

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS**  
**“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”**

---



**UNIDAD ACADÉMICA DE  
MATEMÁTICAS**



**UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO. LA  
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA  
ECUACIÓN CUADRÁTICA**

Informe de Práctica de Desarrollo Profesional  
que para obtener el grado de

**Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria**

Presenta:

**Christian Manuel Acosta Núñez**

Directoras de Informe de Práctica de Desarrollo Profesional:

**Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez**

**Dra. Carolina Carrillo García**



---

Unidad Académica de Matemáticas

A QUIEN CORRESPONDA:

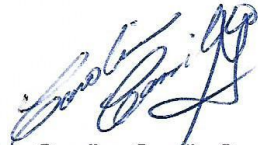
Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO. LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el *C. Christian Manuel Acosta Núñez* egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidos en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquellas establecidas en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 25 de septiembre del 2017

Judith A Hdez S

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez  
Directora de Tesis



Drá. Carolina Carrillo García  
Co-directora de Tesis





## CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 06 del mes de octubre del año 2017, el que suscribe Christian Manuel Acosta Núñez egresado del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 30110462; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado intitulado UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO. LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA bajo la dirección de la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez y la Dra. Carolina Carrillo García.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.



---

Christian Manuel Acosta Núñez



## **RESUMEN**

El presente informe tiene como objeto de estudio mi actuación docente por medio de un proyecto de desarrollo profesional. Para poder realizar dicha actividad se ha considerado el diseño, puesta en práctica y evaluación de una unidad didáctica con base en la herramienta teórico-metodológica del análisis didáctico. La problemática encontrada reside en la necesidad de que los profesores se apropien de marcos de referencia para planear, ejecutar y evaluar una clase por competencias. En este informe de desarrollo profesional el contenido a trabajar es la ecuación cuadrática. Escogí este contenido matemático porque en mi experiencia como profesor de matemáticas he observado que es un contenido central, ya que se aborda durante todo el ciclo escolar. Asimismo, he detectado algunas limitaciones que inciden un aprendizaje efectivo de este tópico. La revisión de la literatura me ha permitido identificar que generalmente los profesores no cuentan con elementos teóricos que les permitan orientar tanto la planificación de una clase como su puesta en práctica. Además, su participación en la mayoría de las investigaciones realizadas con el enfoque adoptado en este informe, se reporta como supletoria o no determinista. Por ello se pretende que en mi papel de profesor en activo sea yo quien valore el papel del análisis didáctico en mi desarrollo profesional, lo cual tendrá como finalidad no sólo la mejora de mi práctica docente sino también determinar alcances que enriquecerán los resultados de la investigación relativos a la implementación del análisis didáctico, pero ahora en una situación real.





## **ABSTRACT**

The purpose of this report is to study my teaching performance through a professional development project. In order to carry out this activity, we have considered the design, implementation and evaluation of a didactic unit based on the theoretical-methodological tool of the didactic analysis. The problem lies in the need for teachers to appropriate frames of reference to plan, execute and evaluate a class by competencies. In this report of professional development, the content to work is the quadratic equation. I chose this mathematical content because in my experience as a math teacher I have observed that it is a core content, as it is addressed throughout the school year. Also, I have detected some limitations that affect effective learning of this topic. The review of the literature has allowed me to identify that teachers generally do not have theoretical elements that allow them to guide both the planning of a class and its implementation. In addition, its participation in most of the research carried out with the approach adopted in this report is reported as supplementary or nondeterministic. That is why it is intended that in my role as an active teacher, it is I who values the role of didactic analysis in my professional development, which will aim not only to improve my teaching practice but also to determine the scope that will enrich the results of the research concerning the implementation of the didactic analysis, but now in a real situation.



