

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS**  
**“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”**

---



**UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS**



**Las competencias matemáticas que se favorecen en  
los libros de texto para los temas de límite en  
bachillerato.**

**Estudio comparativo entre currículum oficial y potencial.**

Tesis para obtener el grado de  
**Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel  
Bachillerato**

Presenta:

**Raúl Zamora Rayas**

Directores del trabajo de grado:

**Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez.**

**Dr. José Luis Lupiáñez Gómez**

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo brindado a través de la Beca Nacional y la Beca Mixta de Movilidad Internacional, lo cual posibilitó la realización de mis estudios de maestría y la culminación de este trabajo de grado.

Becario No. 308244

**A QUIEN CORRESPONDA:**

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre “Competencias matemáticas que se favorecen en los libros de texto para los temas de límite en bachillerato. Estudio comparativo entre currículum oficial y potencial” y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. Raúl Zamora Rayas egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 28 de septiembre del 2015.

Judith A. Hda S.

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

A handwritten signature in blue ink, consisting of stylized letters and a horizontal line at the bottom.

Dr. José Luis Lupiáñez Gómez

## CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 7 del mes de septiembre del año 2015, el que suscribe, Ing. Raúl Zamora Rayas alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 33147099, manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado intitulado “Las competencias matemáticas que se favorecen en los libros de texto para los temas de límite en bachillerato. Estudio comparativo entre currículum oficial y potencial”, bajo la dirección de la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez y el Dr. José Luis Lupiáñez Gómez.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.



---

Raúl Zamora Rayas.

## RESUMEN

La implementación de la Reforma Integral de la Educación Media Superior representa para los docentes una serie de retos y preocupaciones. Entre éstos el nuevo enfoque por competencias y la posible desconexión curricular caracterizada por la ausencia de materiales adecuados a las nuevas disposiciones. Si a esto le sumamos la importancia que los libros de texto tienen en el proceso de enseñanza de las matemáticas, la elección de materiales por parte de los profesores cobra mayor relevancia. Por lo anterior se identificó cuáles de las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas del Marco Curricular Común se ven favorecidas con las actividades propuestas en tres libros de texto. El estudio se acota al tema de límites, debido a su importancia como concepto estructurador y su complejidad para la enseñanza y contextualización. Para tal fin se diseñó un instrumento, tomando como base teórico-metodológica los dos primeros organizadores curriculares del análisis didáctico. Los resultados se organizan en tres rubros. Los que corroboran la importancia del libro de texto en la práctica del profesor e ilustran la percepción y los criterios de selección de los profesores encuestados. Un comparativo de las dimensiones de los significados que se promueven en cada libro de texto; los cuáles si bien son coincidentes en el significado de referencia propuesto por el programa oficial, dejan ver la necesidad de utilizar más de un libro de texto. Por último se presentan las capacidades, que pueden ser movilizadas por los estudiantes, en la solución de los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto. Las cuales impactan en el logro de objetivos de aprendizaje teóricos, técnicos y prácticos que a su vez favorecen el desarrollo de ciertas competencias. En este rubro se identificaron desequilibrios importantes para el tema de límites, principalmente en su aplicación en contextos no matemáticos.

**Palabras clave:** *Currículum-Potencial, Currículum-Oficial, Competencias, Análisis de textos y Límite.*

## ABSTRACT

The implementation of the *Reforma Integral de la Educación Media Superior* for the teachers represents a range of challenges and concerns. Among these the new based on competencies approach and the possible curricular disconnection characterized by the lack of adequate materials to the new provisions. If we add the importance of the textbooks they have in the process of teaching mathematics, the choice of materials by teachers becomes more relevant. Therefore which ones the extended to the field of mathematics Curriculum Framework Common Disciplinary competences are favored with the activities proposed in three textbooks were identified. The investigation is bounded to the subject of limits, because of its importance as a structural concept and their complexity for teaching and contextualizing. For this purpose an instrument was designed, on the theoretical and methodological foundation the first two curriculum organizers of the didactical analysis. The results are organized under three headings. Which they confirm the importance of the textbook teacher in practice and exemplify the perception and the criteria for selection of the teachers surveyed. A comparative of the dimensions of the meanings that are promoted in each textbook; that although they are coincident in the meaning of reference proposed by the official program, reveal the need to use more than a textbook. Finally the capabilities that can be mobilized by students in solving exercises and problems proposed in the textbooks are presented. Of which impact the achievement of objectives of theoretical, technical and practical learning which in turn promote the development of some Competences. In this category were identified significant imbalances for the subject of limits, primarily in its application in non-mathematical contexts.

**Keywords:** *Potential Curriculum, Official Curriculum, Competences, Book analysis, Limits.*

# ÍNDICE GENERAL

	Página.
INTRODUCCIÓN	1
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	7
1.1. Antecedentes	8
1.2. Descripción del problema	24
1.3. Justificación	25
1.4. Delimitación del estudio	27
1.4.1. Dificultades relacionadas con el concepto de límite y su vinculación con lo establecido en el programa oficial.	28
1.5. Pregunta de investigación e hipótesis	29
1.6. Objetivo general y objetivos particulares	31
2. MARCO TEÓRICO-CONCEPTUAL	33
2.1. La noción de Currículum	34
2.2. Las Competencias matemáticas enmarcadas en la RIEMS	39
3. MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO	46
3.1. Delimitación de los objetos de estudio correspondientes al currículum oficial y al currículum potencial	47
3.2. Diseño y conformación del instrumento de análisis de libros de texto en términos de las competencias que favorecen	49
3.2.1. Descripción teórico-metodológica del análisis didáctico	50
3.2.2. Descripción teórico-metodológica del análisis de contenido	53
3.2.3. Descripción teórico-metodológica del análisis cognitivo	57
3.3. Análisis de las actividades propuestas en los libros de texto por medio del instrumento diseñado	64
3.4. Análisis de datos obtenidos de la aplicación del instrumento	64
4. SELECCIÓN DE LOS LIBROS DE TEXTO SUJETOS A ANÁLISIS	67
4.1. Algunos datos obtenidos a partir de la aplicación de la encuesta	69

con relación al uso de libros de texto	
4.2. Determinación de los libros de texto sujetos de análisis	71
5. DISEÑO Y CONFORMACIÓN DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS	73
5.1. Análisis de contenido	74
5.1.1. Análisis de contenido aplicado al currículum oficial para el tema de límite en bachillerato	75
5.1.2. Análisis de contenido aplicado a Ibáñez y García (2012)	77
5.1.3. Análisis de contenido aplicado a Valenzuela (2011)	80
5.1.4. Análisis de contenido aplicado a Mora y Del Río, (2009)	84
5.1.5. Reflexiones obtenidas a partir del análisis de contenido aplicado al currículum oficial y potencial	87
5.2. Análisis cognitivo	91
5.2.1. Delimitación de las expectativas de aprendizaje a nivel de competencias	91
5.2.2. Delimitación de las expectativas de aprendizaje a nivel de objetivos específicos	92
5.2.3. Delimitación de las expectativas de aprendizaje a nivel de capacidades	93
5.3. Conformación de los instrumentos de análisis de textos y recolección de datos	96
6. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS	103
6.1. Resultados obtenidos a partir de la encuesta a profesores de COBAEZ	105
6.2. Resultados obtenidos a partir del análisis de contenido aplicado a los libros de texto y el programa oficial	106
6.3. Análisis de datos y resultados obtenidos de la aplicación del instrumento a Ibáñez y García (2012)	108
6.3.1. Análisis de los datos recopilados en la aplicación del instrumento a Ibáñez y García (2012)	109
6.3.2. Presentación de resultados obtenidos de la aplicación del instrumento de análisis a Ibáñez y García (2012)	114
6.4. Análisis de datos y resultados obtenidos de la aplicación del	119

instrumento a Valenzuela (2011)	
6.4.1 Análisis de los datos recopilados en la aplicación del instrumento a Valenzuela (2011)	120
6.4.2. Presentación de resultados obtenidos de la aplicación del instrumento de análisis a Valenzuela (2011)	125
6.5. Análisis de datos y resultados obtenidos de la aplicación del instrumento a Mora y Del Río (2009)	130
6.5.1. Análisis de los datos recopilados en la aplicación del instrumento a Mora y Del Río (2009)	132
6.5.2. Presentación de resultados obtenidos de la aplicación del instrumento de análisis a Mora y Del Río (2009)	137
6.6. Comparativo de resultados obtenidos en el análisis de los libros de texto	142
7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	145
8. REFLEXIÓN	151
9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	155
10. ANEXOS (CD-ROM)	158

# ÍNDICE DE FIGURAS, TABLAS, GRÁFICAS Y MAPAS

<i>Elemento</i>	<i>Página</i>
<b>Figuras</b>	
Figura 1. Dimensiones del Currículum (Rico, 2009, p. 22)	36
Figura 2. Finalidades del Currículum (Rico, 2009, p. 22)	37
Figura 3. Grupos de competencias que conforman el MCC (SEP, SEMS, 2008)	44
Figura 4. Relación entre competencias, capacidades y tareas (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 41)	62
Figura 5. Síntesis de las etapas que conforman la investigación	66
Figura 6. Mapa conceptual general para el límite de una función, construido a partir del análisis del programa oficial de cálculo diferencial	77
Figura 7. Cálculo de un límite a partir de la aproximación en la representación gráfica de la función. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 45)	78
Figura 8. Representación simbólica y genérica del límite de una función. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 44)	78
Figura 9. Representación simbólica y genérica de los límites laterales de una función. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 44)	78
Figura 10. Extensión de la representación simbólica del límite de una función cuando está determinado. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 51)	79
Figura 11. Extensión de la representación simbólica del límite de una función cuando éste no existe. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 81)	79
Figura 12. Mapa conceptual general para el límite de una función en un punto construido a partir del análisis de contenido aplicado a Ibáñez y García (2012)	80
Figura 13. Extensión del cálculo de un límite por aproximación a través de la representación gráfica de la función. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 53)	81

Figura 14. Extensión del límite de una función calculado a través de la aproximación en una tabla. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 43)	82
Figura 15. Extensión de la representación verbal del límite de una función en un punto. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 39)	82
Figura 16. Ejemplo de la representación simbólica del límite de una función cuando está determinado. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 42)	82
Figura 17. Ejemplo de la representación simbólica de los límites laterales de una función, cuando $x$ tiende a cero. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 39)	83
Figura 18: Ejemplo de la representación simbólica del límite de una función cuando éste no existe. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 49)	83
Figura 19. Mapa conceptual general para el límite de una función en un punto, construido a partir del análisis de contenido de Valenzuela (2011)	84
Figura 20. Idea de límite como acercamiento bidireccional de la función a un punto cuando la variable $x$ se acerca a un valor $c$ por ambos lados. Imagen tomada de Mora y Del Río (2009, p. 111)	85
Figura 21. Representación simbólica y genérica del límite de una función. Imagen tomada de Mora y Del Río (2009, p. 109)	85
Figura 22. Representación simbólica y genérica de los límites laterales de una función. Imagen tomada de Mora y Del Río (2009, p. 108)	86
Figura 23 Ejemplo de la representación simbólica del límite de una función cuando está determinado. Imagen tomada de Mora y Del Río (2009, p. 115)	86
Figura 24. Mapa conceptual general para el límite de una función en un punto, construido a partir del análisis de contenido de Mora y Del Río (2009)	87
Figura 25. Mapa conceptual general del límite de una función obtenido del análisis de contenido aplicado al currículum oficial y currículum potencial	90
Figura 26. Portada del libro de texto publicado por Ibáñez y García (2012)	108
Figura 27. Portada del libro de texto publicado por Valenzuela (2011)	119

Figura 28. Portada del libro de texto publicado por Mora y Del Río (2009)	131
---	-----

### ***Tablas***

Tabla 1. Niveles y dimensiones del currículum (Rico, 2008, p. 24)	36
Tabla 2. Dimensiones y niveles de la noción de currículo (Rico, 1997a, p. 409, citado en Lupiáñez, 2009, p. 27)	37
Tabla 3. Conexión entre objetivos específicos de aprendizaje y las competencias matemáticas que promueven	97
Tabla 4. Instrumento de análisis propuesto para identificar las capacidades demandadas en los problemas y ejercicios propuestos para el estudio del límite de una función	100
Tabla 5. Instrumento para la recolección de datos	102
Tabla 6. Comparación entre los resultados de los análisis de contenido realizados a los libros de texto sujetos a análisis	107
Tabla 7. Datos recopilados del análisis de IG5	110
Tabla 8. Datos recopilados del análisis de IG7	111
Tabla 9. Datos recopilados del análisis de IG11	113
Tabla 10. Recopilación de los datos obtenidos del análisis de Ibáñez y García (2012)	115
Tabla 11. Capacidades demandadas según los objetivos específicos de aprendizaje y focos de atención que impactan en Ibáñez y García (2012)	116
Tabla 12. Competencias matemáticas favorecidas en Ibáñez y García (2012)	117
Tabla 13. Datos recopilados del análisis de V1	121
Tabla 14. Datos recopilados del análisis de V13	123
Tabla 15. Datos recopilados del análisis de V16	125

Tabla 16. Recopilación de los datos obtenidos del análisis de Valenzuela (2011)	126
Tabla 17. Capacidades demandadas según los objetivos específicos de aprendizaje y focos de atención que impactan en Valenzuela (2011)	127
Tabla 18. Competencias matemáticas favorecidas en Valenzuela (2011)	129
Tabla 19. Datos recopilados del análisis de MR2	133
Tabla 20. Datos recopilados del análisis de MR10	135
Tabla 21. Datos recopilados del análisis de MR14	137
Tabla 22. Recopilación de los datos obtenidos del análisis de Mora y Del Río (2009)	138
Tabla 23. Capacidades demandadas según los objetivos específicos de aprendizaje y focos de atención que impactan en Mora y Del Río (2009)	139
Tabla 24. Competencias matemáticas favorecidas en Mora y Del Río (2009)	140
Tabla 25. Comparativo de los resultados obtenidos en el análisis de los tres libros de texto.	143

### ***Gráficas***

Gráfica1. Profesores encuestados que imparten o no cálculo diferencial en COBAEZ	68
Gráfica 2. Resultados de la encuesta respecto al uso de libros de texto para la planificación e implementación de los curso	69
Gráfica 3. Percepción de los profesores encuestados acerca del desarrollo de competencias a través de los libros de texto utilizados	60

## INTRODUCCIÓN

En este documento se presentan el proceso y resultado de un trabajo de investigación en el cual se estudiaron las relaciones que guardan los currículum oficial y potencial, con relación a las competencias matemáticas para los temas de límite en la asignatura de cálculo diferencial. Para ello se tomaron, por un lado, aquellas establecidas en el currículum oficial concretado dentro del Marco Curricular Común (MCC), que propone la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) en México. Por otro lado, aquellas que se favorecen en el currículum potencial, específicamente en los libros de texto propuestos por el currículum oficial o utilizados por los profesores del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ).

Desde hace algunos años el Nivel Medio Superior (NMS) se encuentra en un proceso de transformación derivado de la puesta en marcha de la RIEMS. Que tiene como uno de sus principios básicos la creación del Sistema Nacional de bachillerato (SNB); que adopta como una de sus estrategias principales, la construcción de un perfil único de egreso, basado en desempeños (competencias) terminales. Dicho proceso de transformación implica un conjunto de retos y preocupaciones para los profesores, puesto que para la construcción de éste perfil único se requiere un cambio en el enfoque de la enseñanza; el cual exige entre otras cosas, materiales adecuados a las nuevas disposiciones establecidas por la reforma. Justamente es en este aspecto donde se centra nuestro problema, pues según lo expresan López y Tinajero (2009), la carencia de materiales adecuados es una de las preocupaciones principales que los docentes tienen respecto a la implementación de la RIEMS.

En este sentido cabe señalar que algunos subsistemas educativos en México carecen de libros de texto oficiales; siendo uno de éstos el COBAEZ. Por lo que, la elección de los materiales a utilizar queda bajo la responsabilidad del profesor. Es así como éste, en el mejor de los casos basa sus decisiones en la propia experiencia o confiando en el enfoque educativo que los materiales declara tener en su título o descripción. Esta condición podría derivar en una posible desconexión curricular entre lo que se establece en los documentos oficiales y lo que se propone en los materiales utilizados; sobre todo si estos últimos son utilizados por los profesores en el diseño e implementación de los cursos que imparten. Lo anterior está documentado en Ibáñez y Dolores (2012) quienes identifican al uso de “dispositivos didácticos inadecuados” como una de las posibles causas del bajo desempeño escolar en matemáticas. De igual manera, Ceballos y Blanco (2008) declaran que cuando se llevan a cabo cambios curriculares, el uso de libros de texto inadecuados a las nuevas disposiciones se convierte en uno de los factores de fracaso escolar.

La pertinencia del presente estudio se ilustra a través de la incidencia que el libro de texto tiene en la práctica docente del profesor dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, está lo expuesto por Area (1991), respecto a que los libros de texto son utilizados por los alumnos como fuente de conocimiento y por los profesores como fuente estructuradora de la enseñanza. También, afirma que por su estructura y diseño ofrece al profesor un plan para el desarrollo del proceso de instrucción. Se reconoce al libro de texto

como medio que por su naturaleza, al no ser diseñado para situaciones específicas y puntuales de enseñanza, puede llegar a ser usado a lo largo de un curso completo. Dicho de otra forma, el libro de texto ofrece, propone, condiciona e incluso, (cuando es utilizado exclusivamente) impone un determinado proyecto del currículum.

De tal forma que el estudio realizado trata sobre la necesidad de contar con libros de texto acordes a las nuevas disposiciones oficiales; y sobre conocer si los que son utilizados por profesores del subsistema mencionado, promueven de algún modo el alcance de las nuevas expectativas de aprendizaje. Sin embargo, para lograr tener una valoración de los libros de texto se requiere contar con referencias, de ahí que el estudio consideró dos vías para acotar este comparativo. Primero respecto a qué se contrasta el currículum potencial y segundo sobre cuál contenido matemático escolar se enfoca el estudio. En este sentido, se decidió comparar con las expectativas de aprendizaje establecidas en el currículum oficial con las que se promueven en el currículum potencial y hacerlo específicamente para el tema de límites. Enseguida se expone el porqué de las decisiones tomadas y la manera en que se eligieron los libros sujetos a análisis se explica más adelante.

Como se menciona en el párrafo anterior, para realizar el comparativo fue necesario tomar algunas decisiones que permitieron delimitar el estudio. En primer lugar se acota al currículum oficial y potencial del subsistema conocido como COBAEZ, para la asignatura de cálculo diferencial. Es decir, que con relación al primero de éstos se estudian las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas que son establecidas en el programa oficial de la Dirección General de Bachillerato (SEP/SEMS/DGB, 2013), basado en la RIEMS, para la asignatura mencionada. Mientras que en lo que corresponde al currículum potencial, se estudian los libros de texto más utilizados por profesores de matemáticas para la asignatura de cálculo diferencial en dicho subsistema.

En segundo lugar, se decidió centrar la atención en los temas de límite. Decisión que se tomó considerando la complejidad que dicho concepto matemático conlleva (Blázquez y Ortega, 2000, Artigue, 1995). Asimismo resulta importante declarar que como profesor tengo un interés particular en dicho contenido matemático; puesto que en mi práctica docente he identificado que el límite de una función como contenido matemático presenta una dificultad particular para su contextualización fuera del campo de las matemáticas. Lo cual considero de suma importancia tomando en cuenta el carácter funcional de las matemáticas que se propone en el enfoque por competencias que establece la RIEMS. Aunado a ello la importancia que el concepto de límite guarda en el campo de las matemáticas como concepto estructurador de otros; como continuidad y derivada de una función. Dentro del presente trabajo, la importancia y complejidad del concepto de límite es ilustrada, con el análisis de diversas investigaciones (Blázquez y Ortega, 2000; Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein, 2006; Gómez y Pantoja, 2013).

Considerando lo anterior es que el estudio se centró en analizar las competencias matemáticas para los temas de límite plasmadas en el currículum oficial y el currículum potencial de Nivel

Medio Superior. El objetivo del estudio es identificar cuáles de las competencias matemáticas del MCC son favorecidas por las actividades propuestas en los libros de texto para el tema de límites. Además se busca que los resultados de la investigación apoyen a los profesores en la elección de materiales adecuados a través de una evaluación sistemática de las actividades que proponen en términos de las competencias que favorecen.

Dentro de este trabajo de investigación se fijó un marco conceptual con el cual se estableció la postura que se adopta respecto a los términos de currículum (oficial y potencial) y competencia. Al respecto, se tomaron como referencia las definiciones de currículum potencial y oficial propuestas por Alsina (2000), mientras que la de competencia se enmarca dentro de la RIEMS que retoma a su vez la definición de competencia propuesta por la OCDE. De esta manera se establece que “Una competencia es más que conocimiento y habilidades. Implica la capacidad de responder a demandas complejas, utilizando y movilizandolos recursos psicosociales (incluyendo habilidades y actitudes) en un contexto particular” (DeSeCo /OCDE, 2005; citado en SEP, SEMS, 2008, p.51). Para articular el currículum potencial y oficial con las competencias se adoptó como marco teórico-metodológico el análisis didáctico, particularmente los dos primeros organizadores que lo conforman, los análisis de contenido y cognitivo. A través de los cuales se pudo profundizar en el contenido matemático escolar y establecer relaciones entre tareas matemáticas y competencias que se promueven, esto por medio de la descripción de expectativas de aprendizaje en tres niveles de especificidad. El primer nivel lo configuran las competencias, como las expectativas globales de aprendizaje. El segundo nivel son los objetivos específicos de aprendizaje, como las expectativas de aprendizaje de un bloque. Por último las capacidades, como las expectativas para un tema matemático específico. A través de estos elementos es que se logró identificar las competencias matemáticas que se estarían favoreciendo en cada ejercicio o problema propuesto, tomando como base las capacidades específicas al tema de límite que son demandadas en la realización de dichas tareas matemáticas.

Asimismo se presenta una descripción teórico-metodológica de las acciones realizadas en el transcurso de esta investigación, y se declara el carácter de la misma. En cuanto a las actividades que conforman el método seguido en la investigación, se señala que ésta se dividió en cuatro etapas. En la primera se determinan los objetos de estudio. En este sentido, se exponen los criterios utilizados y resultados referentes a la selección de los libros de texto analizados, así como algunos resultados obtenidos en el proceso, con relación al uso de libros de texto, la forma en que los profesores los eligen y la percepción que de ellos tienen. En la segunda etapa se identifican y establecen las expectativas de aprendizaje que constituyen los indicadores que conforman el instrumento de análisis. Para esto se realizó un análisis de contenido y un análisis cognitivo tanto al currículum oficial como al currículum potencial, cuyo producto también se expone. La tercera etapa del estudio consiste en la identificación de las capacidades demandadas por las actividades propuestas en los libros de texto y el correspondiente registro de los datos obtenidos. Mientras que la cuarta y última etapa de la investigación consta del análisis cuantitativo de los datos obtenidos de la etapa anterior y la

construcción de las conclusiones correspondientes en términos de competencias favorecidas y equilibrios o desequilibrios detectados.

En este sentido, se presentan los resultados obtenidos en este estudio, organizándolos en tres secciones. La primera muestran aquellos alcanzados a través de la encuesta aplicada a profesores del COBAEZ, en los cuales se corrobora, según lo declarado, el papel de importancia que para los profesores del subsistema tienen los libros de texto en su labor docente, se identifican los criterios de selección que utilizan y la percepción que de ellos tienen respecto al desarrollo de competencias. En la segunda se expone el resultado del comparativo realizado entre los libros de texto sujetos de estudio y el programa oficial, con base en la información obtenida del análisis de contenido, esto en términos de los significados y sus dimensiones que son potenciados en cada caso. La tercera sección corresponde al análisis de datos y resultados de la aplicación del instrumento que la investigación propone para la identificación de las capacidades matemáticas que los ejercicios y problemas propuestos en los libros demandan; y cómo estas capacidades demandadas impactan en el logro de ciertos objetivos, el desarrollo de ciertas competencias y la promoción de determinados significados potenciados por los focos de atención que se proponen.

Por último, se establecen algunas conclusiones con base en lo observado en el proceso de análisis respecto a la forma en que los libros de texto analizados podrían favorecer el desarrollo de competencias matemáticas y la pertinencia de utilizar más de un libro de texto para el diseño e implementación de los cursos que cada profesor imparte. Asimismo se discute acerca de los posibles trabajos futuros que den continuidad al estudio que en este documento se presenta.

El presente documento se organiza en siete capítulos o apartados; los cuales se describen a continuación:

En el primer capítulo se presenta el resultado de la revisión de antecedentes y se describe el problema de investigación, se expone la pertinencia del estudio, a partir del impacto que el uso de libros de texto y su congruencia con las disposiciones oficiales pudiera tener en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, se delimita el estudio acotándolo al caso del COBAEZ y a los temas de límites para después describir la pregunta de investigación e hipótesis inicial y de este modo establecer el objetivo de la investigación.

En el segundo capítulo se desarrolla el marco conceptual, la organización del mismo se estructura en el siguiente orden: Se abordan diversas definiciones de la noción de currículum profundizando en lo expuesto por Rico (2009) quien describe al currículum como un plan de formación para un grupo de personas dentro de un área geográfica determinada y quien además dota al concepto de cuatro dimensiones y cuatro niveles de reflexión que facilitan su estudio. Después se delimita qué entendemos por competencia en el marco de la RIEMS y se hace una descripción de las competencias que conforman el MCC, poniendo especial interés en las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas, que configuran

uno de nuestros objetos de estudio, puesto que los ejercicios y problemas serán analizados en términos de cuáles de estas competencias estarían favoreciendo.

El apartado número tres corresponde al marco teórico metodológico que se adopta en el estudio. En él se describen las actividades realizadas así como el sustento teórico y metodológico en el cual se apoyan. En este sentido es que aborda el análisis cognitivo como nivel de reflexión curricular, centrando la atención en los dos primeros organizadores curriculares que lo conforman. El primero es análisis de contenido, que permite obtener información acerca de los significados relevantes para la enseñanza del contenido matemático en cuestión; esto a partir del análisis de las tres dimensiones que conforman un significado: la estructura conceptual, que en nuestro caso se suplió por los significados de referencia, los sistemas de representación y la fenomenología utilizada para abordar el contenido matemático y que además constituye una de las bases para el análisis cognitivo. El segundo es el análisis cognitivo, que es el organizador curricular a través del cual, al enunciar las expectativas de aprendizaje en tres niveles de especificidad permitió establecer indicadores para relacionar los ejercicios y problemas con el desarrollo de ciertas competencias a través de la demanda de capacidad y el logro de objetivos específicos de aprendizaje.

En el apartado número cuatro, se describe el proceso por el cual se seleccionaron los libros de texto sujetos a análisis. En este sentido es que se expone el proceso de aplicación de una encuesta a profesores de matemáticas en COBAEZ, con la cual se logró conocer entre otras cosas, cuáles son los libros de texto utilizados por estos profesores y el papel que tienen dichos materiales en el diseño e implementación de los cursos que imparten. Asimismo se identificaron los criterios bajo los cuales los profesores eligen los libros que utilizan y la opinión que de éstos tienen, respecto a su congruencia con relación a lo que desde los documentos oficiales se establece. Con base en la información obtenida de la encuesta y en los criterios que se exponen en este capítulo, se definió cuáles serían los tres libros de texto sujetos a revisión; dos de los cuales directamente surgen de dicho proceso, mientras que el tercero se toma como una propuesta que viene desde el programa oficial. Lo cual nos permite conocer tres visiones distintas, una que es utilizada por los profesores del subsistema y que abiertamente declara un enfoque por competencias, otra que también es utilizada por profesores del subsistema y que representa un esfuerzo realizado por un subsistema similar al COBAEZ, para dotar de materiales adecuados a sus profesores y alumnos y una tercera visión que bien puede considerarse como una postura del currículum oficial, al ser una de las fuentes de consulta básica que se sugieren.

El capítulo cinco muestra el proceso que llevó a la construcción de los instrumentos de análisis y de recolección de datos. Se describe la información obtenida del análisis de contenido realizado y se lleva a cabo un primer comparativo relativo a la forma en que el contenido es presentado. También se expone el análisis cognitivo, a través del cual se determinaron las expectativas de aprendizaje que se establecen en los distintos niveles de expectativa con

relación al límite de una función. Por último se muestran los instrumentos de análisis y recolección de datos que se proponen y utilizan para el análisis de los libros de texto.

En el apartado seis se exponen los resultados obtenidos en la investigación; los cuales se organizan en tres grupos. Estos resultados permiten, en primer lugar conocer la relevancia de los libros de texto en el subsistema que enmarca al estudio. En segundo lugar, se realiza un comparativo en términos de significados y del contenido de los libros de texto respecto al programa oficial. Y por último, se reportan los datos obtenidos de los problemas y ejercicios analizados, con los cuales se busca dar respuesta a la pregunta de investigación que se planteó en este estudio.

En el capítulo siete se presentan algunas conclusiones que dan respuesta a la pregunta de investigación planteada y se exponen algunas perspectivas referentes a trabajos futuros que de alguna manera podrían dar continuidad al trabajo realizado.

## Capítulo 1

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

# 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1. Antecedentes

En este apartado se exponen los resultados de la revisión documental realizada con relación al presente estudio. Para la revisión de los documentos, se buscó dar respuesta a cuestiones que permitieron clarificar aspectos importantes para esta investigación. Las preguntas que guiaron la búsqueda de antecedentes fueron: ¿qué entender por currículum matemático escolar?, ¿cómo se compone el currículum matemático escolar?, ¿qué impacto pudieran tener las posibles desconexiones entre los distintos tipos de currículum, y de existir, cómo han sido estudiadas?, ¿por qué es importante conocer si los libros de texto y materiales utilizados en el proceso de enseñanza son congruentes con los objetivos planteados por el sistema educativo?, ¿qué implicaciones tiene para los profesores la implementación de la RIEMS y el enfoque en competencias que propone para el NMS? y ¿por qué centrar la atención del estudio en los temas de límite en bachillerato?

La exposición de la información que se obtuvo de los trabajos revisados se expone organizada en categorías que permiten dar una mejor presentación de los antecedentes, puesto que las categorías que se proponen además de organizar la información buscan dar respuesta a las cuestiones antes mencionadas. En primer lugar se exponen trabajos relacionados con currículum. De esta primera revisión se desprendió la importancia que en la práctica docente tiene el uso de los libros de texto; por esta razón se abordó literatura relacionada con su análisis. En tercer lugar se presenta información obtenida de la revisión de documentos relacionados con la implementación de la RIEMS y sus implicaciones. Por último se encuentra un grupo más de trabajos revisados, que corresponde a aquellos que reflejan la pertinencia de orientar el estudio de los currículum oficial y potencial con relación al contenido matemático correspondiente al tema de límites, destacando su importancia y complejidad.

***Trabajos relacionados con la definición e importancia del currículum matemático escolar y estudios comparativos entre sus dimensiones y la relevancia de los mismos.***

Dentro de la revisión de literatura, referente al estudio del currículum, se analizó el trabajo de Rico (2009); en éste se hace una exploración de los estudios llevados a cabo sobre el concepto de currículum desde la Matemática Educativa; esto, durante las décadas anteriores a la publicación de dicho trabajo. En este sentido, se expone que la noción de currículum es un término en el cual no se ha llegado a un consenso.

Rico (2009) aborda la importancia del estudio del currículum destacando que es una herramienta principal para el profesor dentro de su ámbito de trabajo en el aula, así como lo es también, para los formadores de profesores. Con base en ello, se menciona, que el interés por el estudio del currículum surge de la necesidad de los especialistas por contar con un marco interpretativo. Lo cual hace posible entender las dimensiones y niveles de reflexión implicados en los sistemas educativos, específicamente en el contexto de la Matemática Educativa.

Además, resalta que el conocimiento del currículum “permite planificar e intervenir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con criterios objetivos e instrumentos adecuados para evaluar las implicaciones de las actuaciones previstas así como para analizar actuaciones ya desarrolladas” (p. 7). En este sentido, cabe destacar que el estudio que se presenta transita entre distintos niveles del currículum; puesto que va de un nivel global o macro que corresponde a las expectativas de aprendizaje establecidas en el perfil único de egreso del SNB, llegando a un nivel local o micro, ya que se analizan casos particulares que los libros de texto utilizados por profesores, presentan respecto a determinado contenido matemático escolar. Lo cual forma parte de la planificación que a nivel de aula realiza cada profesor.

De manera particular, el presente estudio centra el interés en el currículum matemático escolar de nivel medio superior; que incluye entre otros elementos los planes y programas de estudio de cada asignatura, los fines formativos y la propuesta de materiales que pueden ser utilizados tanto por profesores como por alumnos durante el diseño, implementación y desarrollo de los cursos a impartir.

Por otro lado Dolores (2012), quien realiza un estudio acerca de las reformas curriculares en el Nivel Medio Superior (NMS) en México, enlista aspectos deseables en el currículum, como que sea

...pertinente, factible de ser alcanzado, asequible para los actores principales, vinculado al nivel educativo precedente y subsecuente, que incorpore los avances científicos logrados en Matemática Educativa, que posibilite la formación que requieren los estudiantes para el futuro (no sólo para el presente), que aporte una formación cultural y de valores (p. 172).

Sin embargo, Dolores (2012) también resalta el hecho de que la aplicación del currículum no siempre coincide, es decir, lo que se enseña en el aula no corresponde a lo que se propone en los planes de estudio; incluso, en algunos casos el currículum oficial sigue siendo desconocido por los profesionales de la enseñanza. De esta manera se presentan las desconexiones que existen entre los distintos currículum, entendidos como lo que se espera que el estudiante alcance, lo que el profesor lleva al aula, los materiales y recursos que se utilizan durante el proceso de enseñanza aprendizaje y lo que realmente aprende el estudiante.

Los aportes de Rico (2009) y Dolores (2012) dotan a esta investigación, de elementos que resultan útiles para entender y formar un concepto de currículum, considerando las diferentes dimensiones y niveles de reflexión que lo constituyen.

El trabajo de Dolores (2012), muestra un panorama acerca de las posibles vías de cambio para el currículum matemático escolar, desde un punto de vista más cercano a nuestro entorno tomando como centro de atención al profesor, a los alumnos y al contexto, puesto que son tres de los elementos que influyen de manera principal en la aparición de las desconexiones antes mencionadas.

En el mismo sentido, Rico (2009) menciona que los profesores de matemáticas tienen un interés genérico por actividades para el aula, ejercicios y problemas. Sin embargo, también presentan carencias en cuanto a la formación para la enseñanza, que produce una falta de criterios sobre cuáles son los conocimientos necesarios y el marco teórico adecuado para ejercer la profesión. Según Rico, el profesor de matemáticas comúnmente inicia en la práctica de enseñanza mediante un proceso de prueba y error, y logra desarrollar cierta capacidad con poca ayuda institucional. También, señala que el profesor de matemáticas requiere conocer los fundamentos teóricos del currículum y los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas; no basta con el dominio de los contenidos de su materia sino que también es necesario contar con el conocimiento didáctico del contenido. Él concibe al educador matemático como un profesional autónomo y crítico en su intelectualidad, responsable de sus actos y con capacidad para racionalizar sus acuerdos y sus desacuerdos con sus pares. Para ello requiere además de bases teóricas sólidas, instrumentos conceptuales que le ayuden a planificar y tomar decisiones fundadas para promover el alcance de las finalidades de un plan de formación.

Rico (2009) describe al educador matemático como “un profesional intelectualmente autónomo y crítico, responsable de sus actuaciones; con capacidad para racionalizar sus acuerdos y sus desacuerdos con sus colegas de profesión en el ejercicio de sus tareas” (p. 18), que debe contar con bases teóricas e instrumentos conceptuales que le permitan planificar su trabajo, tomar decisiones fundadas y procurar en sus acciones el logro de los objetivos trazados en el plan de formación. Dicho de otra forma, el profesor se convierte en el vínculo entre las disposiciones oficiales plasmadas en el currículum y las acciones y decisiones que tienen lugar en el aula.

Otro de los trabajos relacionados con el estudio del currículum, es el de Alsina (2000), quien hace referencia a la débil importancia de los documentos oficiales respecto al gran impacto de los profesores y sus decisiones en los resultados dispares en los estudiantes. Alsina (2000), recupera las ideas de Howson (1994; citado por Alsina, 2000), en el sentido que “los diferentes currículos no tienen necesariamente unas identificaciones: parte del currículum oficial no es explicado, parte de lo explicado no es entendido, lo entendido es en parte olvidado, etc.”(p. 14). Esto coincide con lo expuesto por Dolores (2012) con relación a la existencia de posibles desconexiones entre lo que proponen los planes de estudio y lo que en realidad sucede en el aula; es decir, la existencia de posibles diferencias entre lo establecido oficialmente, respecto a lo que el profesor enseña y lo que el alumno aprende, así como la relación existente con los materiales en los cuales se apoya el trabajo del profesor. Según menciona Alsina (2000), estas posibles desconexiones pudieran verse reflejadas en los resultados que los estudiantes tienen dentro del nivel educativo. Un ejemplo de esto es el caso de la posible falta de relación entre lo estipulado como fines formativos en el plan de estudios y los libros de texto y manuales escolares utilizados por profesores y alumnos, contribuyen a desarrollar.

Además de esto, Alsina (2000), aborda los que en ese momento consideraban como los nuevos retos curriculares y describe cuáles son las tendencias deseables, haciendo referencia a la necesidad de prestar atención especial al desarrollo de competencias pero, sin dejar a un lado las grandes ideas de las matemáticas, las cuales delimitarán los instrumentos matemáticos a utilizar. Esto de alguna manera ayuda a justificar nuestro interés por enfocarnos en formular un instrumento de análisis que permitiera identificar cuáles son las competencias matemáticas que se favorecen a través de la implementación de las actividades propuestas en los libros de texto tomando como referencia el contenido matemático escolar en torno al cual se desarrolla el presente estudio.

El trabajo de Alsina (2000) resulta fundamental para esta investigación, pues de él retomamos la caracterización de los diferentes currículos que existen. Siendo nuestros objetos de estudio el currículum oficial, entendido como los documentos oficiales que proporciona la autoridad educativa, que fijan los contenidos mínimos y que, se encuentra en los planes y programas de estudio; y el currículum potencial, caracterizado por los materiales, publicaciones, manuales y libros de texto que desarrollan el currículum oficial. Aunque Alsina, señala la necesidad de quitar atención al currículum oficial de matemáticas y apuntar la atención hacia los grandes objetos y a los otros tres currículos; consideramos que, el currículum oficial no puede ser desconocido totalmente, ya que en él se marca la pauta de lo que se espera habrá de enseñarse en las instituciones de educación.

Lo anterior realza la importancia de estudiar el currículum como una herramienta utilizada por los profesores para la planificación, desarrollo y evaluación de los cursos que imparten. Es decir, éste debe marcar la pauta respecto a los contenidos y fines formativos del curso pero también debe dar al profesor los elementos necesarios para seleccionar materiales y recursos adecuados a esos fines. Además, el currículum debiera establecer los parámetros para evaluar si lo realizado en el aula a lo largo de los cursos fue efectivo para la consecución de los fines establecidos. De forma que pudiera ser considerado como eje rector de la práctica del profesor, de ahí la importancia de estudiar de qué forma se relacionan los distintos elementos que lo conforman.

Por otro lado, se revisaron estudios de comparación curricular, que se han llevado a cabo en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Tal es el caso de Valenzuela y Dolores (2012), en el que se hace un comparativo entre el currículum oficial e impartido, con la finalidad de conocer el grado de relación entre lo que imparte el profesor y lo que plantea el plan de estudios. Los autores señalan que, si bien la mayoría de las investigaciones dentro de la Matemática Educativa se enfocan a buscar los problemas de aprendizaje de las matemáticas en el plano cognitivo, el currículum puede ser otra fuente de dificultades que contribuyen al escaso aprendizaje por parte de los alumnos.

Como parte de la problemática asociada al currículum, que abordan Valenzuela y Dolores (2012), se señala el desconocimiento del currículum matemático escolar por parte de los profesores; al mismo tiempo se relaciona el bajo rendimiento escolar de los estudiantes con lo

que realmente se enseña en el aula. Aunado a esto, la experiencia de los profesores indica que generalmente no se alcanzan a abordar todos los contenidos marcados en el plan de estudios, aunque esto, no ha sido documentado de manera formal. Para conocer la relación existente entre lo que el profesor enseña y lo que se plantea que debe enseñar, Valenzuela y Dolores realizan una comparación entre lo que se propone en el plan de estudio oficial y las notas de clase de los estudiantes, tomando como variables los contenidos y los objetivos que se proponen en los diferentes programas.

En los resultados se señala la existencia de diversos factores que modifican lo que se enseña en el aula respecto a lo que se plantea en los programas oficiales. Entre estos factores se mencionan los libros de texto, los medios de enseñanza, las concepciones de los profesores y sus prácticas de enseñanza. El comparativo es desglosado en dos apartados, uno respecto a los contenidos y el otro en cuanto a los objetivos, midiendo en cada uno, el nivel de relación como nula, deficiente o fuerte. Los resultados globales son que, efectivamente, existen diferencias entre lo que se observa en el currículum oficial y lo que enseñan los profesores a sus estudiantes. Además, Valenzuela y Dolores (2012), afirman que:

... algunos de los factores que inciden en el escaso aprendizaje logrado en matemáticas no están únicamente en el plano cognitivo, se deja ver en esta investigación que hay factores vinculados con lo que del Currículum Oficial llega a las aulas, no se puede pretender desarrollar y evaluar habilidades que no hayan sido propiciadas a través de las actividades diseñadas con esta misma intención (p. 137).

Ello deja ver que la relación existente entre el currículum oficial e impartido en ocasiones resulta ser deficiente y que dicha deficiencia impacta directamente en los resultados obtenidos por parte de los estudiantes.

En otro estudio que compara distintos tipos de currículum (también dentro del NMS de la UAGro), Zavaleta y Dolores (2012) realizan una evaluación del currículum matemático escolar aprendido respecto a lo estipulado en el currículum oficial. Dicho estudio consistió en comparar lo que se prevé en los planes y programas de matemáticas contra lo que los estudiantes aprendieron al concluir el curso.

Ellos elaboraron y aplicaron un cuestionario para evaluar la relación entre el currículum oficial y el aprendido. Esto, a través de cuatro dominios cognitivos: conocimiento de hechos y procedimientos, utilización de conceptos, resolución de problemas habituales y razonamiento. Los autores exponen el papel y las características de la evaluación relacionada con el conocimiento matemático de los alumnos, llevada a cabo tanto por organismos nacionales como internacionales. Además, justifican la necesidad de crear sistemas de evaluación curricular sistemáticos e institucionalizados de carácter regional para el NMS, en particular, para las matemáticas. El estudio de Zavaleta y Dolores tiene como objetivo realizar la evaluación del currículum matemático escolar aprendido del NMS de la UAGro, entendiendo por currículum matemático escolar la matemática que de acuerdo con los planes y programas de estudio debe enseñarse.

En cuanto a los resultados obtenidos, éstos son mostrados por grado escolar, es decir, abordando cada uno de los semestres con los que fue aplicado el cuestionario. De forma general, se concluye que los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes no logran las habilidades que se proponen el plan de estudios, logrando desempeños favorables sólo en los dos primeros niveles cognitivos que se han señalado. Igualmente, cabe destacar que en el análisis del currículum oficial se encontró que los planes y programas de estudios no plantean en sus objetivos alcanzar el nivel de razonamiento.

Dentro de la misma línea de evaluación curricular, se revisó el trabajo realizado por Ibáñez y Dolores (2012), quienes analizaron el currículum matemático escolar potencial de nivel medio superior, caracterizado por los libros de texto que la UAGro edita, en relación con el currículum oficial, considerando los planes y programas de estudio de NMS de la UAGro para quinto y sexto semestre. Los autores señalan que la mayoría de las investigaciones en Matemática Educativa se han enfocado a atender el aspecto cognitivo, como causante del escaso aprendizaje en matemáticas; sin embargo, ellos refieren que, si bien es cierto que en el plano cognitivo se encuentran varias de las posibles causas, asumen que también se encuentran en los libros de texto que los estudiantes y profesores utilizan. Los autores señalan la escasez de estudios sobre el currículum matemático en México, enfatizando no haber encontrado dentro de su revisión algún otro estudio comparativo entre currículum oficial y potencial.

