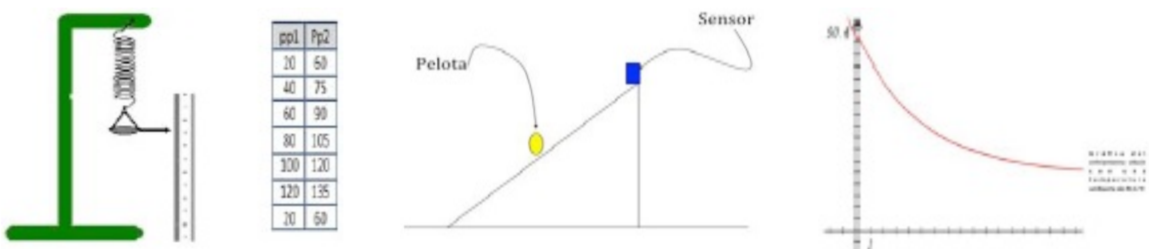


Figura 13 Experimentos aplicados en Méndez (2013)

Su análisis se basó en un modelo que trata de incluir la comunidad de donde devienen las evidencias. Concluyendo, entre otras cosas, que:

- La modelación es una construcción social del conocimiento, una práctica social que genera conocimiento matemático, y al proyectarla en un escenario particular, el escolar, se trasforma en una categoría de conocimiento que provoca desarrollos de *drucm*.
- Los diseños de situación provocan una resignificación del uso de conocimiento matemático.
- Los estudiantes caracterizan diferentes tipos de comportamientos a través de estudio de las cualidades de las gráficas, sus intervalos de variación y su relación con las condiciones experimentales, donde se hizo uso de las tablas, expresiones algebraicas y las gráficas como un argumento que les permite caracterizar y organizar comportamientos.
- La dialéctica que define el desarrollo de usos sigue siendo funcionamiento y forma, pero ésta no es uno a uno, puesto que una forma tiene distintos funcionamientos y estos son característicos de la comunidad de conocimiento matemático de la cuál proviene.

Retomando estas referencias junto con Cordero (2008) consideramos al siguiente afirmación, *la graficación es en sí misma un tipo de modelación que trasciende y se resignifica transformando el objeto en cuestión*. Cabe mencionar que el diseño trabajado por Torres (2004), Cardona (2009) y Suárez (2014), corresponde a nuestra tercera situación de variación, con algunas variantes, y el empleo de software de geometría Geogebra.

En nuestro proyecto concebimos a la modelación matemática desde la Teoría Socioepistemológica. La modelación como generadora de conocimiento matemático, pensada como la categoría graficación-modelación (Cordero, 2010; Suárez, 2008). La modelación se desarrolla cuando se interactúa con situaciones experimentales; en las que los estudiantes conjeturan, ejecutan múltiples realizaciones, hacen ajustes, identifican patrones y desarrolla un razonamiento. Auxiliándose para ello de recursos tecnológicos como sensores, calculadoras y el software de geometría Geogebra. Sin embargo hay un interés de profesionalización en esta práctica con recursos tecnológicos como por ejemplo el estudio de Gómez-Chacón (2011), quien elaboró un programa formativo dirigido al desarrollo de competencias profesionales de los futuros profesores de secundaria. Uno de sus objetivos fue detectar y desarrollar capacidades y competencias en estudiantes universitarios de segundo ciclo de Ciencias Matemáticas como futuros profesores de matemáticas de Secundaria. Además de profundizar en el conocimiento estratégico para aprender a enseñar matemáticas con Tecnologías de Información y Comunicación (TIC's). Reconoce que para lograr una buena resolución con tecnología (Geogebra) es necesario identificar qué hace que se produzcan bloqueos y dificultades, identificando: falta de conocimiento matemático general o específico; falta de habilidades tecnológicas; o falta de experiencia técnica en la modelización. De esta situación describo un breve análisis en el siguiente apartado.

I.4. Efectos de un Entorno Tecnológico sobre la Enseñanza de la Derivada

Como referencias de trabajos que involucran un entorno tecnológico tenemos el llevado a cabo por Villa-Ochoa y Ruiz (2010), *"Pensamiento Variacional (PV): seres-humanos-con-Geogebra en la visualización de noción variacional"*. Los autores pretenden mostrar cómo desde dicha interacción se puede acceder a ciertas relaciones matemáticas, no exploradas por ellos con anterioridad, ni tampoco encontradas en los libros de texto de los estudiantes. Para lo cual diseñaron un conjunto de situaciones, incorporando asuntos que emergieron del trabajo experimental en el aula. Formularon nuevas preguntas que promovían confrontaciones entre los razonamientos, hipótesis y conjeturas de los estudiantes. Analizaron dos episodios que surgieron en dos investigaciones en donde el colectivo de investigadores interactuó con el software Geogebra (en el primer episodio indagan sobre el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación del concepto de derivada a través de uso del software, y en el segundo indagaron sobre el proceso de génesis instrumental en el estudio de las cónicas como lugares geométricos). Cabe mencionar que para ello emplearon el constructo teórico de *Humans-with-Media* desarrollado por Borba y Villarreal (2005), en donde se discute cómo el conocimiento matemático es el resultado de una construcción de un colectivo pensante de seres-humanos-con-medios. Las contribuciones de su estudio fueron: de la interacción con el software GeoGebra observaron maneras alternativas de aproximarse a los conceptos matemáticos y al software mismo; emergieron nuevas preguntas que desencadenaron conjeturas y el surgimiento de evidencias para su confirmación o refutación. En el proceso de diseño de las situaciones el colectivo de investigadores atravesó por diferentes momentos que involucraron el desarrollo del PV a través del uso de Geogebra a saber: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia, construcción de herramientas, surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones y refutación o demostración formal de las conjeturas. La generación de "herramientas" en el software permitió un diálogo entre la visualización y los procedimientos algebraicos con papel y lápiz y, además de la validación formal de algunas conjeturas. Finalmente trataron de mostrar otras evidencias de cómo el pensamiento matemático, en este caso el variacional, se va transformando cualitativamente en la interacción de un colectivo pensante de seres-humanos-con-medios.

En el trabajo de Basurto (2011) sobre la *"Conceptualización de los parámetros en funciones polinomiales vía TI-Nspire"*, pretende fijar la atención de los profesores en la factibilidad que herramientas tecnológicas, y en cómo éstas potencializan la comprensión de los distintos usos de las literales (incógnitas, variables, números generales o parámetros). Para ello establece varios significados sobre el concepto de parámetro, tratando de diferenciarlos de las variables y las incógnitas. Identifica tres pasos esenciales en la trayectoria de aprendizaje del parámetro: fijador de posición, como una cantidad que cambia y como un generalizador. Con base en ello, emplea la TI-Nspire planteando una serie de actividades que llevan a los estudiantes a reconocer las características específicas de este tipo de literales, así como la influencia que tienen sobre las representaciones gráficas de funciones polinomiales (ver Figura 14); con lo que trata de tender un puente hacia la comprensión de dichos objetos matemáticos.

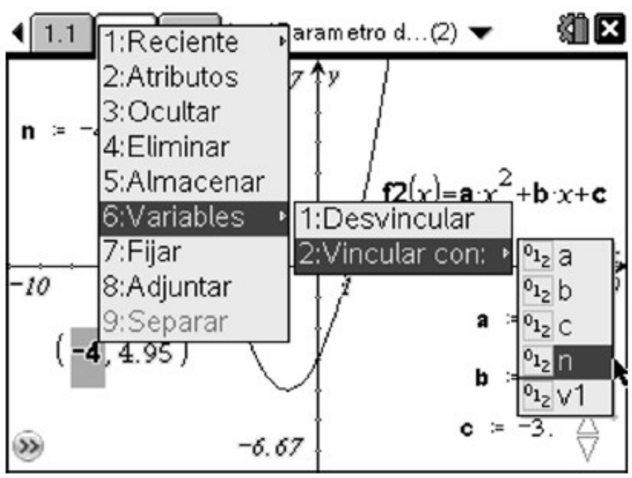


Figura 14 Ejemplo de actividad con la TI-Nspire (Basurto, 2011)

Los resultados permitieron observar lo siguiente: antes de utilizar el recurso tecnológico los parámetros son considerados como entidades discretas más que continuas; la diferenciación entre los parámetros, incógnitas y variables no es clara; la visualización de los efectos de los parámetros en las gráficas de las funciones se consigue sólo en el caso de funciones lineales, pero a partir de funciones cuadráticas el rendimiento desciende notablemente. Una vez que se aplica la intervención en el ambiente digital los estudiantes mejoran notablemente su rendimiento concibiendo a los parámetros como entidades continuas capaces de agrupar en familias de rectas, parábolas, entre otras. Finalmente, afirma que un ambiente tecnológico dinámico como el que provee la TI-Nspire es capaz de potencializar la comprensión de objetos matemáticos susceptibles de tener diferentes significados (polisémicos) además de permitirles experimentar con ellos situaciones que en los ambientes cotidianos de papel y lápiz sería muy complejo y casi imposible de replicarse.

En este mismo orden de ideas, Basurto (2013) presenta una ruta didáctica sobre la enseñanza de los parámetros en la educación media. Fundamenta su trabajo (basado en la génesis instrumental) en investigaciones teóricas, en la que estudiantes de bachillerato usan e interpretan los parámetros en funciones polinomiales, lugares geométricos y expresiones algebraicas, y estudia algunos procesos cognitivos que ellos involucran en las actividades. En la investigación se identifican los tres pasos esenciales en la trayectoria de aprendizaje de un parámetro: como un fijador de posición, como una cantidad que cambia y como un generalizador. Las actividades se trabajan en dos entornos: el Software Dinámico de Matemáticas Geogebra (empleo de deslizadores para representar parámetros, y su asociación a expresiones algebraicas); y la TI-Navigator que permite establecer una red inalámbrica entre estudiantes conectados con el profesor a partir de calculadoras. Parte de su conclusión es que el uso de la máquina (calculadoras, computadoras) libera a los estudiantes de la preocupación sobre los cálculos y enfatiza una concepción global de los procedimientos de solución; además el uso adecuado de un CAS requiere hacer explícitos los diferentes roles de las literales a diferencia del trabajo con lápiz y papel como parte del proceso de convertir un artefacto en instrumento (Artigue, Trouche y Guin, 1999; citados en Basurto, 2013); y Geogebra proporciona dos representaciones de cada objeto matemático en sus ventanas gráfica y algebraica (estableciendo una conexión bidireccional) y el empleo de deslizadores agiliza el desarrollo de actividades.

En Font (2008) se registra el análisis de una actividad prediseñada y ejecutada en un graficador para provocar la deducción de la derivada de la función seno (graficando $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para h muy pequeño). Rescata algunas técnicas antiguas con el auxilio de graficadores dinámicos (Subtangente=1 para derivar $f(x) = e^x$, además de la recta y funciones logarítmicas). Esta técnica relaciona las siguientes representaciones:

Gráfica de *f (x)* y Expresión simbólica de *f (x)* ⇒ Expresión simbólica de *f ´(x)*

En este estudio el autor logra transitar de lo particular a lo general, tomando como base el diseño de un cuestionario; y las representaciones que intervienen son consideradas, como particulares o generales, según convenga. Concluye que la incorporación de graficadores en la enseñanza de las funciones y de las derivadas produce efectos metafóricos que condicionan la comprensión de los alumnos (entendiendo por metáfora como la identificación de un término real con uno imaginario con el que mantiene una relación de semejanza). Además esta incorporación puede llevar a muchos alumnos a estructurar la gráfica por medio de la proyección metafórica de su campo de experiencias sobre lo que es un "camino" (principio, final, punto que se mueve, antes, después, etc.). Por lo que *"La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino"* (Font y Acevedo, 2003, citados en Font, 2008).

El rol de la tecnología en las situaciones planteadas es un recurso de apoyo que dinamiza la modelación: la captura de datos o simulación de algún diseño. Como afirman Arrieta y Canul (2004):

> … el papel de los medios tecnológicos es de suma importancia, sin embargo los instrumentos no pueden desplazar el diseño de las secuencias, es decir, la incorporación de medios electrónicos, por sí mismos, no inciden en la resolución de los problemas educativos, estos juegan un papel importante dentro de un proceso donde los actores ejercen el dominio de ellos (p. 210).

En este proyecto se potenció el empleo de tecnología, con el objetivo de que el estudiante efectuara múltiples realizaciones en cada experimento, hiciera los ajustes necesarios e inclusive identificara patrones de comportamiento gráfico.

I.5. Conceptualización de la derivada: dos perspectivas de estudio

I.5.1. Desde los libros de texto

En este apartado se presentan algunas maneras de arribar a la definición del concepto de derivada, las cuales corresponden a algunos libros de texto que se suelen usar como apoyo en el curso de cálculo diferencial de la UAPUAZ.

En el Capítulo III del libro Granville (1980, pp. 25-35), tenemos que el incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro es la diferencia que se obtiene restando el valor inicial del valor final, se representa por el símbolo Δx, que se lee "delta x". El incremento puede ser positivo o negativo (decremento) según que la variable aumente o disminuya al cambiar el valor. Enseguida establece el incremento Δy de la función $y = f(x)$ y continúa con la razón de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, formando una sucesión de valores para una función particular ($y = x^2$), la cual aproxima tomando Δx suficientemente pequeño, cuando x toma un valor particular, y lo denota por $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Más adelante sintetiza lo anterior como la regla general de derivación (regla de los cuatro pasos), presentada de la siguiente manera:

> Primer paso. Se sustituye en la función x por $x + \Delta x$, y se calcula el nuevo valor de la función $y + \Delta y$.
>
> Segundo paso. Se resta el valor de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (incremento de la función).
>
> Tercer paso. Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente).

> Cuarto paso. Se calcula el límite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada (p. 30).

Es decir, la definición de derivada de una función de una variable que emplea es:

> *La derivada (función derivada) de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero (p. 27).*

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es *derivable* o que tiene *derivada*. Y simbólicamente la representa por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Considera al símbolo $\frac{dy}{dx}$ no como una fracción, sino como el valor límite de una fracción. Además establece una serie de identidades que corresponden a notaciones usuales para representar la derivada de una función:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) = f'(x)$$

En donde $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ se lee "*la derivada de y con respecto a x es igual a f prima de x*".

Completa el apartado enfatizando que en el paso cuando se hace $\Delta x \to 0$, la variable es Δx y no *x*. Para lo cual fija $x = x_0$ y reescribe la derivada como

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

En la sección 28 del mismo capítulo presenta la interpretación geométrica de la derivada (ver Figura 15), considerando a la razón de incrementos entre dos puntos P y Q, con P fijo, como la pendiente de la secante que pasa por esos puntos, y que esta última tiene como límite la tangente en P.

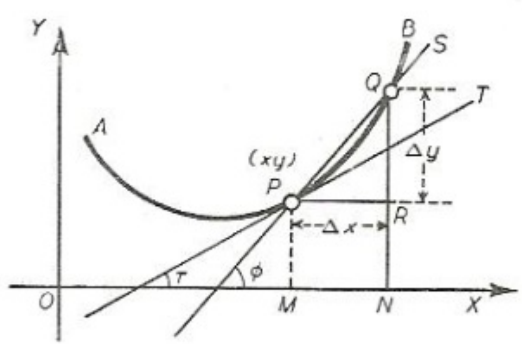


Figura 15 Interpretación Geométrica de la derivada (Granville, 1980)

Así que después de aplicar el cuarto paso de la regla se tendrá:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} tg(\phi) = tg(\tau)$$

En donde ϕ es la inclinación de la secante *PQ*, y τ es la inclinación de la tangente en *P*. Esto último lo establece como un teorema. Los capítulos siguientes tratan de las reglas de derivación, aplicaciones (máximos, mínimos, funciones crecientes y decrecientes), derivadas sucesivas y derivadas de funciones trascendentes, diferenciales, curvatura y hasta el capítulo XI el teorema del valor medio y sus aplicaciones (estos últimos tres temas no se abordan en el bachillerato de la UAPUAZ).

En el Capítulo 2 de Larson, Hostetler, Edwards y Heyd (2005, pp. 92-137) se comienza reduciendo el problema de encontrar la recta tangente en un punto *P* al problema de hallar la *pendiente* de esa recta tangente en el punto mencionado (ver Figura 16).

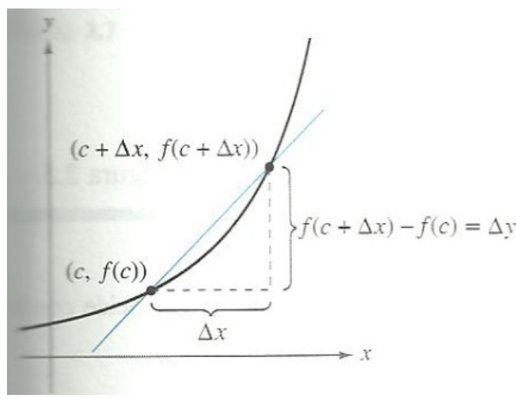


Figura 16 Recta secante que pasa por (c, f(c)) y (c+Δx, f(c+Δx))

Para ello se recurre a una aproximación mediante una recta secante que pase por el punto de tangencia y un segundo punto sobre la curva, se obtiene la pendiente de esta última recta empleando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, quedando expresada de la siguiente manera:

$$m_{sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}$$

Obtiene aproximaciones cada vez más exactas de la pendiente de la recta tangente al elegir puntos cada vez más cercanos al punto de tangencia (ver Figura 17).

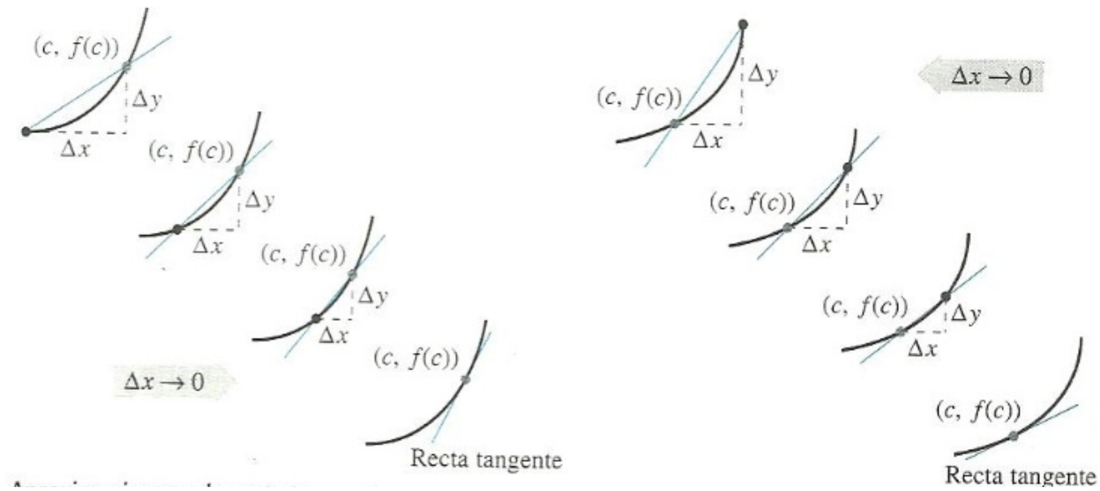


Figura 17 Aproximaciones a la Recta Tangente

Por lo tanto definen la recta tangente con pendiente *m* de la siguiente manera:

Si *f* está definida sobre un intervalo abierto que contiene a *c* y si existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = m$$

Entonces la recta que pasa por el punto (*c,f(c)*) con pendiente *m*, es la recta tangente a la gráfica de *f* en ese punto (*c,f(c)*).

Señalan además que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (*c,f(c)*) también se conoce como pendiente de la gráfica *f* en *x*=*c*.

Por lo que el límite usado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir la operación en cálculo llamada derivación.

La derivada de *f* en *x* se expresa por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Siempre que el límite exista. Para todas las *x* para las cuales el límite existe, *f´* es función de *x*.

Además una función es diferenciable en *x* si su derivada existe en *x*, y es diferenciable en un intervalo abierto *(a,b)* si es diferenciable en todos los puntos en el intervalo. Al igual que en Granville se establecen varias notaciones, pero maneja los límites laterales como derivadas izquierda y derecha, estableciendo una relación entre diferenciabilidad y continuidad. En las siguientes secciones establece las reglas de derivación, las derivadas de orden superior, derivación implícita y en el Capítulo 3 aborda algunas aplicaciones de la derivada (extremo relativos, números críticos, teorema de Rolle, teorema del Valor Medio, funciones crecientes y decrecientes, prueba de la primera derivada, concavidad, prueba de la segunda derivada, problemas de mínimos y máximos).

De manera muy similar al texto anterior se aborda el tema de derivada, Capítulo 2, en el texto Leithold (1998, pp. 100-196). La definición de derivada es exactamente la misma que en Larson y colaboradores (2005), con algunas alternancias en cuanto al trabajo con la tasa de variación. Basándose en un contexto físico define la velocidad instantánea como:

> Si *f* es una función definida por la ecuación
>
> $$s = f(t)$$
>
> Y una partícula se desplaza a lo largo de una recta, tal que *s* es el número de unidades de la distancia dirigida de la partícula desde un punto fijo sobre la recta en *t* unidades de tiempo, entonces la velocidad instantánea de la partícula a las *t* unidades de tiempo es *v* unidades de velocidad, donde
>
> $$v = f'(t) \leftrightarrow v = \frac{ds}{dt} \text{ si existe (p. 134).}$$

Aclarando que la velocidad instantánea puede ser positiva o negativa, dependiendo del desplazamiento en sentido positivo o negativo. Y cuando la velocidad instantánea es cero, la partícula está en reposo. Según el autor la rapidez de una partícula en cualquier tiempo es el valor absoluto de la velocidad instantánea. En consecuencia la rapidez es un número no negativo y sólo indica qué tan rápido se está moviendo la partícula, mientras que la velocidad instantánea también indica el sentido del movimiento.

Finalmente, del libro de Análisis Matemático de Apostol (1996) podemos observar que la derivada es presentada de manera similar que en Larson, Hostetler, Edwards y Heyd (2005), es decir, recurre al cociente de diferencias, pero no se remite a su interpretación geométrica de inicio. Esta interpretación la deduce del siguiente teorema (ver Figura 18), el cual emplea para reducir teoremas de derivadas a teoremas de continuidad:

Teorema 5.2. *Si f está definida en un intervalo (a, b) y es diferenciable en un punto c de (a, b), entonces existe una función f* (que depende de f y de c) continua en c y que satisface la ecuación*

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x),$$

para todo x de (a, b), con $f^*(c) = f'(c)$. Recíprocamente, si existe una función f, continua en c, que satisfaga (1), entonces f es diferenciable en c y $f'(c) = f^*(c)$.*

Figura 18 Definición de diferenciabilidad (Apostol, 1996)

Pues si f^* es continua en c, $f^*(x)$ es aproximadamente igual a $f^*(c) = f'(c)$ si x es próximo a c, y la ecuación del teorema queda como $f(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ que será aproximadamente correcta cuando *x-c* sea pequeño. Es decir, si f es diferenciable en c, entonces *f* es aproximadamente una función lineal en las proximidades de *c* (ver Figura 19).

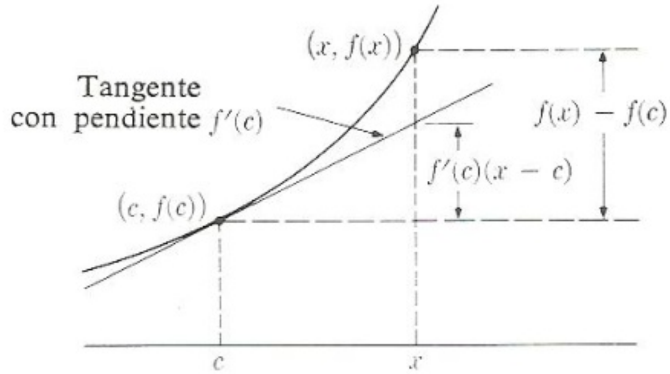


Figura 19 Aproximación lineal de f (Apostol, 1996)

Como se puede notar la presentación del tópico de derivada mantiene una estructura muy similar en los textos mencionados, y ninguno de ellos le da preferencia a los acercamientos intuitivos ni a la visualización, más aún, no se explotan las ventajas de trabajar con ideas relacionadas con la variación. Predomina lo algorítmico y el formalismo (definición en términos de límites o en términos de ε y δ). Y en el mejor de los casos la graficación pasa a segundo término, al ser considerada como una habilidad que le permite al estudiante visualizar algunos de los aspectos que se presentan de la derivada. En las situaciones que proponemos el acercamiento a la derivada no es mediante la definición en términos de límite, ni utilizando la expresión algebraica de las funciones involucradas, sino mediante un tratamiento numérico y gráfico, en donde ésta última tiene un rol determinante en la argumentación y la variación es el eje rector.

A continuación contrastamos lo anterior para comprender la derivada desde la perspectiva variacional.

I.5.2. Conceptualización de la derivada desde la perspectiva variacional

Entre las investigaciones en matemática educativa, preocupadas por abordar la derivada desde la perspectiva de lo variacional, destacan dos posturas particulares.

La primera de ellas concierne a los trabajos realizados por el Dr. Crisólogo Dolores Flores y algunos colegas. Dolores centra sus investigaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática de las variables en el bachillerato. Parte del hecho de que estudiantes, tanto en ese nivel como los que inician la universidad, manifiestan un escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y por consiguiente, escasa comprensión acerca de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas. Algunas de sus principales aportaciones son:

En su tesis de doctorado, Dolores (1996) enunció una propuesta didáctica para la enseñanza del tema de derivada en el bachillerato, adoptando a la variación física como eje rector de los contenidos. Logró un acercamiento intuitivo a la derivada utilizando problemas de rapidez de la variación (sin un tratamiento riguroso de los contenidos del cálculo).

En Dolores (1998a) diseñó y aplicó un cuestionario donde se exploraron las ideas que preceden a la derivada e ideas relacionadas directamente con el concepto. En la primera parte del cuestionario investigó la cuantificación simple de la variación y la velocidad media. En la segunda parte se exploraron las ideas de los estudiantes sobre la derivada como límite, como la pendiente de la recta tangente y como velocidad instantánea.

Dos años después, Dolores (1998b) aborda el problema de la escasa comprensión de las ideas variacionales que subyacen al concepto de derivada en el bachillerato. Partió de la hipótesis de que el desarrollo de las ideas variacionales puede favorecer una mejor comprensión del concepto. Diseñó una experiencia pedagógica que se implementó en el aula, cuyo eje central fue el concepto de derivada. El enfoque variacional empleado en la experiencia se estructuró en tres fases: la primera incluyó el estudio de las variables y funciones; la segunda comprendía la formación del concepto de derivada (partiendo del problema de la determinación de velocidades medias); y la tercera la ampliación y profundización de la idea de razón de cambio instantánea en la resolución de problemas no relacionados directamente con la variación física.

Dolores (2000a) resume que investigadores de la enseñanza y aprendizaje de la derivada coinciden en que:

> … cantidades significativas de estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero difícilmente comprenden el para qué de esos algoritmos que realizan y el significado de los conceptos. Inclusive, difícilmente logran asociar las ideas claves del cálculo en la resolución de problemas elementales sobre la variación, a pesar de que históricamente del estudio de estos últimos se originaron las ideas claves del Cálculo Diferencial (p. 2).

En esta misma investigación presenta una instrucción didáctica que contribuye a la comprensión del concepto de derivada tomando en cuenta las ideas variacionales, haciendo énfasis en la noción de rapidez de la variación. Dicha propuesta fue estructurada en tres fases:

- Preparatoria: Crear las condiciones mínimas para comenzar el proceso de formación del concepto. Partía de la modelación de problemas sencillos de la física (trabajó las nociones de variable y función).
- De formación del concepto: Inicia trabajando con la rapidez de la variación (velocidad y aceleración promedio) para luego impulsar la rapidez instantánea mediante un acercamiento intuitivo al límite y la utilización de infinitesimales.
- De fijación: Amplía la definición de derivada a funciones que no dependen del tiempo, introdujo la definición de función derivada, dedujo, utilizó las reglas de derivación y se resolvieron problemas de aplicación.

En el artículo "*La matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*" Dolores (2000b) analizó los programas utilizados en el estado de Guerrero, México, observando que, en general, están estructurados con una abundante cantidad de contenidos que no obedecen a una sistematización en términos de los objetivos y métodos de enseñanza. También analizó algunos elementos teóricos acerca de la naturaleza de la variación y su relación con los principales conceptos de la matemática del cambio. Afirmó que la idea de variación se encuentra asociada a la medición y al cambio, y que para entender el proceso de la variación de las funciones es importante precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Estableció también que, al momento de realizar la medición de la variación, es importante tener en cuenta que los cambios se pueden medir a partir de comparaciones, estableciendo la notación adecuada para representarlo (ver Figura 20).

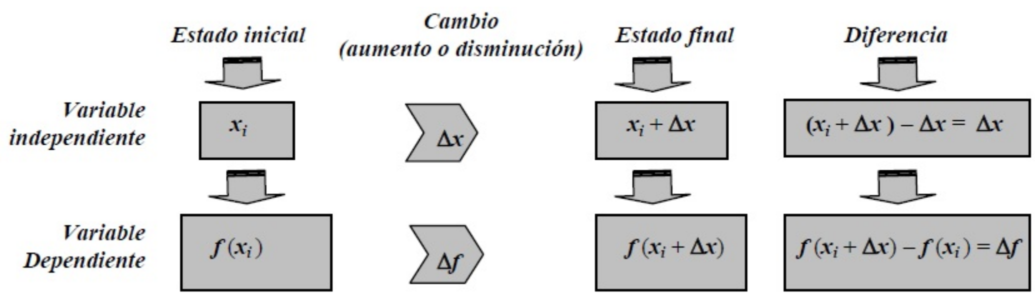


Figura 20 La Diferencia es el Modelo para medir la variación y el cambio

> Cabe observar que los procesos de variación están compuestos de estados sucesivos y suceden cambios entre un estado y el que sigue o cualquier otro. Por lo que en muchos casos es importante poder relacionar un cambio con otro, es decir, plantear una razón entre cambios, un cociente entre números (*razón de cambio*).

El estudio de Dolores (2001) se ocupó del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en una situación escolar con estudiantes de primer año de universidad, mediante una instrucción didáctica que involucró el diseño de actividades. El objetivo principal fue mostrar y valorar los resultados obtenidos al aplicar las actividades en el aula. Buscó transitar del sistema de representación analítico al geométrico, del geométrico al analítico y del geométrico al geométrico (analizando relaciones entre las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$). Este último analiza el comportamiento variacional de funciones utilizando los significados variacionales que subyacen en la función derivada e integral y su relación de reversibilidad. La puesta en aula se hizo en cuatro etapas:

- Primera. Trabajó la relación entre las curvas y sus tangentes.
- Segunda. Trabajó la relación variacional entre la derivada y su primitiva.
- Tercera. Realizó el análisis del comportamiento variacional a través de gráficas.
- Cuarta. Analizó las gráficas de funciones elementales según sus expresiones analíticas.

En colaboración Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) investigaron las concepciones relativas a la lectura de gráficas cartesianas que representan movimiento físico. Centraron su atención en las nociones de velocidad media, velocidad instantánea y la trayectoria de cuerpos en movimiento que se desprenden de la lectura de gráficas cartesianas que incluyen coordenadas tiempo, distancia y posición. A partir de esto, discutieron el significado de la derivada en el contexto del movimiento a través de gráficas cartesianas.

En Dolores (2006a) el investigador reporta resultados de un análisis acerca de la enseñanza de la derivada vista desde la perspectiva de los textos más usuales de Cálculo Diferencial (CD) y de los programas de estudio en el estado de Guerrero. Su estudio se centró en la formación, tratamiento y elementos propuestos para la fijación o asimilación del concepto de derivada. Utiliza como referente fundamental el papel de la variación, y detecta que:

> El tratamiento de la derivada en los textos sigue, casi invariablemente, la secuencia: incrementos, límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, notación, regla general para la derivación e interpretación geométrica. Todos definen a la derivada prácticamente en los mismos términos.
>
> La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero, en símbolos:
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
>
> Siempre que este límite exista (p. 175).

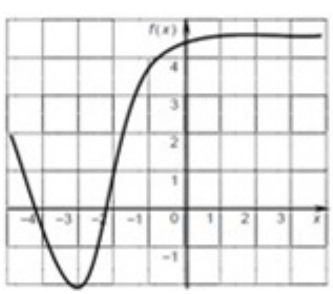
Además Dolores sostiene que:

> Para la asimilación del concepto de derivada, la mayoría de estos textos plantean ejercicios de obtención de derivadas mediante la regla de los cuatro pasos, la obtención de pendientes de curvas y tangentes, la determinación de ecuaciones de tangentes y normales y el cálculo del ángulo de intersección entre dos curvas (p. 176).

Y también resalta el hecho de que en los ejercicios y problemas propuestos en los textos revisados existe una tendencia marcada hacia el uso de algoritmos, que por ende se presta muy poca atención al papel que juega la heurística en la solución de los mismos. Es decir, presentan muy poca variedad de los mismos, implicando en su mayoría el uso repetitivo de técnicas preestablecidas, además todos son de corte intramatemático y no se plantean problemas relacionados con la variación física. Hace la observación que si sólo se emplean como base para un curso de cálculo diferencial textos tradicionales, como los que fueron objeto de su investigación, difícilmente los estudiantes podrán comprender la esencia de la derivada, pues lo presentan como un concepto abstracto que parece tener existencia sólo dentro de la misma matemática, y lo relacionan muy poco con la realidad.

Finaliza su estudio proponiendo varias actividades cuyo propósito es lograr un primer acercamiento a la derivada por la vía variacional, presentamos una de ellas en la Figura 21.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la función *f(x)*. Analícela cuidadosamente y contéstese lo siguiente:



a) ¿Cuánto cambia *f* si *x* cambia de -5 a -4?

b) ¿Cuánto cambia *f* si *x* cambia de -3 a -2?

c) ¿Cuánto cambia *f* si *x* cambia de 1 a 2?

d) Suponga que *x* cambia de izquierda a derecha, es decir $\Delta x > 0$. ¿Para qué *x* se cumplen las desigualdades siguientes?

$f(x+\Delta x)-f(x) > 0$
$f(x+\Delta x)-f(x) < 0$
$f(x+\Delta x)-f(x) = 0$

Figura 21 Ejemplo de actividad con enfoque variacional (Dolores, 2006)

Entre los resultados más relevantes sobre esta investigación tenemos:

- En general, el tratamiento que los textos le dan a la derivada no es motivado por el estudio de los fenómenos de variación, la mayoría utilizan introducciones de corte numérico y en lo analítico se reduce al trabajo algebraico: con los incrementos al aplicar la regla de los cuatro pasos; la obtención de pendientes de curvas y tangentes; la determinación de ecuaciones de tangentes y normales; y el cálculo del ángulo de intersección entre dos curvas.
- La interpretación geométrica de la derivada es planteada después de la definición y se le considera como la pendiente de la tangente a la gráfica de la función, ocultando su naturaleza variacional.
- La relación con los problemas de la variación física son tratados hasta el capítulo dedicado a las aplicaciones.
- El tratamiento de la derivada en los textos sigue, casi invariablemente, la secuencia: incrementos, límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, notación, regla general para la derivación e interpretación geométrica.
- Mediante las ideas de la variación se puede hacer patente la esencia de este concepto dinámico. Pues mediante la variación se cuantifica el cambio de una manera muy especial, proporcionando un índice o razón de cambio, bien en un punto o en todo un intervalo.
- Al igual que en los textos, los programas revisados no siguen un tratamiento del Cálculo que consideren a la variación o el cambio como eje rector del cual se desprendan los contenidos.
- Finalmente, Dolores (2007) aborda el problema de la escasa comprensión de la derivada en estudiantes de bachillerato, los cuales no logran reconocer las ideas asociadas de este concepto en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio. Recopila diferentes trabajos de su investigación, algunos realizados por sus colaboradores a lo largo de más de diez años de trabajo. El objetivo principal del libro fue aportar los elementos fundamentales para el desarrollo de una propuesta para la enseñanza de la derivada. Mientras que en el libro *"La variación y la derivada",* de Dolores (2013), está dirigido para que estudiantes y profesores tengan un acercamiento de carácter intuitivo y comprendan los conceptos relacionados con la derivada, planteando y resolviendo situaciones variacionales elementales. Nuevamente el eje rector es la variación.

La segunda postura tiene como eje de trabajo establecer un acercamiento a la derivada de una función mediante un tratamiento de las derivadas sucesivas. Entre los trabajos realizados desde este enfoque tenemos:

Cantoral y Farfán (1998) quienes afirman que la combinación de tareas en el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico favorece al desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional.

En algunas otras investigaciones, segunda postura, se han logrado identificar patrones gráficos asociados a las derivadas de orden mayor o igual a 1; por ejemplo Cantoral, Molina y Sánchez (2005) trabajaron considerando hasta la tercera derivada desde un enfoque gráfico. Argumentan que el cálculo de las variaciones sucesivas en un contexto numérico permite identificar patrones y el grado cuando se trabaja con polinomios. En otras se ha logrado resignificar la derivada, como la tesis de Testa (2004) y también reportado en Cantoral y Testa (2006), en la que se logra resignificar el valor numérico de la segunda derivada, analizando las relaciones que nombra de subida y de bajada y que esquematiza (ver Figura 22). También se tienen trabajos como el de Cardona (2009) quien propone un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, en donde el estudiante podría identificar el signo de la derivada sucesiva en función del comportamiento creciente o decreciente de su antecesora.

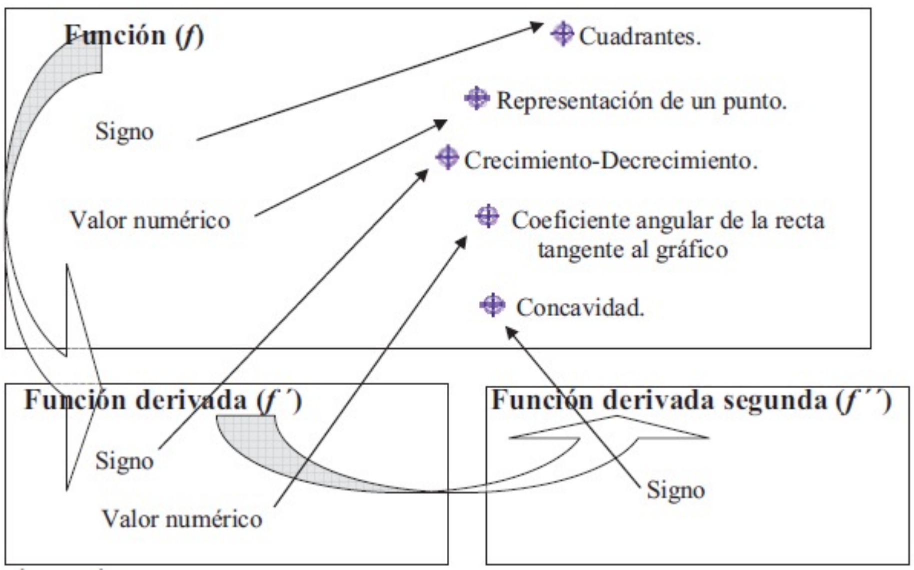


Figura 22 Relaciones de Subida y Bajada (Testa, 2004; Cantoral y Testa, 2006)

Para reforzar estas ideas podemos recurrir a Cantoral (2013a) en donde podemos encontrar una descripción y ejemplificación de la línea de investigación del PyLV. El autor afirma que

> … al pretender enseñar un concepto, se deben favorecer las diversas miradas que puedan hacerse de los conocimientos y sus relaciones con los conocimientos previos, con el fin de que los saberes antes adquiridos puedan ir formando una cierta estructura conceptual cada vez más robusta y funcional (p. 17).

Además recomienda emplear de manera frecuente, la visualización en las clases de matemáticas para favorecer las diversas formas de representación y la exploración de otros tipos de argumentación. En este tenor, sostiene que el discurso escolar reduce el tratamiento de la derivada a una enseñanza de técnicas de derivación, provocando una inhibición del desarrollo de ideas propiamente variacionales. Entonces parte de la tarea es reconocer variaciones referidas a elementos que a su vez varían.

Con la articulación de estas ideas analiza una función derivable en todos sus puntos, la desarrolla en torno a un punto con cierto incremento h, reescribe los coeficientes de dicho desarrollo en términos de derivadas sucesivas de la función original y finalmente la vuelve a reescribir en torno a x-a, con lo cual obtiene una expresión que sirve para encontrar las derivadas sucesivas de una función en un punto, basta desarrollar en serie de potencias en torno del punto en cuestión.

$$f'(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

Enseguida compara la definición usual de la derivada en bachillerato y la descrita anteriormente, y las maneja como dos procedimientos distintos para obtener la derivada. La primera es la derivada de Cauchy y la otra concierne a Lagrange (ver Figura 23).

Derivada de Cauchy	*Derivada de Lagrange*
Límite del cociente incremental	Coeficiente lineal en el desarrollo de serie
$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$

Figura 23 De Cauchy a Lagrange (Cantoral y Mirón, 2000, citados en Cantoral, 2013a)

La primera (conocida como la regla de los cuatro pasos) es más usual en el bachillerato y en los primeros cursos de universidad, mientras que la segunda es más usada en el nivel superior. Cantoral concluye afirmando que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición sin la cual la formación de la idea de derivada y en consecuencia, de la noción de predicción deviene inevitablemente frágil.

En este proyecto coincidimos con Cantoral (2013a) en que los estudiantes deben generar otros tipos de argumentación, más allá de lo algorítmico o analítico. Deben desarrollar ideas variacionales para comprender el concepto de derivada. Además compartimos la idea de que al incorporar elementos visuales en el diseño incitaremos a que el estudiante transite entre varios contextos (geométrico, numérico, icónico y verbal). Y por el hecho de trabajar algunas actividades de forma experimental, las conjeturas, procedimientos heurísticos, ensayos, exploraciones e intuición del alumno jugarán un papel importante. También coincidimos con Dolores en la explotación de las ideas variacionales y porque su forma de acercarnos es más cercana a la que trabajamos en el bachillerato de la UAPUAZ.

Las investigaciones revisadas en este capítulo hacen aportaciones de propuestas concretas de trabajo para la derivada. A partir de estos antecedentes podemos afirmar que el panorama del estudio de la derivada es diverso, en algunas se identificaron concepciones y errores que los estudiantes manifiestan durante el proceso del estudio de la derivada, otras en cambio, establecieron propuestas y diseños didácticos que tienen como propósito fortalecer el entendimiento de este concepto tan complejo del cálculo.

La mayoría de los trabajos revisados que ofrecen algún tipo de propuesta didáctica para el estudio de la derivada, coinciden en la necesidad de establecer acercamientos alternativos a la derivada, y no únicamente basándose en las definiciones formales. Coincidimos con ésta postura y con algunas que particularmente consideran que el acercamiento a este tópico debería ser por mediante el estudio de la variación empleando recursos tecnológicos. Sin embargo, diferimos de aquellos trabajos que centran su estudio en el objeto matemático o en técnicas algorítmicas, pues no se preocupan por hacer que el estudiante use conocimiento para entender la derivada. Nuestra investigación está centrada en las prácticas sociales, pues son ellas precisamente las que norman la construcción del conocimiento matemático. En las situaciones experimentales hacemos que el estudiante use conocimiento sobre la variación, que identifique ¿qué cambia?, ¿cómo cambia?, y ¿cuánto cambia?, por lo que eventualmente el estudiante tiene que comparar, cuantificar, predecir y modelar sin tener una expresión algebraica de la situación. Para ello ejecuta múltiples realizaciones de la situación, hace ajustes, identifica comportamientos y desarrolla un razonamiento que coadyuvan al desarrollo de significados, procedimientos y procesos-objetos el cual se ve plasmado en los argumentos que genera, en este caso de tipo variacional. En consecuencia resignifica la derivada mediante el uso de la gráfica en situaciones experimentales, pues como resultado de ésta interacción el estudiante construye algo relacionado con la variación. En otras palabras, resignifica su conocimiento sobre la derivada al poner en juego las prácticas de modelación y graficación que norman la construcción del conocimiento en un escenario de laboratorio.

I.6. Problemática de investigación

La problemática abordada en este trabajo se refiere a que la enseñanza tradicional del cálculo, específicamente en el caso de la derivada, suele centrarse en prácticas algorítmicas y algebraicas, dejando de lado otros procesos como los argumentos visuales o los enfoques numéricos por no considerarlos plenamente matemáticos. La misma tendencia se puede observar en los ejercicios y problemas propuestos en libros de texto y, como menciona (Dolores, 2006), difícilmente los estudiantes podrán comprender con ellos la esencia del concepto de derivada. Por lo que existe, dentro del dME una ausencia del estudio de la variación, y por ende, de significados variacionales asociados al concepto de derivada.

I.7. Problema

De manera particular en el caso de la derivada, existe una ausencia de significados variacionales por parte del estudiante, ya que el significado que tiene es como una operación algorítmica que hay que realizar sobre las funciones. Por lo tanto, se considera necesario el establecimiento de situaciones experimentales de variación que le permitan al estudiante desarrollar un pensamiento y lenguaje variacional donde el concepto de derivada se resignifique.

I.8. Pregunta de Investigación

Es de nuestro interés abordar la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo el conocimiento sobre la derivada, se resignifica en los estudiantes de bachillerato de la UAPUAZ en situaciones experimentales ex profeso al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional?

Para medir este efecto identificaremos las construcciones de la Socioepistemología del Cálculo para las situaciones experimentales planteadas.

I.9. Objetivo general

Desarrollar el Pensamiento y Lenguaje Variacional en torno a la derivada en estudiantes de bachillerato a través de situaciones "experimentales de variación".

La finalidad es que el estudiante de bachillerato cuente con otros marcos de referencia donde la derivada se resignifique a través de modelar situaciones físicas concretas usando un lenguaje rico en gráficas y empleando a la variación como eje rector del diseño de dichas actividades.

I.10. Objetivos específicos

- Rediseñar situaciones experimentales de variación implementadas mediante la modelación y graficación.
- Centrar los argumentos de los estudiantes en el análisis de las gráficas de las situaciones experimentales.
- Propiciar en el desarrollo de las situaciones el uso de estrategias variacionales.
- Propiciar el trabajo colaborativo, el debate y la discusión de las situaciones entre los estudiantes.

I.11. Hipótesis

El desarrollo de situaciones experimentales de variación mediante la modelación y graficación, permite el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional donde la derivada se resignifica.

Capítulo II. Marco Teórico

En este apartado se presenta la delimitación teórica utilizada en la investigación, se explicará su naturaleza haciendo énfasis en la forma en que se construye el conocimiento, la problemática que atiende y los conceptos clave que en ella se manejan. Además, se establece cómo este marco se adapta a la problemática planteada en la investigación.

II.1. La problemática y lo social

La problemática abordada en esta investigación se origina en el curso de cálculo del nivel medio superior, cálculo diferencial, en donde se ha detectado que existe una ausencia de significados variacionales sobre la derivada por parte de los estudiantes, y quienes la suelen considerar básicamente como otra operación que hay que realizar sobre las funciones. Parte de esta situación se debe a que tradicionalmente la enseñanza de este tópico del cálculo suele centrarse en prácticas algorítmicas y algebraicas (Artigue, 1995), o bien se presenta de forma abstracta sin considerar su base empírica (Cantoral, 2013b). Por lo que es común que se dejen de lado argumentos visuales o enfoques numéricos por no considerarlos plenamente matemáticos (Cantoral y Farfán, 1998).

Coincidimos con Artigue (1995) cuando afirma que

> … si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y resolver algunos problemas estándar, es difícil que logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento del cálculo (p. 97).

Con respecto a los ejercicios y problemas propuestos en libros de texto, se puede observar una tendencia similar a la anteriormente descrita, y la situación peculiar de que muchos de los que son utilizados en clase provienen de sistemas escolares diferentes al nuestro (Cantoral, 2013b); por lo que difícilmente los estudiantes podrán comprender con ellos la esencia del concepto de derivada (Dolores, 2006).

Por ello se requiere del establecimiento de marcos de referencia que permitan la resignificación del concepto de derivada. En los que el estudiante de bachillerato construya y comparta significados relativos a la derivada y no recurra principalmente solo a prácticas de memorización algorítmica. El marco de referencia propuesto se caracteriza porque en él se trabajan situaciones diseñadas para ser experimentadas en un escenario muy particular, el cual no está limitado a un espacio físico particular (como los laboratorios de física o química). En este escenario los estudiantes generan justificaciones funcionales y se producen resignificaciones del contenido matemático en cuestión: ya sea manipulando diversos materiales o mecanismos físicos; recopilando datos en forma manual, empleando recursos tecnológicos, analizando simulaciones en software y construyendo algunas otras. Ese contexto especial y específico para hacer matemáticas según Molfino (2010), permite una interacción entre estudiantes y profesor (investigador) en lo que se denomina laboratorio. No es específico de matemáticas porque precisamente en él se pretende explorar propiedades, relaciones y características de conocimientos que pueden pertenecer a diferentes disciplinas, favoreciendo a su vez una mejor comprensión de conceptos.