## CONTENIDO

MOTIVACIÓN .....	1
CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	5
1.1.    Antecedentes .....	5
1.1.1 El diseño, ejecución y evaluación de un contenido matemático escolar .....	5
1.1.2 El análisis didáctico como propuesta para atender la formación de los profesores de matemáticas.....	7
1.1.3 La ecuación cuadrática como tema de enseñanza en el nivel secundaria.....	9
1.1.3.1 Marco curricular .....	9
1.1.3.2. La enseñanza de la ecuación cuadrática .....	10
1.2.    Planteamiento del Problema.....	13
1.2.1.    Pregunta de desarrollo profesional .....	15
1.2.2.    Objetivo General y Particulares .....	15
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO.....	16
2.1 Análisis de contenido .....	17
2.2 Análisis cognitivo.....	19
2.3 Análisis de instrucción .....	20
2.4 Análisis de actuación.....	23
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN EL CONTENIDO DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA .....	26
3.1 Diseño del proyecto de desarrollo profesional .....	28
3.2 Descripción de los alumnos del tercer grado.....	28
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE CONTENIDO DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA .....	30
4.1 Análisis conceptual .....	30
4.1.1 Historia y epistemología de la ecuación cuadrática .....	30
4.1.2 Conceptos y términos básicos .....	34
4.1.3 Red de significados .....	36
4.2 Focos prioritarios .....	36
4.2.1 Sistemas de representación.....	36
4.2.2 Fenomenología.....	39
4.3 Mapa conceptual de la ecuación cuadrática .....	40
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS COGNITIVO.....	42
5.1 Expectativas de aprendizaje .....	42
5.2 Limitaciones de aprendizaje.....	48

5.2.1 Desde los resultados de investigación.....	48
5.2.2 Desde los resultados de aula.....	52
5.3 Demandas cognitivas.....	59
<b>CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.....</b>	<b>63</b>
6.1 Funciones y tipos de tareas.....	63
<b>CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DE ACTUACIÓN.....</b>	<b>83</b>
7.1 Evaluación de los aprendizajes de los estudiantes .....	105
<b>CONCLUSIONES Y REFLEXIONES.....</b>	<b>114</b>
El papel del Análisis de Contenido en mi desarrollo profesional .....	114
El papel del Análisis Cognitivo en mi desarrollo profesional.....	118
El papel del Análisis de Instrucción en mi desarrollo profesional .....	122
El papel del Análisis de Actuación en mi desarrollo profesional.....	123
Retroalimentación al marco teórico desde la experiencia en situación real .....	125
Referencias.....	129
Anexos.....	134

## ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

### FIGURAS

<i>Figura 1.</i> Ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2009, p. 476) .....	26
<i>Figura 2.</i> Elevar al cuadrado de forma geométrica (Mesa, 2008 p. 24) .....	32
<i>Figura 3.</i> Procedimiento de Al-Khwarizmi y Tabit Ben Qurra (1) .....	33
<i>Figura 4.</i> Procedimiento de Al-Khwarizmi y Tabit Ben Qurra (2) .....	34
<i>Figura 5.</i> Procedimiento de Al-Khwarizmi y Tabit Ben Qurra (3) .....	34
<i>Figura 6.</i> Red de significados.....	36
<i>Figura 7.</i> Mapa conceptual de la ecuación cuadrática .....	41
<i>Figura 8.</i> Competencias matemáticas (SEP, 2011, p. 23) .....	43
<i>Figura 9.</i> Respuesta de estudiante 11 al ítem 1 .....	53
<i>Figura 10.</i> Respuesta de estudiante 13 al ítem 1 .....	53