El estudio de Ibáñez y Dolores (2012) tiene como objetivo conocer la relación existente entre el currículum oficial y el potencial. Ellos parten del supuesto que, en esta relación se pudieran encontrar algunas de las causas del bajo aprovechamiento escolar. Además, señalan que los estudios de comparación entre currículos son necesarios para plantear propuestas de mejora a los libros de texto.

De los trabajos realizados en la UAGro, relativos a estudios comparativos entre el currículum oficial y los distintos tipos de currículos (Valenzuela y Dolores, 2012; Zavaleta y Dolores, 2012; Ibáñez y Dolores, 2012), se rescata, a partir de los resultados obtenidos, el hecho de que existe una débil relación entre lo que la autoridad educativa propone debe implementarse en el aula, con lo que se enseña, lo que se aprende y con la forma en que los materiales desarrollan dicho conocimiento. Lo anterior, nos sirve como fundamento para nuestro estudio, ya que, se hace patente una desconexión curricular que conlleva la necesidad de conocer el grado de relación entre currículos, en caso de que exista, ya que como se señala, la falta de congruencia entre ellos podría ser una de las posibles causas del bajo rendimiento escolar en matemáticas.

Asimismo, resulta importante señalar que, debido a la similitud en cuanto a los tipos de currículum analizados, oficial y potencial, nuestro trabajo tiene como antecedente al estudio realizado en la UAGro por Ibáñez y Dolores (2012), en el cual la atención se centra en determinar la relación existente entre ambas dimensiones del currículum. Lo cual, es similar al planteamiento hecho en esta investigación, que sin embargo, guarda diferencias con el estudio mencionado, ya que en nuestro estudio se consideraron los planes y programas de estudio propuestos por la Dirección General de Bachillerato (el cual tiene un carácter nacional) y

libros de texto utilizados por los profesores de COBAEZ. Además se considera como fines formativos del currículum oficial las competencias matemáticas establecidas como parte de la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

***Trabajos que ilustran la importancia del libro de texto y su evaluación, dentro del proceso de enseñanza aprendizaje.***

Referente a los trabajos relacionados con la importancia del libro de texto y su evaluación, se revisó el trabajo de Moreno, Mesa y Azcárate (2007), que desarrollaron un instrumento de evaluación de problemas matemáticos de nivel superior. El objetivo fue proporcionar al profesor una herramienta de análisis que le ayudara a reflexionar sobre el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación, que además, le apoyara en una rápida y fácil identificación de las competencias que directa o indirectamente se desarrollan. El instrumento de análisis propuesto en Moreno *et al.* (2007) se enfoca en la evaluación de los problemas y actividades propuestos en libros de texto, buscando evidenciar cuáles competencias son las que más se favorecen. Además de explicar la formación que el profesor promueve en los estudiantes, reflexionar sobre la incidencia del profesor en los estudiantes y, estudiar en qué medida el profesor favorece la formación reflexiva y constructiva de los estudiantes.

Moreno *et al.* (2007) señalan que el análisis de manuales y libros de texto, hojas de problemas y demás recursos disponibles para el profesor, son un punto de referencia importante que complementan el abanico de recursos para el diseño e implementación de los diferentes temas que conforman el programa de una asignatura; además, que de ellos se puede obtener información acerca del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Así pues, el trabajo de Moreno y colaboradores pretende proporcionar herramientas de evaluación, análisis y reflexión para que los profesores avancen en su formación y adecuen su enseñanza a las competencias profesionales que deberían tener sus egresados.

Igualmente, ellos mencionan que el instrumento propuesto no pretende hacer una generalización pero se destaca que desde el desarrollo profesional del profesor, éste aporta una nueva visión sobre cómo organizar el proceso de enseñanza, haciéndole consciente de los desequilibrios que aparecen en los programas y materiales de trabajo. El análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva de las competencias aporta una dimensión enriquecedora para el profesor y da respuesta a preguntas básicas sobre el aprendizaje de los estudiantes. Además, permite la búsqueda de equilibrio entre las propuestas de las editoriales y las necesidades del profesor en la materia que enseña. En los resultados de la aplicación del instrumento, encontraron grandes desequilibrios y concluyen que se debería llegar a la necesidad de equilibrar entre tres categorías o momentos cognitivos: acción de reproducción y de procedimientos rutinarios, acción de conexiones y acción de reflexión. Además, se menciona que sería deseable que los estudiantes puedan moverse de forma progresiva entre niveles de pensamiento matemático, del básico a un nivel más avanzado.

En Moreno *et al.* (2007) se encontró un referente importante para esta investigación, ya que, al igual que en el presente trabajo, ellos proponen un instrumento para que el profesor pueda

realizar la evaluación de materiales que apoyan la enseñanza, específicamente para los problemas encontrados en libros de texto y manuales escolares. La finalidad es la misma, buscando medir en qué grado se favorecen las competencias matemáticas esperadas en los egresados, esto con base en los indicadores desarrollados por Lupiáñez (2005; citado por Moreno *et al.*, 2007) a partir del análisis cognitivo. Además de lo anterior, ellos señalan que la evaluación de materiales escolares permite ampliar la visión acerca de los recursos disponibles para el diseño e implementación de los diferentes temas que conforman el programa de una asignatura. Estas similitudes entre el trabajo de Moreno *et al.* (2007) y el que se presenta en este documento nos sirvió como un primer indicio para profundizar en algunos de los aspectos teóricos y metodológicos que se adoptan en este trabajo y que se presentan en las secciones subsecuentes.

Otro trabajo que hace referencia al análisis de libros de texto y su papel en la tarea de enseñanza es el de Ceballos y Blanco (2008), quienes analizaron cómo los libros de texto reflejan las propuestas curriculares sobre la resolución de problemas. Para ello, revisaron libros de texto de amplia difusión en Chile y España, centrándose en el tema de proporcionalidad en enseñanza secundaria. Dicha revisión fue acerca de la resolución de problemas y las propuestas curriculares desarrolladas en ambos países. En particular, señalan los tipos de problemas que se pueden encontrar y los modelos para la resolución de los mismos. Además, destacan que ambos currículos hacen referencia a modelos de resolución de problemas, en el currículo chileno aparece de forma explícita, enfatizando la habilidad para resolver problemas considerando modelos parecidos al de Polya; mientras que, en el currículo español, no es explícito incorporando algunas sugerencias heurísticas para la resolución de problemas.

Con relación a los libros de texto y su función, Ceballos y Blanco (2008) definen al libro de texto con base en el Real Decreto 1744/1998 de España, como:

El material impreso de carácter duradero y autosuficiente destinado a ser utilizado por los alumnos y que desarrolla, atendiendo a las orientaciones metodológicas y criterios de evaluación correspondientes, los contenidos establecidos por la normativa académica vigente para el área o materia y el ciclo o curso de que en cada caso se trate (p. 70).

Además, señalan que un libro de texto es una publicación que ayuda al profesor con un contenido metódicamente adaptado y limitado por el currículum nacional, constituyéndose en un recurso fundamentalmente didáctico que ayuda a desarrollar el proceso de enseñanza. Éste, es una producción que integra fuentes de información, en el largo plazo, accesibles para todos los alumnos y profesores, y un instrumento que colabora a implementar el control y la evaluación del proceso de aprendizaje del alumno.

En el mismo sentido, Ceballos y Blanco (2008) declaran con relación a la importancia de los libros de texto en la enseñanza de las matemáticas, que

A su vez, los contenidos curriculares se expresan en los textos o manuales escolares que se utilizan en las aulas de clase como un recurso muy importante (a veces el único) para la

implementación del currículo. De esta manera, los libros de texto se constituyen en una herramienta de primer orden para el profesorado (p. 64).

De tal forma que Ceballos y Blanco (2008) encuentran en los libros de texto uno de los factores que pueden hacer fracasar los intentos de cambio de un currículo de matemáticas, debido a la carencia de materiales y libros de texto adecuados a los nuevos currículos. Y sustentan, la importancia de estos materiales citando lo que en este sentido han expresado diversos autores,

[...] en el informe Cockcroft (1985), se afirma que “los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula” (p. 114). Según Rodríguez (2006), el libro de texto es el principal recurso de instrucción, llegando a utilizarlo como currículum en combinación con otros materiales. Por su parte, Sowder (1988) afirma que incluso sin documentación previa es bastante seguro afirmar que en la mayoría de la sala de clase elemental el libro de texto de las matemáticas “lleva” el plan de estudios. Incluso se atribuye importancia a los textos como un elemento clave para hacer viables los procesos de innovación educativa (Uribe y Skrabonja, 2006). En este mismo sentido, Aamotsbakken (2006) explica que la dependencia del uso de libros de texto es aplicable a la mayoría de los profesores tanto en la educación primaria como secundaria, ella es tan fuerte que uno podría decir que el docente “se aferra al libro” (p. 70).

Dentro de las conclusiones del trabajo de Ceballos y Blanco (2008) se menciona que, existe falta de coherencia entre lo que plantea la teoría y lo que se expresa en los textos escolares (considerando que los libros de texto son la concreción de un currículo), con respecto al tipo de problemas que se proponen, los contextos en que éstos se insertan y las tareas matemáticas que contempla su solución. Por último, Ceballos y Blanco (2008) reconocen que “los libros de texto deben reflejar plenamente lo establecido en el currículo oficial de las regiones o países y que, por lo general, son el único recurso con que cuenta el profesor para realizar su docencia” (p. 85). Ellos concluyen, realizando una serie de recomendaciones para favorecer la coherencia entre los libros de texto y la resolución de problemas.

Ceballos y Blanco (2008) destacan la relevancia que los libros de texto tienen en la práctica de enseñanza del profesor. Los definen como publicaciones que ayudan al profesor con un contenido metódicamente adaptado y limitado por el currículum nacional; constituyéndose en recursos fundamentalmente didácticos que ayudan a desarrollar el proceso de enseñanza. Del mismo modo, el libro de texto es señalado como una herramienta principal, y en ocasiones única, para la práctica del profesor. Sin embargo, reconocen en ellos uno de los posibles factores del fracaso de los cambios curriculares, debido a la escasez de materiales y libros de texto congruentes con las nuevas disposiciones.

Lo anterior ayuda a justificar el hecho de realizar un análisis respecto a la congruencia entre los planteamientos que se hacen en el currículum oficial y los que se hacen en las actividades plasmadas en el currículum potencial, además pone en evidencia la importancia de dotar al profesor de herramientas que lo apoyen para tomar las mejores decisiones respecto a los

materiales que habrá de utilizar, todo esto dentro del contexto de la implementación de la RIEMS.

Por otro lado, en cuanto a la importancia de los libros de texto como instrumentos de instrucción, se revisó el trabajo de Area (1991), quien los describe como medios de enseñanza que forman parte de la realidad representada por el currículum, que están mediatizados en sus tipologías, funciones y usos por las características y procesos de definición curricular. El autor caracteriza los libros de texto como un medio de enseñanza de naturaleza impresa, destinado a facilitar la obtención del conocimiento a los alumnos, como un material que ofrece el conocimiento sistematizado y adaptado a determinado grupo de alumnos dentro de un mismo nivel evolutivo y académico; así, como un medio que propone estructuras de acción instructiva que permitan y potencien la adquisición del conocimiento.

Según Area (1991), los libros de texto son utilizados por los alumnos como fuente de conocimiento y por los profesores como fuente estructuradora de la enseñanza. Él afirma que, “el libro de texto (tal como están diseñados la mayoría de estos materiales) le ofrece al profesor un plan completo y elaborado para el desarrollo instructivo de un currículum en su aula” (p. 32). Además, “el libro de texto es el único material que dispone el profesor donde se dota de contenido y se operativizan las prescripciones de un currículum específico” (p. 32).

De igual forma, Area (1991) señala que, por tanto, el libro de texto:

[...] no es un medio más entre los restantes recursos didácticos. Por su propia naturaleza el libro de texto es un instrumento, que a diferencia de los restantes medios, que no se diseña (y consiguientemente no se utiliza) para que sea útil en situaciones específicas y puntuales de enseñanza, sino que el libro de texto es un recurso con suficiente potencial para ser usado a lo largo de todo un curso escolar completo (p. 32).

Es decir, a diferencia de otros medios, el libro de texto ofrece, propone, condiciona e incluso, (cuando es utilizado exclusivamente) impone un determinado proyecto del currículum. Por tanto, lo define como tecnología curricular empaquetada, que a diferencia de otros medios que se diseñan para condiciones y finalidades específicas, éste puede ser utilizado a lo largo de todo el curso. En este sentido, Area (1991) refiere que:

[...] al ser el texto escolar un recurso que por su propia naturaleza interna es una tecnología que empaqueta un modelo para el desarrollo curricular (que pudiéramos metafóricamente etiquetar como "currículum precocinado"), el docente que asume y pone en práctica el proyecto curricular del texto, inevitablemente tiende a ceder sus responsabilidades planificadoras y de decisión instructiva a un elemento ajeno al contexto de su acción profesional (p. 33).

Lo anterior implica que el profesor dejará a un lado su papel como agente director para convertirse en un sujeto ejecutor de las prescripciones externas sobre su marco de práctica docente, consistiendo su labor en la gestión y aplicación del texto dentro de su aula.

El trabajo de Area (1991) resulta importante para esta investigación, ya que ilustra el papel relevante que el libro de texto tiene en el proceso de enseñanza aprendizaje como instrumento que apoya tanto a profesores como a estudiantes, pues hay que recordar que incluso existen títulos que cuentan con ediciones de libros para el profesor. La importancia del libro de texto, según señala Area (1991), además de las bondades que como tecnología curricular empaquetada tiene, es que en muchos casos es éste el único instrumento con que cuenta el profesor para apoyar su labor de enseñanza.

El papel del libro de texto puede ser tan relevante, que en determinadas circunstancias, incluso llega a determinar un proyecto de currículum, esto cuando el profesor apoya en demasía su labor en dichos instrumentos. Lo anterior aporta claridad acerca de por qué es pertinente el estudio de la relación entre el contenido propuesto en los libros de texto y la manera en que éste es abordado, con lo que se establece en el currículum oficial.

Otro de los trabajos revisados acerca del análisis de libros de texto y que además está relacionado con el tema de límite es el realizado por Gómez y Pantoja (2013), ellas describen una metodología de análisis que permite caracterizar los textos escolares según las representaciones usadas y los tipos de estándar movilizados en el desarrollo de los ejemplos referentes al concepto de límite de una función. Además, las autoras señalan dos aspectos que las motivaron a centrar su atención en el concepto de límite de funciones: por un lado, su importancia para la construcción de nuevos conocimientos matemáticos y por otro, la complejidad que subyace a su enseñanza y a su aprendizaje.

En el primer caso, el límite se constituye en uno de los tópicos de mayor importancia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, posteriores a la educación obligatoria, pues, ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo, ya que su carácter estructural constituye el eje central y básico sobre el cual se construye el cálculo diferencial e integral. Además, debido a su carácter instrumental, tiende a ser usado como herramienta para la resolución de problemas, tanto de naturaleza matemática como cotidiana (Sánchez y Contreras, 1995; citados por Gómez y Pantoja, 2013, p. 28).

Relativo a la complejidad en la enseñanza y aprendizaje del límite, las autoras mencionan que

[...] son grandes las dificultades presentes en la transición del bachillerato al primer año de universidad. Según Enríquez y Palles (2007; citados por Gómez y Pantoja, 2013), en el bachillerato, se utiliza un discurso intuitivo donde la aplicación suele ser de naturaleza práctica más que teórica; por el contrario, a nivel universitario, su presentación se realiza de forma totalmente teórica y formal. Lo anterior genera un alto porcentaje de fracaso académico en las asignaturas de cálculo y grandes niveles de deserción estudiantil en las carreras universitarias (Gómez y Pantoja, 2013, p. 28).

En la investigación de Gómez y Pantoja (2013), los libros de texto son considerados en un papel de relevancia y gran interés, ya que como mencionan las autoras, son los materiales didácticos de mayor uso por parte de educadores al preparar e implementar sus clases de matemáticas y, por los estudiantes, en sus intentos de comprender las matemáticas enseñadas.

Además, estos materiales didácticos son considerados por los educadores como importantes referentes que puntualizan, en la praxis educativa, las exigencias presentadas en los decretos y órdenes ministeriales, llegando incluso a ser considerados como los organizadores de enseñanza, aún más que los propios decretos (Schubring, 1987; citado por Gómez y Pantoja, 2013).

El instrumento de análisis descrito por Gómez y Pantoja (2013) se diseñó de forma inductiva. Las categorías de análisis se extrajeron de los libros o se adaptaron a los temas que en ellos se desarrolla. Se consideraron los capítulos donde explícitamente los libros de texto abordan el estudio de límite de funciones. Las unidades de análisis fueron los ejemplos propuestos en los libros de texto. Se tomó en cuenta tres sistemas de representación al llevar a cabo la enseñanza del límite de funciones (analítico, algebraico y aritmético) y dos clases de estándar de calidades movilizadas.

Del trabajo de Gómez y Pantoja (2013) se destaca el hecho de que su estudio es en torno a los temas de límite, por lo cual, ellas refieren la importancia y la complejidad que subyacen al concepto, lo que abona a la justificación de la delimitación del estudio a dicho tema. También, se destaca la importancia que dan a los libros de texto como la principal herramienta del profesor para el diseño e implementación de sus cursos. Ello resulta de utilidad para aportar a la fundamentación a nuestro trabajo, pero destacando que la comparación que ellas hacen tiene un objetivo distinto al nuestro.

### ***Trabajos relacionados con la implementación de la Reforma Integral de la Educación Media Superior y con el enfoque en competencias.***

Referente al enfoque por competencias, se revisó el trabajo de Rico (2004), en el cual se hace una descripción del proyecto PISA/OCDE, explicando en qué consiste, qué aspectos evalúa y desde qué enfoque lo hace. El autor hace énfasis en la tendencia internacional que está encaminada a buscar formar alumnos con desempeños para la vida más que en la transición de conocimiento. Señala también que la finalidad de la evaluación PISA/OCDE es establecer indicadores de calidad que expresen cómo los sistemas educativos alcanzan esa formación para la vida.

El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso. Rico (2004) menciona que las competencias establecidas en un plan son elementos determinantes para establecer su calidad y poder llevar a cabo su evaluación. Señala también, que la calidad de un programa es determinada por la relevancia de las competencias que se propone, y su eficacia responde al modo en que éstas se logran.

Rico (2004) enumera las ocho competencias elegidas por el proyecto PISA que, considera que “los logros de los estudiantes en la resolución de problemas se puede expresar mediante este

conjunto de competencias” (p. 10) y además menciona una serie de indicadores que las ejemplifican.

El autor resalta que existe una vinculación entre estas competencias y que, por lo general deben ser trabajadas simultáneamente al hacer matemáticas, por tanto, no se pueden evaluar individualmente. Asimismo, hace mención de los tres niveles de profundidad, considerados al evaluar las competencias:

- Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios.
- Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.
- Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

La relevancia de lo expuesto por Rico (2004) para el presente estudio radica en que las competencias matemáticas establecidas en el proyecto PISA, si bien no fueron utilizadas en el análisis, contribuyeron a entender de una mejor manera las competencias del MCC. Asimismo el conocer las competencias PISA resultó de utilidad para la identificación y comprensión de las capacidades que conforman los indicadores a través de los cuales se llevó a cabo el análisis de las actividades propuestas en los libros de texto objeto de estudio, no obstante que el análisis cognitivo establece medios a través de los cuales determinar las capacidades o actuaciones esperadas del estudiante en torno a una tarea matemática.

Asimismo, dentro de esta categoría se revisó el trabajo de López y Tinajero (2009) en el que se discute la opinión de 60 profesores de bachillerato tecnológico referente a la reforma de 2004. En dicho trabajo se aborda el impacto que la implementación de cambios curriculares tanto en el contenido como en el modelo pedagógico pudieran tener cuando los profesores no son habilitados para dichos cambios.

López y tinajero (2009) señalan que con la implementación de la RIEMS, que inició en agosto de 2008, los docentes enfrentan nuevos desafíos, tales como: instrumentar un marco curricular común con base en desempeños terminales según ciertas competencias genéricas, disciplinares y profesionales establecidas y asumir el compromiso de cumplir con un perfil que les exige, entre otras cosas: “enseñar a aprender”, “dominar y estructurar los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo”, y planificar “los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias [y ubicarlos] en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios”.

En el estudio revisado se encontró que respecto a la reforma del 2004, los profesores expresaron algunas de las preocupaciones principales ante la implementación de los cambios como: la premura con la que se llevó a cabo la reforma, la escasa o nula participación de los docentes en el proceso, la naturaleza de los cambios realizados, la ausencia de materiales acordes con las nuevas demandas y la falta de capacitación adecuada. Los autores refieren que “a la luz de los nuevos cambios que introduce la RIEMS, estos resultados pueden servir para

anticipar los retos de los docentes frente a la nueva reforma y pensar críticamente en su diseño, planeación y fases de instrumentación” (p. 1194).

Lo expuesto por López y Tinajero aportó a la identificación de la problemática y la justificación del estudio, ya que al ser la ausencia de materiales adecuados una de las principales preocupaciones de los docentes al implementar una reforma, se deja ver la importancia de conocer la relación que existe entre los materiales utilizados por profesores y alumnos, entendidos éstos como los libros de texto y aquellos propuestos como referencia directa a las disposiciones oficiales, las cuales para el caso de la RIEMS establecen el desarrollo de desempeños terminales llamados competencias, como una posible manera de medir su nivel de conexión.

### ***Trabajos que ilustran la importancia de enfocar el estudio comparativo al tema de límites.***

Una última categoría de trabajos revisados es la que conforman aquellos que muestran la importancia de enfocar el estudio comparativo entre currículum oficial y potencial al tema de límites. Uno de éstos es el trabajo de Blázquez y Ortega (2000) en el cual se presentan dificultades de aprendizaje relacionadas con el concepto de límite; entre las que se encuentran no entender la idea gráfica de límite, confundir límites finitos e infinitos, la interpretación de indeterminaciones como inexistencia del límite y proponer como límite el valor de la función en un punto "cercano", por mencionar sólo algunas. Además ellos proponen una secuencia metodológica que atendía estas dificultades y se adaptaba, al que entonces era el nuevo currículo de la Educación Secundaria en España.

Blázquez y Ortega (2000) revisaron investigaciones anteriores para dotar de un marco teórico a su investigación; describen cómo el concepto de límite es situado en el currículo del sistema educativo español en aquel momento y la propuesta de una definición alternativa al concepto de límite, junto con una secuencia didáctica diseñada, de la cual se desprende un sistema de categorías para descubrir las dificultades de aprendizaje observadas en la implementación de la misma.

Respecto a la importancia de prestar atención al concepto de límite, así como las posibles dificultades que pudieran presentarse en su enseñanza y aprendizaje, Blázquez y Ortega (2000) mencionan que el concepto de límite

[...] es uno de los conceptos más importantes del Análisis, ya que es necesario para introducir otros (continuidad, derivada, integral) y, por lo tanto, su estudio se hace necesario. Por otra parte, para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender (p. 1).

En cuanto a la situación de dicho concepto en el currículo español, Blázquez y Ortega (2000) señalan que las modificaciones curriculares implementadas en ese momento le daban una orientación más intuitiva, respecto a lo que los libros de texto del currículo anterior mostraban, la definición formal de límite en términos de  $\epsilon$  y  $\delta$ . Esta situación coincide con lo

identificado en currículum oficial vigente en México, pues con relación al límite de una función lo que se propone es un planteamiento intuitivo a través de aproximaciones en tablas y gráficas, como se señala más adelante en el análisis de contenido aplicado. Los autores proponen una definición acorde a la orientación intuitiva del nuevo currículum, la cual no está exenta del rigor matemático pero que tampoco tiene el formalismo de la definición anterior y que además evita la imprecisión que se da al “aproximarse tanto como se quiera”. La definición de Blázquez y Ortega (2000) es la siguiente:

Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , si cuando "x" se acerca al número "a", sus imágenes f(x) se acercan a "L" más que cualquier otro número (p. 4).

Por lo tanto, el trabajo realizado por Blázquez y Ortega (2000) permite ubicar al límite como un concepto que en cierta medida resulta difícil de aprender por parte del alumno y por tanto resulta también difícil de enseñar por parte del profesor; de donde se desprende la importancia de prestar atención a los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje. Esto ayudó a justificar la delimitación del estudio a los temas de límite dentro del NMS en México, pues al igual que en el caso español, este concepto matemático trae consigo dificultades inherentes que complican su aprendizaje, particularmente al tratar de darle un carácter funcional en el entorno del estudiante tal como se pretende hacer en el enfoque por competencias.

En un sentido coincidente se encuentra lo expuesto por Navarro, Maldonado y López (2012), quienes reportan, desde una perspectiva cognitiva, resultados relevantes de investigaciones sobre el concepto de límite tanto en el nivel medio superior como en el nivel superior. Ellas clasifican las investigaciones revisadas en tres rubros: aquellas relativas al preconcepto de límite, las relativas a las concepciones del concepto de límite y las que reportan dificultades al tratamiento del concepto de límite. En el trabajo revisado, las autoras señalan que el límite en particular es uno de los conceptos más importantes del análisis, necesario para introducir otros y, por lo tanto su estudio se hace necesario. Pero también señalan que

...la mayoría de los estudiantes, desde el nivel medio superior, presentan grandes dificultades, una de ellas es la comprensión del concepto, que van desde la exposición del tema por el profesor hasta las definiciones que aparecen en los libros de texto (p. 172).

Y además que

...el concepto de límite es uno de los conceptos matemáticos que trae consigo mayor cantidad de dificultades durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, problemas inherentes al propio concepto, y como su estudio es necesario, los investigadores en didáctica de las matemáticas se sienten obligados a emitir algún tratamiento a los problemas que presenta dicho concepto (p. 172).

En el mismo orden de ideas, se revisó el trabajo de Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein (2006), quienes mencionan que, cuando se inicia la enseñanza del cálculo se presentan dificultades de diferente naturaleza; principalmente las provocadas por los esfuerzos para superar los modos de pensamiento numérico y algebraico. En particular estas autoras se

enfocan en las dificultades relacionadas con la conceptualización y formalización del concepto de límite. Resaltando que la importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento así como herramienta útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería).

Lo expuesto en el trabajo de Vrancken *et al.* (2006) resalta que, el límite como contenido matemático escolar cumple con una doble función dentro de la enseñanza de las matemáticas; además resulta ser de utilidad en la solución de problemas en otras disciplinas. Y si se considera lo expuesto por Blázquez y Ortega (2000) sobre lo poco atractivo que resulta para los estudiantes este contenido matemático. Lo anterior expone la importancia de prestar atención a la manera en que dicho contenido es presentado en los libros de texto y cómo dichos materiales contribuyen a lo dispuesto en los documentos oficiales respecto a las expectativas de aprendizaje establecidas. Pues, si conjuntamos el impacto que tiene el límite como herramienta en otras ciencias y a su vez lo poco atractivo que puede resultar su presentación en los libros de texto; esto podría impactar directamente en su aprendizaje como un *contenido funcional*.

Por último, se revisó el trabajo de Artigue (1998) quien expone lo complicado que resulta para los estudiantes introducirse en el campo conceptual del análisis elemental. Esto permite comprender la naturaleza de los obstáculos y dificultades que los estudiantes enfrentan y las razones del fracaso de las estrategias de enseñanza usuales. Con este trabajo se constatan las diferentes dificultades que de manera inherente tiene el tema de límites, lo cual ratifica las dificultades que puede presentar este tema de la matemática escolar al momento de llevarse al aula.

Artigue (1998) señala que el tema de límite es uno de los elementos centrales del currículo oficial, por lo que se busca presentar de manera accesible. Este esfuerzo consideramos se propone en el nuevo currículo del NMS en México, donde se espera enriquecer el carácter intuitivo del concepto para así llevarlo a contextos fuera de la matemática que el actual enfoque por competencias implica. Este nuevo carácter, busca que tenga un significado funcional para el estudiante dentro del entorno en que se desarrolla.

Ahora para lograr esa contextualización del límite en situación escolar no se puede olvidar aquellas dificultades inherentes al concepto, Artigue (1998) refiere que en la revisión de la literatura que realizó, fueron localizadas dificultades “fuertes y persistentes” en el campo conceptual del análisis, las cuales a pesar de provenir de diversos orígenes se relacionan y refuerzan entre sí. La autora organiza estas dificultades en tres grandes categorías no independientes. Una de estas categorías corresponde a la conceptualización del límite. Algunas de estas dificultades provienen de las características de la definición formal de límite. Otras causadas por un salto cualitativo fundamental entre la concepción formal de límite y su concepción intuitiva. Artigue (1998) resalta que el concepto formal de límite parcialmente rompe con las concepciones previas de esta noción.

El trabajo de Artigue (1998) refuerza la pertinencia que se ha expuesto en los trabajos de Gómez y Pantoja (2013), Blázquez y Ortega (2000), Navarro *et al.* (2012) y Vrancken *et al.* (2006) en el sentido de que el concepto de límite es un concepto importante para el estudio del cálculo, tanto por el hecho de que en él se fundamentan otros conceptos importantes como la continuidad de funciones y el concepto de derivada como por su carácter instrumental para la solución de problemas. Por tanto estos trabajos ilustran la pertinencia de delimitar el estudio a dicho concepto, que además por su grado de abstracción y su carga filosófica resulta ser un concepto difícil de llevar a la contextualización y aplicación del saber matemático que la enseñanza dentro de un enfoque por competencias implica, lograr que el límite sea un tema matemático escolar funcional.

## **1.2. Descripción del problema**

Desde hace algunos años el Nivel Medio Superior en México ha venido afrontando la implementación de la RIEMS, que contempla como uno de sus ejes rectores, la creación del SNB; el cual tiene como base cuatro pilares principales: la construcción de un MCC con base en desempeños terminales (competencias), la definición y el reconocimiento de la oferta de la Educación Media Superior, la profesionalización de los servicios educativos y la certificación nacional complementaria. Si bien cada uno de éstos trae consigo diferentes retos y desafíos, en este trabajo nos centramos apenas en de uno los múltiples que enfrentan los docentes. Es decir, la posible existencia de una desconexión el currículum que propone un nuevo enfoque educativo y los libros de texto que sirven de base para su implementación. Esta posible falta de conexión y la carencia de materiales, específicamente libros de texto, adecuados para la implementación del MCC y el enfoque por competencias, resulta un problema que puede incidir no sólo en el éxito de la RIEMS sino en los aprendizajes de los estudiantes (López y Tinajero, 2009; Alsina, 2000; Area (1991) y Ceballos y Blanco, 2008).

En particular, la implementación de esta reforma trae consigo nuevos desafíos que los docentes deben afrontar; en este sentido López y Tinajero (2009) destacan la instrumentación del MCC para el desarrollo de ciertas competencias (genéricas, disciplinares y profesionales) en los estudiantes; así como el compromiso, por parte de los profesores, de cumplir con un perfil que implica ciertas competencias docentes. Del mismo modo, López y Tinajero (2009) hacen mención de las preocupaciones que los profesores han manifestado respecto a la implementación de reformas anteriores, pero que podrían corresponder a algunos de los retos que acompañan a la RIEMS, tales como la escasa o nula participación de los docentes en el proceso de reforma, la naturaleza de los cambios realizados, la ausencia de materiales acordes con las nuevas demandas y la falta de capacitación adecuada.

Dentro de la problemática relacionada con la implementación de la RIEMS y en la que se centró nuestro interés, resalta una posible desconexión curricular, es decir, diferencias entre lo que se planea, lo que se lleva al aula, lo que el alumno aprende y los materiales en que se apoya la enseñanza. Esta desconexión entre currículos ha sido estudiada en la Universidad

Autónoma de Guerrero (Valenzuela y Dolores, 2012; Zavaleta y Dolores, 2012; Ibáñez y Dolores, 2012) y ha sido mencionada por Alsina (2000), quien refiere que la falta de coherencia entre los documentos oficiales, lo desarrollado en las aulas por profesores y materiales se ve reflejado en los resultados de aprendizaje de los estudiantes.

De esta manera, el estudio se enfocó en la búsqueda de relación entre el currículum oficial y potencial; específicamente entre las competencias matemáticas que establece el programa oficial y las actividades que se proponen en los libros de texto. Se considera que esto toma relevancia, ya que como señalan Ibáñez y Dolores (2012), la falta de dispositivos didácticos acordes a lo establecido en el currículum oficial resulta ser uno de los factores que inciden en el deficiente aprendizaje en matemáticas. Lo cual es reforzado por Ceballos y Blanco (2008), quienes encuentran en la falta de conexión entre los dispositivos didácticos, específicamente libros de texto, y los propósitos formativos plasmados en los planes oficiales, uno de los factores que propician el fracaso escolar; especialmente cuando se llevan a cabo modificaciones curriculares en matemáticas. Además, se destaca que algunos subsistemas de NMS, no cuentan con libros de texto oficiales. En estos casos el programa sugiere fuentes de consulta, tanto bibliográficas como electrónicas, cuya implementación al ser propuestas de apoyo, depende del criterio del profesor en turno. Los cuales, comúnmente basan la elección en su experiencia, en recomendaciones de otros profesores o bien en el enfoque que se declara en el título del libro.

### **1.3. Justificación**

Respecto a la justificación del estudio, cabe señalar que en Matemática Educativa predominan los trabajos que se enfocan en atender el deficiente aprendizaje de las matemáticas desde un punto de vista cognitivo; orientándose hacia las formas de aprendizaje y enseñanza así como en los errores obstáculos y dificultades que se presentan en el proceso de instrucción. Los estudios curriculares, entendidos como el estudio de los elementos involucrados en la planificación, implementación y evaluación del proceso de enseñanza, resultan escasos (Ibáñez y Dolores, 2012). Aunado a esto se cuenta con investigaciones que señalan el uso de dispositivos didácticos inadecuados, específicamente los libros de texto, como uno de los factores que pudieran influenciar en los resultados de los estudiantes (Ibáñez y Dolores, 2012). Más aún, Ceballos y Blanco (2008) destacan que, al ser la concreción del currículum, “los libros de textos deben reflejar plenamente lo establecido en el currículum oficial de las regiones o países y que por lo general, son el único recurso con que cuenta el profesor para realizar su docencia” (p. 85).

En el mismo orden de ideas, cabe resaltar lo expuesto por Area (1991), con referencia a la importancia que el libro de texto tiene en la labor de enseñanza. Él afirma que los libros de texto son utilizados por los alumnos como fuente de conocimiento y por los profesores como fuente estructuradora de la enseñanza. Asimismo destaca que los libros de texto, por la manera en que están diseñados, “ofrecen al profesor un plan completo y elaborado para el desarrollo

instructivo de un currículum en su aula” (p. 32). En ese sentido, reconoce en ellos un medio que por su propia naturaleza, al no ser diseñado para situaciones específicas y puntuales de enseñanza, tiene el potencial suficiente para ser usado a lo largo de un curso completo. También menciona que, a diferencia de otros medios, el libro de texto ofrece, propone, condiciona e incluso (cuando es utilizado exclusivamente) impone un determinado proyecto del currículum. No obstante es importante mencionar, que si bien el libro de texto juega un papel importante en la planificación e implementación de los cursos, es el profesor quien da una interpretación a lo que se presenta en los textos y manuales escolares. De esta manera, el profesor selecciona las actividades y define en qué medida apoya su labor en dichos elementos, por lo que la experiencia del mismo también juega un papel importante.

Con base en el impacto que la falta de coherencia entre los libros de texto y disposiciones oficiales pudiera tener en el desempeño escolar en matemáticas (Ibáñez y Dolores, 2012 y Ceballos y Blanco, 2008), resulta de interés determinar el nivel de relación y congruencia entre lo que se propone en libros de texto y el currículum oficial, encarnado en los planes de estudio. lo anterior se espera que pueda facilitar al profesor la elección de materiales didácticos adecuados a los propósitos que se pretenden alcanzar dentro del currículum oficial y que apoyen de mejor manera el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En particular los actuales planes de estudio atienden las disposiciones establecidas en la RIEMS y en el MCC, por tanto los propósitos de formación de los bachilleres están dados en términos de competencias, es así que consideramos importante conocer cómo los libros de texto plantean actividades que favorecen el desarrollo de éstas.

Asimismo, tomando en cuenta lo expuesto por Gascón (1998) respecto a la pobreza de dispositivos didácticos y su evaluación; así como una propuesta para atenderla a través de la aplicación experimental de materiales didácticos que tomen en cuenta los resultados de la disciplina y que puedan ser incorporados por los profesores (Hitt, 1997), consideramos pertinente buscar mecanismos y/o instrumentos que permitan a los profesores conocer la forma en que se aborda el conocimiento matemático en los libros de texto respecto a lo que se establece en la RIEMS. Esto se espera pueda ayudar a los profesores a identificar o evaluar con mayor certeza profesional lo que los materiales didácticos proponen favorecer con las diversas actividades que se presentan en los libros de texto y su relación o congruencia con lo que el currículum oficial plantea. Lo anterior se espera pueda impactar dando oportunidad a que los profesores de matemáticas respondan de una mejor manera a los cambios curriculares que en la actualidad se están viviendo.

De igual manera, Moreno *et al.* (2007) señalan que el análisis de los materiales, como libros de texto y manuales escolares, con que dispone el profesor para el diseño e implementación de sus cursos, permite conocer cuáles son los recursos con que cuenta y la manera en que éstos podrían impactar en su labor. Además esto puede llegar a ser fuente de información en cuanto al conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. Esto en virtud de que al analizar las actividades respecto de las competencias que favorecen dota al profesor de una

nueva visión acerca de la organización del proceso de enseñanza. En particular le hace tomar conciencia de los desequilibrios que se presentan y genera en él una nueva dimensión acerca del aprendizaje y los resultados del estudiante; con miras a equilibrar la relación entre las propuestas editoriales y las necesidades de la materia y el profesor, adaptando para tal fin las tareas y actividades matemáticas que éste lleva al aula. En el mismo sentido se encuentra lo expresado por Rico (2004) respecto a que la relevancia de las competencias propuestas en un programa determina su calidad mientras que la eficacia del mismo está en función del modo en que éstas son alcanzadas. Esta afirmación pudiera ser aplicable al currículum oficial y al currículum potencial, puesto que al analizar las competencias que uno exige y el otro promueve, indirectamente se está analizando la pertinencia de éstos, en términos de lo que se esperaría que un estudiante sea capaz de hacer con el contenido matemático escolar aprendido.

Se espera que los resultados del estudio puedan contribuir a facilitar la elección de los materiales a utilizar por parte de los profesores, en el diseño e implementación de sus cursos. Esto a través de la formulación de un instrumento de análisis para las actividades propuestas en términos de las capacidades que demandan y las competencias que favorecen. Asimismo se buscó que a través del análisis de los libros de texto en términos de las competencias favorecidas, los profesores tomen conciencia acerca de los posibles desequilibrios que se pueden presentar en el desarrollo de dichos cursos. Con esto se espera ratificar la necesidad de contar con herramientas o investigaciones que logren evaluar o caracterizar al currículum potencial encaminando a la búsqueda de un equilibrio en el desarrollo de las competencias establecidas en el currículum oficial para el campo de las matemáticas en el NMS.

#### **1.4. Delimitación del estudio**

El estudio que se presenta en este documento se enfoca en el subsistema COBAEZ que no establece, como tal, libros de texto de carácter oficial, entendidos como aquellos materiales impresos y estructurados con la finalidad específica de ser utilizados en el proceso de enseñanza aprendizaje (Monterrubio y Ortega, 2011) y que sean determinados por el sistema educativo. Esto, como ya se ha dicho, implica que en la mayoría de los casos sea el profesor, quien se encargue de tomar la decisión acerca de los materiales que habrá de utilizar para el diseño e implementación de sus cursos. En este caso se propone presentar a los profesores no sólo los resultados de la evaluación hecha a libros de texto previamente por ellos elegidos, sino tener evidencia de cuáles son algunos de los factores que inciden en su elección. Entre los que inicialmente se supuso influyen, por mencionar algunos, la experiencia con determinados títulos o editoriales, las recomendaciones de otros profesores o el enfoque bajo el cual el libro de texto señala desarrollar el saber matemático. En otro sentido se considera que en muchos de los casos y por experiencia propia los profesores carecemos de herramientas que faciliten una elección basada en una evaluación sistemática y con una intencionalidad académica, que permita una mayor certeza en cuanto a la elección que se realiza.

Otro elemento que tiene que ver con la delimitación del problema que se aborda, es aquello que nos lleva a centrar la atención en el tema de límites en bachillerato. El concepto de límite se estudia como parte del segundo bloque de la asignatura denominado “RESUELVES PROBLEMAS DE LÍMITES EN SITUACIONES DE CARÁCTER ECONÓMICO, ADMINISTRATIVO, NATURAL Y SOCIAL” (SEP/SEMS/DGB, 2013, p. 18). En el cual se pretende que el estudiante resuelva problemas sobre límites en las ciencias naturales, económico-administrativas y sociales mediante tablas, gráficas y aplicación de las propiedades de los límites. En este caso, el discurso del currículum oficial parece querer atender el nivel de aridez de este contenido de la matemática escolar, a través de la inclusión de contextos no matemáticos, posicionándolo como herramienta matemática en la resolución de problemas. Esto podría ser una posible respuesta a lo expresado por Blázquez y Ortega (2000), Navarro *et al.* (2012), Vrancken *et al.* (2006), Artigue (1998) y Gómez y Pantoja (2013) al tratarse de un tema abstracto y de difícil comprensión para los estudiantes. Sin embargo, queda pendiente identificar de qué manera es tratado este tema en los libros de texto, lo cual se presenta en el apartado correspondiente al análisis de contenido. Más aún lo expresado por estos autores es ratificado por el programa oficial que reconoce el carácter abstracto que el cálculo tiene en la actualidad, y que, según menciona, buscará darle un nuevo enfoque para que el alumno sea quien construya sus propios conceptos partiendo de la resolución e interpretación de los cambios en el contexto en que se desarrolla (SEP/SEMS/DGB, 2013).

En este sentido, es que resulta pertinente recuperar algunas de las dificultades que los autores antes mencionados han identificado con relación al concepto de límite y las cuales pudieran ser vinculadas con lo que desde el programa oficial se establece para dicho contenido matemático.

#### **1.4.1. Dificultades relacionadas con el concepto de límite y su vinculación con lo establecido en el programa oficial.**

Para realizar una conexión entre algunas de las dificultades que desde la investigación en matemática educativa se han identificado entorno al límite de una función y la manera en que éste es abordado desde el currículum oficial, es necesario exponer primero al menos someramente, puesto que esto se hará con mayor profundidad en secciones subsecuentes, la forma en que el límite de una función es presentado en el programa oficial; particularmente cuáles son los objetos de estudio y qué desempeños se esperan por parte del estudiante respecto a este contenido matemático y luego vincular dichos objetos y desempeños esperados con las dificultades que desde las investigaciones revisadas se identifican. Como se ha expuesto en la sección anterior el límite de una función se ubica en el programa oficial como eje central del segundo de los cuatro bloques que se propone. La postura oficial en cuanto al límite de una función es que éste se aborde a partir de una noción intuitiva que lo ubica como un proceso de aproximaciones sucesivas al comportamiento de una función en torno a un punto, para lo cual se pretende apoyarse de manera primordial en los sistemas de representación gráfico y tabular, que además lo ubique como una herramienta útil en el

argumento de la solución de problemas de distintos ámbitos. Esta postura oficial podría verse impedida por algunas de las dificultades identificadas en la literatura, entre las cuales podemos mencionar las dificultades para reconocer e interpretar límites laterales, para trabajar con entornos y aproximaciones, no entender la idea gráfica de límite, la interpretación errónea de tablas numéricas y asociar el límite con frontera y relacionarlo con los extremos de la función.