En el proyecto asumimos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) por las siguientes razones:

I. Su interés por explicar la constitución del conocimiento matemático a través de las prácticas sociales (norman su construcción). Considerando que el conocimiento no es preexistente sino que el individuo lo va construyendo. Pasando de los objetos a las prácticas (Cantoral, 2004).
II. Se reconoce a la Modelación-Graficación (M-G) como una categoría que genera conocimiento, razón por la cual la argumentación gráfica tiene un estatus que permite resignificar ese conocimiento matemático (Cordero, 2006a).
III. Es precisamente en esta teoría que nace la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

II.2. La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

En este apartado se presenta la definición de algunos términos propios de la teoría que soportan el trabajo realizado.

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) o Socioepistemología se ocupa del estudio de fenómenos didácticos ligados al saber matemático asumiendo la legitimidad de toda forma de saber, sea éste popular, técnico o culto, pues considera que ellas, en su conjunto, constituyen la sabiduría humana (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Se caracteriza por ser una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional.

Para esta teoría el problema educativo no es el de la constitución de objetos abstractos, sino el de su significación compartida mediante el uso de conocimiento culturalmente situado. No es de la aprehensión individual de objetos abstractos, sino el de la democratización del aprendizaje en que los estudiantes, en tanto ciudadanos, disfruten y participen de la cultura matemática enraizada en sus propias vidas (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). En otras palabras, el interés de estudio no es la producción matemática final que logra el hombre, sino el análisis de la actividad humana al hacer y usar matemáticas en un contexto social específico (Molfino, 2010). Y como afirman Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014) la TSME se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional. En consecuencia, permite reconocer que el conocimiento no está conformado por conceptos y estructuraciones conceptuales aisladas, sino que presenta una articulación gestada al seno de ciertas prácticas (Molfino, 2010).

En nuestro caso particular la investigación es de corte experimental, pues ponemos en juego la simulación y la modelación con el objetivo de que los estudiantes construyan conocimiento a través de las resignificaciones que se producen en las actividades (Camacho, 2006; citado en Córdoba, 2011).

Con respecto al saber matemático en la TSME, se establece que este tiene cuatro dimensiones (cognitiva, didáctica, epistemológica y social) que se entretejen en una sola unidad de análisis Cantoral (2013b), (ver Figura 24).

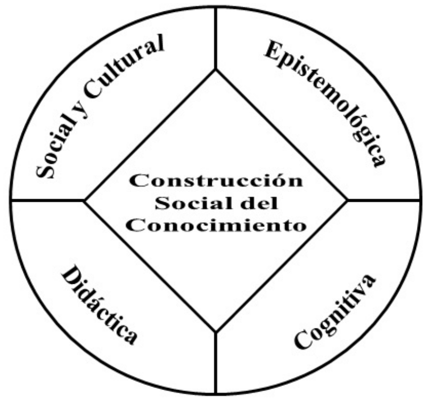


Figura 24 Dimensiones del saber (Cantoral, 2013b)

Dimensión didáctica. Trata con la matemática escolar como objeto de estudio y sirve fundamentalmente para localizar y explicitar el dME (libros de texto, programas de estudio, apuntes de clase, exámenes, artículos con propuestas educativas, etc.). Con ello se trata de examinar sus implicaciones didácticas y su resignificación para su difusión. En nuestra investigación la dimensión didáctica se localiza en la problematización de la derivada y su carencia didáctica la cual, hemos reportado en la revisión de libros e investigaciones en la docencia.

Dimensión epistemológica. Considera una naturaleza del saber. En esta investigación el saber es poner en uso un conocimiento matemático, en particular un conocimiento en el uso de las gráficas donde se implementa una categoría de Modelación-Graficación. Estos usos los evidenciamos en el desarrollo de las situaciones por medio de sus *funcionamientos* y *formas* de la gráfica. En la tabla 4 es donde implementamos esta dimensión epistemológica.

Dimensión cognitiva. Se ubica al nivel de los procesos mentales que se presentan al nivel de los actores educativos en su acción por conocer (pensamiento que incluye entidades matemáticas y procesos avanzados de pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación, o razonamiento bajo hipótesis). Aunque el estudio no se centra en el aspecto cognitivo, éste se interpretará a través de comportamientos observables de los estudiantes y de sus argumentaciones que se generan a lo largo de las situaciones.

Dimensión social. Se centra en los roles que juegan los actores y en el papel que tiene el saber en tanto construcción social del conocimiento en sus tareas principales, la construcción de consensos, los usos y las prácticas. De estos roles surgen las prácticas sociales observables en la interacción de grupos con significados propios e intención, ubicado en un contexto histórico o actual, generando herramientas para construir conocimiento matemático (Cordero, 2001). En esta dimensión social se ubica a la graficación como una práctica social, es decir, la graficación es más que un acto de representar la gráfica de una función. Por lo que tiene sentido señalar que la graficación es el uso de la gráfica en una situación específica (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez y Cordero, 2014).

La investigación de corte Socioepistemológico identifica prácticas diversas produciendo lo que Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014) denominan una descentración del objeto. También delimita el papel que juega el escenario histórico, cultural e institucional en la actividad humana.

La TSME asume que para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas se precisa acudir, y esto la diferencia de otros enfoques teóricos, a un examen minucioso del saber, a su problematización (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014).

> Este enfoque inicia entonces con este particular tratamiento del saber. Se lo construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona a la opción constructiva desde la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos. Esto es en definitiva que el saber se problematiza (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 97).

En ella, la historia es entendida como una herramienta que permite explicitar las circunstancias que constituyen un contexto de significación para el saber mismo, lo que favorece una introducción significativa y articulada al sistema didáctico (Buendía y Montiel, 2009a).

> La *forma de operar* de la Socioepistemología consiste en primer lugar interpretar el fenómeno didáctico a través de relaciones complejas que abarcan dimensiones epistemológicas, cognitivas, didácticas y sociales. Posteriormente, con base en estas relaciones se diseña la situación y la implementación específica de la problemática conferida por el fenómeno didáctico. Se recolectan datos y se realiza su respectivo análisis de acuerdo a la aproximación teórica, para revisar las relaciones complejas. Con ello, finalmente se reinterpreta el fenómeno didáctico, ofreciendo, en el mejor de los casos, una resignificación matemática específica (Cordero, 2001).

II.3. La Práctica Social y Construcción Social del Conocimiento

La Socioepistemología sostiene la tesis de que las prácticas sociales son la base y la orientación del conocimiento humano (Cantoral, 2013b). Por consiguiente éstas son generadoras de conocimiento (Arrieta, 2003; Buendía, 2006; Martínez, 2005; Ferrari y Farfán, 2004, citados en Molfino, 2010). Y suelen considerarse como normativas de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica.

> *La práctica social no es lo que hace en sí el individuo o grupo (la práctica ejecutada), sino lo que les hace hacer lo que hacen, digamos que norma su accionar (la orientación de la práctica)* (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 100).

Además

> …las prácticas sociales se caracterizan por ser insustanciales, pero inferibles. Permanentes, aunque no estáticas. Normativas, pero no mandatarias o determinísticas. Se expresan en los planos individuales, colectivos e históricos. Son el producto de un análisis, no de una observación (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p.100).

La práctica social se regula, por así decirlo, con las actividades de medir, modelar, aproximar, graficar, calcular, buscar explicaciones de fenómenos específicos, elaborar conjeturas y justificarlas o refutarlas, enunciar definiciones y axiomas, comúnmente llamadas *prácticas de referencia*; las cuales son desarrolladas por un matemático o grupo de matemáticos en torno a un concepto (Molfino, 2010).

Desde esta perspectiva, el conocimiento es una construcción de sentido común normada por prácticas sociales y producto de prácticas de referencia propias de un contexto determinado (Molfino, 2010, p. 62). Razón por la cual, y de acuerdo con Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014), en la construcción social del conocimiento

> …se articulan los siguientes principios uno detrás de otro: se pasa de la acción, directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones: material (entorno), organizacional (contexto), social (normativo), esto se organiza como una actividad humana situada socioculturalmente, para perfilar una práctica (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una práctica de referencia que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), la que a su vez es normada mediante cuatro funciones por la práctica social (normativa, identitaria, pragmática y discursiva–reflexiva). Esta secuencia permite explicar empíricamente y teóricamente el proceso de construcción del sujeto individual, el sujeto colectivo y el sujeto histórico (p. 99).

En esta investigación resignificar no es dotar de nuevos significados un saber matemático o nuevas definiciones de un concepto, es más bien:

> … reforzar, robustecer, ampliar, enriquecer, articular e integrar un significado ya existente que las personas tienen y que lo están usando en un momento o situación particular, con una finalidad específica y en el ejercicio de diferentes prácticas (Córdoba, 2011, p. 70).

De acuerdo con Cordero (2006a), la resignificación será

> … la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, o sea, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan los participantes (p. 11).

Por tanto la resignificación de la derivada, es la variación que es modelada mediante tres situaciones de experimentación, la primera relacionada con la optimización; la segunda con el equilibrio térmico; y la tercera se refiere a modelación de un movimiento específico. La forma en que se desarrollan usos de conocimiento respecto a la variación en las tres situaciones, da un valor al estudiante de integrar y articular significados que se confrontan con aquello que ya se sabe o creen saber, como se describe en el siguiente párrafo.

> … esta resignificación se logra a partir de la confrontación entre aquello que los estudiantes ya saben o creen saber, entre lo que intuyen o su sentido común les sugiere y los resultados obtenidos a partir de una situación real en la que ellos han sido actores principales y han tenido la posibilidad de interactuar con sus pares y con el profesor (Córdoba, 2011, p. 72).

En consecuencia, la resignificación dota de valor, genera interés, coadyuva a formular nuevas preguntas y perspectivas de conocimiento matemático. Particularmente en el estudio de la variación, se enriquece su significado cuando los estudiantes en un laboratorio ejercen prácticas de Modelación-Graficación sobre las situaciones experimentales.

Con respecto al dME, para la Socioepistemología éste es…

> …la manifestación del conocimiento matemático, normada por creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática, por lo que dicta el currículum y por las necesidades e intereses de todos los actores de la noósfera. El discurso modela el desarrollo de la clase y establece prioridades sobre 'aquello' que debe estudiarse; el tipo y características de actividades, la forma de evaluar, el tipo de planteamientos y ejercicios (Cordero y Flores, 2007, citado en Molfino, 2010, p. 16).

En otras palabras, el dME está formado por los discursos que facilitan la representación en matemáticas alcanzando consensos entre los actores sociales (Cantoral, 1990, citado en Cantoral y Farfán, 2008, p. 744). Involucra a las formas orales, como el diálogo que se puede suscitar en una clase entre profesor y alumnos, pero también involucra formas escritas como los programas o los libros de texto seleccionados para dictar un curso (Castañeda, 2002). También conforman el discurso otros aspectos relevantes como:

> … las prácticas docentes y todo lo que hace a la formación docente: la estructuración de sus planes y programas, los libros de texto que se recomiendan y las prácticas docentes de los formadores de profesores. Por otro lado, integran el discurso todas las manifestaciones –generalmente escritas– que no son consultadas frecuentemente en los cursos actuales pero que de alguna manera influyeron o influyen en la configuración actual de los programas y las prácticas docentes. Ejemplos de ello serían los escritos científicos y libros de texto de antaño (Molfino, 2010, p. 63)

El dME privilegia las habilidades académicas, como si éstas fueran son las únicas que "valen la pena" desarrollar y a las cuales las personas deben aspirar y acceder a través de la instrucción escolar (Zaldívar, 2014). Los conocimientos así adquiridos difícilmente traspasan las esferas donde fueron tomados, el conocimiento se convierte en utilitario.

El conocimiento matemático escolar materializado en el dME, impone una forma específica de pensamiento, el cual se exige que sea sistemático, razonado, axiomático, formal, donde todo parece terminado y donde se niega otras formas de construcción y legitimidad (Zaldívar, 2014). Por lo que se precisa de un cambio de concepción profundo sobre la acción de la educación matemática, transitando del programa clásico al programa alternativo (Cantoral, 2013b), ver Tabla 1.

Programa clásico	**Programa alternativo**
Racionalidad universal	Racionalidad contextual
Currículum fijo	Currículum flexible
Basado en objetos	Basado en prácticas
Discurso matemático escolar-fijo	Rediseño del discurso *Matemático Escolar*
Reificación como norma	Práctica social como norma
Centrada en el sujeto	Centrada en comunidades

Tabla 1 Contraste entre el programa clásico y el alternativo (Cantoral, 2013 b)

Producto de este programa alternativo se construyen prácticas que fungen como elementos que generan argumentos en situaciones específicas y que a continuación describimos.

II.4. El Binomio Modelación-Graficación

Desde la Socioepistemología la Modelación-Graficación (M-G) es una categoría que permite construir conocimiento. Cuando hacemos referencia a la modelación y no al modelo, no nos referimos a que el centro sea encontrar explícitamente el modelo que dé cuenta de algún fenómeno, sino más bien al proceso de modelación, el cual es relevante porque es allí donde los elementos adquieren significados y se articulan para generar conocimiento llevando de esta forma, la matemática a un nivel funcional (Morales *et al*., 2012).

El binomio M-G es un constructo que expresa la funcionalidad del conocimiento matemático en una situación específica, pues al poner en juego la modelación en un ambiente tecnológico, se resignificará la variación con el funcionamiento y la forma del uso de las gráficas al reconocer patrones con múltiples realizaciones (Suárez, 2014).

Suárez (2014) hace la distinción entre la modelación y el uso de simulaciones por computadora. Menciona que cuando los alumnos hacen una simulación de computadora pueden manipular un modelo que ya ha sido creado; pero cuando ellos modelan, crean sus propias representaciones y aprenden algo sobre su naturaleza. Esta última vertiente es el referente de la investigación.

Dos elementos importantes en este binomio para el diseño de situaciones son el *funcionamiento* y la *forma* de las gráficas. De acuerdo con Suárez (2014), el *funcionamiento* (f_u) está asociado a los significados y los argumentos que los estudiantes tienen como medio y propósito en uso de gráficas, es decir, se expresa por las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeña la gráfica, mientras que la *forma* (F_o) está relacionada con los significados y los procedimientos asociados a cómo un estudiante las obtiene, esto es, son las maneras en que se presenta tal *funcionamiento* (Briceño, 2013). En otras palabras,

> … la forma es la manera en que se lleva a cabo ese propósito o rol, esto significa no sólo observar su visualización gráfica, sino analizar la manera en que se desempeña la gráfica para poner en funcionamiento un conocimiento (Briceño, 2013, p. 44).

Finalmente, para Buendía (2011) el constructo teórico de *uso de las gráficas* y su categoría de análisis *funcionamiento* y *forma* permiten explorar la naturaleza del saber matemático y permite abordar cuestiones acerca de cómo las gráficas desarrollan conocimiento matemático, cómo lo explican o cómo lo fundamentan.

Por otra parte, de acuerdo con Suárez (2014, p. 112-113), los elementos que caracterizan al binomio M-G son:

- Las *múltiples realizaciones* al graficar. Esperando que el estudiante al enfrenar una tarea de graficar una situación, esboцen diversas gráficas y a partir de la formulación de relaciones entre la situación y las características de la gráfica se establezcan argumentos que permitan discriminar entre las gráficas adecuadas.
- La *realización de ajustes* en la estructura para producir un *patrón gráfico* deseable. Esto se posibilita cuando se incorpora la simulación (de forma múltiple) y las gráficas se obtienen a partir de la toma de datos con sensores.
- El *desarrollo del razonamiento*. Emerge de la interacción entre las actividades de graficación y modelación, identificando funcionalidades.

En concreto, a partir del *funcionamiento* y la *forma* que surgen de la modelación (comportamiento de área, equilibrio térmico, movimiento), los estudiantes participan en experiencias llevando a cabo múltiples realizaciones donde identifican patrones, hacen ajustes de tal manera que relacionen la situación específica y las gráficas que obtienen, logrando un desarrollo en sus argumentaciones gráficas. Pero todas referentes al estudio de la variación.

Finalmente, la resignificación no implica establecer otros significados únicamente, sino que se generan *significados a través del uso* en la situación donde desarrollan su *funcionamiento* y su *forma* de acuerdo con lo que organiza el grupo humano (Domínguez, 2003; Buendía, 2011).

En particular resignificar la variación denota…

> …síntesis de la construcción matemática en la que intervienen significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos asociados a las ideas matemáticas del cambio y la variación (Suárez, 2014, p. 114).

Es decir,

> … una situación de aprendizaje que genera en los estudiantes un interés por estudiar un fenómeno de cambio a través de gráficas de las funciones que ahí intervienen

> contribuye a establecer relaciones entre gráficas y situaciones de cambio donde la variación tiene un sentido específico que no depende necesariamente de las propiedades analíticas de la función (Suárez, 2014, p. 117).

A continuación describimos cómo se interpretan desde la TSME construcciones matemáticas en situaciones específicas para su reorganización.

II.5. La Socioepistemología del Cálculo

La Socioepistemología del Cálculo (SC), es una reorganización del Cálculo producto de un análisis exhaustivo hecho por Cordero (1998) sobre varias investigaciones de corte epistemológico. En ella propone tres construcciones del cálculo: una situación de variación, una situación de transformación y una situación de aproximación (Cordero, 2006a; Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012). Cada una de estas construcciones tiene asociados sus significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos. Identifica también lo que denomina categorías del conocimiento matemático: predicción, graficación-modelación, acumulación, estado permanente, analiticidad entre otras (ver Tabla 2).

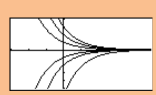
Construcciones en las prácticas	**Situación de:**		
	Variación	***Transformación***	***Aproximación***
Significados	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráfico y analítico Comportamiento tendencial de la función	Límite Derivación Integración Convergencia
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Variación de parámetros $\alpha = f'(x)$ $y = Af(Bx+C)+D$	Límite de un cociente $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$
Proceso-objeto	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Función
Argumentación	Predicción E_0 + variación = E_f	Graficación – Modelación 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h}{2!}$

Tabla 2 Socioepistemología del Cálculo (Cordero, 2001)

Morales y colaboradores explican que la cuarta columna, situación de aproximación, es un resumen de lo que es el dME (Programa clásico, ver Tabla 1), es decir, nos muestra la forma tradicional de tratar los temas del cálculo provenientes de las ideas de Cauchy. Mientras que la segunda columna de la SC presenta una postura contraria a la ya mencionada para la cuarta columna, en donde la situación de variación, alude a la práctica de predecir (modelar) vía un pensamiento variacional que construye conocimiento matemático. También mencionan que esta situación de variación no está presente en el dME pero con ella podría emerger una matemática funcional. En particular, la noción de predicción está relacionada con la estructura matemática del cálculo, específicamente con aproximación y derivación; y con la estructura matemática del análisis, para el caso con la serie de Taylor.

Los elementos: significados; procedimientos; procesos y objetos; y argumentos han permitido la articulación de las cuatro dimensiones de la Socioepistemología. Y a su vez han compuesto marcos epistemológicos específicos del Cálculo, que han ayudado a explicar marcos de referencia donde se da reconstrucción de significados en contextos interactivos (Cordero, 2001).

Los significados, en el sentido de los conceptos, son los patrones de comportamientos gráficos y analíticos. Estos se pueden identificar, por ejemplo, en el uso de: los ejes coordenados, los conocimientos previos, gráficas, etc. Esto se da en la toma de decisiones a partir de la problematización de una situación (Suárez, 2014). Los procedimientos son aquellas operaciones que el estudiante realiza al manipular conceptos e ideas, es decir, todo lo que usan para describir o controlar la situación. Los procesos-objetos están asociados con las relaciones que los estudiantes logran construir donde se identifican niveles cognitivos distintos. La argumentación es la síntesis de la articulación de los significados, los procedimientos y procesos-objetos y las relaciones que genera el estudiante al realizar tareas asociadas a estos.

Para Cordero (2001) en este tipo de marcos los estudiantes construyen representaciones[8] y aplican procedimientos con relación a: las operaciones que ellos son capaces de hacer; las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar; los conceptos que ellos van construyendo progresivamente. Además los cuatro elementos de la SC permiten hacer un análisis contextual para conocer el desarrollo de pensamiento matemático en las situaciones y para conocer el desarrollo del pensamiento matemático en la interacción de las tres situaciones (variación, transformación o de aproximación). Y nociones como predicción, acumulación, estado permanente, transformación y aproximación entre otras son llamadas categorías del conocimiento matemático (Cordero, 1998); son nociones medulares de la reconstrucción de significados del Cálculo en la actividad humana. Tienen un carácter funcional del conocimiento matemático y su construcción está con relación al uso de herramientas y a la modelación.

[8] Para Cordero (2001) representación es concebida no como un instrumento para la transmisión de información, sino como un medio dinámico para la acción social que compone un sistema de recursos para construir significados.

En resumen, la Socioepistemología del cálculo

> … significa que se reconocen tres posibles construcciones y que cada una de éstas generan argumentos que permiten construir nuevo conocimiento, sin embargo, reconocer que estos argumentos son distintos y seleccionar uno dependiendo de la situación es la parte esencial de la construcción (Cordero, 2001, p. 117).

II.6. Elementos Teóricos del PyLV

El Pensamiento y Lenguaje Variacional es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos que involucran el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación (Caballero y Cantoral, 2013).

Posee una orientación múltiple (Cantoral, 1997; citado en Cantoral, y Reséndiz, 2003).

- ◊ Por un lado se ocupa del estudio de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico.
- ◊ En segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio y
- ◊ En tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas tanto en la escuela como en el laboratorio. Orientación por la cual opta esta investigación.

Los autores Caballero y Cantoral (2013) caracterizan los elementos del PyLV y sostienen que para generar el desarrollo del pensamiento variacional es necesario el uso sistemático e interacción de los elementos que lo conforman (ver Figura 25).

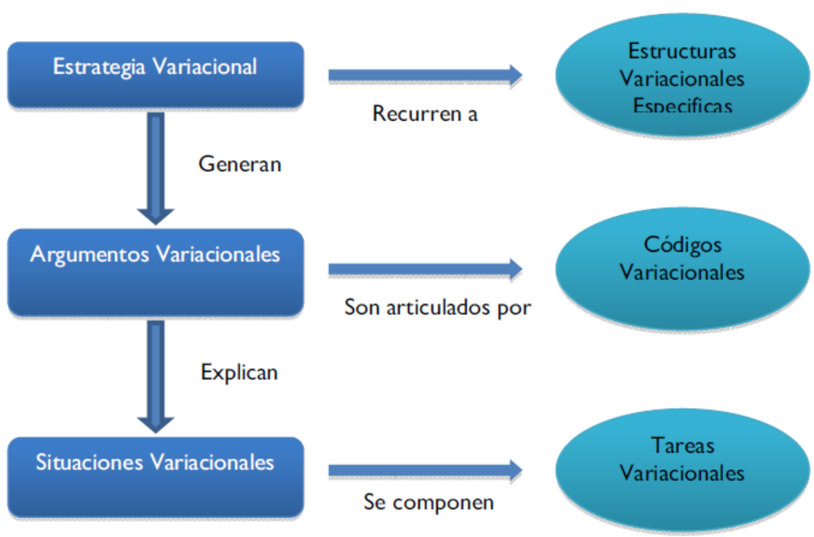


Figura 25 Modelo de interacción de los elementos del PyLV (Caballero y Cantoral, 2013)

En ese mismo trabajo los autores describen cada elemento del PyLV.

Para nuestro caso, las *Situaciones Variacionales (SV)* corresponden a los tres experimentos planteados, los cuales demandan la puesta en juego de estrategias variacionales y requieren que el estudiante analice diversos estados del cambio. Los *Argumentos Variacionales (AV)* son las explicaciones que proporcionan los estudiantes sobre los experimentos, expresando un entendimiento del proceso de variación involucrado en los mismos; son utilizados por ellos cuando hacen uso de "maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando" (Cantoral, 2000, pp. 54). Los *Códigos Variacionales (CV)* se ven reflejados en la expresión oral o escrita del cambio y la variación (pueden consistir en frases, dibujos, tablas o ademanes), y que son articulados para generar los *AV*. Una *Estructura Variacional Específica (EstV)* estará formada por herramientas, procesos y procedimientos especializados del ámbito matemático o científico (González, 1999, citado en Caballero y Cantoral, 2013) que funcionan como punto de apoyo para abordar y explicar el estudio del cambio y la variación en las *SV*. Una *Estrategia Variacional (EV)* es una forma particular de razonar y actuar ante una *SV* (en nuestro caso en los experimentos), permite la generación de los *AV* que dan explicación a la situación. Las estrategias variacionales reportadas por Caballero y Cantoral (2013, p. 6) son:

> *Comparación*: Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y su variación. Esta estrategia no se usa siempre de la misma manera, ya que su uso depende del contexto en que se encuentra, y también de las nociones y conceptos que la rodean, en ese sentido se puede hablar de un desarrollo de esta estrategia.
>
> *Seriación:* Se relaciona con la comparación, ya que está asociada con la acción de analizar entre estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos, pero se diferencia en que se analizan varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos, como puede ser hallar una relación funcional dada una tabla, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o relaciones entre variables.
>
> *Predicción:* Asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. A diferencia de la Seriación, la Predicción no busca encontrar en sí una relación, sino que se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo, siendo este estado local, en el sentido de que corresponde a un momento o valor determinado. No obstante, hallar esa relación puede ser una forma de encontrar ese nuevo estado, por lo que la Seriación puede ser parte de la Predicción.
>
> *Estimación:* Conociendo el comportamiento de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados a corto plazo de manera global, a diferencia de la Predicción, donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo, la estimación se usa en el análisis del crecimiento de poblaciones para saber si crecerá o disminuirá, en tanto que

la Predicción puede servir para decir hasta qué punto crecerá, o la población dentro de un tiempo específico.

Inmersas en las SV se encuentran las *Tareas Variacionales (TV)*, éstas son actividades, acciones y ejecuciones, que comparten similitudes en cuanto a sus objetivos y los contextos en que se desarrollan. Se caracterizan por el empleo de una o más EV dentro de un mismo contexto de análisis, que puede ser numérico, gráfico o analítico, lo que permite organizar el estudio de la variación en las SV en acciones y objetivos más específicos dentro de estos contextos. Caballero y Cantoral (2013, p. 7) identifican las siguientes:

> *Tabulación como variación numérica (TVN):* Consiste en la acción de proporcionar valores distintos a una variable para observar y analizar sus efectos en cuanto a comportamiento, forma, posición o valor de algún sistema. El análisis surge a partir de observar los efectos derivados de la acciones de tabular, por tanto, si los datos ya están plasmados o la acción corresponde a sólo llenar una tabla, entonces no se considera que se trata de una TV.
>
> *Análisis de datos en tablas numéricas (ADT):* Dada cierta información en forma de datos agrupados en tablas numéricas, se realiza un análisis de esos datos fijándose en patrones de comportamiento, y relaciones entre datos. A diferencia de la tarea de TVN, ésta se desarrolla cuando ya se cuenta con los datos o el hallarlos no implica analizar los efectos.
>
> *Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia (CGV):* Consiste en la construcción de gráficas apoyándose en el análisis de las variaciones, ya sea por medio de datos numéricos o de alguna gráfica. El objetivo no es hallar algún patrón o relación, sino bosquejar una gráfica que modele lo más cercanamente posible la situación que se presenta.
>
> *Análisis gráfico con la variación como punto de referencia (AGV):* Se buscan patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos, pero a diferencia de ADT el análisis está sobre gráficas, así como elementos que surgen a partir de ella, como tangentes, alturas, asíntotas, entre otros. Las acciones a realizar giran en torno al análisis de variaciones, incluso en gráficas generadas con tecnología.

En resumen, el PyLV se caracteriza por centrarse en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios.

Las situaciones diseñadas en esta investigación tienen su origen en un marco de referencia que permite enriquecer e integrar significados a la derivada. En este marco los estudiantes construyen conocimiento sobre la derivada, experimentando situaciones de variación, usando la graficación y la modelación como prácticas que generan conocimiento, e interactuando con sus compañeros y con su profesor. Favoreciendo con ello a la democratización del aprendizaje y, de acuerdo con la TSME, el uso y construcción de conocimiento matemático en un contexto específico.

Ese marco de referencia está formado por la articulación de los elementos característicos del binomio M-G (múltiples realizaciones, realización de ajustes, identificación de patrones y desarrollo del razonamiento) con las construcciones en las prácticas de la SC (significados, procedimientos, proceso-objeto y argumentación) y la identificación de los elementos del PyLV en las situaciones de variación planteadas, el cual permite generar otros significados a través del *uso de la gráfica* en las situaciones desarrollando su *funcionamiento* y su *forma*. Esto lo concretamos en la Tabla 4 del Capítulo IV.

Finalmente, en los siguientes párrafos describiremos el escenario que consideramos propicio para el desarrollo de las situaciones experimentales, al cual hemos denominado laboratorio.

II.7. El laboratorio como Escenario de Construcción de Conocimiento

El concepto de laboratorio ha sido definido en investigaciones de diferente índole, por ejemplo, para Amaya (2009) el laboratorio es un espacio que posibilita la contextualización del aprendizaje y por consiguiente la construcción consciente del conocimiento. Mientras que para Gallego Fernández *et al.* (2009) este debe ser el lugar donde se puede escenificar la práctica del método científico como herramienta para resolver problemas prácticos. Por su parte Rosado y Herreros (2005) consideran que un Laboratorio Tradicional (LT) es el lugar, espacio, o escenario propicio para llevar a cabo experimentación. Además de remarcar la importancia que tienen estos laboratorios, los autores señalan que:

> El LT es lento en la transmisión de información, sin embargo, facilita el planteamiento de problemas que permitan al estudiante aplicar sus conocimientos sobre la naturaleza, entrenándose en la aplicación del método científico. La principal ventaja del LT es su alta interactividad, al tomar contacto el alumno con el experimento real, la motivación que supone observar el experimento, el desarrollo de habilidades cognitivas que se ponen en práctica en el mismo (Rosado y Herreros, 2005 p. 2).

Al respecto Arce (2003) en su estudio sobre el laboratorio de matemáticas señala que…

> … la relación que se desarrolla en el Laboratorio de Matemáticas de manera dinámica entre las actividades matemáticas y los materiales, contribuye a la formación del pensamiento matemático, de una manera más rápida y sólida que a través del sólo uso del papel y lápiz (p. 2).

El autor también establece que con la relación dialéctica entre actividades matemáticas y materiales…

> … se logra un acercamiento, fundamentación, aprehensión o construcción de pensamiento matemático desde una visión diferente a la tradicional, en cuanto se tiene la opción de manipular materiales, hacer experimentos, enfrentarse a actividades recreativas, utilizar herramientas y resolver problemas en un ambiente flexible, agradable y ameno donde se toman por parte de los participantes distintos caminos para resolver las actividades planteadas, al asumir el proceso de aprendizaje como propio (Arce, 2003, p. 3).

Coincidimos con Zaldívar (2014) cuando afirma que en la Matemática Educativa se requiere establecer marcos de referencia alternos que permitan resignificar el conocimiento matemático, considerando la realidad de las personas. En nuestro caso el entorno físico no es limitante, ya que las actividades pueden ser llevadas a cabo en diferentes lugares, desde el salón de clase, un auditorio, hasta el mismo patio de la institución o algún lugar que cumpla con los requerimientos mínimos para realizar los experimentos. Es decir, se trata de un escenario escolar (Crespo, 2009 citada en Zaldívar, 2014), en donde el conocimiento matemático se construye con prácticas (la práctica de graficación) y los estudiantes toman diferentes roles en la situación específica.

Además, como afirma Zaldívar (2014)

> El uso del CM se entiende en términos de sus resignificaciones ante situaciones específicas. Sin embargo, dicha situación queda determinada de acuerdo a la naturaleza del propio escenario. En otras palabras, la situación depende del escenario, pero éste último también "nutre" a la primera (p. 48).

En este proyecto se intenta acercar al estudiante al estudio de la variación, mediante la realización de experimentos en los que el cambio y la relación entre las variables involucradas resulta ser fundamental. Coadyuvando a la construcción de conocimiento en el estudiante sobre lo que varía, de manera continua y progresiva. El escenario de laboratorio permite que los estudiantes se relacionen de una nueva manera con el conocimiento, concibiendo a la gráfica mediante su uso y su relación con la derivada. Lo característico de este tipo de situaciones es que permiten que el estudiante asuma el papel más activo, pues debe abordar la formulación y resolución de problemas concretos; lo incita a realizar los procesos de experimentación y además lo motiva a trabajar en forma colaborativa con sus compañeros de equipo, lo cual le permite socializar y compartir sus conocimientos.

En consecuencia la forma en la cual se pone en juego el conocimiento, habilidades y saberes de los estudiantes en este escenario es distinta, pues se rompe con los roles tradicionales tanto del alumno como del profesor. Se tiene pues un conocimiento orgánico, integrado, algunas veces difuso entre las prácticas, pero que se resignifica y dialoga al confrontarse con otros conocimientos adquiridos en otros escenarios (Zaldívar 2014).

CAPÍTULO III. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En esta sección presentamos el método general de trabajo, así como los momentos contemplados en desarrollo del mismo. Se describen los instrumentos de recolección de datos, el diseño de las situaciones experimentales, las actividades a simular y los materiales empleados en cada una. Finalmente, establecemos la forma de trabajo con los estudiantes.

III.1. Método

Como se ha mencionado, en los cursos de cálculo diferencial cuando se enseña la derivada predomina en mayor grado el tratamiento algorítmico. Coincidimos con Testa (2004) cuando afirma que estos cursos tienen como objetivo el estudio analítico y la representación gráfica de una función dada (f). La autora explica que las funciones derivadas de ésta (función derivada primera y segunda) sólo son estudiadas como herramientas para poder graficar la función dada, pero su vinculación es sólo mediante algoritmos matemáticos en una de las vías ($f \rightarrow f' \rightarrow f''$), y mediante representaciones geométricas en otra vía ($f'' \rightarrow f' \rightarrow f$), lo cual se esquematiza en la Figura 22, del capítulo anterior.

El esquema metodológico general de nuestro trabajo fue el siguiente (ver Figura 26)

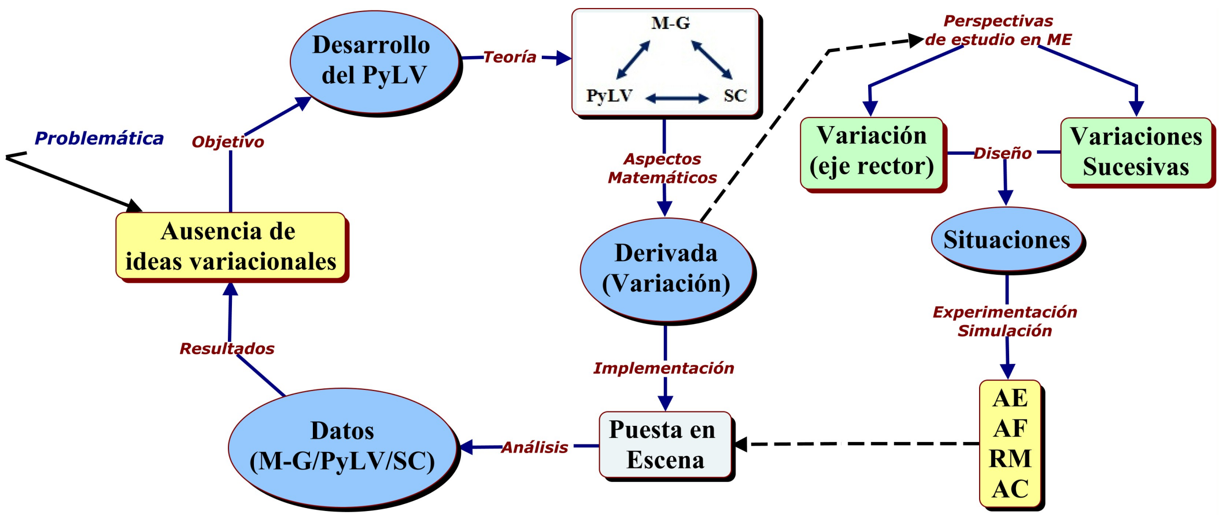


Figura 26 Esquema metodológico de trabajo

El desarrollo de este esquema metodológico surge de la problemática detectada en el estudio de la derivada en bachillerato (ausencia de ideas variacionales) y reportada en el Capítulo I. Por lo que nuestro objetivo es precisamente desarrollar ideas variacionales, y por ende el desarrollo del pensamiento variacional, para lo cual hemos tomado una postura epistemológica de prácticas, en donde la articulación de los elementos del PyLV y de la M-G favorece las construcciones de la SC. Para concretar esto último se rediseñaron tres actividades experimentales cuyo eje rector es la variación y donde el uso de la gráfica es determinante en la construcción de las argumentaciones de los estudiantes.

Como primer instrumento de recopilación de datos, se elaboró un instrumento de diagnóstico (Ver Anexo 2) tomando como base algunas actividades de Dolores, Alarcón y Albarrán (2002), Solache y Diaz (1999), Dolores (2000a), Dolores (1998) y Cardona (2009). El enfoque manejado en el instrumento es de propiciar que los estudiantes pongan en juego sus ideas acerca de la derivada o ideas relacionadas con la cuantificación de la variación por medio de diferencias, con la cuantificación relativa de la variación por medio de la velocidad media, con la idea de límite del cociente incremental, con las pendientes de tangentes y con la velocidad instantánea. Los resultados sirvieron, entre otras cosas, para saber en qué condiciones se encontraban los alumnos, qué conocimientos se requería reforzar previo al trabajo experimental y las posibles modificaciones en los diseños de las situaciones.

Los experimentos propuestos en el proyecto fueron seleccionados tratando de atender el objetivo fundamental de la investigación: desarrollar el Pensamiento y Lenguaje Variacional en torno a la derivada en estudiantes de bachillerato a través de situaciones "experimentales de variación", basadas en la modelación-graficación (Desarrollo del PyLV, ver Figura 25), y fueron tomadas del *Cuaderno de Experimentos para la Modelación Gráfica en las Matemáticas del Bachillerato* (Suárez, 2014), para posteriormente ser rediseñadas hacia los propósitos de nuestra investigación. El propósito en las situaciones es que los estudiantes transiten entre diferentes representaciones como lo son: la descripción verbal, el modelo físico (maximización, temperatura y movimiento) o simulación y la gráfica. Consideramos firmemente que el uso de tecnología (simulaciones en software) sirve de guía al estudiante para avanzar en el uso de herramientas y la generación de significados para lograr una visión cualitativa de la situación planteada, ya sea de maximización de área, de temperatura o sobre el movimiento.

Las situaciones de variación (experimentación) se presentaron impresas, describiendo en cada una su objetivo, forma de realización y materiales. Como ya habíamos mencionado se tomaron como base algunos experimentos propuestos en el cuaderno para la modelación gráfica en las matemáticas del bachillerato de Suárez (2014), pero se hicieron modificaciones y adecuaciones pues el empleo de sensores, calculadora gráfica y Geogebra así lo requerían. Los experimentos se refieren a:

- Situación: Área Extrema.
- Situación: Agua Fría (Café frío).
- Situación: Representando el Movimiento.

En cada situación primeramente los estudiantes tuvieron la instrucción de construir una gráfica que representara la situación antes de la simulación con tecnología. Una vez que lograron hacer la gráfica (del comportamiento del área, temperatura o movimiento) sin el uso de tecnología, pasaron a realizar la simulación del fenómeno con el sensor y la calculadora graficadora, excepto en la primera pues no se diseñó de esa manera. Los sensores toman datos de tiempo y distancia o temperatura que se transfieren directamente a la calculadora, los cuales se pueden guardar en documentos, de esta manera se obtienen la gráfica de la temperatura/tiempo y distancia/tiempo.

También se rediseñaron en el software Geogebra las tres actividades del diagnóstico propuestas en Dolores (2000a), dotándolas de dinamismos y con las cuales pretendimos, entre otras cosas, favorecer la visualización de la derivada en el análisis de la variación. Estas actividades se aplicaron después del último experimento y fueron nombradas como actividad de cierre (AC).

Finalmente, cabe mencionar que durante la secuencia de las tres situaciones variacionales, los estudiantes transitaron por tres momentos: la exploración que comenzó con el registro de sus ideas iniciales y conjeturas (Momento 1), continuaron con la realización de la experimentación y las múltiples realizaciones para identificar patrones (Momento 2) la cual llevaron a cabo los estudiantes tantas veces como fue necesario, y finalmente regresaron a la situación para confrontar sus conjeturas empleando software como medio de simulación (Momento 3). Por lo tanto, se dio de forma natural una interacción entre las gráficas que produjeron los estudiantes y los significados asociados a estas gráficas que resultan de la simulación con uso de tecnología de cada situación.

III.2. Características de los Alumnos y del Profesor

Para desarrollar las actividades de la investigación, se contó con la participación activa y entusiasta de un grupo de alumnos de sexto semestre, correspondiente al Bachillerato de Físico-Matemático de la Unidad Académica Preparatoria Programa VI de la Universidad Autónoma de Zacatecas, ubicada en el municipio de Trancoso del estado de Zacatecas.

El total de alumnos que integraban el grupo fue de 18, cuyas edades oscilaron entre los 17 y 19 años. Cabe mencionar que ellos han llevado el curso de Cálculo Diferencial (quinto semestre), y de acuerdo al temario del mismo, ya deberían tener conocimientos sobre tópicos como: funciones, graficación de funciones (simetrías, intersecciones, asíntotas, dominio y rango), límites, derivadas por incrementos (regla de los cuatro pasos), fórmulas de derivación y criterios de la primera derivada y segunda derivadas. Siguiendo la planeación del programa de sus semestres anteriores, los estudiantes han tomado cursos referentes a: Aritmética, Álgebra, Funciones (lineal y cuadrática), Geometría Euclidiana, Trigonometría y Geometría Analítica.

Quién aplicó y analizó las situaciones fue el mismo profesor del grupo en la materia de cálculo, por lo que tenía conocimiento de las características de sus estudiantes y de cómo se estructuraron las situaciones desarrolladas. El profesor e investigador tiene formación de licenciatura en matemáticas y se encontraba estudiando al tiempo de aplicación la maestría en ME, ha impartido el curso de cálculo diferencial cinco ocasiones en el nivel medio superior.

III.3. El Instrumento de Diagnóstico

El instrumento está formado por una serie de ocho preguntas en donde las primeras cuatro sirven para explorar el conocimiento que los estudiantes poseen sobre las variables y aspectos relacionados con las mismas. Las cuatro preguntas restantes (5-8) comprenden problemas que, de acuerdo con Caballero (2012) y Caballero y Cantoral (2013), incorporan en su diseño elementos del PyLV, éstas fueron tomadas y rediseñadas de los trabajos de Dolores, Alarcón y Albarrán (2002), Solache, Díaz y Dolores (1999), Dolores (2000a), Dolores (1998) y Cardona (2009). En particular la gráfica de una función (pregunta 7) es empleada para propiciar el análisis de los cambios que se producen en la variable independiente y dependiente (análisis gráfico), preguntando por el cambio experimentado al pasar de un punto a otro, y sobre el comportamiento en algunos intervalos específicos. La intención es poder detectar el manejo de algunas estrategias variacionales.

La estructura del instrumento de diagnóstico es la siguiente: está formado por seis preguntas de opción múltiple (la pregunta cinco con cuatro incisos y la pregunta seis con dos) y dos preguntas abiertas en las que el estudiante debe hacer cálculos o recurrir a sus conocimientos de cálculo diferencial. Este instrumento es considerado como el inicio del Momento 1 propuesto para la puesta en escena del proyecto (ver Figura 27).

Particularmente, las primeras tres preguntas del diagnóstico corresponden al primer examen aplicado por Solache (Solache, Díaz y Dolores, 1999) en su estudio sobre el desarrollo del pensamiento variacional con estudiantes de bachillerato. La pregunta cuatro del cuestionario de diagnóstico corresponde con la segunda pregunta del tercer examen[9] parcial aplicado por los autores anteriormente mencionados; mientras que la pregunta 5 es un rediseño nuestro de la pregunta tres del mismo examen. La pregunta seis es un rediseño de la pregunta tres del cuarto examen aplicado por Solache para ampliar posibilidades de respuesta. La penúltima pregunta del diagnóstico corresponde a la segunda situación planteada por Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) en su estudio sobre las concepciones relativas a la velocidad media, velocidad instantánea y la trayectoria de cuerpos en movimiento que se desprenden de la lectura de gráficas cartesianas de coordenadas tiempo-distancia; este tipo de actividad propicia, de acuerdo con Engler *et al.* (2008) y Cantoral (2013a), desde la gráfica, el análisis de los cambios que se producen tanto en la variable independiente como en la variable dependiente. La pregunta ocho es un rediseño del problema 1.3 del proyecto de investigación de Cardona (2009), en el que comprueba experimentalmente con estudiantes de bachillerato, un diseño didáctico para estabilizar la noción de derivada[10] (similar a la actividad 7 que plantean Engler *et al.* (2008) en su estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada). En esta pregunta en particular tratamos de averiguar si el alumno puede identificar elementos característicos de las dos primeras derivadas, contando únicamente con la representación gráfica de una función, particularmente si logra relacionar los signos de dichas derivadas en los puntos A, B y C, y en el mejor de los casos si puede trazar la gráfica de alguna de ellas.

Cabe señalar que entre los objetivos principales de la aplicación de este cuestionario se encuentra la identificación de posibles estrategias variacionales empleadas por los alumnos, además de tener un panorama sobre sus conocimientos previos. Lo cual sirvió para orientar el diseño o rediseño de las situaciones variacionales que se aplicarían.

[9] Nos referimos con el examen a los que aplicaron en la investigación de Solache. Si el lector requiere revisar se encuentra en la referencia Solache, Díaz y Dolores (1999).

[10] Cardona (2009, p. 16) se refiere a la estabilización de la derivada cuando el estudiante tiene la capacidad para representar y manipular a una función particular y sus derivadas en diferentes contextos de representación (algebraico, numérico, verbal, gráfico, gestual, etc.) como medio o estrategia para la solución de problemas matemáticos.

III.4. Los materiales

Para el desarrollo del experimento situación: Área Extrema, se diseñaron y construyeron cuatro Geoplanos. Para ello se recortaron tablas de $24{\times}24\ cm$, en seguida se pintaron de color blanco, y se dibujó con lápiz una cuadrícula en el área central con cuadrados de medida un centímetro de lado, finamente se insertó un clavo sin cabeza en los vértices de cada cuadro (total 441 clavos). Por equipo se les proporcionó además 1 bicolor y 18 de ligas de hule del número 18 de diferentes colores (ver Imagen 1).

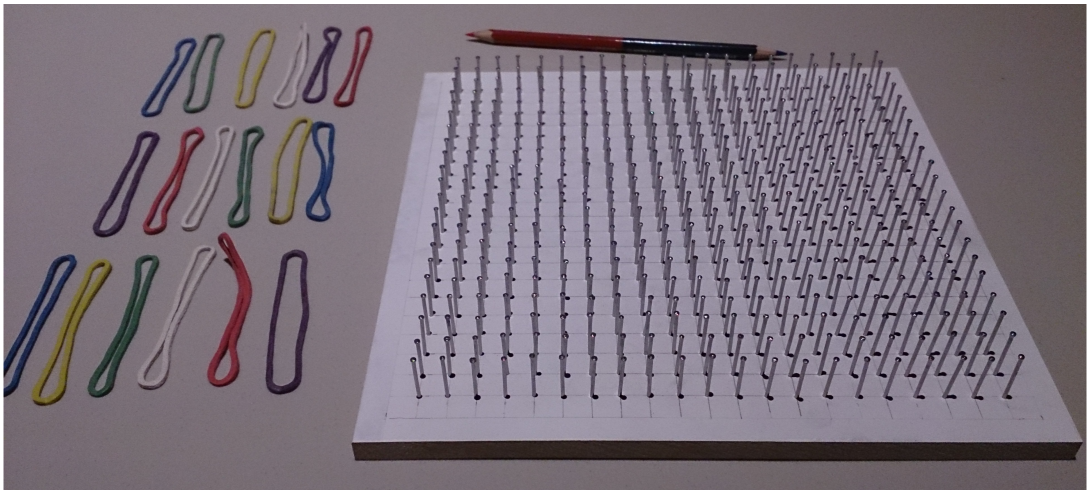


Imagen 1 Geoplano y materiales de trabajo proporcionados por equipo

El material fue complementado con el archivo AreaExtrema.ggb de Geogebra, el cual también se proporcionó a cada equipo.