<i>Figura 11.</i> Respuesta del estudiante 2 al ítem 1 .....	53
<i>Figura 12.</i> Respuesta del estudiante 4 al ítem 1 .....	53
<i>Figura 13.</i> Respuesta del estudiante 20 al ítem 1 .....	53
<i>Figura 14.</i> Respuesta del estudiante 2 al ítem 5a .....	54
<i>Figura 15.</i> Respuesta del estudiante 6 al ítem 6d. ....	54
<i>Figura 16.</i> Respuesta del estudiante 6 al ítem 6b. ....	55
<i>Figura 17.</i> Respuesta del estudiante 18 al ítem 5b. ....	55
<i>Figura 18.</i> Procedimiento del estudiante 6 al ítem, 6a .....	56
<i>Figura 19.</i> Procedimiento del estudiante 10 al ítem 6e .....	57
<i>Figura 20.</i> Respuesta del estudiante 1 al ítem 5a.....	109
<i>Figura 21.</i> Respuesta del estudiante 1 al ítem 5a.....	109
<i>Figura 22.</i> Respuesta del estudiante 1 al ítem 5a.....	110
<i>Figura 23.</i> Respuesta del estudiante 1 al ítem 5a.....	111
<i>Figura 24.</i> Respuesta del estudiante A3 al ítem 4d. ....	112
<i>Figura 25.</i> Significado potenciado en los libros de historia .....	118
<i>Figura 25.</i> Significado potenciado en los libros de texto (1) .....	118
<i>Figura 26.</i> Significado potenciado en los libros de texto (2) .....	118

## TABLAS

<i>Tabla 1.</i> Capacidades del Objetivo de aprendizaje 1 y su relación con las competencias matemáticas .....	45
<i>Tabla 2.</i> Capacidades del Objetivo de aprendizaje 2 y su relación con las competencias matemáticas. ....	45
<i>Tabla 3.</i> Capacidades del Objetivo de aprendizaje 3 y su relación con las competencias matemáticas. ....	46

<i>Tabla 4.</i> Total de veces en las que se contribuye al desarrollo de las competencias matemáticas. ....	47
<i>Tabla 5.</i> Contenido de los ítems .....	52
<i>Tabla 6.</i> Errores por ítem .....	57
<i>Tabla 7.</i> Relación de los errores encontrados con los propuestos por la literatura .....	58
<i>Tabla 8.</i> Resultados del instrumento de evaluación .....	107



## **MOTIVACIÓN**

En esta sección, y dado que este informe guarda algunas diferencias respecto a una tesis, se considera pertinente iniciar con lo que motivó este proyecto de desarrollo profesional y que fue mejorar mi práctica docente. En particular, uno de los aspectos que orienta mi quehacer como docente es sin duda la planificación didáctica de una clase. Ésta funciona como una herramienta para la organización y sistematización de las actividades que se proponen a los estudiantes en el aula. Lo anterior con el fin de que adquieran los objetivos de aprendizaje mencionados en los planes y programas de estudio.

Desde mi formación como docente, la planificación didáctica es un elemento imprescindible para guiar mi actuación en la práctica. Por esta razón, desde mi formación inicial en la Escuela Normal se me solicitaba realizar un análisis de aspectos implícitos en la planificación de una clase. Este análisis se centraba en estudiar el contenido matemático a enseñar. Para ello realizaba fichas técnicas que me permitían estudiar los conceptos específicos del contenido en cuestión; pero no establecía relaciones que me permitieran detectar aspectos necesarios para el aprendizaje del nuevo contenido.

También se me solicitaba considerar las posibles dificultades de los estudiantes al abordar las actividades de aprendizaje para tenerlas en cuenta como consideraciones previas y realizar algunas hipótesis de cómo los estudiantes podrían interactuar con el contenido. Es decir, qué posiblemente contestarían, cuánto tiempo tomarían para contestar o resolver las actividades, qué contenidos eran necesarios para abordar el tema, cuáles ejemplos o analogías podrían funcionar, entre otros aspectos.

Es importante mencionar que las consideraciones anteriores se realizaban de manera global y muy general, dejando ciertos vacíos que surgían al llevar a cabo la puesta en práctica de las propuestas diseñadas. Algunos de estos vacíos se reflejaban en las posibles respuestas de los estudiantes, las dificultades a las que se enfrentaban y las respuestas inesperadas.

Puedo decir también que anteriormente no consideraba los aspectos anteriores como un proceso articulado; es decir, como la planeación, ejecución y evaluación son referentes que deben estar unidos para orientar la puesta en práctica. En mi caso sí los realizaba, pero como procedimientos desarticulados.