Asimismo el programa oficial marca como desempeño esperado en el estudiante que éste formule y resuelva problemas a través del cálculo del dominio y contradominio de la función para determinar límites haciendo uso de su habilidad en la solución de problemas algebraicos. Lo cual se puede vincular con dificultades tales como las dificultades para la manipulación algebraica de las leyes de las funciones cuyo límite se quiere determinar, para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución, la interpretan indeterminaciones como no existencia de límite y no encuentran situaciones relacionadas con el concepto. Esta última parece ser una de las dificultades asociadas al límite de una función que podrían tener un mayor impacto en el desarrollo de competencias que el nuevo enfoque del NMS establece, pues como se observa en secciones posteriores de este documento, la noción de competencia implica movilizar distintos tipos de recursos para hacer frente a determinada situación.

De lo anterior se desprende parte de la pertinencia de enfocar el estudio a conocer la relación entre currículum oficial y potencial para los temas de límite. Ya que por un lado este concepto puede resultar particularmente difícil de enseñar en el enfoque por competencias que el programa exige; debido a la dificultad de llevarlo a la contextualización y aplicación del contenido matemático que la enseñanza dentro que dicho enfoque conlleva. Y por otro, también se considera la importancia que el concepto tiene en el estudio del cálculo, al tener un papel bivalente como concepto central que da fundamento a otros y como concepto de carácter instrumental para la resolución de problemas de ésta y otras disciplinas, como lo señalan Gómez y Pantoja (2013), quienes describen dos aspectos por los cuales centran su atención en el concepto de límite de funciones. El primero de ellos es la importancia del concepto para la construcción de nuevos conocimientos matemáticos, ya que el límite es considerado uno de los temas de mayor importancia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo, con un carácter estructural sobre el cual se construye el cálculo diferencial e integral y que, además, tiene un carácter instrumental que lo lleva a ser considerado como herramienta en la resolución de problemas. El segundo aspecto tiene que ver con la complejidad que la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite implica y las dificultades en el tránsito del bachillerato a la universidad.

En el mismo sentido está lo expuesto por Blázquez y Ortega (2000) al considerar el límite como uno de los conceptos matemáticos que implican mayor cantidad de dificultades de aprendizaje inherentes al propio concepto. Ellos justifican la importancia del estudiar el aprendizaje de dicho concepto señalando que es uno de los más importantes del Análisis; necesario para introducir otros como la continuidad, la derivada y la integral, además, mencionan que el límite para los alumnos resulta “un concepto árido, poco atractivo,

demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender” (p. 1).

Por su parte Vrancken *et al.* (2006) destacan que la importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que éste puede ser usado como objeto de conocimiento y como una herramienta útil para abordar y operar con otros objetos matemáticos o resolver problemas relacionados con otras disciplinas. Además mencionan que en el proceso de adquisición del concepto de límite se presentan diferentes obstáculos que se manifiestan en los errores que cometen los alumnos. Dichos errores suelen provenir de dificultades en los procesos de aprendizaje matemático o por la interacción de variables de la educación matemática y pueden ser resistentes en el tiempo. En este sentido cabe reflexionar el papel que el límite de una función parece tener en el programa oficial de cálculo diferencial, que en su descripción lo relega a una posición secundaria, al señalar que la asignatura tiene como finalidad analizar cualitativa y cuantitativamente la razón de cambio instantánea y promedio así como la solución de problemas de optimización. Sin embargo aun cuando en las finalidades de la asignatura no se menciona de manera explícita, el límite de una función tiene un papel relevante en el programa, pues además de dedicarle uno de los cuatro bloques, a partir de él se estructuran los conceptos de continuidad y razón de cambio instantánea. Además en el programa oficial, con relación a dicho contenido matemático, se pretende darle prioridad como herramienta para la solución de problemas en distintas áreas a través de la noción intuitiva de límite a partir de aproximaciones gráficas y numéricas en funciones finitas e infinitas.

### **1.5. Pregunta de investigación e hipótesis**

Partiendo del reconocimiento del importante papel de los libros de texto (currículum potencial) para el diseño e implementación de los distintos cursos (currículum oficial), de la falta de coherencia entre los diferentes tipos de currículum como una posible causa del deficiente aprendizaje de las matemáticas y de la complejidad e importancia que por su carácter bivalente, como elemento estructurador e instrumental, tiene el concepto de límite. Además de los nuevos retos que significan las recientes reformas a la Educación Media Superior en México y la falta de libros de texto oficiales, tenemos como pregunta de investigación la siguiente cuestión:

¿Cuáles son las competencias matemáticas plasmadas en el currículum oficial que son favorecidas en las actividades que proponen los libros de texto utilizados por profesores de COBAEZ para los temas de límite?

Se parte del supuesto de que, a pesar de la existencia de bibliografía que propone un enfoque basado en competencias para el estudio del cálculo diferencial en bachillerato, las actividades propuestas no necesariamente favorecen el desarrollo de las competencias matemáticas que se establecen en el plan de estudios oficial diseñado por la DGB; específicamente aquellas relacionadas con las competencias que incluyen contextos fuera de las matemáticas. Desde nuestro punto de vista y respaldado por algunos resultados que se mencionaron anteriormente,

esta falta de relación entre el currículum oficial y potencial pudiera ser fuente de algunas causales del bajo rendimiento escolar en matemáticas a nivel bachillerato. Por lo tanto, se busca analizar el nivel de congruencia entre las competencias propuestas como fines formativos del currículum oficial y las que se pueden favorecer a través de las actividades propuestas en los libros de texto para el tema de límite.

### **1.6. Objetivo general y objetivos particulares**

Considerando lo mencionado anteriormente es que, el presente estudio tiene como objetivo general analizar el currículum oficial y el currículum escolar potencial de NMS. Específicamente, lo señalado en el programa de cálculo diferencial propuesto por la DGB para el tema de límites. Se enfoca la atención en las competencias matemáticas que según lo establecido en el primero, se pretende desarrollar en los estudiantes y en cómo los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto utilizados por profesores de cálculo diferencial de los planteles del subsistema COBAEZ podrían favorecer tal desarrollo. La intención es **identificar cuáles de las competencias matemáticas del MCC son favorecidas por las actividades que se proponen en los libros de texto particularmente el tema de límites**. Además, se espera que los resultados del estudio ayuden a los profesores en la elección de materiales didácticos acordes al plan de estudios; que apoyen de mejor manera la enseñanza basada en competencias que el actual modelo educativo exige. Todo lo anterior, a través de la propuesta de un instrumento, que permite analizar las actividades propuestas en los libros de texto con el fin de llevar a cabo la identificación de las competencias favorecidas por dichas propuestas y que ilustra un método de análisis que bien pudiera replicarse para otros contenidos matemáticos.

A fin de lograr lo antes señalado se plantearon los siguientes objetivos particulares:

- Identificar libros de texto utilizados por profesores del COBAEZ y centrar la atención en dos de los más utilizados y al menos uno de los propuestos en el programa oficial.
- Identificar las competencias matemáticas correspondientes al curso de cálculo diferencial explícitas en el MCC.
- Identificar en el programa oficial de la DGB cuáles son las expectativas de aprendizaje específicas para los temas de límite en el curso de cálculo diferencial.
- Realizar un análisis de contenido para los temas de límite en bachillerato tanto en el programa oficial como en los libros de texto sujetos de estudio.
- Establecer mediante un análisis cognitivo, basado en los resultados del análisis de contenido aplicado al programa oficial y los libros de texto analizados, las expectativas de aprendizaje para los temas de límite en términos de competencias, objetivos específicos de aprendizaje y capacidades matemáticas.
- Proponer un instrumento de análisis que relacione las capacidades y objetivos específicos de aprendizaje correspondientes al límite de una función con las competencias establecidas en el MCC para la materia de cálculo diferencial.

- Realizar un análisis de las actividades propuestas en los libros de texto, en términos de las capacidades que demandan.
- Determinar cuáles de las competencias matemáticas son favorecidas por cada uno de los ítems analizados, a través de un análisis de la información obtenida por medio del instrumento propuesto.

## Capítulo 2

# MARCO TEÓRICO-CONCEPTUAL

---

## 2. MARCO TEÓRICO-CONCEPTUAL

Con la información que se presenta en este capítulo se clarificaron, a través de teóricos de la disciplina, aquellos conceptos necesarios para la comprensión de este estudio. En primer lugar se fija una postura teórica respecto al concepto de currículum que sirva como referencia para la comprensión del trabajo. Asimismo se abordan los conceptos de competencia y competencia matemática enmarcados en el contexto del NMS en México; específicamente con relación a las disposiciones oficiales que establece la RIEMS.

### 2.1. La noción de Currículum

El currículum es un concepto en el cual no se ha llegado a establecer un consenso ni una definición única, sino que se le dan diversos significados. Un ejemplo de la diversidad de definiciones es lo expresado por Dolores (2012), quien señala que el currículum “es asumido como el conjunto de objetivos, contenidos, criterios metodológicos y de evaluación que los alumnos deben alcanzar en un determinado nivel educativo. Todos estos elementos están presentes en los planes y programas de estudio” (p. 166).

Por otro lado, Pansza (2005) destaca que el currículum es un término polisemántico, utilizado comúnmente para referirse a planes de estudio, programas e incluso a la implementación didáctica. Pero también menciona que se ha avanzado en la conceptualización del mismo, puesto que diversos autores definen el término currículum según la visión que tienen de la problemática educativa. En este sentido, ella refiere que el currículum se relaciona con la escuela, como institución por excelencia del sistema educativo formal, al ser utilizado para referirse a las experiencias educativas que tienen lugar en ésta. Asimismo menciona que las diferentes acepciones de currículum pueden ser agrupadas en los siguientes cinco rubros:

- a) *El currículum como los contenidos de la enseñanza:* En este sentido se trata de una lista de materias, asignaturas o temas que delimitan el contenido de la enseñanza y del aprendizaje en las instituciones escolares. De hecho, quienes identifican el currículum con contenidos destacan la transmisión de conocimientos como función principal de las escuelas (Briggs).
- b) *El currículum como plan o guía de la actividad escolar:* Un plan de aprendizaje, enfatiza la necesidad de un modelo ideal para la actividad escolar, su función es la homogeneizar el proceso de enseñanza-aprendizaje (Taba).
- c) *El currículum entendido como experiencia:* Esta interpretación del currículum, pone su énfasis, no en lo que se debe hacer, sino en lo que en realidad se hace, es decir: la suma de las experiencias que los alumnos realizan dirigidos por la escuela.
- d) *El currículum como sistema:* Se desarrolla, por la influencia de la teoría de los sistemas, en educación, el sistema se caracteriza por:
  - a. Elementos constituyentes.
  - b. Relaciones entre los elementos constituyentes. Destaca la existencia de metas, las cuales apuntan los elementos y sus relaciones. Interpretan el enfoque de sistemas como un proceso sistemático y lineal (Kaufman).

- e) *El currículo como disciplina*: En esta clasificación, el currículo no sólo es un proceso activo y dinámico, sino también, es una reflexión sobre este mismo proceso.

Referente a los tres primeros rubros de definiciones, Pansza (2005) señala que de ellos se destaca el carácter dinámico del currículum, el cual es entendido como un proceso vivo en el que intervienen personas que le dotan de características peculiares y no sólo como una propuesta o plan. Además destacan la concepción activa y flexible del término, valoran el efecto que éste tiene en la formación de los sujetos de aprendizaje y de los factores externos al ámbito escolar, es decir le dan un carácter social.

Cabe señalar que los cinco grupos de acepciones descritos por Pansza (2005) dejan ver que el currículum es una estructura completa y compleja que, dependiendo del enfoque del cual se aborde, puede adoptar distintos significados e intencionalidades. Para el caso específico de nuestro estudio, se aborda el currículum desde dos dimensiones distintas, por un lado se estudia como un plan de formación, que establece ciertos propósitos que deberán ser logrados en el estudiante, el desarrollo de competencias; y por otro, el currículum es visto como un sistema que se apoya en los materiales y recursos que desarrollan dicho plan de formación. Sin embargo no podemos dejar de lado que el currículum al componerse de experiencias de aprendizaje articuladas intencionalmente en torno a una finalidad específica se ve influenciado por los distintos actores y condicionantes del entorno educativo. Esto da el carácter dinámico y de constante evolución que el currículo que se lleva a la práctica adquiere.

Otra de las definiciones de currículum que se rescata de la literatura es la que presenta Rico (2009), quien a través de la exploración de diversos estudios llevados a cabo durante décadas anteriores a su estudio respecto al currículum visto desde la Educación Matemática, expone que la noción de currículum es un término en el cual no se ha llegado a un consenso. Al respecto, señala que en el ámbito educativo el término “currículum” se ha utilizado para referirse a la planificación de la formación. Es así, como se entiende por currículum matemático al plan de formación en matemáticas para niños jóvenes y adultos dentro de una población específica, el cual tiene lugar en el sistema educativo. Finalmente, para Rico (2009) el currículum, desde un punto de vista educativo, es un término genérico destinado a denominar toda actividad que planifique una formación y que intenta dar respuesta a cuatro cuestiones principales ¿qué es, en qué consiste el conocimiento?, ¿qué es el aprendizaje?, ¿qué es la enseñanza? y ¿qué es, en qué consiste el conocimiento útil? Además él menciona que el currículum tiene la intención de ofrecer propuestas específicas sobre los modos de entender el conocimiento, interpretar el aprendizaje, poner en práctica la enseñanza y valorar la utilidad y dominio de los aprendizajes realizados.

Partiendo de las cuatro cuestiones anteriores y su carácter ontológico, es decir considerando la carga filosófica que el concepto encierra, Rico (2009) establece cuatro dimensiones del currículum: Dimensión cultural/ conceptual, Dimensión cognitiva o de desarrollo, Dimensión ética, Dimensión social.

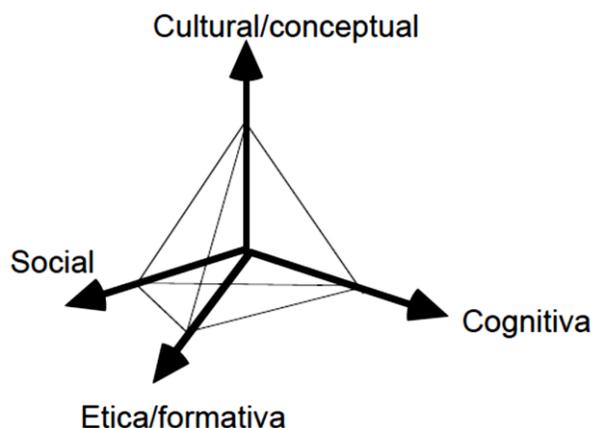


Figura 1. Dimensiones del Currículum (Rico, 2009, p. 22)

Según Rico las cuatro dimensiones del currículum admiten diversos niveles de análisis o reflexión curricular. En Rico (2009) se establecen cuatro niveles de reflexión pero se aclara que no son los únicos sino que se reconoce como una construcción parcial, abierta a nuevas interpretaciones.

Las dimensiones y niveles de reflexión curricular propuestas en Rico (2009) se resumen en la Tabla 1, en la que se puede observar, independientemente de la aproximación teórica (nivel de reflexión) con que se estudie el currículum, que las dimensiones o ideas centrales en las cuales la noción de currículum se sustenta permanecen.

1ª Dimensión cultural y conceptual	2ª Dimensión cognitiva o de desarrollo	3ª Dimensión ética o formativa	4ª Dimensión social
<b>Nivel teleológico o de los fines</b>			
Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales
<b>Nivel de disciplinas académicas</b>			
Epistemología e Historia de la Matemática	Teorías del aprendizaje	Pedagogía	Sociología
<b>Nivel sistema educativo</b>			
Conocimiento	Alumno	Profesor	Escuela
<b>Nivel de planificación para los profesores</b>			
Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación

Tabla 1. Niveles y dimensiones del currículum (Rico, 2009)

En el caso del estudio que se presenta el currículum oficial, particularmente las competencias matemáticas establecidas en el MCC, puede ser ubicado en el primer nivel de reflexión propuesto en Rico (2009), que se refiere a ver el currículum desde las finalidades que se persiguen. Él organiza las finalidades del currículum en torno a las dimensiones mencionadas dando como resultado un sistema interconectado de cuatro tipos de finalidades, el cual se ilustra en la Figura 2. Donde el currículum oficial es identificado en la dimensión cognitiva, es decir, que corresponde a los fines formativos (Tabla 1) que en la Figura 2 se representa como las finalidades relacionadas con el desarrollo personal y de aprendizaje.

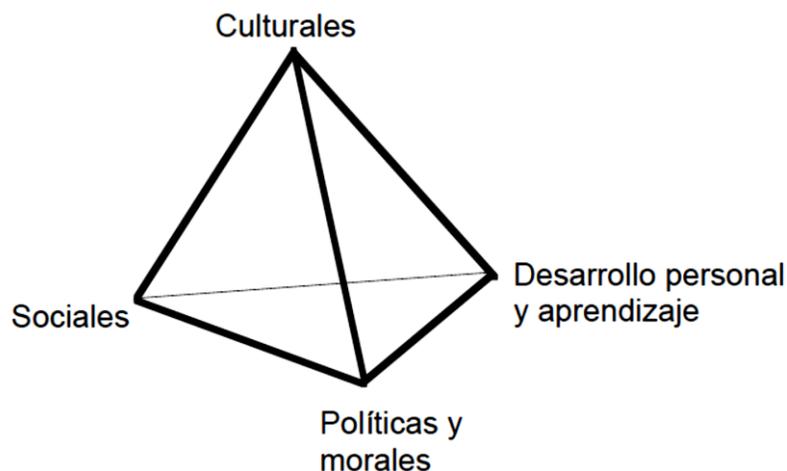


Figura 2: Finalidades del Currículum (Rico, 2009, p. 22)

Por otro lado, tal como se reconoce en Rico (2009) los cuatro niveles de reflexión y cuatro dimensiones curriculares propuestos no representan un modelo terminado, sino que pueden ser ampliados a través de nuevas visiones. A partir de una de estas visiones es que surge un quinto nivel de reflexión que corresponde al análisis didáctico, en el cual, como se muestra en secciones posteriores, se sustenta teórica y metodológicamente esta investigación.

El análisis didáctico es entendido como una visión ideal del trabajo del profesor que se fundamenta en la noción de currículum y es sostenido por los organizadores curriculares que se orientan a través de un enfoque funcional de las matemáticas escolares y que constituye un nivel de reflexión del currículum que está directamente relacionado con la actividad del profesor (Lupiáñez, 2009). En este sentido cabe señalar que:

El análisis didáctico introduce un nuevo nivel de reflexión curricular, centrado en la actividad del profesor como responsable del diseño, implementación y evaluación de temas de la matemática escolar y que, en correspondencia con las cuatro dimensiones del currículum, propone cuatro componentes: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación (ver última fila de la Tabla 2) (Lupiáñez, 2009, p. 28).

1ª Dimensión cultural y conceptual	2ª Dimensión cognitiva o de desarrollo	3ª Dimensión ética o formativa	4ª Dimensión social
<b>Nivel teleológico o de los fines</b>			
Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales
<b>Nivel de disciplinas académicas</b>			
Epistemología e Historia de la Matemática	Teorías del aprendizaje	Pedagogía	Sociología
<b>Nivel sistema educativo</b>			
Conocimiento	Alumno	Profesor	Aula
<b>Nivel de planificación para los profesores</b>			
Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
<b>Nivel del Análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 20)</b>			
Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción	Análisis de actuación

Tabla 2. Dimensiones y niveles de la noción de currículo (Rico, 1997a, p. 409, citado en Lupiáñez, 2009, p. 27)

Dentro de este quinto nivel de reflexión del curricular podemos ubicar a los libros de texto, concretamente a los problemas y ejercicios que proponen, los cuales conforman nuestro objeto de estudio, en la dimensión cognitiva del currículo. Lo anterior debido a que en el presente estudio se buscó conocer si de alguna manera los ejercicios y problemas analizados contribuyen al alcance de las expectativas de aprendizaje plasmadas en el currículo oficial. Esto, como se expone más adelante, se hace posible por medio del análisis cognitivo en el cual se establecieron expectativas de aprendizaje para diferentes niveles de especificidad. De tal forma que nuestro estudio pone atención tanto al programa oficial como a los libros de texto en la dimensión cognitiva, aunque en distintos niveles de reflexión.

Las definiciones de currículo que hasta el momento se han abordado en este documento aportan a la comprensión del trabajo de investigación que se presenta; al ubicar dicho término como uno de aquellos en los cuales dependiendo del enfoque que se adopte puede tomar distintos significados. Asimismo las fuentes expuestas (Pansza, 2005 y Rico, 2009) han permitido ubicar los objetos de estudio en los cuales centramos nuestra atención a concepciones, dimensiones y niveles que cada una de las fuentes consultadas propone. Esto, nos lleva a observar que si bien, el estudio presentado se concentra en el currículo matemático escolar del nivel medio superior, los objetos de estudio tiene características particulares. Lo cual pudiera interpretarse como lo señala Alsina (2000), en la coexistencia, dentro de un mismo sistema educativo, de distintos currículos que se desarrollan en contextos y lugares diferentes. En este sentido resulta importante mencionar las definiciones de los cuatro currículos propuestos en Alsina (2000):

- **El currículum oficial** viene dado en el conjunto de documentos que oficializan las autoridades educativas o asociaciones de un lugar y que fijan o proponen los programas de las asignaturas, contenidos mínimos, objetivos que deben superarse, etc.
- **El currículum potencial** queda determinado en publicaciones docentes, libros de texto, materiales, etc. y siendo (¡enormemente!) respetuoso del currículum oficial desarrolla el mismo desde un punto de vista teórico y práctico.
- **El currículum impartido** es el que efectivamente el profesorado desarrolla en clase a lo largo del curso.
- **El currículum aprendido** es el que efectivamente queda adquirido por el alumno y que podríamos distinguir aquí el factor temporal de retención u olvido de lo aprendido (p. 14).

De las definiciones de los cuatro currículum propuestas por Alsina, dos resultan fundamentales para el desarrollo de la investigación que se presenta. Nos referimos a las definiciones de currículum oficial y currículum potencial, ya que por su especificidad de acuerdo a los objetos de estudio de este trabajo se adaptan de mejor manera a la problemática planteada y a los objetivos propuestos.

## 2.2. Las competencias matemáticas enmarcadas en la RIEMS

Otro aspecto que resulta importante de clarificar para este estudio, son los conceptos relacionados con el actual currículum oficial; el cual surge a partir de la RIEMS (SEP, SEMS, 2008), que tiene como propuesta curricular la creación del SNB en un marco de diversidad.

Este sistema busca fortalecer la identidad del nivel en un horizonte de mediano plazo, al identificar con claridad sus objetivos formativos compartidos, que ofrezca opciones pertinentes y relevantes a los estudiantes, con métodos y recursos modernos para el aprendizaje y con mecanismos de evaluación que contribuyan a la calidad educativa, dentro de un marco de integración curricular que potencie los beneficios de la diversidad (SEP, SEMS, 2008, p. 42).

Para lograr lo anterior el SNB parte de tres principios básicos que buscan ser la base un consenso global. Estos principios son:

*Reconocimiento universal de todas las modalidades y subsistemas del bachillerato.* La dispersión subsistente entre las diversas modalidades que ofertan Educación Media Superior, así como las distintas reformas y adecuaciones a los programas que de manera aislada han realizado cada una de las instituciones hacen que sea difícil poder identificar qué estudian y qué aprenden los estudiantes de Educación Media Superior. En este sentido, la RIEMS establece que:

La diversidad de planes de estudio y modalidades de oferta no tiene por qué conducir a la dispersión académica. La Educación Media Superior debe asegurar que los adolescentes adquieran ciertas competencias comunes para una vida productiva y ética; es necesario asegurar que los jóvenes de 15 a 19 años que estudian adquieran un universo común de

conocimientos. Esto quiere decir que las instituciones de educación media superior tendrían que acordar un núcleo irreducible de conocimientos y destrezas que todo bachiller debiera dominar en ciertos campos formativos o ejes transversales esenciales: lenguajes, capacidades de comunicación, pensamiento matemático, razonamiento científico, comprensión de los procesos históricos, toma de decisiones y desarrollo personal, entre otros (pp. 42-43).

*Pertinencia y relevancia de los planes de estudio.* La RIEMS establece que la pertinencia y relevancia deben considerarse en los planes de estudios para atender las necesidades personales, sociales y laborales en el contexto de las circunstancias del mundo actual, caracterizado por un creciente dinamismo y pluralidad. En este sentido menciona que:

La pertinencia se refiere a la cualidad de establecer múltiples relaciones entre la escuela y el entorno. Si la educación no es pertinente habrán de generarse problemas diversos; uno de ellos es una mayor proclividad de los estudiantes a abandonar estudios que representan un beneficio insuficiente frente a la inversión de esfuerzos que supone (p. 44).

Mientras que

La relevancia de la oferta educativa se refiere a asegurar que los jóvenes aprenden aquello que conviene a sus personas, pero también a la sociedad que les rodea. Los programas académicos tienen que permitir a los estudiantes comprender la sociedad en la que viven y participar ética y productivamente al desarrollo de su región y país (pp. 44-45).

*Tránsito entre subsistemas y escuelas.* La posibilidad de un tránsito fluido entre subsistemas y escuelas resulta indispensable para combatir una de las causas de la deserción en la EMS. En este sentido la RIEMS señala que

Para facilitar el tránsito entre escuelas resulta indispensable el concepto de portabilidad de los estudios. Significa que los jóvenes puedan llevar los grados cursados de una escuela a otra, e implica que las constancias o los certificados parciales de estudios sean reconocidos en las nuevas escuelas de destino de los jóvenes. Este tipo de instrumentos facilitarían a los jóvenes la oportunidad de cambiar de opinión o de dirección en sus vidas. El condicionar el título de bachillerato a que los jóvenes concluyan sus estudios en la institución o modalidad en la que los iniciaron es un obstáculo innecesario para su desarrollo como individuos (pp. 45-46).

Con la finalidad de atender estos principios básicos la RIEMS plantea una estrategia global que incluye la creación de un Marco Curricular Común basado en desempeños terminales (MCC), que establezca los desempeños finales compartidos que todo egresado de bachillerato debería alcanzar. El MCC busca unificar manteniendo la diversidad y definir cuáles son los conocimientos, las habilidades y actitudes que todo bachiller debe poseer al finalizar sus estudios.

[...] se trata de definir un perfil básico del egresado, compartido por todas las instituciones, y enriquecido de muy distintas maneras por aquello específico que cada institución ofrece de forma adicional, tanto en términos de formación para el trabajo como en la adquisición de conocimientos disciplinares más complejos. El perfil básico hace

referencia a los desempeños comunes que los egresados del bachillerato deben conseguir independientemente de la modalidad y subsistema que cursen. Es lo que constituiría el eje de la identidad de la educación media superior (SEP, SEMS, 2008, p. 49).

La RIEMS (SEP, SEMS, 2008) utiliza el término competencias para la construcción del perfil básico del egresado de bachillerato: “Las competencias son la unidad común para establecer los mínimos requeridos para obtener el certificado de bachillerato sin que las instituciones renuncien a su particular forma de organización curricular” (SEP, SEMS, 2008, p. 50). La RIEMS se apoya de tres definiciones de competencia:

La primera de éstas es establecida por la OCDE, la cual menciona en la introducción de este documento y señala como competencia a la movilización y uso de recursos psicosociales para responder a demandas complejas en determinados contextos.

La segunda consiste en lo que Allende y Morones (2006; citado en SEP, SEMS, 2008) señalan en un extracto de documentos de la ANUIES donde las competencias se definen como:

Conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales, que debe reunir un titulado para satisfacer plenamente las exigencias sociales. [...] Las competencias son capacidades que la persona desarrolla en forma gradual y a lo largo de todo el proceso educativo y son evaluadas en diferentes etapas. Pueden estar divididas en competencias relacionadas con la formación profesional en general (competencias genéricas) o con un área de conocimiento (específicas de un campo de estudio) (p. 50).

Y por último la RIEMS menciona la definición de competencia propuesta por Perrenoud (2004; citado en SEP, SEMS, 2008) como “capacidad de movilizar recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones”, agregando que:

Las competencias no son en sí mismas conocimientos, habilidades o actitudes, aunque movilizan, integran, orquestan tales recursos”, además de que “el ejercicio de la competencia pasa por operaciones mentales complejas, sostenidas por esquemas de pensamiento, los cuales permiten determinar (más o menos de un modo consciente y rápido) y realizar (más o menos de un modo eficaz) una acción relativamente adaptada a la situación (SEP, SEMS, 2008, p. 51).

Dentro del MCC la RIEMS (SEP, SEMS, 2008) establece la existencia de Competencias Genéricas, Disciplinarias y Profesionales. Las primeras corresponden al perfil de egreso de todos los estudiantes del SNB. Las segundas, son nociones que expresan conocimientos, habilidades y actitudes que consideran los mínimos necesarios de cada campo disciplinar. Las Profesionales son las que preparan a los jóvenes para desempeñarse en su vida laboral con mayores probabilidades de éxito. Las dos últimas se subdividen a su vez en básicas y extendidas. A continuación profundizaremos en cada una de ellas dando un especial énfasis en las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas, puesto que son las competencias matemáticas que corresponden a la asignatura de cálculo diferencial, ubicada dentro del componente propedéutico, y en la cual se enmarcan los temas de límite que forman parte de nuestro objeto de estudio.

Las Competencias Genéricas, son aquellas que han de articular y dar identidad a la EMS, y que constituyen el perfil del egresado del SNB. Son las que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar. Les permiten comprender el mundo e influir en él, les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean.

Las Competencias Profesionales son las que preparan a los jóvenes para desempeñarse en su vida laboral con mayores probabilidades de éxito, al tiempo que dan sustento a las competencias genéricas. Las competencias profesionales pueden ser básicas o extendidas y se desarrollan y despliegan en contextos laborales específicos.

Por su parte, las Competencias disciplinares son las nociones que expresan conocimientos, habilidades y actitudes que consideran los mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida. El SNB, establece como campos disciplinares: las matemáticas, las ciencias experimentales, las ciencias sociales y la comunicación. Estas competencias se subdividen en básicas y extendidas. En nuestro caso se enfoca la atención en las Competencias Disciplinares que corresponden al campo de las matemáticas.

Las Competencias Disciplinares básicas son aquellas que buscan expresar las capacidades que todos los estudiantes deben adquirir, independientemente del plan y el programa de estudio que cursen y la trayectoria académica o laboral que elijan al terminar sus estudios de bachillerato. Son la base de la formación de los estudiantes en las competencias genéricas que integran el perfil de egreso de la EMS y, pueden aplicarse en distintos enfoques educativos, contenidos y estructuras curriculares.

Las Competencias Disciplinares básicas en el campo de las matemáticas, se enfocan en el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Se busca que el estudiante pueda argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Estas competencias, reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático, corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Los estudiantes que cuentan con estas competencias deben poder razonar matemáticamente y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos, haciendo posible llevar la aplicación de las matemáticas fuera del salón de clases.

Las Competencias Disciplinares Extendidas son las que amplían y profundizan los alcances de las disciplinares básicas y dan sustento a la formación de los estudiantes en las competencias genéricas del egresado de bachillerato. Dichas competencias, se definirán al interior de cada subsistema, según sus objetivos particulares; considerando para su elaboración y determinación las orientaciones del contenido, que implican su construcción a partir de la lógica de cada disciplina, se organizan en torno a campos disciplinares amplios, son específicas de distintos modelos educativos y subsistemas.

Asimismo, la RIEMS y más específicamente el Acuerdo 444, por el que se establecen las competencias que constituyen el Marco Curricular Común del Sistema Nacional de Bachillerato, establece que las Competencias Disciplinarias Extendidas deben considerar ciertas orientaciones de forma que incluyen la estructura, lo que se debe evitar y las características que éstas deben tener.

La Figura 3 sintetiza los grupos de competencias propuestas que conforman el MCC propuesto por la RIEMS.

# Marco Curricular Común

## Competencias Genericas

Perfil de egreso de todos los alumnos del SNB

Son competencias clave, por su importancia y aplicaciones diversas a lo largo de la vida; transversales, por ser relevantes a todas las disciplinas y espacios curriculares de la EMS, y transferibles, por reforzar la capacidad de los estudiantes de adquirir otras competencias.

## Competencias Disciplinares

Conocimientos, habilidades y actitudes necesarios de cada campo disciplina .

Básicas

Comunes a todos los egresados de la EMS. Representan la base común de la formación disciplinar en el marco del SNB.

Extendidas

Dan especificidad al modelo educativo de los distintos subsistemas de la EMS. Son de mayor profundidad o amplitud que las competencias disciplinares básicas.

## Competencias Profesionales

Preparan a los jóvenes para desempeñarse en su vida laboral con mayores probabilidades de éxito

Básicas

Proporcionan a los jóvenes formación elemental para el trabajo.

Extendidas

Preparan a los jóvenes con una calificación de nivel técnico para incorporarse al ejercicio profesional.

Figura 3. Grupos de competencias que conforman el MCC (SEP, SEMS, 2008)

El Acuerdo 486, por el que se establecen las Competencias Disciplinarias Extendidas del bachillerato general, señala que las Competencias Disciplinarias Extendidas implican los niveles de complejidad deseables para quienes opten por una determinada trayectoria académica. En consecuencia, tienen una función propedéutica, en la medida que prepararán a los estudiantes de la EMS para su ingreso y permanencia en la educación superior. Las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas son presentadas en esta investigación dentro del análisis cognitivo que se presenta en el epígrafe 5.2.

## Capítulo 3

# MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

---

### 3. MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

En este apartado se describen las acciones realizadas y el fundamento teórico que las sustenta. Se detallan los métodos y técnicas utilizados para llevar a cabo los objetivos general y particulares, propuestos para efectuar el comparativo entre el currículum oficial y el potencial. Asimismo se declara y describe como referente teórico metodológico al análisis didáctico, particularmente las dos primeras etapas que lo conforman, el análisis de contenido y el análisis cognitivo. Estas dos etapas nos permitieron establecer y estudiar relaciones entre las actividades propuestas en los libros de texto y el desarrollo de las competencias matemáticas establecidas en el currículum oficial.

El presente trabajo de investigación es de carácter mixto. El análisis de las actividades, propuestas en los libros de texto, se realizó de forma cualitativa. Lo anterior, a través de su interpretación por medio de indicadores establecidos en un instrumento de análisis. Este instrumento permite, como elemento de apoyo en el proceso de enseñanza, relacionar las actividades matemáticas respecto a las competencias matemáticas que se favorecen por medio de éstas. Sin embargo se considera que la aplicación del instrumento está sujeta a la interpretación de quien realiza el análisis. Por otro lado, el estudio también tiene un carácter cuantitativo puesto que el análisis de los datos obtenidos se realizó con dicho enfoque. Se cuantificaron las expectativas de aprendizaje que cada uno de los ítems analizados demanda en términos de capacidades, objetivos de aprendizaje específicos y competencias. Además, se realizó un comparativo entre las expectativas demandadas en cada uno de los libros de texto para determinar cuáles de las competencias matemáticas a desarrollar en la asignatura de cálculo diferencial se favorecen a través de cada uno de los libros de texto analizados. También observamos cuáles son las competencias más y menos favorecidas, esto nos permitirá determinar los desequilibrios que podrían generarse si como profesores tomamos sólo a uno de los libros como referencia.

El desarrollo de este trabajo de investigación puede ser descrito a través de distintos momentos o etapas, que permiten ilustrar el método utilizado. En los siguientes sub-apartados se describe cada una de las etapas de la investigación.

#### **3.1. Delimitación de los objetos de estudio correspondientes al currículum oficial y al currículum potencial**

En una primera etapa el estudio se centra en la delimitación de los objetos que caracterizan tanto al currículum oficial como al currículum potencial. Para definir los objetos que corresponden al currículum oficial se consideró en un principio revisar las competencias matemáticas propuestas en el MCC, establecido en la RIEMS, así como las competencias matemáticas propuestas dentro del proyecto PISA/OCDE. Tras una reflexión profunda se determinó considerar como objeto de estudio a las competencias matemáticas que propone el MCC; ya que al plantear un estudio que involucra el currículum oficial se entiende que, para el

caso particular de este trabajo, se debe tomar en cuenta la postura que la autoridad educativa establece como vigente. En este sentido, se profundizó en la revisión de la RIEMS y de los acuerdos secretariales relacionados con la misma, específicamente en aquellos que se abordan aspectos relacionados con la construcción del MCC y con el establecimiento de las competencias que lo conforman.

Resultado de la revisión y análisis de la conformación del MCC y después de consultar el programa oficial de Cálculo Diferencial (SEP/SEMS/DGB, 2013) se logró establecer como objeto de estudio del currículum oficial a las ocho Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas. Las cuales se identifican como el propósito formativo global del curso de cálculo diferencial en el NMS y en el cual se encuentra estipulado el tema de límites, en el que como hemos señalado se centra el interés de este trabajo.

Por otro lado, para definir los objetos de estudio correspondientes al currículum potencial, se planteó como base el objetivo y delimitación del estudio, analizar aquellos libros de texto que son más utilizados por profesores del COBAEZ en los cursos de cálculo diferencial e incluir al menos uno de los títulos sugeridos como fuente de consulta dentro del programa oficial. Para conocer los libros de texto de mayor uso por parte de los profesores del COBAEZ, se utilizaron mecanismos que permitieran conocer, según lo declarado por éstos, cuáles son los títulos más utilizados en el diseño e implementación de los cursos que imparten. En este sentido es que se diseñó y aplicó una encuesta que además de explorar el uso de dichos materiales permitió conocer algunas de las características y necesidades que los profesores del subsistema manifiestan.

El cuestionario se compone de veintiséis preguntas; de las cuales doce se orientaron a explorar información personal y de formación del profesor; nueve se refieren a las necesidades, tanto en infraestructura como en capacitación, que los profesores declararon tener; mientras que cinco se enfocaron en conocer el uso de materiales por parte de los profesores. En este sentido, se destacan los cuestionamientos acerca de cuál o cuáles son los libros de texto utilizados, bajo qué criterio se seleccionan y si los profesores consideran que los libros de texto utilizados por ellos y los alumnos desarrollan las competencias matemáticas establecidas en el plan de estudios.

El análisis de los resultados obtenidos en la encuesta nos permitió establecer cuáles son los dos títulos mayormente utilizados por profesores de COBAEZ; los cuales son objeto de análisis en la presente investigación. El tercer libro sujeto a análisis se determinó a partir de la revisión del programa oficial, seleccionando uno de los que en él se señalan como fuentes de consulta básica. Una vez establecidos los objetos de estudio, el siguiente paso de la investigación consistió en el diseño de un instrumento de análisis de libros de texto que permitiera recoger la información necesaria para realizar el comparativo.

### **3.2. Diseño y conformación del instrumento de análisis de libros de texto en términos de las competencias que favorecen**

Para la conformación del instrumento a través del cual se identificaron las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas que son favorecidas por medio de las actividades propuestas en los libros de texto, se toma como punto de partida el instrumento desarrollado por Moreno *et al.* (2007). Como base teórico metodológica se adopta la descripción de expectativas de aprendizaje en términos de competencias que se establece en el análisis cognitivo, el cual a su vez, forma parte del análisis didáctico.

El diseño del instrumento se realizó a través de la identificación de los propósitos formativos a largo plazo, caracterizado por las ocho Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas. Es decir dichas competencias matemáticas son entendidas, en términos del análisis cognitivo, como las expectativas globales de la formación matemática del estudiante para el curso de cálculo diferencial. Éstas a su vez fueron desagregadas en expectativas específicas al contenido matemático escolar correspondiente al límite de una función; denominadas dentro del análisis cognitivo como objetivos específicos de aprendizaje y capacidades matemáticas, siendo estas últimas la unidad de expectativa básica dentro del análisis didáctico. Las nociones de competencia, objetivo específico y capacidad que se adoptan en este trabajo se exponen en la descripción teórico-metodológica del análisis cognitivo en el epígrafe 3.2.3.

En el análisis cognitivo se establecen tres criterios posibles para determinar las capacidades matemáticas relacionadas a un contenido específico: la revisión del diseño curricular global de la asignatura, la información suministrada por el análisis de contenido y las decisiones personales del profesor (Lupiáñez y Rico, 2008). Para identificar las expectativas de aprendizaje que conforman el instrumento de análisis propuesto se adoptaron los dos primeros criterios.

En primera instancia se realizó una revisión del currículo oficial caracterizado por el programa oficial de cálculo diferencial publicado por la DGB. Lo anterior para establecer los propósitos de formación planteados desde el diseño curricular global de la asignatura; en nuestro caso, las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas.

De manera alterna a la revisión del currículo oficial para la identificación de los propósitos de formación global para el curso de cálculo diferencial, se realizó un análisis de contenido aplicado tanto al currículum oficial como al currículum potencial. Dicho de otra manera, primero se analizó el programa oficial de la asignatura y después los libros de texto sujetos a estudio. La aplicación del análisis de contenido con relación al tema de límite de una función en un punto, tuvo una doble finalidad: por una parte la identificación de los diversos significados que dicho tema adopta dentro de las matemáticas escolares y por otra, la intención de dotar de información acerca de cómo a través de determinados significados se ponen en juego cierto contenido, procedimientos, destrezas y estrategias relacionados con el tema

matemático escolar en cuestión y el uso que el estudiante pudiera darle al enfrentarse a situaciones en un contexto específico.

La información obtenida a través del análisis de contenido aportó para que en el análisis cognitivo se pudieran establecer las expectativas de aprendizaje tanto globales como específicas en términos de objetivos de aprendizaje, competencias y capacidades, que conforman el instrumento de análisis que se propone para el presente estudio comparativo. A continuación se abordan los aspectos teórico-metodológicos enmarcados en el análisis didáctico, que se adoptaron en esta investigación.

### **3.2.1. Descripción teórico-metodológica del análisis didáctico**

En la búsqueda de un marco teórico-metodológico que permitiera establecer, analizar e interpretar la relación entre las actividades propuestas en los libros de texto y el desarrollo de competencias matemáticas, se revisaron diversos documentos; entre los que destaca la propuesta hecha por Moreno *et al.* (2007). Estos autores desarrollan un instrumento de análisis y evaluación de las competencias que desarrollan los textos escolares; el cual está basado en indicadores que caracterizan las tareas matemáticas en función de las destrezas o pericia que cada estudiante demuestra a la hora de resolver determinado problema. Lo anterior se logra utilizando el análisis cognitivo de Lupiáñez (2005, citado en Moreno *et al.*, 2007). Al profundizar en el trabajo de Lupiáñez, buscando entender de mejor manera el análisis cognitivo, se hizo evidente que dicho análisis forma parte de un procedimiento aún más amplio llamado análisis didáctico.

Si bien es cierto que el análisis didáctico es concebido como un procedimiento para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas y es utilizado como una técnica en la formación de profesores de matemáticas para educación secundaria, en España; éste puede ser utilizado también como herramienta para el análisis de textos escolares de matemáticas. Así lo expone Lupiáñez (2010), quien describe diversas cuestiones que pueden ser estudiadas en los textos matemáticos escolares desde la perspectiva del análisis didáctico y los organizadores curriculares que conforman su estructura. Una de estas cuestiones es la posibilidad de analizar textos escolares de matemáticas para conocer ¿Cuáles de las competencias matemáticas se enfatizan en ellos? Dicha cuestión coincide con el objetivo del presente estudio y es ubicada por Lupiáñez como una de las cuestiones que pueden ser abordadas específicamente desde el análisis cognitivo. Lo anterior nos llevó a suponer que a través del análisis cognitivo se puede establecer y analizar relaciones existentes entre las actividades propuestas en los libros de texto y el desarrollo de las competencias matemáticas establecidas en el currículum oficial.

Por lo que, enseguida se describe el análisis didáctico y después los dos primeros organizadores curriculares de los cuatro que lo conforman: el análisis de contenido, en el cual se exploraron los significados relevantes para la enseñanza del contenido matemático escolar del límite de una función; y el análisis cognitivo, que es el que nos permitió ilustrar la manera

en la cual se pueden establecer relaciones entre las actividades propuestas y las competencias favorecidas.

Respecto al análisis didáctico, Gómez (2007) señala que como técnica de formación de profesores, éste es “el procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una clase” (p. 30). Por unidad didáctica se entiende, “una unidad de programación y actuación docente formada por un conjunto de actividades desarrolladas o a desarrollar en un tiempo determinado encaminadas a lograr objetivos específicos” (Segovia y Rico, 2001; citados en Gómez, 2007, p. 30). El cual, como hemos señalado en el epígrafe 2.1, configura un quinto nivel de reflexión curricular, adicional a los cuatro propuestos en Rico (2009).