Para el experimento de la situación: Agua Fría, se requirió por equipo dos vasos de plástico, un recipiente en donde cupiera un vaso de plástico, agua, hielos, una cafetera eléctrica, recipiente para agua fría, dos sensores de temperatura, dos calculadoras gráficas y un bicolor. En los vasos se estableció una marca de color para que se midiera la misma cantidad de agua, una línea roja para el agua caliente y una azul para el agua fría, las imágenes muestran los materiales (ver Imagen 2 e Imagen 3).

Imagen 2 Recipientes para experimento Agua Fría

Imagen 3Contenedores de agua fría y caliente

El experimento cierra con la actividad ubicada en el archivo AguaFria.ggb de Geogebra.

Para llevar a cabo el experimento situación: Representando el Movimiento se requirieron por equipo un sensor de movimiento, una calculadora graficadora y un bicolor.

Los instrumentos de recopilación de datos (sensores y calculadora) se describen en la Tabla 3.

		
Detector Sónico de Movimiento[11] Permite capturar, ver y analizar datos de movimiento sin tomar medidas ni hacer dibujos a mano. **Especificaciones Técnicas** Registrar hasta 200 datos por segundo. Maneja un rango de 15 cm a 6 m.	**Sensor de temperatura**[12] Se puede utilizar como un termómetro. **Especificaciones Técnicas** Rango de temperatura: –20 a 115°C Temperatura máxima que puede tolerar sin daño: 150°C Resolución: 0.07°C Precisión. ±0.5°C Tiempo de respuesta: 4 s (a 90% de la plena lectura en agua)	**Calculadora TI-Nspire CX CAS**[13] **Especificaciones Técnicas** Tamaño de pantalla: 320 x 240 pixeles (3.2" diagonal). Resolución de pantalla: 125 DPI; color 16-bit. Funciona con la Batería Recargable TI-Nspire™ (incluida). Memoria: 100 MB de memoria de almacenaje / 64MB memoria operativa. Puerto USB para conexión con la computadora, comunicación de unidad a unidad con otras calculadoras de la familia TI-Nspire.

Tabla 3 Instrumentos de recopilación de datos para los experimentos Agua Fría y Representando el Movimiento

Finalmente, para llevar a cabo las actividades de cierre se requirió de una computadora por parejas y los archivos correspondientes elaborados en Geogebra.

[11] TI (2004). *Conceptos básicos del CBR 2™ Detector Sónico de Movimiento*. Dallas, TX: Texas Instruments.

[12] Vernier Software & Technology, Vernier EasyTemp, http://www.vernier.com/easy/easytemp.html, Oct. 10, 2014.

[13] TI-Nspire CX CAS manual de especificaciones disponible en página oficial: http://education.ti.com/en/us/guidebook/search/ti-nspire-cas.

III.5. La Implementación. Formas de Trabajo en el Aula

Después de la aplicación del instrumento diagnóstico se tuvo un panorama de las ideas variacionales que los alumnos poseían, qué conocimientos previos se necesitaban reforzar para poder llevar a cabo los experimentos y las actividades de contraste. Cabe destacar que en los tres experimentos propuestos y en la actividad de cierre, la idea central es la variación y por lo tanto, la identificación de estrategias variacionales específicas (Comparación, Seriación, Predicción y Estimación). Las respuestas y producciones de los alumnos fueron los elementos clave de análisis para obtener esta idea central. La definición de lo que entendemos como las estrategias variacionales de los elementos característicos del PyLV (Caballero y Cantoral, 2013) descritas en el marco teórico, fueron los lentes para analizar los datos desde esta perspectiva. En síntesis la forma de trabajo en el aula fue la siguiente:

- El instrumento de diagnóstico se aplicó a cada estudiante de manera individual, los resultados se concentraron en una tabla (ver Anexo 1), destacando las deficiencias y conocimientos previos que se requerían reforzar tanto para el desarrollo adecuado de los experimentos como para el rediseño de los mismos.
- El escenario para la realización de las actividades experimentales fue el salón de clases del grupo, pues las dimensiones del mismo permitieron que se llevaran a cabo de la manera programada.
- Como ya hemos mencionado, el instrumento de diagnóstico se trabajó de forma individual, mientras que la experimentación se desarrolló en equipos colaborativos de 4 integrantes, y la actividad de cierre fue por parejas. En las actividades por equipo se describen las funciones de los integrantes, dejando a libertad de los mismos la asignación de los roles.
- La recolección de los datos se realizó por medio de las producciones escritas por los estudiantes, los archivos de actividades en Geogebra, material de video y algunos materiales de audio, de estos últimos dos se obtuvieron extractos representativos que permitieron obtener información del trabajo de los estudiantes.
- Se propuso que el desarrollo de los experimentos fuera en equipo de al menos cuatro integrantes[14], porque cada uno desempeñaría un rol en el mismo y haría contribuciones en las discusiones y consensos que se registraron en los instrumentos de recolección de datos. Efectivamente esta forma de trabajo generó mucha interacción entre los estudiantes y se requirió la guía del docente para el adecuado desarrollo de los mismos. Cabe hacer notar que cualquier espacio con las condiciones necesarias puede ser adecuado para realizar el desarrollo de los experimentos, no necesariamente el salón de clases.

[14] Sólo el equipo dos (E2) contó con más de cuatro integrantes en algunas actividades, esto por la intermitente asistencia de dos alumnos al curso regular de cálculo.

- En los tres experimentos siempre se ponen en uso los conocimientos previos de los estudiantes (Momento 1), además de trabajar en diferentes niveles de complejidad. Después de formular conjeturas y emplear sus conocimientos previos, los estudiantes generaron datos numéricos y gráficos (Momento 2) para posteriormente analizar las gráficas obtenidas de la experimentación y la simulación en el software (Momento 3). Finalmente con ello, al regresar en la situación, poder refutar o reforzar sus conjeturas y contrastar sus resultados con sus compañeros.

Para el registro de evidencias se emplearon equipo de grabación de audio y video

- Cámara de video (algunas sesiones y experimentos)
- Cámara fotográfica (o celular)

Se destinaron algunas sesiones para la instrumentalización de los alumnos.

  - Manejo de sensores y calculadoras
  - Manejo básico de Geogebra

Durante el desarrollo de los experimentos se propuso a los estudiantes efectuar múltiples realizaciones en la que tuvieron que generar diferentes gráficas de los mismos, en parte el propósito fue que identificaran patrones, hicieran ajustes y elaboraran nuevas conjeturas y eventualmente generaran argumentos. Es decir, se pusieron en juego los elementos constitutivos de la categoría M-G (Suárez, 2014).

A lo largo de las actividades y experimentos se analizaron los significados, procedimientos, procesos y argumentos que generan los estudiantes sobre la variación.

III.6. Momentos en los Experimentos

Como se ha mencionado en el apartado anterior, después de la aplicación del instrumento de diagnóstico y los ajustes necesarios, se llevó a cabo la puesta en escena, la cual fue dividida en tres momentos (ver Figura 27), con una intencionalidad definida, los cuales se articulan dándole cierto orden y consistencia a la práctica de modelación como tal.

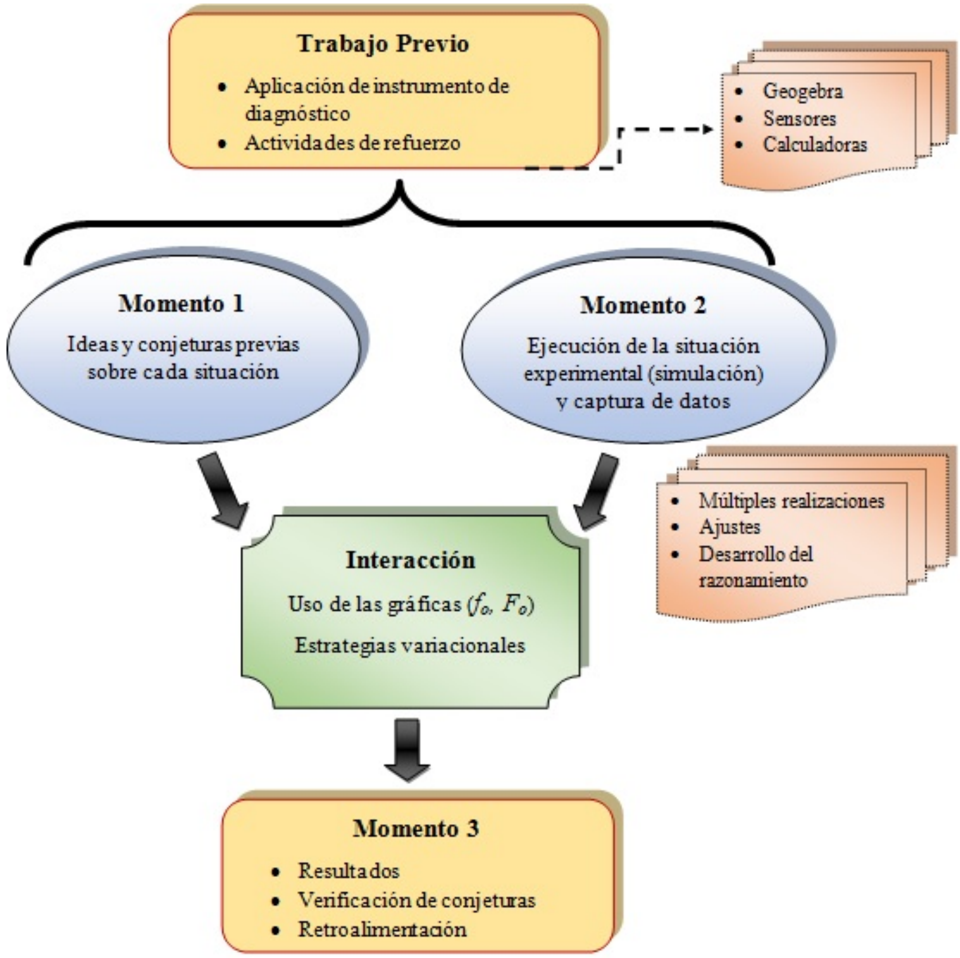


Figura 27 Proceso de trabajo

Durante las primeras dos semanas del mes de abril se implementaron actividades de reforzamiento y familiarización con el uso del Geogebra, así como el diseño del instrumento diagnóstico. Este instrumento se aplicó en la tercera semana del mismo mes y se consideraron algunos resultados para el rediseño de los experimentos. Los experimentos y la actividad de cierre se llevaron a cabo en las siguientes cuatro semanas.

III.6.1. Situación: Área Extrema

- Momento 1: Conjeturas y conocimientos previos

  Se inicia la presentación de la actividad experimental proporcionando los materiales descritos a cada equipo. Se les permite hacer una exploración de los mismos durante un tiempo de 5 a 10 minutos. Enseguida se describe en qué consiste el experimento y cómo se va a llevar a cabo.

  Las primeras dos preguntas en el procedimiento tienen la intención de que los estudiantes pongan en juego algunos de sus conocimientos previos y que conjeturen respecto a rectángulos con perímetro fijo y área variable, por consiguiente variación en las dimensiones del rectángulo. Además este primer experimento trata de promover la interacción y comunicación entre los integrantes del equipo, así como la generación de primeras argumentaciones y consensos.

- Momento 2: Experimentación y recopilación de datos
  Después de la explicación del profesor y las preguntas iniciales, la participación de los estudiantes es más activa pues el registro de los datos en las tablas indicadas en los pasos 3 y 6 les exige mayor acción en la experimentación, y por tanto en la práctica de modelación. También los induce a establecer la organización de una forma de trabajo en equipo (establecimiento de roles) que les permita avanzar de manera adecuada, llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes de ser necesario. Precisamente en ese momento y después de la toma de datos, se requiere observar en los equipos el uso que le dan a las gráficas y las posibles estrategias variacionales empleadas para dar respuesta a las preguntas 5, 7 y 8. No se pretende en ningún momento que los estudiantes construyan un modelo algebraico (fórmula) que se ajuste los datos y con el cual puedan predecir estados futuros, más bien lo importante en la realización del experimento son las interacciones que van emergiendo al interior de cada equipo conforme lo desarrollan; así como los usos, argumentos, explicaciones, conjeturas y los consensos a que llegan.

- Momento 3: Resultados y validación de conjeturas
  Se comparan los datos reales tomados de la actividad experimental con lo generado en la actividad empleando tecnología (Geogebra), que corresponde al paso 9 (incisos e, f y g) y en la cual también pueden ejecutar múltiples realizaciones. Contrastar resultados de ambas permite, como lo menciona Córdoba (2011), identificar debilidades y necesidades de aprendizaje, ideas y conceptos previos correctos o incorrectos, fortalezas y aciertos en el desarrollo de la práctica, para nuestro caso particular en el experimento.

III.6.2. Situación: Agua Fría

- Momento 1: Conjeturas y conocimientos previos
  Se inicia la presentación de la actividad experimental proporcionando los vasos, recipiente y demás materiales a cada equipo. Se les permite hacer una exploración de los mismos durante unos minutos. Enseguida se describe en qué consiste el experimento y cómo se va a llevar a cabo la captura de datos, para el caso se les explica cómo es que funciona el sensor de temperatura y la calculadora gráfica cuando se conecta algún dispositivo de recolección.
  Las primeras tres preguntas del procedimiento tienen la intención de que los equipos pongan en juego algunos de sus conocimientos previos y que conjeturen respecto al comportamiento de la temperatura de agua fría y agua caliente al entrar en contacto, pero sin mezclarse, proporcionando un esbozo de las gráficas de los dos tipos de agua.

- Momento 2: Experimentación y recopilación de datos
  Después de la introducción por parte del profesor y las conjeturas que realizaron, los estudiantes proceden a ejecutar el experimento y registrar los datos en las tablas A y B indicadas en los pasos 6 y 8, considerando que entre una captura y otra deben contestar una serie de preguntas que les ayudan a contrastar las conjeturas iniciales. Este experimento en particular requiere que los integrantes del equipo logren coordinarse adecuadamente para realizar una captura lo más precisa posible. Se deben poner de acuerdo para el establecimiento de roles, tanto de quien controla el tiempo, como de quienes ejecutan la captura y sostienen los sensores de temperatura. Después de la toma de datos, se requiere observar en los equipos el uso que le dan a las gráficas y las posibles estrategias variacionales empleadas al dar respuesta a los incisos de las preguntas 7 y 8. Nuevamente lo importante en la realización del experimento son las interacciones que van emergiendo al interior de cada equipo conforme lo desarrollan; así como los argumentos, las explicaciones, las conjeturas y los consensos a que llegan.

- Momento 3: Resultados y validación de conjeturas
  Se comparan los datos reales tomados de dos experimentos registrados y se complementa con lo generado en la actividad empleando tecnología (Geogebra), que corresponde al paso 9 y todos sus incisos; en ella también pueden ejecutar múltiples realizaciones.

III.6.3. Situación: Representando el Movimiento

- Momento 1: Conjeturas y conocimientos previos
  Se inicia el trabajo de los equipos con la realización de actividades previas (ver Anexo 6), en las cuales deben intentar reproducir gráficas empleando el sensor de movimiento y la calculadora graficadora. Además tratan de describir el comportamiento de la velocidad en cada caso. Esta actividad sirve de exploración y para la formulación de las primeras conjeturas sobre la relación entre el movimiento y la velocidad para producirlo. Después de media hora (en promedio) de trabajar las actividades previas se les presentó el experimento Representando el Movimiento.
  La actividad tenía la intención de que los equipos pusieran en juego algunos de sus conocimientos previos y retomaran lo experimentado en las actividades realizadas al inicio de la sesión. De esta manera su respuesta a la actividad 1 fue la formulación de una nueva conjetura, pero ahora respecto a la gráfica de posición de Valentina conforme transcurre el tiempo.

- Momento 2: Experimentación y recopilación de datos
  Después de la introducción por parte del profesor y las conjeturas realizadas, los estudiantes proceden a ejecutar el procedimiento (pasos 1 al 7). En esta fase de experimentación los integrantes del equipo tuvieron que coordinarse lo mejor posible

para realizar el movimiento en el tiempo programado, y con ello lograr una captura lo más precisa posible. Al igual que en los experimentos anteriores deben establecer los roles, tanto de quien se mueve, quien controla el tiempo, quien ejecuta la captura y quien sostiene el sensor de movimiento. Después de la toma de datos, se requiere observar en los equipos el uso que le dan a las gráficas y las posibles estrategias variacionales empleadas al dar respuesta a los incisos de la pregunta 6, y la discusión en la pregunta 7. Nuevamente lo que más nos importa son las interacciones de los equipos.

- Momento 3: Resultados y validación de conjeturas
  Se comparan los datos reales tomados de la experimentación registrados y grabados en la calculadora, los cuales se complementaron con lo generado en la actividad empleando tecnología (Geogebra), que corresponde a los pasos 8 y 9.

III.6.4. Actividad de Cierre

La actividad de cierre está formada por los tres ejercicios del diagnóstico que aplicó Dolores (2000a) a estudiantes de bachillerato en su propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo.

- Momento 1: Conjeturas y conocimientos previos
  Se imprimieron las actividades y se les pidió que por parejas plasmaran sus respuestas en las hojas, digamos mismas condiciones que en Dolores (2000a).

- Momento 2: Experimentación y recopilación de datos
  Enseguida procedieron a abrir cada archivo en Geogebra, con el mismo orden en que aparecen en las hojas impresas, y se les pidió que contestaran en el archivo y grabaran su respuesta con cierta nomenclatura[15]. En esta fase es precisamente en donde las actividades cobran animación, pues el estudiante puede deslizar algunos elementos, hacer cambios, identificar patrones y ajustes, es decir, se dota a las actividades de dinamismo.

- Momento 3: Resultados y validación de conjeturas
  Se comparan las respuestas plasmadas en papel con las que dieron al interactuar con el software y refutan a confirman sus conjeturas.

III.7. Recolección de Información y Proceso de Análisis

Para recolectar la información se emplearon diferentes medios y artefactos en un proceso continuo. Como ya se mencionó cada experimento contempló los tres momentos descritos en la sección 3.6, los estudiantes deben responder unas preguntas por escrito y registrar sus respuestas en las hojas de papel que conforman el experimento.

[15] Cabe hacer notar que las actividades de cierre no se pudieron grabar porque al cerrar el archivo se borran las respuestas de los equipos, es decir, sólo se puede ejecutar la simulación pero no grabar sus resultados.

Otro medio utilizado fue la grabación en video por cada equipo y la grabación en audio de las discusiones de un equipo en particular. En las sesiones de trabajo se registraron mediante apuntes, algunos elementos que pudieron no registrarse por las cámaras de video ni por la grabadora de audio, principalmente para los experimentos Área Máxima y Representando el Movimiento. Estas notas son de gran riqueza, pues como afirma Córdoba (2011), al tratarse de interacciones entre humanos hay ciertos aspectos que sólo otro observador humano podría percibir. En la Figura 28, se presenta la disposición espacial en el salón de clases para el registro de la información.

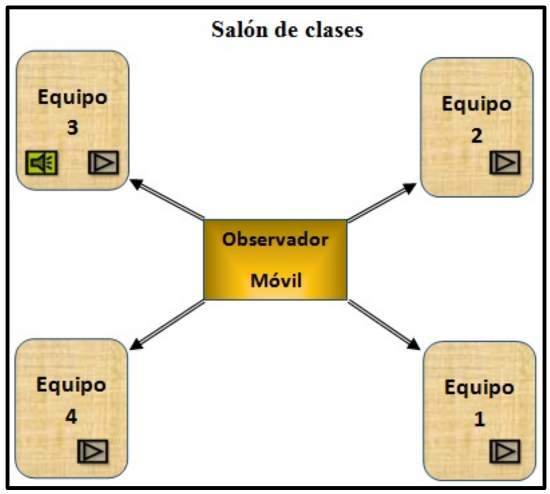


Figura 28 Disposición espacial en el salón

Las situaciones variacionales en su conjunto, experimentales y con software Geogebra, tienen la intención de que el estudiante ponga en juego estrategias variacionales, esto en el análisis de diversos estados de cambio, y en la medida de lo posible, de cómo y cuánto cambian las variables.

Por lo tanto, el análisis de información generada tanto oral como escrita se enfocó en el aspecto cualitativo y, en la interpretación de la misma. Tratando de identificar estrategias variacionales específicas en las respuestas y producciones de los alumnos (Caballero y Cantoral, 2013) que a su vez, nos permitieron dar respuesta al problema de investigación y a lograr el objetivo propuesto. Por lo tanto, como afirma Córdoba (2011):

> …no se pretende dar simplemente una descripción de lo observado y registrado o de una transcripción de diálogos o producciones escritas, sino de una búsqueda de significado y relaciones entre aquello que piensan, dicen, hacen y construyen estudiantes y profesores cuando ejercen una práctica en el contexto de la clase de matemáticas (pp. 98-99).

Por otra parte, las situaciones de aprendizaje presentadas en el proyecto pretenden generar en los estudiantes un interés por estudiar el cambio a través de gráficas de las funciones. Para el caso del Área Extrema entra en juego la cuadrática (parábola), en Agua Fría la función exponencial, y en Representando el Movimiento una función a trozos. Y como afirman Suárez y Cordero (2010), los estudios que se centran en las relaciones entre gráficas y situaciones de cambio provocan que la variación cobre un sentido específico que no depende necesariamente de las propiedades analíticas de la función.

La información recolectada se analizó de tal forma que se pudiera identificar el uso de estrategias variacionales como: comparación, seriación, predicción o estimación. Las cuales abonan al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y a su vez funcionan como categorías para analizar la información.

Por otra parte, los elementos del binomios M-G permiten que el estudiante realice exploraciones, múltiples realizaciones, ajustes, discuta y reflexione en equipo y por consiguiente, incorpore los significados generados por él y sus compañeros para la construcción de una apreciación cualitativa y cuantitativa (argumentos variacionales). En este sentido las actividades de aprendizaje planteadas permiten la construcción de conocimiento a partir de la simulación y modelación.

Ahora bien, haciendo referencia a la Socioepistemología del Cálculo, ésta permite identificar la construcción de significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos que generan los estudiantes al trabajar con las situaciones de variación. Para ello ponemos en juego la categoría del conocimiento M-G que a su vez es un marco de referencia que ayuda resignificar ciertas nociones del cálculo.

Cabe mencionar que durante el desarrollo de los distintos experimentos, y en cada uno de los momentos, el profesor intervino, en unos casos más que en otros, dependiendo de las necesidades de los estudiantes y de los obstáculos que surgieron durante el desarrollo.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE DATOS

En esta sección mostramos el análisis de los datos obtenidos de: el Instrumento de Diagnóstico; las Situaciones de Variación (AE, AF y RM); y de la Actividad de cierre. Nos centramos en obtener evidencia de cómo el estudiante usa la gráfica para argumentar sobre el cambio y la variación, y qué estrategias variacionales emplea en cada situación.

IV.1. Análisis del Instrumento de diagnóstico

Como ya se había comentado en el capítulo anterior, las situaciones fueron desarrolladas por un grupo de alumnos de sexto semestre del Bachillerato de Físico-Matemático, Preparatoria de la UAZ[16], e implementadas por el profesor del grupo, autor de este trabajo. La tabla del Anexo 1, muestra el concentrado de las respuestas obtenidas de los 18 estudiantes del grupo bajo estudio. Los resultados se muestran a continuación.

Pregunta 1. ¿Qué es para usted una variable?

El 56% de los estudiantes consideró que una variable representa una letra que puede adquirir valores sucesivos, para el 28% una variable es una letra sin valor. El 17% consideró que son los valores que adquiere la variable; el resto no la considera una letra y nadie sugirió alguna respuesta diferente.

Pregunta 2. ¿Cómo se representa una variable?

La mitad de los estudiantes contestaron que una variable se representa por una letra, tres de ellos (17%) contestaron que era mediante un conjunto de números, para el 22% su representación era mediante un número y dos estudiantes respondieron que mediante una gráfica en el plano; al igual que en la pregunta anterior nadie sugirió otra forma de representación de una variable.

Pregunta 3. ¿Cómo se miden los cambios?

Para el 44% de los estudiantes los cambios se miden por medio de funciones, otro porcentaje importante considera la medición se hace por medio de intervalos (33%). Sólo un alumno responde que mediante restas y tres (17%) optaron que por medio de gráficos. Ningún alumno consideró que por medio de sumas y tampoco hubo sugerencias de otras posibilidades.

Pregunta 4. ¿Cuál es la estrategia básica para calcular la velocidad instantánea en t_i?

Para el cálculo de la velocidad instantánea en un tiempo determinado t_i el 44% (8 alumnos) decidieron que es mediante la búsqueda del límite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando $\Delta t = 0$, el 28% consideraron que la estrategia sería calcular solamente el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, cuatro estudiantes respondieron que se debe buscar el límite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando Δt es infinitamente pequeño, y sólo uno optó por acercamientos numéricos sucesivos a t_i.

Pregunta 5.1. ¿En qué punto la fórmula $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_i+\Delta t)-s(t_i)}{\Delta t}$ mide la velocidad instantánea? (en donde *s(t)* representa la variación de la distancia respecto al tiempo de un cuerpo en movimiento)

El 39% de los estudiantes contestaron que en ambos puntos de corte de la recta secante, es decir en P y Q. Exactamente cuatro estudiantes considera que es en el punto P, y la misma cantidad (44%) que es en el punto Q. Pero tres de ellos contestaron que es en el punto R.

[16] Siglas de la Universidad Autónoma de Zacatecas del estado de Zacatecas

Pregunta 5.2. Cuando $\Delta t \to 0$, ¿Qué pasa con $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

Para ésta pregunta la mayoría de los estudiantes (56%) contesta que el cociente incremental $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ se anula cuando $\Delta t \to 0$. Seis estudiantes consideran que el cociente tiene por límite un número; y la misma cantidad (uno y uno) respondieron que se hace muy grande, o bien, es un infinitesimal.

Pregunta 5.3. ¿Cuál es la expresión de la pendiente de la secante $\overline{PQ}$?

Diez estudiantes respondieron que la expresión $m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$. Tres eligieron la opción c), es decir, $m = \frac{ds}{dt}$; al igual que para el inciso d) que corresponde con $m = \Delta t$. Exactamente dos estudiantes seleccionaron el inciso b), referente a que la pendiente es igual al incremento de la distancia.

Pregunta 5.4. ¿Cuál es la expresión de la pendiente de la tangente en *P*?

Para seis estudiantes la expresión que establece la pendiente de la recta tangente en el punto *P* es $m = \frac{ds}{dt}$. Cinco estudiantes seleccionaron el primer inciso $\left(m = \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$. Para cuatro de ellos la expresión adecuada es $m = \Delta s$, y tres estudiantes consideran que $m = \Delta t$ es la expresión correcta.

Pregunta 6.1. ¿En dónde la curva crece con mayor rapidez?

Éste primer cuestionamiento sobre la variación de la variable *y* en términos de la variable *x*, descrito por la curva presentada, hacía referencia al punto (o los puntos) del eje horizontal en donde la misma tiene un crecimiento más rápido. Al respecto, la mayoría de los estudiantes (61%) respondió que ello ocurría cuando *x=2*, tres más contestaron que era cuando $x = \frac{1}{2}$, otros dos optaron por el inciso b), es decir, cuando *x=0*; y los dos restantes decidieron que esto se puede observar cuando *x=1*.

Pregunta 6.2. Si se sabe que la curva obedece a la fórmula $y = (x - 1)^3 + 1$, ¿en dónde la curva crece con menor rapidez?

Como se puede notar en ésta pregunta se proporciona la expresión analítica de la curva (función cúbica) pero ahora se cuestiona a los estudiantes sobre la abscisa en donde la curva crece con menor rapidez, a lo que la mayoría (56%) consideró que correspondía al valor de *x=1*. Cinco estudiantes seleccionaron la primera opción, dos decidieron que era en *x=0* y sólo uno optó porque era en *x=2*.

Pregunta 7. Se refiere a la gráfica de la posición de un automóvil que transita un sendero horizontal, se pide a los estudiantes estimar la velocidad en ciertos intervalos de tiempo.

Siete de los estudiantes (39%) no estimó la velocidad entre los tiempos *t=1* y *t=3*, dos contestaron que 0 Km/h. Tres más estimaron que la velocidad era 10 Km/h, y cuatro respondieron que era de 3.33 Km/h. Para el intervalo de tiempo entre 3 y 4 horas la misma cantidad (y mismos estudiantes) que en el primer inciso no escribieron respuesta alguna.

Cuatro estudiantes estimaron que la velocidad era de 20 Km/h; otros dos respondieron que era de 7.5 Km/h. Para dos estudiantes la velocidad era de 30 Km/h. Un estudiante contestó que 10 Km/h, uno más estableció un intervalo de entre 10 y 30 kilómetros por hora y uno contestó *"no sé"*. Finalmente, para el intervalo $t=5$ y $t=8$, seis estudiantes no registraron datos, dos respondieron que era 10 Km/h, y otros dos que era de 15 Km/h. Se reportaron velocidades como 875, 3.45, 30, 7.25, 5 (una por alumno). Únicamente un estudiante reportó una velocidad negativa (-3 Km/h), otro escribió "*disminuye la velocidad*" y uno más reportó "*no sé"*.

Pregunta 8. Se presenta la gráfica de una cierta función y se cuestiona sobre el signo de la primera y segunda derivadas en tres puntos marcados.

En el establecimiento del signo de la primera derivada en tres puntos de la gráfica proporcionada, ocho estudiantes consideraron que era negativo para el punto A, la misma cantidad consideró lo opuesto (signo positivo) y dos no contestaron. Respecto al punto B, doce estudiantes respondieron que el signo correspondiente era negativo, cuatro que era positivo y los mismos dos que en el caso anterior no contestaron. Para el punto C hubo más diversidad, ocho establecieron que el signo de la primera derivada era positivo, seis más opinaron lo contrario (positivo), tres no contestaron la pregunta y uno respondió *"ninguno"*. Los incisos d), e) y f) se refieren al signo de la segunda derivada en los mismos puntos; para el punto A ocho respondieron que el signo era negativo; siete que el signo era positivo y tres no contestaron, los mismos resultados se presentaron para el punto B. Para el punto C, siete consideraron que en éste el signo de la segunda derivada era negativo, seis más que era positivo, cuatro no contestaron y uno (el mismo que en el caso anterior) respondió *"ninguno"*.

IV.2. Discusión sobre los resultados del instrumento de diagnóstico

Más allá de los resultados estadísticos, la información obtenida de la aplicación del instrumento de diagnóstico deja entrever que para la mayoría de estos estudiantes una variable no es simplemente una letra, sino que ésta puede efectivamente tomar valores diferentes o sucesivos, es decir, pareciera que la ven como algo que no permanece fijo, aun cuando este porcentaje disminuye al cuestionarlos sobre su representación. Llama la atención que para algunos la representación sea un número (que sería un valor fijo), se puede notar además que estos estudiantes (excepto uno) no asocian la medición del cambio con la diferencia entre dos valores, que es parte esencial para el desarrollo del PyLV, es decir pareciera que no están acostumbrados a cuantificar cambios, o que nunca lo han hecho. Sin embargo, cuando la pregunta va enfocada un poco más hacia lo que el dME suele manejar para el cálculo de la velocidad instantánea, es decir, el manejo de conceptos como *"el límite"*, los estudiantes tratan de dar una respuesta lo más cercana posible a lo que pudieron haber trabajado en su curso de cálculo diferencial. Sin embargo, la mayoría no fue del todo preciso, pues consideran a $\Delta t = 0$. En la pregunta 5 pareciera que al proporcionarle una imagen al estudiante (la gráfica de *s(t)*) los resultados mejorarían, pero en ocasiones puede ser contraproducente, al menos así lo evidencia la respuesta de la primer pregunta; pues al cuestionarle sobre en dónde ocurre la velocidad instantánea, la mayoría responde que en los puntos P y Q. Esto nos permite considerar que el incremento no juega un papel importante en el cálculo de la misma y por ende, tanto P como Q, se pueden mover uno hacia el otro. Más aún, muy pocos alumnos recordaron (posiblemente) que cuando se calcula un límite el resultado es un valor, siempre que el límite exista. Poco más de la mitad logra identificar la pendiente como el cociente de los incrementos respectivos de tiempo y posición, pero sólo la tercera parte contesta correctamente para la expresión de la pendiente de la recta tangente.

A diferencia de la pregunta 5, en la pregunta 6 se nota que la mayoría de los estudiantes logran asociar la palabra "crece" con la ubicación de puntos en donde la curva se ve menos horizontal, no explicaron el porqué de su respuesta ya que tiene que ver con el valor de la derivada en los puntos referidos. Más aún, a pesar de que en la continuación de la pregunta se les proporciona la expresión analítica asociada a la curva, poco más de la mitad contesta correctamente, pero en ningún momento realizan cálculos sobre la expresión analítica para verificar su respuesta, lo que nos indica ausencia, al menos parcial, de la noción de derivada y de su manejo algorítmico. Lo anterior se agudiza cuando se trata de establecer alguna relación con otras áreas, con física para el caso de la pregunta 7, pues el concepto de velocidad sólo lo asociaron, (en el mejor de los casos) con la fórmula $v = \frac{d}{t}$; y aunque en realidad se trata de determinar la velocidad media en ciertos intervalos, pocos la escriben en los márgenes, pero no logran llegar al resultado (por ejemplo 5 Km /h para el primer inciso). Esto puede deberse en parte a que no establecen los valores correctos del tiempo o de la distancia, es decir, no determinan adecuadamente las diferencias. Para el último intervalo en revisión de la pregunta 7 sólo dos estudiantes lograron hacer el cálculo adecuado de la velocidad media, pero dejan de lado el signo de la misma (negativa).

Finalmente, la pregunta 8 muestra evidencias de que los estudiantes sujetos de investigación tienen dificultades para establecer el signo de la primera derivada en un punto, lo que indica que no asocian el signo de ésta con la pendiente de la recta tangente en el punto, es más ningún estudiante intentó trazar rectas tangentes, se limitaron a asignar signos, sin preguntarse el por qué. Pareciera que sólo uno recuperó conocimientos sobre valores máximos y mínimos al contestar correctamente (*"ninguno"*) para el signo de la primera derivada en el punto C. Los incisos d), e) y f) posiblemente fueron contestados por los estudiantes atendiendo más a la obligación de dar una respuesta que por el conocimiento de la misma, llegando a manifestar algunos verbalmente: *"eso no lo vimos"* o *"no sé cómo se hace"*, por lo que si aparecen algunos aciertos, estos se deben más a la suerte que al conocimiento de cómo se comporta la segunda derivada en los puntos indicados.

Como se mencionó anteriormente, la intención de este diagnóstico es tener un panorama de cómo es que estaban los conocimientos previos de los estudiantes, si en sus respuestas hacen el uso de alguna estrategia variacional o no. De qué manera perciben a la derivada, si la logran asociar con conceptos como la velocidad y la rapidez, o con la variación, pero centrándose en la gráfica o comportamientos gráficos.

En ningún momento el objetivo de este proyecto fue solventar todas las deficiencias detectadas con el instrumento de diagnóstico, sino más bien seleccionar aquello que contribuyera, en primer lugar, con base en los resultados de cada estudiante para organizar los equipos de trabajo; tratando de que estos quedaran equilibrados en cuanto a su desempeño (considerando además otros factores) y cantidad de integrantes. Cabe destacar que tres equipos quedaron integrados por cuatro estudiantes cada uno y otro con seis, esto debido a que dos alumnos asistían de forma intermitente. En segundo lugar los resultados sirvieron para reorientar en parte el rediseño de las situaciones que se implementaron. Sobre todo tratando de favorecer el PyLV.

IV.3. Análisis de los experimentos

El análisis de resultados de los experimentos se llevó a cabo considerando lo desarrollado por los equipos durante los tres momentos planteados en el proceso de trabajo, se identificaron las construcciones de la Socioepistemología para una situación de variación mismas que se organizaron en un cuadro como el siguiente (ver Figura 29):

Construcciones	Situación Variacional (Experimento)
Significados	
Procedimientos	
Proceso-objeto	
Argumentación	

Figura 29 Cuadro de análisis para una situación de variación

La articulación de los elementos constitutivos del binomio M-G (Suárez, 204), los elementos caracterizados del PyLV (Caballero, 2012; Caballero y Cantoral, 2013), y las construcciones del cálculo para una situación de variación, nos permitió estructurar la siguiente tabla para el análisis de los resultados (ver Tabla 4).

SITUACIÓN VARIACIONAL				
Uso de la gráfica:				
Funcionamiento de la gráfica:		Forma del uso:		
CONSTRUCCIONES			*ESTRATEGIAS VARIACIONALES*	ARGUMENTOS VARIACIONALES
Variación	SIGNIFICADOS			
Múltiples Realizaciones				
Identificación de Patrones	PROCEDIMIENTOS			
Realización de Ajustes				
Desarrollo del Razonamiento	PROCESOS-OBJETOS			

Tabla 4 Tabla de análisis de la situación variacional

Los significados se encuentran directamente en las gráficas, estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo de las gráficas del área, la temperatura y la posición. Además, estos se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas del área, la temperatura y la posición se pueden identificar intervalos que indiquen por ejemplo cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, cuándo la velocidad es positiva o negativa en el caso del tercer experimento.

La base de los procedimientos se apoya en las actividades de modelación y simulación que los estudiantes realizan, en este sentido, nos referimos a las gráficas que se construyen antes y después de usar tecnología.

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones que pueden actuar sobre él, entonces está pensando en este proceso como un objeto (Rosado, 2004).

En cuanto a los argumentos son las explicaciones que los estudiantes dan con respecto a la actividad de aprendizaje y que se construyen con base en los significados y procedimientos desde los puntos de vista individual y/o grupal.

De esta manera nos permite caracterizar ciertos usos de la gráfica por medio de su funcionamiento y forma en las situaciones de variación.

Para evitar confusiones e identificar las producciones de los equipos, y de cada integrante, se estableció la siguiente nomenclatura (ver Tabla 5)

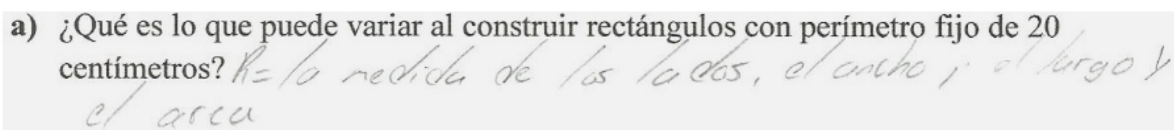
M# = Momentos (# = 1, 2, 3)	**Actividades**
Integrante (n=1, 2, 3, 4) → **nEm** ← **Equipo(m=1, 2, 3, 4)**	**AE**=Área Extrema **AF**=Agua Fría **RM** =Representando el Movimiento
[…]= Observaciones del Profesor	**AC**=Actividades de Cierre
Dato obtenido de Audio	Dato obtenido de Video

Tabla 5 Nomenclatura para Análisis de resultados

Por ejemplo 1E2 representará la aportación del estudiante uno del equipo dos, mientras que AE-M1-E2 hará referencia al resultado presentado por el equipo dos respecto de la actividad de área extrema en el momento uno. A continuación presentamos los resultados significativos de cada situación.

IV.3.1. Resultados en Área Extrema

El Momento 1 en esta actividad comprende dos preguntas, primero se cuestiona a los estudiantes sobre lo que puede variar al construir rectángulos de perímetro fijo (inicialmente de 20 centímetros), a lo que la mayoría contesta que el largo y el ancho (algunos lo llaman base y altura (ver Extracto 1) así como su área.


a) ¿Qué es lo que puede variar al construir rectángulos con perímetro fijo de 20 centímetros? R= la medida de los lados, el ancho y el largo y el area

Extracto 1. AE-M1-E1, pregunta inicial

La segunda pregunta (inciso b) se refiere a la cantidad de rectángulos que se pueden formar con la restricción de que el perímetro sea de 20 centímetros. Los equipos E2 y E4 responden que 15 rectángulos, mientras que el equipo E1 expresa que *"muchos por los números intermedios",* aludiendo a los posibles valores que pueden tomar el ancho y largo del rectángulo.

Por su parte el equipo E3 comienza confundiendo el cálculo del perímetro con el cálculo del área (ver Extracto 2 e Imagen 4), entre ellos se dan cuenta del error y auxiliándose del Geoplano corrigen sus ideas y reorientan el trabajo.

(02:18-02:37)

1E3: *"¿cinco por cuatro daría verdad?"*

3E3: *"A no ..., no te creas, estamos mal esta es el área"*

1E3: *"es lo que te estoy diciendo"*

3E3: *"entonces sería así…"*

1E3: *"el perímetro se supone que es…"*

Extracto 2 AE-M1-E3, Construcción de triángulos adecuados

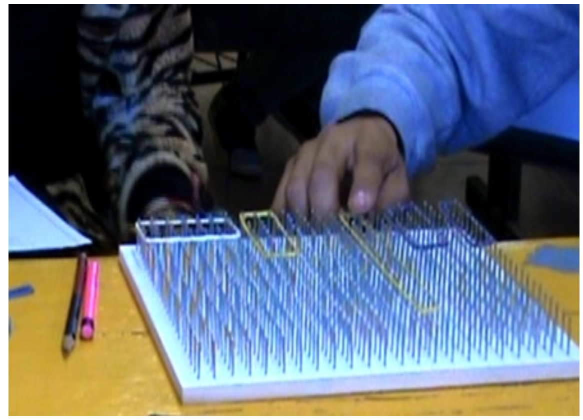


Imagen 4 AE-M1-E3 Exploración

Posteriormente el mismo equipo contesta el inciso b) empleando el símbolo "∞", posiblemente para representar una cantidad grande de rectángulos con estas características, sin embargo no explican el porqué, además en la revisión del audio grabado para este equipo no se registró algún comentario de los estudiantes al respecto.

Para esa misma pregunta los integrantes del equipo E1 logran identificar un patrón de comportamiento entre el ancho y el largo de los rectángulos que se pueden construir (ver Extracto 3 e Imagen 5).

(11:30-12:50)

2E1: *"Nomas hay esos, mira porque al parecer tienes de 1 y de 9, de 8 y de 2, de 7 y de 3, de 4 y de 6, …y ya de 5 y de 5 es el cuadrado,… pero ya de 4 y de 6 se vuelve a repetir".*

Extracto 3 AE-M1-E1, Identificación de patrón ancho-largo

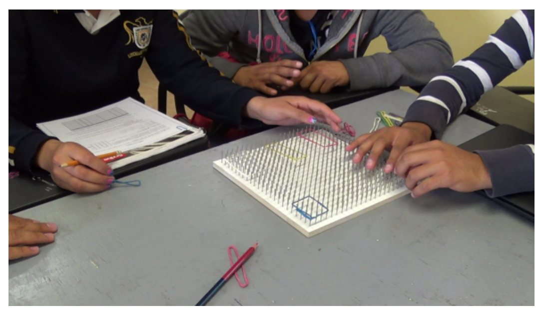


Imagen 5 AE-M1-E1 Patrón en la construcción

El M2 en esta actividad abarca los pasos 2-8; es precisamente en este momento en que los equipos intensificaron la experimentación, es decir, formaron rectángulos con diferentes dimensiones en el Geoplano (usando ligas de diversos colores). Posteriormente registraron los datos obtenidos en la Tabla A correspondiente (hoja 3). Para ello se les recomendó que organizaran sus datos de manera que el ancho fuera ordenado de menor a mayor, según los rectángulos que cada equipo haya construido. Por ejemplo, el equipo E1 en su primera tabla de valores registra los datos ordenados de forma ascendente sólo hasta los primeros cuatro rectángulos, los siguientes cuatro lo hace de forma descendente y completa la tabla con dos que tienen longitudes decimales (ver Extracto 4), aún cuando sólo consideran puntos medios entre enteros. Mostrando con ello indicios de conocer la propiedad de densidad de los números reales y de que las dimensiones de los rectángulos no necesariamente deben ser valores enteros, extendiendo el posible dominio para estas variables.

Rectángulo	Ancho (cm)	Largo (cm)	Perímetro	Área
	x	y		
1	1	9	20	9
2	2	8	20	16
3	3	7	20	21
4	4	6	20	24
5	9	1	20	9
6	8	2	20	16
7	7	3	20	21
8	6	4	20	Valores decimales
9	2.5	7.5	20	18.75
10	3.5	6.5	20	22.75

Extracto 4 AE-M2-E1, Valores decimales en las dimensiones

En este mismo paso, el equipo E3 se auxilia de la graduación presentada en las cuadrículas y del Geoplano para establecer algunos valores decimales en el ancho, y por tanto el largo de los rectángulos (ver Extracto 5 e Imagen 6).

(23:41-25:08)

3E3: *"serían de nueve punto cinco por cero punto cinco, si tomamos en cuenta que esto sería cero punto cinco".* [0.5], [Indicando la separación entre puntos del Geoplano].

1E3: *"y luego cero punto cinco, nueve punto cinco".*

Extracto 5 AE-M2-E3, Rectángulos con dimensiones decimales

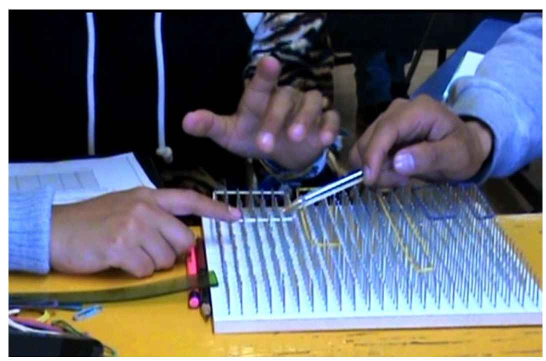
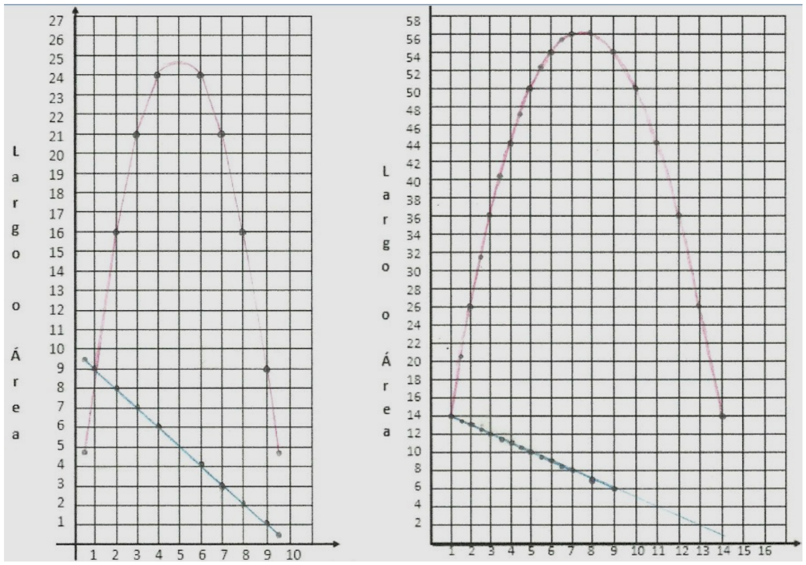


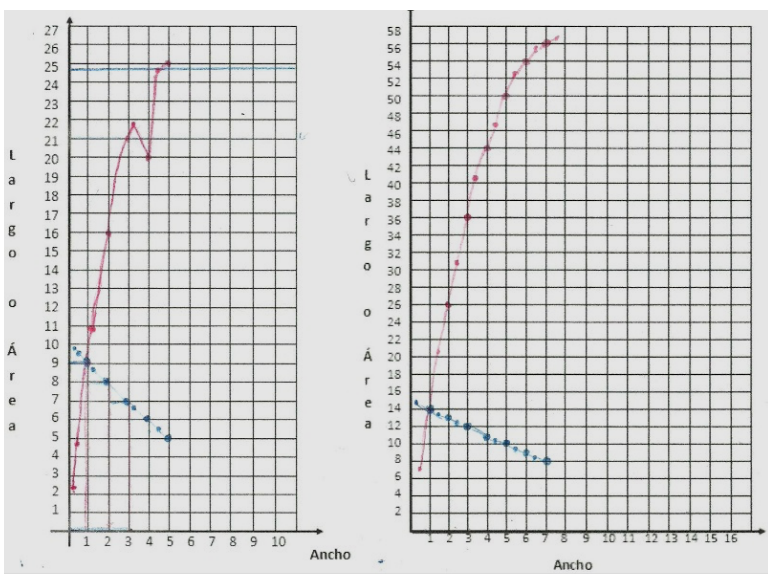
Imagen 6AE-M2-E3, Redimensionando rectángulos

En particular, los pasos 2, 3, 4, 5 y 6 de AE permiten que los estudiantes efectúen múltiples realizaciones y a su vez hagan ajustes en las dimensiones de los rectángulos, explorando el comportamiento de los valores respectivos del área. Cabe resaltar que aunque sólo contaban con un determinado número de datos construidos por ellos, al momento de graficarlos, los equipos E1, E2 y E3 optaron por conectarlos, el ancho-largo con una línea recta y el ancho-área con una línea curva (parábola). Para el paso 6 (rectángulos de perímetro 30 centímetros) los equipos en general, ya no construyeron todos los rectángulos en el Geoplano, lo que muestra evidencia de que notaron la regularidad al variar las longitudes (ver Extracto 6).