Cuando ingresé a la Maestría en Matemática Educativa, me di cuenta de que existe una propuesta teórico-metodológica para la planeación, ejecución y evaluación de una clase; la cual se puede realizar bajo la orientación por competencias: el análisis didáctico. A partir de este primer acercamiento me di a la tarea de investigar esta propuesta con la finalidad de identificar de qué manera puede intervenir en mi práctica docente y cuáles son los problemas que atiende en torno a la labor del profesor de matemáticas y el papel que tendría en mi desarrollo profesional.

Este marco teórico-metodológico implica la realización de cuatro análisis que son los referentes para el diseño de unidades didácticas en torno a un contenido matemático escolar: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. De esta manera, el análisis didáctico “describe cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de aprendizaje” (Gómez, 2002, p. 262). Por lo cual se propone como una metodología que puede orientar al profesor al momento de fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación, puesta en práctica y evaluación de contenidos matemáticos escolares con apoyo de la didáctica de las matemáticas.

*Grosso modo*, el análisis didáctico implica organizar los significados que se pretende que los escolares aprendan, tener en cuenta las dificultades a las que se pueden enfrentar, las hipótesis del profesor de cómo aprenderán los estudiantes y la elección de actividades de aprendizaje del contenido matemático en cuestión. Finalmente, tomando en cuenta lo anterior, se realiza la puesta en práctica y una retroalimentación que muestra los resultados obtenidos sobre los aprendizajes y las dificultades que se presentaron. Una ventaja de esta metodología es que es aplicable a cualquier contenido matemático escolar que se lleva a cabo en determinado nivel educativo. Por ello se espera incida de manera positiva en mi práctica docente permitiendo articular la planificación, ejecución y evaluación de una clase de matemáticas con herramientas de corte didáctico.

Otra ventaja de la metodología es que la evaluación de los aprendizajes puede realizarse desde el enfoque educativo por competencias ya que propone que los profesores “enuncien y organicen las capacidades que ellos esperan que desarrollen los escolares de secundaria sobre ese tema matemático” (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 37). La capacidad dentro de este marco teórico se entiende como “el conjunto de condiciones necesarias para llevar a cabo una actividad

concreta. Son cualidades complejas, adquiridas paulatinamente, y que controlan la realización de esa actividad” (Dorsch, 1985, p. 96). En este caso, las competencias constituyen objetivos a largo plazo y comprenden: operaciones mentales, conceptos, resolución de algoritmos, habilidades, destrezas, intereses, actitudes, entre otros; mientras que las capacidades son rasgos específicos de las competencias que pueden ser evaluadas a corto plazo y de manera inmediata en la clase.

Una de las preocupaciones que como profesor ha prevalecido en mi quehacer es cómo promover en los estudiantes los aprendizajes enunciados en términos de las competencias establecidas en los programas de estudio del nivel secundaria. Esto porque en las experiencias adquiridas tanto en mi formación como en mi desempeño docente, he detectado que los estudiantes presentan dificultades y errores al trabajar con determinados contenidos matemáticos escolares. Dicha preocupación genera el interés en incidir en mi práctica docente con el fin de “verificar si los estudiantes manifiestan una dificultad y contribuir a superarla” (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 93) mediante el diseño de tareas que consideran la atención a estas dificultades.

En este trabajo de intervención docente se toma como contenido matemático a enseñar la ecuación cuadrática. Para argumentar la elección de este tema, a continuación, presento algunas situaciones que lo justifican.

La secundaria es el nivel educativo en el que se comienza con el estudio del álgebra. En el tercer grado en particular, se pone énfasis en el aprendizaje de la ecuación cuadrática. Además, en mi experiencia como docente titular de la asignatura de matemáticas de este grado en este nivel, he detectado que los estudiantes presentan dificultades y errores al trabajar este contenido matemático escolar. Al respecto, en la literatura se presentan algunos tipos de limitaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983; Filloy y Kieran, 1989; Movshovitz-Hadar; Inbar y Zaslavsky, 1987 Radatz, 1979; Rojano, 2010; Ruano, 2008; Socas, 1997) las cuales impactan en el aprendizaje de contenidos algebraicos específicos, como la ecuación cuadrática.