Asimismo, Rico y Fernández-Cano(2013) ubica al análisis didáctico como un método propio de la didáctica de las matemáticas cuyo objeto de estudio son textos, relatos y documentos relativos a conocimientos, normas, juicios, argumentos y explicaciones relacionados con la actividad educativa de una comunidad particular. Respecto a las finalidades que persigue el análisis didáctico, Ellos señalan que éstas “radican en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación, puesta en práctica y evaluación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos escolares específicos, según establece la comunidad educativa y tiene lugar en el medio escolar” (p. 13).

Además de ser ubicado como técnica para la formación de profesores y como método para analizar textos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el análisis didáctico cumple una tercera función, que es la de guiar la elaboración de propuestas curriculares. En este sentido, Rico Fernández-Cano (2013) señala que:

...las categorías (que lo conforman) ofrecen una guía precisa y detallada de qué aspectos considerar para redactar propuestas curriculares según distintos tópicos. Proporcionan criterios para estructurar los contenidos, la cognición, la instrucción y la evaluación de un tema específico de las matemáticas escolares. Por su fundamentación en los organizadores del currículo, el análisis didáctico ofrece una secuencia estructurada para orientar y guiar el diseño de unidades didácticas en las matemáticas escolares (p. 20).

De tal forma, el análisis didáctico se transforma, de ser una metodología de análisis de textos en una técnica para el diseño y elaboración de propuestas curriculares, es decir, pasa de ser un método analítico, descriptivo e interpretativo, a ser una técnica normativa y prescriptiva (Rico y Fernández-Cano, 2013).

El análisis didáctico comienza con la determinación del contenido a abordar y los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr, partiendo de la percepción del profesor acerca de la comprensión del estudiante acerca de las bases o nociones necesarias para afrontar el nuevo tema y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción. Para el caso de esta investigación se comenzó por identificar el contenido matemático escolar y los propósitos formativos que se establecen en el currículum oficial para el estudio del límite de una función.

Respecto al contenido matemático escolar, Gómez (2007) refiere que:

[...] el Currículo Oficial marca el contenido básico o programa oficialmente establecido por gobiernos u organismos responsables. El programa es un documento que incluye una descripción global escueta de temas y delimita unos bloques de contenidos; este documento técnico tiene carácter normativo, está integrado en la correspondiente propuesta curricular y su elaboración corresponde a la administración educativa. Para el caso de las matemáticas, sus funciones son enumerar las estructuras matemáticas que deben enseñarse y aprenderse, delimitar su extensión, establecer prioridades, secuenciar su desarrollo, enfatizar conexiones y destacar procedimientos. En definitiva, el programa marca los conceptos y procedimientos de referencia que constituyen la formación matemática básica de todos los ciudadanos de un país o comunidad, socialmente compartidos y cuyo dominio es objeto de evaluación institucional (p. 37).

Para Gómez (2007) el término contenido matemático escolar se refiere a las posibles interpretaciones que pueden darse para los contenidos del programa en términos del conocimiento matemático escolar. Particularmente, el contenido matemático escolar se sustenta sobre el conocimiento de los significados que cada tema del programa puede adoptar. En este sentido...

El contenido matemático escolar expresa un marco general que se puede singularizar por temas; marca la experiencia adquirida por cada comunidad de educadores matemáticos, nacional o local. Se refiere al saber acumulado respecto a los significados de los temas del programa y establece un marco de referencia sobre el cual diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula (p. 38).

Por lo tanto, en esta etapa se identificaron los significados de referencia del concepto matemático objeto de la instrucción y delimitaron los objetivos de aprendizaje que se buscan alcanzar en el proceso de enseñanza aprendizaje. Los significados de referencia son entendidos como aquellos significados relevantes para la instrucción, estos serán el objeto de la instrucción y la base para determinar los objetivos de aprendizaje correspondientes. La selección de los significados de referencia debe ser coherente con el contenido propuesto y atender al desarrollo mismo de la asignatura hasta ese momento. En este caso el contenido, los significados de referencia y los objetivos de aprendizaje están definidos por el currículum oficial.

Una vez que se ha establecido el contenido matemático escolar, los significados relevantes para la enseñanza y los objetivos de aprendizaje, se comienza con el análisis de contenido de los libros de texto. Posterior a esto y con base en la información recabada, se realiza el análisis cognitivo el cual puede generar una revisión del primero. El análisis cognitivo da pie a un análisis de instrucción y un posterior análisis de actuación. Sin embargo, considerando los objetivos de la investigación, éstos últimos no se realizan, ciñendo el estudio a los análisis de contenido y cognitivo. Esto en consideración al objetivo del estudio y por interés del investigador. Ahora se abordan los dos primeros organizadores curriculares que conforman el análisis didáctico.

### 3.2.2. Descripción teórico-metodológica del análisis de contenido

El análisis de contenido es un método que se ha utilizado dentro de la Matemática Educativa para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos que aparecen en un texto como pueden ser el discurso de un profesor, libros de texto o producciones escolares en las cuales se busca determinar algún tipo de sesgo (Rico, 2013).

En este sentido, Lupiáñez (2009) señala que como parte de una técnica de formación de profesores:

En el análisis de contenido, situado en la dimensión cultural y conceptual del currículo, el profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático que considera relevantes a efectos de su planificación como contenidos escolares aptos para la instrucción. La revisión y organización de los conceptos y procedimientos que conforman ese tema, el modo en que esos conceptos y procedimientos pueden representarse y la organización de los fenómenos y problemas a los que pueden dar respuesta, delimitan los organizadores del currículo que conforman del análisis de contenido (p. 36).

Para realizar el análisis de contenido se toma como referente lo expuesto en Gómez (2007) que lo describe como un análisis de las matemáticas escolares que busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados matemáticos de un tema matemático concreto. En este sentido el análisis de contenido es caracterizado por como la exploración de las tres dimensiones del significado de un concepto matemático: los signos o sistemas de representación que se utilizan, la referencia formal, dada por la estructura conceptual y el sentido o fenomenología con que se relacionan los diversos conceptos.

La propuesta de Gómez (2007) para el análisis de contenido aborda los significados del concepto matemático atendiendo estas tres dimensiones:

- En la **estructura conceptual** incluimos las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.
- En los **sistemas de representación** incluimos las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos.
- En la **fenomenología** incluimos aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto (p. 27).

Asimismo, se reconoce que las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar ponen en evidencia la multiplicidad de significados del mismo. Algunas posibles causas de esta situación pudieran ser que la estructura conceptual es compleja, lo cual implicaría diversas relaciones con otros conceptos matemáticos; que hay una diversidad de formas en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos; y que existe una variedad de fenómenos que le dan sentido. Esta multiplicidad de significados conlleva la necesidad de determinar cuáles de estos son relevantes para la instrucción, es decir,

los significados de referencia. Por tanto, el análisis de contenido tiene el propósito de identificar, organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática que son relevantes para su enseñanza.

En nuestro caso, el análisis de contenido tuvo como intencionalidad inicial dar claridad respecto a las expectativas de aprendizaje que surjan de los significados de referencia, de acuerdo con la postura del diseño curricular global de la asignatura. Sin embargo una vez realizado el análisis de contenido, los resultados obtenidos nos permitieron establecer comparaciones entre las distintas propuestas editoriales y el programa oficial, considerando los significados de referencia, los sistemas de representación y la fenomenología que relacionan con el límite de una función. En este sentido es que se aplicó el análisis de contenido al currículum oficial y a los libros de texto seleccionados, tomando en consideración las tres dimensiones del significado que se proponen en Gómez (2007). A continuación se explica con mayor detalle cada una de las dimensiones del análisis de contenido y sus alcances en esta investigación.

### ***Sistemas de representación***

El análisis de los sistemas de representación se realiza para identificar los distintos signos que tienen como referencia al límite de una función, y que están presentes tanto en el currículum oficial como en el currículum potencial. Gómez (2007) señala que “los signos son elementos constitutivos centrales del significado de un concepto matemático: son los elementos que relacionan el sentido y la referencia y se requieren para expresar las relaciones internas entre los conceptos” (p. 42). Estos se organizan en sistemas de representación que se refieren a los sistemas de signos correspondientes a un concepto. Los sistemas de representación organizan los símbolos mediante los cuales se hacen presentes los conceptos matemáticos y aportan distintos significados para cada concepto. Por tanto un concepto determinado admite y necesita varios sistemas de representación que se complementan.

Los sistemas de representación se componen por signos y están sujetos a ciertas reglas que permiten crear nuevos signos, establecer relaciones y hacer transformaciones entre sistemas de representación. Sin embargo para que un sistema de representación adquiriera sentido concreto debe referirse a un concepto o estructura matemática concreta. Puesto que para un concepto o estructura matemática se permite más de un sistema de representación, las transformaciones y operaciones entre signos que pudieran presentarse resultan de interés para la identificación de los significados del límite de una función dentro de la presente investigación. Las operaciones entre los signos de un sistema de representación son caracterizadas y organizadas por Gómez (2007) en torno a cuatro categorías:

1. *Creación y presentación de signos o expresiones.* Operación que permite determinar expresiones válidas e inválidas.
2. *Transformación sintáctica invariante.* Transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el objeto matemático designado por esos signos cambie.

3. *Transformación sintáctica variante.* Transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación. El objeto matemático designado cambia.
4. *Traducción entre sistemas de representación.* Operación que se refiere al procedimiento en el cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto y que pertenecen a diferentes sistemas de representación.

Dentro del análisis de contenido que se aplicó en este estudio, se identificaron los signos y sistemas de representación que se utilizan en los libros de texto y los que se mencionan en el programa oficial para construir los diversos significados del límite de una función. Para identificar los distintos significados que pudiera adoptar el contenido matemático en cuestión, fue necesario además, observar el papel que los sistemas de representación juegan al referir el contenido matemático. Esto a través de las relaciones que se establecen por medio de las categorías de operaciones mencionadas.

### ***Estructura conceptual***

En el análisis de contenido también se exploran los significados del concepto a través de una visión estructuralista informal de las matemáticas. Esta visión de las matemáticas se centra en la importancia de las relaciones estructurales. El sentido informal de la postura adoptada por Gómez (2007) reside en la distinción entre lo que significa una estructura matemática y la noción que se considera en el análisis de contenido. Partiendo de esto se declara que el interés de la exploración se centra en el contenido matemático escolar, mismo que enfatiza las relaciones que se establecen en las estructuras matemáticas relacionadas con un concepto y que se trabaja con un significado no formal para la expresión “estructura matemática”.

Gómez (2007) utiliza el término estructura conceptual para referirse a tres aspectos relacionados con un concepto matemático concreto dentro del contenido matemático escolar:

- *Estructuras matemáticas involucradas.* Todo concepto matemático se relaciona al menos con dos estructuras matemáticas: la estructura matemática que el concepto configura y las estructuras matemáticas de las que él forma parte.
- *Relaciones conceptuales.* Se refieren a las relaciones que se establecen entre el concepto y los conceptos de la estructura, los objetos que son casos particulares de dicho concepto y los conceptos que pertenecen a la estructura matemática.
- *Relaciones de representaciones.* Consisten en la exploración de los significados de un concepto que requiere de los sistemas de representación, ya que a través de ellos es posible identificar la forma en la que se presenta el concepto.

En consideración a estos tres aspectos relacionados con la estructura conceptual de un tema matemático concreto, Gómez (2007) señala que la exploración de los significados puede organizarse en torno a tres tipos de elementos: como objetos, es decir, casos particulares de un concepto que conforman la extensión del concepto; como conceptos, que son predicados saturados por los objetos y, que a su vez, conforman estructuras matemáticas; y como estructuras matemáticas, que están conformadas por conceptos. Entre estos aspectos se pueden encontrar dos tipos de relaciones, horizontal y vertical; las primeras corresponden a relaciones

entre signos en sus diferentes sistemas de representación y las segundas corresponden relaciones entre los elementos (objetos, conceptos y estructuras).

En la adaptación del análisis de contenido realizado en esta investigación, la atención más que centrarse en la estructura conceptual del límite de una función, se centra en los significados. Dicho de otra forma, el interés de aplicar el análisis de contenido fue identificar los significados de referencia que se proponen en nuestros objetos de estudio en el contexto de las matemáticas escolares del NMS. De tal forma que para efectos de esta investigación, se realizaron mapas conceptuales generales que representan y organizan las tres dimensiones que conforman los significados. Entendiendo que en lugar de profundizar en la estructura conceptual del concepto como tal, nos centramos en observar forma en el contenido del programa oficial y de los libros de texto estructuran y presentan el concepto matemático en cuestión.

### ***Fenomenología***

La tercera dimensión de los significados que se atiende en el análisis de contenido es la fenomenología. Esta dimensión resulta de especial interés para el estudio, puesto que los propósitos de formación que establece el currículum oficial están dados en competencias. Este enfoque coincide con el carácter funcional de las matemáticas escolares que se adopta en el análisis cognitivo. En este sentido Gómez (2007) menciona que la fenomenología se ubica como elemento constitutivo de los significados de un concepto, en consideración a la visión funcional del currículum en la cual los sentidos en los que se utiliza un término conceptual matemático incluyen los fenómenos que sustenta o lo sustentan. La fenomenología como dimensión del significado de un concepto se entiende como los fenómenos que le dan sentido; en los cuales el concepto describe situaciones relevantes o permite realizar cuestionamientos acerca del fenómeno.

Gómez (2007) recupera tres cuestiones con relación a la fenomenología y su papel como elemento constituyente del significado de un concepto matemático ¿qué queremos decir con fenómenos para los que un concepto es un medio de representación y organización? ¿qué queremos decir con que un concepto matemático organiza o describe un fenómeno? ¿cómo se caracteriza la relación entre concepto y fenómeno? El sentido que el significado de un concepto adquiere con relación a un fenómeno o conjunto de fenómenos se vincula con situaciones que el concepto permite describir o cuestiones que el concepto permite plantear.

De tal forma que en la aplicación del análisis de contenido para efectos de esta investigación, se busca identificar y organizar los fenómenos presentes en el contenido matemático escolar del currículum oficial y del currículum potencial, correspondientes al límite de una función. La identificación y organización de los fenómenos se realiza tomando en cuenta cuando el fenómeno se utiliza para dar sentido u origen al contenido matemático y cuando el contenido matemático toma sentido para un fenómeno, es decir, cuando el concepto se configura en una forma de atender dicho fenómeno.

Una vez atendidas e identificadas las tres dimensiones propuestas para la identificación de significados de conceptos matemáticos, se realizaron mapas conceptuales que organizan la información obtenida de cada una de ellas e ilustran los posibles significados presentes en el programa oficial y en cada uno de los libros de texto analizados. Estos mapas conceptuales se realizaron tomando en consideración los significados relevantes para la instrucción, identificados en el programa o libro de texto analizado, las representaciones presentes y los fenómenos que se utilizan para dar sentido al concepto. También se incluye la manera en que es entendido el contenido matemático en relación a las tres dimensiones mencionadas.

Adicionalmente, se llevó a cabo la construcción de un mapa conceptual que permite relacionar la estructura matemática que conforma el contenido matemático propuesto en los objetos de estudio con relación al límite de una función. Este mapa conceptual busca ilustrar conceptos, procedimientos y estrategias relacionadas con el límite de una función. Asimismo, se incluye el uso de los sistemas de representación correspondientes, las operaciones que se han mencionado con anterioridad y la forma en que a través de dichas operaciones se generan nuevos significados para el límite de una función.

A través del análisis de contenido realizado al programa oficial y los libros de texto sujetos de estudio, se pudo profundizar en el contenido matemático escolar relativo al límite de una función. Los resultados del análisis de contenido aportan información útil para llevar a cabo el análisis cognitivo en el cual se establecerán las expectativas de aprendizaje correspondientes al contenido matemático escolar en cuestión. Asimismo esta información dio la oportunidad de establecer un primer comparativo entre los currículos oficial y potencial, a través del análisis de los significados que se favorecen y la manera en que el contenido matemático escolar es presentado.

### **3.2.3. Descripción teórico-metodológica del análisis cognitivo**

El análisis cognitivo, ubicado en la dimensión cognitiva del currículo, aborda la problemática del aprendizaje de un tema matemático por parte de los escolares. Desde un planteamiento constructivista (Coll, 2002), el profesor, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, enuncia y organiza expectativas de aprendizaje sobre ese tema matemático. También analiza aquellas limitaciones que pueden interferir el aprendizaje, y organiza la selección de tareas que les suministrará a los escolares las oportunidades de aprender (Lupiáñez, 2009, p. 36).

Como parte del análisis didáctico, el análisis cognitivo es un procedimiento que contribuye al proceso de planificación de las matemáticas escolares. Este procedimiento permite al profesor llevar a cabo una descripción y un análisis detallados de toda la problemática del aprendizaje de un tema específico de matemáticas desde un punto de vista curricular y funcional (p. 57).

El análisis cognitivo es caracterizado por Gómez (2007) como un análisis a priori en el que se pretende prever la actuación del estudiante al enfrentar las tareas matemáticas que se le presenten a través de las actividades de enseñanza y aprendizaje. El análisis cognitivo implica el establecimiento de una hipótesis, la cual debe sustentarse en la descripción de los aspectos cognitivos relacionados con la estructura matemática correspondiente al contenido matemático en cuestión. De tal forma que este análisis toma como punto de partida y referencia al análisis de contenido.

El análisis cognitivo, como parte de un proceso de planificación, estructura la información obtenida del análisis de contenido a través de tres organizadores curriculares que corresponden a lo que se esperaría que aprendan los estudiantes, a lo que puede interferir en ese aprendizaje y a las demandas cognitivas para activar tal aprendizaje. Los organizadores curriculares que conforman el análisis de contenido son:

- las *expectativas de aprendizaje*, que enumeran, describen y organizan lo que el profesor espera que los escolares aprendan según objetivos específicos y competencias, principalmente;
- el análisis de *limitaciones de aprendizaje*, que se centran en los posibles errores detectados, que se consideran síntomas de las dificultades que hayan podido surgir durante el proceso de aprendizaje y que, por tanto, hay que diagnosticar y superar ya que lo están constriñendo o anulando; y
- las *oportunidades de aprendizaje* que el profesor brinda, mediante las tareas que selecciona y diseña, con las que reta al alumno para que movilice sus conocimientos, en contextos concretos de aplicación, y realice mediante esas herramientas determinadas actividades que muestren las capacidades alcanzadas y, a su vez, contribuyan a su fortalecimiento y desarrollo (Lupiáñez, 2009, p. 113).

Por la naturaleza y objetivos de la presente investigación, nos concentramos en el primero de los organizadores, es decir, se identificaron las expectativas de aprendizaje relacionadas con el límite de una función. Las expectativas pueden estructurarse en varios niveles, pero un elemento común es que su logro se hace visible mediante la actuación del estudiante ante las tareas que el profesor le demanda. En el análisis cognitivo (Lupiáñez, 2009) el término expectativas de aprendizaje es utilizado para referirse de forma genérica a aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los estudiantes.

En el caso de las matemáticas, las expectativas expresan determinados usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden observar o inferir a partir de actuaciones de los escolares ante tareas. Las expectativas de aprendizaje en matemáticas se sostienen en demandas de actuaciones, en contenidos y en tareas (p. 75).

En el mismo sentido, Lupiáñez (2009) señala que “Para determinar el aprendizaje de las matemáticas, el profesor plantea a los escolares tareas y problemas que demandan actuaciones que muestran sus capacidades y conocimientos alcanzados y las competencias matemáticas desarrolladas” (p. 75).

Esto último nos permite establecer que para que el estudiante alcance las expectativas de aprendizaje previstas para el contenido matemático en cuestión, deberá proponer tareas matemáticas que demanden ciertas actuaciones por parte del estudiante.

En esta investigación las expectativas de aprendizaje se organizan en términos de competencias a desarrollar a largo plazo, objetivos de aprendizaje que describen conductas esperadas respecto a un tema matemático y capacidades que al ser movilizadas contribuyen al logro de objetivos y favorecen el desarrollo de competencias. Las expectativas de aprendizaje se identificaron a partir de los resultados obtenidos del análisis de contenido y constituyen los elementos que conforman el instrumento de análisis.

### ***Objetivos específicos de aprendizaje***

Los objetivos específicos de aprendizaje son entendidos como expectativas establecidas para cada uno de los temas y forman vínculos entre determinados contenidos y tareas, llevando a enunciar una conducta esperada por parte del estudiante. Estos expresan lo que se espera que haga un sujeto, de una edad y nivel determinados, en situaciones específicas que demandan el uso de nociones matemáticas concretas (Lupiáñez, 2009). Dicho de otra forma

Mediante el término objetivos específicos nos referimos a niveles concretos de expectativas de aprendizaje, que se expresan como capacidades y se muestran mediante conductas observables, relativos a un tema concreto y referidos a tareas de una complejidad determinada sobre ese tema (p. 80).

Asimismo, Lupiáñez (2009) señala que coincide con la postura de Taba (1983, citado en Lupiáñez, 2009) respecto a que los objetivos específicos de aprendizaje satisfacen las siguientes funciones:

- Contribuyen a la toma de decisiones sobre el contenido y la extensión con que se contempla tal contenido en cada tema de matemáticas.
- Relacionan los contenidos con las tareas, teniendo en cuenta que tales tareas han de ser importantes, necesarias y eficaces para el aprendizaje pretendido.
- Clarifican, o contribuyen a clarificar, los tipos de competencias que deben contribuir a desarrollar. La definición de esas competencias determina cómo se selecciona la materia y cómo se maneja en el aula.
- Coordinan diversos niveles en las expectativas de aprendizaje, buscando cierta unidad de intereses y puntos de atención común.
- Sirven como guía para la evaluación del rendimiento, en tanto establecen expectativas sobre el aprendizaje de temas matemáticos concretos (pp. 80-81).

En el mismo sentido, Gómez (2007) señala, que

...un objetivo de aprendizaje es el marco de referencia que delimita y condiciona los procedimientos que el profesor debe realizar para formular sus conjeturas sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje de los escolares en relación con las actividades que él les proponga (p. 66)

Entonces entendemos a un objetivo de aprendizaje como un constructo cuya identificación resulta necesaria para la interpretación de los problemas y ejercicios que proponen los libros de texto con relación al límite de una función en un punto. De tal manera que se puedan hacer conjeturas acerca de cómo el ejercicio o problema en cuestión pudiera contribuir a alcanzar dicho objetivo y de qué manera este objetivo contribuye al desarrollo de ciertas competencias.

En este caso, los objetivos específicos de aprendizaje que corresponden al límite de una función se determinan a través de la información obtenida del análisis de contenido aplicado al programa oficial y a los libros de texto sujetos de estudio. En primer lugar se tomó como referente las conductas o acciones que se señalan en la sección denominada *Desempeños del estudiante al concluir el bloque*. Además, con base en los resultados del análisis de contenido aplicado a los libros de texto se propusieron objetivos de aprendizaje adicionales para el estudio del límite de una función en el contexto del NMS en México.

### ***Competencias***

Desde hace algunos años y en diversos países la noción de competencia se ha abierto paso en el sistema educativo hasta convertir a la educación basada en competencias en una tendencia internacional. Lupiáñez (2009) refiere que las expectativas de aprendizaje del estudiante no quedan limitadas al cumplimiento de ciertos objetivos sino que éstas pueden ser expresadas en términos de competencias. Asimismo, menciona que las competencias corresponden, a la dimensión cognitiva del currículo y marcan una perspectiva diferente, más amplia y comprensiva, con relación a las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares.

Las competencias son caracterizadas en el análisis didáctico como expectativas globales de aprendizaje. Lupiáñez y Rico (2008) señalan que “[...] el término competencia se refiere a objetivos a largo plazo que debieran ser observables al término de todo un ciclo de enseñanza mediante un conjunto de habilidades y capacidades que las caractericen” (p. 38). En el mismo sentido, Gómez (2007) menciona que “las competencias establecen el vínculo entre el diseño curricular global que sigue el profesor y la planificación local que él debe realizar” (p. 64).

Las competencias, vistas como expectativas de aprendizaje, se refieren a lo que se espera que el estudiante logre o que sea capaz de hacer al concluir con una formación a largo plazo. Por tanto, las competencias se ubican como las expectativas correspondientes a la formación en matemáticas a lo largo de un nivel educativo o como parte de un ciclo de formación. En este trabajo el término competencia se utiliza para referirnos a las expectativas de logro escolar correspondientes a la asignatura de cálculo diferencial que se establecen en el currículum oficial. Dicha asignatura se encuentra dentro del componente de formación propedéutica del NMS, al cual según lo establecido en el MCC le corresponden las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas.

Con base en la noción de competencia como expectativa global de aprendizaje y en la información obtenida de la revisión del MCC y del análisis de contenido se identificaron las ocho Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas como las

expectativas de aprendizaje correspondientes a la asignatura de cálculo diferencial en el NMS en México. Estas Competencias Disciplinarias son uno de los objetos de estudio en la presente investigación. A través del análisis de libros de texto se buscó identificar cuáles competencias son favorecidas a través de los ejercicios y problemas propuestos en estos.

En el análisis cognitivo se establece una relación entre las tareas matemáticas propuestas como parte de una unidad didáctica y las competencias propuestas para un ciclo de formación, a través de las nociones de objetivo específico de aprendizaje y capacidad como expectativa de aprendizaje relativas a un tema matemático concreto.

### ***Capacidades***

En el marco del análisis didáctico y específicamente en el análisis cognitivo el término capacidad, en el contexto de las matemáticas escolares, se entiende como la actuación exitosa de un individuo con respecto a cierto tipo de tarea, dichas actuaciones comúnmente son enunciadas en términos de habilidades y destrezas. Además, se destaca que las capacidades son específicas a un tema concreto y pueden incluir o involucrar otras capacidades y que están vinculadas a tipos de tareas (Gómez, 2007).

Este significado del término capacidad está basado en la concepción funcional de las matemáticas escolares, ya que esta noción relaciona aspectos cognitivos (un individuo desarrolla y manifiesta una capacidad al responder a requerimientos o demandas cognitivas), de contenido (es específica a un núcleo de contenido concreto) y de instrucción (se refiere a tipos de tareas) (p. 65).

En el mismo sentido, Lupiáñez y Rico (2008) mencionan que

Las capacidades aluden a cómo un escolar puede movilizar y usar su conocimiento sobre un contenido concreto, y se desarrollan y movilizan por medio de las actuaciones de los escolares cuando se enfrentan a la resolución de tareas. Pero al ir desarrollando capacidades relativas a diferentes temas matemáticos, los escolares se hacen paulatinamente más competentes en matemáticas (p. 39).

Como ya se mencionó, el análisis de contenido establece tres criterios para la descripción de las capacidades que se espera que movilice el estudiante al desarrollar un tema matemático específico:

- El primer criterio toma en cuenta el diseño curricular global de la asignatura, e incluso del nivel educativo en el que se enmarque la unidad didáctica. En ese nivel de descripción curricular se expresan objetivos generales de aprendizaje que pueden interpretarse en términos de las capacidades y competencias seleccionadas.
- El segundo criterio se relaciona con la información suministrada previamente por el análisis de contenido. En ese análisis se ponen de manifiesto multitud de significados de las nociones matemáticas involucradas y se describen los vínculos que se establecen entre ellas.
- El tercer criterio se relaciona con las decisiones personales que el profesor toma a la hora de planificar sus clases (Lupiáñez y Rico, 2008).

En esta investigación se adopta como criterio principal para la descripción de las capacidades la información obtenida del análisis de contenido; además se realiza la revisión del diseño curricular global de la asignatura.

Una vez establecidas las expectativas de aprendizaje en términos de competencias, objetivos y capacidades con relación al límite de una función, el siguiente paso fue relacionar los diferentes niveles de expectativa. Con los cuales se diseñó el instrumento de análisis que la investigación propone.

***Objetivos, competencias y capacidades dentro del análisis cognitivo.***

Como ya se ha mencionado, en el análisis cognitivo se describen hipótesis de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento al enfrentarse a las tareas que componen la instrucción de un tema matemático concreto, a través del establecimiento de expectativas de aprendizaje tanto globales como específicas.

Así pues, dentro del análisis didáctico es posible analizar las tareas propuestas en los libros de texto a través de la caracterización de objetivos específicos propuestos para un tema matemático particular y la forma en que son o no alcanzados; esto por medio de la identificación de las capacidades que se espera que movilice el estudiante con relación al contenido matemático en cuestión.

La relación entre los niveles de expectativa establecidos en esta investigación se ilustra en la Figura 4. Estos consideran a las competencias como expectativas globales, correspondientes a la asignatura de cálculo diferencial; los objetivos específicos de aprendizaje, correspondientes al segundo bloque y las capacidades identificadas en el análisis de contenido correspondiente a tema de límite de una función.

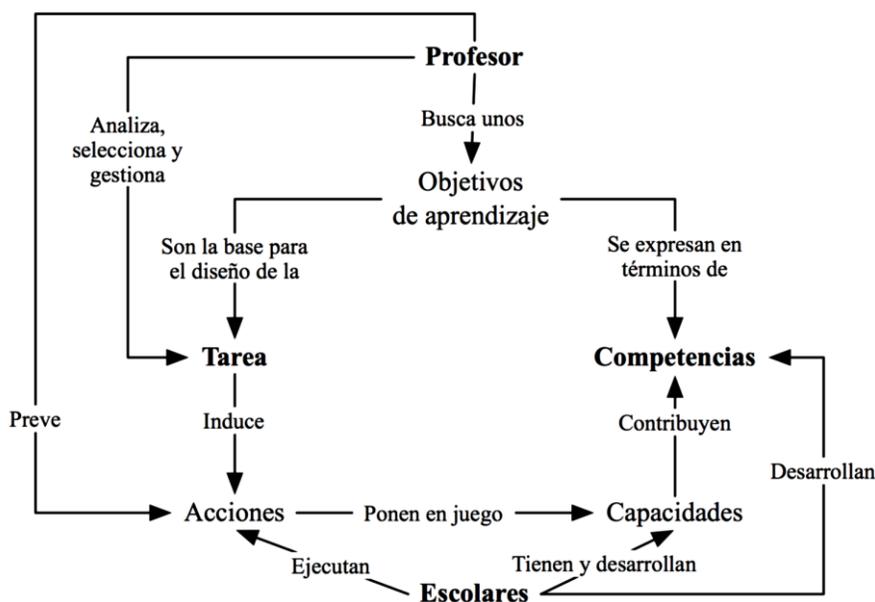


Figura 4. Relación entre competencias, capacidades y tareas (Lupíáñez y Rico, 2006, p. 41)

Para caracterizar un objetivo de aprendizaje en estos términos se debe: identificar y formular las capacidades que al ser demandadas contribuyan al logro del objetivo y establecer si éste contribuye al desarrollo de una lista de competencias. Mientras que, la identificación de las capacidades que al ser puestas en juego contribuirían al logro de un objetivo de aprendizaje, que a su vez delimita un núcleo de contenido, se puede realizar a través de la vinculación del análisis de contenido y del análisis cognitivo correspondiente a dicho núcleo (Gómez, 2007).

Una vez determinadas las capacidades matemáticas específicas con relación a los temas de límite en bachillerato a partir del análisis de contenido aplicado, el siguiente paso fue construir el instrumento para analizar las actividades propuestas en los libros de texto; en términos de las competencias matemáticas que favorecen, con base en las capacidades matemáticas que del estudiante demandan y los objetivos de aprendizaje que promueven.

Para el diseño del instrumento se tomaron las capacidades establecidas en el análisis cognitivo y se les relacionó con los objetivos de aprendizaje que promueven. Los objetivos a su vez fueron analizados en términos de las competencias matemáticas que favorecen.

El instrumento de análisis propuesto se compone de una tabla con tres columnas, una para cada uno de los objetivos propuestos, a partir de los aspectos teórico, técnico y práctico que el enfoque funcional de las matemáticas conlleva. A los objetivos específicos de aprendizaje se les asignó la etiqueta OEAL seguida de un número consecutivo, en la parte superior se indica cuáles de las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas se favorece a través del logro de cada objetivo; para señalar las competencias correspondientes a la asignatura de cálculo diferencial se agregó la etiqueta CCD seguida del número consecutivo correspondiente a cada una. En la tercera fila se organizan las capacidades relacionadas con el límite de una función que se determinaron a partir de la información obtenida en el análisis de contenido; a las cuales se agregó la etiqueta C seguida de un número consecutivo para cada una de las capacidades.

De manera complementaria se agregó, como factor de organización de las capacidades, a los cinco focos de interés que se lograron detectar a partir de las dimensiones que conforman los significados dentro de las matemáticas escolares el análisis de contenido aplicado. Los focos de atención detectados, permiten además de organizar las capacidades conocer en torno a que parte de los significados se favorecen, lo cual nos permite establecer algunas conjeturas al realizar el análisis de los datos recopilados acerca de las distintas propuestas presentadas en los libros de texto y lo que cada una de ellas parecería favorecer. Tanto los objetivos específicos de aprendizaje como los focos de atención propuestos se describen en el epígrafe 5.3.

Adicionalmente se diseñó un instrumento para la recolección de los datos, en el cual se registran las capacidades identificadas en cada uno de los ejercicios y problemas que se analizan. El instrumento de recopilación de datos se divide en dos partes, la primera adopta la misma estructura que el instrumento de análisis, sólo que en lugar de mostrar las capacidades muestra las etiquetas que les corresponden seguidas de un espacio en blanco y un espacio para

mostrar la cantidad de capacidades demandadas que corresponden a cada uno de los objetivos. La segunda parte consiste en una tabla que muestra la cantidad de capacidades demandadas en cada ítem con relación a las competencias que se favorecen en cada uno de los casos.

### **3.3. Análisis de las actividades propuestas en los libros de texto por medio del instrumento diseñado**

La tercera etapa del estudio consistió en la aplicación del instrumento de análisis de libros de texto en términos de las competencias matemáticas favorecidas por las actividades que proponen. Se llevó a cabo el análisis de problemas y ejercicios organizados en grupos según la intencionalidad mostrada en las indicaciones que presentan y la parte del contenido matemático escolar correspondiente al límite de una función con que se relacionan. Es decir se tomó como un ítem una serie de ejercicios o problemas que muestran la misma intencionalidad.

Se analizaron los enunciados e indicaciones contenidos en dichas actividades así como el contenido o la parte del contenido matemático escolar con el que se relacionan, para identificar qué capacidades matemáticas son demandadas en cada una, esto con ayuda del instrumento de análisis propuesto. En dicho instrumento las capacidades relacionadas con el límite de una función que contribuyen al logro de un objetivo específico de aprendizaje se ubican en cada una de las columnas y tienen asignada la etiqueta correspondiente a la capacidad demandada. Asimismo cada uno de los objetivos en la parte superior de la columna tiene indicadas cuáles de las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas se favorecen al ser estos alcanzados.

En el análisis de los ejercicios y problemas relacionados con el límite de una función en un punto, al identificar la demanda de las capacidades que componen el instrumento de análisis, se marcó en el instrumento de recolección de datos la casilla correspondiente a la capacidad demanda que se identifica en el ejercicio o problema analizado; para ello se utilizó el número uno (1) como señal.

De esta forma se obtuvo una tabla que muestre las capacidades que se esperaba que movilice el estudiante al enfrentarse a cada ejercicio o problema propuesto en los libros de texto con relación al contenido matemático escolar en cuestión; primero en términos de los objetivos a los que contribuyen dichas capacidades y luego en términos de las competencias que los objetivos favorecen.

### **3.4. Análisis de datos obtenidos de la aplicación del instrumento.**

La etapa de análisis de datos comenzó una vez que se realizó el análisis de los grupos de ejercicios y problemas, para el contenido matemático escolar correspondiente al límite de una función en el NMS, propuestos en los libros de texto sujetos de estudio en esta investigación. Esto con la finalidad de detectar las capacidades demandadas en cada uno de ellos, a través del

análisis de los enunciados, indicaciones, problemas y ejercicios por medio de la aplicación del instrumento de análisis que se propone en el presente estudio.

Concluida la etapa de aplicación del instrumento a las actividades propuestas en los libros de texto, la información obtenida del análisis de cada uno de los ítems y recopilada en las tablas del instrumento de recolección de datos, fueron concentradas en una tabla que concentra los datos obtenidos en cada uno de los títulos que se analizaron. Haciendo uso de una hoja de cálculo de Microsoft Excel se realizó la sumatoria de capacidades demandadas por ítem y por objetivo específico de aprendizaje, posteriormente se sumaron las capacidades correspondientes a los objetivos específicos de aprendizaje que se relacionan con cada una de las competencias matemáticas correspondientes a la asignatura de cálculo diferencial, de esta forma se obtuvo el total de menciones para cada una de las competencias lo que permitió observar cuáles de éstas se promueven de mejor manera en cada uno de los libros de texto y determinar si existe equilibrio en el desarrollo de las mismas a lo largo del planteamiento del contenido matemático escolar propuesto en cada uno de los libros respecto al límite de una función.

Asimismo, gracias a la inclusión de los focos de atención, se pudo observar primero la intencionalidad de cada ejercicio en términos de la comprensión del concepto, de las operaciones dentro y entre los sistemas de representación, el uso de herramientas y estrategias (herramientas tecnológicas, lenguaje algebraico) y la manera en que el contenido matemático escolar se relaciona con contextos y situaciones o como estos se relacionan con el contenido matemático; y después al analizar los datos de obtenidos de cada libro se puede establecer según la postura de cada uno de los materiales analizados qué dimensión del significado se favorece a través de los ejercicios y problemas propuestos, lo cual permitió interpretar el alcance, que según lo propuesto en cada uno de los libros, se esperaría en el desarrollo de competencias matemáticas. Dicho de otra forma, los focos de atención que se proponen, permiten observar la postura de cada uno de los libros de texto, es decir, si se concentra en lo conceptual, en lo operativo, a través del uso de distintos sistemas de representación para trabajar con el contenido o si incluye la conexión con contextos y situaciones que le dan sentido al concepto matemático.

Los datos generados en el análisis de cada libro dan oportunidad para establecer conclusiones respecto a si las actividades propuestas en libros de texto favorecerían el desarrollo de las competencias matemáticas propuestas en el MCC, si estas son favorecidas de una forma equilibrada y hacia qué dimensiones del significado se inclina cada uno según el enfoque funcional de las matemáticas escolares. Además de lo anterior, que corresponde al objetivo y pregunta de investigación que fueron propuestos en el estudio, se logró identificar tanto en el programa oficial como en cada uno de los libros de texto, los significados que en cada caso se potencian, lo cual puede llegar a enriquecer el comparativo que inicialmente se planteó.

En la Figura 5 se sintetizan las etapas que conforman el presente estudio.

## Etapas de investigación.

Comparativo entre el currículum oficial y potencial en términos de las competencias que se favorecen a través de los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto.

### Determinación de los objetos de estudio.

- Competencias Matemáticas del Currículum oficial.
  - Competencias Extendidas al campo de las Matemáticas.
- Currículum potencial.
  - Libros de texto a analizar
    - Encuesta a profesores de matemáticas.

### Diseño y conformación del instrumento de análisis de libros de texto.

- Análisis de contenido.
  - Exploración de los significados relevantes en el currículum oficial y potencial en torno al límite de una función.
- Análisis cognitivo.
  - Delimitar expectativas de aprendizaje
    - Competencias
    - objetivos específicos de aprendizaje
    - capacidades.

### Aplicación del instrumento de análisis a los libros de texto seleccionados.

- Análisis de problemas y ejercicios representativos de cada uno de los libros de texto en torno a los temas de límite.
  - Analizar los enunciados e indicaciones correspondientes a cada actividad.
  - Identificar las capacidades demandadas en la solución de ejercicios y problemas analizados.
- Registrar los datos obtenidos.

### Análisis de los datos obtenidos.

- Concentrar los datos obtenidos en cada problema y realizar un concentrado para cada libro.
- Identificar cuales objetivos de aprendizaje específicos se privilegian.
- Identificar que competencias y que focos de atención son favorecidos en cada ejercicio y en cada libro.
- Identificar equilibrios y desequilibrios presentes en las propuestas de los libros de texto con relación a la propuesta oficial.

Figura 5. Síntesis de las etapas que conforman la investigación

## Capítulo 4

# SELECCIÓN DE LOS LIBROS DE TEXTO SUJETOS A ANÁLISIS

---

#### 4. SELECCIÓN DE LOS LIBROS DE TEXTO SUJETOS A ANÁLISIS

En este apartado se describen los criterios mediante los cuales se realizó la selección de libros de texto analizados en esta investigación. Para determinar qué libros de cálculo diferencial son objeto de estudio en el presente trabajo, se aplicó la encuesta descrita en el marco teórico-metodológico (Anexo 1).

La encuesta se aplicó en el marco de una de las reuniones de planeación que lleva a cabo la jefatura de materia del área de matemáticas del COBAEZ en el cual, dependiendo del semestre que se trate, laboran alrededor de ciento veinte profesores de matemáticas, en los cuarenta y un planteles con que cuenta el subsistema. En total se aplicaron cuarenta cuestionarios al mismo número de profesores de matemáticas elegidos de manera aleatoria, sin diferenciar entre los que imparten cálculo diferencial y los que imparten otras materias. Del total de profesores encuestados veinticuatro imparten cursos de cálculo diferencial en los diversos planteles. En la Gráfica 1 se ilustra el porcentaje de los profesores encuestados que imparten cálculo diferencial en alguno de los planteles del COBAEZ.

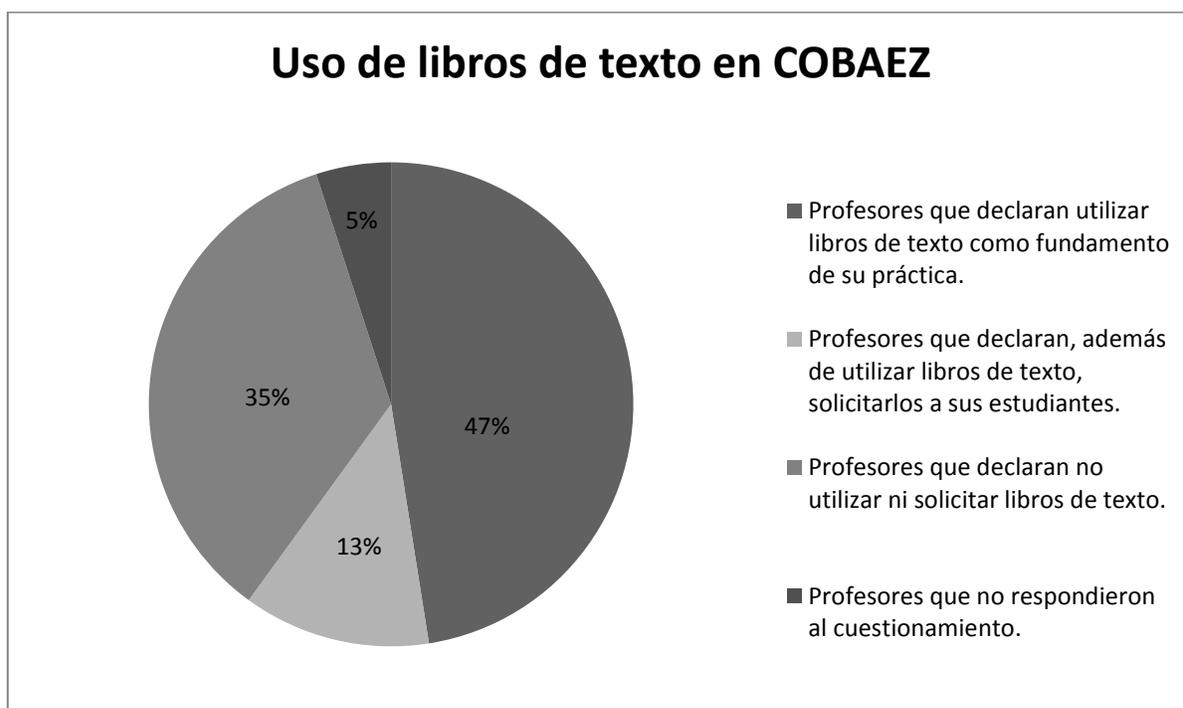


Gráfica 1. Profesores encuestados que imparten o no cálculo diferencial en COBAEZ

#### 4.1. Algunos datos obtenidos a partir de la aplicación de la encuesta a profesores de matemáticas de COBAEZ con relación al uso de libros de texto

La aplicación de la encuesta a los profesores de COBAEZ nos permitió obtener información acerca del papel que los libros de texto juegan en el proceso de instrucción dentro del subsistema y la percepción que los encuestados tienen de los mismos respecto al desarrollo de competencias. La Gráfica 2 muestra la información obtenida de los profesores respecto al uso de libros de texto en la planificación e implementación de los cursos que imparten.