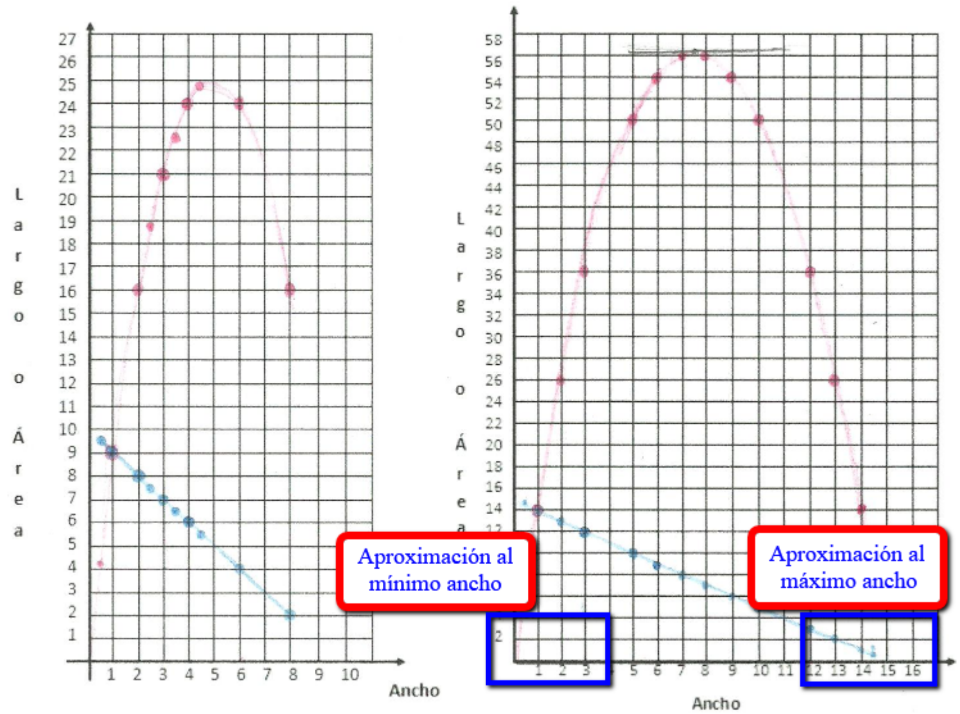
Extracto 6 AE-M2-E3 Gráficas para rectángulos de perímetros 20 cm y 30 cm

Sin embargo el E4 sólo considera en la construcción de los valores de sus rectángulos en los cuales el ancho siempre es menor o igual que el largo. Por consiguiente obtiene las gráficas del Extracto 7. Al mismo tiempo los integrantes del equipo cometen un error en el cálculo del área, cuando el ancho es igual a 4 centímetros conectan los puntos mediante líneas rectas y líneas curvas.



Extracto 7 AE-M2-E4 Gráficas para rectángulos de perímetros 20 cm y 30 cm

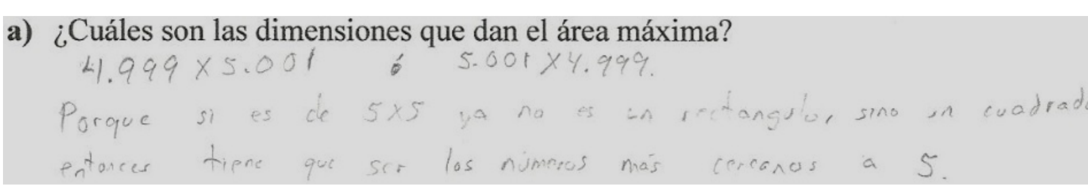
Por su parte el E2, es el único equipo que considera que el ancho del rectángulo puede tomar valores tan cercanos como sea posible a la mitad de lo que vale perímetro. Y por consiguiente el largo puede tomar valores tan pequeños como sea posible (cercanos a cero); lo que correspondería a determinar el dominio y el rango de la función ancho-largo. Lo antes mencionado también se puede observar en la gráfica ancho-área pues ésta se va aproximando al eje horizontal más y más conforme el ancho se aproxima a sus valores mínimo y máximo. En el caso ancho=0 cm cuando el largo es 15 cm y similarmente para el ancho=15 cm si el largo se anula (ver Extracto 8).



Extracto 8 AE-M2-E2 Gráfica del ancho-largo y ancho-área, aproximación a los valores máximos y mínimos.

Es de resaltar que aún cuando ningún equipo ordenó los datos de forma ascendente en cuanto a el ancho se refiere, tal y como se les había sugerido al momento del llenado de la tabla, esto no contribuyó a que la distribución de puntos para realizar el gráfico presentara el problema de *"cruces como agujetas de zapatos"* reportado por Cantoral (2013a). Por lo que la tabulación, punteo y trazo que efectuaron los equipos fueron adecuados. Quizás esto se vio influenciado por los conocimientos que poseían sobre la gráfica de una cuadrática (simetría de la parábola).

En cuanto a la primera pregunta del paso 5, sólo el E4 contesta utilizando aproximaciones (infinitesimales) al valor de cinco esto es, que el área es máxima cuando las dimensiones del rectángulo se aproximan a los cinco centímetros de ancho y cinco centímetros de largo (cuando se forma un cuadrado). Los demás equipos reportan aproximaciones a dichos valores, por ejemplo el equipo E1 presenta una aproximación por la izquierda y otra aproximación por la derecha (ver Extracto 9).



a) ¿Cuáles son las dimensiones que dan el área máxima?

4.999 x 5.001 ó 5.001 x 4.999.

Porque si es de 5x5 ya no es un rectangulo, sino un cuadrado entonces tiene que ser los numeros más cercanos a 5.

Extracto 9 AE-M2-E1 Aproximaciones al valor máximo

Del video correspondiente a ese momento se puede rescatar lo siguiente (ver Extracto 10).

(25:40-30:54)

1E1: *"Entonces si le ponemos 4.999 va acercándose al eje…".*

2E1: *"Va acercándose al 25"*

3E1: *"Se acerca cada vez más y más pero no llega…nomás se va acercando pero nunca lo va a tomar"*

Extracto 10 AE-M2-E1 Actividad 1, pregunta a), paso 5

Sin embargo, esas aproximaciones del equipo E1 y el trazado de la paralela al eje horizontal (segunda pregunta del paso 5) los lleva a, en principio, relacionar dicha recta paralela con la recta tangente en ese punto (ver Extracto 11); y en segundo lugar concluyen que el máximo efectivamente ocurre cuando el ancho y el largo se aproximan a cinco centímetros. Lo cual representan con las coordenadas (5,5) correspondientes al punto medio de la gráfica ancho-largo, pero no de la gráfica ancho-área; lo cual señalan dos de los integrantes del equipo con el dedo sobre la parte más alta de la parábola (ver Imagen 7).

(33:20-33:40)

1E1: *"¿Cómo dices tú?"*

2E1: *"Que fuera a tocar en el punto ese"*

1E1: *"Es una tangente…¿no?"*

Extracto 11 AE-M2-E1 Identificación del punto máximo

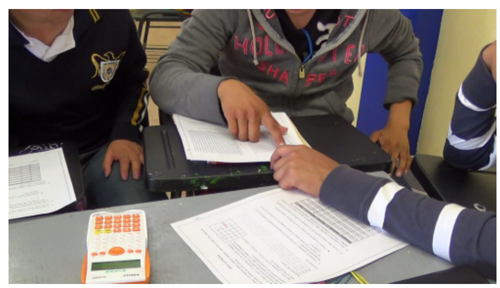


Imagen 7AE-M2-E1 Punto máximo en la gráfica

Continúan con la discusión y solicitan la intervención del profesor (ver Extracto 12)

(34:30-35:50)

2E1: *"Profe, para llegar a la gráfica se puede poner cinco-cinco en la <desta> del rectángulo".* [Refiriéndose a las dimensiones del rectángulo]

P: *"¿Está restringido?"*

1E1: *"es que no nos da la pendiente igual a cero, si la ponemos antes son menos metros…"*

Extracto 12 AE-M2-E1 Discusión y análisis sobre la recta tangente

Por su parte el E3 es el único equipo que intenta obtener el valor del área máxima estableciendo una función que relacionara los lados del rectángulo, pero sin éxito (ver Extracto

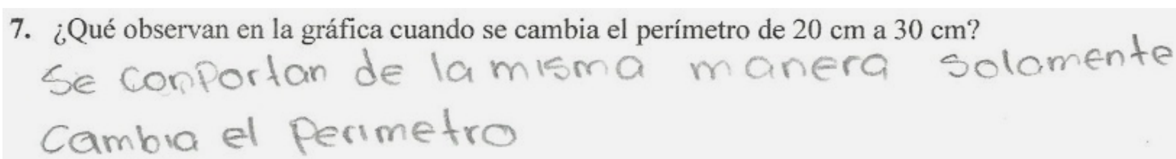
13) y además no lo registran por escrito, por lo que recurren nuevamente al análisis de los valores que construyeron.

(27:04-28:27)

3E3: *"Tendríamos una función que sería efe de equis igual a equis por equis igual a veinte… ¡¡ah no!! Dos equis mas dos yes igual a veinte. Mmmm ... ¿cuál es el valor máximo?...Si decimos que ye es igual a veinte entre equis sería mayor área,... también si hacemos la fórmula del área…".* [Después de la discusión deciden hacer cálculos con valores decimales y aproximar el valor del área máxima].

Extracto 13 AE-M2-E3 Intento de expresión algebraica

Para contestar la pregunta 7 los estudiantes se vieron en la necesidad de comparar las gráficas obtenidas para los perímetros de 20 y 30 centímetros, identificando diferencias entre ellas, pero sobre todo logran identificar un patrón de comportamiento gráfico, por ejemplo el E2 (ver Extracto 14).


7. ¿Qué observan en la gráfica cuando se cambia el perímetro de 20 cm a 30 cm?
Se comportan de la misma manera solamente cambia el perimetro

Extracto 14 AE-M2-E2 Identificación de comportamiento

El audio del E3 deja entrever lo siguiente (ver Extracto 15)

(56:01-56:26)

2E3: *"Se hace más ancha.. ¿no?".*

3E3: *"…y la inclinación... bueno es que dependerá de la escala que tenga la gráfica, porque si fuera escala de uno en uno sería igual…"*

Extracto 15 AE-M2-E3 Comparación entre gráficas

Para los integrantes del equipo E4, en la pregunta 7, las gráficas son semejantes, pero reportan que la graduación en la cuadrícula B es casi el doble que la de A.

Por otra parte, el tercer integrante de equipo E1 expresa *"nomás comparamos y de ahí sale"*, por lo que el equipo comienza la discusión que se muestra enseguida (ver Extracto 16).

(55:58-57:38)

1E1: [Lee la pregunta al equipo] *"¿Qué observa en la figura cuando se cambia el perímetro de veinte a treinta centímetros?"*

3E1: *"Sólo incrementa…¿no?"*

2E1: *"Es más grande"*

Extracto 16 AE-M2-E1 Comparación entre valores de la misma gráfica

Luego continúan discutiendo, pero ahora hacen un análisis sobre los aumentos en las gráficas (ver Extracto 17).

	(1:00:10-1:04:05)
1E1:	*"¿Aquí va aumentando de uno en uno?"* [Señala con el dedo en la cuadrícula de la gráfica A, ver Imagen 8]
3E1:	*"Aumenta nuevamente?"*
1E1:	*"Y aquí como que se ve de dos en dos"* [Señala con el dedo sobre la cuadrícula de la gráfica B, ver Imagen 9]
2E1:	"*Es el doble, porque mira fíjate, de 1 a 2 aumenta tanto y de 1 a 3 aumenta tanto*" [Recurriendo a la tabla]
3E1:	"*No exactamente, mira aquí es 1 a 9 y acá es 1 a 14"* [Señalando movimientos en los ejes para ambas gráficas]

Extracto 17 AE-M2-E1 Comparación entre ambas gráficas (20 y 30 cm)

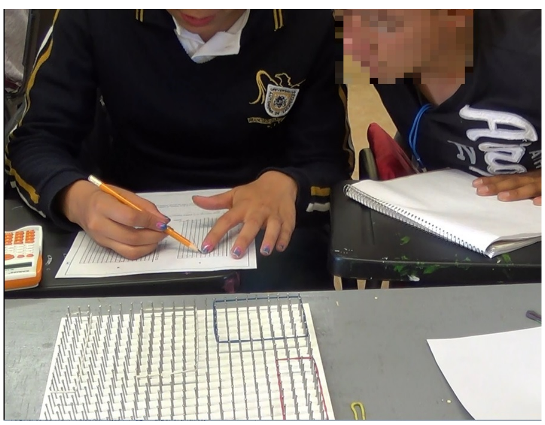


Imagen 8AE-M2-E1 Variación en la gráfica A

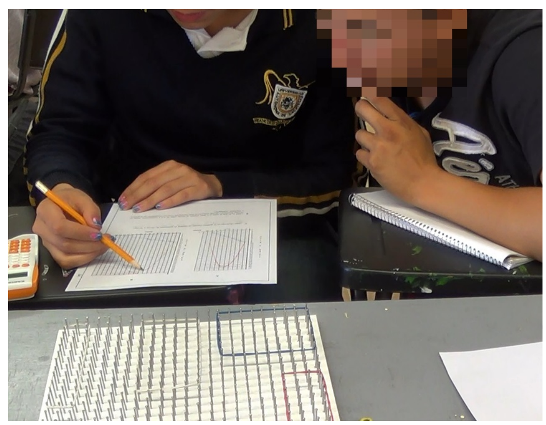


Imagen 9AE-M2-E1 Variación en la gráfica B

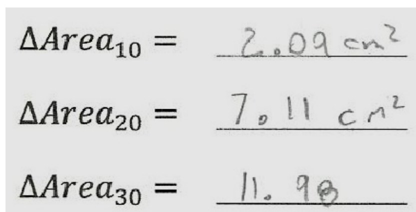
Para la pregunta del paso 8 en general los cuatro equipos sólo reportaron que el área en la primera gráfica disminuye, y en la segunda se incrementa cuando se comparan en el intervalo de 5 a 6 centímetros, tomando como referencia el eje nombrado como ancho. En particular del audio del E3 se rescata que tienen la noción de términos relacionados con el comportamiento gráfico (ver Extracto 18).

	(58:36-58:48)
3E3:	*"… en el caso de veinte, cambia de creciente a decreciente… y en el caso de treinta*

sigue creciente".

Extracto 18 AE-M2-E3 Comportamiento gráfico

Finalmente, el Momento 3 contempla todos los incisos de la pregunta 9. Cada equipo siguió las instrucciones del inciso a) al inciso d), a partir de los cuales construyeron tres curvas en Geogebra, correspondientes a los perímetros 10, 20 y 30 centímetros. Sin embargo algunos equipos tuvieron dificultades para desplazar las paralelas, indicación del inciso e), ya sea porque no las ubicaban en el orden establecido en la instrucción o porque requerían desplazamientos lo más aproximado posibles. En este inciso para el equipo E1 $\Delta Ancho$ *"es la longitud que hay de una línea a otra, es decir, el cambio que experimenta el ancho"*, para el equipo E3 es *"la diferencia que hay entre un ancho y otro"*. Los otros dos equipos hacen referencia a que *"es la parte de un segmento que se desea conocer"*. Respuestas similares se obtuvieron respecto de $\Delta Área$. Ahora bien, la actividad se diseñó estableciendo $\Delta Ancho = 1$, es decir, que se mantuviera constante, por lo que todos los equipos pudieron dar una aproximación muy cercana al valor real de $\Delta Área_{10}$, y lo mismo para $\Delta Área_{20}$. Sin embargo sólo el equipo E4 logró hacer la mejor aproximación para $\Delta Área_{30}$ (ver Extracto 19).


$\Delta Area_{10} =$ 2.09 cm^2

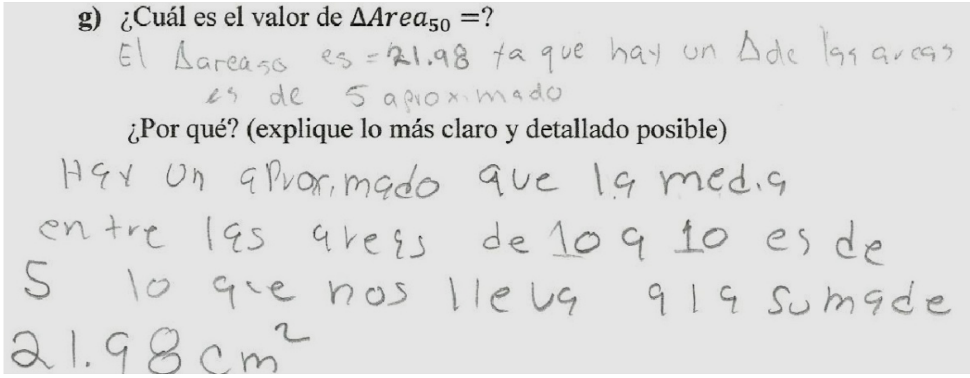
$\Delta Area_{20} =$ 7.11 cm^2

$\Delta Area_{30} =$ 11.98

Extracto 19 AE-M3-E4 Incrementos de área

En el último inciso se les pide calcular el valor de $\Delta Área_{50}$, para el cual no tienen referencia tabular en las hojas ni lo pueden ejecutar en el archivo de Geogebra, puesto que éste fue diseñado para que no se pudieran simular valores mayores a 30 cm de perímetro (variable de control). Esto los obligó a hacer un análisis sobre los datos que ya tenían y los obtenidos en el inciso f), y a utilizar otra estrategia de solución, pues tampoco contaron con las expresiones algebraicas de las funciones ancho-área.

Del total de quipos solamente el E4 logró deducir un patrón de comportamiento suficientemente preciso entre los incrementos del área conforme se aumentaba el perímetro en 10 unidades. Es decir, proporcionó la mejor aproximación al valor real para el caso $\Delta Área_{50} = 22cm$, (ver Extracto 20).


g) ¿Cuál es el valor de $\Delta Area_{50}$ =?

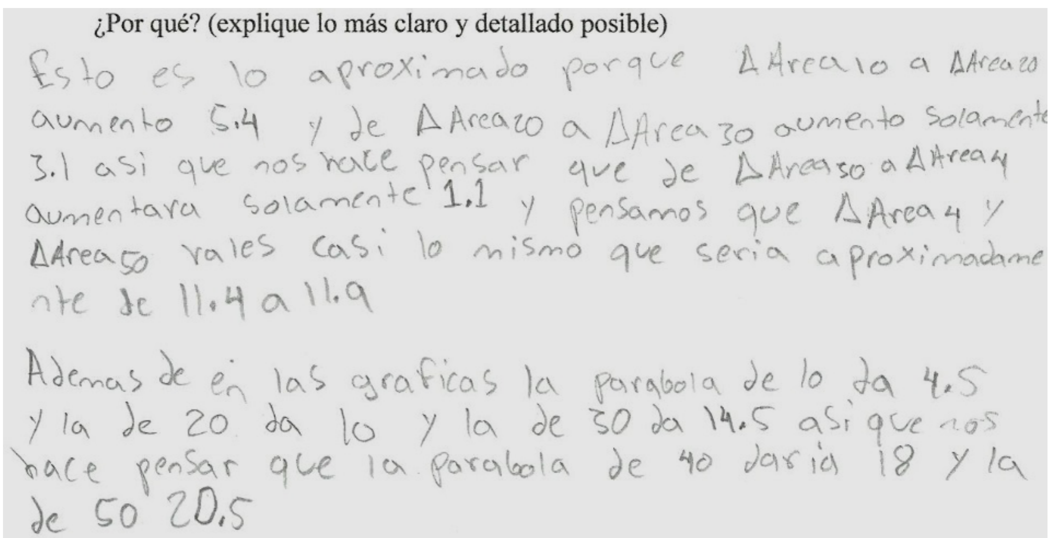
El $\Delta area_{50}$ es =21.98 ya que hay un Δ de las areas es de 5 aproximado

¿Por qué? (explique lo más claro y detallado posible)

Hay un aproximado que la media entre las areas de 10 a 10 es de 5 lo que nos lleva a la sumade 21.98 cm²

Extracto 20 AE-M3-E4 Predicción de área para perímetro 50 cm

Sin embargo el equipo E1, que mantuvo un desempeño constante y bueno durante toda la situación, también proporcionó una buena aproximación (a pesar de que su aproximación para el caso 30 centímetros fue $\Delta \acute{A}rea_{30}$=10.74), es decir, también encontraron la regularidad y proporcionan una explicación en la que determinan las diferencias entre los incrementos de área de los diferentes perímetros obtenidos en el inciso anterior (ver Extracto 21)


¿Por qué? (explique lo más claro y detallado posible)

Esto es lo aproximado porque $\Delta Area_{10}$ a $\Delta Area_{20}$ aumento 5.4 y de $\Delta Area_{20}$ a $\Delta Area_{30}$ aumento solamente 3.1 asi que nos hace pensar que de $\Delta Area_{30}$ a $\Delta Area_{4}$ aumentara solamente 1.1 y pensamos que $\Delta Area_{4}$ y $\Delta Area_{50}$ vales casi lo mismo que seria aproximadamente de 11.4 a 11.9

Ademas de en las graficas la parabola de 10 da 4.5 y la de 20 da 10 y la de 30 da 14.5 asi que nos hace pensar que la parabola de 40 daria 18 y la de 50 20.5

Extracto 21 AE-M3-E1 Predicción del área para el caso perímetro 50 centímetros

Los otros dos equipos no lograron deducir un patrón de comportamiento y por ende no dieron una aproximación tan cercana al valor real del $\Delta \acute{A}rea_{50}$ como los equipos ya mencionados. El empleo del archivo en Geogebra agilizó la graficación y permitió que los equipos se centraran en el análisis de sus comportamientos y cambios (ver Imagen 10 e Imagen 11), más que en la obtención de la curva.

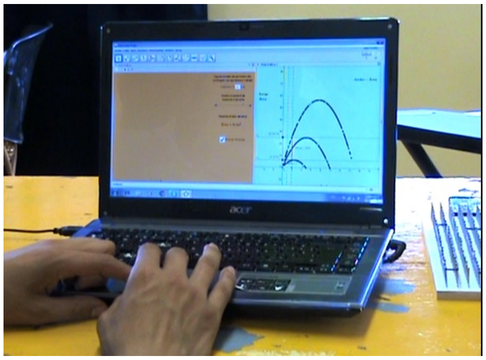


Imagen 10AE-M3-E3 Construcción de gráficas en Geogebra

Imagen 11AE-M3-E1 Comparando gráficas con Geogebra

Después del análisis de los diferentes momentos, se lograron identificar argumentaciones de los estudiantes para la situación AE, sintetizadas en el Cuadro 1.

Construcciones	Situación: Área Extrema
Significados	La variación es entendida como una cuantificación del cambio del área en relación con el perímetro.
Procedimientos	Identificar los elementos que pueden variar (ancho, largo y área de un rectángulo). Formar rectángulos de diferentes dimensiones (perímetro fijo) con las ligas en el Geoplano. Completar la tabla de valores para cada caso. Relacionar la gráfica con los cambios entre las variables y la dependencia con el valor del perímetro. Relacionar varias gráficas entre sí, y con los cambios entre las variables ancho, largo y área. Trazar la paralela al eje horizontal para aproximar la ubicación del valor máximo. Comparar las gráficas A y B y darse cuenta de que aunque ambas tienen un comportamiento similar (parábolas), pero no son iguales. Comparar las gráficas para tres casos particulares de perímetro usando el

	software. Predecir el valor para un caso particular empleando la variación.
Proceso-objeto	Asociación de un gráfico (curva) con el área. (Área-Curva)
Argumentación	Al variar el perímetro del rectángulo, varía el área conservando comportamiento en la gráfica. El área máxima siempre se obtiene cuando el ancho y el largo son casi iguales (cuadrado). La variación entre el ancho y el área no es constante. La comparación de incrementos (diferencias) permite predecir el valor de áreas desconocidas.

Cuadro 1. Argumentación para la situación: Área Extrema

Ahora bien, los elementos constitutivos del PyLV se pueden identificar en el experimento de la siguiente manera:

Como ya se reportó en algunas respuestas de los equipos se observa un uso de la estrategia de *Comparación*, ya que se analizan las diferencias de área primero en una gráfica y después en relación con otras (sus variaciones), es decir, cuando se cambia el perímetro (los datos iniciales). En esta situación la variación emerge cuando los estudiantes usan códigos variacionales, los cuales están presentes en expresiones como *"tiene que estar bien aproximado al cinco, pero sin tocarlo"*, *"crecen iguales"*, o con gesticulaciones cuando un integrante levanta la mano indicando que el área aumenta, o bien, cuando aleja las manos para indicar que el rectángulo va a ser más largo. Éstos códigos se articulan en el argumento variacional plasmado en su respuesta referente a que a mayor perímetro del rectángulo, mayor será el área, pero aún y cuando cambien las dimensiones el comportamiento de la gráfica es el mismo.

Integrando el análisis anterior e identificando el *uso de la gráfica* como distribución de puntos reportado por Cordero *et al.* (2010) en su *funcionamiento* y su *forma*, se presenta una recopilación de los datos en la siguiente Tabla 6.

<table>
<tr><th colspan="5">SITUACIÓN: ÁREA EXTREMA</th></tr>
<tr><td colspan="5">Uso de la gráfica (Uso_{AE}): Distribución de puntos

Funcionamiento de la gráfica (f_{AE}): Identificar el área según ciertas características geométricas. Forma del uso (F_{AE}): Construir rectángulos apropiados.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CONSTRUCCIONES</th><th>ESTRATEGIAS VARIACIONALES</th><th>ARGUMENTOS VARIACIONALES</th></tr>
<tr><td>Variación</td><td>SIGNIFICADOS</td><td>La varición es la cuantificación del cambio del área en relación con el perímetro.</td><td rowspan="5">• Comparación
Extracto 9 (numérica)
Extracto 10 (numérica)
Extracto 12 (gráfica)
Extracto 14 (numérica--gráfica)
Extracto 16 (gráfica)
Extracto 17 (gráfica)
Extracto 20 (numérica)
Extracto 21 (numérica/gráfica)

• Predicción
Extracto 8(gráfica)
Extracto 10 (numérica)
Extracto 20 (numérica)</td><td rowspan="5">• Al variar el perímetro del rectángulo varía el área conservando comportamiento en la gráfica.
• El área máxima siempre se obtiene cuando el ancho y el largo son casi iguales (cuadrado).
• La variación entre el ancho y el área no es constante y es más pequeña cuando se toman valores cercanos al máximo.
• La comparación de dos estados permite predecir el valor de áreas deconocidas.</td></tr>
<tr><td>Múltiples Realizaciones</td><td rowspan="3">PROCEDIMIENTOS</td><td>Obtener gráficas por medio de:
• Construcción de rectángulos.
• Distribución de puntos.
• Simulación con software.</td></tr>
<tr><td>Identificación de Patrones</td><td>Relacionar la gráfica con los cambios entre las variables y la dependencia con el valor del perímetro (mismo comportamiento gráfico).

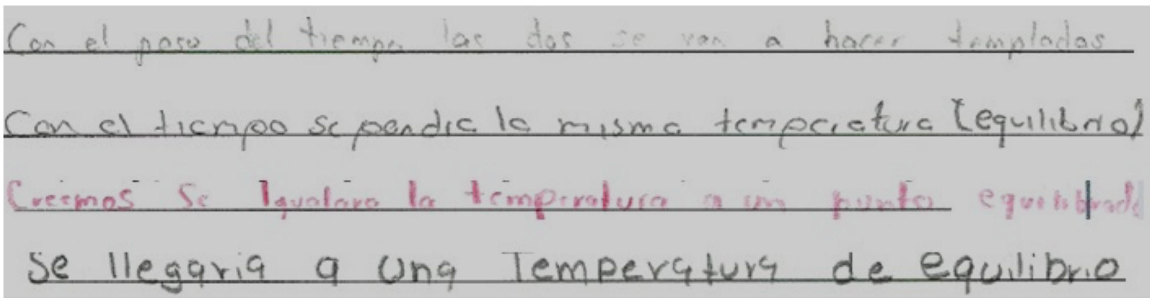
Predecir comparando áreas de rectángulos con diferentes perímetros.</td></tr>
<tr><td>Realización de Ajustes</td><td>Comparación de áreas en intervalos iguales.

Asociar parábola a la gráfica ancho-área.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo del Razonamiento</td><td>PROCESOS-OBJETOS</td><td>Asociación de un gráfico (curva) con el área. (Área-Curva)</td></tr>
</table>

Tabla 6 Análisis de la situación: Área Extrema

IV.3.2. Resultados de Situación: Agua Fría

En la actividad 1 de este experimento se contempla el M1, la cual está formada por tres preguntas. En principio se cuestiona a los estudiantes sobre qué sucederá a la temperatura de agua caliente al entrar en contacto con agua fría, pero sin mezclar ambos tipos de agua. Se puede notar que todos los equipos contestaron la pregunta (conjeturaron y formularon hipótesis) recurriendo a sus conocimientos previos de física o química, por ejemplo cuando recurren a usar el término "*temperatura de equilibrio*". Además algunos equipos consideraron el factor tiempo en sus respuestas. Enseguida se muestran los extractos respectivos de cada equipo (ver Extracto 22).


Con el paso del tiempo las dos se van a hacer templadas
Con el tiempo se perdio la misma temperatura (equilibrio)
Creemos Se Igualara la temperatura a un punto equilibrado
Se llegaria a una Temperatura de equilibrio

Extracto 22 AF-M1-E1, E2, E3, E4 Conjetura sobre la temperatura del agua caliente y del agua fría

El E4 discute lo siguiente para consensar la respuesta anterior (ver Extracto 23)

(00:50-00:54)

4E4: *"Se va a llegar al equilibrio"* [Mueve la mano derecha de forma horizontal, como indicando estabilidad, ver Imagen 12]

1E4: [Mueve ambas manos de arriba hacia abajo hasta nivelarlas, es decir eventualmente las ubica a la misma altura, ver Imagen 13]

3E4: *"… como a una temperatura estándar…"*[Posiblemente refiriéndose a una misma temperatura]

Extracto 23 AF-M1-E4 Comportamiento del agua fría y el agua caliente

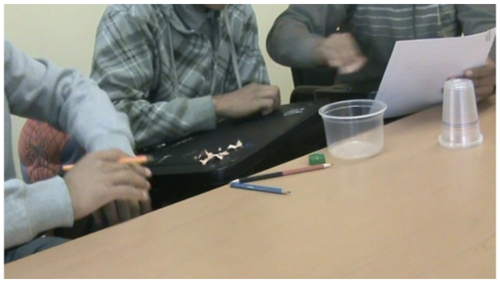


Imagen 12AF-M1-4E4 Movimiento de mano derecha indicando equilibrio

Imagen 13AF-M1-1E4 Movimiento de ambas manos indicando equilibrio

En la segunda pregunta sólo el equipo E3 identifica como variables a la temperatura y el tiempo (ver Extracto 24), mientras que los otros tres sólo identifican a la temperatura.

(00:16-00:53)

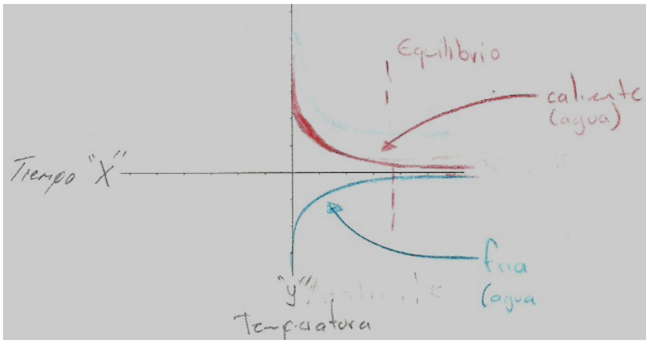
3E3: *"si… sería temperatura y tiempo, ¿no?…, en las variables… aquí le pones"* [Posiblemente indicando sobre el eje horizontal (no registro en video)]

"y la temperatura sería en ye…"

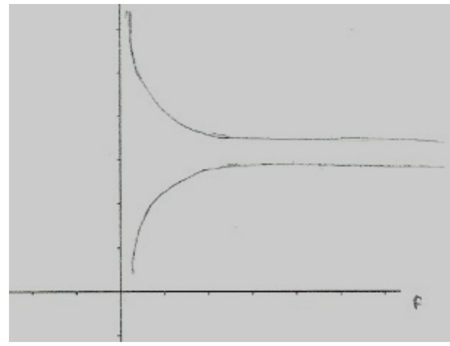
1E3: *"a nooo… sí, es que estaba poniendo la ye en la equis "*

Extracto 24 AF-M1-E3 Asociación de variables con ejes

Respecto a la tercera pregunta, que se refiere al esbozo de la gráfica de los dos tipos de agua conforme transcurre el tiempo, los cuatro equipos presentan resultados muy similares aún cuando sólo se les proporcionó como referente, un plano cartesiano no graduado. Por ejemplo, ninguno de ellos considera tiempo negativo en la situación estableciendo el dominio de esta variable, además todos los equipos etiquetaron al eje horizontal con la variable que controla el tiempo. En particular los equipos E2 y E4 muestran esbozos mediante curvas suaves, posiblemente haciendo referencia a la continuidad de las variables (ver Extracto 25y Extracto 26).



Extracto 25 AF-M1-E2 Esbozo de gráficas Tiempo-Temperatura



Extracto 26 AF-M1-E4 Esbozo de gráficas

Previo a ello el primer integrante del equipo E4 se refiere a las temperaturas como alta y baja (ver Extracto 27)

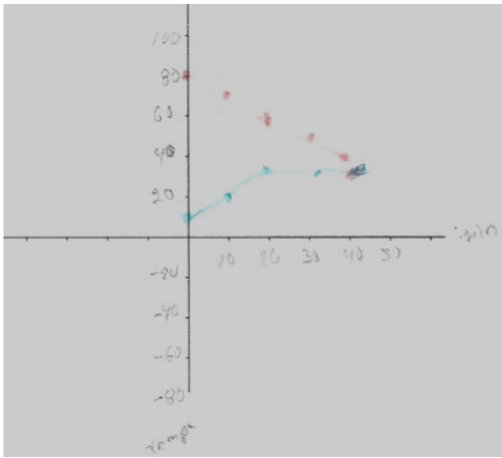
(04:44-04:51)

1E4: *"La temperatura baja sube y la alta baja … y se mantienen estables"* [Mueve la mano derecha hacia la izquierda y la mano izquierda hacia la derecha, enseguida las dos hacia el frente, ver Imagen 14]

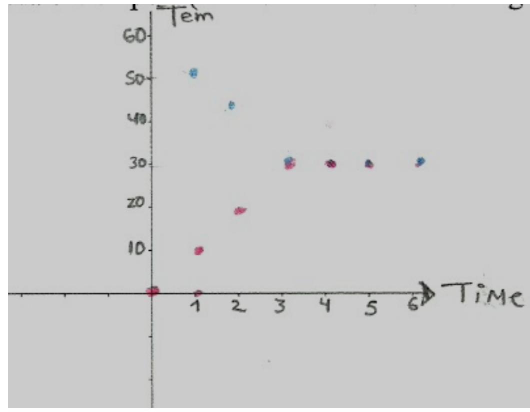
Extracto 27 AF-M1-1E4 Referencia para el esbozo de la gráfica

Imagen 14AF-M1-1E4 Indicación de estabilidad con las manos

Por su parte los equipos E1 y E3 realizan el esbozo estableciendo graduaciones y utilizando el punteo, suponiendo ciertas temperaturas iniciales (ver Extracto 28 y Extracto 29). En particular el tercer integrante del E3 menciona el porqué del esbozo de la gráfica del agua caliente (ver Extracto 30).



Extracto 28 AF-M1-E1 Esbozo de gráficas



Extracto 29 AF-M1-E3 Esbozo de gráficas

(01:33-01:47)

3E3: *"pues va a ir disminuyendo pero… va a ser gradualmente… como se dice... en picada"* [El equipo decide establecer una graduación al tanteo y propone los valores de la temperatura para la misma]

Extracto 30 AF-M1-3E3 Código variacional

El M2 comprende los ocho pasos de la experimentación; en esta fase los equipos definieron el rol de cada integrante y siguiendo los pasos 1-5 llevaron a cabo la recopilación de datos usando los sensores y las calculadoras gráficas, tanto para el agua fría como para el agua caliente. La recopilación anterior y las instrucciones de los pasos 6, 7 y 8 ayudaron a que los equipos ejecutaran múltiples realizaciones del experimento, notaran regularidad en el comportamiento gráfico y ajustaran los tiempos de captura. Obteniendo con ello datos que fueran muy próximos al fenómeno real de equilibrio térmico (ver Imagen 15, Imagen 16 e Imagen 17).

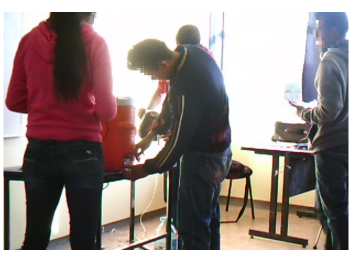


Imagen 15AF-M2-E1 Llenado de recipientes

Imagen 16AF-M2-E2 Captura de datos

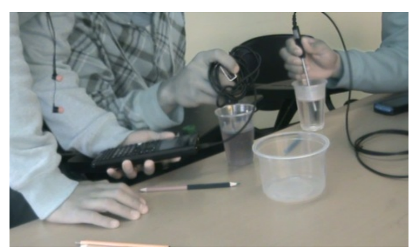
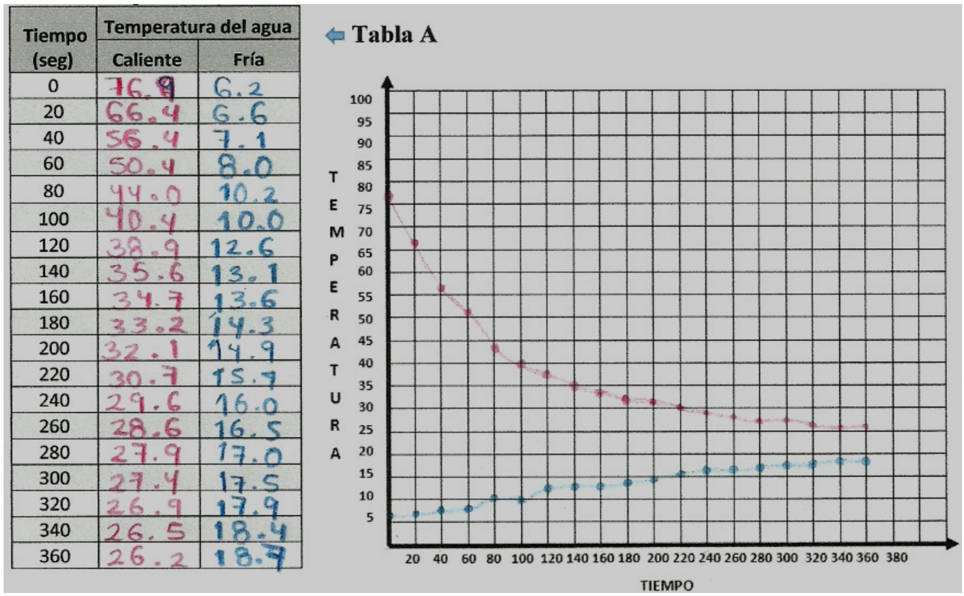


Imagen 17AF-M2-E4 Estabilización de registros de temperatura

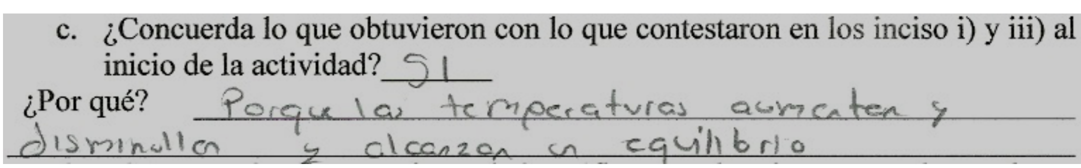
Por ejemplo cuando iniciaban la captura de datos a destiempo, ya sea porque introducían mal el sensor de temperatura o no efectuaban la captura simultáneamente, debían repetir el procedimiento (partir desde el inicio) y lograr una sincronización lo más precisa posible. En total, y por realización, se recopilaron 19 datos para cada tipo de agua a intervalos de 20 segundos, completando 6 minutos para la variable denominada tiempo. Para no perder información se registraron los datos en las Tablas A y B (pasos 6 y 8), y construyeron las gráficas de cada tipo de agua con diferente color; por ejemplo la captura del equipo E3 (ver Extracto 31).



Tiempo (seg)	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0	76.9	6.2
20	66.4	6.6
40	56.4	7.1
60	50.4	8.0
80	44.0	10.2
100	40.4	10.0
120	38.9	12.6
140	35.6	13.1
160	34.7	13.6
180	33.2	14.3
200	32.1	14.9
220	30.7	15.7
240	29.6	16.0
260	28.6	16.5
280	27.9	17.0
300	27.4	17.5
320	26.9	17.9
340	26.5	18.4
360	26.2	18.7

Extracto 31 AF-M2-E3 Captura de datos primer experimento

Aún cuando los cuatro equipos muestran gráficas muy similares en cuanto a comportamiento, ninguno establece en el gráfico alguna marca o señal que indique cuál es la temperatura a la que se pudiera llegar al equilibrio térmico. Todos lograron identificar y establecer las temperaturas iniciales de cada tipo de agua (incisos a y b del paso 7). Para el agua caliente la temperatura inicial reportada osciló entre los 70 y los 80 grados centígrados, mientras que para el agua fría el dato se ubicó entre 6 y 7 grados centígrados. Además, en esta fase los equipos pudieron corroborar en parte, sus conjeturas iniciales (inciso c del paso 7), por lo que sus respuestas fueron complementadas con un poco más de información. Como ejemplo se muestra lo reportado por el equipo E4 (ver Extracto 32)



c. ¿Concuerda lo que obtuvieron con lo que contestaron en los inciso i) y iii) al inicio de la actividad? SI

¿Por qué? Porque las temperaturas aumentan y disminuyen y alcanzan un equilibrio

Extracto 32 AF-M2-E4 Contraste entre conjetura inicial con resultado de la experimentación

Del audio del equipo E3 se logró rescatar la conversación sobre lo que obtuvieron experimentalmente y su conjetura inicial (ver Extracto 33).

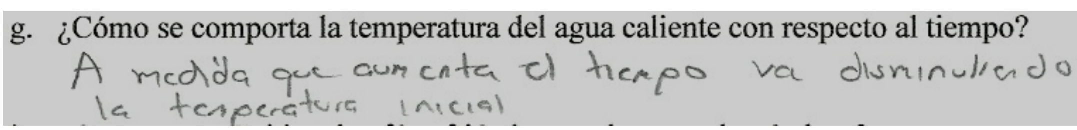
(55:26-56:06)

1E3:	*"pues si con… la neta sí fue igual, porque nuestra idea fue que los puntos se cruzaran… y en la que hicimos no se cruzan así, pero si se van a cruzar…"*
3E3:	*"ponle pues … que aproximadamente se obtuvo el resultado que se esperaba… en teoría pasa lo mismo"*

Extracto 33 AF-M2-E3 Contraste resultado experimental con conjetura

Los cuatro equipos también recurrieron a sus conocimientos previos sobre características de gráficas de funciones, identificando correctamente en los incisos d) y e) del paso 7 que la gráfica tiempo-temperatura del agua caliente es decreciente, mientras que la gráfica tiempo-temperatura del agua fría es creciente, sin embargo ninguno explica el porqué. A partir de estos comportamientos gráficos los equipos E1, E2 y E3 dedujeron que la temperatura de equilibrio entre los dos tipos de agua se encontraría entre los 20 y los 25 grados centígrados, mientras que el equipo E4 si expresa que *"aproximadamente 23°C"*, que era la temperatura ambiente real entre las 7 y 8:30 de la mañana del día de aplicación.

El inciso g) se refería al comportamiento del agua caliente con respecto del agua fría, sólo el E2 argumenta un poco, quizás tomando como referencia el comportamiento de la gráfica, pero no hace comparación alguna entre valores concretos (ver Extracto 34).


g. ¿Cómo se comporta la temperatura del agua caliente con respecto al tiempo?
A medida que aumenta el tiempo va disminuyendo la temperatura inicial

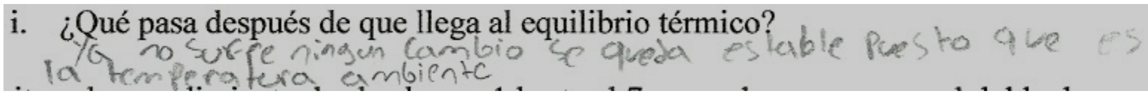
Extracto 34 AF-M2-E2 Comportamiento de la temperatura con base en la gráfica

Para el inciso h) del paso 7 se vuelven a notar coincidencias en la respuesta de los equipos, todos ellos concluyen que el agua caliente se enfría más rápido que lo que se calienta el agua fría, para ello probablemente aluden al comportamiento de las gráficas (lo visual) y a la información tabular que obtuvieron del experimento. Por ejemplo del E3 tenemos el siguiente extracto (ver Extracto 35).

	(57:49-58:16)
4E3:	*"las dos cosas al mismo tiempo"* [El cual es corregido por su compañero de equipo]
3E3:	*"el agua caliente cayó muy rápido… hubo una parte en la que iba en picada…"*

Extracto 35 AF-M2-E3 ¿Qué es más rápido?

En el inciso i) se les pide de manera indirecta hacer una predicción sobre lo que ocurre con las temperaturas después de llegar al equilibrio térmico; a lo que los equipos E1, E3 y E4 contestan que se aproxima a la temperatura ambiente, sin especificar qué valor podría tener ésta, por ejemplo el siguiente extracto (ver Extracto 36).



i. ¿Qué pasa después de que llega al equilibrio térmico?
Ya no sufre ningun cambio se queda estable Puesto que es la temperatura ambiente

Extracto 36 AF-M2-E2 Comportamiento después del equilibrio

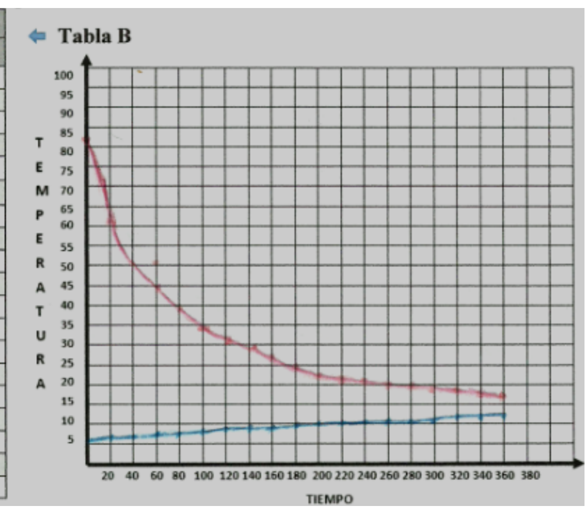
El paso 8 les permite hacer una reproducción del mismo experimento con la variante de que deben duplicar la cantidad de agua fría. Los cuatro equipos lo realizan (y repiten) con más fluidez, empleando la experiencia adquirida de la fase anterior (ver Imagen 18 e Imagen 19).

Imagen 18AF-M2-E1 Duplicando la cantidad de agua fría

Imagen 19AF-M2-E1 Captura simultánea

Los resultados del equipo El, que logró establecer la captura más precisa en este experimento se muestran en el Extracto 37.