Las limitaciones en torno a la enseñanza de la ecuación cuadrática generan dificultades en mi quehacer como profesor al tratar de promover las competencias propuestas para el tema

en cuestión. Sin embargo, uno de los organizadores del currículo que aborda el análisis didáctico es el análisis cognitivo. Dicho análisis aborda las competencias que se espera que los estudiantes desarrollen con determinado contenido matemático escolar. Asimismo, considera el estudio de las dificultades y errores que los estudiantes pueden cometer al momento de realizar las actividades de aprendizaje y el análisis de las dificultades que subyacen esos errores que permiten su interpretación. Lo anterior me permitirá tener un mayor conocimiento y control de tales limitantes a través de tareas que involucren un aprendizaje efectivo de la ecuación cuadrática. Por ello, tomando en cuenta esta perspectiva, en mi labor como docente mi interés reside en la utilización del análisis didáctico como una herramienta teórico-metodológica que me permita gestionar de manera sistemática mi práctica docente. Lo anterior, en mi opinión me ayudará a gestionar de una mejor manera mi actuación en el aula por medio de una planificación y acción que considera diferentes dimensiones articuladas y cuya referencia principal es la matemática educativa.

## **CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **1.1. Antecedentes**

#### **1.1.1 El diseño, ejecución y evaluación de un contenido matemático escolar**

En la educación secundaria existe una preocupación por “desarrollar habilidades superiores del pensamiento para solucionar problemas, pensar críticamente, comprender y explicar situaciones desde diversas áreas del saber, manejar información, innovar y crear en distintos órdenes de la vida” (SEP, 2011 p. 26). Lo anterior con la finalidad de que los estudiantes puedan desenvolverse a lo largo de su existencia.

Desde esta perspectiva, es necesaria la organización de la enseñanza en términos de “las competencias que deberían desarrollar los estudiantes al término de su formación” (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 35). Aspecto que demanda que los profesores puedan sistematizar su práctica docente considerando las expectativas de aprendizaje establecidas institucionalmente. Por esta razón, una de las competencias básicas que se espera que desarrollen los futuros profesores tiene que ver con la capacidad para planificar su actuación docente (Campillo, 2004; Rico, 2004). De esta manera, la planificación es un elemento fundamental para orientar la actuación del profesor ya que implica “organizar actividades de aprendizaje a partir de diferentes formas de trabajo, como situaciones, secuencias didácticas y proyectos entre otras” (SEP, 2011, p. 27). Por tanto, una de las labores centrales del profesor es la organización y planificación de una clase o unidad didáctica considerando cuestiones claves.

Se toma como una competencia porque la planificación es una de las actividades más importantes en el trabajo del profesor (Ball, 2003; Van Der Valk y Broekman, 1999). Sin embargo, pese a la importancia de esta actividad, “la planificación es una de las competencias profesionales clave, para el profesor y que está menos desarrollada en los planes de formación del profesorado” (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 8). Aunado a esto se encuentra que la información que se aporta a la planificación por parte del currículo, “se muestran claramente insuficientes para llegar al nivel del aula y decidir de qué debe aprender un alumno o alumna de secundaria de cada tema y cómo hacerlo operativo cada día (p. 8).

Al llevar a cabo la enseñanza, adquiere especial importancia el papel del profesor dentro del salón de clases. Por ello, la gestión de una clase gana relevancia para promover la

adquisición de nuevos saberes en los estudiantes ya que coordina las acciones del maestro en el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas, así como también orienta su quehacer con el fin de alcanzar objetivos de aprendizaje. En particular, la planificación, brinda elementos que permiten considerar previamente características propias de los alumnos y el contenido a enseñar, lo que incide en que se lleve a cabo o no el aprendizaje de determinado tópico matemático.