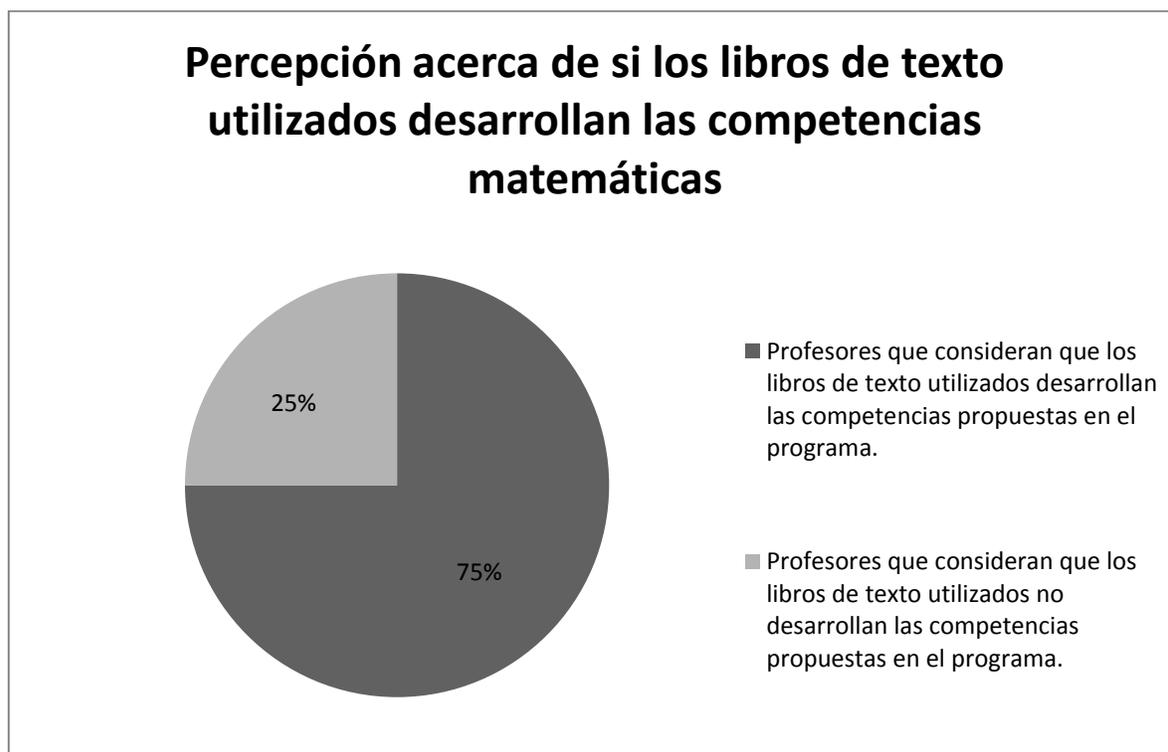
Como se puede observar en la Gráfica 2, cerca de dos terceras partes de los profesores encuestados declaran utilizar libros de texto como fundamento de su práctica docente, lo cual ratifica lo expuesto en los antecedentes con relación a la importancia que dichos materiales tienen en la labor del profesor, particularmente en Area (1991). Sin embargo, también llama la atención que de los profesores que declaran utilizar libros de texto para dar sustento a su labor, los que los solicitan a sus estudiantes representan menos de la cuarta parte de ellos. Esto pudiera ser el reflejo de la influencia que otros factores, tales como el socioeconómico, tienen en el proceso de enseñanza aprendizaje o incluso podría ser una señal de que los profesores consideran que utilizar un libro de texto único en el desarrollo de sus cursos no resulta ser lo más adecuado para cumplir con los fines formativos que se persiguen. Esto nos lleva a pensar que en el contexto en el que se desarrolló el estudio el libro de texto se configura más como una herramienta utilizada por profesores como fuente estructuradora de contenidos y actividades que como un apoyo utilizado por los estudiantes como fuente de conocimiento.



Gráfica 2. Resultados de la encuesta respecto al uso de libros de texto para la planificación e implementación de los cursos

Respecto a los criterios que los profesores utilizan para seleccionar los libros de texto en que apoyan su labor, la gran mayoría de los profesores encuestados declara que eligen los libros de texto, que tanto ellos como sus estudiantes utilizan, con base en los contenidos y actividades que proponen, buscando que éstos sean acordes al programa. Es decir, que señalan buscar materiales que declaren tener un enfoque por competencias, lo cual confirma uno de los supuestos en los cuales se fundamenta la identificación de la problemática de este estudio, pues el profesor carece de instrumentos que le permitan realizar una elección basada en un análisis sistemático de las ventajas que cada libro de texto podría estar ofreciendo para el desarrollo de su práctica.

Asimismo, se cuestionó a los profesores acerca de su percepción, respecto a si los libros de texto que utilizan en sus cursos favorecen el desarrollo de las competencias matemáticas que se establecen como fines formativos del campo disciplinar en el NMS. Con relación a esto, la Gráfica 3 muestra la percepción que en ese sentido tienen los profesores encuestados; que como se puede observar en gran medida es positiva, ya que según lo declarado por los profesores, consideran que los libros de texto que utilizan desarrollan las competencias matemáticas establecidas. Esto último bajo el argumento de que dichos materiales tienen un enfoque en competencias.



Gráfica 3. Percepción de los profesores acerca del desarrollo de competencias a través de los libros de texto utilizados

La información anterior permite establecer un panorama acerca de la importancia que el libro de texto tiene para los profesores de COBAEZ y además dichos resultados muestran los

criterios bajo los cuales el profesor elige los materiales a utilizar tanto en el diseño como en la implementación de los cursos que imparte, que como ya señalamos muchas de las veces es una decisión basada en supuestos o en la percepción de otros profesores y no en un análisis sistemático orientado al logro de los propósitos formativos establecidos. Enseguida se muestran los criterios utilizados para determinar los libros de texto que se analizaron.

#### **4.2. Determinación de los libros de texto sujetos de análisis**

La aplicación de la encuesta y los resultados obtenidos nos muestran el panorama respecto a la importancia que el libro de texto tiene para los profesores del COBAEZ y bajo qué criterios se toman las decisiones en cuanto a su elección. Al cuestionar acerca de cuáles son los libros de texto utilizados, no se encontró un consenso (al menos para el caso de la asignatura de cálculo diferencial), puesto que la mayor parte de los profesores no respondió el cuestionamiento, posiblemente debido a que al tratarse de una pregunta abierta los profesores encuestados no hayan recordado los datos de los materiales utilizados. Sin embargo, de las respuestas obtenidas destaca el libro Matemáticas V, Cálculo Diferencial, de la serie con enfoque en competencias de la Editorial Cengage Learning cuyos autores son Patricia Ibáñez y Gerardo García (Ibáñez y García, 2012). Dicho título, además de cumplir, al menos en teoría, con el criterio de selección declarado con los profesores pertenece a la serie de libros que según los datos de la encuesta es la más utilizada por los profesores del COBAEZ para la enseñanza de las matemáticas.

Asimismo, se hace mención por parte de algunos profesores del uso de materiales desarrollados por otros subsistemas, específicamente por colegios de bachilleres de otros estados. Al respecto, se menciona el caso del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH-Sonora), donde se proponen Módulos de Aprendizaje correspondientes a cada asignatura, en los cuales se declara que su desarrollo se basa en los lineamientos establecidos por la RIEMS,. Además se señala que estos materiales son acordes a los nuevos tiempos, a las nuevas políticas educativas, y a lo que demandan los escenarios local, nacional e internacional. Dichos módulos se organizan a través de bloques de aprendizaje y secuencias didácticas. Las cuales son un conjunto de actividades, estructuradas en tres momentos de la secuencia didáctica: inicio, desarrollo y cierre. Los módulos de aprendizaje del COBACH-Sonora se encuentran disponibles en la página de internet del subsistema (<http://www.cobachsonora.edu.mx>).

Para efectos del presente estudio se toma en consideración el Módulo de Aprendizaje Cálculo Diferencial e Integral I elaborado por Alma Lorenia Valenzuela Chávez (Valenzuela, 2011) y editado por la Dirección Académica del COBACH-Sonora. Si bien es cierto, en sentido estricto, que el Módulo de Aprendizaje elaborado por Valenzuela (2011) no es como tal un libro de texto, sí es coincidente con la definición de currículum potencial que propone Alsina (2000), lo que nos permite considerarlo como uno de los títulos sujetos a análisis. Tal decisión se sustenta en el hecho de que el título fue mencionado en los resultados de la encuesta, y

representa un esfuerzo que se realiza desde un subsistema similar al COBAEZ para dotar a los alumnos de materiales adecuados a los propósitos formativos establecidos en la RIEMS.

Por otro lado, se determinó comparar el análisis de las actividades propuestas en los títulos más mencionados por los profesores del COBAEZ (Ibáñez y García, 2012 y Valenzuela, 2011) con al menos uno de los que se proponen como fuentes de consulta básica por el programa oficial de cálculo diferencial (SEP/SEMS/DGB, 2013). En este sentido, se seleccionó el libro Cálculo diferencial e integral, Ciencias Sociales y Económico-administrativas de Editorial Santillana. Los autores de este título son Emiliano Mora Valladares y María del Río Francos. Esta decisión se tomó con base en la disponibilidad del material analizado. El libro de Mora y Del Río (2009) estructura su contenido en diversas secciones. Éste se organiza en unidades, la tercera corresponde al estudio del límite y la derivada. Cada unidad a su vez se organiza en fichas, a manera de lecciones; cada ficha se compone de teoría, ejemplos y ejercicios sencillos. Después, cada unidad presenta una serie de ejercicios que buscan ejercitar habilidades básicas. Asimismo se incluyen tres secciones, una que presenta ejercicios complementarios, otra que contempla las relaciones que guardan las matemáticas con otras ciencias y una más en la que se proponen problemas y ejercicios para autoevaluación.

En las siguientes secciones se presenta el resultado del análisis de contenido y del análisis cognitivo, en los cuales se explora los significados relevantes para la enseñanza del límite de una función en un punto y se determinan las expectativas de aprendizaje relacionadas a dicho contenido matemático escolar.

## Capítulo 5

# DISEÑO Y CONFORMACIÓN DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO EN TÉRMINOS DE LAS COMPETENCIAS QUE FAVORECEN LOS EJERCICIOS QUE PRESENTAN

---

## 5. DISEÑO Y CONFORMACIÓN DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

Esta sección corresponde a la descripción del procedimiento realizado para el diseño y conformación del instrumento de análisis que el estudio propone para identificar cuáles de las competencias matemáticas, de las establecidas en el MCC, son favorecidas a través de los problemas y ejercicios que los libros de texto plantean. Como ya se ha mencionado se adoptó como marco teórico-metodológico los dos primeros organizadores curriculares del análisis didáctico. Por tanto en esta sección se expone en primera instancia los resultados obtenidos de aplicar el análisis de contenido para después exponer los resultados del análisis cognitivo. La información obtenida de ambos organizadores curriculares permitió establecer las expectativas de aprendizaje que conforman el instrumento de análisis. En una tercer subsección se describe la construcción del instrumento de análisis aplicado a los libros de texto y del instrumento de recolección de datos que nos ayudó a registrar e interpretar la información obtenida del análisis de los problemas y ejercicios.

### 5.1. Análisis de contenido

En esta subsección se presentan, en primer lugar el resultado del análisis de contenido realizado al programa de cálculo diferencial propuesto por la DGB; el cual se ha identificado como currículum oficial y que es sujeto de estudio en la presente investigación. En segundo lugar se muestra el análisis de contenido realizado en torno al límite de una función en los materiales bibliográficos que como parte del currículum potencial fueron seleccionados. Este último análisis tuvo la intencionalidad de exponer cuales son los planteamientos respecto al contenido que se aborda con relación al límite de una función y los objetivos o propósitos generales de dicho contenido. Además, de los signos utilizados o que se proponen para presentarlo. También se incluyen los fenómenos que presentan contextos o situaciones en los que el límite de una función toma sentido como concepto y aquellos que le dan sentido como forma de abordar un problema. Esto permite conocer los significados que el límite de una función guarda en el contexto de las matemáticas escolares del NMS, determinadas en este caso por las propuestas que desde el currículum oficial y potencial se presentan.

A continuación, se presenta el resultado de los análisis de contenido hechos al programa oficial y los tres libros de texto sujetos a estudio dentro de esta investigación a través de los cuales se exploran los posibles significados del contenido matemático escolar que se promueven. La exploración de los significados relevantes contribuyó a la identificación de las expectativas de aprendizaje en términos de competencias, objetivos específicos de aprendizaje y capacidades que se expone en la sección correspondiente al análisis cognitivo realizado para la conformación del instrumento de análisis. En este sentido Lupiáñez y Rico (2008) señalan que el análisis de contenido contribuye a la identificación de las capacidades relacionadas a un tema matemático concreto. En éste caso aquellas capacidades que se esperarían que debe poner en juego el estudiante al trabajar con el límite de una función dentro de las matemáticas escolares

del NMS y cuya movilización contribuye al logro de objetivos específicos de aprendizaje y al desarrollo de ciertas competencias matemáticas.

### **5.1.1. Análisis de contenido aplicado al currículum oficial para el tema de límite en bachillerato**

Antes de entrar de lleno en el análisis de contenido aplicado a los libros de texto, se expone un análisis acerca del contenido que se establece en el programa de cálculo diferencial (SEP/SEMS/DGB, 2013) para los temas relacionados con el límite de una función. De esta forma se identificó cuál es el contenido matemático escolar referente al límite de una función que se propone desde un punto de vista institucional. Esto tiene relevancia para el estudio, pues al ser el currículum oficial una de las unidades de análisis de esta investigación, lo que en él se establece ayuda a delimitar el estudio en términos del contenido matemático de una manera fundamentada en el diseño curricular global de la asignatura.

El límite de una función se aborda dentro del NMS en México como parte de la asignatura “Cálculo diferencial”. Ésta, forma parte del componente de formación propedéutica que tiene como objetivo preparar al estudiante para su ingreso y permanencia en la educación superior; esto a partir de sus inquietudes y aspiraciones profesionales (SEP/SEMS, 2013). Por otro lado el programa de cálculo diferencial señala como finalidad de la asignatura, analizar cualitativa y cuantitativamente la razón de cambio instantáneo y promedio. Lo que se espera permita dar solución a problemas del contexto real del estudiante al facilitarle la formulación de modelos matemáticos de problemas financieros, económicos, químicos, ecológicos, físicos y geométricos; así como la solución de problemas de optimización (SEP/SEMS, 2013).

Dentro de la asignatura, el límite de una función se aborda como parte del segundo bloque denominado “RESUELVES PROBLEMAS DE LÍMITES EN SITUACIONES DE CARÁCTER ECONÓMICO, ADMINISTRATIVO NATURAL Y SOCIAL”. En el que el propósito principal es que el estudiante resuelva problemas sobre límites, en las ciencias naturales, económico-administrativas y sociales, mediante el análisis de tablas, gráficas y aplicación de las propiedades de los límites. El programa establece que en el bloque mencionado se aborden dos objetos de aprendizaje. El primero, “Límites: su interpretación en una tabla, en una gráfica y su aplicación en funciones algebraicas” (p. 18); y el segundo, “El cálculo de límites en funciones algebraicas y trascendentes” (p. 18). Asimismo se establecen dos desempeños que el estudiante deberá cubrir al terminar el bloque: “Aplica el concepto de límite a partir de la resolución de problemas económicos, administrativos, naturales y sociales de la vida cotidiana” (p. 18) y “Calcula límites a partir de la elaboración de gráficas en derive y su interpretación de las representaciones gráficas de funciones, mostrando habilidades en la resolución de problemas de situaciones cotidianas” (p. 18).

Además, en este bloque se establece una serie de competencias específicas a desarrollar. Considerando lo expuesto en el marco teórico, éstas pueden ser interpretadas como

capacidades; esto debido a que una competencia es caracterizada como una finalidad global de una asignatura o ciclo de formación, mientras que las capacidades son específicas a un tema concreto. Por esta razón, las competencias específicas del bloque se toman como base para la determinación de capacidades dentro del análisis cognitivo.

Con base en un análisis de las competencias específicas mencionadas, se pueden señalar algunas cuestiones relacionadas con lo que el programa oficial deja ver en cuanto al estudio del límite de una función. Según lo observado, se espera que el estudiante construya significados del contenido matemático a través del uso de representaciones y la contextualización del contenido matemático escolar. Esto resulta coincidente con el carácter funcional de las matemáticas que se adopta en el análisis didáctico. También, podemos identificar una postura intuitiva, en la cual el significado del límite de una función se construye a partir de la idea de acercamientos sucesivos tanto por izquierda como por derecha. Otro aspecto que se destaca, es la importancia de ver al límite de una función como un instrumento útil en la solución de problemas que van más allá de las matemáticas y que alcanzan a distintas áreas de conocimiento con las que se esperaría que el estudiante tenga interacción.

En cuanto a los registros de representación (signos) que se identifican en el análisis de contenido aplicado al programa oficial para el límite de una función, se encuentra que de manera explícita son privilegiados, tanto en los propósitos generales del bloque como en las llamadas actividades de aprendizaje, el uso de los registros de representación gráfico y tabular, como medios para la representación y la determinación del límite de una función a través de aproximaciones sucesivas a un punto. Además, se logró identificar el uso de la representación simbólica (algebraica) como parte de los planteamientos que las actividades de aprendizaje y enseñanza hacen en el programa oficial; pero a diferencia de los dos tipos de representación señalados, esta no se menciona de forma explícita en los propósitos y objetos de enseñanza aprendizaje que el programa establece.

Por último, en cuanto a la fenomenología relacionada con el estudio del límite de una función en un punto, el currículum oficial establece que dicho contenido debe abordarse con un enfoque funcional. Es decir, como herramienta útil para la resolución de problemas relacionados con fenómenos y situaciones de carácter social, económico, administrativo, natural de la vida cotidiana. En la Figura 6 se muestra un mapa conceptual general que representa el contenido matemático escolar correspondiente al límite de una función, desde una perspectiva institucional. En dicho mapa conceptual se muestran los significados que se conforman a través de la referencia, signo y sentido.



por la derecha a cada vez más al valor  $a$ ” (p. 43). Mientras que para conocer el límite por la izquierda “podemos hacer que los valores de la variable  $f(x)$  se acerquen al valor  $L$  tanto como queramos haciendo que la variable  $x$  se acerque por la izquierda a cada vez más al valor  $a$ ” (p. 43).

En cuanto a las formas de presentar el límite de una función en un punto, se privilegia el uso de la representación gráfica para construir el significado del límite de la función; apoyando en ésta la noción de aproximaciones unilaterales. En la Figura 7 se muestra un ejemplo que expone cómo en el libro analizado se puede visualizar el límite de una función en un punto a partir de acercamientos laterales en la gráfica de la función.

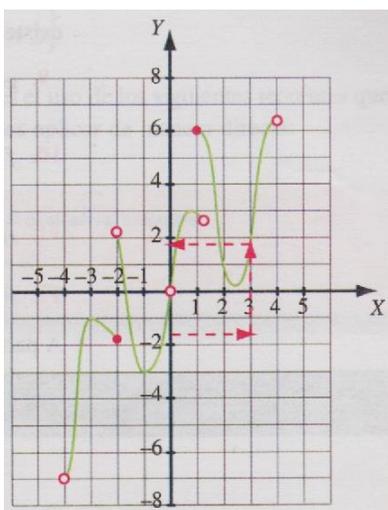


Figura 7. Cálculo de un límite a partir de la aproximación en la representación gráfica de la función. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 45)

Otro de los registros de representación utilizados es el simbólico (algebraico); en el cual los autores se apoyan para presentar ejemplos resueltos y plantear ejercicios y actividades en torno al contenido matemático escolar. En la Figura 8 se muestra la representación simbólica del límite de una función en un punto a utilizada en este libro. En la Figura 9 expone la representación simbólica para el caso de los límites laterales de una función en un punto.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Figura 8. Representación simbólica y genérica del límite de una función. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 44)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Figura 9. Representación simbólica y genérica de los límites laterales de una función. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 44)

Asimismo el libro de texto analizado, muestra la representación simbólica de algunos casos particulares correspondientes a límites de funciones. Estos casos se configuran en extensiones del concepto, una de éstas se muestra en la Figura 10 y corresponde al límite de una función cuando éste existe. Mientras que, la Figura 11 corresponde a un ejemplo de la representación simbólica del límite de una función que no está determinado, es decir, cuando el límite de la función no existe. Las extensiones que se han mencionado son, en términos del análisis de contenido, los objetos que dan valor veritativo al concepto en Gómez (2007).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3}$$

Figura 10. Extensión de la representación simbólica del límite de una función cuando está determinado. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 51).

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{3}{x + 3} \right) \text{ no existe.}$$

Figura 11. Extensión de la representación simbólica del límite de una función cuando éste no existe. Imagen tomada de Ibáñez y García (2012, p. 81)

Respecto a la fenomenología para el límite de una función, no se pudo identificar de manera explícita algún fenómeno distinto al campo de las matemáticas, para el cual este tema tome sentido como elemento útil en la solución de problemas en un contexto no matemático. Esto marca una diferencia en cuanto a lo esperado por el currículo oficial en donde se propone alcanzar una postura funcional del contenido matemático escolar correspondiente al límite de una función.

En lo que respecta a las otras dos dimensiones del significado se logró identificar que en el planteamiento inicial la noción de límite se construye a partir de la idea de aproximarse a un punto, recorriendo distancias cada vez menores, sin llegar a alcanzar al punto. El material bibliográfico analizado se concentra en la presentación de ejemplos y ejercicios que implican el cálculo de límites de distintos tipos, a través diversas técnicas y registros de representación sin relacionar contenido matemático escolar con fenómenos de alguna naturaleza distinta a las matemáticas.

Tomando en cuenta el significado de referencia, las representaciones utilizadas y la fenomenología relacionada se construye un mapa conceptual (Figura 12) cuyo objetivo es ilustrar los significados del límite de una función en un punto, a partir de los planteamientos, que para abordar dicho contenido matemático escolar se presentan en el libro Ibáñez y García (2012).

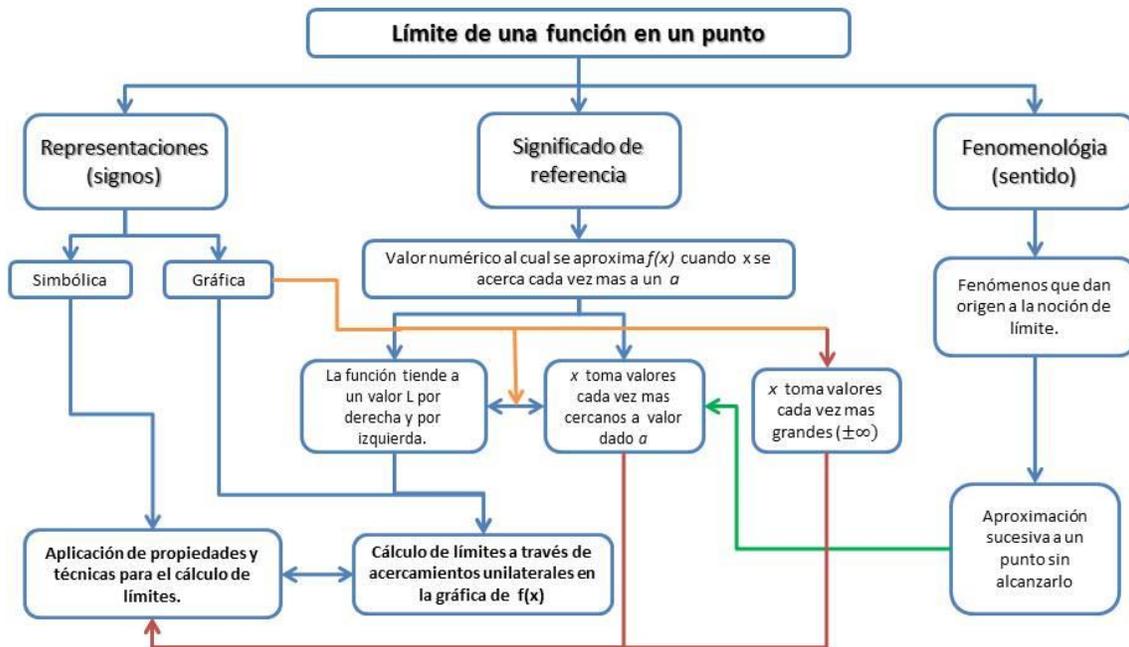


Figura 12. Mapa conceptual general para el límite de una función en un punto construido a partir del análisis de contenido aplicado a Ibáñez y García (2012)

### 5.1.3. Análisis de contenido aplicado a Valenzuela (2011)

El segundo material bibliográfico que se analiza es el Módulo de aprendizaje desarrollado por Valenzuela (2011) para el COBACH–Sonora; que además representa una propuesta desarrollada dentro de un subsistema homólogo de COBAEZ. El módulo de aprendizaje de Valenzuela (2012) fue sujeto a un análisis de contenido para identificar los significados que se privilegian respecto al contenido matemático escolar correspondiente al límite de una función en un punto.

Este material propone un significado de referencia para el límite de una función en un punto, partiendo del planteamiento de una situación en la que se requiere aproximar el valor de una función cuando la variable independiente se acerca o tiende a un valor establecido. En dicho material se señala que

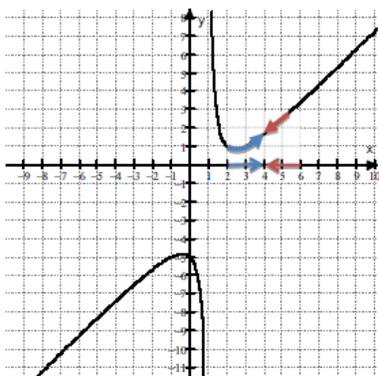
[...] de manera intuitiva, el límite de una función es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando la variable “ $x$ ” tiende a un valor dado. También se deduce que el límite existe, siempre y cuando, los límites unilaterales coinciden, aun cuando la función no esté definida para el valor hacia donde “ $x$ ” se aproxima (p. 44).

Como se puede observar esta definición toma en cuenta, además de la no existencia de  $f(x)$  en el valor al que se aproxima, la igualdad de los límites laterales como condición para que límite de una función en un punto exista. Asimismo, la noción de límite se construye a partir del análisis del comportamiento de una función. Para ello, primero utiliza la representación de dicho comportamiento en una tabla de valores y luego por medio de aproximaciones en la representación gráfica tanto por izquierda como por derecha. Esto pudiera interpretarse como,

que dentro del planteamiento realizado por Valenzuela (2011), los límites laterales y el uso de representaciones juegan un papel importante en la generación de significados referentes al límite de una función. En este sentido, es que se retoman las definiciones de límites laterales propuestas en este material donde se plantea la idea de límites laterales como acercamientos, señalando que:

Los límites que se obtienen por uno de los lados, ya sea por la derecha o por la izquierda, se les conoce como límites unilaterales y cuando estos son iguales, el límite de la función existe y es igual al valor de los límites unilaterales (p. 40).

Siguiendo la metodología propuesta por Gómez (2007) se identificaron los sistemas de representación utilizados en el módulo de aprendizaje de Valenzuela (2011) para abordar el límite de una función. En este sentido, uno de los sistemas de representación utilizados de manera importante es la representación gráfica. Esto se muestra mediante extensiones o ejemplos donde se busca determinar el límite por medio de acercamientos de la función. Lo anterior, de manera bidireccional a través del recorrido sobre la gráfica de la función cuando la variable independiente se acerca a un valor numérico determinado, como se muestra en la Figura 19.



**Figura 33. Extensión del cálculo de un límite por aproximación a través de la representación gráfica de la función. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 53)**

Cabe señalar, que la aproximación bidireccional en la gráfica de la función que propone la autora, se ve complementada a través de acercamientos sucesivos en una tabla de valores. Al respecto, se identifican algunos casos particulares o extensiones del límite de una función en un punto, calculados por medio de la evaluación de funciones utilizando el registro de representación tabular. La Figura 14 hace referencia a una de esas extensiones que apoyan la construcción del significado del límite de una función en un punto, como el valor numérico al cual se acerca la función cuando la variable independiente se acerca tanto como se quiera a un valor determinado.

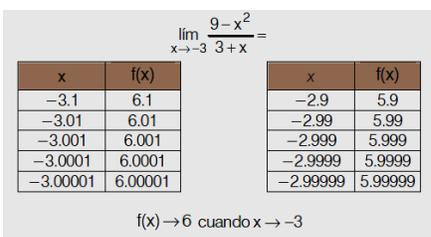


Figura 14. Extensión del límite de una función calculado a través de la aproximación en una tabla. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 43)

Además, de las representaciones gráfica y tabular, el material analizado hace uso del registro de representación verbal para referirse al límite de una función en un punto, específicamente a través de extensiones en las cuales se expresan los límites laterales y el límite de una función, tal como se muestra en la Figura 15.

a) Cuando "x" tiende a -4 por la izquierda, la cual se denota como  $x \rightarrow -4^-$ , se observa como la función va incrementando su valor hacia 3; de igual forma, cuando "x" tiende a -4 por la derecha ( $x \rightarrow -4^+$ ) la función va disminuyendo su valor hacia 3, por lo tanto, se puede decir que el límite de la función cuando "x" tiende a -4 ( $x \rightarrow -4$ ) es 3.

El hecho de que el valor de la función en  $x = -4$  no exista (punto hueco) no invalida el límite, porque precisamente se acerca infinitamente a -4 sin tomar el valor exacto.

Forma algebraica	Se lee
$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 3$	El límite de f(x) cuando "x" tiende a 4 por la izquierda es 3.
$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 3$	El límite de f(x) cuando "x" tiende a 4 por la derecha es 3.
$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 3$	El límite de f(x) cuando "x" tiende a 4 es 3

Figura 15. Extensión de la representación verbal del límite de una función en un punto. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 39)

Como se puede observar en las extensiones del límite de una función en un punto expresadas de manera tabular y verbal, en el material analizado también se hace uso del sistema de representación simbólico para referirse y dotar de significado a dicho contenido. La representación simbólica se puede encontrar a manera de extensiones que ejemplifican diversos aspectos. En la Figura 16 se muestra un caso particular del límite de una función en su representación simbólica, cuando éste existe. La Figura 17 expone una extensión de la representación simbólica de los límites laterales de una función; mientras que la Figura 18 corresponde a la extensión del límite de una función cuando éste no existe.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-x^2}{3+x} = 6$$

Figura 16. Ejemplo de la representación simbólica del límite de una función cuando está determinado. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 42)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$

Figura 17. Ejemplo de la representación simbólica de los límites laterales de una función, cuando  $x$  tiende a cero. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 39)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x - 3} = \exists$$

Figura 18. Ejemplo de la representación simbólica del límite de una función cuando éste no existe. Imagen tomada de Valenzuela (2011, p. 49)

Por otro lado, respecto a la fenomenología relacionada con el límite de una función, el material analizado aborda el contenido partiendo de fenómenos de distinta índole que van más allá del contexto matemático. Ahí se presentan fenómenos para los cuales el límite de una función toma sentido a través de la modelación y de proponer situaciones que plantean la idea de límite, todos desde contextos no matemáticos. Algunos de estos fenómenos identificados son el comportamiento del precio de una computadora a través del tiempo o del cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo a partir de la función que describe el movimiento de la misma. De tal forma que, el límite de una función se contextualiza con los siguientes tipos de situaciones o fenómenos:

- Cálculo de la velocidad instantánea de un móvil.
- Situaciones de índole económica (comportamiento del precio de un producto en el tiempo).
- Comportamiento de fenómenos químicos y biológicos.
- El comportamiento de una población a largo plazo.

De igual manera, que en el caso de Ibañez y García (2012), se presenta un mapa conceptual que busca ilustrar los significados del límite de una función, que desde el contenido propuesto por Valenzuela (2011) para el COBACH-Sonora, se construyen con relación al tema matemático mencionado. El mapa conceptual general, correspondiente al material analizado se expone en la Figura 19.

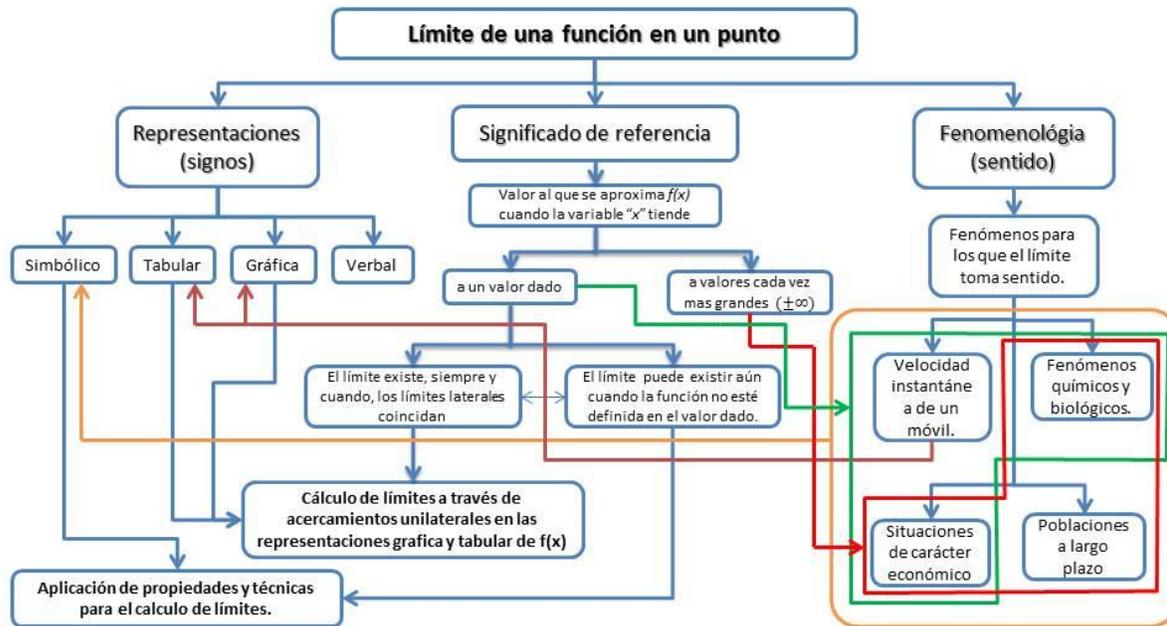


Figura 19. Mapa conceptual general para el límite de una función en un punto, construido a partir del análisis de contenido de Valenzuela (2011).

#### 5.1.4. Análisis de contenido aplicado a Mora y Del Río, (2009)

Un tercer título sujeto a revisión es el libro Cálculo diferencial e integral, ciencias sociales y económico-administrativas, cuya autoría corresponde a Mora y Del Río (2009). Éste libro es propuesto en el currículum oficial y se ubica como fuente de consulta básica en el programa de la materia de Cálculo Diferencial. Al igual que en los casos anteriores, se buscó explorar los significados que se favorecen en las matemáticas escolares contenidas en los planteamientos propuestos en dicho libro de texto. Enseguida se describe los resultados del análisis de contenido realizado con base en los significados de referencia, las representaciones y fenomenología relacionados con el tema matemático en cuestión.

Respecto a los significados de referencia que Mora y Del Río (2009) proponen para el límite de una función, se encontró que los autores presentan la noción de límite partiendo de la aproximación sucesiva de un fenómeno; específicamente el llenado de recipientes con ciertos patrones. Posterior al planteamiento anterior el límite de una función en un punto es abordado a partir de aproximaciones laterales, apoyados en el uso de representaciones gráficas de la función. En éste libro el límite de una función en un punto es referido a partir de una representación gráfica, señalando que “conforme  $x$  se acerca a  $c$ ,  $f(x)$  se acerca al límite, sin importar la dirección por la que lo haga; tampoco importa que  $f(c) \neq f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ” (p. 111).

Al caracterizar el límite de una función en un punto a través de la noción de aproximaciones laterales, el significado que el mismo adopte se relaciona de manera estrecha con la noción de

límites laterales. Esta noción también es abordada por Mora y Del Río (2009) que presentan los límites laterales señalando que

Dada una función definida en los reales, hay dos modos de aproximarse a un elemento del dominio: por la izquierda o por la derecha. Si la aproximación es por la derecha se escribe:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = N$ , donde  $N$  es el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la derecha. Si la aproximación es por la izquierda se escribe:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$ , donde  $N$  es el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda (p. 108).

De manera complementaria destacan que “si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = N$ , entonces  $f(x)$  tiene límite en  $a$ , el cual es  $N$ ” (p. 109).

Asimismo, se exploró en los sistemas de representación utilizados para dotar de significado al límite de una función en un punto. Como ya se ha mencionado los autores apoyan sus planteamientos en representaciones gráficas de límites; ya sea que correspondan a la noción de límite de una función en un punto o bien que correspondan a una extensión del límite de una función para un caso particular. En la Figura 20 se muestra la representación gráfica de la noción de límite como una aproximación de la función a determinado valor, cuando la variable  $x$  se aproxima a un valor dado y de la noción de acercamiento de la variable independiente a un valor dado  $c$ .

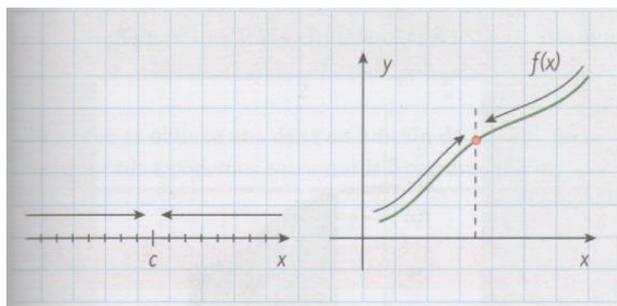


Figura 20. Idea de límite como acercamiento bidireccional de la función a un punto cuando la variable  $x$  se acerca a un valor dado por ambos lados. Imagen toma de Mora y Del Río (2009, p. 111)

Además, de representaciones gráficas, el libro de texto utiliza representaciones simbólicas. En la Figura 21 se expone la representación simbólica del límite de una función, mientras que en la Figura 22 se ilustran las representaciones simbólicas correspondientes a los límites laterales de una función. Por último en la Figura 23 se expone la representación simbólica de una extensión o caso particular del límite de una función en un punto.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = N.$$

Figura 21. Representación simbólica y genérica del límite de una función. Imagen tomada de Mora y Del Río (2009, p. 109)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= N, \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= M,\end{aligned}$$

Figura 22. Representación simbólica y genérica de los límites laterales de una función. Imagen tomada de Mora y Del Río (2009, p. 108)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1) = 8$$

Figura 23. Ejemplo de la representación simbólica del límite de una función cuando está determinado. Imagen tomada de Mora y Del Río (2009, p. 115)

Respecto a la fenomenología con que se relaciona el límite de una función, el tercer libro analizado propone un planteamiento distinto. La noción de límite se construye a partir de una situación en un contexto extramatemático que implica el llenado de recipientes siguiendo un patrón establecido. Durante el desarrollo del tema, el libro no presenta fenómenos fuera del contexto matemático que se relacionen con el concepto; los fenómenos relacionados se encuentran en secciones posteriores para contextualizar los problemas que el libro propone. Por tanto los fenómenos con los que se relaciona el límite, en este libro de texto, son algunos para los cuales el límite de una función toma sentido. Los fenómenos que se abordan en dichos problemas incluyen:

- El costo de un producto en el tiempo.
- El comportamiento de una población en el tiempo.
- La productividad de una empresa.
- Fenómenos físicos.

Partiendo del análisis realizado al libro de Mora y Del Río (2009), se construye un mapa conceptual general que, al igual que en los casos anteriores, busca mostrar los significados del límite de una función en un punto que se privilegian a través del contenido expuesto en dicho material bibliográfico. El mapa conceptual general para el límite de una función, construido a partir del contenido matemático escolar propuesto se muestra en la Figura 24.

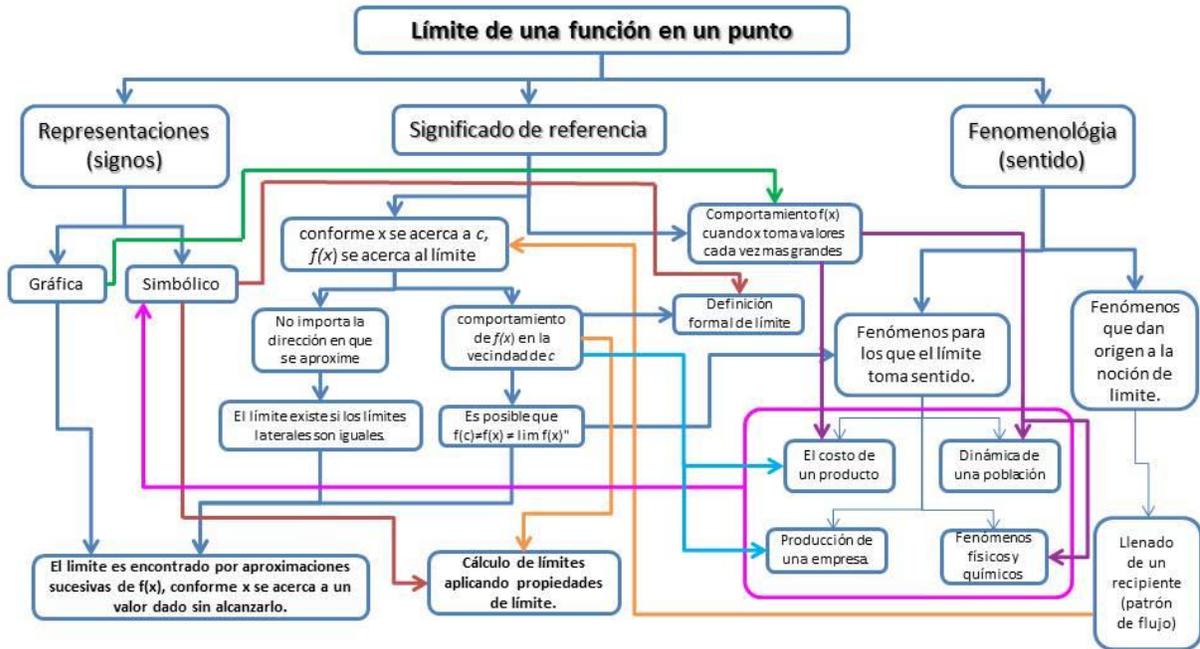


Figura 24. Mapa conceptual general para el límite de una función en un punto, construido a partir del análisis de contenido de Mora y Del Río (2009)

### 5.1.5. Reflexiones obtenidas a partir del análisis de contenido aplicado currículum oficial y potencial.

Con base en el análisis de contenido realizado al programa oficial y a los libros de texto seleccionados en esta investigación; se presenta un conjunto de reflexiones que configuran una interpretación de esta etapa de la investigación.

El análisis del programa de cálculo diferencial (SEP/SEMS/DGB, 2013), permitió establecer cuál es el contenido matemático escolar, propuesto institucionalmente respecto al límite de una función. Asimismo, el análisis de contenido aplicado a los libros de texto aportó claridad acerca de los significados que dentro de las matemáticas escolares propuestas por éstos, puede llegar a adoptar el contenido matemático escolar en cuestión.