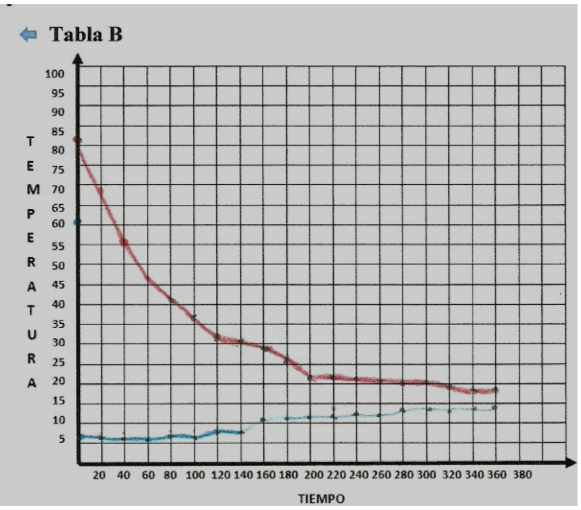
Tiempo (seg)	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0	83.6	6.2
20	62.4	6.3
40	51.2	6.6
60	44.2	6.8
80	39.0	7.0
100	34.9	7.4
120	31.7	7.9
140	29.2	8.4
160	27.1	8.9
180	25.3	9.4
200	23.9	9.8
220	22.6	10.1
240	21.7	10.6
260	20.8	11.1
280	20.1	11.6
300	19.6	11.9
320	19.1	12.2
340	18.7	12.6
360	18.4	12.9



Extracto 37 AF-M2-E1 Experimento con el doble de agua fría

Mientras que los resultados del equipo E2 se muestran en el Extracto 38.

Tiempo (seg)	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0	83.1	6.1
20	69.7	6.7
40	55.6	6.7
60	46.7	6.7
80	41.2	7.2
100	36.5	7.7
120	32.6	8.2
140	31.1	8.8
160	28.4	10.1
180	25.7	10.4
200	22.9	11.2
220	23.3	11.9
240	22.9	12.4
260	21.9	12.7
280	20.8	13.1
300	20.3	13.4
320	19.9	13.6
340	19.6	13.9
360	19.4	14.2



Extracto 38 AF-M2-E2 Experimento con el doble de agua fría

Por el diseño de la situación, las comparaciones se pudieron efectuar sobre una misma gráfica y sobre varias gráficas del mismo tipo; las primeras con el objetivo de predecir la temperatura del equilibrio térmico en el primer experimento; y las segundas sobre comparaciones en reproducciones sucesivas del mismo, en donde se incrementó la cantidad de agua fría. El primer caso, inciso a) del paso 8, cuestiona sobre el cambio de temperatura que se presentó en los dos experimentos en un intervalo de tiempo determinado (60-80 segundos). Los cuatro equipos emplearon la estrategia de comparación entre los datos numéricos (calcularon las diferencias con los datos de la tabla) para cuantificar el cambio, es decir, determinaron la variación de temperatura en dicho intervalo, un ejemplo de ello lo podemos observar en el extracto siguiente del E3 (ver Extracto 39).

Tiempo (seg)	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0	76.9	6.2
20	66.4	6.6
40	56.4	7.1
60	50.4	8.0
80	44.0	10.2
100	40.4	10.0

Cuantificación de dos estados (E_2-E_1)

	Caliente	Fria
Experimento 1	Bajo 6.4°C	Subio 2.2°C
Experiment 2	Bajo 10.2°C	Subio 0.6°C

Extracto 39 AF-M2-E3 Cuantificación del cambio de temperatura

Además los equipos concluyen que al duplicar la cantidad de agua fría el agua caliente se enfría más rápido, por lo que dan indicios de manejar un segundo orden de variación (ver Extracto 40).

b. ¿Qué es lo que notas cuando el agua fría es el doble del agua caliente?

La caliente se enfrio más rapido y la fria se tarda más en calentarse.

Extracto 40 AF-M2-E3 Cambio del cambio en la temperatura

Para llevar a cabo el M3 los equipos recuperaron de la calculadora el registro de los dos experimentos (pasos 6 y 8), pero únicamente se trabajó con las temperaturas del agua caliente. Los archivos, nombrados como captura1 y captura2, se transfirieron por el profesor desde la calculadora gráfica a un archivo en Excel nombrado como AguaFria.xlsx. Este archivo se copió a una memoria USB que después fue prestada a cada equipo para que hicieran una copia en su computadora. Conforme terminaban el paso 8 cada equipo copió sus datos del archivo de Excel a la hoja de cálculo del archivo AguaFria.ggb (Geogebra), incisos a del paso 9 (ver Imagen 20).

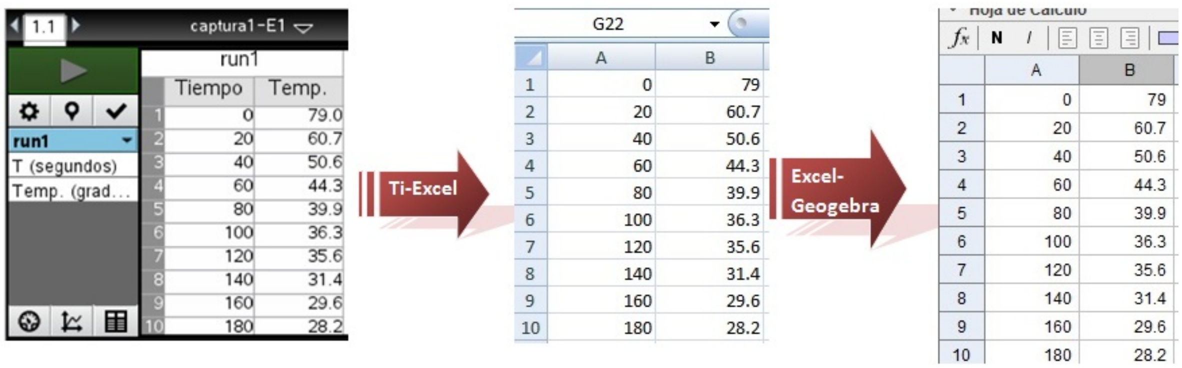


Imagen 20AF-M3-E1 Transferencia de datos TI Nspire-Excel-Geogebra

Los equipos seleccionaron los datos de la hoja de cálculo de Geogebra (inciso b del paso 9) y generaron los puntos en la vista gráfica, obteniendo la distribución puntual del agua caliente para los dos experimentos (ver Imagen 21, Imagen 22 e Imagen 23)

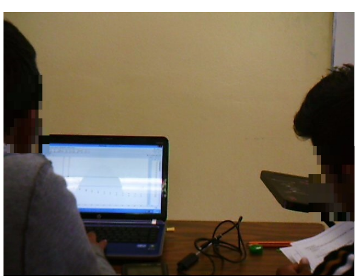


Imagen 21AF-M3-E1 Transferencia de datos a Geogebra

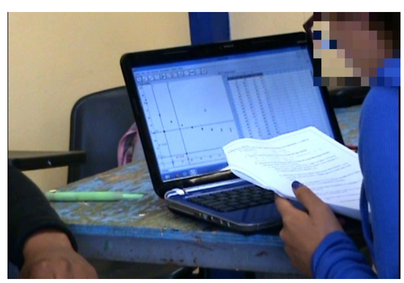


Imagen 22AF-M3-E2 Generación de puntos (Hoja de cálculo a vista gráfica)

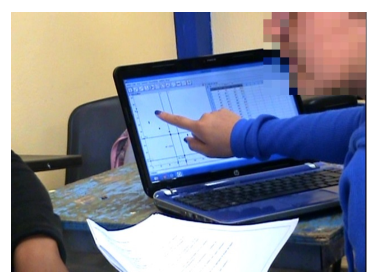


Imagen 23AF-M3-E2 Comparación de datos

Aplicando un acercamiento (*Zoom*) en la ventana gráfica se puede distinguir la primera comparación solicitada en el inciso d; recordando que el primer experimento involucró la misma cantidad de agua fría y agua caliente en color rojo; y en el segundo la proporción fue 2:1 de agua fría respecto del agua caliente en color negro (ver Imagen 24).

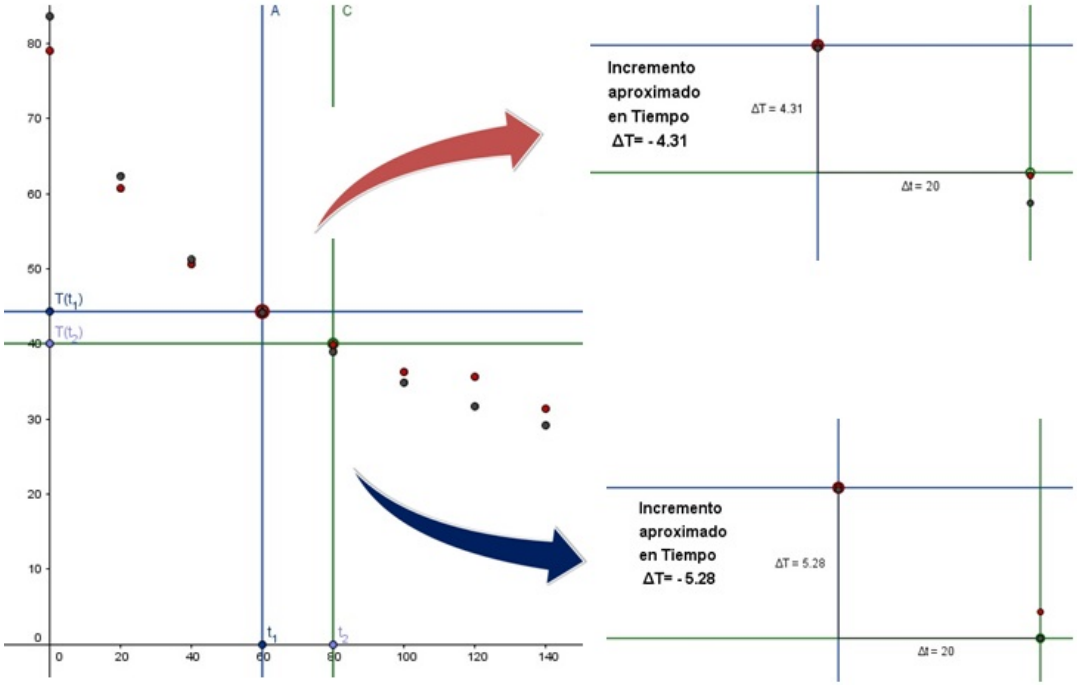


Imagen 24Aproximación del incremento en la temperatura mediante rectas paralelas (dos casos)

Aún cuando sólo se les solicitó la estimación del cambio en el intervalo 60-80 segundos, algunos equipos aprovecharon el dinamismo de la actividad para practicar con las rectas paralelas, e hicieron la comparación entre otros valores y con intervalos diferentes. Para referirse a la medición de los cambios se utilizó la notación incremental trabajada en el experimento Área Extrema, pero haciendo énfasis en que este cambio es negativo (decremento de temperatura). Lo trabajado en el inciso a) del paso 8 y d) del paso 9 hizo referencia a un comportamiento hasta cierto punto local, por referirse a un intervalo específico en el que sólo hay registro de dos puntos. Sin embargo la captura se puede configurar para que se registren datos suficientes como para que la representación gráfica parezca una curva continua, tal y como lo registra la calculadora en la Vista Gráficos (ver Imagen 25)

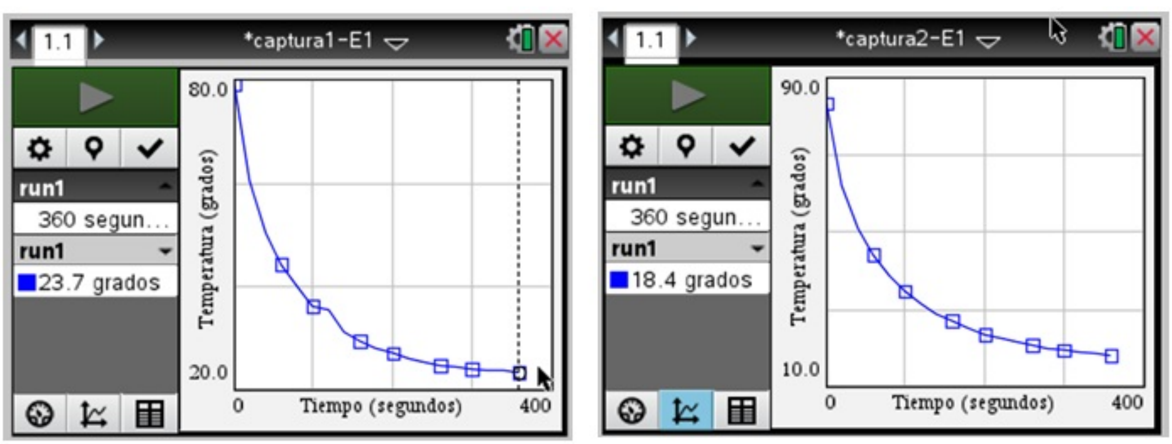


Imagen 25AF-M3-E1 Vista Gráficos de captura1 y captura2

Para el inciso e) los equipos E1, E3 y E4 contestan que el agua caliente se enfría más rápido, mostrando evidencia de que conocen o tienen la noción de un primer orden de variación (ver Extracto 41).

e. ¿Qué es lo que notas cuando el agua fría es el doble del agua caliente? (expliquen lo más detallado posible) temperatura del agua caliente que baja más rapido la y se llega al equilibrio más tarde

Extracto 41 AF-M3-E4 Noción de un primer orden de variación mediante el gráfico

Por su parte el E2 se refiere al equilibrio térmico más que a un comportamiento de una temperatura particular (ver Extracto 42).

e. ¿Qué es lo que notas cuando el agua fría es el doble del agua caliente? (expliquen lo más detallado posible) el equilibrio térmico es lento

Extracto 42 AF-M3-E2 Efecto en el equilibrio térmico al incrementar la cantidad de agua fría

Con las reproducciones anteriores del experimento se pretendió que en el inciso f) los equipos predijeran el comportamiento gráfico si se agregaba el triple de agua fría y se conservaba la cantidad de agua caliente. El equipo E1 respondió haciendo referencia al comportamiento gráfico, utilizando frases que involucraron rapidez de descenso de temperatura o incremento de la misma, mostrando nuevamente la noción de un primer orden de variación, es decir, de cómo cambia el cambio (ver Extracto 43).

f. ¿Cómo será la gráfica en ese mismo intervalo si se agregara el triple de agua fría? Va a desender, de temperatura aun más rapido de el agua caliente y se tardava más en subir la de el agua fría.

Extracto 43 AF-M3-E1 Noción del cómo cambia el cambio

Al respecto el E3 sólo contesta que la disminución será más rápida, aludiendo al comportamiento gráfico (ver Extracto 44).

f. ¿Cómo será la gráfica en ese mismo intervalo si se agregara el triple de agua fría? Va a disminuir más rapido con el agua fria.

Extracto 44 AF-M3-E3 Predicción de comportamiento gráfico

Finalmente, la cuantificación de los cambios en los incisos a (pregunta 8) y d (pregunta 9) les permitió aproximar el valor del cambio. Por ejemplo el E1 cuantifica un cambio de 0.7 grados entre el experimento inicial y el experimento en que se duplica la cantidad de agua fría, con ello proporcionan un intervalo para el posible valor (ver Extracto 45).

i. ¿Aproximadamente cuál sería el valor del cambio?

Como entre 6.0 y 6.5.

Extracto 45 AF-M3-E1 Predicción del cambio al triplicar la cantidad de agua fría

El análisis de las producciones de los equipos en los tres momentos, permitió identificar argumentaciones de los estudiantes para la situación AF, sintetizadas en el Cuadro 2.

Construcciones	Situación: Agua Fría
Significados	La variación es entendida como una cuantificación de cambios de temperatura respecto del tiempo.
Procedimientos	Identificar los elementos que pueden variar (temperatura agua caliente, temperatura agua fría y tiempo). Efectuar la recopilación empleando sensores de temperatura y calculadoras gráficas. Completar la tabla de valores para cada caso. Construir las gráficas de las tablas A y B correpondientes a los datos recopilados. Relacionar los cambios entre las variables con las gráficas de temperatura del agua caliente y del agua fría (Tiempo-Temperatura). Identificar comportamientos gráficos. Predecir la temperatura de equilibrio térmico. Comparar datos de una gráfica y entre varias gráficas, contemplando los cambios entre las variables temperatura-tiempo para los dos tipos de agua. Comparar las gráficas derivadas de las tablas A y B y darse cuenta de que aunque ambas tienen un comportamiento similar (no lineal, ni parabólico) no son iguales (decaimiento exponencial para agua caliente). Comparar la distribución de puntos para dos experimentos particulares usando el software. Predecir el valor de la temperatura para un caso particular empleando la comparación (determinar la variación).
Proceso-objeto	Asociación de un gráfico (distribución de puntos) con el comportamiento de la temperatura respecto del tiempo. (Equilibrio como gráfica: Curva-Temperatura/Tiempo).
Argumentación	Al incrementar la cantidad de agua fría varía la temperatura de enfriamiento del agua caliente, conservando el comportamiento gráfico. El equilibrio térmico se logra cuando las gráficas de temperatura-tiempo para el agua caliente y el agua fría coinciden (tienden al mismo valor). La variación entre la temperatura y el tiempo no es constante. La comparación de dos estados (entre gráficas) permite predecir la temperatura a cierto tiempo (bajo ciertas condiciones).

Cuadro 2. Argumentación para la situación: Agua Fría

La identificación de los elementos constitutivos del PyLV se realizó utilizando lo reportado en algunas evidencias de los equipos. Nuevamente se observó el uso recurrente de las estrategias de Comparación y Predicción, ya que primero analizan las diferencias de temperatura en una gráfica y después en relación con otras, es decir, cuando se duplica la cantidad de agua fría. En el experimento emerge el estudio de la variación cuando los equipos usan códigos variacionales, los cuales están presentes en expresiones como *"se va a llegar al equilibrio", "la temperatura baja sube y la alta baja… y se mantienen estables", pues va a ir disminuyendo pero… va a ser gradualmente… como se dice... en picada", "el agua caliente cayó muy rápido… hubo una parte en la que iba en picada…"*. Además con gestos o ademanes con su cuerpo como por ejemplo:

- Cuando el estudiante mueve la mano derecha de forma horizontal, indicando estabilidad.
- Cuando mueve ambas manos de arriba hacia abajo hasta nivelarlas, es decir eventualmente las ubica a la misma altura.
- Al mover la mano derecha hacia la izquierda y viceversa.
- Cuando mueve las dos manos hacia el frente, proyectando que eventualmente las temperaturas llegaran a ser iguales.

La articulación de estos códigos se refleja en el argumento variacional de respuesta, que consiste en que: a mayor cantidad de agua fría más rápido se enfriará el agua caliente, y el tiempo de equilibrio térmico se reduce. A pesar de que las proporciones de agua sean diferentes, el comportamiento gráfico global será muy similar. A continuación se muestra el uso de la gráfica: *Análisis del comportamiento local y tendencial* en sus funcionamientos y sus formas, que deja entre ver las construcciones brindadas, estrategias y argumentos variaconales que surgieron en los estudiantes (ver Tabla 7).

<table>
<tr><th colspan="5">SITUACIÓN: AGUA FRÍA</th></tr>
<tr><td colspan="5">Uso de la gráfica (Uso_{AF}): Análisis del comportamiento local y tendencial
Funcionamiento de la gráfica (f_{AF}): Anticipar el comportamiento tendencial estable Forma del uso (F_{AF}): Identificar y analizar cambios locales</td></tr>
<tr><th colspan="3">CONSTRUCCIONES</th><th>ESTRATEGIAS VARIACIONALES</th><th>ARGUMENTOS VARIACIONALES</th></tr>
<tr><td>Variación</td><td>SIGNIFICADOS</td><td>La varición es entendida como una cuantificación de cambios de temperatura respecto del tiempo.</td><td rowspan="5">• Comparación
○ Extracto 32 (numérica)
○ Extracto 33 (gráfica)
○ Extracto 34 (gráfica)
○ Extracto 35 (numérica-gráfica)
○ Extracto 36 (gráfica)
○ Extracto 39 (numérica)
Extracto 40
Extracto 41

• Predicción
○ Extracto 36 (gráfica)
○ Extracto 40 (numérica)
○ Extracto 42 (numérica)
○ Extracto 43
○ Extracto 45</td><td rowspan="5">• Al incrementar la cantidad de agua fría varía la temperatura de enfriamiento del agua caliente, conservando comportamiento gráfico.
• El equilibrio térmico se logra cuando la gráfica temperatura-tiempo para el agua caliente y el agua fría coinciden (tienden al mismo valor).
• La variación entre la temperatura y el tiempo no es constante, es más pequeña cuando se acerca a la temperatura ambiente (equilibrio térmico).
• La comparación de dos estados (entre gráficas) permite predecir la temperatura a cierto tiempo (bajo ciertas condiciones).</td></tr>
<tr><td>Múltiples Realizaciones</td><td rowspan="3">PROCEDIMIENTOS</td><td>Obtener gráficas por medio de:
• Captura de datos con sensores y calculadoras.
• Distribución de puntos.
• Simulación con software.</td></tr>
<tr><td>Identificación de Patrones</td><td>Relacionar la tabulación y la gráfica con los cambios entre las variables, notando la dependencia de la temperatura respecto del tiempo (comportamiento gráfico similar).

Predecir el equilibrio térmico comparando temperaturas con diferentes proporciones de agua fría y agua caliente.</td></tr>
<tr><td>Realización de Ajustes</td><td>Comparación de temperaturas en intervalos iguales.

Reproducción de experimento hasta obtener una curva con comportamiento decreciente (creciente).

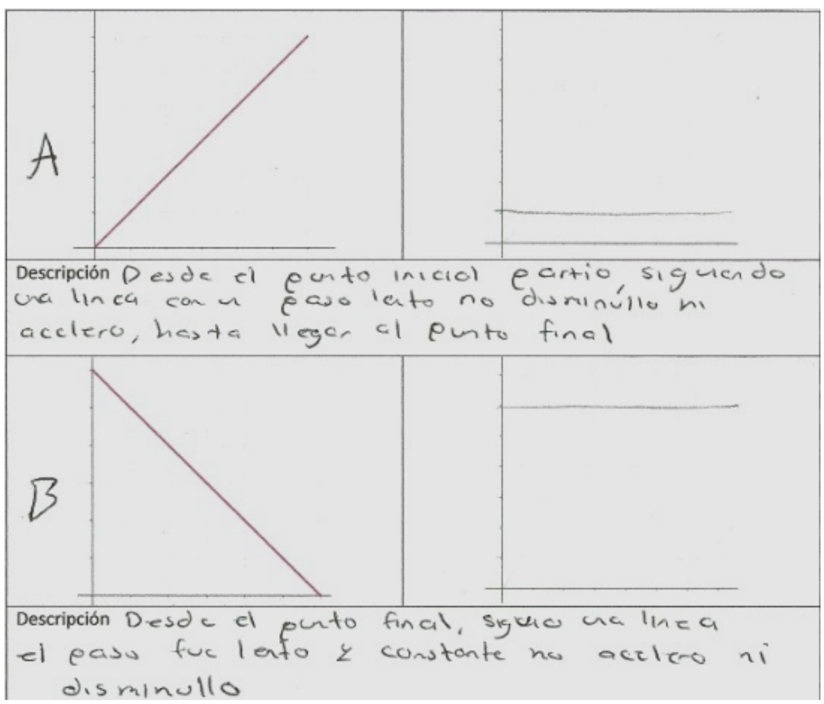
Asociar comportamientos a la gráfica temperatura-tiempo.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo del Razonamiento</td><td>PROCESOS-OBJETOS</td><td>Asociación de un gráfico (distribución de puntos) con el comportamiento de la temperatura respecto del tiempo. (Equilibrio como gráfica: Curva-Temperatura/Tiempo).</td></tr>
</table>

Tabla 7 Análisis de Agua Fría

IV.3.3. Resultados de Situación: Representando el Movimiento

Para poder llevar a cabo la tercera situación experimental, los equipos desarrollaron primeramente una serie de actividades previas. Éstas consistieron en la reproducción del movimiento de un móvil respecto del tiempo empleando sensores de movimiento y calculadoras gráficas. Para ello contaban con la representación gráfica en una columna (ver Anexo 6) y además de reproducir cada movimiento, se les pedía describir y esbozar la gráfica de la velocidad requerida. Parte del objetivo fue que los equipos se familiarizaran con el uso del sensor y la forma en que se capturan los datos; y de paso que empezaran a relacionar la velocidad y la rapidez en un movimiento particular. Para la reproducción de los diferentes movimientos los equipos tuvieron que hacer múltiples realizaciones hasta lograr una buena aproximación, con lo que se empezaron a dar cuenta del tipo de desplazamientos que debían hacer y con qué velocidad. En total se presentaron seis tipos de movimiento que lograron reproducir con éxito todos y cada uno de los equipos, y de los cuales se presenta únicamente lo más sobresaliente.

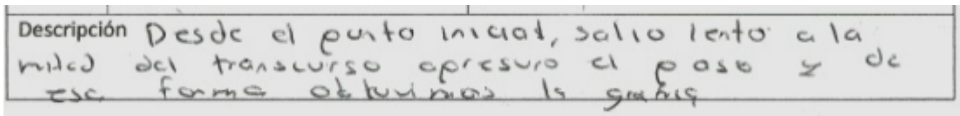
Los equipos E2, E3 y E4 lograron hacer un esbozo adecuado sobre el comportamiento de la velocidad para los primeros dos movimientos, asignándole un valor de altura constante y haciendo una descripción de cómo lo reprodujeron, por ejemplo ver el Extracto 46. En la primera actividad consideran como punto de partida la ubicación desde donde realizan el movimiento y la ubicación del sensor de movimiento, mientras que en el segundo toman como referencia el punto final, es decir, hasta donde caminaron en el primero.



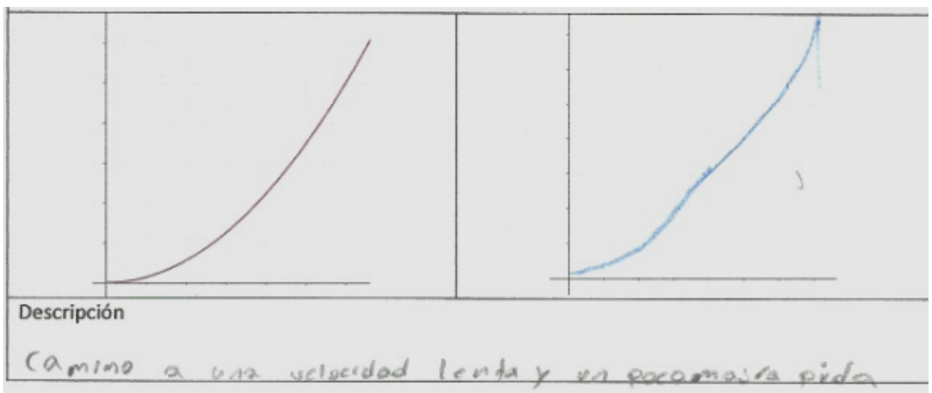
Extracto 46 RM-M1-E2 Descripción movimiento con velocidad constante

Cabe mencionar que el sensor de movimiento fue configurado para que la captura tuviera una duración de nueve segundos, y la distancia máxima que podían recorrer los estudiantes fue de cinco metros, considerando las dimensiones del salón de clases. Por estas razones es que en algunas respuestas de los equipos pueden, aparecer valores concretos en las graduaciones.

Las actividades tercera y cuarta fueron muy similares a las dos primeras, solamente que los gráficos no eran rectas, sino curvas (creciente y decreciente), y aunque los esbozos no fueron muy precisos, en la descripción se deja entrever lo que realmente hicieron, por ejemplo los extractos de los equipos E2 y E4 (ver Extracto 47 y Extracto 48).

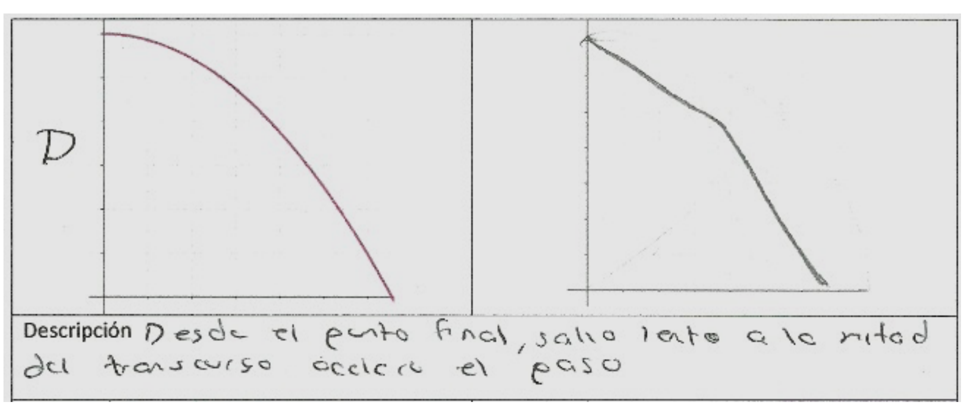


Extracto 47 RM-M1-E2 Movimiento con velocidad variable



Extracto 48 RM-M1-E4 Esbozo aproximado de velocidad variable

Similarmente para la cuarta gráfica se presenta el extracto del E4 (ver Extracto 49), y por falta de legibilidad en la digitalización se escribe textualmente la descripción del E1 (ver Extracto 50).

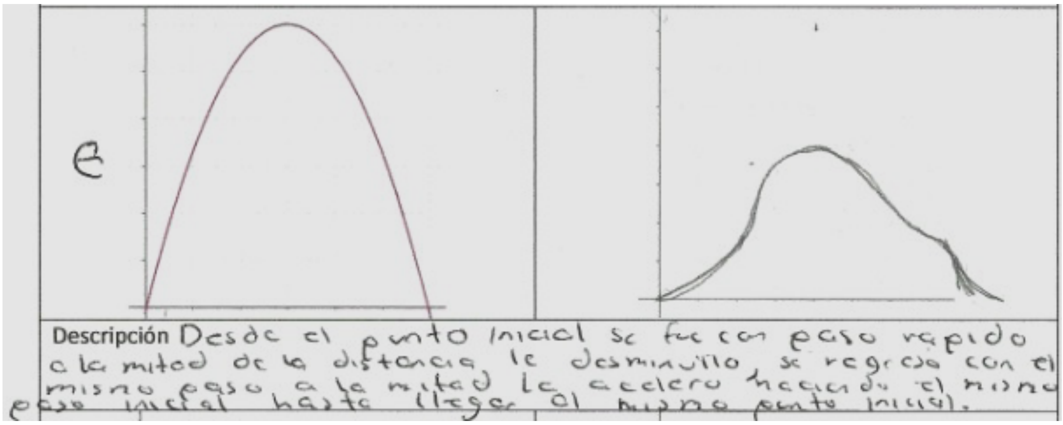


Extracto 49 RM-M1-E2 Esbozo aproximado y descripción (velocidad variable)

P:	El equipo E1 reporta *"comienza lento y con el paso del tiempo fue aumentando la velocidad"*.

Extracto 50 RM-M1-E1 Descripción textual del E1 en la cuarta gráfica

La gráfica cinco representaba un movimiento tipo parabólico, este fue descrito con más detalle por el E2 (ver Extracto 51)



Extracto 51 RM-M1-E2 Descripción del quinto tipo de movimiento

Este mismo equipo se da cuenta que para reproducir la curvatura deben modificar su velocidad (disminuirla), para ello recurren a gestos y ademanes (ver Extracto 52)

	(09:42-09:48)
4E2:	*"…recio, fast, recio…"* [Mueve la mano izquierda hacia su persona, indicando que el movimiento sea más rápido (ver Imagen 26 e Imagen 27)]
1E3 y 4E2:	*"…yá… más quedito"*

Extracto 52 RM-M1-E2 Códigos variacionales

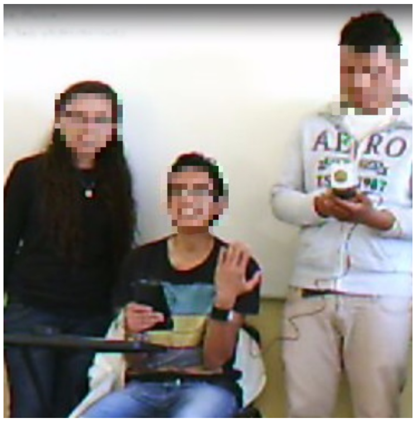


Imagen 26RM-M1-E2 Movimiento de mano para indicar acercamiento

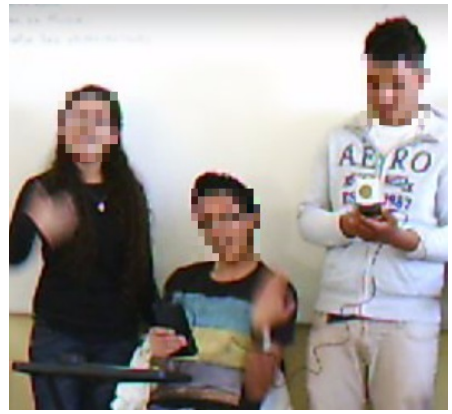
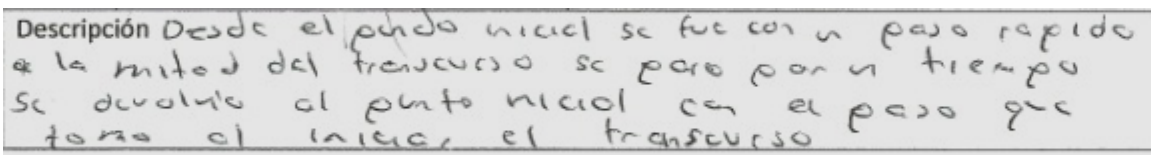


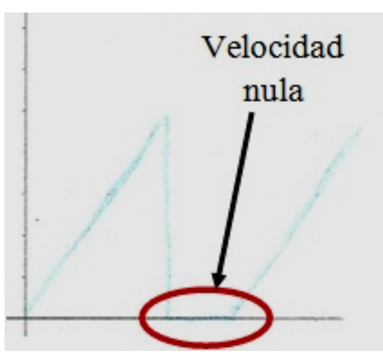
Imagen 27RM-M1-E2 Movimiento rápido de manos para indicar mayor velocidad

Para la última gráfica los cuatro equipos hacen una descripción muy cercana de la velocidad en cada trayecto (por ejemplo ver Extracto 53), sin embargo, no lograron construir un esbozo preciso de la gráfica; quizás confundiendo que aunque tenían que caminar más rápido para reproducir la primera parte del mismo, la velocidad seguía siendo constante.

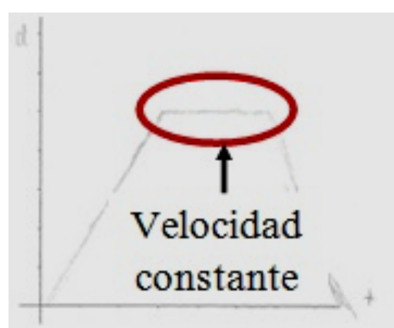

Descripción Desde el punto inicial se fue con un paso rapido a la mitad del transcurso se paro por un tiempo se devolvio al punto inicial con el paso que tomo al inicio el transcurso

Extracto 53 RM-M1-E2 Descripción sexta gráfica

Todos identifican que en la segunda parte del trayecto se deben detener por un lapso de tiempo, pero sólo el E3 esboza correctamente el gráfico de esa parte (ver Extracto 54) y el E1 confunde velocidad con distancia recorrida (ver Extracto 55).



Extracto 54 RM-M1-E3 Reposo en un lapso de tiempo



Extracto 55 RM-M1-E1 Confusión entre velocidad y distancia

Como parte de las discusiones en esta actividad, tenemos lo que se registró del E3 (ver Extracto 56)

	(00:36-00:49)
3E3:	*"…vienes un poquillo más rápido eee…"*
1E3:	*"…¡¡rápido!!…regrésate…quieto "* [le cuentan algunos segundos en voz alta y después le piden que continúe, y vuelven a reproducir el movimiento para ajustar al tiempo de captura]

Extracto 56 RM-M1-E3 Múltiple realización de la actividad seis

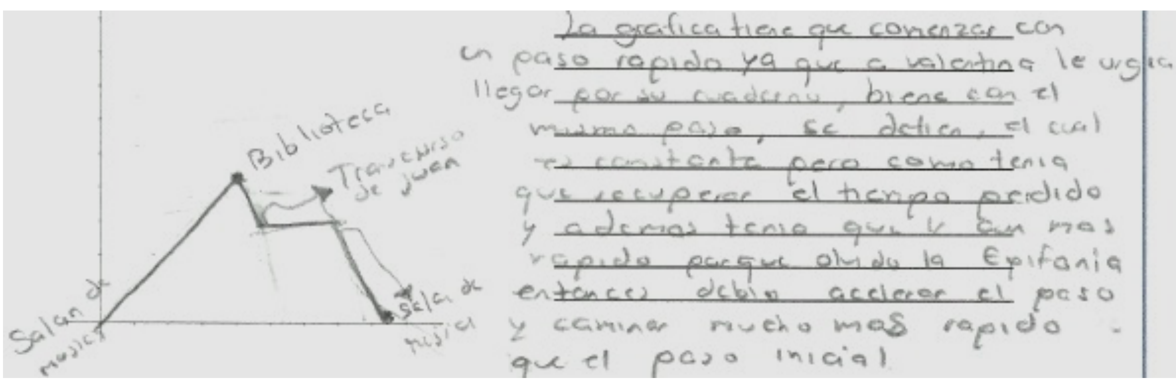
De otro video se logra rescatar el siguiente extracto para el E1 (ver Extracto 57).

	(22:12-22:29)
3E1:	*"…avanzamos rápido y luego despacio y luego me regreso a la misma velocidad"* [insiste con sus compañeros]
	"…avanzo a una velocidad, hago una pausa y me vengo con la misma velocidad"

Extracto 57 RM-M1-E1 Descripción de estrategia para reproducir el movimiento

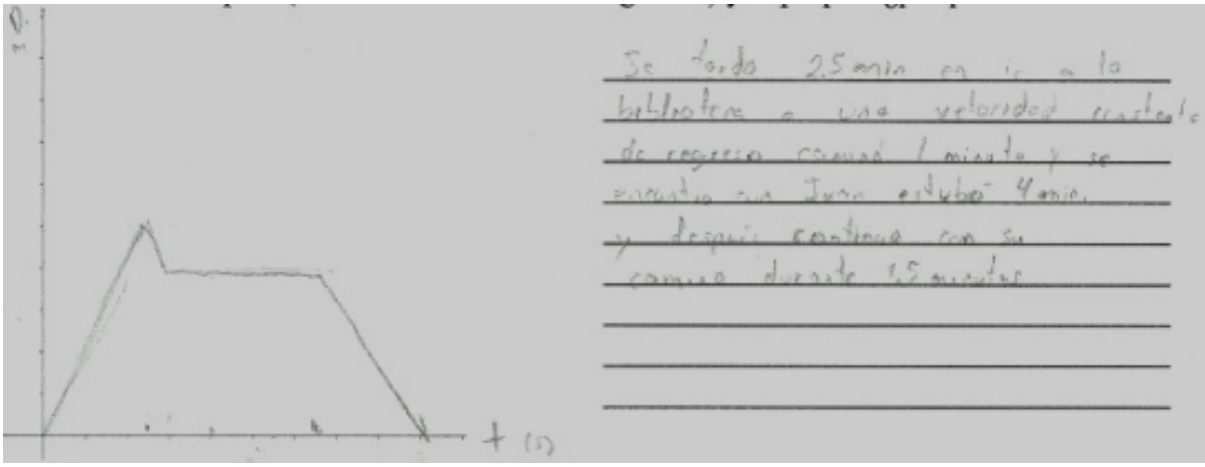
Ninguno de ellos logró relacionar la primera parte del trayecto descrito en la sexta gráfica con la primera actividad, en cuanto a la velocidad se refiere, a pesar de que contaban con una cuadrícula de fondo como referencia.

Para el experimento Representado el Movimiento tres de los equipos lograron hacer un esbozo muy próximo a las condiciones que enfrentó Valentina (por ejemplo ver Extracto 58).



Extracto 58 RM-M1-E2 Esbozo y descripción gráfica del movimiento de Valentina

Los equipos consideran, para realizar el esbozo, al tiempo en el eje horizontal y la posición en el eje vertical; sólo el E1 toma en cuenta el tiempo que tardo Valentina en su recorrido (9 minutos) pero tampoco establece graduación alguna en los ejes (ver Extracto 59).



Extracto 59 RM-M1-E1 Descripción tomando en cuenta los minutos del recorrido

Además para la descripción del esbozo que hicieron, consensaron según el comportamiento gráfico (ver Extracto 60).

(15:43-16:07)

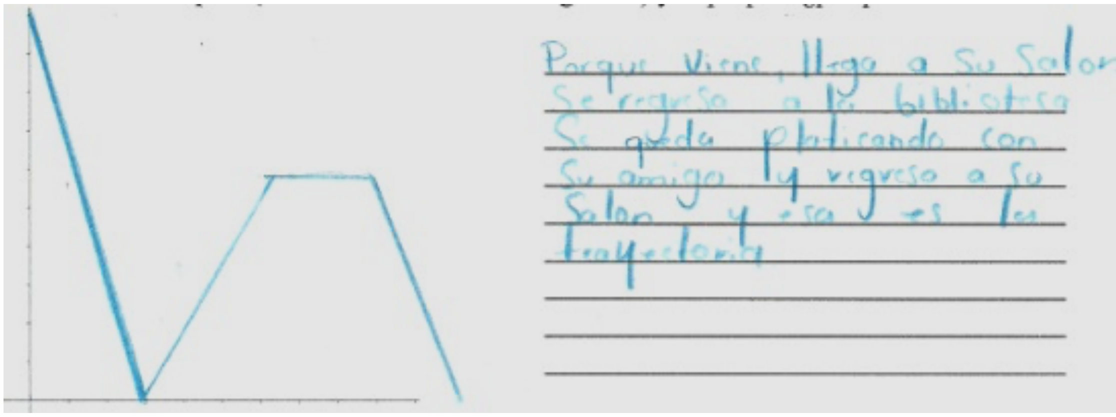
1E1: *"…a una velocidad constante.. sí ¿ no?."*

2E1: *"noo… entonces no va a quedar así, mira…"* [explica la situación nuevamente], *"…sería subirá "* [indicando con el dedo el lugar hasta donde llega la gráfica (ver Imagen 28)], "y *regresaría así"* [describiendo un movimiento de subida y de bajada]

Extracto 60 RM-M1-E1 Descripción del esbozo

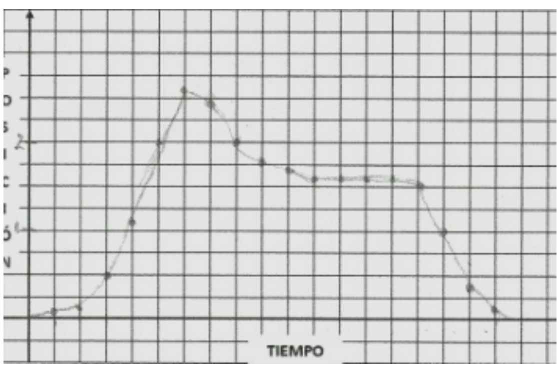
Imagen 28RM-M1-E1 Comportamiento gráfico en el esbozo

Para el equipo E3 el trayecto inicia desde que *"viene llegando",* refiriéndose la llegada de Valentina a su salón, no establecen tiempos ni distancias específicas, pero advierten que el tiempo que se entretuvo con su amado Juan ocurrió en la Biblioteca, por lo que el salón de música (punto de partida real) estaba sobre el eje horizontal (ver Extracto 61). Este último equipo corresponde a otro de los casos que se pueden presentar en esta situación, tal y como lo reporta Torres (2004).

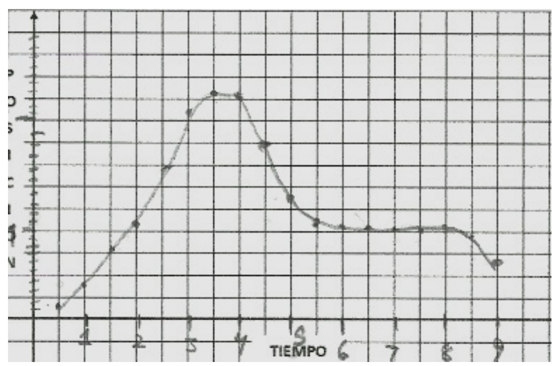


Extracto 61 RM-M1-E3 Descripción errónea en el inicio del movimiento

La fase experimental (M2) comienza cuando los equipos miden la distancia de 5 metros en el salón de clase, ubicando una marca en el suelo para cada lugar (salón de música y biblioteca), y con la misma configuración en el sensor (9 segundos de captura). Con la simulación del movimiento empleando la tecnología se dieron cuenta que su conjetura inicial era muy parecida, registraron sus datos en la Tabla A y construyeron la gráfica correspondiente. Para obtener una reproducción del movimiento lo mejor aproximada posible, los equipos tuvieron que realizar la simulación varias veces (múltiples realizaciones), hicieron ajusten en cuanto al tiempo que se movían tanto de ida como de regreso, (ver Extracto 62 y Extracto 63).



Extracto 62 RM-M2-E1 Resultados de simulación, sin graduación en eje horizontal



Extracto 63 RM-M2-E2 Resultado de simulación, graduación en ejes

El E4 al reproducir el movimiento observó que tiene que hacer ajustes en la simulación, pues no logran completar el trayecto en el tiempo establecido y el integrante 4E4 señala esto haciendo algunos ademanes con las manos, moviéndolas de arriba hacia abajo; indicando que debe moverse un poco más rápido (ver Extracto 64 e Imagen 29)

(02:26-02:35)

4E4: *"...ponlo donde es…"* [Refiriéndose a que el sensor de movimiento debe estar a cierta altura para hacer una mejor captura, en este caso a la altura de la espalda de quien se mueve, el 2E4]

Extracto 64 RM-M2-E4 Ajustando el movimiento en la simulación

Imagen 29RM-M2-E4 Movimiento de manos indicando mayor velocidad

En el mismo video se logra escuchar la indicación de integrantes del E2 (ver Extracto 65)

(07:00-07:06)

2E2: *"...más al pasito"* [Tres integrantes comentan que va muy rápido]

1E2: *"...al paso...al paso… al paso"* [haciendo referencia a una velocidad constante]

Extracto 65 RM-M2-E2 Empleo de lenguaje coloquial para indicar velocidad constante

Continúan los intentos del mismo equipo, consensan y proporciona indicaciones a 5E2 (ver Extracto 66)

(09:40-09:50)

1E2: *"...es que aquí es más rápido"* [Después de intentar la simulación varias veces]

4E2: *"...los segundos son lo que importa… y cómo viene"* [notando las condiciones en el movimiento, tiempo-distancia]

Extracto 66 RM-M2-E2 Identificación de condiciones y ajustes en el movimiento

Reconsideran las condiciones e indican a su compañero cómo se debe mover (ver Extracto 67).

(11:24-11:52)

1E2: *"...mira tienes que venir despacito… y en donde te paras es la mitad…"*

4E2: *"... que pise la raya pero que se venga recio y aquí ya más quedito"* [Reproducción errónea pues parten del punto de llegada (biblioteca), así que vuelven a hacer ajustes y reproducen el movimiento]

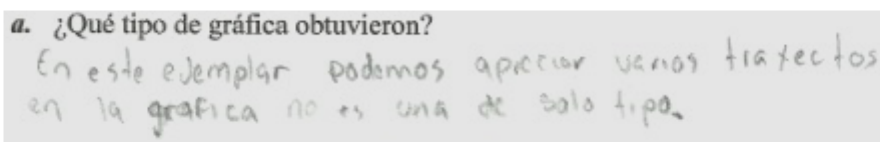
Extracto 67 RM-M2-E2 Indicación de velocidad y rapidez de acuerdo a las distancias

Por su parte el E3, después de varios intentos, realiza una simulación del movimiento adecuadamente; con las manos indican que el movimiento de su compañero sea más lento en cierto momento (ver Imagen 30 e Imagen 31).