Es importante hacer mención que, en mi formación inicial como normalista, se abordaron elementos relacionados a la planificación y puesta en práctica de una clase, pero de manera global. Es decir, no de manera profunda en cada uno de los elementos que la componen. También, es importante mencionar que no tenía conocimiento de alguna metodología para la planificación que considerara los objetivos de ésta en cuanto a su diseño, puesta en práctica y evaluación.

Esta problemática de mi práctica no es exclusiva, lo cual coincide con lo que mencionan Rico (1997) y Rico y Segovia (2001) cuando mencionan que los profesores asumen la planificación desde ámbitos globales. Es decir, ven la planificación de clases sólo como una lista de contenidos a cubrir. Así, diseñan actividades para un tema de las matemáticas en particular tomando de manera esquemática los objetivos, contenidos, metodología y esquemas de evaluación de la asignatura en general.

Esta situación provoca que los contenidos abordados se manejen como procedimientos alejados de la reflexión y las actividades se basen más que nada en los libros de texto. Esto se considera que no es lo ideal pues “los libros de texto se redactan para perfiles de alumnos y profesores que no coinciden con la realidad de cada centro y aula” (Rico, Marín, Gómez y Lupiáñez, 2008, p. 8). Es aquí donde el análisis didáctico presenta una propuesta para atender estas necesidades formativas de los profesores de matemáticas. En particular propone la planeación, desarrollo y evaluación de una clase considerando aspectos conceptuales de la Matemática Educativa.

Por lo anterior, en los antecedentes se buscó identificar cuál es el papel del análisis didáctico como posible propuesta de solución a algunos problemas relacionados con la formación de profesores de matemáticas. Principalmente el romper con ese esquema que

muchos profesores tenemos con respecto a ver la planeación sólo como una secuencia de contenidos a cubrir.

### **1.1.2 El análisis didáctico como propuesta para atender la formación de los profesores de matemáticas**

En particular se propone al análisis didáctico como una conceptualización del nivel local de la planificación (Rico, 1997). Es decir, enfocándose en un contenido matemático escolar de una unidad didáctica que puede tener la duración de una clase o lo que requiera el profesor. De esta manera, “es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 84).

De esta manera, Gómez (2002) y Gómez y Lupiáñez (2007) proponen a la herramienta del análisis didáctico como aquella que puede ayudar al profesor a organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis. El primero es el *Análisis de contenido*, donde el centro de atención es el contenido a enseñar y es un procedimiento donde el profesor identifica, organiza y selecciona los significados del concepto matemático que considera relevantes. El segundo es el *Análisis cognitivo*, donde el centro de atención es el aprendizaje; aquí se abordan las hipótesis de cómo los estudiantes aprenden, y se analizan las posibles limitaciones que pueden tener en este proceso. El tercer organizador del currículo es el *Análisis de instrucción*, en el que el centro de atención es la enseñanza tomando como base los análisis anteriores (de contenido y cognitivo) para el diseño de las actividades de enseñanza. Finalmente, el *Análisis de actuación* donde se identifican las capacidades que los estudiantes lograron y las dificultades que se presentaron en clase.

De esta manera, el análisis didáctico permite “establecer, analizar y organizar las capacidades y competencias que los futuros profesores esperan desarrollar en los escolares en torno a ese tema matemático” (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 36). A través de la realización de los cuatro análisis mencionados anteriormente como procedimiento para la planificación local de una unidad didáctica. Luego, este marco teórico-metodológico permite introducir de manera explícita una visión funcional en la formación de profesores” (Gómez, S/F, p. 3). En particular promueve la organización de la enseñanza del profesor por medio de la planificación; siendo una de las competencias que se espera que los futuros profesores desarrollen.