Del mismo modo, el análisis de contenido realizado deja ver un panorama acerca de la presencia de distintos planteamientos y posturas en cuanto a la manera en que se presenta el contenido matemático escolar. En el análisis se pudo identificar diferencias entre las distintas propuestas editoriales y el programa oficial de Cálculo diferencial. Esto nos lleva a indicar que desde el contenido que cada libro de texto presenta, pareciera deseable la idea de utilizar distintos materiales bibliográficos en el diseño e implementación de los cursos, dependiendo de los propósitos que el profesor quiera atender en determinado momento del curso o del tema que se imparte. En este sentido, se puede inferir que esta situación, que se presenta para los significados, pudiera darse también para las competencias a desarrollar. Es decir, que un libro de texto pudiera presentar desequilibrios en cuanto a las competencias que favorece; por tanto

el uso de más de un libro por parte del profesor se vislumbra la opción más viable para cumplir con los propósitos formativos del curso e incluso de un tema matemático en particular.

Así pues, con base en el análisis de contenido podemos señalar que en Ibáñez y García (2012) se inicia con una construcción de significados que concuerda con el planteamiento detectado en el programa oficial. Sin embargo al avanzar con el desarrollo del tema, el uso de gráficas para determinar los límites se reduce, mientras que la representación tabular no se identifica como parte del contenido que aborda al tema en el cual centramos la atención del estudio. La postura que se adopta primordialmente en este libro se enfoca en lo procedimental. De esta manera, se da prioridad a que el alumno sea capaz de resolver el límite de distintas funciones a través de la aplicación de teoremas y del uso de técnicas algebraicas. Esto, sin darle un carácter funcional al contenido a través de contextos no matemáticos. En este material no se encontró el establecimiento de relaciones del límite de una función con algún fenómeno para el cual éste tome sentido como herramienta útil en la solución de problemas.

Por otro lado, el material desarrollado por Valenzuela (2011) además de incluir lo que se establece como significados de referencia en el currículum oficial, añade otros que no son tratados en los textos analizados. En este libro las representaciones gráfica y tabular del límite juegan un papel central en la construcción de los significados que corresponden al límite de una función y en la determinación de límites de distintos tipos. Además, los significados son enriquecidos a través del uso de la representación verbal del límite, lo cual no se identifica en ninguno de los otros textos analizados en esta investigación. En cuanto a la fenomenología, se presenta conexión del contenido matemático escolar con fenómenos para los cuales el límite de una función toma sentido en un contexto no matemático. También se identifica que el límite de una función adquiere un sentido instrumental como herramienta en la solución de problemas que van más allá de las matemáticas, tal como el programa oficial lo establece. Esto, sin dejar a un lado el desarrollo de los aspectos procedimentales implicados en la determinación de límites de distintas funciones.

En cuanto a la propuesta editorial de Mora y Del Río (2009), se puede mencionar que guarda parecido con Valenzuela (2011) dando un carácter instrumental al límite de una función. Por lo tanto se puede determinar un cierto nivel de congruencia o equilibrio con lo que se establece en el currículum oficial. Sin embargo, dicho carácter instrumental sólo se refleja en los problemas propuestos de maneja complementaria, no así en el desarrollo del tema. Por otro lado, respecto al uso de los sistemas de representación relacionados con el contenido matemático escolar, se identifica el uso de los sistemas simbólico y gráfico, sin utilizar la representación tabular propuesta en el currículum oficial. Asimismo, cabe hacer notar que el aspecto procedimental parece estar relegado en los planteamientos que se realizan en este material, al no mostrar la aplicación de técnicas algebraicas para determinar límites y abordar el uso de teoremas de límite de una forma poco detallada. Lo novedoso de este texto radica en la forma en la que introduce el tema de límites, haciéndolo mediante un problema en un

contexto no matemático, lo cual podría establecer un significado del límite diferente al establecido en los otros materiales analizados.

A partir de lo observado en la aplicación del análisis de contenido realizada al currículo oficial y potencial, se construye un mapa conceptual general (Figura 25) que busca ilustrar los distintos significados que se lograron identificar en dicho proceso.

Asimismo, el estudio de los significados y planteamientos presentados en cada uno de los libros de texto y el programa oficial entorno al contenido matemático escolar en el cual se centra la atención de la presente investigación, ayuda a identificar qué es lo que se espera que el estudiante sea capaz de realizar al concluir el bloque. Dicho en términos del análisis didáctico, esto ayudó a establecer las expectativas de aprendizaje en términos de las capacidades que se desearía que el estudiante movilice al enfrentar las actividades y problemas propuestos en los libros de texto. El establecimiento de las expectativas de aprendizaje se llevó a cabo como parte del análisis cognitivo que conforma la siguiente etapa de la investigación.

Asimismo, se identificó en el análisis de contenido realizado al programa oficial y los libros de texto cuatro focos de atención que permitieron organizar las capacidades según las dimensiones del significado que se privilegien, esto conforme a lo establecido en el marco teórico metodológico. El primer foco de atención se relaciona con la estructura conceptual; el segundo y el tercero tienen que ver con los sistemas de representación y las operaciones que con ellos se realizan y el cuarto se relaciona con el aspecto fenomenológico. Adicionalmente se incluyó un quinto foco de atención, que permite atender aspectos relacionados con el uso de estrategias y herramientas respecto al contenido matemático escolar del límite de una función. Los cinco focos de atención, identificados y organizados son:

- Comprensión conceptual de la noción de límite de una función.
- Procesamiento de sistemas de representación (transformaciones sintácticas).
- Conversiones entre sistemas de representación (traducciones entre sistemas de representación).
- El uso de herramientas y estrategias con relación al contenido matemático.
- Conexión del contenido matemático con contextos y situaciones concretas.

Como resultado del análisis de contenido aplicado al programa oficial y a los libros de texto, se puede mencionar que se logró identificar un conjunto de destrezas y estrategias relacionados con el límite de una función. Suponemos que éstas podrán ser desarrolladas al estudiar el límite de una función en un punto tomando como referencia el contenido matemático escolar propuesto en los libros de texto analizados. Las destrezas y estrategias identificadas en el análisis cognitivo así como las competencias específicas que se establecen en el programa oficial, se retoman en el análisis cognitivo. Ello, para determinar las capacidades que constituyen el instrumento de análisis de libros de texto en términos de las competencias que favorecen a través de los ejercicios y problemas que proponen con el cual se realizó la recolección de datos en la presente investigación.



## 5.2. Análisis cognitivo

En esta sección, se describe el análisis cognitivo por medio del cual se establecieron las expectativas de aprendizaje, que con base en lo detectado en el análisis de contenido se esperaba que cubran los estudiantes al estudiar el contenido matemático escolar referente al límite de una función. Considerando lo expuesto en el marco teórico metodológico, las expectativas de aprendizaje globales se organizan en competencias y las expectativas de aprendizaje locales (específicas a un contenido o tema particular) en objetivos específicos y capacidades (Lupiáñez 2009). Enseguida éstas se describen y organizan.

### 5.2.1. Delimitación de las expectativas de aprendizaje a nivel de competencias

En el presente estudio, las competencias matemáticas corresponden a las expectativas de aprendizaje a largo plazo y pueden referirse a una asignatura o incluso a un nivel educativo. Así, las expectativas de aprendizaje globales, en este caso, son interpretadas como las competencias matemáticas correspondientes a la materia de Cálculo diferencial que establece el MCC. Dicha asignatura se ubica en el componente de formación propedéutico y por tanto le corresponden las Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas que se establecen en el Acuerdo 486 de la RIEMS, que además son señaladas en el programa oficial y en los libros de texto que declaran un enfoque en competencias y que son sujetos de estudio en esta investigación (Ibáñez y García, 2012 y Valenzuela, 2011). De esta manera, dichas competencias propuestas por el MCC configuran las expectativas globales de aprendizaje o competencias para la asignatura de cálculo diferencial en el NMS, por lo que se usa la etiqueta CCD seguido del número consecutivo:

- CCD1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- CCD2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- CCD3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- CCD4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- CCD5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- CCD6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- CCD7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
- CCD8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Como se ha resaltado en el marco teórico metodológico, al tratarse éste de un comparativo entre la postura oficial y lo que proponen los libros de texto, el primer referente que delimita al estudio es el currículum oficial. Por tanto se adoptan como expectativas globales de referencia

las competencias que en él se enmarcan. Asimismo, al ser expectativas de aprendizaje globales, no se espera que necesariamente todas sean tratadas o promovidas en el tema de límites. El programa oficial marca que en el segundo bloque, el cual incluye el tema del límite, se esperaría promover el desarrollo de siete de las ocho Competencias Disciplinarias Extendidas al campo de las matemáticas. En el programa oficial se señala las competencias matemáticas y su relación con cada uno de los bloques, siendo la competencia CCD8 la única que no es contemplada en el segundo bloque. Sin embargo para efectos de este estudio se incluye las ocho competencias matemáticas como expectativas de aprendizaje globales.

### **5.2.2. Delimitación de las expectativas de aprendizaje a nivel de objetivos específicos**

Con relación a las expectativas de aprendizaje específicas correspondientes al límite de una función, se logró identificar los objetivos de aprendizaje para el segundo bloque. En el programa oficial se ubica una sección denominada *Desempeños del estudiante al concluir el bloque*; en la que se describe lo que se espera que el estudiante sea capaz de hacer una vez concluida la instrucción concerniente a dicha parte del curso. Para el bloque que contiene el tema de límite de una función se señalan dos desempeños esperados al concluir el bloque, los cuales se constituyen en lo que Lupiáñez (2009) define como objetivos específicos:

- Aplica el concepto de límite a partir de la resolución de problemas económicos, administrativos, naturales y sociales de la vida cotidiana.
- Calcula límites a partir de la elaboración de gráficas en derivada y su interpretación de las representaciones gráficas de funciones, mostrando habilidades en la resolución de problemas de situaciones cotidianas (SEP/SEMS/DGB, 2013, p. 18).

Respecto al planteamiento de los libros de texto Ibáñez y García (2012) y Valenzuela (2011), se encontró que los dos libros declaran un enfoque por competencias y adoptan explícitamente estos mismos objetivos específicos. Por su parte, en el libro de Mora y Del Río (2009), que corresponde a uno de los propuestos en el currículum oficial, se declaran tres *propósitos* para la unidad tres, en la cual se encuentran los temas relacionados con el límite de una función. Estos propósitos, pueden ser entendidos como los objetivos de aprendizaje que se espera lograr y son:

- Entender intuitiva y formalmente los conceptos de límite y derivada de una función y la relación que hay entre ellos.
- Comprender la interpretación geométrica (tangente) y física (razón de cambio) de la derivada.
- Manejar las diversas aplicaciones de límite y derivada de una función en el área económico-administrativa (p. 105)

Cabe señalar, que en este material se atiende en la tercera unidad además del tema de límite de una función el correspondiente a la derivada de una función. A esto, se debe el hecho de

encontrar entre los propósitos identificados, cuestiones relacionadas con la derivada. Ello pone en evidencia que el límite en este libro se propone como parte de la estructura matemática que constituye a la derivada.

Con base en los objetivos específicos de aprendizaje que se declaran de forma explícita en el programa oficial y en los libros de texto analizado, así como en los resultados del análisis de contenido realizado, se establecen tres objetivos específicos de aprendizaje para el límite de una función. La descripción de estos tres objetivos también se sustenta en el enfoque funcional de las matemáticas que adopta el análisis didáctico; pues los tres objetivos propuestos se organizan en torno a tres aspectos inherentes a éste, con los cuales se busca responder las siguientes cuestiones: ¿qué significados puede adoptar el contenido? ¿cómo funciona y cómo se opera con el contenido? y ¿cómo se aplican los significados y propiedades del contenido? Esto se sintetiza en un objetivo de carácter teórico, un objetivo de carácter técnico y un objetivo de carácter práctico (Lupiáñez, 2009). En este caso los objetivos que se proponen para el bloque que corresponde al tema de límite de una función son:

- OEAL1. Entender la noción de límite de una función (teórico).
- OEAL2. Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos (técnico).
- OEAL3. Aplicar la noción de límite y sus propiedades en la solución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos (práctico).

### **5.2.3. Delimitación de las expectativas de aprendizaje a nivel de capacidades**

El tercer nivel de expectativas de aprendizaje que se delimita dentro del análisis cognitivo es el concerniente a las capacidades. Una capacidad se refiere a la actuación exitosa que se espera que un individuo realice al enfrentarse a tareas específicas relacionadas con un tema matemático (Lupiáñez y Ríco, 2008). Por tanto, éstas al ser movilizadas contribuyen al logro de ciertos objetivos los cuales al ser alcanzados abonan al desarrollo de ciertas competencias.

Para determinar las capacidades que se espera que el estudiante movilice en torno al límite de una función, se tomó en cuenta la información obtenida del análisis de contenido realizado al currículum oficial y a los libros de texto sujetos de estudio y lo desarrollado en las secciones anteriores, correspondientes a la delimitación de expectativas de aprendizaje a nivel de competencias y de objetivos específicos de aprendizaje.

En el currículum oficial de cálculo diferencial se ubica una sección denominada *competencias a desarrollar*, en la cual, para el caso del segundo bloque, se describen ciertas actuaciones que se espera pueda realizar el estudiante al enfrentar a ejercicios y problemas relacionados con límite de una función. Tomando en cuenta que se trata de competencias enfocadas a un contenido específico, con base en lo señalado en el marco teórico metodológico podemos considerar que éstas se constituyen en capacidades, puesto que son específicas a un tema

matemático y no corresponden a las expectativas de aprendizaje de la asignatura o del nivel educativo. Por tanto, las capacidades correspondientes al tema de límites que propone el programa oficial son las siguientes:

1. Interpreta gráficas de funciones continuas y discontinuas analizando el dominio y contradominio; y argumenta el comportamiento gráfico de la variable dependiente ( $y$ ) en los punto(s) de discontinuidad.
2. Explica e interpreta los valores de una tabla, calcula valores cercanos a un número y analiza el comportamiento en los valores de la variable dependiente en problemas de su entorno social, económico y natural.
3. Explica e interpreta diferentes representaciones gráficas y determina límites que tienden a infinito positivo o negativo, a cero, límites laterales por la izquierda y por la derecha, y límites finitos, de los objetos naturales que lo rodean.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema económico, administrativo, natural o social, mediante la teoría de los límites.
5. Valora el uso de las TIC's en el modelado gráfico y algebraico de los límites para facilitar su interpretación y simulación en la resolución de problemas presentes en su contexto.
6. Formula y resuelve problemas, a partir del cálculo de dominio y contradominio de las funciones algebraicas para determinar sus límites, demostrando su habilidad en la resolución de problemas algebraicos.
7. Determina límites para funciones racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas (SEP/SEMS/DGB, 2013, pp. 18-19).

Además, con base en el resultado del análisis de contenido aplicado a los libros de texto se logró identificar un conjunto de habilidades y destrezas que se esperaba movilice el estudiante al enfrentarse a situaciones y tareas que impliquen la determinación y aplicación del límite de una función. Estas destrezas y estrategias identificadas sientan las bases para construir una lista de capacidades relacionadas con el contenido matemático en cuestión, puesto que, como se menciona en el marco teórico metodológico, las capacidades comúnmente se enuncian en términos de habilidades y destrezas. Enseguida se enuncian las habilidades y destrezas detectadas en el análisis de contenido:

#### *Habilidades*

- El uso de la representación gráfica para el cálculo del límite de una función.
- El uso de aproximaciones numéricas de la función al acercar la variable independiente a un valor dado para determinar el límite de una función.
- Identificación de aquellas funciones cuyos límites pueden ser calculados a través de sustitución directa.
- Reconocimiento de indeterminaciones en el cálculo del límite de una función a través del análisis del dominio de la función.
- Aplicación de reglas para calcular límites de funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

- Proyectar el comportamiento de una función estimando sus límites cuando la variable dependiente se aleja cada vez más del origen.

### *Destrezas*

- Calcular de límite de una función algebraica por medio de aproximaciones sucesivas en una tabla de valores.
- Calcular el límite de una función en un punto por sustitución directa.
- Calcular el límite de una función a través de aproximaciones en la representación gráfica de la función.
- Calcular límites de funciones mediante las propiedades del límite respecto las operaciones con funciones.
- Calcular del límite de una función algebraica por medio de aproximaciones sucesivas en una tabla de valores.
- Identificación de la existencia o no existencia de un límite mediante el análisis de igualdad de límites laterales.
- Determinar límites de funciones por medio de aproximaciones sucesivas realizadas con ayuda de herramientas tecnológicas en las representaciones gráfica y tabular.
- Utilizar técnicas algebraicas para romper indeterminaciones en el cálculo de límites a través de transformaciones sintácticas variantes.

Con base en la información obtenida del análisis de contenido aplicado y de las capacidades (*competencias a desarrollar*) correspondientes al tema de límite de una función propuestas en el programa oficial, se propone una lista de treinta y siete capacidades relacionadas con dicho tema matemático, las cuales se esperaba sean demandadas por medio de los ejercicios y problemas que se encuentran en los libros de texto.

Cabe señalar que la delimitación de los objetivos específicos de aprendizaje y la lista de capacidades que se propone, son producto de la reformulación de la información expuesta en esta sección y de un proceso de análisis y discusión con los Doctores José Luis Lupiáñez Gómez y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, quienes forman parte del grupo de investigación “FQM193 - Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” durante una estancia de investigación realizada en el departamento de didáctica de las matemáticas de la Universidad de Granada, en los meses de mayo y junio del 2015. Esta estancia profesionalizante fue posible gracias al financiamiento otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología mediante una beca nacional y una beca mixta para movilidad internacional.

En el siguiente apartado se describen y se exponen los instrumentos de análisis y de recolección de datos que se proponen en el presente estudio. En el primero se expone la lista de capacidades propuestas, las cuales se organizan en torno a los tres objetivos específicos de aprendizaje y los cinco focos de interés que se señalaron anteriormente. Además se incluyen las competencias matemáticas que el logro de cada uno de los objetivos promueve.

### **5.3. Conformación de los instrumentos de análisis de textos y recolección de datos**

Para la construcción del instrumento de análisis de libros de texto se relacionaron los distintos niveles de expectativa. Se identificó cuáles de las competencias matemáticas establecidas por el currículum oficial son promovidas por cada uno de los objetivos específicos de aprendizaje propuestos en esta investigación. Enseguida, se organizaron las capacidades que al ser demandadas aportan al logro de cada uno de los objetivos específicos. Para esto último se tomó como factor de organización los cinco focos de interés identificados en el diseño del instrumento.

La relación entre competencias y objetivos específicos de aprendizaje se ilustra en la Tabla 3, en la cual las columnas corresponden a los objetivos específicos mientras que las filas corresponden a las ocho competencias matemáticas que establece el currículum oficial. En las intersecciones entre objetivos específicos y competencias matemáticas promovidas se muestra una breve descripción de las conexiones que se identifican.

Relación entre competencias y objetivos específicos de aprendizaje.		OEA1. Entender la noción de límite de una función.	OEA2. Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos	OEA3. Aplicar la noción de límite y sus propiedades en la solución de problemas
<b>CCD1</b>	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	Interpreta el comportamiento de una función entorno a un punto cuando la función no está definida o cuando tiende a infinito a través de aproximaciones (gráficas y numéricas).		Resolver problemas de diversa índole calculando límites de funciones que las modelan, de manera intuitiva (aproximación) y /o analítica (álgebra).
<b>CCD2</b>	Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.		Calcular límites aplicando diversos enfoques (teoremas de límite, sustitución directa, técnicas algebraicas, aproximaciones numéricas y gráficas) en la solución de problemas de carácter matemático para los cuales el límite tome sentido.	Resuelve problemas diversos calculando límites de funciones en los puntos de interés.
<b>CCD3</b>	Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Explicar la existencia y la indeterminación de límite mediante procedimientos matemáticos y sistemas de representación y los contrasta con el valor de la función en el punto.	Determinar límites de funciones utilizando procesos intuitivos de aproximación en tablas y gráficas o analíticos (algebraicos) para determinar y justificar el límite de una función.	
<b>CCD4</b>	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.			Argumenta la solución de un problema basándose en la noción de límite de una función, entendida como el comportamiento de la función entorno a un punto o como el comportamiento tendencial de la función en el infinito.
<b>CCD5</b>	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.			Analiza el comportamiento de la variable dependiente conforme la variable independiente tiende a un valor dado o bien cuando tiende a infinito aun cuando la función no este definida.

<b>CCD6</b>	<b>Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.</b>			Resuelve problemas relativos al cálculo de límites de funciones que modelan fenómenos y situaciones en un contexto económico administrativo natural y social.
<b>CCD7</b>	<b>Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.</b>	Argumentar, con base en la noción de límite, la pertinencia del cálculo de límites para examinar el comportamiento de la función en los puntos de interés.		Argumentar el procedimiento a seguir en la solución de problemas por el cálculo de límites con base en las características de la función.
<b>CCD8</b>	<b>Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</b>	Describe la noción de límite a partir de representaciones simbólicas, algebraicas y tabulares (numéricas).	Calcular límites de funciones por medio de la construcción e interpretación de representaciones de la función en torno al punto en el que se busca conocer el límite.	

**Tabla 3. Conexión entre objetivos específicos de aprendizaje y las competencias matemáticas que promueven**

Como se puede observar en la Tabla 3 la relación entre las expectativas de aprendizaje a nivel de competencias y objetivos específicos queda de la siguiente manera: el OEA1 que tiene un carácter teórico, promueve las competencias CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8; mientras que el OEA2, de carácter técnico, promueve las competencias CCD2, CCD3 y CCD8. Por último el OEA3, que refiere un aspecto práctico, promueve las competencias CC1, CCD2, CCD4, CCD5 y CCD7.

Una vez establecida la relación entre las expectativas de aprendizaje de la asignatura y del bloque, se vincularon las expectativas a nivel de capacidades con los objetivos específicos de aprendizaje cuyo logro favorecen. Para tal fin se organizó en una tabla las treinta y siete capacidades identificadas en el análisis cognitivo. Para estructurar el instrumento de análisis se colocó en las columnas cada uno de los objetivos específicos de aprendizaje propuestos en la investigación, que atienden los aspectos teórico, técnico y práctico; mientras que las filas corresponden a los cinco focos de atención descritos anteriormente y que están relacionados con las dimensiones del significado que favorecen. En las intersecciones se ubicaron las capacidades que se esperaba demandara cada uno de los objetivos y se organizaron respecto a cada uno de los focos de interés con los que se relacionan.

La Tabla 4 ilustra el instrumento de análisis que se diseñó para la interpretación de los problemas y ejercicios propuestos por los libros de texto en términos de las competencias que favorecen. Cabe señalar que la conexión entre capacidades demandadas y competencias favorecidas se hace durante el análisis de los datos registrados en el instrumento de recolección que se presenta más adelante.

Para construir el instrumento de recolección de datos, se utilizó la misma estructura que para el instrumento de análisis, se replicó la tabla utilizando las etiquetas correspondientes y se agregaron espacios para señalar que competencias son demandas con relación a cada objetivo. Asimismo, dentro del instrumento de recolección de datos se colocó un espacio en el cual se concentra la cantidad de capacidades demandadas con relación a cada una de las competencias matemáticas para cada uno de los ítems analizados. El instrumento de recolección de datos se muestra en la Tabla 5.

	Entender la noción de límite de una función	Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos	Aplicar la noción de límite y sus propiedades en la solución de problemas
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	<p>C1. Explicar la existencia o inexistencia del límite analizando los límites laterales.</p> <p>C2. Explicar la noción de límite como el comportamiento de la función cuando la variable independiente tiende a un valor dado, sin que necesariamente la función esté definida.</p> <p>C3. Argumentar el comportamiento de la función, aún cuando pudiera no estar definida en el punto de interés.</p>	<p>C11. Calcular límites laterales para determinar la existencia del límite.</p> <p>C12. Explicar cuando un límite es indeterminado.</p> <p>C13. Explicar cuando un límite tiende a infinito positivo o negativo.</p>	<p>C28. Argumentar la solución de problemas aplicando las propiedades de límite, en situaciones que dicha noción tenga sentido.</p>
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	<p>C4. Describir la noción de límite a través de la representación gráfica de la función.</p> <p>C5. Describir la noción de límite por medio de aproximaciones numéricas en una tabla de valores.</p>	<p>C14. Calcular límites utilizando los teoremas basados en operaciones con funciones.</p> <p>C15. Calcular límites utilizando el teorema de sustitución directa en los casos que esto es factible.</p> <p>C16. Calcular el límite de una función cuando la variable independiente toma valores cada vez mayores, realizando operaciones con infinito.</p> <p>C17. Calcular límites de funciones trascendentes aplicando reglas básicas de límite que corresponden a cada tipo de función.</p>	<p>C29. Interpretar los valores de una tabla, aproximando bilateralmente la variable independiente a un número, para el cálculo de límites en la solución problemas en un contexto específico.</p> <p>C30. Interpreta modelos gráficos de funciones para el cálculo de límites en la solución de problemas.</p> <p>C31. Aplicar los teoremas de límites en la solución de problemas que implican el cálculo de límites en los puntos de interés.</p>
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)	<p>C6. Construir representaciones gráficas y tabulares para representar límites de funciones.</p> <p>C7. Bosquejar la representación gráfica de la función a partir de los límites en diversos puntos.</p>	<p>C18. Determinar el límite de una función a través de aproximaciones bilaterales sucesivas a un punto en la representación gráfica.</p> <p>C19. Calcular el límite de una función evaluando su comportamiento alrededor de un punto a través de tablas.</p> <p>C20. Determinar el límite de una función a través del análisis de su representación gráfica cuando la variable independiente tiende a infinito.</p>	<p>C32. Construir representaciones gráficas para determinar límites de funciones que representan objetos y situaciones que lo rodean.</p>

<p>Uso de herramientas y estrategias (lenguaje algebraico, tecnología) con relación al contenido.</p>	<p>C8. Determinar si es pertinente (necesario) calcular el límite analizando el dominio y contradominio de la función.</p> <p>C9. Esbozar el comportamiento grafico de la función (en torno a un punto o en el infinito), con ayuda de herramientas tecnológicas.</p>	<p>C21. Determinar el límite de funciones al aproximar su comportamiento en torno a un punto, por medio de representaciones generadas en herramientas tecnológicas.</p> <p>C22. Generar gráficas y/o tablas con herramientas tecnológicas para predecir el comportamiento de una función en el infinito.</p> <p>C23. Calcular el dominio y de la función para determinar la pertinencia de uso de técnicas algebraicas en el cálculo de límites.</p> <p>C24. Calcular límites de funciones que presentan indeterminaciones <math>0/0</math>, aplicando de técnicas algebraicas.</p> <p>C25. Calcular límites de funciones trascendentes aplicando las reglas algebraicas e identidades relacionadas a cada tipo de función.</p> <p>C26 Calcular límites en el infinito aplicando técnicas para romper las indeterminaciones <math>\infty - \infty</math> y <math>\frac{\infty}{\infty}</math>.</p>	<p>C33. Resolver problemas a partir del cálculo del dominio de funciones algebraicas para determinar sus límites.</p> <p>C34. Hacer uso de las TIC's para modelar gráfica y algebraicamente que faciliten la simulación y solución de problemas presentes en su contexto.</p> <p>C35. Aplicar técnicas algebraicas para resolver problemas modelados por funciones que presentan indeterminaciones en los puntos de interés.</p> <p>C36. Resolver problemas en diferentes contextos calculando límites a través de operaciones con infinito y técnicas que rompan con las indeterminaciones que se presenten.</p>
<p>Conexión del contenido con un contexto y situación concreta</p>	<p>C10. Describe situaciones fuera de un contexto matemático, en las que el cálculo de límites tiene sentido.</p>	<p>C27. Calcular límites de funciones que modelan diversos fenómenos, objetos y situaciones.</p>	<p>C37. Resolver problemas que implican el cálculo de límites en situaciones de carácter económico, administrativo natural y social.</p>

Tabla 4. Instrumento de análisis propuesto para identificar las capacidades demandadas en los problemas y ejercicios propuestos para el estudio del límite de una función

Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje		CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8		CCD2, CCD3 y CCD8		CC1, CCD2, CCD4, CCD5 y CCD7		
Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función		Entender la noción de límite de una función		Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos		Aplicar la noción de límite y sus propiedades en la solución de problemas		
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función		C1		C11		C28		
		C2		C12				
		C3		C13				
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)		C4		C14		C29		
		C5		C15		C30		
				C16		C31		
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)				C17				
		C6		C18		C32		
		C7		C19				
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido				C20				
		C8		C21		C33		
		C9		C22		C34		
				C23		C35		
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas				C24		C36		
				C25				
				C26				
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas		C10		C27		C37		
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>								
<b>Competencias Disciplinarias favorecidas.</b>	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>								

Tabla 5. Instrumento para la recolección de datos

## Capítulo 6

# ANÁLISIS DE DATOS Y REPORTE DE RESULTADOS

---

## 6. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este apartado se exponen los resultados obtenidos a lo largo de la presente investigación. Éstos no sólo se concentran en la identificación de las competencias matemáticas favorecidas por los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto, van más allá de nuestro planteamiento inicial. Lo anterior debido a que, por las características teórico-metodológicas del estudio, las distintas etapas arrojaron información relevante para entender la relación entre el currículum oficial y potencial respecto al límite de una función como contenido matemático escolar del NMS en México.

Tomando en cuenta lo señalado en el párrafo anterior, los resultados se pueden organizar en tres grandes grupos.

En primera instancia se presentan aquellos relacionados con la aplicación de la encuesta a los profesores de COBAEZ. Estos refieren lo que los profesores declaran en cuanto al uso de libros de texto como parte de su labor de enseñanza. En particular los criterios que utilizan para la selección de dichos materiales y la percepción que de ellos tienen, tomando como referencia los fines formativos del currículum oficial; es decir, el desarrollo de competencias por parte del estudiante a partir de la contribución de los libros de texto.

En segundo lugar se encuentran los resultados obtenidos a partir del análisis de contenido que se realizó al programa oficial y a los tres libros de texto sujetos de estudio. La información obtenida del análisis de contenido, además de servir como base para el análisis cognitivo, permitió observar diferencias y similitudes entre cada uno de los libros de texto, así como la relación que guardan con el currículum oficial. Con base en dicha información fue posible realizar un primer comparativo entre los libros de texto analizados, tomando como referencia al currículum oficial. Este comparativo se llevó a cabo en términos de los significados relevantes para la enseñanza que se privilegian por los libros de texto a través de las distintas dimensiones que los conforman.

El tercer grupo de resultados corresponde a aquellos que se relacionan directamente con el objetivo general del estudio y que responden a la pregunta de investigación planteada. Éstos se obtuvieron del análisis de los datos recogidos a través de la aplicación del instrumento propuesto para identificar las competencias matemáticas establecidas en el MCC; cuyo desarrollo se favorece a través de los problemas y ejercicios que cada libro de texto propone para estudiar el límite de una función. Los datos fueron concentrados en términos de las capacidades demandadas, los objetivos específicos de aprendizaje que dicha demanda busca alcanzar y de las competencias matemáticas que el logro de los objetivos de aprendizaje pretende desarrollar en el estudiante por medio de las actividades que propone el currículum potencial.

### **6.1. Resultados obtenidos a partir de la encuesta a profesores de COBAEZ**

La información recabada en la encuesta a profesores de matemáticas del COBAEZ permite establecer los siguientes resultados que ayudan entender el papel de los libros de texto al interior del subsistema.

- ✓ La mayoría de los profesores declaran utilizar libros de texto como uno de los recursos que fundamentan su práctica de enseñanza. Sin embargo son pocos los que además solicitan a sus estudiantes el uso de libros de texto en los cursos que imparten. Es decir, si bien el libro de texto se establece como un recurso importante para la práctica de los profesores, éste no llega a instituirse como un recurso de apoyo para los estudiantes.
- ✓ Los profesores declaran utilizar como criterio para la elección de los materiales a utilizar, el enfoque que los libros señalan adoptar. Estos resultados parecen evidenciar que los profesores buscan que el contenido y las actividades sean acordes a lo que establece el programa oficial. Esta situación refrenda lo señalado en el planteamiento del problema, respecto a la pertinencia de estudiar las posibles relaciones entre las propuestas editoriales y los fines formativos establecidos en el currículum oficial.
- ✓ La mayor parte de los profesores encuestados consideran que los libros de texto que utilizan en sus cursos, desarrollan las competencias establecidas en el programa. Ellos argumentan esa percepción señalando que los libros de texto que usan para diseñar e implementar sus cursos declaran tener un enfoque por competencias. Esto de igual manera que en el punto anterior confirma uno de los supuestos a partir de los cuales se planteó el estudio comparativo, pues al no contar con materiales de carácter oficial ni instrumentos que sistematicen la toma de decisiones, los profesores ven como una alternativa válida la elección de materiales según el enfoque que declaran tener.
- ✓ Los libros propuestos como fuentes de consulta en el programa oficial no son mencionados en la encuesta aplicada a profesores. Ninguno de estos libros declara, al menos explícitamente en el título, tener un enfoque por competencias. Los profesores dicen utilizar libros de texto con enfoque en competencias y materiales desarrollados por otros subsistemas similares al COBAEZ. Lo cual se podría interpretar como una posible desconexión entre lo que propone el currículo oficial (sin llegar a ser obligatorio) y las decisiones que respecto a los materiales a utilizar, toman los profesores.
- ✓ Los libros de texto juegan un papel importante en la actividad de planificación e implementación que el profesor realiza, por lo que ellos buscan que los materiales que utilizan sean coincidentes con las disposiciones oficiales. De esta manera se reafirma lo expuesto por Gómez (2007) con relación al análisis didáctico como visión ideal del proceso de planificación, implementación y evaluación de una

unidad o tema matemático concreto en el contexto de las matemáticas escolares. Proceso en el que el primer paso a seguir por el profesor es la identificación de los significados relevantes para la enseñanza, que generalmente están definidos en el currículum oficial, pero que sin embargo, son promovidos de diversas formas en cada uno de los libros de texto, por lo cual el análisis de estos materiales resulta relevante para llevar una selección adecuada de los mismos a fin de que lo establecido en el programa oficial pueda ser potenciado por el o los libros de texto que éste utilice para planificar e implementar los cursos correspondientes.

## **6.2. Resultados obtenidos a partir del análisis de contenido aplicado a los libros de texto y el programa oficial**

La información obtenida a través del análisis de contenido aplicado a los libros de texto y el programa oficial llevó a realizar un primer comparativo entre éstos, tomando como referencia al currículum oficial. El comparativo se hizo a partir de los significados relevantes para la enseñanza que se detectan en el currículum oficial. Lo anterior se contrastó con los significados identificados en cada uno de los libros de texto analizados, tomando en cuenta las tres dimensiones que los conforman. En este primer comparativo se consideró una cuestión adicional; la exposición del aspecto procedimental al abordar el contenido matemático escolar correspondiente al límite de una función. Los resultados se concentran en la Tabla 6, donde columna corresponde a la postura mostrada en el programa oficial y los libros de texto respecto a lo que el programa oficial establece, mientras que las filas corresponden a los cuatro aspectos considerados en éste comparativo, donde las primeras tres corresponden a las dimensiones que conforman un significado según el análisis de contenido (Gómez, 2007) y la cuarta al aspecto procedimental.

Como se puede observar en la Tabla 6, el comparativo realizado entre lo propone el programa oficial y cada uno de los libros de texto, permite observar que si bien existe cierta cercanía entre lo que presentan los libros de texto y la propuesta oficial, principalmente respecto a los significados de referencia, en cada uno de los títulos analizados se ofrece diferente enfoque que potencian de distinta forma la construcción del significado de límite de una función. Esto a través de relaciones entre los vértices del triángulo didáctico. Estas discrepancias dejan ver la importancia de complementar el diseño de los cursos por parte del profesor con más de una postura editorial. Con lo cual se buscaría complementar y reforzar los aspectos que resultaran menos favorecidos con uno solo de los libros de texto, tomando como referencia principal lo que se establece en el currículum oficial respecto a los objetos de enseñanza y los propósitos de aprendizaje desde una postura institucional.

Aspecto a comparar.	Programa oficial de Cálculo Diferencial (2013).	Ibáñez y García (2012)	Valenzuela (2011)	Mora y Del Río (2009)
Significado de referencia.	Comportamiento de una función en torno a un punto. Se determina a través de aproximaciones sucesivas en tablas y gráficas.	Concuerda al presentar la noción de límite a partir de aproximaciones en la representación gráfica.	El planteamiento a través del cual se presenta el contenido es acorde a lo que propone el programa oficial.	La postura con que se presenta inicialmente el contenido es coincidente con la que se propone en el programa oficial.
Uso de los sistemas de representación.	Potencia el uso de las representaciones gráfica y tabular para determinar el límite.  Hace usos de la representación simbólica.	El uso de gráficas se reduce y la representación tabular no se identifica en la presentación del contenido.	Las representaciones gráfica y tabular juegan un papel central en la presentación del contenido y en el cálculo de límites.  Agrega la representación verbal del límite.	Los sistemas gráfico y simbólico son usados para presentar el significado de límite de una función que se identifica como relevante.
Fenomenología con que se relaciona el contenido matemático.	Propone la solución de problemas relacionados con el límite en los ámbitos: -Natural. -Social. -Económico. -Administrativo.	No se identifica un carácter instrumental del contenido para la solución de problemas contextualizados.  No se identifican relaciones del contenido con fenómenos distintos a las matemáticas.	Conecta el contenido con fenómenos para los cuales el límite toma sentido.  Presenta situaciones que le dan un sentido instrumental al límite.	El contenido matemático en cuestión solo es relacionado con fenómenos en las secciones de ejercidos mas no en la exposición del contenido.
Exposición del aspecto procedimental del contenido.	Propone el cálculo de límites a través de: -Análisis de tablas y gráficas. -Aplicación de las propiedades de los límites (teoremas).	Se enfoca en el aspecto procedimental del contenido a través de teoremas de límite y técnicas algebraicas.	Atiende el aspecto procedimental del contenido para la determinación de límites a través de teoremas y técnicas algebraicas.	Parece relegado, el uso de teoremas de límite se expone de forma limitada y no muestra el uso de técnicas algebraicas.

Tabla 6. Comparación entre los resultados de los análisis de contenido realizado a los libros de texto sujetos a análisis

En las siguientes subsecciones se presentan los resultados obtenidos de la interpretación de los problemas y ejercicios presentados en los libros de texto analizados.

### 6.3. Análisis de datos y resultados obtenidos de la aplicación del instrumento a Ibáñez y García (2012)

En esta subsección se presenta el análisis de datos y resultados del libro Matemáticas V, Cálculo Diferencial, con enfoque en competencias (Ibáñez y García, 2012), publicado por Editorial Cengage Learning. La portada de este material se muestra en la Figura 26.

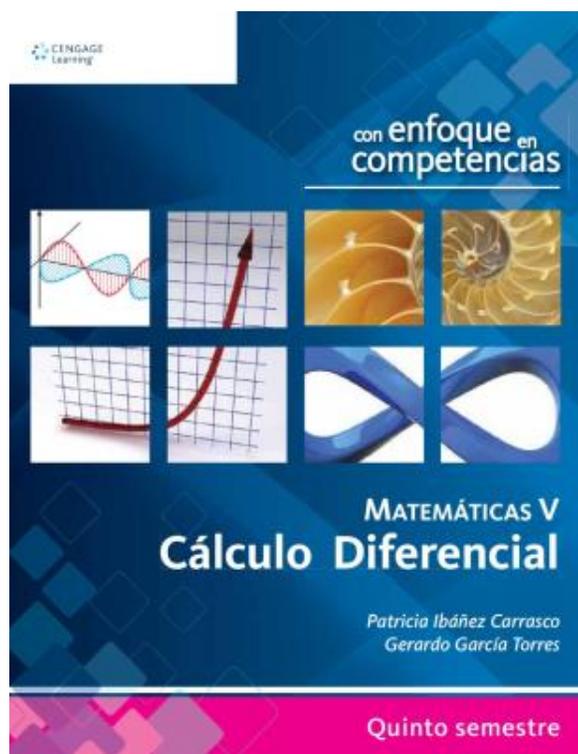


Figura 26. Portada del libro de texto publicado por Ibáñez y García (2012)

En este se analizaron la totalidad de los ejercicios y problemas que se proponen en Ibáñez y García (2012) para el contenido matemático escolar relacionado con el límite de una función dentro de la sección denominada *desarrolla tu competencia*. Éstos se organizaron en 21 grupos (ítems) que comparten las mismas indicaciones, la misma intencionalidad y que concentran la misma componente del contenido matemático escolar en cuestión.

En cada uno de los ítems se analizaron las indicaciones que presentan y se revisó cada uno de los ejercicios o problemas que los conforman. La identificación de las capacidades demandadas se hizo considerando las soluciones el estudiante podría aportar y el momento en que son presentados en el desarrollo del contenido matemático escolar. Es decir, se infirió la posible intencionalidad del ítem, a partir del contenido previo del libro de texto.

Con base en las posibles soluciones y la intencionalidad de cada ítem se identificaron las capacidades, que desde la visión de quien realizó el análisis, son demandadas en la solución de

los problemas y ejercicios que propone el ítem, las capacidades identificadas fueron registradas en el instrumento de recolección de datos que de igual forma se propone en esta investigación y que corresponde a la Tabla 5.

### 6.3.1. Análisis de los datos recopilados en la aplicación del instrumento a Ibáñez y García (2012)

En esta subsección se ejemplifica la manera en que se interpretaron los ejercicios y problemas propuestos en Ibáñez y García (2012), a través de la identificación de las capacidades que organiza el instrumento de análisis propuesto. Se muestra el proceso de recopilación de datos, presentando el análisis de algunos ítems representativos de la aplicación del instrumento, con ello se pretende exponer la interpretación que se hizo.

El primer ítem que ejemplifica el proceso de análisis es el IG5. El cual presenta el siguiente enunciado:

*Evalúa las funciones en los números dados (correcto hasta seis cifras decimales). Usa los resultados para estimar el valor límite o explica por qué no existe. Además escribe la expresión del límite (Ibáñez y García (2012, p. 46)*

a)  $g(x) = \frac{x-1}{x^3-1}$ ,  $x=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.99, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2, 1.1, 1.01$

b)  $f(t) = \frac{\sqrt[3]{t-1}}{\sqrt{t-1}}$ ,  $t= 1.5, 1.2, 1.1, 1.01, 1.001$

c)  $r(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ ,  $x=1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$

d)  $s(x) = \sqrt{x} \ln x$ ,  $x=1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$

Al realizar el análisis del ítem IG5 con ayuda del instrumento de análisis se obtiene la información que ilustra la Tabla 7.

Con base en los resultados de la tabla podemos decir que el ítem IG5 busca desarrollar aspectos teóricos y técnicos a través del trabajo con y entre representaciones con fundamento en la comprensión conceptual del límite de una función, es decir, tomando en cuenta principalmente al foco de atención número 1 y en menor medida a los focos 2 y 3 para la configuración de un significado para límite de una función. De esta manera este problema busca dar sentido a la noción de límite a través de un contexto matemático utilizando como medio el procesamiento y conversión entre sistemas de representación.

Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje	CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8		CCD2, CCD3 y CCD8		CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7			
Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función	Entender la noción de límite de una función		Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos		Aplicar la noción de límite y sus propiedades en la solución de problemas			
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	C1	1	C11		C28			
	C2	1	C12					
	C3		C13	1				
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	C4		C14		C29			
	C5	1	C15		C30			
			C16		C31			
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)			C17					
	C6		C18		C32			
	C7		C19	1				
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido			C20					
	C8		C21		C33			
	C9		C22		C34			
			C23		C35			
			C24		C36			
		C25						
		C26						
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas	C10		C27		C37			
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>	3		2		0			
<b>Competencias Disciplinarias favorecidas.</b>	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>	3	2	5	0	0	0	3	5

Tabla 7. Datos recopilados del análisis de IG5

Respecto al aporte del ítem al desarrollo de las competencias matemáticas del MCC, se observa que según el análisis realizado, éste podría favorecer principalmente a las competencias CCD3 y CCD8 las cuales se enfocan en la explicación de los resultados obtenidos de un procedimiento matemático y la interpretación de los sistemas de representación, respectivamente. Lo cual confirma lo expuesto para el ítem analizado. En menor medida, éste ítem promueve el desarrollo de las competencias CCD1, CCD2 y CCD7 que tienen que ver con la solución de problemas aplicando diversos enfoques.

Otro de los ítems que resulta interesante para ejemplificar la interpretación realizada de los ejercicios y problemas que este libro de texto propone para el tema de límites, es el ítem IG7 en el cual se lee el siguiente enunciado:

Tomando en cuenta que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 8$ , encuentra los límites que existen. Si en límite no existe, explica por qué.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2 =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{h(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - f(x)} =$$

La aplicación del instrumento de análisis al ítem IG7 aporta los datos que se exponen en la Tabla 8.

Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje	CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8			CCD2, CCD3 y CCD8			CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7	
<b>Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función</b>	Entender la noción de límite de una función			Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos			Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas	
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	C1			C11			C28	<b>1</b>
	C2			C12	<b>1</b>			
	C3			C13				
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	C4			C14	<b>1</b>		C29	
	C5			C15			C30	
				C16			C31	<b>1</b>
				C17				
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)	C6			C18			C32	
	C7			C19				
				C20				
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido	C8			C21			C33	
	C9			C22			C34	
				C23			C35	
				C24			C36	
				C25				
				C26				
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas	C10			C27			C37	
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>	0			2			2	
<b>Competencias Disciplinarias favorecidas.</b>	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>	2	4	2	2	2	2	2	2

Tabla 8. Datos recopilados del análisis de IG7

En este caso se logró identificar la demanda de cuatro capacidades, dos de ellas relacionadas con el objetivo de carácter técnico y dos relacionadas con el objetivo de carácter práctico. Respecto al objetivo técnico se identificaron las capacidades C12 y C14, la primera dentro del foco de atención correspondiente a la comprensión conceptual del límite y la segunda dentro del procesamiento en un sistema de representación. En cuanto al objetivo práctico las capacidades identificadas son la C28, que tiene que ver con la comprensión conceptual del contenido y la C31 que implica el procesamiento de un sistema de representación para determinar el límite de una función. Sin embargo, cabe señalar que en el caso de la capacidad C12 sólo se relaciona con uno de los incisos que conforman el ítem, en el cual se hace presente una indeterminación.

Al analizar las capacidades identificadas en términos de los focos de atención que potencian y los objetivos que persiguen se puede señalar que el ítem IG7 entonces tendría un carácter técnico práctico relacionado con el cálculo de límites y la solución de problemas; que se promueve desde la comprensión conceptual del contenido y las operaciones dentro de del sistema de representación simbólico. En este sentido resulta importante mencionar que si bien a través del ítem se demandan capacidades relacionadas con la resolución de problemas, éste permanece dentro de un ámbito matemático, sin llegar a conectar el contenido con situaciones y contextos fuera de las matemáticas, sino que, el límite toma sentido para argumentar una solución a un problema matemático.

Para el nivel de expectativas de aprendizaje a nivel correspondiente a las competencias, el ítem IG7 y los datos obtenidos permiten suponer que favorece en alguna medida las ocho capacidades que establece el currículum oficial, siendo la competencia CCD2 la que parecería favorecida en mayor medida.

Un tercer ejemplo del análisis realizado a los problemas y ejercicios propuestos en Ibáñez y García (2012) que parece interesante exponer, es el ítem IG11, en el cual se detectó la demanda del mayor número de capacidades para su posible solución. El ítem analizado dicta lo siguiente:

*Soluciona los siguientes problemas.*

*Qué está mal en la siguiente ecuación:*

$$\left[ \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \right] = x + 3$$

*Con base en el resultado anterior explica por qué la siguiente ecuación es correcta (Ibáñez y García (2012, p. 52).*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} x + 3$$

Los datos obtenidos del ítem IG11 se muestran en la Tabla 8, que muestra las capacidades demandadas en a los estudiantes para su solución.

<b>Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje</b>	CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8		CCD2, CCD3 y CCD8		CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7			
<b>Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función</b>	Entender la noción de límite de una función		Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos		Aplicar la noción de límite y sus propiedades en la solución de problemas			
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	C1	1	C11		C28	1		
	C2	1	C12					
	C3	1	C13					
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	C4		C14		C29	1		
	C5		C15		C30			
			C16		C31	1		
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)			C17					
	C6		C18		C32			
	C7		C19					
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido			C20					
	C8	1	C21		C33	1		
	C9		C22		C34			
			C23		C35			
			C24		C36			
		C25						
		C26						
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas	C10		C27		C37			
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>	4		0		4			
<b>Competencias Disciplinarias favorecidas.</b>	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>	8	4	4	4	4	4	8	4

Tabla 9. Datos recopilados del análisis de IG11

En este caso se identificaron ocho capacidades que se ubican de manera equilibrada en los objetivos que tienen que ver con los aspectos teórico (OEAL1) y práctico (OEAL3). Respecto a los focos de interés que se atienden en el ítem, se encuentra que cuatro de las ocho capacidades están relacionadas con la comprensión conceptual de la noción de límite. Mientras que las otras cuatro capacidades demandadas se ubican en el procesamiento de sistemas de representación y en el uso de herramientas, con dos capacidades en cada uno de los casos. Por tanto, se podría establecer que el ítem IG11 tiene un carácter teórico práctico, que busca propiciar la comprensión conceptual de la noción de límite a través de un problema en el que se hace uso de operaciones en un mismo sistema de representación y de herramientas algebraicas como el cálculo del dominio y rango de la función para favorecer la

construcción del significado de límite como el valor al que tiende la función entorno a un punto, el cual no necesariamente es igual al valor de la función.

En el análisis de este ítem resulta de especial interés la identificación de las capacidades C29 y C31. Éstas están relacionadas con la solución de problemas a través del cálculo de límites interpretando tablas con aproximaciones numéricas, para la primera capacidad, y la aplicación de teoremas de límite, para la segunda. Se debe señalar que se consideraron ambas puesto que, de acuerdo al momento en que se presenta el ítem en el planteamiento del libro de texto, solo se han abordado el cálculo de límites por aproximaciones gráficas y numéricas y los teoremas de límite basados en operaciones con funciones. Por lo tanto al presentarse una indeterminación en una de las funciones se esperaría que el estudiante realice aproximaciones que le permitan argumentar el comportamiento de la función en torno al punto de interés. Y a partir de dichas aproximaciones identificar y describir la noción de límite y entonces poder establecer que la igualdad entre los límites es válida mientras, que la igualdad de las funciones no lo es.

Por otro lado, en este ítem se identifica que a través de las capacidades demandadas se podría favorecer en algún grado el desarrollo de las ocho competencias matemáticas del MCC, de las cuales se destacan las competencias CC1 y CC7, que tiene que ver con la construcción de modelos gráficos, algebraicos y numéricos para comprender y analizar distintas situaciones, y con la elección de enfoques de solución que resulten pertinentes al enfrentarse a problemas de diversa índole.

### **6.3.2. Reporte de resultados obtenidos del análisis de los ejercicios y problemas propuestos en Ibáñez y García (2012)**

En la Tabla 10 se presenta el concentrado de los datos recopilados durante el proceso de análisis realizado a los ítems de Ibáñez y García (2012).

Capacidades demandadas	ítem analizados																					Frecuencia de demanda
	IG 1	IG 2	IG 3	IG 4	IG 5	IG 6	IG 7	IG 8	IG 9	IG 10	IG 11	IG 12	IG 13	IG 14	IG 15	IG 16	IG 17	IG 18	IG 19	IG 20	IG 21	
C1.	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	7
C2.	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	7
C3.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
C4.	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C5.	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C6.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3
C7.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
C8.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3
C9.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C10.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C11.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
C12.	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
C13.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	5
C14.	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
C15.	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	6
C16.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	3
C17.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	3
C18.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	6
C19.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3
C20.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
C21.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	3
C22.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
C23.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
C24.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
C25.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	3
C26.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
C27.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C28.	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C29.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C30.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C31.	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C32.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C33.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
C34.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C35.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C36.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C37.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Capacidades demandadas por ítem	4	1	2	4	5	3	4	2	3	4	8	7	5	4	5	6	6	5	4	4	2	88

Tabla 10. Recopilación de los datos obtenidos del análisis de Ibáñez y García (2012)

Con base en los datos mostrados en la tabla 10, se hizo un análisis cuantitativo. Éste permite inferir de qué manera se promueve el alcance de los objetivos específicos de aprendizaje, que focos de interés son privilegiados y el desarrollo de cuales competencias matemáticas de la asignatura de cálculo diferencial se promueve por medio de los ejercicios y problemas que se proponen en el libro de Ibáñez y García (2012) para los temas del límite de una función.

En este sentido, la Tabla 11 concentra los datos obtenidos, organizándolos en torno a los objetivos específicos de aprendizaje y los focos de atención que se establecen en este estudio.

Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función	OEAL1 (Teórico)	OEAL2 (Técnico)	OEAL3 (Práctico)	Total de capacidades demandadas por foco de atención
	Entender la noción de límite de una función	Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos	Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas	
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	16	13	3	32
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	6	16	4	26
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)	5	10	0	15
Uso de herramientas y estrategias (lenguaje algebraico, tecnología) con relación al contenido	3	10	2	15
Conexión del contenido con un contexto y situación concreta	0	0	0	0
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>	<b>30</b>	<b>49</b>	<b>9</b>	<b>88</b>

Tabla 11. Capacidades demandadas según los objetivos específicos de aprendizaje y focos de atención que impactan en Ibáñez y García (2012)

Respecto los objetivos específicos de aprendizaje que se privilegian en el material analizado, se encontró, que como lo muestra la tabla 11, el libro de Ibáñez y García (2012) centra su atención en el OEAL2, que corresponde a calcular límites de funciones algebraicas y

trascendentes en variedad de situaciones y contextos. Dicho objetivo de aprendizaje, como se ha señalado tiene un carácter técnico. A este objetivo específico de aprendizaje le sigue el OEAL1, que tiene un carácter teórico y corresponde a entender la noción de límite. Muy por debajo, según el número de capacidades identificadas respecto a los objetivos que privilegian, se encuentra el OEAL3, que corresponde a la aplicación de la noción de límite y sus propiedades en la solución de problemas y que como es evidente tiene un sentido práctico.

En cuanto a los focos de atención relacionados con las dimensiones del significado del contenido matemático escolar en cuestión que se ponen en juego al enfrentar los ejercicios y problemas, los datos obtenidos (Tabla 11) dejan ver que en este caso se prioriza la comprensión conceptual de la noción de límite de una función; esto es entendible ya que en algunos de los ítems analizados, además del cálculo de límites se solicita que el estudiante argumente sus respuestas. En segundo lugar aparece el procesamiento dentro de un sistema de representación, siendo particularmente utilizado el sistema de representación simbólico. Los focos de atención relacionados con traducciones entre sistemas de representación y el uso de herramientas y estrategias, como lenguaje algebraico y herramientas tecnológicas, se ubican en tercer lugar, con un número de capacidades demandadas inferior al cincuenta por ciento de las relacionadas con la comprensión conceptual. Por su parte el quinto foco de atención, correspondiente a la conexión del contenido matemático escolar con situaciones y contextos distintos a las matemáticas no se logra identificar en este material.

Del mismo modo que para el caso de los objetivos y focos de atención, los datos obtenidos permiten establecer conjeturas acerca de cuáles competencias matemáticas, de las que se espera que desarrolle el estudiante a lo largo del curso de cálculo diferencial, son favorecidas por medio de los ejercicios y problemas que propone el libro de Ibáñez y García (2012). En este sentido la Tabla 12 muestra la frecuencia con que se encontraron capacidades relacionadas con cada una de las competencias en cuestión.

<b>Competencias Disciplinarias favorecidas.</b>	<b>CCD1</b>	<b>CCD2</b>	<b>CCD3</b>	<b>CCD4</b>	<b>CCD5</b>	<b>CCD6</b>	<b>CCD7</b>	<b>CCD8</b>
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>	<b>39</b>	<b>58</b>	<b>79</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>79</b>	<b>79</b>

Tabla 12. Competencias matemáticas favorecidas en Ibáñez y García (2012)

Como se puede observar, en Ibáñez y García (2012) si bien se encuentra que se favorecen las ocho competencias, también es evidente un desequilibrio importante, ya que a juzgar por los resultados se da prioridad a las siguientes competencias:

- ✓ CCD3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- ✓ CCD7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
- ✓ CCD8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Estas competencias que se favorecen en mayor medida en la propuesta editorial de Ibáñez y García (2012), como se puede observar en la tabla 3, según el análisis cognitivo realizado se relacionan primordialmente con los objetivos teórico y técnico. Que como hemos observado en este análisis, son los que concentran la gran mayoría de capacidades demandadas.

Por el contrario, las competencias que a continuación se señalan son menos favorecidas a través de los ejercicios y problemas que se proponen en este material:

- ✓ CCD4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- ✓ CCD5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- ✓ CCD6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Estas tres competencias que al parecer son discriminadas en las propuestas de Ibáñez y García (2012), tienen que ver primordialmente con la aplicación del contenido matemático escolar para interactuar con el entorno del estudiante, ya sea a través comprensión e interpretación de fenómenos y situaciones o de la resolución de problemas en los cuales el contenido matemático toma sentido dentro de un contexto específico distinto al campo de las matemáticas. Esto, claramente encuentra relación con el objetivo de carácter práctico que se propone en el estudio, el cual como se observa en la tabla 11, concentra una cantidad muy reducida de las capacidades detectadas en este material.

Lo anterior puede entenderse, ya que además del desequilibrio detectado, cabe señalar la ausencia de conexiones entre el contenido matemático escolar en cuestión y situaciones en las cuales dicho contenido pueda ser aplicado o para las cuales adquiera sentido. Esta situación, de alguna manera, ratifica lo señalado en la exposición de antecedentes; específicamente, respecto la aridez y la complejidad de contextualización que el límite de una función encierra en el ámbito de las matemáticas escolares. Lo que además permite conjeturar que el desarrollo de las competencias matemáticas, tal como están planteadas, así como el carácter funcional de las mismas que dicho enfoque adopta, pudieran quedar incompletos, es decir, pareciera que el libro de Ibáñez y García (2012) a pesar de declarar un enfoque en competencias, privilegia el carácter técnico y la comprensión conceptual del contenido matemático escolar, lo cual no es del todo congruente con lo que se establece en el currículum oficial.

#### 6.4. Análisis de datos y resultados obtenidos de la aplicación del instrumento a Valenzuela (2011).

Ahora se expone el análisis de datos y los resultados de la interpretación de los problemas y ejercicios presentados en el Módulo de Aprendizaje Cálculo Diferencial e Integral I (Valenzuela, 2011) editado por el COBACH-Sonora. Este material consiste en un documento electrónico en formato *.pdf*, cuya portada se ilustra en la Figura 27 y el cual está disponible en la página de internet de la institución.



Figura 27. Portada del módulo de aprendizaje de Valenzuela (2011).

El módulo de aprendizaje que se analiza, es descrito por su autora como una herramienta importante, que brinda el subsistema para propiciar el desarrollo del estudiante de acuerdo a las características y objetivos planteados en la RIEMS.

Al igual que en el caso anterior, en el análisis de Valenzuela (2011) se llevó a cabo la interpretación de todos los ejercicios y problemas que se proponen para el contenido matemático escolar del límite de una función en cada una de las fases que conforman las secuencias didácticas que el material propone. Los cuales se organizaron en 17 ítems, que de igual manera que para el caso de Ibáñez y García (2012) agrupan los ejercicios y problemas que comparten indicaciones e intencionalidad y que en este caso, conforman una misma secuencia didáctica.

La identificación de capacidades demandadas en cada uno de los ítems se realizó a través del análisis de los enunciados, considerando las posibles soluciones que podría aportar el

estudiante. Esto con base en el contenido matemático que es puesto en juego antes y durante la secuencia didáctica correspondiente. De tal forma que la identificación de capacidades es en sí, una inferencia de las expectativas de aprendizaje que se esperaría movilice el estudiante con relación a los problemas y ejercicios que se presentan en determinado momento del curso. Los datos obtenidos fueron registrados y concentrados para el análisis de los 17 ítems en conjunto.

#### **6.4.1. Análisis de los datos recopilados en la aplicación del instrumento a Valenzuela (2011).**

Al igual que en el caso de Ibáñez y García (2012), se presentan ejemplos representativos del análisis realizado a los problemas y ejercicios propuestos en Valenzuela (2011). Éstos tienen la finalidad de exponer como se identificaron las capacidades demandadas en cada ítem. En los siguientes párrafos se desmenuza la interpretación realizada, resaltando aspectos que resultaron de interés al momento de llevar a cabo dicho análisis. Con ello se busca clarificar la manera en que se determinó, a través de un análisis cualitativo, las capacidades demandadas, centrando la atención en aquellos ítems en que la identificación de capacidades no pareciera ser lo suficientemente explícita.

En primer lugar se expone el análisis del ítem V1 que corresponde al siguiente enunciado.

- 1. Una agencia de renta de automóviles cobra \$60 diarios por alquiler de un automóvil, más \$0.40 por km.  
Escribe la fórmula del costo total de la renta por día.  
Si rentas un carro por un día, ¿cuántos kilómetros podría recorrer por \$220?*
- 2. El precio de una computadora personal (en pesos) está dado por la expresión  $P(x) = 7300 + \frac{4200}{x+1}$ , donde "x" es el tiempo en meses.  
¿Cuál será el precio de una computadora dentro de 6 meses?  
¿Cuánto bajará el precio del séptimo al octavo mes?  
¿En qué tiempo será de \$9,200?  
¿Qué pasa con el precio conforme aumenta el tiempo?  
¿Consideras posible que la computadora salga gratis en un determinado número de meses?  
Justifica tu respuesta (Valenzuela, 2011, p. 32)*

Este ítem consiste en un par de problemas, en los que si bien no se aborda abiertamente el cálculo del límite de una función, sí se relacionan con la noción de límite. En particular el problema 2, tiene que ver directamente con noción de límite como el comportamiento de la función cuando la variable independiente tiende a un valor, que en este caso no está definido, sino que se trata de una tendencia a largo plazo. El ítem V1 es la introducción que Valenzuela

hace al contenido matemático escolar en cuestión, con ello pareciera buscar dotarle de sentido antes de abordarlo de manera concreta, generando una situación que requiere del cálculo de límites para ser afrontada.

El ítem analizado tiene un carácter meramente teórico, que si bien conecta la noción de límite con situaciones y contextos fuera de las matemáticas, la intencionalidad se centra en propiciar un primer acercamiento con una noción matemática. El carácter teórico de V1 se puede observar a través de la Tabla 13 que muestra los datos obtenidos de su análisis.

<b>Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje</b>	CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8		CCD2, CCD3 y CCD8			CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7		
<b>Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función</b>	Entender la noción de límite de una función		Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos			Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas		
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	C1		C11			C28		
	C2	1	C12					
	C3		C13					
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	C4		C14			C29		
	C5	1	C15			C30		
			C16			C31		
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)			C17					
	C6		C18			C32		
	C7		C19					
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido			C20					
	C8	1	C21			C33		
	C9		C22			C34		
			C23			C35		
			C24			C36		
		C25						
		C26						
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas	C10	1	C27			C37		
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>	4		0			0		
<b>Competencias Disciplinarias favorecidas.</b>	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>	4	0	4	0	0	0	4	4

Tabla 13. Datos recopilados del análisis de V1

Respecto a los datos obtenidos de la interpretación del ítem V1, la Tabla 13 muestra que se identifica la demanda de cuatro capacidades, todas ellas relacionadas con el objetivo de carácter teórico (OEAL1). Éstas se ubican en cuatro de los cinco focos de interés, siendo el único que no es atendido, la conversión entre sistemas de representación. Esto último pudiera interpretarse como que el ítem en cuestión, tiene que ver con las tres dimensiones del significado de un concepto, dicho de otro modo, se enfoca principalmente en la construcción

de significados más que en el desarrollo de una competencia. Lo cual resulta comprensible, dado el momento en que se presenta dentro del desarrollo del contenido matemático.

No obstante a lo señalado en el párrafo anterior, se logra detectar que a través de la puesta en juego de las capacidades identificadas, se favorece el desarrollo de cuatro de las ocho competencias. La primera de ellas es la CCD1 que tiene que ver con la interpretación del comportamiento de una función por medio de modelos matemáticos, en este caso la estimación del valor de la función cuando en distintos momentos y a largo plazo. La CCD3 es otra de las competencias que se favorecen, ya que la interpretación de problemas, particularmente del problema 2, muestran la pertinencia de la noción de límite como aproximación al comportamiento de la función alrededor de un punto, en este caso la aproximación del costo de un producto a largo plazo. Del mismo modo que para la competencia CCD3, se promueve el desarrollo de la CCD7, que tiene que ver con la pertinencia del cálculo de límites para entender el comportamiento de la función cuando ésta no está definida o bien, como es el caso, cuando la variable independiente toma valores cada vez más grandes sin que estos sean conocidos con certeza. Por último, los datos obtenidos indican que a través del ítem V1 se favorece el desarrollo de la competencia CCD8, puesto que en el momento que se plantean los problemas analizados se esperaría que el estudiante realice e interprete aproximaciones numéricas (incluso gráficas) del comportamiento de las funciones a partir de las cuales podría identificar la noción de límite, en este caso en el infinito.

Un segundo caso de interés, dentro de los ítems propuestos por Valenzuela es el V13, en el cual se indica lo siguiente:

*Utiliza el Winplot o algún otro software para que grafiques e imprimas cada una de las siguientes funciones. Describe hacia dónde se aproxima cada una de las funciones cuando “x” crece o decrece indefinidamente, es decir, cuando  $x \rightarrow \infty$  ó  $x \rightarrow -\infty$ . Pega en el lugar correspondiente cada una de las funciones impresas.*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$K(x) = \frac{7x - 4}{x}$$

$$g(x) = -\frac{5}{x}$$

$$h(x) = \frac{5x^2 + 3}{x}$$

$$t(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = \frac{x - 1}{x^2}$$

Este ítem es uno de los pocos que explícitamente solicitan al estudiante el uso de herramientas tecnológicas para la solución de un problema. En este caso las indicaciones son muy claras y especifican el procedimiento a realizar. Por tanto se hace evidente la demanda de las capacidades C20 y C22 que tiene que ver con la interpretación del comportamiento gráfico de la función para determinar límites en el infinito, y particularmente la segunda de estas

involucra la proyección de dicho comportamiento a través de gráficas generadas con ayuda de herramientas tecnológicas. Esto le da al ítem un carácter técnico al ubicarse, dichas capacidades, dentro de las relacionadas con el OEAL2. Tal como se muestra en la Tabla 14.

Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje		CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8		CCD2, CCD3 y CCD8		CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7			
Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función		Entender la noción de límite de una función		Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos		Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas			
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función		C1	1	C11		C28			
		C2		C12					
		C3		C13					
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)		C4	1	C14		C29			
		C5		C15		C30			
				C16		C31			
				C17					
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)		C6		C18		C32			
		C7		C19					
				C20	1				
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido		C8		C21		C33			
		C9		C22	1	C34			
				C23		C35			
				C24		C36			
				C25					
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas				C26					
		C10		C27		C37			
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>		2		2		0			
<b>Competencias disciplinares favorecidas.</b>		CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>		2	2	4	0	0	0	2	4

Tabla 14. Datos recopilados del análisis de V13

Asimismo, el ítem V13 tiene un carácter teórico, ya que la interpretación de las gráficas generadas en el software especializado, requeriría de entender la noción de límite de una función (OEAL2); tanto en un nivel de comprensión conceptual como de procesamiento de la representación gráfica de la función. Lo cual corresponde a las capacidades C1 y C4 respectivamente.

De tal forma que a través del ítem analizado se atiende cuatro de los cinco focos de atención, relacionados con la construcción de significados. Siendo el único que no se toma en cuenta, la conexión del contenido con contextos y situaciones concretas.

Si bien la cantidad capacidades demandadas que se identificó para V13, pareciera reducida, se observa que a través de la solución de dicho ítem se podría estar favoreciendo el desarrollo de cinco de las ocho competencias establecidas en el MCC para el curso de cálculo diferencial. Según los datos obtenidos, principalmente se favorece el desarrollo de las competencias CCD3 y CCD8 que tiene que ver con la obtención de resultados a través de la lectura de los distintos registros de representación por medio de procedimientos matemáticos. En este caso, a través de la generación de gráficas en software especializado y su interpretación para conocer el límite de una función. También se identifica que son favorecidas, aunque en menor medida, las competencias CCD1, CCD2 y CCD7 que están vinculadas la solución de problemas a través de la selección y aplicación de diversos enfoques y procedimientos, como son la construcción e interpretación de modelos.

Dentro de los ítems analizados correspondientes al material desarrollado por el COBACH-Sonora, se encuentra que los ítems V15, V16 y V17 son los únicos en los que se detectó la demanda de capacidades relacionadas con el objetivo práctico, que corresponde a la aplicación de la noción de límite en la solución de problemas. Además, estos tres ítems al parecer buscan conectar el contenido matemático escolar en cuestión con situaciones y contextos particulares, fuera del campo de las matemáticas.

Del mismo modo que en los caso anteriores, se expone la interpretación del ítem V16, que resulta muy similar al ítem V17. De hecho, ambos forman parte de la misma actividad dentro del módulo de aprendizaje. Fueron separados debido a que el primero trata del cálculo del límite infinito, mientras que el segundo se relaciona con el cálculo de límites en el infinito. El ítem V16 solicita al estudiante lo siguiente:

*Resuelve el siguiente problemas.*

*El costo en millones de pesos que gasta una agencia gubernamental al incautar “x”% de cierta droga ilegal es:*

$$C(x) = \frac{528}{100 - x}$$

*Determina el costo que gasta la agencia, cuando la droga incautada se acerca al 100%.*

Los datos obtenidos del análisis se concentran en la Tabla 15. En la cual se puede observar en que a partir del análisis del ítem V16 se identificó la demanda de cinco capacidades, todas ellas correspondientes objetivo de aprendizaje de carácter práctico, relacionado con el uso del contenido matemático en la solución de problemas. Asimismo, cada una de las capacidades identificadas se relaciona con uno de los cinco focos de atención establecido en este estudio; con lo cual se estaría atendiendo a todas las dimensiones de un significado.

Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje		CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8		CCD2, CCD3 y CCD8		CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7		
Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función		Entender la noción de límite de una función		Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos		Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas		
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función		C1		C11		C28	1	
		C2		C12				
		C3		C13				
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)		C4		C14		C29	1	
		C5		C15		C30		
				C16		C31		
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)				C17				
		C6		C18		C32	1	
		C7		C19				
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido				C20				
		C8		C21		C33	1	
		C9		C22		C34		
				C23		C35		
				C24		C36		
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas				C25				
				C26				
Total de capacidades demandadas por objetivo		0		0		5		
Competencias disciplinares favorecidas.	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen	5	5	0	5	5	5	5	0

Tabla 15. Datos recopilados del análisis de V16

Con relación al desarrollo de competencias, los datos obtenidos permiten inferir que a través de la solución ítem señalado se estaría favoreciendo de manera equilibrada el desarrollo de seis de las ocho competencias matemáticas que establece el currículum oficial. Las competencias matemáticas cuyo desarrollo pareciera no ser favorecido por el ítem V16 son la CCD3 y la CCD8, vinculadas con la explicación de los resultados obtenidos a través del contraste con modelos establecidos y la interpretación de los diversos sistemas de representación, respectivamente. Esto se puede entender puesto que el problema planteado implica únicamente la obtención de un resultado, a través del cálculo de límites y no se pide explicar o justificar dichos resultados o los procedimientos a través de los cuales se obtienen.

#### 6.4.2. Reporte de resultados obtenidos del análisis de los ejercicios y problemas propuestos en Valenzuela (2011)

Al igual que en el caso de Ibáñez y García (2012), la Tabla 17 presenta el concentrado de los datos recogidos del análisis realizado al módulo de aprendizaje de Valenzuela (2011), el cual se presenta en la Tabla 16.

Capacidades demandadas	ítem analizados																	Frecuencia de demanda
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
C1.	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4
C2.	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C3.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2
C4.	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	5
C5.	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
C6.	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
C7.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C8.	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
C9.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C10.	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C11.	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4
C12.	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C13.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
C14.	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
C15.	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3
C16.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
C17.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C18.	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	6
C19.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C20.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	3
C21.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C22.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
C23.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C24.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C25.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C26.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
C27.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C28.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3
C29.	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3
C30.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C31.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
C32.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
C33.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
C34.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C35.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C36.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2
C37.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3
Capacidades demandadas por ítem	4	2	5	5	5	6	2	3	5	5	5	3	4	2	5	5	5	71

Tabla 16. Recopilación de los datos obtenidos del análisis de Valenzuela (2011)

Mediante un análisis cuantitativo de los datos mostrados en la Tabla 16 se logró establecer algunas conjeturas que permiten entender la postura del material en cuestión, respecto a la manera en que a través de su uso por parte de profesores y alumnos, se pudiera favorecer el desarrollo de ciertas competencias matemáticas, el logro de ciertos objetivos y la construcción de ciertos significados para el límite de una función. Con esa finalidad, las capacidades identificadas se organizaron en torno a los objetivos específicos de aprendizaje y los focos de atención con que se relacionan. Esto se presenta en la Tabla 17.

Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función	OEAL1 (Teórico)	OEAL2 (Técnico)	OEAL3 (Práctico)	Total de capacidades demandadas por foco de atención
	Entender la noción de límite de una función	Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos	Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas	
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	9	8	3	<b>20</b>
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	7	7	4	<b>18</b>
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)	4	10	2	<b>16</b>
Uso de herramientas y estrategias (lenguaje algebraico, tecnología) con relación al contenido	2	5	4	<b>11</b>
Conexión del contenido con un contexto y situación concreta	3	0	3	<b>6</b>
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>	<b>25</b>	<b>30</b>	<b>16</b>	<b>71</b>

Tabla 17. Capacidades demandadas según los objetivos específicos de aprendizaje y focos de atención que impactan en Valenzuela (2011)

Como se puede observar en la Tabla 17, con relación a los objetivos específicos de aprendizaje se identifica que en Valenzuela (2011) se promueve los tres objetivos establecidos en el análisis cognitivo; sin embargo, según la cantidad de capacidades detectadas, esto se hace de manera desequilibrada. Se observa que los ítems analizados promueven principalmente los objetivos que corresponden a los aspectos técnico (OEAL2) y teórico (OEAL1). Además del desequilibrio señalado se logra identificar, aunque en menor medida, la presencia de capacidades relacionadas con el objetivo específico de aprendizaje relativo al aspecto práctico que las matemáticas, desde un punto de vista funcional, poseen. De tal forma que en el análisis de este material, se logra identificar una intencionalidad más amplia que en el caso de Ibáñez y García (2012). En Valenzuela (2011) la comprensión de los aspectos teóricos de la noción de límite se refuerzan a través de tareas relacionadas con el cálculo operativo de límites de distintos tipos de funciones y que busca dar un sentido al contenido matemático en cuestión a través de problemas llevados a contextos distintos al campo de las matemáticas para los cuales el cálculo del límite resulta pertinente para la solución problemas.

Por otro lado, con relación a los focos de atención que al ponerse en juego favorecen la construcción de ciertos significados, los datos obtenidos de Valenzuela (2011) muestran que los cinco focos de atención propuestos se hacen presentes en dicho material. Se destaca que a través de los ítems analizados, principalmente se promueve la construcción de significados centrados en la comprensión conceptual y las operaciones con sistemas de representación, ya sean procesamientos dentro de un mismo sistema o traducciones de un sistema a otro. Esto concuerda con lo observado en el análisis de contenido, en el sentido de que en Valenzuela (2011) la comprensión de la noción de límite, en primera instancia, se aborda a través de aproximaciones numéricas y gráficas, donde el uso de representaciones juega un papel central en la construcción del significado de límite como el comportamiento de la función alrededor de un punto.

Asimismo se detectó la demanda de capacidades relacionadas con el uso de diferentes recursos para afrontar los ítems correspondientes al contenido matemático escolar en cuestión. Dicho de otra forma, Valenzuela (2011) propone al estudiante la movilización de recursos como el uso de tecnología y el lenguaje algebraico para representar, interpretar y calcular distintos tipos de límite; con lo cual pueda entender y anticipar el comportamiento de una función en torno a un punto en el cual no necesariamente la función esté definida.

Otro aspecto a resaltar, es la identificación de capacidades relacionadas con la conexión del contenido matemático correspondiente al límite. Esto significa que el material analizado busca dar un sentido de utilidad al contenido matemático escolar. Aunque según lo observado durante el análisis, esta conexión se limita a la solución de problemas en los cuales se presenta un situación en un contexto específico, acompañada de una función que la modela, a partir de lo cual se deberá conocer el límite en un punto o bien anticipar el comportamiento de dicha función cuando la variable independiente toma valores cada vez más grandes.

Por otro lado, en cuanto al papel que el módulo de aprendizaje de Valenzuela (2011) pudiera jugar en el desarrollo de las competencias matemáticas que establece el currículum oficial para la materia de cálculo diferencial, los datos obtenidos de la identificación de capacidades nos llevan a establecer algunas conjeturas. En este sentido, se identifica que a través de los ítems analizados se favorece el desarrollo de las ocho competencias establecidas en el currículum oficial, aunque cabe señalar que esto se presenta de manera desequilibrada, como se puede observar en la Tabla 18.

Competencias disciplinares favorecidas.	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen	41	46	55	16	16	16	55	55

Tabla 18. Competencias matemáticas favorecidas en Valenzuela (2011)

Específicamente se detecta que los ejercicios y problemas analizados implican, de manera principal, la demanda de capacidades relacionadas con el desarrollo de las competencias:

- ✓ CCD3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- ✓ CCD7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
- ✓ CCD8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

De las cuales la CCD3 y CCD8, como se señala en la tabla 3, tienen conexión con los aspectos teórico y técnico mientras que la CCD8 se desarrolla por medio de los aspectos teórico y práctico.

En menor medida también se detectó que a través de los ítems analizados se favorecería el desarrollo de las competencias:

- ✓ CCD1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- ✓ CCD2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.

Las cuales, como se estableció en el análisis cognitivo, se relacionan con el aspecto práctico pero que también involucran a los aspectos teórico y técnico, respectivamente.

Asimismo, a juzgar por los resultados obtenidos se puede señalar que las competencias que al parecer se favorecen de manera limitada en Valenzuela (2011) son:

- ✓ CCD4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- ✓ CCD5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- ✓ CCD6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Cabe señalar que aun cuando en Valenzuela (2011) se deja ver un esfuerzo por dotar de sentido al contenido matemático escolar del límite de una función, por medio de la solución de problemas en contextos específicos; los resultados globales indican las competencias CCD4, CCD5 y CCD6 son las que se favorecen de en menor medida. Estas competencias, como se ilustra en la Tabla 3, tienen ver con cuestiones prácticas que implican el uso del contenido matemático escolar en la solución de problemas relativos a distintos contextos que van más allá del campo de las matemáticas. Lo cual pudiera ser indicativo de un área de oportunidad dentro de la propuesta editorial de Valenzuela (2011).

Hay que resaltar, que aun cuando se logran observar resultados similares a los obtenidos de Ibáñez y García (2011), pareciera que en el caso de Valenzuela (2011) el desequilibrio entre las competencias que se favorecen es menor. Lo cual pudiera interpretarse como que a través del uso de este material, se estaría promoviendo un desarrollo de competencias un tanto más integral. Esto es coincidente con lo observado en los resultados referentes a la identificación de capacidades en términos de los objetivos específicos de aprendizaje y los focos de atención concernientes a la construcción de significados, en los que se encontró que en Valenzuela (2011) se presenta un esfuerzo por llevar el contenido matemático escolar a un ámbito práctico relacionado con situaciones y contextos específicos lo doten de un sentido y una utilidad para el estudiante.

#### **6.5. Análisis de datos y resultados obtenidos de la aplicación del instrumento a Mora y Del Río (2009).**

Del mismo modo que en los casos anteriores, en esta subsección se presenta el análisis de datos y los resultados obtenidos del libro Cálculo diferencial e integral, Ciencias Sociales y Económico-Administrativas (Mora y Del Río, 2009), de Editorial Santillana. La Figura 28 muestra la portada de dicho material.

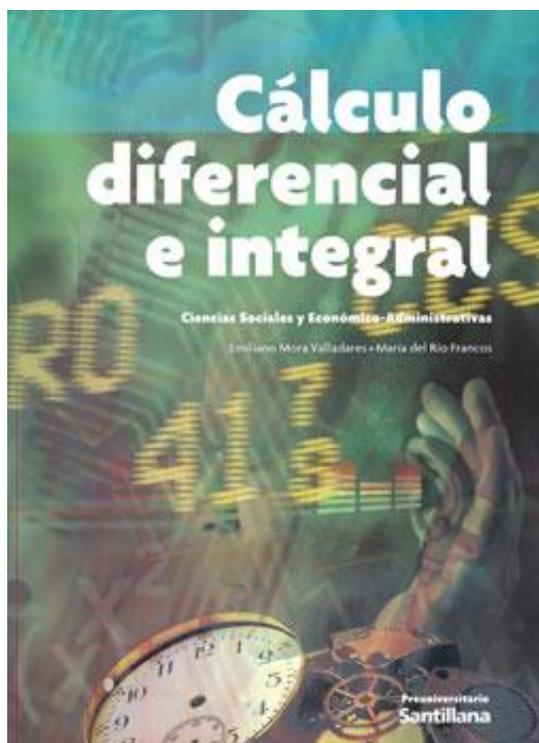


Figura 28. Portada del libro publicado por Mora y Del Río (2009)

Debido a la organización que presenta el libro de Mora y del Río (2009) se revisaron los ejercicios y problemas propuestos en la tercera unidad, para identificar aquellos correspondientes al límite de una función. Pues dicho material éste es presentado en la misma unidad que el contenido correspondiente a la derivada. Los ejercicios y problemas se organizaron en 23 ítems, siguiendo un criterio similar al aplicado en los dos libros anteriores.

La identificación de las capacidades demandadas en cada ítem, se realizó a través inferencias acerca de las posibles respuestas que los estudiantes podrían presentar para cada uno de los casos. No obstante, cabe señalar que en este caso se adoptó una postura distinta respecto al análisis de los otros títulos, esto debido a diferencias sustanciales en cuanto a la estructura que toma cada material. En los casos de Ibáñez y García (2012) y Valenzuela (2011) los ejercicios y problemas son presentados inmediatamente después que el contenido matemático al cual hacen referencia; por lo que su análisis tomó en cuenta el contenido previo inmediato para deducir las posibles soluciones del estudiante. Por su parte en el caso de Mora y Del Río (2007), aun cuando algunos de los ítems propuestos se presentan de manera similar, el grueso de los problemas y ejercicios se encuentran en las secciones de autoevaluación y ejercicios complementarios, ubicadas al final de cada unidad y en las cuales no se especifica a que parte del contenido matemático hacen referencia.

Debido a ello, la inferencia de capacidades movilizadas se realizó tomando en consideración la solución que se supone que un estudiante pudiera aportar al concluir con el desarrollo del bloque correspondiente, tomando en cuenta los enunciados que cada uno de los ítems presenta.

La información obtenida se recogió para cada ítem y se concentró para los 23 ítems correspondientes al material analizado.

### 6.5.1.1. Análisis de los datos recopilados en la aplicación del instrumento a Mora y Del Río (2009).

De manera similar que en los casos anteriores, en esta subsección se presentan ejemplos representativos del análisis del libro de Mora y Del Río (2009). Con ello busca ilustrar la manera en que los ítems que propone este material fueron interpretados a través de las capacidades matemáticas que demandan. También se recuperan algunas cuestiones relativas a la conformación de los ítems, dada la estructura que este material adopta.

Los primeros 5 ítems de Mora y Del Río (2009) se presentan de manera similar a como se hace en los otros títulos, es decir, se expone un componente teórico del contenido, acompañado de alguno o algunos ejemplos y se refuerza con la propuesta de una actividad a realizar por parte del estudiante. En estos casos la composición de los ítems se llevó a cabo de la misma forma que en los libros antes expuestos. Por tanto, en el análisis de estos ítems se consideró el contenido matemático expuesto inmediatamente antes de la actividad propuesta.

Tal es el caso del ítem MR2, el cual consiste en lo siguiente:

*Grafica, propón límites para las funciones siguientes y justifica tu respuesta (P.p. 110-111):*

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2x^2 + 1} \right) \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1000}{x} \right) & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 1}{2x - 4} \right) \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (5x^5 + 3x^4 - 9) & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 + 1} \right)
 \end{array}$$

Este ítem corresponde a la determinación del límite de funciones a través de la construcción e interpretación de la representación gráfica de la función, por lo que se identifican solo aquellas capacidades relacionadas con el cálculo de límites a través de aproximación gráfica, tales como las capacidades de carácter técnico C18 y C20. Se descartan aquellas relacionadas con soluciones analíticas, debido a que el enunciado es claro respecto al procedimiento a seguir. Como puede observar en los datos registrados en la Tabla 19.

Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje		CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8		CCD2, CCD3 y CCD8		CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7			
Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función		Entender la noción de límite de una función		Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos		Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas			
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función		C1		C11		C28			
		C2	1	C12					
		C3		C13					
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)		C4	1	C14		C29			
		C5		C15		C30			
				C16		C31			
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)		C6	1	C18	1	C32			
		C7		C19					
				C20	1				
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido		C8		C21		C33			
		C9		C22		C34			
				C23		C35			
				C24		C36			
				C25					
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas				C26					
		C10		C27		C37			
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>		3		2		0			
<b>Competencias disciplinares favorecidas.</b>		CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>		3	2	5	0	0	0	3	5

Tabla 19. Datos recopilados del análisis de MR2.

Asimismo, se identificó la demanda capacidades relacionadas con el aspecto teórico del contenido. Las cuales se detectaron tomando en cuenta que el enunciado solicita, además del cálculo de límites por medio de aproximaciones gráficas, que el estudiante justifique su respuesta, lo que directamente tiene que ver con el objetivo teórico correspondiente a entender la noción de límite de una función.

Con base en las capacidades demandadas que se identificaron en el análisis, el ítem MR2 parece tener un enfoque teórico técnico, en el cual se pone atención tanto a comprensión de la noción como al cálculo de límites. Lo que, en primera instancia estaría, potenciando el primero de los focos de atención propuestos. Asimismo, se detecta que a través de este ítem se estaría potenciando el uso de las representaciones de un significado, que corresponde a los focos de atención 2 y 3. Mientras que, el aspecto práctico relacionado con la solución de problemas y la conexión del contenido matemático con situaciones y contextos específicos no matemáticos (foco de atención 5), no se identifica en este caso, al igual que el uso de herramientas con relación al contenido (foco de atención 4).

Por otro lado, en cuanto a la manera en que el ítem analizado contribuye al desarrollo de las competencias matemáticas establecidas en el currículum oficial, a partir de la demanda de capacidades identificada, se detectó que el ítem MR2 favorece en alguna medida el desarrollo de cinco de las ocho competencias. Los resultados indican, a través de este ítem, se estaría contribuyendo, principalmente al desarrollo de las competencias CCD3 y CCD8, que corresponden a que el estudiante sea capaz de interpretar resultados a través de diversos métodos y a la interpretación de sistemas de representación. Asimismo, se detectó que el ítem analizado contribuye también al desarrollo de las competencias CCD1 y CCD7 que se vinculan con la interpretación del comportamiento de una función a través de aproximaciones gráficas y numéricas y la argumentación de la pertinencia de una posible vía de solución. También, aunque en menor medida este ítem estaría implicado en el desarrollo de la competencia CCD2 con el uso de diversos enfoques y procedimientos para solucionar un problema, en este caso para calcular el límite de una función.

Otro ejemplo representativo del análisis realizado al libro de Mora y Del Río (2009), en el cual resulta interesante profundizar, es el ítem MR10. Éste es uno de aquellos que permiten ilustrar la manera en que se conformaron los grupos de ejercicios y problemas para componen los 23 ítems analizados. En este caso el ítem contiene dos actividades similares, propuestas en las secciones de ejercicios adicionales y de autoevaluación. Por la similitud de las tareas solicitadas en ambas actividades se decidió unir las en un solo ítem, ya que para su solución se espera que el estudiante movilice las mismas capacidades.