Imagen 30RM-M2-E3 Indicación con las manos de movimiento más lento

Imagen 31RM-M2-E3 Mayor velocidad en el regreso para completar el recorrido

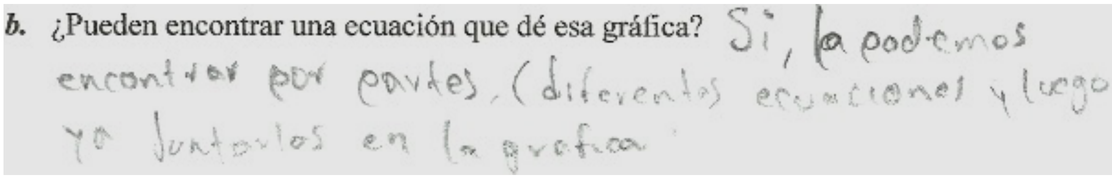
El análisis más a detalle (preguntas paso 6) que hicieron los equipos comienza cuando se les cuestiona sobre el tipo de gráfica que obtuvieron. A lo que los equipos E1 y E3 contestaron haciendo referencia a *"una gráfica por partes"*, pero el primero complementa con *"porque no es constante con el tiempo"*, coincidiendo con el comentario del E2 que describe por secciones empleando la rapidez. Por su parte el E4 destaca lo siguiente (ver Extracto 68):


a. ¿Qué tipo de gráfica obtuvieron?

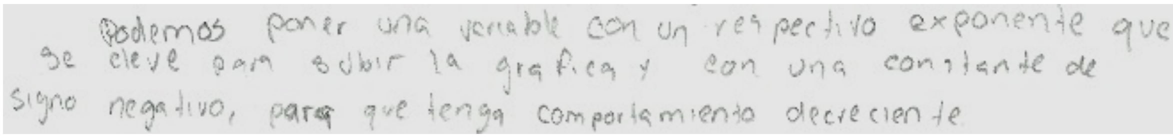
En este ejemplar podemos apreciar varios trayectos en la grafica no es una de solo tipo.

Extracto 68 RM-M2-E4 Diferenciación con gráficas de una sola pieza

Al cuestionarlos sobre una posible ecuación para dicha gráfica (inciso b), las respuestas fueron diversas e interesantes desde el equipo que afirmó que no (ver Extracto 69) pasando por los que afirman rotundamente que sí, pero sin explicar cómo (el E3); hasta los que explican cómo lo harían al poner en juego comportamientos derivados de modificar parámetros (ver Extracto 70).


b. **¿Pueden encontrar una ecuación que dé esa gráfica?** Si, la podemos encontrar por partes, (diferentes ecuaciones y luego ya juntarlos en la grafica

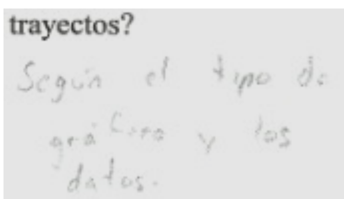
Extracto 69 RM-M2-E2 Propuesta de construcción de ecuación


Podemos poner una verable con un respectivo exponente que se eleve para subir la grafica y con una constante de signo negativo, para que tenga comportamiento decreciente

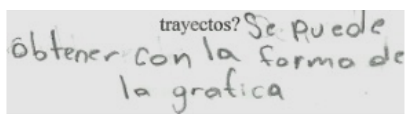
Extracto 70 RM-M2-E4 Relacionando parámetros y comportamientos gráficos

En el inciso c) se les cuestiona lo mismo pero considerando sólo un trayecto del recorrido. Todos los equipos responden describiendo el primer trayecto como una recta, recta creciente para el E4, pero ninguno trata de establecer alguna justificación adicional o una expresión algebraica y por tanto, sólo contestan afirmativamente el inciso d).

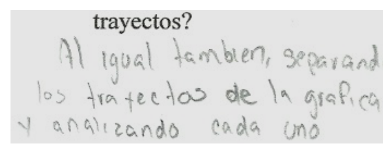
Respecto a ¿cómo calcular la velocidad en diferentes trayectos?, los equipos E1, E2 y E4 hacen alusión al comportamiento de la gráfica (ver Extracto 71, Extracto 72 y Extracto 73), pero no detallan el cómo lo harían.


trayectos? Según el tipo de gráfica y los datos.

Extracto 71 RM-M2-E1 Velocidad comportamiento gráfico y datos


trayectos? Se puede obtener con la forma de la grafica

Extracto 72 RM-M2-E2 Velocidad comportamiento gráfico


trayectos? Al igual tambien, separando los trayectos de la grafica y analizando cada uno

Extracto 73 RM-M2-E4 Velocidad análisis de gráfico

Por su parte el E3 responde que *"Por la posición entre el tiempo que tarda en recorrerla"*, haciendo alusión a la fórmula de la velocidad $\left(v = {}^{d}/_{t}\right)$.

En el último inciso del paso 6 se les cuestiona sobre la gráfica por trayectos, pero sólo deben dibujar trozos. Como referencia se mencionan frases para el recorrido (más lento, más rápido, etc.).

El equipo E2 analiza el recorrido de Valentina, para ello uno de sus integrantes sigue la trayectoria desplazando el dedo sobre la misma (ver Imagen 32).

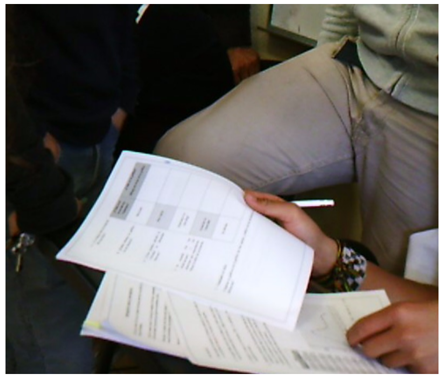
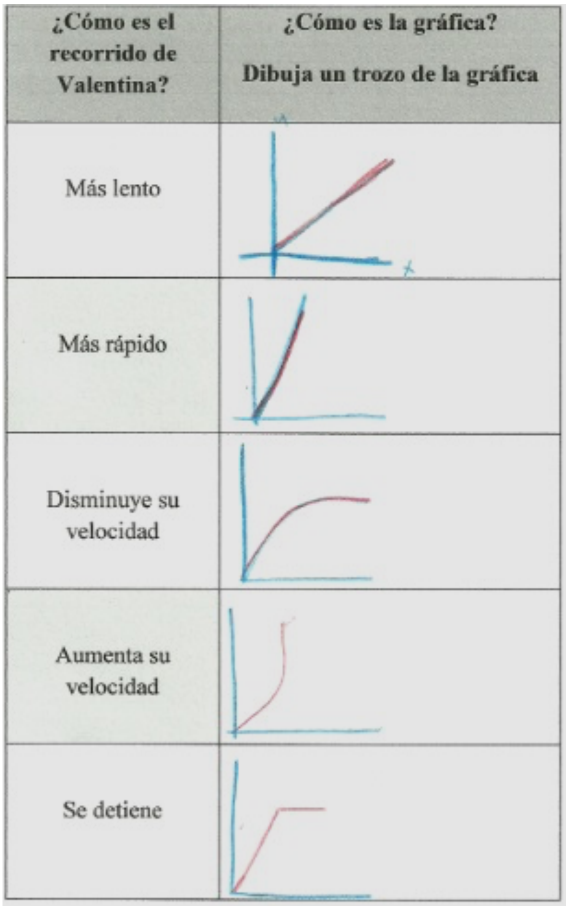


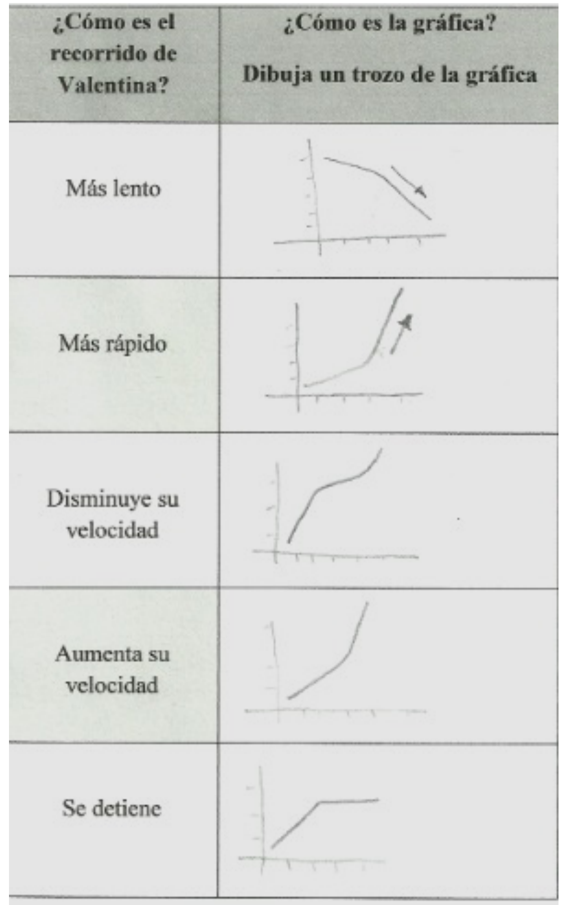
Imagen 32RM-M2-E2 Siguiendo la trayectoria

Por cuestiones de espacio y claridad sólo mostramos los resultados de los equipos E3 y E4 (ver Extracto 74 y Extracto 75), pero los equipos E1 y E2 también proporcionaron respuestas similares, sólo que no consideraron, totalmente, la gráfica obtenida en la simulación como referente.



¿Cómo es el recorrido de Valentina?	¿Cómo es la gráfica? Dibuja un trozo de la gráfica
Más lento	
Más rápido	
Disminuye su velocidad	
Aumenta su velocidad	
Se detiene	

Extracto 74 RM-M2-E3 Esbozos gráficos



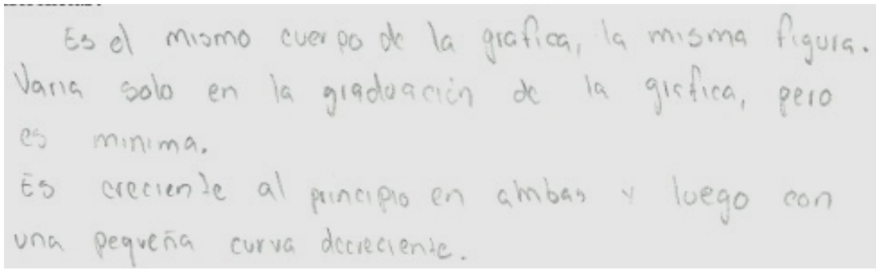
¿Cómo es el recorrido de Valentina?	¿Cómo es la gráfica? Dibuja un trozo de la gráfica
Más lento	
Más rápido	
Disminuye su velocidad	
Aumenta su velocidad	
Se detiene	

Extracto 75 RM-M2-E4 Esbozo por trozos

La comparación entre las gráficas de los equipos (paso 7) les permitió establecer similitudes y diferencias, ésta se realizó entre E1 y E3 (ver Imagen 33), y la otra entre E2 y E4.

Imagen 33Comparación de gráficos entre equipos E1-E3

Los primeros consideran que las gráficas son parecidas, pero difieren en la distancia recorrida (pues el E3 registra datos hasta 7 segundos), por consiguiente el tiempo en que se presentó la pausa (los minutos de Valentina con Juan). La otra comparación dejó entrever que reprodujeron el mismo tipo de gráfica, segundo caso de Torres (2004), señalando sólo algunas diferencias en tiempo y posición, por ende en la graduación (ver Extracto 76).


Es el mismo cuerpo de la grafica, la misma figura.
Varia solo en la graduacion de la grafica, pero
es minima.
Es creciente al principio en ambas y luego con
una pequeña curva decreciente.

Extracto 76 RM-M2-E4 Diferencias y similitudes con el E2

Para trabajar el M3 se proporcionó a cada equipo el archivo Representando el Movimiento.ggb en el cual se mostraba un caso distinto al que los equipos habían simulado, primer caso de referencia en el estudio de Torres (2004). El equipo E1 discute al respecto (ver Extracto 77)

(04:13-04:20)

2E1: *"…la gráfica que hicimos nosotros está al revés"*

3E1: *"…es así…"* [señala la trayectoria en la pantalla y resalta en donde se detuvo (ver Imagen 34, Imagen 35 e Imagen 36)]

Extracto 77 RM-M3-E1 Comparación gráfica simulada por el equipo y en el software

Imagen 34RM-M3-E1 Trayectoria en la simulación

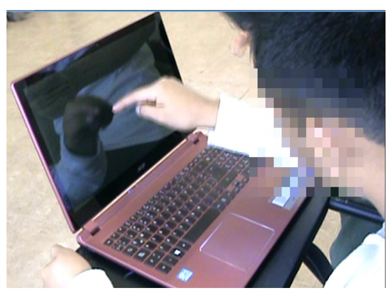


Imagen 35RM-M3-E1 Siguiendo la trayectoria

Imagen 36RM-M3-E1 Identificando el comportamiento

Contestaron dos preguntas iniciales que tiene que ver con el manejo de la notación para representar el cambio, tanto del tiempo como de la posición. Tres equipos lo registraron adecuadamente (ver por ejemplo Extracto 78 y Extracto 79), el E2 no contestó.

a. ¿Qué representa Δt? La diferencia de tiempo.
b. ¿Qué representa ΔP? La diferencia de la Posición.

Extracto 78 RM-M3-E3 Manejo de notación

a. ¿Qué representa Δt? Incremento en el tiempo = cual tiempo inicial menos el final
b. ¿Qué representa ΔP? Incremento en la distancia = distancia inicial menos el final

Extracto 79 RM-M3-E4 Descripción de notación y relación con la cuantificación del cambio

Para completar la tabla del inciso c) tuvieron que deslizar el punto B para recorrer la gráfica y al mismo tiempo tener las coordenadas de otro punto, cabe hacer notar que la variable de control en este caso fue $\Delta t = 0.2$ segundos (ver Imagen 37).

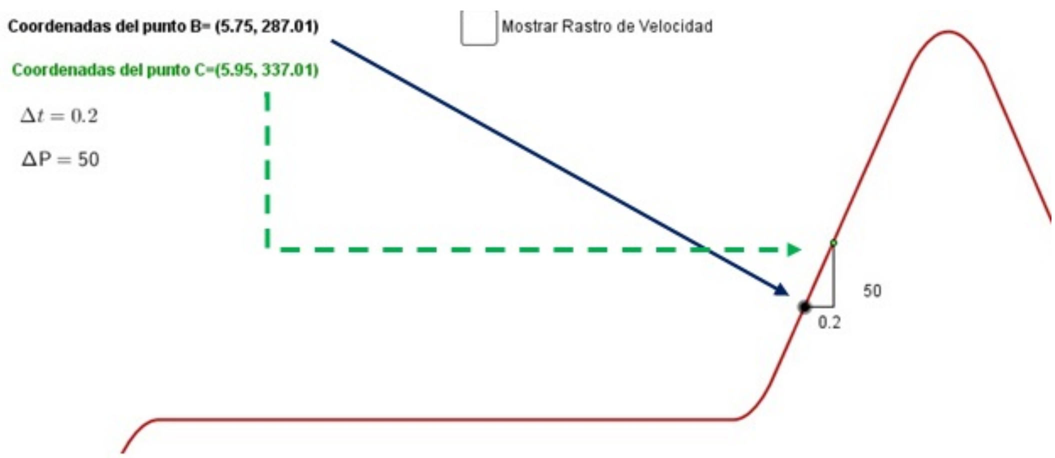


Imagen 37Identificación de datos y desplazamiento de valores en Geogebra

Todos los equipos completaron la tabla de valores, identificando las coordenadas de los puntos, el incremento en la posición e hicieron el cálculo de $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ (ver por ejemplo Imagen 38 e Imagen 39).

Imagen 38RM-M3-E2 Identificando los cambios en simulación de Geogebra

Imagen 39RM-M3-E3 Obtención de datos de simulación en Geogebra

El E1 discute lo que representa la notación incremental (ver Extracto 80)

(06:54-07:06)

2E1: *"…profe… ¿delta P entre delta t es la velocidad?... no"*

1E1: *"…no… es el cambio de la velocidad. ¿o no?"*

2E1: *"sí… es la velocidad"* [Recordándole el cómo se movieron]

Extracto 80 RM-M3-E1 Identificación de la velocidad

Sin embargo, sólo el E3 y el E4 realizaron una descripción más detallada utilizando frases como *"velocidad, subir, aumenta, constante, creciente, punto mínimo, disminuye…"* (ver Extracto 81 y Extracto 82).

Intervalo	**Punto (t,P(t))**	**ΔP**	**$\frac{\Delta P}{\Delta t}$**	**Observaciones para el intervalo**
(0,0.25)	C= (0.3, 34.97) B= (0.1, 3.99)	30.98	$\frac{30.98}{0.2}=154.9$	Aumenta la velocidad
(0.25,1)	B= (0.74, 122.77) C= (0.94, 162.77)	40	$\frac{40}{0.2}=200$	Es constante
(1,1.25)	B =(1.17, 197.6) C =(1.37, 200)	2.4	$\frac{2.4}{0.2}=12$	vuelve a subir
(1.25,5.25)	B=(3.1, 200) C=(3.3, 200)	0	$\frac{0}{0.2}=0$	dejo de aver velocidad
(5.25, 5.5)	B=(5.4, 208.62) C=(5.6, 249.2)	40.58	$\frac{40.58}{0.2}=202.9$	vuelve a subir
(5.5,6.5)	B=(6, 351.09) C=(6.2, 401.09)	50	$\frac{50}{0.2}=250$	" "
(6.5,7)	B=(6.82, 498) C=(7.02, 469.69)	28.37	$\frac{28.37}{0.2}=141.85$	disminuye la velocidad
(7,8.75)	B=(8, 218.44) C=(8.2, 167.01)	51.43	$\frac{51.43}{0.2}=257.15$	aumento la velocidad
(8.75,9)	B=(8.79, 18.36) C=(8.99, 0.08)	18.28	$\frac{18.28}{0.2}=91.4$	y disminuye la velocidad

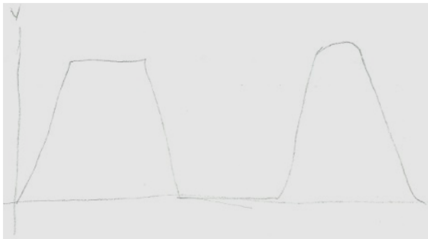
Extracto 81 RM-M3-E3 Análisis gráfico y su relación con la velocidad

Intervalo	Punto (t,P(t))	ΔP	$\frac{\Delta P}{\Delta t}$	Observaciones para el intervalo
(0,0.25)	(0.08, 2.04) (0.23, 29.23)	27.24	136.2	el ΔP no cambia es igual al llegar al intervalo 1.
(0.25,1)	(0.81, 137.5) (1.01, 177.31)	39.94	199.7	en este intervalo hace una curba que va disminuyendo
(1,1.25)	(1.05, 183.81) (1.25, 200)	16.19	80.7	Justamente aqui termina la curba
(1.25,5.25)	(5.05, 200) (5.25, 200)	0	0	aqui es una constante
(5.25, 5.5)	(5.3, 201.88) (5.5, 225.4)	24.4	122	comienza la curba creciente y aumeta ΔP
(5.5,6.5)	(5.3, 424.6) (6.5, 474.6)	50	250	aqui termina la constante creciente y el intervalo
(6.5,7)	(6.81, 498.5) (7.07, 472.13)	26.37	131.85	es el maximo
(7,8.75)	(8.55, 76.86) (8.75, 25.43)	51.43	257.15	termina la constante y comienza la curba del minimo
(8.75,9)	(8.8, 16.72) (9, 0.07)	16.76	83.8	es el punto minimo

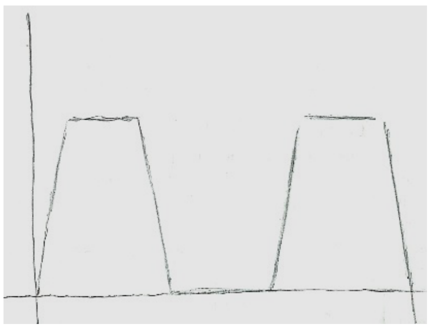
Extracto 82 RM-M3-E4 Análisis gráfico por intervalos

Respecto a la interpretación del cociente $\frac{\Delta P}{\Delta t}$, sólo el E2 no lo identifica como la velocidad, confundiéndola como *"los segundos que recorrió Valentina"*.

Finalmente, se les solicitó esbozar una gráfica que representara la velocidad de Valentina en ese tiempo (inciso e). Únicamente los equipos E1 y E3 registraron algo similar a lo que podemos observar en la simulación con Geogebra, (inciso f), pero sin considerar la velocidad negativa constante (ver Extracto 83, Extracto 84 e Imagen 40).



Extracto 83 RM-M3-E1 Esbozo de la velocidad de Valentina



Extracto 84 RM-M3-E3 Esbozo de la velocidad de Valentina

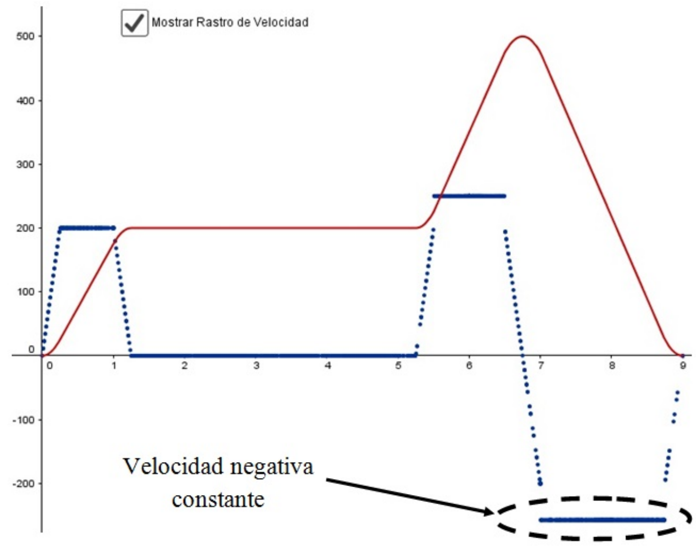
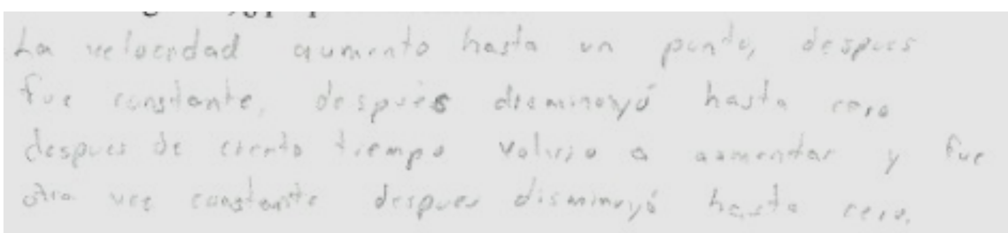
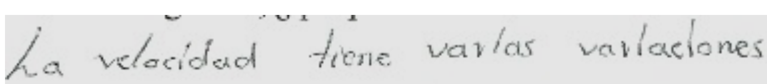


Imagen 40Velocidad de Valentina con Geogebra

Sin embargo, estas respuestas pudieron verse influenciadas por la animación del rastro que describe la velocidad (inciso f), sólo que no alejaron la simulación para poder observar el comportamiento cuando la velocidad es negativa. Sin embargo, sus respuestas cobraron más fuerza, pues relacionaron los comportamientos gráficos con la velocidad (ver Extracto 85 y Extracto 86).



Extracto 85 RM-M3-E1 Descripción de la velocidad de Valentina



Extracto 86 RM-M3-E3 Comportamiento de la velocidad de Valentina

El análisis de los tres momentos, permitió identificar la construcción de los significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentación de los estudiantes para la situación RM, sintetizados en el Cuadro 3.

Construcciones	Situación: Representando el Movimiento
Significados	La velocidad varía al pasar de una posición a otra. La variación de la variación tiene relación con la aceleración.
Procedimientos	Identificar los elementos que son constantes (distancia y tiempo total de recorrido) y los que pueden variar (velocidad, rapidéz, distancia para tiempo en reposo). Realizar esbozo y descripción de gráfica de posición respecto del tiempo. Efectuar simulación del recorrido y recopilar datos empleando el sensor de movimiento y calculadoras gráficas. Completar la tabla de valores. Construir la gráfica de la tabla para los datos recopilados. Analizar el tipo de gráfica y relacionarla con otro tipo de gráficas. Relacionar los trayectos de la gráfica con cambios en la velocidad. Identificar comportamientos gráficos por trayectos. Estimar la velocidad en diferentes trayectos. Comparar gráficas con sus pares (otros equipos) e identificar semejanzas y diferencias. Comparar numérica y gráficamente el cambio de velocidad en intervalos, empleando la simulación en software. Predecir y esbozar el comportamiento de la velocidad en los diferentes trayectos.
Proceso-objeto	Asociación de comportamiento gráfico con cierto tipo de velocidad y aceleración en una posición dada. (Curva-Posición-Velocidad-Aceleración).
Argumentación	La velocidad es variable por trayectos. La velocidad constante produce trazos rectos. Si no hay movimiento se producen trazos rectos horizontales (no hay velocidad) La velocidad es más lenta en las partes más altas de la gráfica, cuando se produce un cambio de movimiento. La velocidad es variable al momento de cambiar de trayecto.

Cuadro 3. Argumentación para la situación: Representando el Movimiento

Al igual que en las situaciones anteriores, se identificaron los elementos constitutivos del PyLV, utilizando lo reportado en algunas evidencias de los equipos y los extractos del análisis. Los equipos recurren nuevamente a la estrategia de *Comparación*, ya que analizan las diferencias de velocidad en intervalos de tiempo iguales. En el experimento emerge el estudio de la variación cuando los equipos usan códigos variacionales en los cuales relacionan la velocidad y la rapidez con comportamientos gráficos. Estos se presentan en expresiones como por ejemplo: *"comienza lento y con el paso del tiempo fue aumentando la velocidad", "…recio, fast, recio…", "más quedito", "…¡¡rápido!!… regrésate… quieto", "…avanzo a una velocidad, hago una pausa y me vengo con la misma velocidad", "…más al pasito", "que se venga recio y aquí ya más quedito", "es el cambio de la velocidad".* Además con movimientos de su cuerpo; por ejemplos cuando el estudiante mueve la mano izquierda hacia su cuerpo, indicando al compañero en movimiento que se acerque. La articulación de estos códigos se refleja en el argumento variacional de respuesta, que consiste en que: para reproducir trazos rectos de la gráfica la velocidad debe ser igual (constante), mientras que para lograr trazos con curva la velocidad debe ser variable (ver Tabla 8).

<table>
<tr><th colspan="5">SITUACIÓN: REPRESENTANDO EL MOVIMIENTO</th></tr>
<tr><td colspan="5">Uso de la gráfica (Uso_{RM}): Gráficas a partir de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología
Funcionamiento de la gráfica (f_{RM}): Analizar diferentes órdenes de variación Forma del uso (F_{RM}): Relacionar graficas con la velocidad</td></tr>
<tr><th colspan="3">CONSTRUCCIONES</th><th>ESTRATEGIAS VARIACIONALES</th><th>ARGUMENTOS VARIACIONALES</th></tr>
<tr><td>Variación</td><td>SIGNIFICADOS</td><td>La velocidad varía al pasar de una posición a otra. La variación de la variación tiene relación con la aceleración.</td><td rowspan="5">• Comparación
○ Extracto 68 (gráfica)
○ Extracto 70(gráfica)
○ Extracto 76 (gráfica)
○ Extracto 77 (gráfica)
○ Extracto 79 (numérica)
○ Extracto 82 (numérica)
○ Extracto 85 (gráfica)
○ Extracto 86 (gráfica)
• Predicción
○ Extracto 58 (gráfica)
○ Extracto 59 (gráfica)
○ Extracto 61 (gráfica)
○ Extracto 73 (gráfica)
○ Extracto 83 (gráfica)
○ Extracto 84 (gráfica)</td><td rowspan="5">• La velocidad que se requiere para reproducir el movimiento es variable al cambiar el tipo de trayecto.
• Al mantener una velocidad constante se producen trayectos rectos. Y cuando la velocidad es nula el trayecto es horizontal.
• La velocidad es más lenta en las partes más altas de la gráfica, cuando se produce un cambio de movimiento.
• La velocidad es variable cuando se cambia de trayectos, entre rectos y curvos.</td></tr>
<tr><td>Múltiples Realizaciones</td><td rowspan="3">PROCEDIMIENTOS</td><td>Obtener gráficas por medio de:
• Captura de datos con sensores de movimiento y calculadoras.
• Distribución de puntos.
• Simulación con software.</td></tr>
<tr><td>Identificación de Patrones</td><td>• Identificar los elementos que son constantes (distancia y tiempo total de recorrido) y los que pueden variar (velocidad, rapidéz, distancia para tiempo en reposo).
• Analizar el tipo de gráfica y relacionarla con otro tipos de gráficas.Relacionar los trayectos de la gráfica con cambios en la velocidad.
• Identificar comportamientos gráficos comparando trayectos y lo relacionan con la velocidad.</td></tr>
<tr><td>Realización de Ajustes</td><td>Simulación del movimiento hasta obtener una representación gráfica acorde a las condiciones (tiempo/distancia).
Comparar numérica y gráficamente el cambio de velocidad en intervalos, empleando la simjulación en software.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo del Razonamiento</td><td>PROCESOS-OBJETOS</td><td>Asociación de comportamiento gráfico con cierto tipo de velocidad y aceleración en una posición dada. (Curva-Posición-Velocidad-Aceleración).</td></tr>
</table>

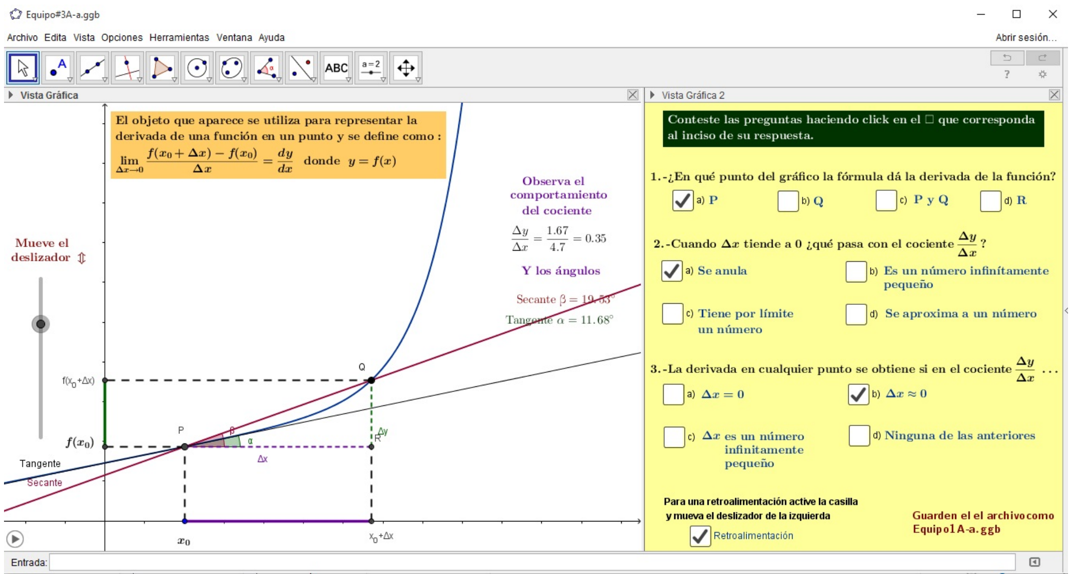
Tabla 8 Análisis de Representando el Movimiento

IV.3.4. Resultados de Actividad de Cierre

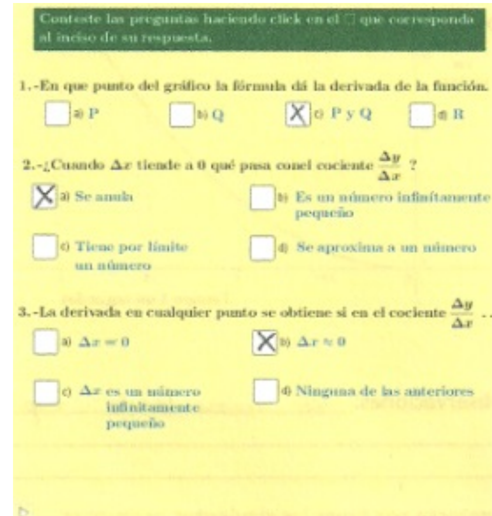
La actividad de cierre como ya se había mencionado en el capítulo anterior, contempla los tres problemas del diagnóstico trabajado por Dolores (2000) pero rediseñados en Geogebra. Primero contestaron en parejas (dos parejas por cada equipo, excepto en el E2, que contaba con 6 integrantes) los reactivos en impreso, enseguida abrieron cada archivo y volvieron a contestar sólo que ahora simularon cada problema en el software Geogebra.

Para el análisis se identificó cada situación planteada por Dolores (2000) como AC1, AC2 (con un reactivo más que el diseño original) y AC3, obteniendo un total de 11 preguntas de opción múltiple (escribiendo el número de pregunta al inicio). Las preguntas que se refieren a funciones y la noción de velocidad media son: 1AC2, 1AC3, 2AC3 y 3AC3; mientras que todas las preguntas de la primera actividad, 2AC2, 3AC2, 4AC2 y 4AC3 se refieren al concepto de derivada. Siete parejas contestaron correctamente las preguntas 1AC2 y 3AC3, mientras que todas las parejas determinaron correctamente la distancia aproximada por la fórmula $d(t) = 5t^2$, de un cuerpo en el primer segundo y el cambio que recorre (de distancia) el mismo entre el primer y segundo segundos (1AC3 y 2AC3). Sin embargo, para las preguntas 2AC1 y 3AC1 donde la derivada se considera como un límite, las respuestas no fueron tan favorables. Pues cuando se les cuestiona sobre el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$ sólo tres parejas contestan que tiene por límite un número, y una contesta que se aproxima a un número; otras cuatro contestan que se anula, y sólo una responde que es un número infinitamente pequeño. Para la pregunta 3AC1 el 55.6% contestaron correctamente que la derivada en cualquier punto se obtiene si en el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se tiene que $\Delta x \approx 0$ (dos parejas), o bien Δx es un número infinitamente pequeño (tres parejas). Dos parejas más contestaron que esto debe ocurrir cuando $\Delta x = 0$, y otras dos que ninguna de las anteriores era la respuesta. Respecto a la interpretación geométrica de la derivada, para la pregunta 1AC1 sólo una pareja contestó que la derivada ocurre en el punto P (correcta), mientras que cinco de ellas consideran que ocurre en los puntos P y Q. Dos parejas contestaron que la derivada en $x = 2$ tiene un valor de -1 (2AC2), mientras que las siete restantes consideran que tienen un valor de 2. Similarmente, las preguntas 3AC2 y 4AC2 tuvieron el mismo porcentaje de respuestas correctas (55.6%). Solamente una pareja determinó correctamente el valor de la velocidad de un cuerpo en caída libre en el 1er segundo, con distancia descrita por una la fórmula (4AC3), en contraparte ocho parejas respondieron que la velocidad era 5 m/s.

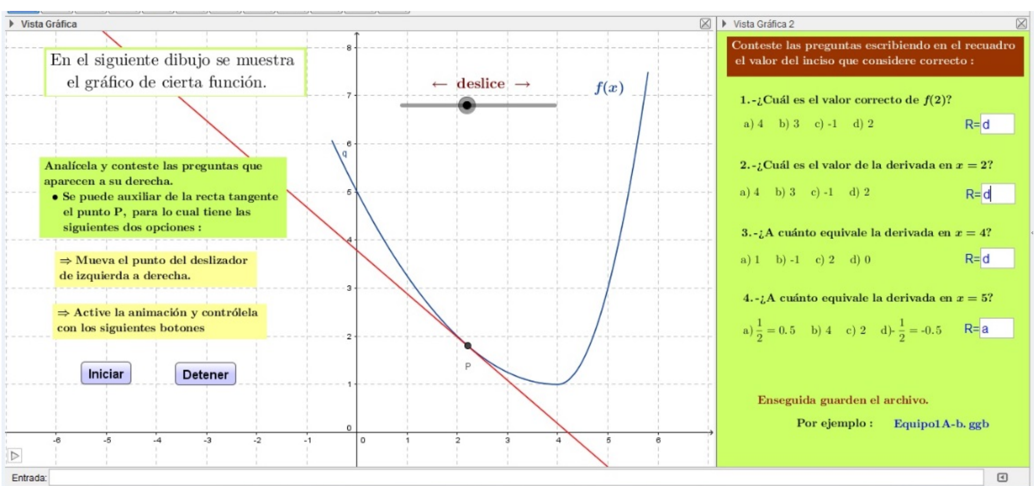
Después de ejecutar la simulación de cada actividad en Geogebra, los equipos pudieron contrastar sus respuestas con lo que podían visualizar en el software. Por desgracia las actividades AC2 y AC3 que involucran casillas de entrada no graban los datos ingresados al cerrar el archivo, por lo que se optó por imprimir la pantalla de cada actividad de una pareja (primer pareja del E3). Enseguida se muestra el comparativo de los resultados entre lo que registraron en papel (derecha) y lo que registraron en el archivo de Geogebra (izquierda).



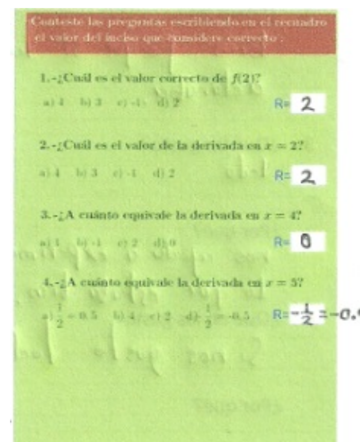
Extracto 87 AC1-M(2-3)-(P1)E3 Respuestas después de simular la representación gráfica de la derivada en un punto



Extracto 88AC1-M3-(P1)E3 Respuestas iniciales

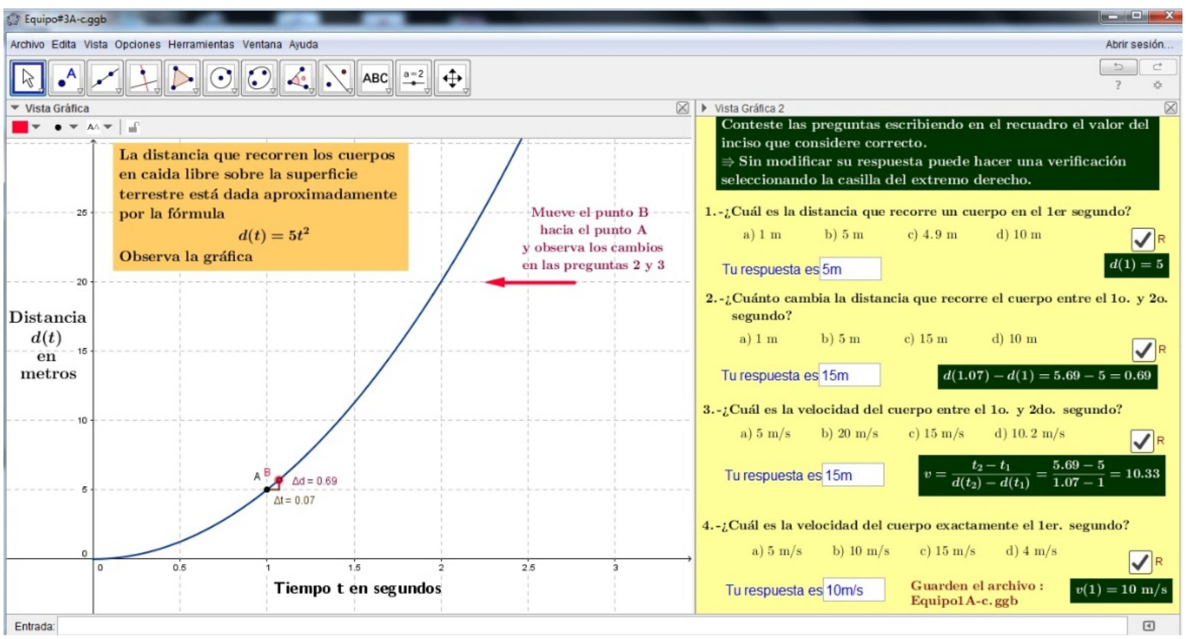


Extracto 89AC2-M(23)-(P1)E3 Respuestas después de simular el comportamiento gráfico de la asíntota



Extracto 90AC1-M1-(P1)E3 Respuestas sin uso de Geogebra

Se puede notar que en la AC1 reconsideran la respuesta de la primera pregunta, pues la simulación les permitió visualizar que el punto en que ocurre la derivada es precisamente en P, que es fijo, mientras que Q se desplaza sobre la curva (punto dinámico), además pueden observar el cambio del cociente incremental y el desplazamiento de la recta secante. Sin embargo, no logran deducir la respuesta correcta para la segunda pregunta, considerando nuevamente que el cociente incremental se anula cuando Δx tiende a cero. De manera similar en la actividad AC2 reconsideran su respuesta para el valor de la derivada en $x = 5$ eligiendo correctamente el cociente $\frac{1}{2}$, pero no logran deducir que el valor de la derivada en $x = 2$ no corresponde con el del inciso d), olvidando que la pendiente de la recta tangente en ese punto es negativa y por consiguiente su derivada. Para la tercera actividad sólo se muestra el resultado de la simulación, ya que los resultados en las primeras tres preguntas fueron exactamente los mismos (y además correctos), y sólo tuvieron que analizar más a detalle el comportamiento del cociente de la pregunta 3 (y el acercamiento gráfico entre los puntos) para corregir su respuesta inicial de 5 m/s.



Extracto 91 AC3-M(23)-(P1)E3 Respuestas después de simular el comportamiento del cociente entre dos valores

Algunas observaciones que hicieron los equipos respecto a la AC1 después de contestar a papel y trabajar el archivo en Geogebra:

Observaciones: La defecultad que tuvimos fue en la pregunta 2 porque nos confundimos en el límite cuando tiende a 0 si se anula o se aproxima a un número.

Extracto 92 AC1-M3-(P2)E1 Observación sobre la pregunta 2

Observaciones: con geogebra observamos que es mas facil obtener las resultados ya que esta mas detallado

Extracto 93 AC1-M3-(P2)E2 Ventaja de usar Geogebra

Observaciones: En esta función se observa que la grafica tiende a comportarse hacia arriba y que mientras se eleven mas los valores en la ecuación se ira acercando mas al eje de los (x) y va subiendo con numeros infinitos.

Extracto 94 AC1-M3-(P2)E4 Comportamiento gráfico usando la simulación

Observaciones: Cuando $\Delta x = 0$ tenemos una asintota

Extracto 95 AC1-M3-(P1) E4 El límite de la secante es una asíntota

CAPÍTULO V. CONCLUSIONES

En este capítulo describimos las conclusiones derivadas del análisis de los datos que se presentaron en el capítulo IV. Destacamos el uso que los estudiantes dan a la gráfica mediante su funcionamiento y su forma; y las estrategias variacionales que emplearon en el desarrollo de las situaciones. Se presentan algunas proyecciones del trabajo y reflexiones personales.

En las tres situaciones experimentales se pusieron en juego ideas básicas que subyacen en el concepto de derivada: el cambio y la variación. Estas ideas fueron la base de los argumentos que los estudiantes construyeron a lo largo de las situaciones. La idea central en cada experimento fue la cuantificación de la variación por medio de las diferencias tanto en el contexto numérico (tabular) como con el auxilio de la gráfica. Las diferencias entre dos estados consecutivos fueron el elemento clave que los estudiantes emplearon para cuantificar la variación. En lo sucesivo presentamos conclusiones de cada situación, así como algunas consideraciones generales (fortalezas y debilidades de la propuesta de trabajo). Reflexionamos como docente de grupo e investigador.

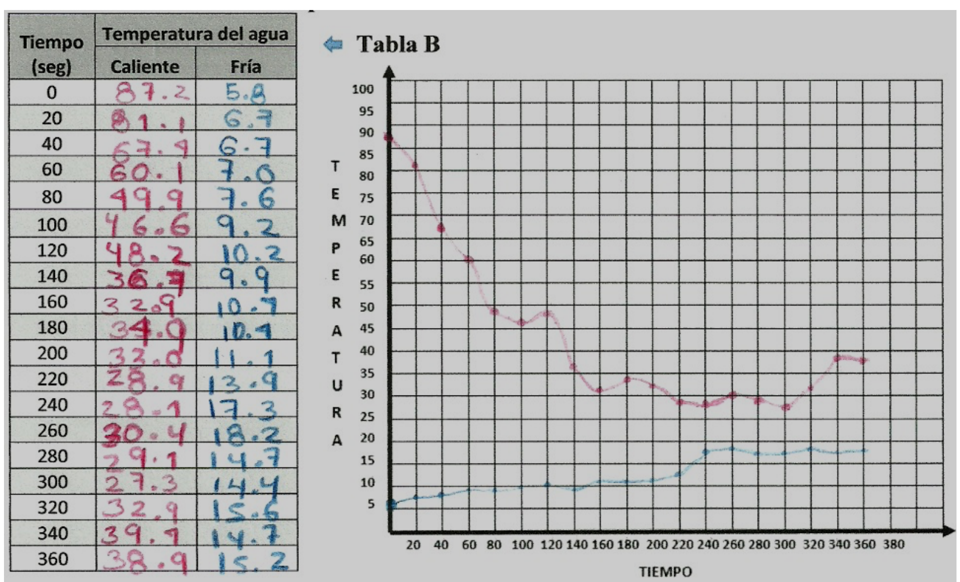
V.1. Para la Situación: Área Extrema

El empleo del Geoplano como recurso didáctico contribuyó de manera positiva en el desarrollo de la situación experimental Área Extrema, pues en él los estudiantes, después de explorar, lograron construir directamente los rectángulos con las dimensiones adecuadas, al mismo tiempo que descartaban otras. En la construcción, los equipos se dieron cuenta de que no importaba el lugar o posición en que construyeran los rectángulos, siempre y cuando cumpliera con los requisitos de la situación, para ello retomaron algunos de sus conocimientos sobre las propiedades de los rectángulos, como paralelismo de lados opuestos y ángulos rectos. Además esta construcción les permitió realizar conjeturas iniciales, notar regularidades y patrones de comportamiento. Hasta cierto punto diferenciaron los rectángulos, entre los que les servían y los que no. La realización de ajustes se intensificó en el M2 al hacer el registro tabular y la gráfica correspondiente. Cabe hacer notar que en general los cuatro equipos consideraron, de inicio, que el cuadrado no cumplía con las condiciones de la situación; corrigieron y eventualmente se percataron de que es precisamente cuando el ancho y el largo son iguales, esto produce el área máxima (ver Extracto 9, Extracto 10, Extracto 11 y Extracto 12). El Cuadro 1 sintetiza las argumentaciones que los participantes elaboraron de la derivada a través de un uso de las gráficas para la situación Área Extrema. Estos argumentos articulados con los elementos del PyLV y el binomio M-G ayudaron a identificar el *uso de la gráfica* en su *funcionamiento* y *forma* (ver Tabla 6). El uso que se le dio por los equipos a la gráfica fue como una *Distribución de puntos (Uso_{AE})*, coincidiendo con el reportado por Cordero, Cen y Suárez (2010), pero el rol que jugó la gráfica en esta situación, f_{AE}, estuvo en correspondencia con el área caracterizada por las dimensiones de rectángulos, es decir, con perímetro fijo. Para lo cual tuvieron que construir rectángulos con ancho y largo apropiados (F_{AE}).

Este problema de maximización no fue abordado como normalmente se hace en un curso de cálculo diferencial, es decir, como una aplicación de la derivada en la que se siguen instrucciones generales (ver Granville, 1980, p. 71), sino desde la perspectiva del binomio modelación graficación, en donde el *uso* de la gráfica cobra mucha importancia. Las argumentaciones que generaron los estudiantes fueron en gran medida debido al uso que hicieron de las gráficas, y en esta situación en particular el "máximo" es un punto de la gráfica donde se alcanza la máxima área posible, en lugar de ser un punto donde $f'(x) = 0$.

V.2. Para la Situación: Agua Fría

En la situación Agua Fría el empleo de sensores de temperatura y calculadoras graficadoras contribuyó de manera positiva en la realización y reproducción de la misma, pues con su uso los estudiantes, lograron capturar datos tantas veces como consideraron necesario. Los estudiantes pudieron observar el comportamiento de la temperatura en las gráficas de la calculadora. Se optó por transferir los datos a Geogebra, con el objetivo de tener una visión más amplia tanto por el tamaño de la pantalla como por la realización del M3 en este software. Durante la captura de datos los cuatro equipos comprendieron el funcionamiento de los sensores de temperatura y consensaron los ajustes para lograr una reproducción del fenómeno lo más aproximada posible. Esto les permitió contrastar sus conjeturas iniciales, notar regularidades, visualizar comportamientos simultáneos de temperaturas e identificar patrones de comportamiento gráfico. Lo anterior repercutió positivamente pues en el M2, el registro tabular y el gráfico correspondiente se puede apreciar en los resultados de sus producciones (ver Extracto 31). Sin embargo, no todo fue como se esperaba, pues como en todo experimento, los artefactos pueden proporcionar datos erróneos o con interferencia, como el caso del E3 al duplicar la cantidad de agua fría (ver Extracto 96), causas posibles: ubicación de los sensores, captura a destiempo, pérdida de configuración de la calculadora, etc. Se puede observar un comportamiento irregular, es decir, no es decreciente en todo el intervalo de captura, y mucho menos presenta una tendencia que obedezca a alguna regla específica.