Uno de los objetivos centrales en la enseñanza usando el análisis didáctico es la identificación, organización y selección de múltiples significados de un concepto matemático (Gómez, 2009; Gómez, S/F; Gómez y Lupiáñez, 2007; Gómez y Rico, S/F Lupiáñez y Rico, 2008; Rico, 2013). Sin embargo, tales estudios se realizan como propuestas para la formación de futuros profesores de manera que estos puedan recoger y organizar la información para el diseño de unidades didácticas.

Otro alcance del análisis didáctico son los estudios que lo utilizan como herramienta para la identificación de objetos y significados matemáticos de una clase en experiencias ya realizadas por otros profesores (Godino, Rivas, Castro y Konic, S/F) o para mostrar las herramientas del enfoque ontosemiótico por medio del análisis didáctico para analizar la institucionalización en la resolución de un problema (Font, Planas y Godino, 2010). Es decir, se ha utilizado para describir la práctica del profesor.

Finalmente, otro uso del análisis didáctico es la elaboración de unidades didácticas para contenidos matemáticos específicos. Entre los temas que se han propuesto están: límite y continuidad (Fernández, 2010); ecuaciones de primer grado con una incógnita real (Hurtado y Torres, 2015); la recta (Mora, Gutiérrez y Herrera, 2013); las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad (Aros, Astudillo, Ramos y Ruz, S/F) por mencionar algunos.

Tomando en cuenta las situaciones en las que se ha utilizado el análisis didáctico en torno a la práctica del profesor, se observa que los usos han sido: para la formación de profesores, para analizar la práctica del profesor y para el diseño de unidades didácticas; sin embargo, la gran mayoría de las propuestas no se realizan desde la mirada del profesor. En las investigaciones mencionadas anteriormente, no se muestran resultados en donde el profesor haya utilizado en el aula el ciclo completo del análisis didáctico y su reflexión a partir de esta experiencia. Esto debido a que en las propuestas en las que se aplica el análisis didáctico, el centro es el diseño de la unidad didáctica, mas no los resultados de la aplicación de ésta en una clase real. Cambiar el enfoque, en nuestra opinión, podría permitir obtener reflexiones que, con base en la experiencia del profesor y lo aprendido en un proceso de intervención de su propia práctica docente, fortalecerían este modelo teórico-metodológico y el desarrollo profesional del profesor en cuestión.

Desde este punto de vista, es imprescindible tener referentes de las situaciones que obstaculizan que los estudiantes aprendan de manera efectiva el tema de la ecuación cuadrática, lo cual implica realizar una revisión a las limitaciones de aprendizaje en torno a este contenido y las competencias que se espera desarrollar en los estudiantes para abordarlas por medio de actividades específicas en una planificación.

El conocimiento de estos aspectos me servirá para establecer las hipótesis sobre los posibles caminos que los estudiantes pueden recorrer en la construcción de su conocimiento; identificar lo que los estudiantes son capaces de hacer antes de la instrucción y lo que se espera que sean capaces de hacer después de la instrucción. Además, considerando las dificultades y errores sobre la ecuación cuadrática al momento de diseñar o elegir las tareas, se espera que contribuyan a su superación y, por ende, a la promoción de los aprendizajes esperados. Por tal motivo, a continuación se presentan algunas referencias de este contenido que se tomarán en cuenta al momento de abordarlo.

### **1.1.3 La ecuación cuadrática como tema de enseñanza en el nivel secundaria**

El estudio del pensamiento matemático en la educación básica se aborda desde preescolar con aspectos básicos como el conteo; mientras que en primaria y secundaria la orientación se relaciona con aprender a resolver problemas y formular preguntas que validen la eficacia de herramientas matemáticas a través del lenguaje. En nivel secundaria particularmente, adquiere auge el estudio del lenguaje algebraico y es en el tercer grado donde se aborda el contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática.

#### **1.1.3.1 Marco curricular**

La ecuación cuadrática es un contenido matemático escolar que adquiere su auge en el tercer grado de secundaria. El Programa de Estudios 2011 Educación Básica Matemáticas (SEP, 2011) presenta este contenido en cuatro de cinco bloques pertenecientes al eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico, dentro del tema: Patrones y ecuaciones. Los contenidos declarados para este tema se muestran a continuación:

- BLOQUE I.- Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.