El ítem MR10 tiene los siguientes enunciados:

1. *Construye una tabla para encontrar cada uno de los límites siguientes y después calcúlalos analíticamente (p. 206):*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{x}$$

2. *Construye una tabla para encontrar cada uno de los límites siguientes y después calcúlalos analíticamente (p. 211):*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{9x^2 - 9}$$

En este caso se identificó la demanda de un total de cinco capacidades. Las cuales están relacionadas con la promoción del objetivo de aprendizaje técnico y que consiste en lograr que el alumno calcule límites de funciones en variedad de situaciones y contextos. Las capacidades identificadas se vinculan con el cálculo de límites a través de aproximaciones numéricas en tablas de valores (C19) y con la aplicación de técnicas algebraicas que rompan las indeterminaciones presentadas, para poder calcular analíticamente los límites que se solicitan (C24 y C25). Con ello se estaría potenciando respectivamente los focos de atención

correspondientes a la conversión entre sistemas de representación y al uso de herramientas y estrategias con relación al contenido.

Además de atender estos focos de atención, las capacidades demandadas por el ítem MR10 atañen a la comprensión conceptual de la noción de límite de una función, a través de las capacidades que corresponden a determinar límites por medio de la interpretación de la representación gráfica y para la detección de indeterminaciones (C11 y C13). La Tabla 20 concentra los datos obtenidos del análisis del ítem MR10.

Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje		CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8		CCD2, CCD3 y CCD8		CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7		
Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función		Entender la noción de límite de una función		Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos		Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas		
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función		C1		C11	1	C28		
		C2		C12				
		C3		C13	1			
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)		C4		C14		C29		
		C5		C15		C30		
				C16		C31		
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)				C17				
		C6		C18		C32		
		C7		C19	1			
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido				C20				
		C8		C21		C33		
		C9		C22		C34		
				C23	1	C35		
				C24	1	C36		
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas				C25				
				C26				
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas		C10		C27		C37		
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>		0		5		0		
<b>Competencias disciplinares favorecidas.</b>	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>	0	5	5	0	0	0	0	5

Tabla 20. Datos recopilados del análisis de MR10

En el caso del ítem MR10 con relación al desarrollo de competencias, los resultados indican que a través de la actividad que se propone, se pudiera favorecer el desarrollo tres de las ocho competencias propuestas por el currículum oficial para la materia de cálculo diferencial. Estas tres competencias son las CCD2, CCD3 y CCD8. Las cuales se relacionan con el uso de diversos enfoques para resolver un problema o situación dentro de las matemáticas, la aplicación de distintos procedimientos, para en este caso calcular el límite de una función y la interpretación de diversos sistemas de representación, respectivamente.

Un tercer ítem del cual se puede rescatar información acerca del análisis realizado, es el MR14. El cual corresponde a un problema de aplicación en un contexto específico, en este caso la velocidad de un automóvil. El problema que conforma el ítem en cuestión, es el siguiente:

*La velocidad de un automóvil encarrerado empieza a disminuir y a aumentar según la expresión  $v(t) = 10e^{-t}\text{sen}(t) + 100$ . Calcula los puntos donde su aceleración (la aceleración es razón de cambio instantáneo de la velocidad) es cero. En el intervalo  $[0, 2\pi]$ , determina para qué tiempos aumenta o disminuye su velocidad. ¿Cuál es la velocidad máxima y cuál la mínima? ¿Si el tiempo crece arbitrariamente cuál es la velocidad terminal a la que llega? (p. 209)*

Como se puede observar en el problema, la situación y las cuestiones que se plantean están relacionadas con un contenido matemático más amplio, es decir, que en dicho problema están implicados otros conceptos matemáticos además del límite de una función. Sin embargo, para efectos del análisis realizado se consideró solamente la cuestión que tiene que ver con el cálculo de límites, particularmente el cálculo de límites cuando la variable independiente tiene a infinito. Así pues, se infiere que el estudiante pudiera proponer como solución, el cálculo del límite de la función  $v(t)$  de manera analítica a través de operaciones con infinito, se descartó la aproximación gráfica y numérica ya que por la naturaleza de la función que modela la velocidad se requeriría del uso de herramientas tecnológicas y esto no se detecta, al menos de manera explícita, en el planteamiento de Mora y Del Río (2009).

Con base en la inferencia de una posible solución por parte del estudiante se detectó que a través del ítem MR14 se demanda que el alumno movilice las capacidades C28, C36 y C37 (Tabla 21). Las tres capacidades identificadas promueven el objetivo de aprendizaje de carácter práctico, que consiste en aplicar la noción de límite de una función en la solución de problemas. Del mismo modo se identifica que a través de la demanda las capacidades identificadas se atiende a la comprensión conceptual de la noción de límite (C28), por medio de la argumentación de la solución propuesta con base en la noción y propiedades del límite; al uso de herramientas y estrategias con relación al concepto a través de la solución del problema planteado, vía el cálculo del límite de la función realizando operaciones con infinito y a la conexión del contenido con contextos y situaciones concretas, en las cuales como se puede observar. el límite de una función tiene una utilidad práctica, en este caso para predecir el comportamiento del automóvil a largo plazo. Con ello se estaría potenciando la construcción de significados a través de tres de los cinco focos de atención que el estudio propone.

Competencias a desarrollar en Cálculo Diferencial favorecidas por objetivo de aprendizaje	CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8				CCD2, CCD3 y CCD8			CC1, CCD2, CCD4, CCD5 CCD6 y CCD7	
Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función	Entender la noción de límite de una función				Calcular límites de funciones algebraicas en variedad de situaciones y contextos			Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas	
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	C1				C11			C28	1
	C2				C12				
	C3				C13				
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	C4				C14			C29	
	C5				C15			C30	
					C16			C31	
					C17				
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)	C6				C18			C32	
	C7				C19				
					C20				
Uso de herramientas (álgebra, tecnología) con relación al contenido	C8				C21			C33	
	C9				C22			C34	
					C23			C35	
					C24			C36	1
					C25				
					C26				
Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas	C10				C27			C37	1
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>	0				0			3	
<b>Competencias disciplinares favorecidas.</b>	CCD1	CCD2	CCD3	CCD4	CCD5	CCD6	CCD7	CCD8	
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>	3	3	0	3	3	3	3	0	

Tabla 21. Datos recopilados del análisis de MR14

Con relación al desarrollo de las competencias matemáticas propuestas por el currículum oficial, se puede observar que en este caso, al movilizar las capacidades demandadas por el ítem, se estaría contribuyendo al desarrollo de seis de las ocho competencias correspondientes al cálculo diferencial. Las dos competencias que al parecer no se estarían favoreciendo en este ítem son las competencias CCD3 y CCD8 que tienen que ver con la interpretación de resultados y representaciones.

### 6.5.2. Reporte de resultados obtenidos del análisis de los ejercicios y problemas propuestos en Mora y Del Río (2009)

En la Tabla 22, se expone el concentrado de los datos obtenidos del análisis de los 23 ítems analizados, correspondiente a la propuesta del libro de Mora y Del Río (2009).

Capacidades demandadas	ítem analizados																							Frecuencia de demanda
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
C1.	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
C2.	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C3.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	4
C4.	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
C5.	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C6.	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	4
C7.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C8.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
C9.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C10.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C11.	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	6
C12.	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3
C13.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	4
C14.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	4
C15.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	3
C16.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
C17.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C18.	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5
C19.	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	5
C20.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C21.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C22.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
C23.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C24.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
C25.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C26.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
C27.	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
C28.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	6
C29.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
C30.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C31.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	3
C32.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C33.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C34.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C35.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C36.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4
C37.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	6
Capacidades demandadas por Ítem	2	5	4	3	4	2	2	6	4	5	5	5	4	3	3	1	4	3	4	6	6	4	4	

Tabla 22. Recopilación de los datos obtenidos del análisis de Mora y Del Río (2009)

Tras la identificación y registro de capacidades demanda por los ítems de Mora y Del Río (2009) se llevó a cabo un análisis cuantitativo de los datos. Esto, a fin de poder establecer conjeturas respecto a la manera en que los problemas y ejercicios que se proponen en dicho material impactan en la consecución de las expectativas de aprendizaje que se establecieron para cada uno de los tres niveles durante el análisis cognitivo. En este sentido, los datos obtenidos de Mora y Del Río (2009) son organizados en torno a los objetivos específicos de aprendizaje y focos de atención que son impactados por las capacidades identificadas en el análisis de los ítems de este material. Esa información se sintetiza en la Tabla 23.

Objetivos específicos de aprendizaje / focos de atención para el límite de una función	OEAL1 (Teórico)	OEAL2 (Técnico)	OEAL3 (Práctico)	Total de capacidades demandadas por foco de atención
	Entender la noción de límite de una función	Calcular límites de funciones algebraicas en variedad de situaciones y contextos	Aplicar las propiedades de la noción de límite en la solución de problemas	
Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	11	13	6	30
Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas)	4	10	4	18
Conversiones entre sistemas de representación (traducciones)	5	11	0	16
Uso de herramientas y estrategias (lenguaje algebraico, tecnología) con relación al contenido	1	10	5	16
Conexión del contenido con un contexto y situación concreta	1	2	6	9
<b>Total de capacidades demandadas por objetivo</b>	<b>22</b>	<b>46</b>	<b>21</b>	<b>89</b>

Tabla 23. Capacidades demandadas según los objetivos específicos de aprendizaje y focos de atención que impactan en Mora y Del Río (2009)

Los resultados obtenidos de la identificación de capacidades en Mora y Del Río (2009) respecto a los objetivos de aprendizaje que se promueven; permiten señalar que dicho material estaría promoviendo el logro de los tres objetivos específicos de aprendizaje establecidos en

este estudio. Sin embargo según se observa en la Tabla 23, dicha promoción se estaría dando de una manera poco equilibrada.

En el análisis del número de capacidades demandadas, se observa que al menos para el caso del contenido correspondiente al límite de una función, Mora y Del Río (2009) promueven primordialmente el objetivo correspondiente al componente técnico del contenido, el cual consiste en que al finalizar el bloque el estudiante pueda calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos. Sin embargo, aun cuando los resultados indican que se da prioridad al objetivo de carácter técnico, también se puede observar que a través de las tareas analizadas estaría poniendo en juego, aunque en menor medida, la capacidades relacionadas con los aspectos teórico y práctico, propuesto en el análisis cognitivo.

Cabe señalar que el desequilibrio detectado, respecto a la manera en que se promueve el logro de estos objetivos corresponde a una diferencia de más del doble de capacidades demandas entre el objetivo al cual se da prioridad y los otros dos objetivos. De tal forma que para el caso de este material se podría considerar que se adopta un enfoque principalmente técnico, en el cual se privilegian los aspectos operativos del cálculo de límites.

Por otro lado, al igual que en los resultados expuestos en los párrafos anteriores, se realizó un análisis cuantitativo con relación a la forma en que las capacidades identificadas como demandadas en los ítems ponen atención en cada uno de los cinco focos relativos a las dimensiones que conforman un significado.

En este sentido es que, los resultados expuestos en la Tabla 23 señalan que los ítems propuestos en Mora y Del Río (2009) potencian desequilibradamente los cinco focos de atención establecidos en este estudio con relación al límite de una función. Estos resultados indican que a través del libro en cuestión se estaría priorizando la construcción de significados con base en la comprensión conceptual de la noción de límite, siendo este foco de atención el que concentra mayor número de capacidades. Con una cantidad notablemente menor de capacidades demandadas en los ejercicios y problemas, el foco de atención mencionado, es seguido, casi en igual medida, por los focos correspondientes al procesamiento en un sistema de representación, a las conversiones entre sistemas de representación y al uso de herramientas y estrategias con relación al contenido.

Mientras que el quinto foco de atención, relativo a la conexión del contenido con un contexto y situación concreta, es potenciado por el menor número de capacidades demandadas. Esto en una proporción de más de tres a uno respecto del foco al identificado como prioridad, y de alrededor de dos a uno con relación a los otros tres focos de atención propuestos.

Sin embargo el resultado obtenido es semejante al que se observa en el caso de Valenzuela (2011), ya que en ambos casos se logra detectar un esfuerzo de los autores por dotar de un sentido práctico y de utilidad al contenido matemático escolar; en este caso al límite de una

función, visto como una herramienta para enfrentar problemas y situaciones que requieren la interpretación de fenómenos en contextos específicos a través de las matemáticas escolares.

Por último, el análisis realizado permite, al igual que en los casos anteriores, identificar qué competencias matemáticas de las establecidas por el currículum oficial como expectativas de aprendizaje a largo plazo, se estarían favoreciendo en el estudiante a través de los ejercicios y problemas que el libro de Mora y Del Río (2009) propone. Los resultados obtenidos del análisis de la identificación de capacidades según las competencias que favorecen, se muestran en la Tabla 24.

<b>Competencias disciplinares favorecidas.</b>	<b>CCD1</b>	<b>CCD2</b>	<b>CCD3</b>	<b>CCD4</b>	<b>CCD5</b>	<b>CCD6</b>	<b>CCD7</b>	<b>CCD8</b>
<b>Capacidades demandadas respecto a las competencias que favorecen</b>	<b>43</b>	<b>67</b>	<b>68</b>	<b>21</b>	<b>21</b>	<b>21</b>	<b>68</b>	<b>68</b>

Tabla 24. Competencias matemáticas favorecidas en Mora y Del Río (2009)

Como se puede observar en la Tabla 24, al llevar al aula los ítems que propone el libro de Mora y Del Río (2009) se podría contribuir al desarrollo, aunque en distinta medida, de las ocho competencias matemáticas establecidas por el currículum oficial para la materia de cálculo diferencial. Los resultados obtenidos indican que en dicho material se da prioridad de manera equilibrada a las siguientes cuatro competencias:

- ✓ CCD2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- ✓ CCD3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- ✓ CCD7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
- ✓ CCD8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Estas competencias están vinculadas con los tres aspectos que organizan los objetivos específicos de aprendizaje. Como se puede observar en la tabla 3, los aspectos teóricos del contenido se relacionan con las competencias CCD3, CCD7 y CCD8; los aspectos técnicos con las competencias CCD2, CCD3 y CCD8 y los aspectos prácticos con las competencias CCD2 y CCD7.

Asimismo, se observa que en segundo plano se estaría favoreciendo el desarrollo por parte del estudiante de la competencia CC1 que corresponde a Construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales la

cual en este estudio se relaciona con los aspectos técnico y práctico del contenido matemático escolar.

Mientras que en menor medida, con un número de capacidades relacionadas cercano a un tercio de las identificadas respecto a las competencias más favorecidas, se encuentra que a través de las tareas analizadas se promueve el desarrollo de las siguientes competencias:

- ✓ CCD4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- ✓ CCD5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- ✓ CCD6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Estas tres competencias, que según los resultados del estudio se favorecen en menor medida, son relacionadas en este trabajo, con el componente práctico del contenido. Esto dentro del enfoque funcional de las matemáticas.

Los resultados que arroja el análisis del libro de texto propuesto como fuente de consulta en el plan de estudios, parecen ser muy similares a los obtenidos en los otros dos libros. Ya que al igual que en aquellos, en este caso se detecta la presencia de desequilibrios entre las competencias que se promueven a través de los ejercicios y problemas propuestos; siendo de manera recurrente las competencias más limitadas, aquellas que tienen que ver directamente con la solución de problemas y la argumentación de resultados, donde el contenido matemático es llevado a contextos y situaciones no matemáticas cercanos al estudiante, con lo cual se estaría dotando de sentido al dicho contenido.

No obstante, a que se detecta la presencia de los desequilibrios mencionados, en cuanto a las competencias que se favorecen, el libro de texto analizado en tercer lugar muestra que al igual que en Valenzuela (2011) se busca realizar un esfuerzo por contextualizar el contenido, a través de problemas que representan situaciones y fenómenos de diversa índole, aunque también se hay señalar que dicho esfuerzo parece quedar limitado a aplicar la noción de límite para llegar a un resultado, sin que los problemas propuesto lleven al estudiante a lograr un conexión entre el problema y la noción matemática como tal.

## **6.6. Comparativo de resultados obtenidos en el análisis de los libros de texto**

A continuación se sintetiza lo expuesto en las subsecciones anteriores a través de un comparativo que permite observar las similitudes y diferencias que se presentan entre las tres propuestas editoriales revisadas. Para ello se toma como eje: los objetivos específicos de aprendizaje, los focos de atención vinculados a los significados y las competencias

favorecidas; señalando a cuáles se les da mayor o menor énfasis o prioridad (Tabla 25). Al respecto se encontró que los libros de texto, a través de los ejercicios y problemas propuestos, contribuyen de manera similar para que el estudiante alcance las expectativas de aprendizaje y construya significados que desde las matemáticas escolares enmarcadas por el currículum oficial se establecen como deseables, para el tema de límites.

Niveles de expectativas	Nivel de énfasis	Ibáñez y García (2012)	Valenzuela (2011)	Mora y Del Río (2009)
<b>Objetivo (s) específicos de Aprendizaje</b>	Más promovidos	Técnico - 55.6%	Técnico - 42.3%	Técnico - 51.7%
	Menos promovidos	Práctico - 10.2%	Práctico - 22.5%	Teórico - 23.6% Práctico - 24.7%
<b>Foco(s) de atención</b>	Más potenciados	Comprensión conceptual de la noción de límite – 36.4%	Comprensión conceptual de la noción de límite 28.2% Procesamientos en un mismo sistema de representación – 25.4%	Comprensión conceptual de la noción de límite - 33.7%
	Menos potenciados	Conexión del contenido con un contexto y situación concreta - 0%	Conexión del contenido con un contexto y situación concreta - 8.5%	Conexión del contenido con un contexto y situación concreta – 10.1%
<b>Competencias</b>	Más favorecidas	CCD3, CCD7 y CCD8	CCD3, CCD7 y CCD8	CCD2, CCD3, CCD7 y CCD8
	Menos favorecidas	CCD4, CCD5, CCD6	CCD4, CCD5, CCD6	CCD4, CCD5, CCD6

Tabla 25. Comparativo de los resultados obtenidos en el análisis de los tres libros de texto.

Además, se observa que los tres libros de texto analizados promueven primordialmente un objetivo de aprendizaje de carácter técnico, relativo a los aspectos operativos en el cálculo de límites. De igual forma son coincidentes en el hecho de que el objetivo de aprendizaje menos favorecido corresponde a la aplicación del contenido en la solución de problemas en diversos contextos, que en el estudio se ubica como de carácter práctico. Destaca el caso de Mora y Del Río (2009), donde los objetivos de corte teórico también son los menos promovidos.

Luego, otro aspecto a considerar es que los tres libros de texto privilegian el mismo foco de atención, relativo a la comprensión conceptual de la noción de límite. Sólo en el caso de Valenzuela (2011), dicho foco de atención es seguido de manera cercana por el que

corresponde a procesamientos dentro de un mismo sistema de representación (Tabla 25). Por el contrario, el foco de atención, que en los tres casos se potencia en menor medida es el que corresponde a la conexión del contenido matemático con situaciones y contextos fuera del campo de las matemáticas. En este sentido se destaca que en Ibáñez y García (2012) este foco de atención no se hace presente en los problemas y ejercicios analizados.

Por último, con relación a las competencias que se estarían favoreciendo se encuentran coincidencias importantes. En los tres casos analizados las competencias que se favorecen en mayor medida son CCD3, CCD7 y CCD8. Las cuales se refieren principalmente a competencias sobre resolver, explicar y argumentar la solución de problemas en contextos matemáticos, de manera algorítmica o conceptual haciendo uso de diversos sistemas de representación. En el caso de Mora y Del Río (2009), a estas tres competencias se agrega la CCD2; que consiste en formular y resolver problemas matemáticos. Por el contrario, y de manera coincidente, se identificó que los ejercicios y problemas analizados, al menos para el tema de límites, favorecen en menor medida las competencias CCD4, CCD5 y CCD6. Las cuales principalmente se refieren a la solución de problemas prácticos en contextos no matemáticos por medio de la aplicación de métodos y el uso de herramientas tecnológicas.

El comparativo expuesto corrobora la aridez y dificultad de contextualización del contenido matemático correspondiente al límite de una función. Esto pareciera incidir en que el contenido matemático al cual se ciñe el estudio resulte difícil de aprender, pues al no contar con una contextualización distinta al campo de las matemáticas, podría parecer no tener un sentido de utilidad para el estudiante. Lo anterior, toma mayor relevancia si consideramos que en el enfoque por competencias que establece la RIEMS, se espera que el estudiante sea capaz de movilizar recursos para hacer frente a situaciones y problemas en contextos diversos que van más allá del campo de las matemáticas.

## Capítulo 7

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una vez terminado el proceso de análisis de los tres libros de texto, es posible establecer algunas conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo del estudio.

En primer lugar hay que señalar la importancia del libro de texto como elemento estructurador de la labor de enseñanza; lo cual ha sido evidenciado tanto en la revisión de antecedentes como en los resultados de la encuesta aplicada a los profesores del COBAEZ. Donde también se logró identificar cierta preocupación por parte de los encuestados por tratar de atender de la mejor manera el enfoque que desde el currículum oficial se establece, señalando como el criterio principal para la elección de materiales el enfoque que estos declaran tener. Esto pudiera explicar porque en la encuesta no se menciona a los textos que propone el programa oficial, ya que ninguno de ellos declara en su título un enfoque por competencias. Asimismo, los resultados de la encuesta con relación al uso de libros de texto como apoyo para el profesor en el diseño e implementación de sus cursos, deja entrever que resultaría interesante indagar entre aquellos profesores que declaran no utilizar libros de texto, para conocer en qué elementos se apoyan para fundamentar el diseño e implementación de los cursos que imparten y cómo esos recursos pudieran impactar en su labor; pues este grupo de profesores representa un tercio de los profesores encuestados.

Ahora, a lo largo de este documento queda evidenciado que los títulos de los libros de texto no necesariamente muestran de qué manera se favorece la construcción de ciertos significados del tema matemático escolar y cómo y en qué medida las actividades que proponen promueven el desarrollo de ciertas competencias. Por tanto resultó interesante conocer la manera en que a través de analizar el contenido y las actividades que éstos proponen, es posible identificar la forma en que cada material podría influir en el proceso de enseñanza aprendizaje a través de la construcción de significados, la demanda de capacidades, la promoción de objetivos específicos y el desarrollo de las competencias que el currículum oficial establece como fines formativos.

Otro aspecto que importante destacar es el hecho de que hablar de competencias como expectativas de aprendizaje, es hablar de expectativas observables a largo plazo, donde no existe un contenido matemático escolar específico. Es decir, el desarrollo de competencias solo será visible al completar un curso o un ciclo de formación que involucra un contenido matemático escolar mucho más amplio. De modo que, lo que esta investigación presenta es una propuesta de cómo a través de los organizadores curriculares que conforman el análisis didáctico se puede llegar a establecer la forma en que los libros de texto pudieran contribuir al desarrollo de las competencias matemáticas que establece el MCC. Esto por medio del estudio de los significados y las expectativas de aprendizaje en las dimensiones que los conforman.

Respecto a la información obtenida de los libros de texto, se encontró que en los tres casos estudiados se adoptan significados de referencia similares al que propone el currículum oficial. El cual corresponde a ver al límite desde una perspectiva intuitiva. Esto podría deberse a la

naturaleza propia del contenido, pues por la complejidad y abstracción que el concepto como tal encierra, se opta por conformación y aplicación de la noción matemática sin llegar a abordar el concepto formal.

Sin embargo los significados relevantes para la enseñanza que potencian los libros de texto guardan ciertas diferencias, en cuanto al uso de los sistemas de representación relacionados y el papel que éstos juegan en la construcción de significados que cada libro de texto propone. Aun más, estas diferencias se evidencian de forma más pronunciada con relación a la fenomenología que los libros de texto utilizan para dar sentido al significado de límite. Pues como hemos visto, el programa oficial dota de un carácter funcional a límite, ubicándolo como herramienta en la solución de problemas en diversos contextos fuera del campo de las matemáticas; lo cual según lo observado se estaría cumpliendo al menos de manera parcial en los libros de Valenzuela (2011) y Mora y Del Río (2009), mientras que en Ibáñez y García (2012) no se logró identificar conexión con fenómenos y situaciones en contextos no matemáticos. Esto es relevante, pues se podría pensar que a través de las propuestas de Valenzuela (2011) y Mora y Del Río (2009) se estaría atacando la aridez y complejidad de contextualización que encierra el contenido. Sin embargo cabe señalar que la contextualización que en ellos se presenta parece, en la mayoría de los casos, estar forzada a conectar un ejercicio operativo con alguna situación contextualizada, sin que la noción de límite este presente como tal en la actividad.

Por lo anterior es importante que el profesor reconozca esa diversidad de posturas editoriales en torno al tema de límites; lo que sugiere desde mi perspectiva que sería deseable que el profesor considere un conjunto de materiales de diversas características e intencionalidades para el diseño e implementación de sus cursos y no se sujete a la propuesta que un solo libro pudiera presentar. Más aún, se esperaría que el profesor cambie su visión acerca del libro de texto como currículum empaquetado y aprenda a observar en ellos los significados que promueven y la manera en que lo hacen, así como el impacto que las actividades que proponen pudieran tener en el desarrollo de competencias para extraer de cada libro de texto lo que según la visión del profesor, pudiera contribuir de mejor manera al diseño e implementación de los cursos que imparte. Esto a fin de buscar un balance que permita ampliar los significados relevantes para la enseñanza a través de las tres dimensiones que los conforman, pues como lo señala Area (1991), el que un profesor fundamente su práctica en un solo libro de texto, puede provocar que éste imponga el currículum que el profesor implementa y que no necesariamente tenga congruencia con lo que de manera oficial se establece, limitando tanto los significados como los desempeños que pudieran lograrse en el proceso de enseñanza.

Por otro lado cabe señalar que a través del análisis de los libros de texto, por medio del instrumento propuesto, se logró identificar cuáles de las competencias matemáticas que establece el currículum oficial se favorecerían con la implementación de las actividades que cada uno de los libros de texto propone. Lo cual configura el objetivo general de esta investigación. El análisis realizado también deja ver aspectos importantes con relación a la

forma en que estos libros de texto pudieran contribuir, además de al desarrollo de competencias, a la construcción de significados concernientes al límite de una función en el contexto del NMS. Entre estos aspecto se destaca la orientación que los libros dan al contenido, en este caso, los tres libros de texto promueven un enfoque técnico relacionado con lo procedimental y la carencia de actividades de corte práctico que lleve al contenido a contextos no matemáticos que le doten de un sentido de utilidad, pues como se ha señalado los caso en que se esa contextualización se presenta pudieran no ser del todo efectivos pues sólo se evoca a la aspecto operativo del límite en una situación, la mayoría de las veces hipotética y alejada de la realidad del estudiante.

Como se puede observar en los resultados correspondientes al análisis de los libros de texto se percibe que a través del uso de cualquiera de los materiales revisados es posible favorecer de algún modo el desarrollo de las ocho competencias matemáticas que estable el currículum oficial para la asignatura de cálculo diferencial. Lo cual en primera instancia, estaría indicando que existe cierta congruencia entre los currículum oficial y potencial. Sin embargo también se destaca que los resultados obtenidos reflejan un claro desequilibrio entre las competencias favorecidas a través de las tareas propuestas en los libros de texto. De forma genérica, en los tres libros de texto analizados se puede observar que las actividades propuestas, estarían favoreciendo en menor medida las competencias matemáticas relacionadas con la solución de problemas y el componente práctico del contenido matemático escolar.

Este hecho tiene un particular interés, pues como lo señala Rico (2004) el enfoque en competencias y el carácter funcional de las matemáticas, que se adopta en el análisis didáctico y por tanto en este estudio; ponen especial énfasis en lo que el estudiante pueda llegar a hacer con los conocimientos y destrezas adquiridos. De tal manera que podríamos decir que aun cuando los materiales analizados muestran cierta congruencia con los fines formativos del currículum oficial, ésta resulta limitada al privilegiar, a través de los ejercicios y problemas propuestos, el desarrollo de los componentes teórico y técnico relacionados con entender un concepto y operar con él, dejando de lado o al menos no con el mismo peso a aquellos relacionados con cuestiones prácticas del límite en contextos no matemáticos. Lo anterior podría interpretarse como la confirmación de una de las premisas de esta investigación, respecto a que el límite de una función como contenido matemático escolar, resulta ser, como lo señalan Blázquez y Ortega (2000), una noción árida difícil de llevar a un contexto que permita que el estudiante lo ubique como un conocimiento útil y aplicable en su realidad que por tanto podría ser difícil de entender y fácil de olvidar.

En este sentido al comparar los resultados del análisis de los tres libros de texto, en términos de los objetivos que promueven y la orientación de cada uno de ellos, se puede señalar que el si bien en los tres casos claramente se da prioridad al componente técnico del contenido, el Modulo de aprendizaje de Valenzuela (2011) es el que pareciera buscar una postura más equilibrada entre los aspectos técnico y teórico, no obstante a que muestra un evidente enfoque técnico. Mientras que los libros de Ibáñez y García (2012) y el de Mora y Del Río (2009)

muestran una orientación técnica más evidente, pues más de la mitad de las capacidades identificadas se encuentran en el objetivo correspondiente a dicha orientación. No obstante es el libro de Mora y Del Río (2009) es el que en mayor medida trata de atender las cuestiones relacionadas con el componente práctico del contenido a través de la solución de problemas en contextos distintos a las matemáticas. Conforme a lo desarrollado en este trabajo, estas situaciones impactarían directamente en la promoción del desarrollo de ciertas competencias puesto que han sido vinculadas a los objetivos que en cada una de las orientaciones del contenido matemático escolar se propusieron. Sin embargo es necesario señalar que la mayor parte de los problemas en contextos no matemáticos que fueron analizados se limitan a solicitar el cálculo de límites para dar respuesta a una situación específica, sin representar una situación problemática en la que el estudiante reflexione acerca del papel de la noción de límite como una posible solución.

Del mismo modo que el desequilibrio señalado en cuanto a la orientación cada título adopta, los resultados de los tres libros señalan que existe deficiencia respecto al uso explícito de herramientas tecnológicas para abordar el contenido matemático. Las capacidades relacionadas con el uso de estas herramientas en torno al límite de una función sólo son identificadas en dos de los ítems analizados en Valenzuela (2012).

Finalmente se proponen algunas perspectivas con miras a realizar proyectos futuros que retomaran parcialmente lo que en este documento se expone. Uno de estos posibles trabajos es la adaptación del instrumento a un contenido matemático escolar distinto al abordado; con lo cual se podría observar si la tendencia observada en cuanto a los significados y expectativas de aprendizaje favorecidos se conserva en cada uno de los títulos que se analizaron. De esta manera se podría determinar si un material es congruente o no con los fines formativos señalados para un curso o ciclo de formación completo. Asimismo, el instrumento propuesto pudiera ser utilizado para el análisis de otros libros o documentos, esto con la intención de identificar si los resultados obtenidos son coincidentes. Lo cual podría ser interpretado como una tendencia en relación al límite de una función como contenido matemático escolar del NMS que nos permitiera conocer si las deficiencias detectadas en este estudio proceden de la postura editorial o son propias del contenido matemático escolar en cuestión.

Además, una posible continuación de este trabajo podría ser llevar a cabo un contraste; entre lo que se observó en los libros de texto y las propuestas que desde la investigación en Matemática Educativa se desarrollan para la construcción de significados, el desarrollo de habilidades y destrezas así como la atención a los errores, dificultades y obstáculos concernientes a la noción de límite de una función y que son difundidas en artículos de difusión científica y en libros de texto desarrollados por especialistas. En el mismo sentido, queda pendiente realizar comparativos con relación al currículum impartido y aprendido. Esto permitiría explorar que hacen los profesores en el aula a través del diseño e implementación de sus cursos y las competencias que en realidad desarrolla el estudiante.

En el mismo sentido, parece interesante realizar un análisis de contenido y un análisis cognitivo de referencia con relación al contenido matemático escolar del límite, el cual no esté sujeto al currículum oficial ni potencial. Esto con el fin que de profundizar en la todas las dimensiones y significados propios el concepto, incluyendo el análisis conceptual del mismo. Respecto al análisis cognitivo de referencia, éste pudiera incluir además de la identificación de expectativas de aprendizaje, que se realizó en este trabajo, un estudio de las limitaciones de aprendizaje concernientes a los errores, dificultades y obstáculos propios del concepto y de las oportunidades de aprendizaje que en el contexto del NMS pudieran presentarse.

Por último se presenta como una posible vía de profundidad en la investigación en matemática educativa, la posibilidad de que los resultados obtenidos en este estudio, así como la información recabada de los análisis de contenido y cognitivo pudieran servir como punto de partida para estructurar una propuesta de actividades, que surja desde la investigación en Matemática Educativa, que además sea diseñada con la intencionalidad primordial de desarrollo equilibrado de las competencias que se establecen en currículum oficial como fines formativos del campo de las matemáticas en el NMS, tomando en cuenta la carencia que los libros de texto presentan en cuanto a la presencia de actividades que a través de contextos no matemáticos doten de sentido al límite de una función. Lo cual requeriría además del trabajo realizado, de contar con una mayor base teórica.

Capítulo 8  
REFLEXIÓN

---

## 8. REFLEXIÓN.

Al iniciar como profesor de matemáticas en el Nivel Medio Superior, contando una formación distinta a la enseñanza de las matemáticas, encontré un conjunto de retos para lograr un desempeño adecuado en mi labor docente. Lo anterior me llevó a identificar como necesidad personal y profesional, el buscar opciones de profesionalización que permitieran entender y contribuir de mejor manera al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En este sentido la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Zacatecas representó una excelente oportunidad para adquirir nuevos conocimientos y desarrollar habilidades, que seguramente serían de utilidad para diagnosticar e intervenir de manera efectiva en aquellas situaciones que representen áreas de oportunidad en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, tales como la identificación de dificultades y obstáculos de aprendizaje, la integración de nuevas estrategias y herramientas de enseñanza, el conocimiento las matemáticas como contenido escolar y de los distintos factores que influyen en el proceso de enseñanza aprendizaje de dicho contenido.

Uno de los retos a los que me enfrentó comúnmente como profesor de matemáticas y que se convirtió en el tema central de mi trabajo de grado, el cual desde mi punto de vista comparto con otros profesores, es la necesidad de apoyar el diseño y desarrollo de nuestros cursos con diversos elementos que apoyen al logro de los fines formativos que establecen las autoridades educativas. Pues en aquel momento a pesar de tener conciencia del impacto que los libros de texto pudieran tener en el proceso planificación e implementación de mis cursos, no era consciente de la posibilidad de realizar un análisis sistemático de los materiales disponibles, en el cual poder fundamentar la toma de decisiones. De tal forma que al igual que algunos compañeros, elegía lo materiales a utilizar con base en recomendaciones de otros profesores o guiado por el enfoque que estos declaraban tener.

En este sentido, cabe señalar que si bien los planes y programas de estudio fijan los contenidos y los objetivos que corresponden a cada curso, además, proponen un conjunto de actividades y algunas fuentes de consulta, que podrían servir de apoyo al profesor para complementar la clase. Sin embargo, al no contar materiales de carácter oficial, al menos en el subsistema en el que laboro, es el profesor quien tiene la responsabilidad sobre la elección de los materiales y actividades que se llevarán a los salones de clases, de los cuales los libros de texto son un elemento principal.

Particularmente como profesor de cálculo diferencial a nivel bachillerato, me había encontrado en la disyuntiva de elegir los libros de texto adecuados para el diseño y desarrollo de los cursos que imparto, buscando materiales que sean acordes con el enfoque en competencias que el plan de estudios establece. Pero al no contar con un método sistematizado de análisis que permitiera tomar decisiones fundamentadas, se hacía presente la incertidumbre de saber si la elección de materiales era correcta. De ello surgió la inquietud por contar con un instrumento que permitiera identificar si los problemas y ejercicios propuestos en los libros de texto

contribuyen a desarrollo de las competencias que establece el plan de estudios y de ser así, si esto sucede de manera equilibrada.

Por otro lado, fue necesario centrar la atención en un contenido específico, con el fin de lograr la profundidad requerida por el estudio. Por lo tanto decidimos enfocar este trabajo en los temas de límite de una función. Esta decisión se tomó en primera instancia porque con base en mi experiencia como profesor y en trabajos de investigación revisados, este contenido además de tener un carácter estructural importante en la conformación del cálculo es un contenido que personalmente, resulta complejo de llevar al aula, pues encierra una carga importante de aspectos teóricos y filosóficos que complican su comprensión, ocasionando la presencia de dificultades y obstáculos que derivan en errores por parte del estudiante. Y aún más, el límite es un tema que por esas características ya mencionadas, resulta sumamente complejo de llevar a una contextualización que le dé un sentido significativo para el estudiante. Esto se pudo confirmar en los resultados obtenidos de esta investigación.

A partir de esto, es que se propuso realizar el estudio comparativo entre el currículum oficial y potencial que se presenta en este documento, cuyo proceso de desarrollo ha permitido enriquecer mi formación como profesor dotándome de una nueva manera de ver las matemáticas escolares y su enseñanza. Para lo cual desde un inicio conté con la confianza y apoyo de la Dra. Judith A. Hernández Sánchez, quien a través de sus observaciones y un constante proceso de discusión supo guiar el desarrollo de este trabajo.

Debo señalar que este cambio de visión se dio conforme se realizaron las distintas etapas del estudio, en las cuales tuve la oportunidad de ver el proceso de enseñanza aprendizaje desde el punto de vista del profesor y del investigador. Esta bivalencia me llevo a cuestionar de manera constante acerca de lo que usualmente realizo tanto en el diseño como en la implementación de los cursos que imparto.

Por otro lado, el conocer y profundizar en análisis didáctico, primero como estrategia de formación de profesores y luego como metodología de investigación me llevó a reflexionar sobre la importancia y complejidad que encierra la planificación de una unidad didáctica. Tanto el análisis de contenido como el análisis cognitivo realizados aportan claridad a esa nueva visión. En el primero pude entender que un concepto matemático concreto encierra múltiples significados y que estos pueden ser promovidos de distintas maneras y en distinta medida dependiendo de la forma en que se estructuren a través de las tres dimensiones que los conforman. En el segundo obtuve claridad acerca de las expectativas de aprendizaje y los distintos niveles en que se pueden organizar; comprendí también que el desarrollo de competencias más que tener que ver con un tema matemático concreto, tiene que ver con desempeños a largo plazo que solo son observables al concluir un ciclo de formación y que pueden ser desagregadas en expectativas más concretas y específicas. Esto último resulta por demás interesante, pues al proponer actividades encaminadas a contribuir en el desarrollo de competencias, los profesores podríamos tomar como referente esas expectativas específicas

que se esperaba que movilice el estudiante y que al ser movilizada promueven el desarrollo de una o más competencias para definir la intencionalidad de cada actividad.

Otro aspecto de este trabajo que quiero retomar en esta reflexión, es la experiencia profesionalizante que significo para mí la estancia de investigación realizada en la Universidad de Granada, donde tuve la oportunidad de revisar y discutir los aspectos teóricos y metodológicos que dan sustento a este estudio. Asimismo, cabe señalar que producto de dicha estancia, con la orientación de los doctores Lupiáñez y Ruiz-Hidalgo se pudo mejorar hasta constituir el instrumento de análisis que en el estudio se propone para la identificación de capacidades demandadas, el cual podría ser replicado para otros temas matemáticos. Personalmente considero que dicha experiencia profesionalizante resultó ser además de productiva, motivante para realizar trabajos futuros.

Asimismo, en cuanto a los resultados obtenidos puedo mencionar que dejan ver que si bien los libros de texto contribuyen al desarrollo de competencias, no lo hacen de manera equilibrada y tampoco se equilibra el tipo de significados que se promueven. Por tanto lo más recomendable es que los profesores basemos el diseño de nuestros cursos en más de un libro de texto tomando como referencia la intencionalidad que se quiera dar al curso, pues considerar solo uno título para determinado tema podría generar que tanto los significados como los desempeños promovidos queden limitados.

Por último, quisiera señalar que en este proceso de profesionalización como profesor de matemáticas, que con la conclusión de este trabajo cierra una etapa de mi formación profesional donde un aspecto por demás enriquecedor fue el compartir experiencias y puntos de vista, tanto con profesores como con otros estudiantes, siendo la discusión una vía para lograr evolucionar en la manera en que cada uno concibe y lleva a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

## 9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

## 9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En Goñi, J.M. (coord.), C. Alsina, D. Ávila, C. Burgués, J. Comellas, F. Corbalán, F. A. García Delgado, C. Hahn, C. y J. Serra. (Eds.). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo, 21*, (pp. 13-21). España: Biblioteca de Uno.
- Area, M. (1991). Medios y currículum: Otra perspectiva de análisis. En M. Area. (Ed.). *Los medios, los profesores y el currículum* (pp. 23-47). Barcelona: Sendai Ediciones.
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40-55.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2000): El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. ISBN: 970-625-246-0. México.
- Ceballos, J. P. y Blanco, J. L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones de la Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla*, (38), 63-88.
- de la Federación, D. O. (2008). *Acuerdo Núm. 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato*. México, DF, SEP.
- Dolores, C (2012). ¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato? En Dolores, C. y García M. S. (Eds.) *¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato?* (pp. 165-182) México: Cimate Universidad Autónoma de Guerrero, Plaza y Valdez editores.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1), 7- 34.
- Gómez, L. M. y Pantoja, Y. M. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares. *Revista SIGMA*, 11(1).
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.
- Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las Matemáticas. En *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

- Hitt, E. (1997). *Matemática Educativa: Investigación y desarrollo 1975-1997*. En F. Hitt. (Ed). *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 41-65). México: Grupo Editorial Iberoamérica
- Ibáñez, C. y Dolores, C (2012). Relación entre el currículum oficial y el currículo oficial, el caso de los textos de preparatoria. En C. Dolores y M. S. García (Eds.). *¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato?* (pp. 87-109) México: Cimate Universidad Autónoma de Guerrero, Plaza y Valdez editores.
- Ibáñez, P. y García, G. (2012). *Matemáticas V: Cálculo Diferencial*. México DF: Cengage Learning.
- López, G. y Tinajero, G. (2009). Los docentes ante la reforma del bachillerato. *Revista mexicana de investigación educativa*, 14(43), 1191-1218.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Lupiáñez, J. L. (2010). *El análisis didáctico como herramienta para el análisis de textos de matemáticas*. Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades del aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Monterrubio, M. C., y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127.
- Mora V. E. y del Río F., M. (2009). Cálculo diferencial e integral. *Ciencias sociales y económicas administrativas*. México: Santillana.
- Moreno, M., Mesa, G. y Azcárate, C. (2007). Competencias y evaluación: desarrollo de un instrumento de análisis y caracterización de problemas matemáticos de nivel superior. *Actas de Comunicaciones del XI SEIEM, La Laguna*.
- Navarro, C., Maldonado, E., y López, E. (2012). Un estudio de investigaciones cognitivas acerca del concepto de límite. El caso de habla hispana. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25. (pp. 171-178) México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Pansza, M. (2005). *Pedagogía y Currículo*. México, D.F.: Gernika.
- Rico, L. (2009). Concepto de currículum desde la educación matemática. *Colección Digital Eudoxus*, (10).
- Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas: proyecto PISA/OCDE 2003.

- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de la investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, y M. Molina, (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación formación de profesores e innovación curricular*. (pp. 1-22) Granada: Editorial Comares. ISBN: 978-84-9045-082-6.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- SEP, SEMS (2008). *Reforma Integral de la Educación Media Superior. La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. Subsecretaría de Educación Media Superior, recuperado el 7 de Julio de 2014 de <http://es.scribd.com/doc/57597145/SNB-Marco-Divers-Id-Ad-Ene-2008-FINAL>
- SEP/ SEMS/ DGB (2013). *Programa de estudios: Cálculo Diferencial*. Recuperado en: [http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp\\_5sem/calculo-diferencial.pdf](http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf)
- Valenzuela, A. L. (2011). *Cálculo Diferencial e Integral 1*. Hermosillo, Sonora: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.
- Valenzuela, C. y Dolores, C (2012). Entre el Currículum Oficial e Impartido: que es lo que se enseña en el aula. En C. Dolores y M. S. García. (Eds.) *¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato?* (pp. 111-138) México: Cimate Universidad Autónoma de Guerrero, Plaza y Valdez editores.
- Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, 8(29), 9-19.
- Zavaleta, A. y Dolores, C (2012). Evaluación del Currículum Matemático Escolar Aprendido. El Caso del Nivel Medio Superior de la UAG. En C. Dolores y M. S. García. (Eds.) *¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato?* (pp. 139-164) México: Cimate Universidad Autónoma de Guerrero, Plaza y Valdez editores.