Tiempo (seg)	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0	87.2	5.8
20	81.1	6.7
40	67.9	6.7
60	60.1	7.0
80	49.9	7.6
100	46.6	9.2
120	48.2	10.2
140	36.7	9.9
160	32.9	10.7
180	34.9	10.4
200	32.0	11.1
220	28.9	13.9
240	28.1	17.3
260	30.4	18.2
280	29.1	14.7
300	27.3	14.4
320	32.9	15.6
340	39.7	14.7
360	38.9	15.2

Extracto 96 AF-M2-E3 Interferencia en la captura de datos

El Cuadro 2 resume las argumentaciones que los participantes elaboraron de la derivada a través de un uso de las gráficas para la situación Agua Fría. Como ya habíamos mencionado, la articulación de esas argumentaciones con los elementos del PyLV y la M-G ayudaron a caracterizar un uso de la gráfica con su respectivo *funcionamiento* y *forma* (ver Tabla 7). La gráfica fue usada para *analizar comportamientos locales y la tendencia* de la temperatura conforme transcurre el tiempo *(Uso_{AF})*, en este caso coincidimos con el tercer uso de la gráfica identificado por Zaldívar (2014). El funcionamiento (f_{AF}) que le dieron los equipos a la gráfica en esta situación fue el de *herramienta para anticipar el comportamiento de las temperaturas del agua fría y caliente* que están en contacto directo, pero sin mezclarse. Para ello, más allá de capturar datos y reproducir el experimento, tuvieron que identificar y analizar cambios locales en la temperatura (F_{AF}).

Se destaca que, en el experimento donde la cantidad de agua fría duplica a la cantidad de agua caliente, el nivel de la primera aumenta y por lo tanto "rodea" más agua caliente, por lo que habría más "contacto" entre los tipos de agua, lo que en física se llama transferencia de energía. Y a diferencia de cuando se experimenta con la misma cantidad, el decaimiento exponencial es más notorio en el segundo caso (proporciones 2:1) y para el estudiante es más intuitivo el comportamiento de los cambios. Más aún, la visualización de ambas gráficas (agua caliente y agua fría), permite afirmar que la dependencia de la temperatura con el tiempo durante el enfriamiento es no lineal.

Por otra parte este fenómeno ha sido estudiado en varias investigaciones de la matemática educativa, aunque no con el mismo enfoque, por ello no podemos comparar resultados directamente y no es la intención de esta investigación. Entre los trabajos que abordan este fenómeno de enfriamiento desde al Socioepistemología podemos mencionar a Córdoba (2011) y Arrieta y Canul (2004). Ellos modelan la situación con un solo líquido enfriándose a temperatura ambiente, propician la emergencia de lo exponencial, complementando con un tratamiento algebraico y en los mejores casos deducen la ecuación diferencial. Desde la perspectiva planteada en nuestro proyecto el trabajo no pretendió llegar hasta ese punto (expresión algebraica), más bien, los equipos formularon sus conjeturas e hipótesis de manera correcta sobre el comportamiento de la temperatura tanto del agua caliente como del agua fría, prediciendo un comportamiento a largo plazo (equilibrio térmico), y como no era nuestro interés obtener la ecuación sino el comportamiento, de ahí que no se les solicitó a los estudiantes una deducción analítica del fenómeno. Es decir, nuestro objetivo no fue obtener una ecuación o fórmula (enfriamiento y calentamiento) y mucho menos constatar que sus soluciones matemáticas concordaran con los resultados experimentales, es decir nuestra centración no es el objeto matemático.

V.3. Para la Situación: Representando el Movimiento

El experimento Representando el Movimiento también involucró el empleo de sensores y calculadoras graficadoras. Al igual que en la situación AF estos recursos contribuyeron de manera positiva en la realización de la situación. La familiarización con el uso de la tecnología en las actividades previas, contribuyó para que los estudiantes lograran reproducir el movimiento tantas veces como consideraron necesario, y hasta obtener un ajuste de acuerdo a las condiciones tiempo y distancia. La tecnología facilitó al estudiante la visualización del comportamiento gráfico de su producción al instante. El diseño en Geogebra presenta la primera solución de referencia posible para la situación (Torres, 2004) con el objetivo de tener una visión más amplia en la realización del M3. Cabe hacer notar que en la simulación reportada por los cuatro equipos solamente se registra la producción para la segunda solución de referencia de Torres (2004), es decir, cuando Valentina se dirige del salón de la clase de música directamente a la biblioteca y de regreso se encuentra con su amado Juan. La captura de datos se agilizó debido a los ensayos hechos en las actividades previas y los cuatro equipos manipularon los sensores de movimiento y las calculadoras con más soltura, los consensos y los ajustes fueron continuos hasta lograr una reproducción muy aproximada a lo vivido por Valentina. Lograron contrastar sus conjeturas iniciales, notando mucha similitud con lo simulado, registrando sus datos (M2) la tabla y produciendo el gráfico correspondiente (ver Extracto 62 y Extracto 63). Al momento de simular notaron que al salirse del trayecto se registraban datos erróneos, que se visualizaban como picos en la gráfica producida por la calculadora. Otras posibles causas de ello eran: ubicación inadecuada del sensor de movimiento, pérdida de configuración de la calculadora, interferencia de algún compañero, etc. El Cuadro 3 concentra las argumentaciones que los participantes elaboraron de la derivada a través de un uso de las gráficas para la situación Representando el Movimiento; los elementos del PyLV y la articulación con los elementos del binomio M-G ayudaron a identificar un uso de la gráfica y sus respectivos *funcionamiento* y *forma* (ver Tabla 8). La gráfica se usó a partir de la simulación del movimiento de una persona empleando tecnología, genéricamente sería de un fenómeno físico (Uso_{RM}), en este caso coincidimos con el tercer uso de la gráfica registrado en Torres (2004). La gráfica funcionó como un medio para analizar diferentes órdenes de variación (f_{RM}), mientras que la forma en que los equipos lo realizaron fue estableciendo relaciones entre los diferentes trozos de la gráfica y el movimiento requerido para reproducirlo, variación de la velocidad (F_{RM}).

Esta situación ha sido muy socorrida, pues se ha puesto en práctica en diversas investigaciones, talleres de congresos y programas de formación de profesores (Suárez, 2014). Las variantes pueden ser muchas, inclusive, aunque esta actividad se tomó del cuaderno de experimentos de Suárez (2014), se rediseñó y complementó con la simulación en Geogebra M3. Lo característico de esta actividad es que motivó a los estudiantes a reproducir el movimiento variando la velocidad, tratando de reproducir trazos rectos y curvos (rectas y parábolas), pues entre los integrantes de cada equipo se cuestionaba cómo se deberían mover para obtener las formas de la gráfica, identificando en la misma y con ayuda de la simulación en software cuando la velocidad es positiva (ida), negativa (regreso) o nula (se detiene). A su vez los cambios de velocidad para producir los trazos curvos en los puntos inicial, final y extremos. En conclusión los equipos lograron identificar intervalos de cambio de velocidad y coordinando tiempos y distancias; la tecnología permitió que los estudiantes tuvieran una visión local y global de la gráfica, y sus producciones fueron nutridas cualitativa y cuantitativamente; resignificando así, la noción de derivada como la variación relacionada con el cambio de posición y cambios de rapidez en el movimiento de las personas frente al dispositivo tecnológico.

V.4. Generalidades

El escenario de laboratorio sustentado en situaciones, fue un espacio en la clase de cálculo diferencial en donde los estudiantes tuvieron la libertad de expresar lo que pensaban, de reflexionar, conjeturar, emplear la intuición, explorar, de ofrecer alternativas de solución, experimentar las situaciones, discutir, refutar y consensar en equipo para establecer sus argumentos. En este escenario de trabajo, los equipos pusieron en juego sus conocimientos previos, construyeron sus propios datos, vivieron la situación de manera muy diferente a una clase tradicional; construyeron conocimiento al usar gráficas, el cambio y la variación e identificaron comportamientos en los fenómenos de equilibrio térmico, área máxima y movimiento.

Con las múltiples realizaciones que efectuaron los estudiantes se trató de ampliar el abanico de formas gráficas que manejaban y por tanto la visualización se vio favorecida, sobre todo con el trabajo simultáneo de varias formas de representación (numérica y gráfica), el análisis de las gráficas producidas en las situaciones, así como con el empleo del software de geometría.

Los elementos del binomio M-G en coordinación con las construcciones de la Socioepistemología del Cálculo y los elementos del PyLV coadyuvaron a la estructuración de los argumentos variacionales de los estudiantes (ver Tabla 6, Tabla 7 y Tabla 8).

El PyLV desarrollado por los estudiantes en estas situaciones, se evidencia en el análisis de sus diálogos y los argumentos. Las gráficas fueron herramientas que les ayudaron a reconocer y estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficos, variaciones referidas a elementos que a su vez varían (varía el perímetro por consiguiente el área de los rectángulos, varía la cantidad de agua fría en consecuencia la temperatura del agua caliente presenta una variación; conforme se aleja y desea reproducir un movimiento debe variar la velocidad). Los equipos comunicaron oral y gestualmente sus conjeturas y argumentos. En este sentido podemos afirmar que se favoreció el desarrollo de su Pensamiento Variacional en el escenario de laboratorio, robusteciendo su estructura conceptual donde la matemática utilizada, adquirió un estatus más funcional. Durante el desarrollo de las situaciones emergió el uso de las estrategias variacionales de comparación y predicción.

Cabe señalar que durante la aproximación del área máxima en la situación AE (Extracto 9 y Extracto 20) se presenta una postura similar al método trabajado por Fermat (Cantoral y Farfán, 2004) para hallar máximos y mínimos, que involucra aspectos infinitesimales del cálculo, al aproximarse por la derecha e izquierda.

Las tres situaciones experimentales desarrolladas en este proyecto permiten resignificar la derivada a través del uso de las gráficas, rompiendo con el tratamiento estático, algorítmico y con significados parciales producidos al trabajar con el límite, prevalecientes en el dME. Enfatizamos el uso del cambio y la variación para construir argumentaciones de la derivada opacas en la enseñanza tradicional.

En la Tabla 9 se presentan los elementos esenciales construidos en la investigación por los estudiantes.

Situación	Uso de la gráfica	Argumentación de la derivada (Resignificación)	Estrategias Variacionales
Área Extrema	La gráfica está funcionando como la ubicación de puntos, en donde la variación del área respecto de las dimensiones de los rectángulos permite aproximar el valor máximo sobre la misma.	La derivada en el punto máximo de una función es resignificada como comportamiento en un punto de la gráfica donde se alcanza el área máxima.	*Comparación* de dos áreas consecutivas. *Predicción* de áreas desconocidas al cambiar el valor del perímetro.
Agua Fría	La gráfica está funcionando como un medio de análisis de la temperatura de un líquido. El comportamiento gráfico permite anticipar e identificar el cambio de temperatura en un momento dado y de manera global (tendencia).	La derivada se resignifica como el cambio de estado en la temperatura a lo largo del tiempo y como un comportamiento asintóticamente estable.	*Comparación* de temperatura de un líquido en dos tiempos consecutivos. *Predicción* del tiempo en que ocurre el equilibrio térmico.
Representando el Movimiento	La gráfica está funcionando como un medio de análisis de la simulación del movimiento de una persona, en donde el cambio de posición y la velocidad para hacer dicho cambio definen comportamientos gráficos.	La derivada se resignifica como el reconocimiento de la variación entre dos posiciones en el recorrido de una persona que se mueve de un punto a otro y regresa.	*Comparación* numérica y gráfica de dos posiciones su velocidad. *Predicción* del comportamiento de la velocidad durante el trayecto.

Tabla 9 Resignificación de la derivada mediante el uso de la gráfica

Afirmamos que estos experimentos están diseñados bajo la mirada de la línea del PyLV, pues para su solución los estudiantes usaron en todo momento *estrategias variacionales*. El tipo de preguntas que se hicieron a lo largo de los momentos M2 y M3 en los diseños propició siempre que el estudio de la variación fuera el eje central, desarrollándose alternativamente entre los contextos gráfico, numérico y verbal. Específicamente, se pudieron identificar las estrategias de comparación y la predicción en las tres situaciones. Por desgracia no se presentan evidencias de uso de las estrategias de seriación ni de estimación en las tres situaciones. La primera no es utilizada porque, de acuerdo con los resultados presentados en el análisis, los equipos no lograron deducir una relación funcional entre varios estados sucesivos, tanto geométrica como numéricamente. Respecto de la segunda, no hay propuestas de comportamientos globales a corto plazo en ninguna situación. El empleo de las estrategias, no de todas forzosamente, contribuye a la generación de un pensamiento variacional. Éstas, como mencionan Caballero y Cantoral (2013), están apoyadas siempre en el uso de los conocimientos matemáticos que se pretenden resignificar, aun cuando este no es explicito para los estudiantes, pero jugando un papel medular en todo el diseño. Además, como afirma Caballero (2012), son las prácticas propias de la variación las que dotan de significado a los conceptos matemáticos y los procesos que se asocian ellos, en nuestro caso el cambio, la variación y por ende la derivada.

El hecho de que los equipos reconocieran aspectos constantes y variables en sus análisis, les permitió significar aspectos gráficos de las funciones, no explícitas, mediante la variación. Con este acercamiento intuitivo a la derivada se rompe con la forma tradicional del dME, lo que permite resignificar este concepto, lo enriquece, estudiándolo como la evolución de un proceso de cambio.

Los diseños experimentales y las simulaciones en Geogebra se centraron en los procesos de cambio, enfatizando en las preguntas del M2 y M3, la identificación de aquello que cambia, cuantificarlo y analizar como varían los cambios. Y como afirma Cantoral (2013a) el conocimiento matemático, para constituirse en saber, exige de su uso. Precisamente eso es lo que hemos propiciado en estas situaciones experimentales. Pues el estudiante desarrolla en las situaciones la M-G que de acuerdo a Suárez (2014), se resignifica la variación.

Figura 30 Ciclo de trabajo en las situaciones de laboratorio

Con este tipo de actividades los estudiantes conjeturaron, exploraron, discutieron, reflexionaron y consensaron, partiendo de la situación concreta y sus condiciones (M1), para después simular tantas veces como fuera necesario empleando tecnología (M2); y finalmente, regresar a la situación original y contrastar sus resultados (M3). Este ciclo en que involucramos a los equipos (ver Figura 30) permitió que los estudiantes incorporaran significados generados por ellos mismos; hicieron construcciones cualitativas y cuantitativas de la optimización de áreas, del equilibrio térmico y de la velocidad durante un recorrido. Pero lo característico fue que en todas se partió de las representaciones numérica y gráfica.

Por otra parte, el uso de Geogebra generó gran interés en los estudiantes al desarrollar el trabajo del momento M3 de cada situación y de la actividad AC. Las simulaciones permitieron que el estudiante concibiera procesos dinámicos como para el cambio y la variación, favoreciendo la visualización de los mismos y de la derivada. Además permitió que los estudiantes desarrollaran y comprendieran de una manera versátil variantes de cada situación, al modificar el área, comparar la temperatura y visualizar el movimiento de una persona. Agilizó las múltiples realizaciones y los ajustes, permitiendo que los equipos se centraran en el análisis de la situación. La manipulación del software generó un interés creciente en el trabajo y los motivó a seguir explorando, tanto sus ventajas como sus desventajas. Por ello coincidimos en que el punto no sólo está en explotar la potencialidad de la tecnología escolar, sino integrarla al conocimiento del estudiante mediante el uso de la gráfica (Briceño, 2013).

Las situaciones trabajadas en este proyecto generaron interés en los estudiantes por el hecho de que se atendieron problemas que fueron más cercanos a la realidad de los mismos, en el sentido de que es diferente presentarles el problema verbal y que lo resuelvan a lápiz y papel como tradicionalmente se hace; a experimentarlo, reconstruirlo, a “vivirlo” y enfrentar las condiciones y variantes tal y como lo hace un científico. La experiencia los llevó a identificar ventajas y desventajas en el momento de la experimentación de estos fenómenos de cambio, los incitó a usar gráficas de las funciones que ahí intervinieron (sin conocer su expresión algebraica), a establecer relaciones entre esas gráficas y la situaciones de cambio, y a considerar al cambio y la variación como principal herramienta.

En todas las situaciones experimentales el objetivo no fue llegar a la solución analítica, pero sí orientar a los estudiantes para que lograran identificar aspectos locales y globales de las gráficas, así como cuantificar en mayor o menor medida. La forma de la gráfica les proporcionó información del comportamiento global de la situación, mientras que la comparación de valores específicos les ayudó a entender el comportamiento en cierto sentido más local (por intervalos). El uso de las gráficas en estas situaciones de modelación propició el estudio del cambio y la variación, y a su vez la resignificación de la derivada. Por consiguiente el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional.

La graficación como una herramienta de análisis proporcionó información visual sobre al menos dos órdenes de variación. Incitó a que los estudiantes dieran varios usos a la gráfica mediante constantes debates entre funcionamientos y formas.

Durante el desarrollo de la investigación en ningún momento nuestro objetivo fue llegar a que el estudiante lograra la obtención de una fórmula o expresión algebraica que modelara el fenómeno; aunque las expresiones analíticas de cada situación se pueden describir mediante parábolas, exponenciales y funciones a trozos respectivamente.

V.5. Algunas Limitantes

Considero que el tiempo para la puesta en escena de las situaciones experimentales puede llegar a ser una limitante, en mi caso no fue así, porque al ser el maestro de grupo tuve la oportunidad de programar y solicitar algunas sesiones a compañeros maestros. Hago mención a esto porque, en promedio, el desarrollo de una situación duró dos horas, un poco más o un poco menos. Y sabemos que los tiempos en clase están delimitados por un horario y la continuidad de clases de otras materias, sin embargo, es factible su implementación sólo es cuestión de programar y buscar esos espacios.

El acceso a la tecnología puede modificar la forma de implementación, pues por ejemplo para la situación AF si no se cuenta con sensores y calculadoras el tiempo de captura de temperaturas se puede prolongar bastante. Más aún este tipo de dispositivos aunque actualmente son más accesibles para el profesor, en las instituciones del nivel medio superior del estado no es muy común encontrarlas, quizás porque no le ven la utilidad o no se tiene capacitado al profesor en su uso. Algo semejante se podría mencionar para la situación RM. En el mismo orden de ideas, para el diseño de actividades en el software Geogebra se requiere al menos un manejo básico del mismo (capacitación del profesor o investigación por iniciativa) y que los estudiantes conozcan el ambiente de trabajo del mismo y manipulen algunos comandos. Pues si bien es cierto que el empleo de software facilita el desarrollo de cálculos y la graficación de funciones, entre muchas otras cosas, el manejo de éste en las situaciones no debe caer en un mera reproducción de lo que hacemos en una clase tradicional, es en a intencionalidad en donde radica la importancia de su empleo.

Más que limitantes, como las mencionadas en los párrafos anteriores, estas observaciones podrían ser parte de un proyecto en donde se potencialice el uso de tecnologías con fines didácticos. Mi apuesta es que el escenario de laboratorio puede ser uno de ellos. Coincido con Méndez (2013) en que: los instrumentos tecnológicos y la experimentación, son elementos que van de la mano, cuando de modelación se trata.

V.6. Proyecciones de Trabajo

Las situaciones experimentales y las simulaciones en Geogebra son perfectibles, no se pueden ni deben considerar acabadas. Particularmente para la situación AE una proyección sería poder utilizar los valores de la tabla (incrementando su cantidad) considerando todas las diferencias consecutivas con un incremento fijo como lo trabajado por Cantoral, Molina y Sánchez (2005), ya sea con el registro en papel o con el empleo del software Geogebra. Tratando de relacionar lo tabular y lo gráfico con la determinación de la expresión algebraica.

Por otra parte, la situación AF concierne al estudio de la Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton (Zill y Wright, 2015), tema que generalmente no se aborda en un curso de cálculo diferencial de bachillerato, pues su solución involucra el tópico de ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, una posible propuesta de trabajo sería complementar lo realizado agregando un momento más en la situación, que contemple una perspectiva similar al estudio realizado por Córdoba (2011) y Arrieta y Canul (2004). En donde la variación de parámetros se simule en Geogebra o la curva que aproxime los valores sea construida en el mismo. Cabe hacer notar que los resultados obtenidos por los equipos muestran un alto grado de precisión en el ajuste de los resultados con la ley mencionada, por ejemplo se hizo el ejercicio para el equipo E1 (ver Anexo 8).

Respecto a la situación RM una propuesta de mejora sería en cuanto al empleo de la simulación en Geogebra, en donde se pueda incluir las diferentes posibilidades del movimiento de Valentina y se pueda controlar (variar) las distancias y tiempos del trayecto.

Para la actividad de cierre una proyección sería incorporar diseños similares en alguna plataforma de trabajo en línea, de tal manera que el estudiante pueda reproducir la simulación, registrar sus respuestas y tener un acercamiento a la variación sin necesidad de estar presente.

Por el rediseño logrado me aventuro a proponer una nueva hipótesis: podría resultar factible la implementación de las situaciones experimentales desde cursos iniciales de bachillerato o en cursos previos al de cálculo diferencial, con algunas variantes, y con ello desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional.

Otra proyección del trabajo sería diseñar actividades en donde específicamente se desarrolle el uso de una única estrategia variacional específica (una para cada estrategia), y complementar esto con una quinta actividad en donde el estudiante tenga que elegir cuál(es) es (son) la(s) más adecuada(s).

V.7. Reflexiones Personales

La idea inicial, y que motivó la realización de este proyecto, fue abrir un espacio en la clase de matemáticas en donde los alumnos experimentaran y expresaran lo que piensan sobre situaciones concretas. Que vivieran la matemática de una manera diferente, rompiendo con esa enseñanza tradicional en que estamos inmersos; y en la cual yo (maestro) enseño y ellos (alumnos) aprenden. A este escenario lo he denominado laboratorio y su puesta en marcha requiere cambios en la forma de pensar y trabajar tanto de profesores como de alumnos. Desde mi punto de vista personal, el profesor que recién ingresa a esta forma de trabajo se debe exigir a sí mismo, y de inicio, un trabajo arduo en investigación, diseño e instrumentalización inicial, pues una vez que se cuenta con situaciones "terminadas" el trabajo se centra en hacer ajustes y rediseños acordes al contexto en que se trabaja. También requiere mucha paciencia y persistencia por parte del profesor pues en cierto sentido su rol se ve modificado y la dinámica de trabajo con el grupo es diferente a la que acostumbra trabajar.

En mi caso particular, como profesor de matemáticas, para llevar a cabo este proyecto me vi en la necesidad de modificar la forma de trabajo en el curso de cálculo diferencial e integral con el grupo bajo estudio, pues traté de establecer las condiciones para que al momento de la puesta en escena el desarrollo de las situaciones fuera lo más adecuado posible. Ahora bien, como profesor del nivel medio superior tengo un cierto dominio del conocimiento matemático que enseño, pero parte del mismo pasó a un segundo término cuando enfrenté y rediseñé las situaciones propuestas en el proyecto. Ya que bajo la perspectiva de trabajo variacional los objetos matemáticos, aunque están de fondo respaldando lo realizado, no son el centro de atención. Coincido con Artigue (1995) cuando afirma que las matemáticas se deben percibir:

> … como una actividad humana, histórica, cuya finalidad es la resolución de problemas que han surgido en el desarrollo interno o externo de la disciplina. Ya no se trata de unas matemáticas que están ahí y que se tienen que descubrir, sino más bien unas matemáticas que el matemático construye en función de sus necesidades (p. 105).

El trabajo con las situaciones experimentales exigió en primer lugar el análisis de la teoría que respalda las mismas, pues aún cuando se tomaron de otra investigación era necesario entender el porqué de su estructura. Y en segundo lugar la investigación de aspectos teóricos que permitieran hacer un adecuado rediseño de las situaciones, como lo fue el caso de los elementos del PyLV. La experimentación personal de cada situación me permitió ver las variantes que podrían surgir, a decir verdad, me puse en el lugar del estudiante y con ello traté de dejar lo más claro posible cada una.

Durante la puesta en escena asumí un rol de investigador/observador, más que de profesor que imparte clases magistrales de forma tradicional. Reorientando el trabajo de los equipos cuando se requería, y aclarando dudas de tipo técnico (dudas en la redacción, manejo de tecnología y software, etc.). Del trabajo realizado por los equipos bajo esta perspectiva variacional se lograron identificar: conocimientos previos que pusieron en juego para formular conjeturas; estrategias variacionales usadas y reportadas en la investigación de Caballero y Cantoral

(2013); y funcionamientos y formas del uso de las gráficas que junto a los elementos del binomio M-G se tradujeron en argumentaciones. Todo esto me permitió reflexionar sobre la importancia del respaldo epistemológico de la situación con la intencionalidad de desarrollar en los estudiantes un PyLV.

Durante la etapa de análisis de resultados me percaté que debía ser muy meticuloso, pues a diferencia de cuando se enseña de manera tradicional, en donde sabes qué debe responder el alumno y cómo evaluarlo, bajo esta perspectiva te debes "poner los lentes" que te permitan identificar lo representativo para la investigación. Por ejemplo, cuando se analiza un video se pueden observar que durante la sesión pasan muchas cosas, algunas relevantes y otras no, pero cuando pareciera que no hay evidencias, es en esos momentos que debes reproducir una y otra vez el video para identificar lo que necesitas. Considero que esto dependerá de quien observa, qué está buscando y bajo que perspectiva teórica lo hace.

Finalmente, considero que como profesores por lo general estamos envueltos en una forma de trabajo moldeada por el dME vigente. En ese sentido la profesionalización docente requiere de situaciones experimentales que en mi opinión, trasciende las formas de enseñanza para transmitir un conocimiento. La investigación que realicé, me permitió tomar una postura de esas situaciones y reconocer en ella el ejercicio de prácticas sociales.

Referencias Bibliográficas

Amaya, G. (2009). Laboratorios reales versus laboratorios virtuales, en la enseñanza de la física. *El hombre y la máquina*, *21* (33), 82-95.

Apostol, T. M. (1996). *Análisis Matemático*. Barcelona, España: Reverté.

Arce, J. (2003). El Laboratorio de Matemáticas. *Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Documento Interno de Trabajo*.

Arrieta, J., y Canul, A. (2004). Las prácticas sociales de modelación en la construcción de lo exponencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 209-214. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 97-140.

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29*(2), 191-206.

Basurto, E. (2011). Conceptualización de los parámetros en funciones polinomiales vía TI-Nspire. *Conferencia dictada en la XIII CIAEM*, Recife, Brasil.

Basurto, E. (2013). Una ruta didáctica para la enseñanza de los parámetros. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8.* (11), 317-338. Costa Rica.

Briceño, E. (2013). *El uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Briceño, E. y Cordero, F. (2012). Un estudio del uso de tecnología en situaciones de modelación del movimiento. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav. 203 – 212.

Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas en la matemática escolar: una mirada desde la Socioepistemología. *Premisa-Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM) 13 (48)*, 41-50. Argentina.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1285-1294. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Méxcio.

Caballero, M. y Cantoral R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26*, 463-468.

Cabrera, L. (2009). El *Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.17*, 1-9.

Cantoral, R. (2013a). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. DF, México: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública. ISBN: 978-607-9362-03-4.

Cantoral, R. (2013b). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. Farfán, RM., Montiel, G., Lezama, J., Cabañas, G., Castañeda, A., Martínez-Sierra, G. y Ferrari, M. (2008) *Matemáticas. Tercer grado.* México: McGraw-Hill

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). *Socioepistemología y matemáticas.* En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 740-753). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*, *42*(3), 854-856.

Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Molina, J., y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*(1), 463-468.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson Editores.

Cantoral, R., y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 6*(2), 133-154.

Cañas, P. E. B. (Sin fecha). *Obstáculos, Mediadores y Actividades en la Enseñanza de Matemáticas en Ingeniería*. La Enseñanza de las Matemáticas para Ingenieros. Descargado el 9 de octubre de 2015 de http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias/trece.pdf.

Cardona, R. (2009). *Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Castañeda, A. (2002). Estudio didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5(1)*, 27-44.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 1*(1), 56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 4*(2)103-128.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo: una espistemología a través de la actividad humana. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una mirada socioepistemológica de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 265-285.

Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*, 265-286.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matematica e la sua Didattica, 20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. In R. Cantoral, O. Covian, R. Farfan, j. Lezama, & R. Avenilde (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*: (pp. 265-286). D.F., México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(2), 187-214

Córdoba, F. J. (2011). *La modelación en la Matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula de ingeniería.* Tesis de maestría no publicada. Instituto Politécnico Municipal, México.

Crespo, C. (2009). Una caracterización de los escenarios socioculturales desde la socioepistemología. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 1061-1069. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (coordinador). *El futuro del cálculo infinitesimal.* (Capítulo V, pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el Bachillerato.* Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Pedagógico Enrique José Varona. Facultad de Ciencias. Cuba.

Dolores, C. (1998a). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272), México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C. (1998b). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. En R. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11*, 6-10. Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C. (2000a). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral, *El futuro del cálculo infinitesimal, ICME-8* (pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2000b). La matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Revista Academia de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2*(20), 9-17.

Dolores, C. (2001). El Desarrollo del Pensamiento Variacional con Estudiantes Universitarios. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, 345-353. México: Grupo Editorial Iberoamericana

Dolores, C. (2006). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En Navarro, C., López, I., Carrillo, C., Farfán, R. M., Martínez, G., y Dolores, C., *Matemática educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* México: Ediciones Díaz de Santos, pp. 169-204.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México: Universidad Autónoma de Guerrero. Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. y Catalán, A. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. En R. Farfán, C. Matias, D. Sánchez y A. Tavares (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13*, 36–41. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las graficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 5*(3), 225-250.

Duarte, A. (2013). El geoplano: una alternativa para mejorarla enseñanza de la geometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 523-532. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M. I., Müller, D., Hecklein, M. y Henzenn, N. (2008). Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada. Análisis de una secuencia didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21*, 466 – 476. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Font, V. (2000), Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *Uno, 25*, 21-40.

Font, V. (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) *Atti del Convegno dididáctica Della matematica 2008* (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 18*, 15-18.

Franky, G. A. (2009). Laboratorios reales versus laboratorios virtuales, en la enseñanza de la física. *El hombre y la Máquina, (33)*, 82-95.

Gallego Fernández, M. I., Martínez Martínez, M. D. R., Graells Sobré, M., Cadenato Matia, A. M., Amante García, B., Jordana Barnils, J., y Salán Ballesteros, M. N. (2009). *Cómo aplicar el método científico en los laboratorios de ciencias y tecnología.*

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 85-116.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), pp. 127-135.

Gómez-Chacón, I. Mª (2011) *Modelizaciones dinámicas en Matemáticas. Usos del GeoGebra.* Publicaciones Instituto GeoGebra de Madrid. Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Cd-Rom.

Granville, W. A. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral*. D. F. México: Limusa.

Hernández, C. A., Leal, L. H., y Organista Rodríguez, M. L. (2011). La modelación de la variación, un análisis del uso de las gráficas cartesianas en los libros de texto de biología, física y química de secundaria. *Revista de Ciencias, 15*.

Larson, R. Hostetler R. P., Edwards B. H. y Heyd D. E. (2005). *Cálculo diferencial e Integral*. D. F. México: Mc Graw Hill.

Leithold L. (1998). *El Cálculo*. D. F. México: Oxford University Press.

López-Gay, R. y Martínez-Torregrosa, J. (2005). "¿Qué hacen y qué entienden los estudiantes y profesores de Física cundo usan expresiones diferenciales?". *Enseñanza de las ciencias, 23,* 321 - 334.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar* (Doctoral dissertation, Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México).

Mendoza, J., y Cordero, F. (2014). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. Una situación de acumulación en la formación de ingenieros civiles. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 1557-1563. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Molfino, V. (2010). *Procesos de institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico*, Tesis de Doctorado, México, IPN-CICATA.

Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias, 30* (3), 237-256.

Parra, T; Cordero, F. (2007). El uso de las gráficas en la mecánica de fluidos. El caso de la derivada. *Acta latinoamericana de matemática educativa. Clame, 20*, 519-524.

Rendón Arcila, C. E., Ruiz Restrepo, K. Y., y Córdoba Asprilla, Y. (2014). *La comprensión del concepto de derivada en el marco de la enseñanza para la comprensión*. Tesis de Licenciatura Matemáticas y Física. Universidad de Antoquia. Medellin. Colombia.

Rosado, L., y Herreros, J. R. (2005). Nuevas aportaciones didácticas de los laboratorios virtuales y remotos en la enseñanza de la Física. *Recent Research Developments in Learning Technologies,* 1-5.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Cinvestav-IPN, México: Tesis de maestría no publicada.

Sánchez, M. y Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19*, 739-744. México: Clame.

Sánchez-Matamoros García, G., García Blanco, M., y Llinares Ciscar, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesores interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de Bachillerato. La derivada de la función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI,* (pp.497-508). Jaén: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(2), 267-296.

Solache, J. C., Díaz, R. y Dolores, C. (1999). *El desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia pedagógica en situación escolar en el bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Solache, J., Díaz, R. y Dolores, C. (2000). El desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia pedagógica en situación escolar en el bachillerato. En R. Farfán, C. Matias, D. Sánchez y A. Tavarez, (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13*, 42-48. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Suárez, L. (2014). *Modelación- Graficación para la Matemática Escolar*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en al modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electronica de Investigación en Educación en Ciencias, 3*(1) 51-58.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.

Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN.

Villa-Ochoa, J. A., y Ruiz Vahos, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3), 514-528.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar.* (Tesis inédita de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Zaldívar, D., Cen, C., Méndez, M., Briceño, E. y Cordero, F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 17*(2), 191-210.

Zill, D. y Wright, W. (2015). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera*. Octava Edición. D. F. México: Cengage Learning.

Anexos

Anexo 1. Resultados del Instrumento de Diagnóstico

		preguntas																		
Clave	**Alumno**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**6.1**	**6.2**	**7 a)**	**7 b)**	**7 c)**	**8 a)**	**8 b)**	**8 c)**	**8 d)**	**8 e)**	**8 f)**
3E1	Josue	c	c	b	c	b	d	a	c	d	c	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
2E2	Marco	b	b	b	d	b	d	b	d	b	a	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
2E1	Vicente	c	a	c	c	c	d	a	c	a	c	0	20	-3	neg	neg	pos	pos	pos	neg
1E3	Ana	c	d	b	d	d	a	a	b	d	c	NC	NC	NC	pos	neg	pos	neg	pos	pos
2E4	Yahaira	b	d	d	c	c	a	c	d	d	c	30	10	875	neg	neg	neg	pos	pos	pos
3E4	Jose	d	c	d	b	a	d	a	d	d	d	NC	NC	3.45	pos	pos	pos	neg	neg	pos
1E4	Francisco	c	c	d	d	a	d	d	b	a	c	10	20	10	neg	neg	pos	neg	neg	neg
1E1	Diana	c	c	a	c	a	c	a	b	d	c	0	20	10	pos	pos	neg	pos	pos	pos
4E3	Alfredo	c	c	d	c	c	a	c	a	c	a	10	10 a 30	ye la v	pos	neg	neg	pos	pos	neg
4E4	Guadalupe	d	c	d	b	d	a	a	a	d	a	10	20	15	neg	neg	neg	neg	neg	neg
3E2	Javier	c	a	d	b	c	a	d	a	d	b	NC	NC	NC	neg	pos	pos	pos	neg	neg
6E2	Fabian	c	a	c	c	c	a	c	a	b	a	NC	NC	30	neg	neg	neg	NC	NC	NC
1E2	Magdalena	b	b	d	c	c	a	a	c	d	c	3.33	no se	no se	neg	neg	pos	neg	neg	neg
5E2	Cesar	c	b	d	b	c	b	a	c	c	a	3.3	7.5	NC	pos	neg	pos	neg	neg	pos
2E3	Miguel	d	c	b	a	d	a	d	a	d	c	3.33	30	7.25	pos	neg	ngo	pos	neg	ngo
4E1	Victor	c	a	b	d	b	a	b	c	a	c	NC	NC	NC	pos	neg	neg	neg	pos	neg
4E2	Rogelio	d	c	b	b	b	d	a	b	d	c	3.33	7.5	5	pos	neg	NC	pos	neg	NC
3E3	Fabricio	d	c	c	c	a	a	a	c	d	b	10	30	15	neg	pos	pos	neg	pos	pos

Anexo 2. Instrumento de Diagnóstico

CUESTIONARIO DE DIAGNÓSTICO **Preparatoria VI UAZ Trancoso Zacatecas**

Nombre:____ **Edad:**_____ **Fecha:**______

INTRUCCIONES: Para las preguntas 1 a 6 selecciona la opción que consideres es la correcta.

1. ¿Qué es para usted una variable?

a) Es una letra
b) Son los valores que adquiere la variable
c) Es una letra que puede adquirir valores sucesivos
d) Es una letra de la cual no se sabe su valor
e) otro________________________________

2. ¿Cómo se representa una variable?

a) Mediante un número
b) Mediante un conjunto de números
c) Mediante una letra
d) Mediante una gráfica en el plano
e) otra________________________________

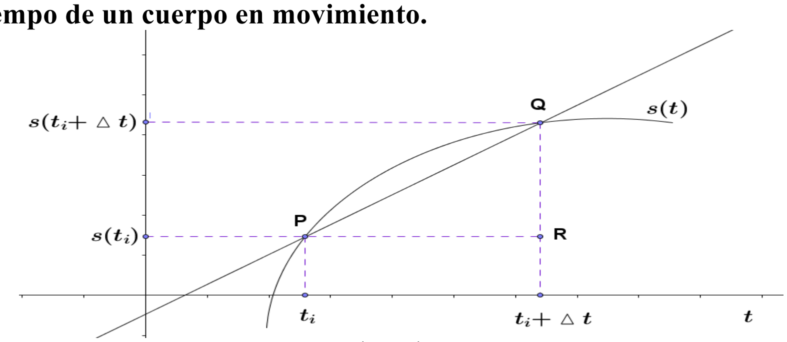
3. ¿Cómo se miden los cambios?

a) Por medio de restas
b) Por medio de intervalos
c) Por medio de gráficos
d) Por medio de funciones
e) Por medio de sumas
f) otra________________________________

4. ¿Cuál es la estrategia básica para calcular la velocidad instantánea en t_i?

a) Sólo por acercamientos numéricos sucesivos a t_i
b) Mediante el cálculo del cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$
c) Búsqueda del límite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando $\Delta t = 0$
d) Búsqueda del límite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando Δt es infinitamente pequeño

5. La siguiente imagen muestra el gráfico de $s(t)$ que representa la variación de la distancia respecto del tiempo de un cuerpo en movimiento.



5.1. ¿En qué punto la fórmula $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_i+\Delta t)-s(t_i)}{\Delta t}$ mide la velocidad instantánea?

a) en P **b)** en Q **c)** en P y Q **d)** en R

5.2. Cuando $\Delta t \to 0$, ¿Qué pasa con $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

a) Se anula **b)** Se hace muy grande **c)** Es un infinitesimal **d)** Tiene por límite un número

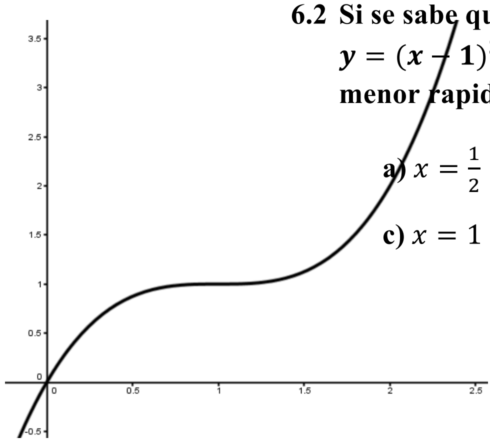
5.3. ¿Cuál es la expresión de la pendiente de la secante $\overline{PQ}$?

a) $m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ **b)** $m = \Delta s$ **c)** $m = \frac{ds}{dt}$ **d)** $m = \Delta t$

5.4. ¿Cuál es la expresión de la pendiente de la tangente en P?

a) $m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ **b)** $m = \Delta s$ **c)** $m = \frac{ds}{dt}$ **d)** $m = \Delta t$

6. La siguiente curva describe la variación de la variable y en términos de x



6.1 ¿En dónde la curva crece con mayor rapidez?

a) $x = \frac{1}{2}$ **b)** $x = 0$

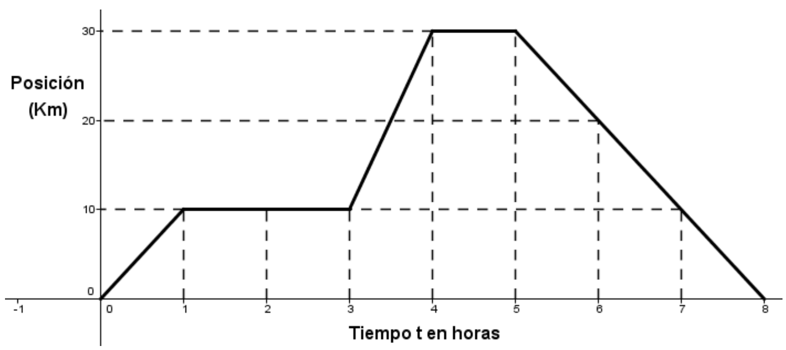
c) $x = 1$ **d)** $x = 2$

6.2 Si se sabe que la curva obedece a la fórmula $y = (x-1)^3 + 1$, ¿en dónde la curva crece con menor rapidez?

a) $x = \frac{1}{2}$ **b)** $x = 0$

c) $x = 1$ **d)** $x = 2$

7. La siguiente gráfica muestra la aposición de un automóvil que transita en un sendero rectilíneo y horizontal (una carretera que no tiene subidas ni bajadas). Estime la velocidad en los intervalos de tiempo indicados.



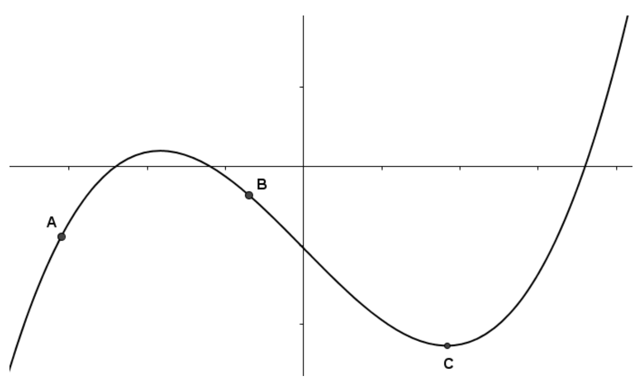
a) Entre $t=1$ y $t=3$
$v=$ ____________

b) Entre $t=3$ y $t=4$
$v=$ ____________

c) Entre $t=5$ y $t=8$
$v=$ ____________

8. A continuación se presenta la gráfica de una cierta función y en ella se marcan tres puntos. Contesta las preguntas ubicadas a la izquierda de la gráfica.

a) ¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto A?



b) ¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto B?

c) ¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto C?

d) ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto A?

e) ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto B?

f) ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto C?

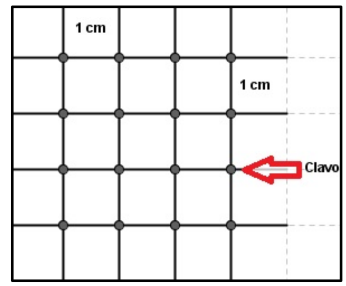
Sugerencia: Si es necesario que hagas un bosquejo de la derivada de la función, lo puedes hacer.

Anexo 3. Situación: Área Extrema

ÁREA EXTREMA

¿De qué se trata? Con esta actividad podemos explorar, entre otras cosas, como alguna de las variables puede obtener un valor máximo.

¿Cómo lo vamos a hacer? El geoplano es un recurso didáctico para la introducción de gran parte de los conceptos geométricos, en esta ocasión lo utilizaremos para ver cuánto rectángulos se pueden construir con el mismo perímetro.



Materiales. 1 geoplano de $24 \times 24\ cm$, 1 bicolor y 1 bolsa de ligas de hule del número 18.

Integrantes del equipo.
1E1 ____
2E1 ____
3E1 ____
4E1 ____

Procedimiento

1. Empleando el geoplano y las ligas que se les han proporcionado contesten por favor las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué es lo que puede variar al construir rectángulos con perímetro fijo de 20 centímetros?

   b. ¿Cuántos rectángulos que tengan 20 cm de perímetro pueden formar?

2. Con las ligas, formen algunos de los rectángulos en diferentes lugares del geoplano.
3. Ahora completen la siguiente tabla (ordenando de menor a mayor en la columna **Ancho**) y formen los rectángulos en el geoplano empleando diferentes ligas.

Rectángulo	Ancho (cm)	Largo (cm)	Perímetro	Área
1			20	
2			20	
3			20	
4			20	
5			20	
6			20	
7			20	
8			20	
9			20	
10			20	

4. En la cuadrícula que se anexa en la hoja 3 (**A**) grafiquen los datos que obtuvieron en la tabla. Con color azul traza ancho-largo y con color rojo ancho-área.

5. Contesten las siguientes preguntas (reflexionen en equipo, hagan sus anotaciones, explicando lo más detallado posible)
   a. ¿Cuáles son las dimensiones que dan el área máxima?

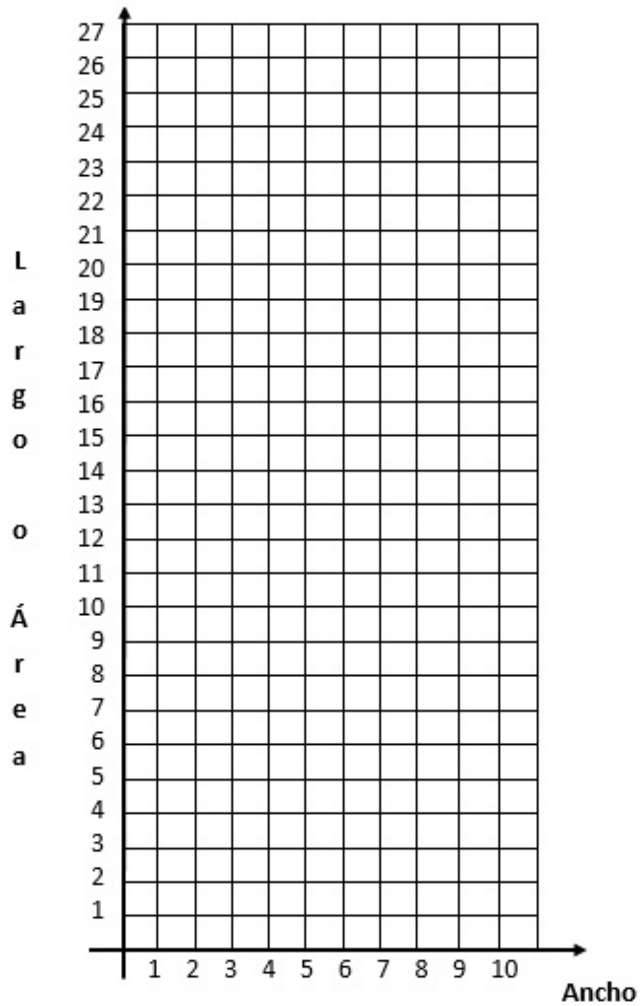
   b. Para la gráfica Ancho – Área (rojo) tracen una recta paralela al eje "x", o sea, de pendiente igual a cero, pero que corte a la gráfica en sólo un punto. ¿Qué punto es éste?

6. Realicen el mismo experimento para rectángulos de perímetro igual a 30 cm y encuentren su área máxima utilizando una recta de pendiente igual a cero. Registren sus datos en la hoja 3 (**B**).

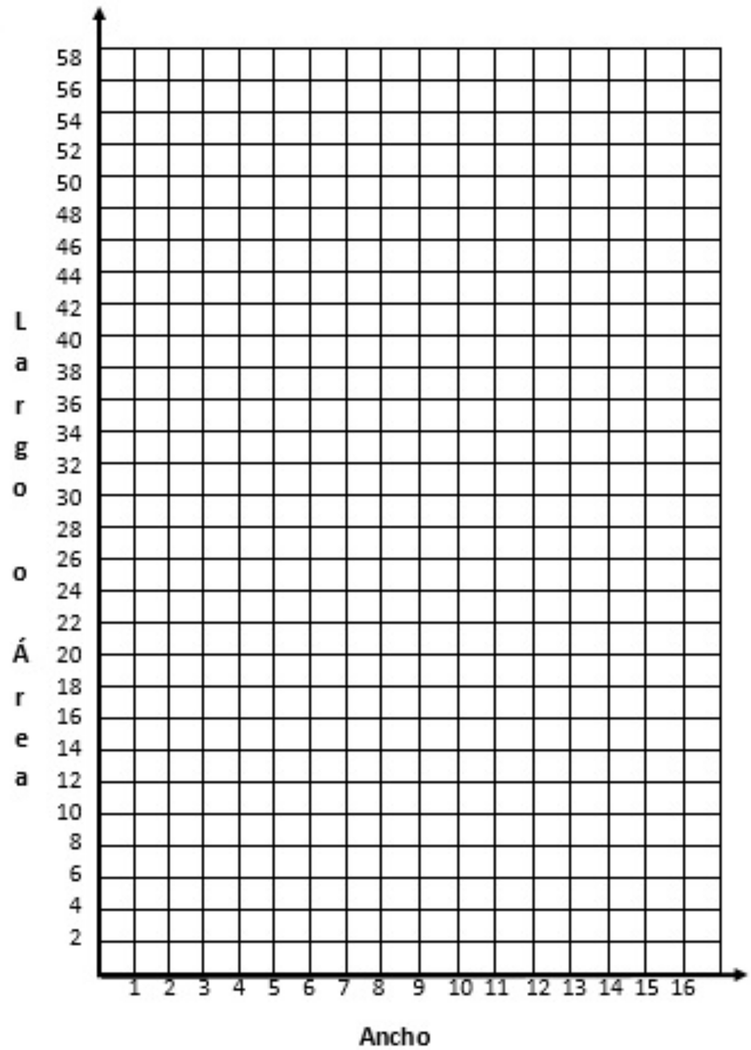
Rectángulo	Ancho (cm)	Largo (cm)	Perímetro	Área
1			30	
2			30	
3			30	
4			30	
5			30	
6			30	
7			30	
8			30	
9			30	
10			30	
11			30	
12			30	
13			30	
14			30	
15			30	

Ancho=__________ **Largo=__________** **Área Máxima=___________**

A



B



7. ¿Qué observan en la gráfica cuando se cambia el perímetro de 20 cm a 30 cm?

8. ¿Qué es lo que le pasa a el área cuando el ancho pasa de 5 a 6 centímetros, tanto en el caso Perímetro=20 cm como en el caso Perímetro =30 cm? (muéstrelo en el gráfico y explique enseguida)

9. Abran el archivo AreaExtrema.ggb de Geogebra en su computadora y realicen lo siguiente:

a. En la casilla **Perímetro** ingresen el valor 10.
b. Ubiquen el punto **D** del rectángulo que se forma y deslícenlo de izquierda a derecha.
c. Repita el paso a) y b) con los valores 20 y 30.
d. Activen la casilla **Mostrar Paralelas** y deslícelas sobre el eje Largo-Área (use los puntos de corte con este eje).
e. Para la gráfica Ancho-Área con perímetro **10 cm** desplacen las rectas paralelas (siempre L_1 por debajo de L_2) de tal manera que se intersecten con las rectas verticales (líneas punteadas) y con la gráfica en el mismo punto.

i. ¿Qué es para usted $\Delta Ancho$?

ii. ¿Qué es para usted $\Delta Área$?

iii. Cuánto vale $\Delta Area_{10} =$

f. Realice los mismos desplazamientos que en el inciso e) con las gráficas de perímetro 20 cm y 30 cm, apóyese en lo que obtuvo en las tablas de los puntos 3 y 4, y escriba los valores correspondientes a

$\Delta Area_{10} =$ ____________

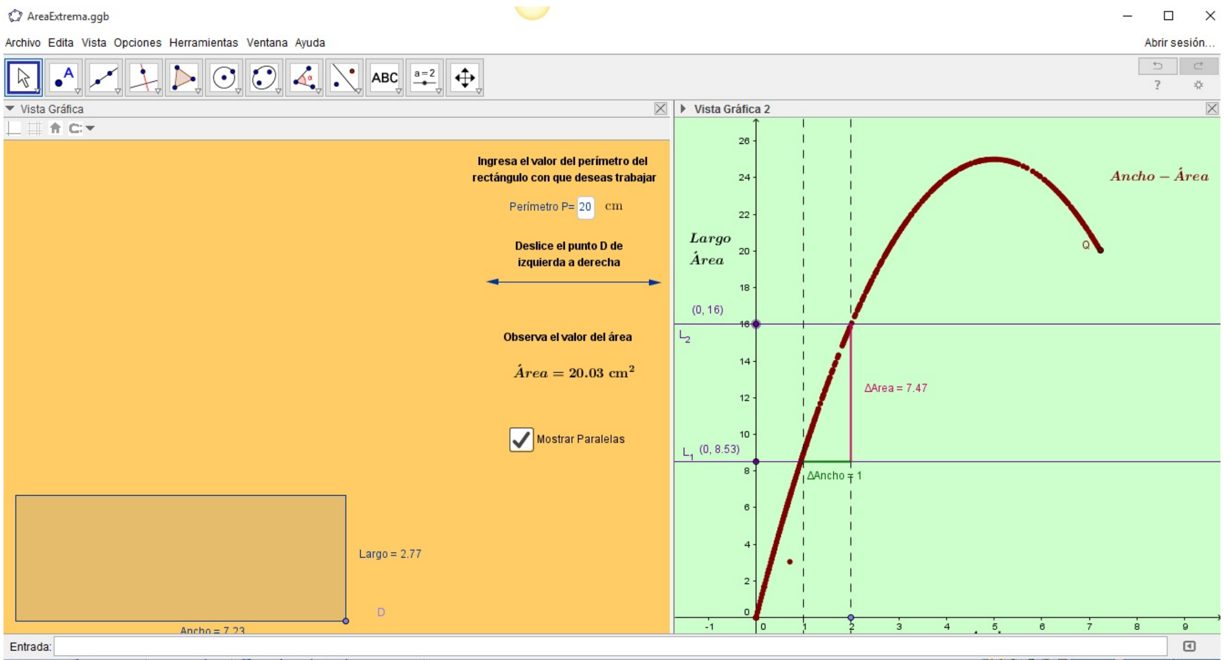
$\Delta Area_{20} =$ ____________

$\Delta Area_{30} =$ ____________

g. ¿Cuál es el valor de $\Delta Area_{50} =$?

¿Por qué? (explique lo más claro y detallado posible)

La imagen muestra la actividad en Geogebra (Momento 3)



Anexo 4. Situación: Agua Fría

AGUA FRÍA

¿De qué se trata? Al entrar en contacto dos sustancias de diferentes temperaturas, sufren de variación en su temperatura hasta llegar a un equilibrio térmico.

¿Cómo lo vamos a hacer? Vamos a ver qué tan rápido podemos enfriar un vaso lleno de agua por medio de contacto con agua helada, pero sin mezclar ambos líquidos.

¿Qué necesitamos? Primero que nada hay que calentar agua, ya sea en cafetera o en la estufa.

Materiales. 3 vasos de plástico, un recipiente en donde quepa un vaso de plástico, agua, hielos, 2 sensores de temperatura, 2 calculadoras gráficas y un bicolor.

Integrantes del equipo

1. Quien toma los datos de la disminución de temperatura del agua caliente.
2. Quien toma los datos del calentamiento del agua fría.
3. Las personas que controlan el experimento.

1E1 ____

2E1 ____

3E1 ____

4E1 ____

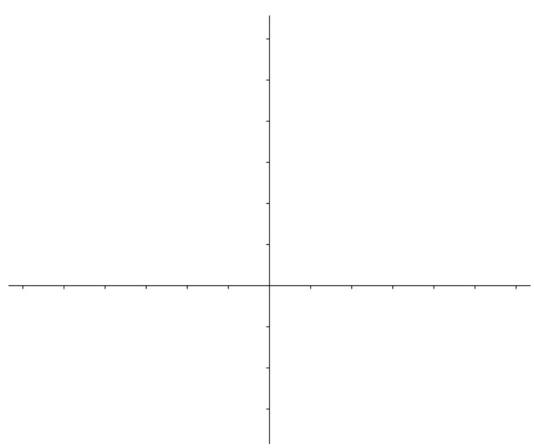
Actividad 1. Se calienta agua y se vierte en un vaso, el cual se coloca dentro de un recipiente con agua fría. Contesten lo siguiente:

i) ¿Qué creen que va a pasa con la temperatura del agua caliente y la temperatura del agua fría?

____

ii) ¿Qué variables identifican?____

iii) ¿Cómo creen que sería la gráfica de la temperatura del agua caliente y la temperatura del agua fría conforme transcurra el tiempo? (Realicen un esbozo de las gráficas)



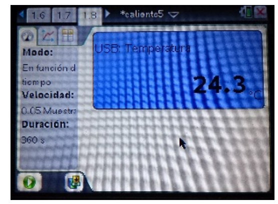
Experimento

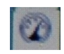
Pasos:

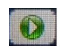
1. Calienten agua (en la estufa o cafetera) y llenen el vaso de plástico que tiene la marca roja (hasta esa altura), con cuidado de no quemarse.

2. En otro vaso viertan agua previamente enfriada con hielos (la misma cantidad que el agua caliente-marca azul) y deposítenla en el recipiente R, evitando derramar líquido.

3. Coloquen la punta de un sensor en el agua caliente y otro en el agua fría y esperen 15 segundos para que se estabilice un poco la temperatura del sensor con el agua, aparecerá algo similar a la imagen.



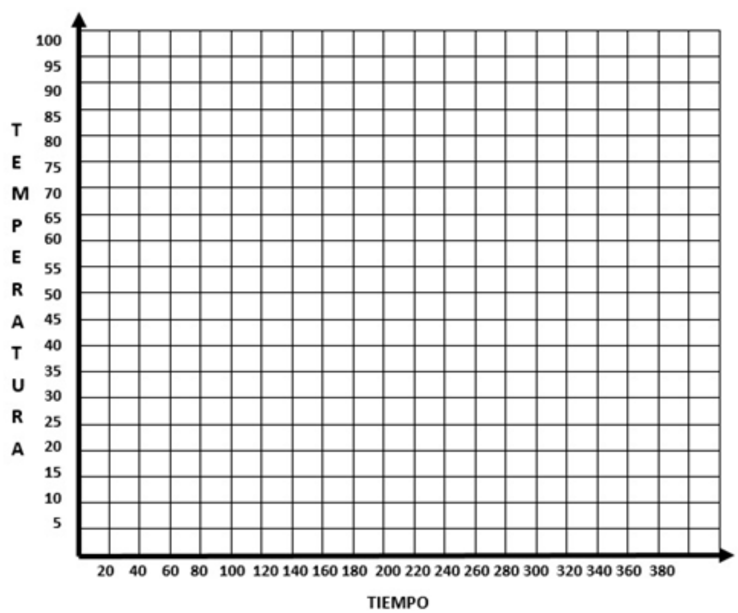
4. Cambien en las dos calculadoras de la vista medidor  a la vista tabla 

5. Transcurridos los 15 segundos, coloquen el vaso que contiene el agua caliente dentro del recipiente que contiene el agua fría, evitando mezclar los tipos de agua y sin sacar los sensores, y presionen la tecla de recopilación de  datos en ambas calculadoras al mismo tiempo.

6. Copien los datos recopilados en la vista tabla tanto de la temperatura del agua caliente como del agua fría en las columnas correspondientes de la **Tabla A** y hagan las gráficas correspondientes a las variaciones de temperatura del agua caliente (rojo) y del agua fría (azul). Guarden los datos con el nombre **captura1.**

Tiempo	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0		
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		
160		
180		
200		
220		
240		
260		
280		
300		
320		
340		

⇦ **Tabla A**



7. *Preguntas para reflexionar*

Tabla B

a. ¿Cuál es la temperatura inicial del agua caliente?_______________

b. ¿Cuál es la temperatura inicial del agua fría? __________________

c. ¿Concuerda lo que obtuvieron con lo que contestaron en los inciso i) y iii) al inicio de la actividad?_______

¿Por qué? ____

____

d. ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica que obtuvieron para el vaso de agua caliente?

A) Creciente B) Decreciente C) Ninguna

e. ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica que obtuvieron para el agua fría?

A) Creciente B) Decreciente C) Ninguna

f. ¿Cuál es aproximadamente la temperatura de equilibrio entre el agua caliente y el agua fría?

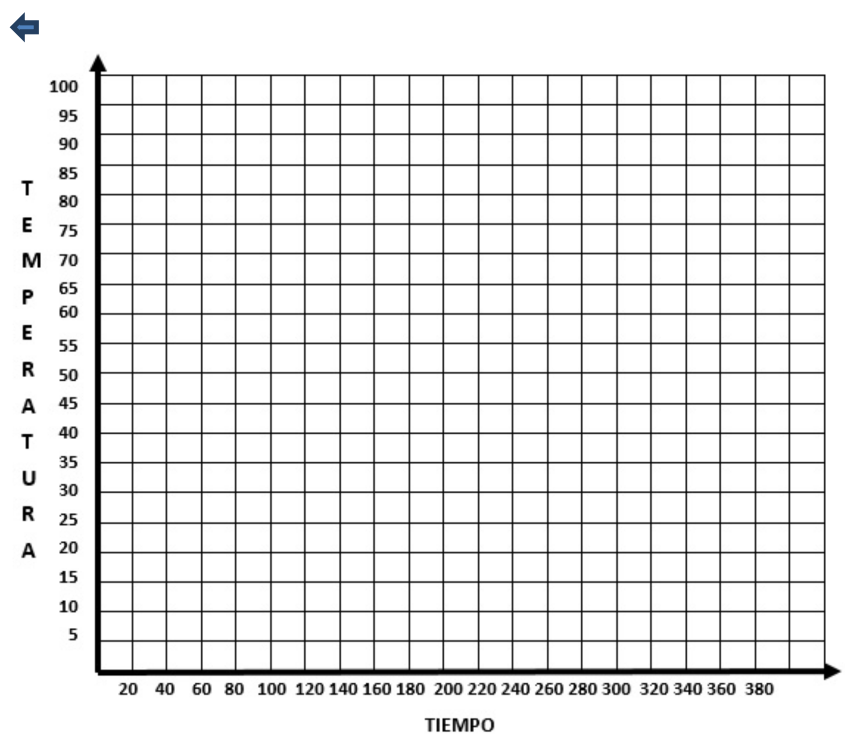
g. ¿Cómo se comporta la temperatura del agua caliente con respecto al tiempo?

h. ¿Qué es más rápido, el agua caliente enfriándose o el agua fría calentándose?

i. ¿Qué pasa después de que llega al equilibrio térmico?

8. Repitan el procedimiento desde el paso 1 hasta el 7, pero ahora agreguen el doble de agua fría (vasos con marca azul) y registren los datos en la **Tabla B**. Guarden los datos con el nombre **captura2**.

Tiempo (seg)	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0		
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		
160		
180		
200		
220		
240		
260		
280		
300		
320		
340		
360		



Contesten lo siguiente:

a. Del tiempo 60 al 80 segundos, ¿Cuánto cambio la temperatura en el experimento 1 y cuánto en el experimento 2?

b. ¿Qué es lo que notas cuando el agua fría es el doble del agua caliente?

9. Diríjanse con el profesor para que transfiera los datos de la calculadora (agua fría) a una hoja de cálculo y realicen lo siguiente:

a. Abran el archivo de Excel AguaFria.xlsx y copien los datos a la hoja de cálculo del archivo AguaFria.ggb (primero la captura 1 en las columnas A y B y después la captura2 en las columnas C y D).

b. Seleccionen los datos de la primera captura (Click botón derecho) y en el menú elijan crear lista de puntos, y después realicen lo mismo para la otra captura.

c. Desplacen las rectas paralelas A, C y B, D para que coincidan con los valores del tiempo 60 y 80 y sus correspondientes temperaturas.

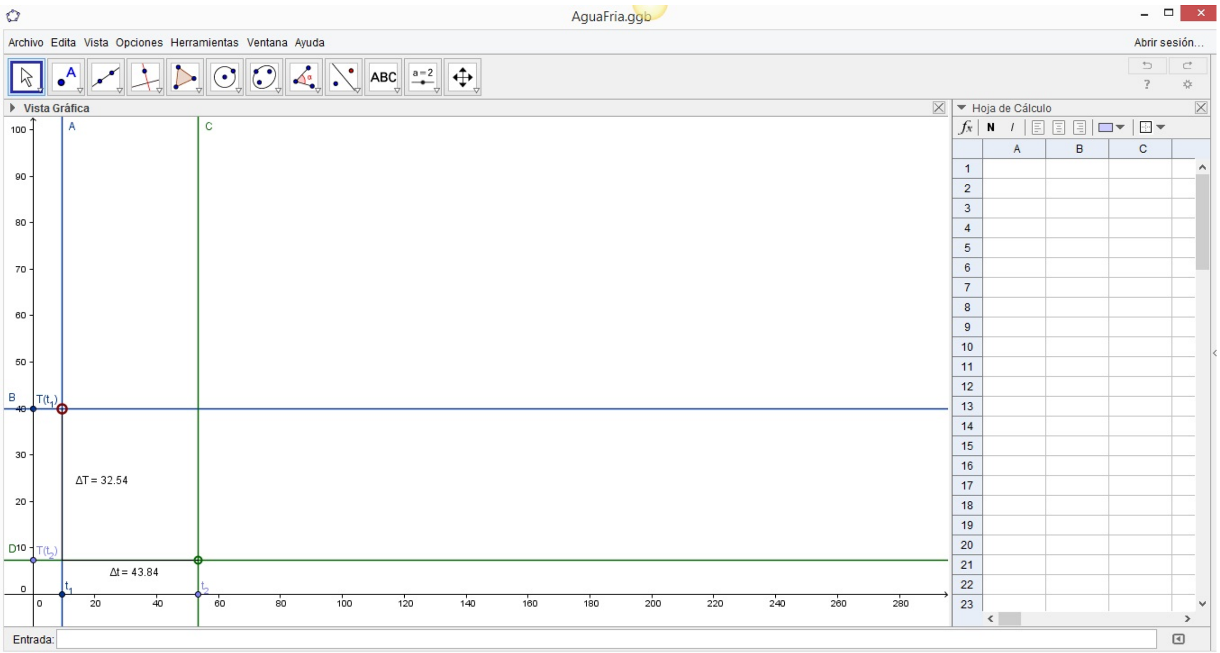
d. Nuevamente ¿Cuánto cambio la temperatura en el experimento 1 y cuánto en el experimento 2?

e. ¿Qué es lo que notas cuando el agua fría es el doble del agua caliente? (expliquen lo más detallado posible)

f. ¿Cómo será la gráfica en ese mismo intervalo si se agregara el triple de agua fría?

i. ¿Aproximadamente cuál sería el valor del cambio?

La imagen muestra la actividad en Geogebra de la actividad Agua Fría (Momento 3)



Anexo 5. Situación: Representando el Movimiento

REPRESENTANDO EL MOVIMIENTO

¿De qué se trata? De usar tu propio movimiento para hacer una gráfica de posición con respecto al tiempo.

¿Cómo lo vamos a hacer? Leeremos la aventura de Valentina y representaremos, a manera de obra de teatro, la trayectoria que siguió en su accidentado camino.

Materiales. Un camino recto donde pueda simularse el camino que recorre Valentina, un sensor de movimiento, una calculadora gráfica, cinta de medir y un bicolor.

Integrantes del equipo.

1. Valentina, 2. Juan,
3. Quien controla y toma el tiempo 4. Un observador.

1E4 ____

2E4 ____

3E4 ____

4E4 ____

"Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bien amado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que le obligó a recuperar estos instantes, también aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía".

"La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto al salón de música en el patio circular que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos."

Actividad 1. ¿Cómo creen que será la gráfica de la posición de Valentina conforme transcurra el tiempo? (Realicen un esbozo de la gráfica) y expliquen ¿por qué?

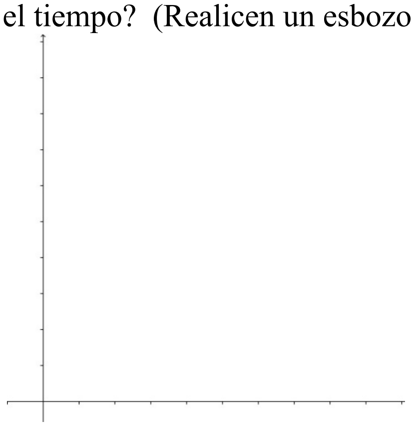


Tabla A

Tiempo	Posición

Procedimiento:

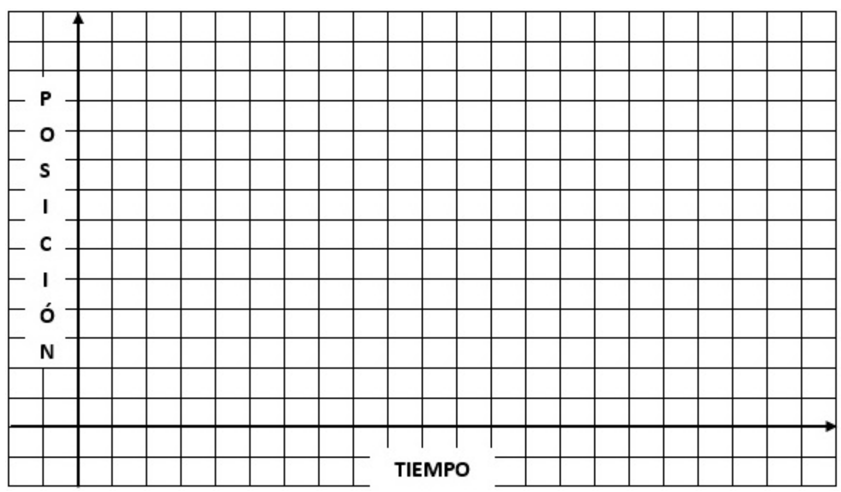
1. Para simular el recorrido de Valentina cambiarán los valores que usarán, los 500 metros se ...ertirán en **5 metros** y los 9 minutos en **nueve** segundos.

2. ... equipo midan sobre el piso la distancia de 5 metros desde en donde estará ubicado el ...r de movimiento (salón de música), y ubiquen una marca en ese lugar (biblioteca).

...cten el sensor de movimiento CBR a la calculadora y presionen la tecla de ...pilación de datos.

...licen la simulación! Recuerden que Juan debe detenerla 4 minutos, de acuerdo con la ...ción de Valentina, hagan la conversión correspondiente y registren sus datos en la ...a A (Convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la ...oteca y negativa en sentido contrario).

5. En la siguiente cuadrícula señala los puntos posición-tiempo para cada una de las marcas.



6. *Preguntas para reflexionar*
   - ***a.*** ¿Qué tipo de gráfica obtuvieron?
   - ***b.*** ¿Pueden encontrar una ecuación que dé esa gráfica?

...recorrido de Valentina?	Dibuja un trozo de la gráfica
Más lento	
Más rápido	
Disminuye su velocidad	
Aumenta su velocidad	
Se detiene	

c. ¿Y si eligen sólo un trayecto del recorrido?

d. ¿Pueden obt... de ese trayec...

e. ¿Cómo pueden calcular la velocidad ... trayectos?

f. De acuerdo con sus observaciones y las relaciones que encontraron, llenen la tabla de la derecha.

7. Trabajando en clase

Comparen su gráfica con la gráfica de otro equipo, ¿cuáles son las similitudes y cuáles las diferencias?

8. Abran el archivo Valentina.ggb en la computadora.

9. La gráfica representa la posición respecto al tiempo de Valentina cuando se encuentra a Juan antes de llegar a la biblioteca (uno de los posibles casos). Conteste las preguntas y completen la siguiente tabla, auxíliense desplazando el punto B sobre la gráfica

a. ¿Qué representa Δt?

b. ¿Qué representa ΔP?

c. En este caso particular $\Delta t=0.2$ segundos, deslicen el punto B, de tal manera que la abscisa del punto C también quede dentro de ese intervalo, de esta manera están eligiendo dos puntos

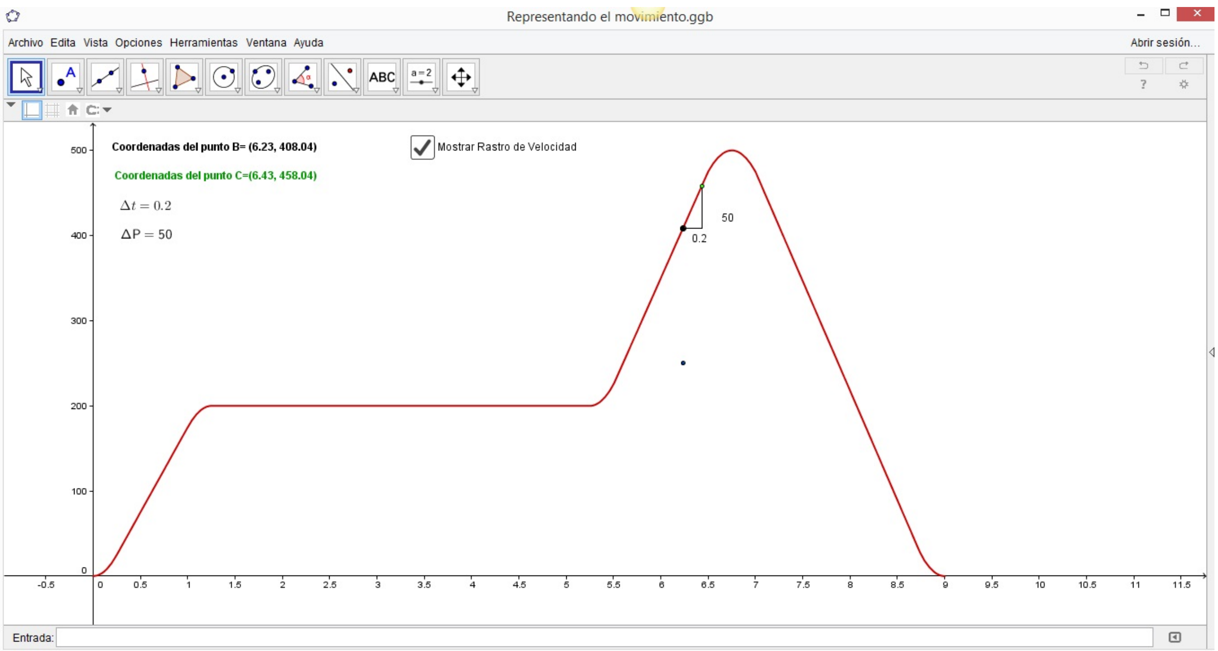
Intervalo	**Punto (t,P(t))**	$\boldsymbol{\Delta P}$	$\boldsymbol{\frac{\Delta P}{\Delta t}}$	**Observaciones para el intervalo**
(0,0.25)				
(0.25,1)				
(1,1.25)				
(1.25,5.25)				
(5.25, 5.5)				
(5.5,6.5)				
(6.5,7)				
(7,8.75)				
(8.75,9)				

d. ¿Qué es para ustedes $\frac{\Delta P}{\Delta t}$?

e. Den un esbozo de la gráfica de la velocidad de Valentina en ese periodo de tiempo (reverso de la hoja).

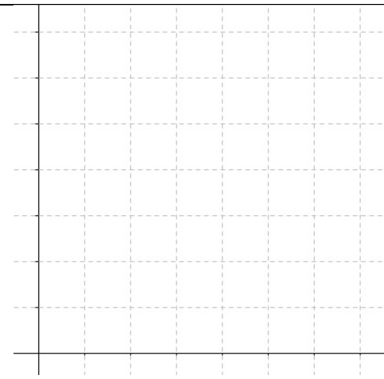
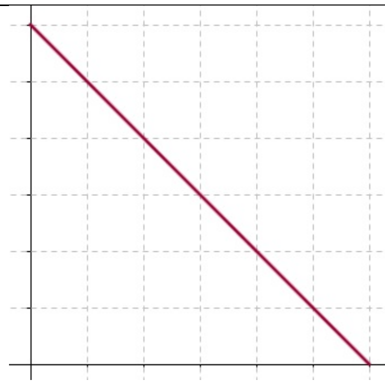
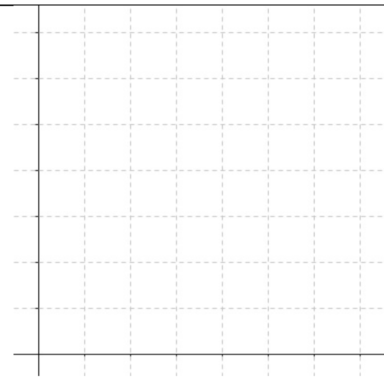
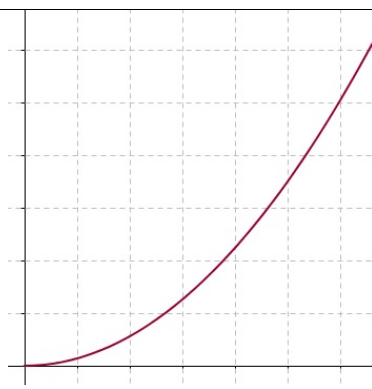
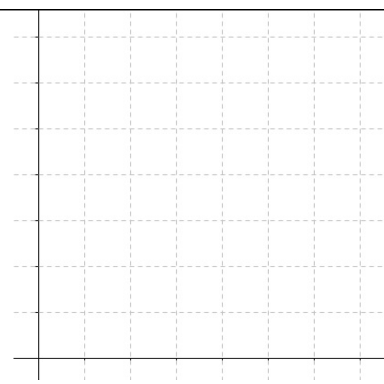
f. Activen la casilla **Mostrar Rastro de Velocidad** y deslicen nuevamente el punto B sobre la gráfica, ¿qué pueden concluir?

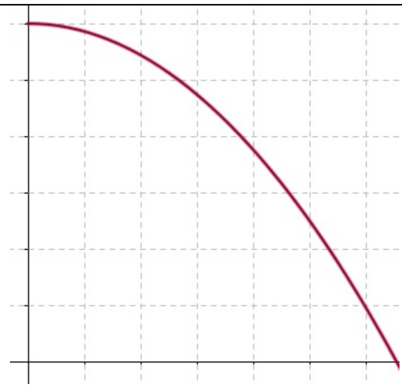
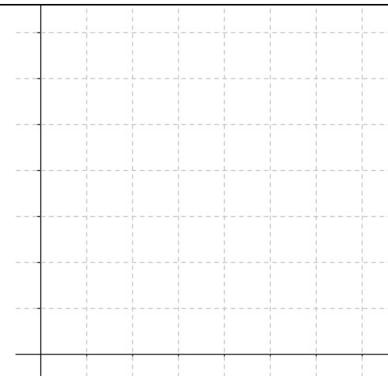
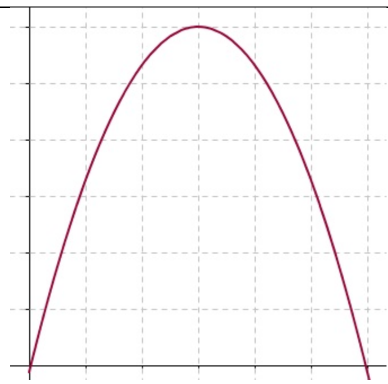
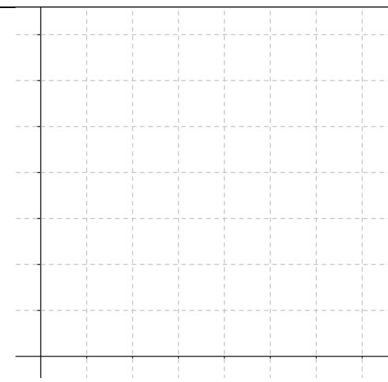
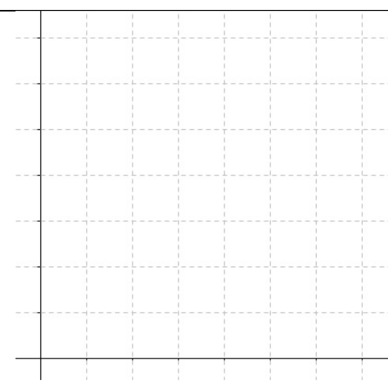
La imagen muestra la actividad en Geogebra de Representando el Movimiento (Momento 3)



Anexo 6. Actividades previas a la situación: Representando el Movimiento

Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Intenten reproducir cada gráfica empleando el sensor de movimiento, describan lo que ocurre con la velocidad en cada caso y esbocen a su derecha con color **azul** la gráfica de la velocidad.

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción</td></tr>
</table>

	
Descripción	
	
Descripción	
	
Descripción	

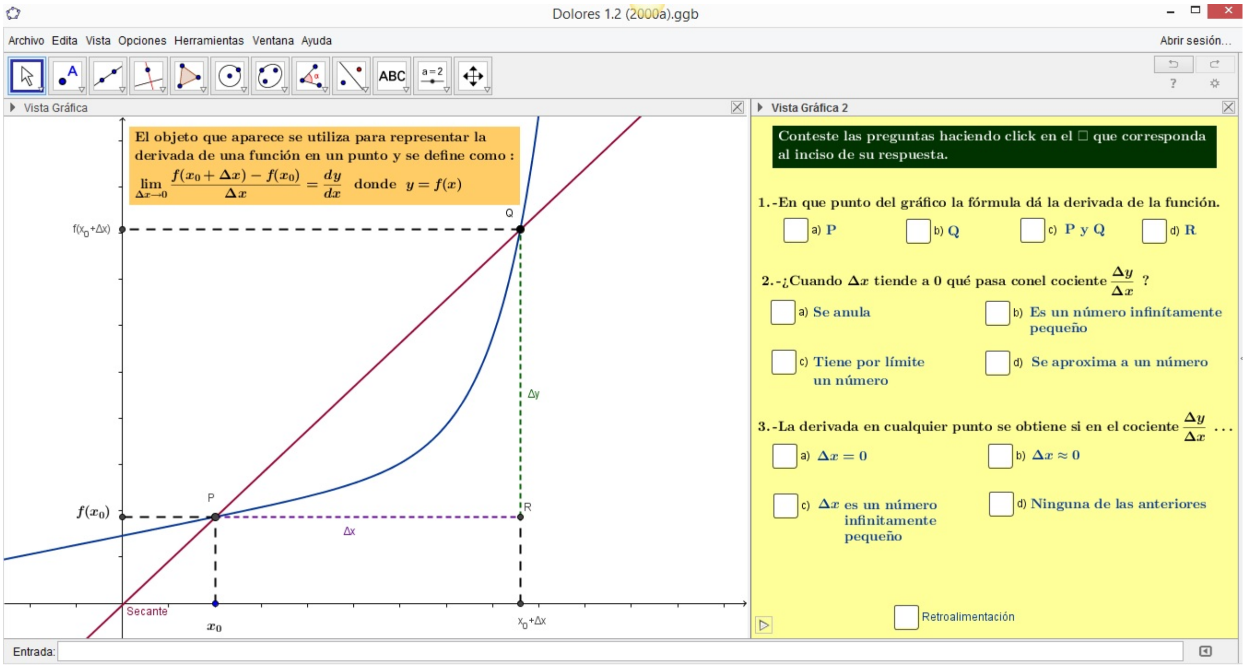
1E1 ________________________________

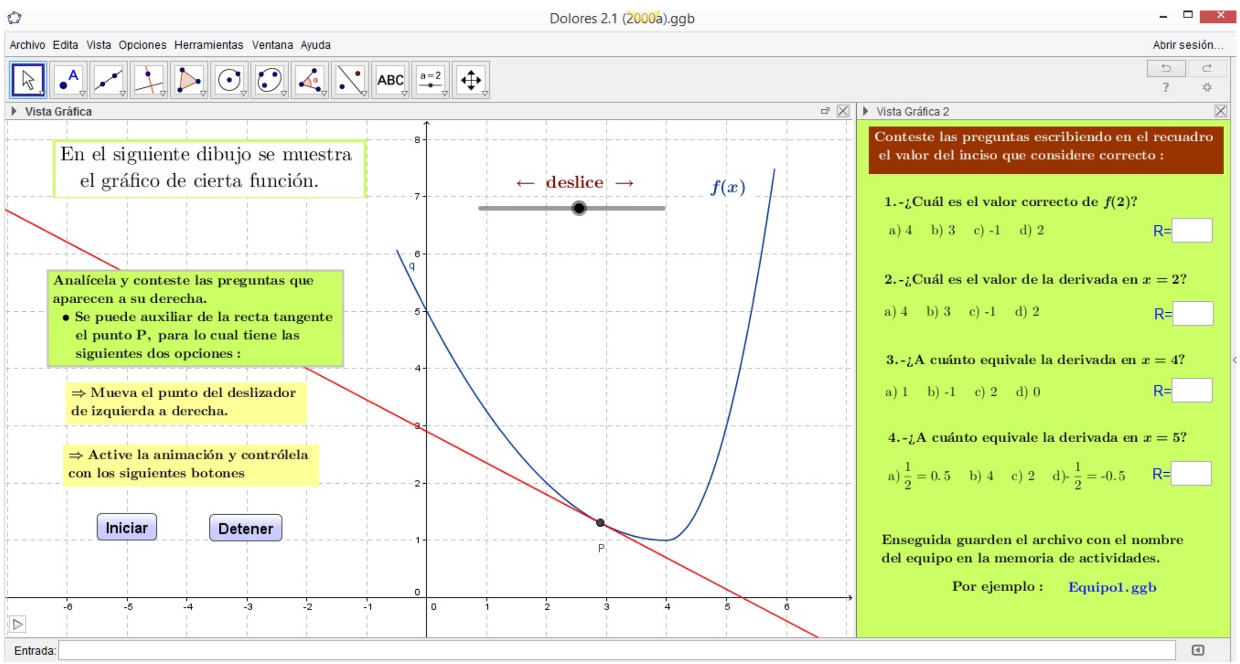
2E1 ________________________________

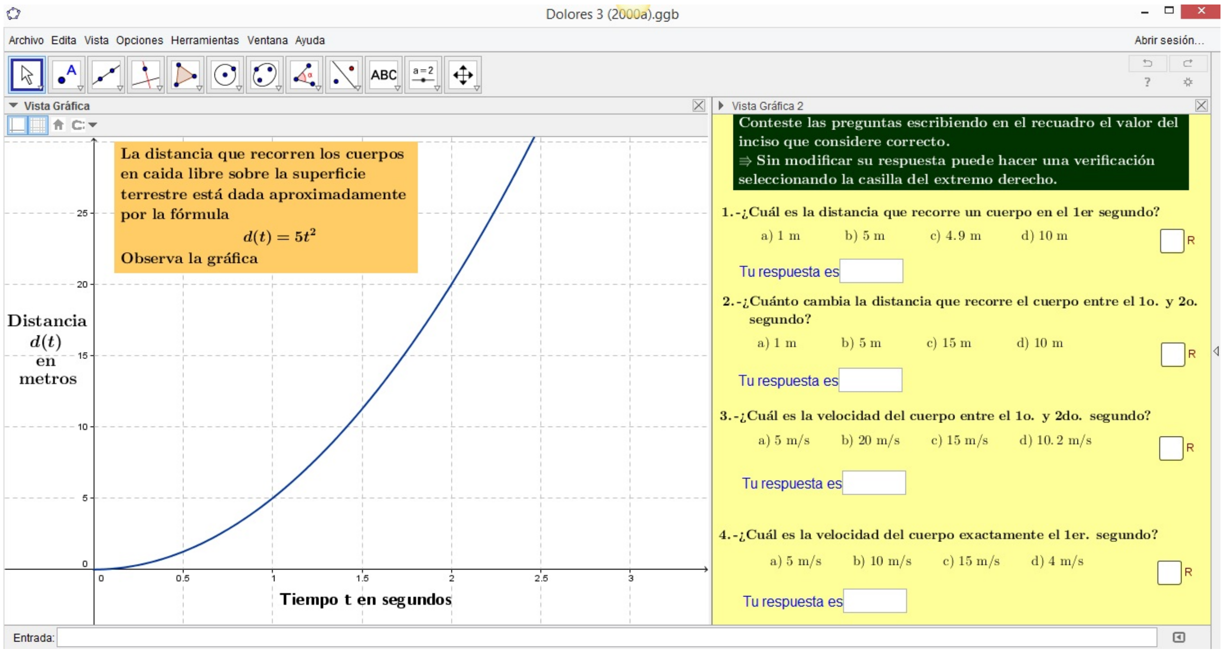
3E1 ________________________________

4E1 ________________________________

Anexo 7. Actividades de Cierre






Dolores 3 (2000a).ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Gráfica
La distancia que recorren los cuerpos en caida libre sobre la superficie terrestre está dada aproximadamente por la fórmula
$d(t) = 5t^2$
Observa la gráfica
Distancia $d(t)$ en metros
Tiempo t en segundos
Vista Gráfica 2
Conteste las preguntas escribiendo en el recuadro el valor del inciso que considere correcto.
⇒ Sin modificar su respuesta puede hacer una verificación seleccionando la casilla del extremo derecho.
1.-¿Cuál es la distancia que recorre un cuerpo en el 1er segundo?
a) 1 m b) 5 m c) 4.9 m d) 10 m
Tu respuesta es
2.-¿Cuánto cambia la distancia que recorre el cuerpo entre el 1o. y 2o. segundo?
a) 1 m b) 5 m c) 15 m d) 10 m
Tu respuesta es
3.-¿Cuál es la velocidad del cuerpo entre el 1o. y 2do. segundo?
a) 5 m/s b) 20 m/s c) 15 m/s d) 10. 2 m/s
Tu respuesta es
4.-¿Cuál es la velocidad del cuerpo exactamente el 1er. segundo?
a) 5 m/s b) 10 m/s c) 15 m/s d) 4 m/s
Tu respuesta es
Entrada:

Anexo 8 Deducción de ley de enfriamiento y comparación con la producción del equipo E1

De acuerdo con la Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton (Zill y Wright, 2015) *"la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, que se llama temperatura ambiente"(p. 21).* Es decir, el descenso (o ascenso) de temperatura, depende en cada instante de la diferencia entre la temperatura actual del cuerpo, T, y la temperatura ambiente, T*a*. Ahora bien, puesto que durante el proceso la temperatura del cuerpo está disminuyendo, la relación entre dicha temperatura (T) y el tiempo (t) no puede ser lineal, sino que T disminuirá cada vez más lentamente hasta alcanzar el objeto la temperatura ambiente (tendencia al equilibrio). Adicionalmente pueden influir otros factores que, al igual que en los problemas rutinarios del DME, no se tomaron en cuenta en nuestra experimentación, como, por ejemplo, la masa del cuerpo, su calor específico, entre otros. Por lo tanto dependencia de la temperatura con el tiempo no es lineal y simbólicamente se expresa por la ecuación $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$… (1), que se puede resolver empleando el cálculo diferencial para obtener las leyes sobre el enfriamiento y sobre el calentamiento.

Resolviendo la ecuación anterior por la técnica de variables separables, tenemos

$$\frac{dT}{T-T_a} = -kdt \qquad (2)$$

Integrando cada miembro de la ecuación (2)

$$\int \frac{dT}{T-T_a} = \int -kdt \qquad (3)$$

Haciendo un cambio de variable, si $u = T - T_a$, $du = dT$, entonces

$$\int \frac{du}{u} = -k \int dt, \quad \text{que implica} \quad \ln(u) = -kt + c \quad \text{o bien} \quad \ln(T - T_a) = -kt + c \qquad (4)$$

Aplicando la función exponencial

$$T - T_a = e^{-kt+c} = e^{-kt} \cdot e^c = e^{-kt} \cdot C \quad \text{en donde} \quad e^c = C$$

Por lo tanto

$$T - T_a = Ce^{-kt}$$

Y la ley de enfriamiento/calentamiento será $T = T_a + Ce^{-kt}$ (5)

En casos particulares sólo es necesario sustituir las condiciones iniciales para determinar los valores de *C* y *k*.

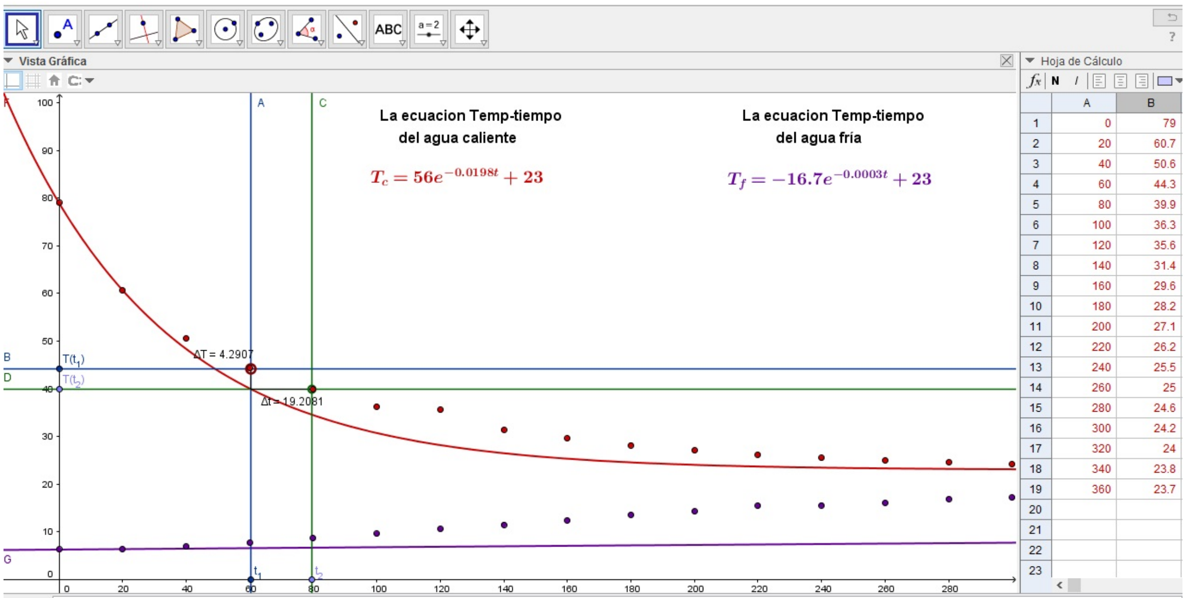
Por ejemplo, para la captura de la temperatura del agua caliente en el primer experimento realizado por el E1, las condiciones iniciales fueron: para $t_0 = 0$ segundos, $T = 79°$ y para $t_1 = 20$ segundos, $T = 60.7°$

Sustituyendo los primeros dos valores en la ecuación (5) tenemos $79 = 23 + Ce^{-k(0)}$, de donde se tiene que $C = 56°$. Tomando este valor y sustituyendo ahora la temperatura después de veinte segundos, tendremos $60.7 = 23 + 56e^{-kt}$, resolviendo se determina el valor de $k = 0.01978457981$. De esta manera la ley de enfriamiento que aproxima el comportamiento de los datos capturados con las condiciones iniciales mencionadas es:

$$T = 23 + 56e^{-0.01978457981t}$$

Similarmente con las condiciones del agua fría se obtiene

$$T = 23 - 16.7e^{-0.00300301203t}$$



También se puede tratar de ajustar una curva a los datos, entre las que mejor lo harán estará la función exponencial, para ello se puede recurrir a un análisis de regresión en el mismo Geogebra.

Anexo 9. Conceptos

Se entiende por *Saber Matemático* a aquel conocimiento que es matemático pero que se encuentra en uso ante situaciones específicas no necesariamente matemáticas (ver Montiel & Buendía, 2012).

La resignificación no implica establecer otros significados únicamente, sino que se generan *significados a través del uso* en la situación donde desarrollan su función y su forma de acuerdo con lo que organiza el grupo humano (Domínguez, 2003; Buendía, 2011).

Simulación. Es una estrategia que permite imitar problemas complejos del mundo real para analizar el comportamiento de los sistemas, así como de su progreso (Suárez, 2014).

Situación. Entendida como el conjunto de condiciones de un fenómeno o pregunta que propicie una problematización, será el instrumento metodológico que permita el desarrollo de acciones en el sistema didáctico (Suárez, 2014).

Visualización. Habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido, se trata de un proceso mental demasiado útil en diversas áreas del conocimiento matemático y científico (Cantoral, 2013a, p.47)

Geoplano. Herramienta didáctica construida generalmente con una base cuadrada de madera, unos clavos fijados a la madera en diversos tipos de arreglos y un conjunto de ligas, preferiblemente de colores (Duarte, 2013, p. 526).