- BLOQUE II.- Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas utilizando factorización.
- BLOQUE III.- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.
- BLOQUE V. Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Para los contenidos anteriormente mencionados se propone el aprendizaje esperado: “el estudiante será capaz de resolver problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado”. También, éste abona a uno de los propósitos de la educación secundaria para el estudio de las matemáticas, en donde se espera que los estudiantes: “modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones” (SEP, 2011 p. 14). Es así como el contenido de ecuación cuadrática se encuentra presente prácticamente en todo el tercer grado de secundaria. Por lo que se considera como un contenido central para este nivel educativo.

Otro factor que se encuentra articulado con el papel de la ecuación cuadrática en el ámbito educativo son los estudios anteriores que se han realizado al trabajar con este contenido. Lo anterior servirá para tener referentes de las dificultades que se han hecho presentes al trabajar con este contenido matemático escolar.

### **1.1.3.2. La enseñanza de la ecuación cuadrática**

En el nivel secundaria se destaca el estudio del álgebra, considerándola como una generalización de la aritmética. Algunos problemas que se han encontrado en la revisión de los libros de texto y que se proponen a los alumnos son: encontrar la edad de una persona; pensar un número desconocido, agregar un valor conocido y obtener otro como resultado. Estos problemas generalmente los alumnos los abordan a partir de su conocimiento aritmético previo.

En la educación básica se maneja el álgebra como una generalización de la aritmética, aspecto que se muestra en el Programa de Matemáticas de Secundaria, específicamente donde se hace mención que el campo de pensamiento matemático “articula y organiza el tránsito de la aritmética, la geometría, la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje

algebraico” (SEP, 2011, p. 49). Lo que puede ser una de las explicaciones de por qué los alumnos en todo momento quieran hacer uso de la aritmética para resolver problemas en lugar de utilizar el álgebra.

Esto se debe a que existe en la escuela una “cultura aritmética” donde se evidencia la carencia de conceptos, operaciones y propiedades necesarias para el estudio del álgebra (Escalante y Cuesta, 2012; Ursini y Trigueros, 2006). Esta dificultad se presenta al momento de enseñar a los estudiantes tópicos algebraicos donde se priorizan los métodos procedimentales pues “la memorización de algoritmos para la optimización del tiempo en la resolución de problemas es una problemática común en la enseñanza de las matemáticas” (Gómez, 2009, p. 47).

Lo mismo ocurre con la enseñanza de las ecuaciones ya que la falta de comprensión conceptual de los procedimientos que realizan los estudiantes provoca dificultades cuando se presentan operaciones con incógnitas. En especial cuando no comprenden el significado de ecuación, qué implica su solución, cuáles son las partes o elementos de la ecuación, por mencionar algunos aspectos que conducen a dificultades. Al respecto, Filloy y Kieran (1989) mencionan algunos errores que comenten los alumnos.

- a) *Forma de ver al signo “=”*. La idea de concebir al signo como una “señal de hacer algo” antes que un símbolo de equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación. El pensar que el lado derecho debería indicar el resultado -esto es,  $4 + 3 = 7$ - les permite dotar de significado a ecuaciones tales como  $2x + 3 = 7$ , pero no a ecuaciones tales como  $2x + 3 = x + 4$ . El que los estudiantes conciben el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado les lleva a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad.
- b) *Dificultades con la concatenación y algunas convenciones de la notación algebraica*. En aritmética la concatenación denota adición ( $37 = 30 + 7$ ) sin embargo en álgebra la concatenación significa multiplicación ( $4b$  significa  $4xb$ ), aspecto que puede conducir a los alumnos a malinterpretar el sentido de los términos algebraicos.
- c) *Falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que usan para resolver problemas*. En este sentido se hace referencia a que el estudiante en la transición al pensamiento algebraico presenta serios errores operacionales, estructurales y procesuales de los objetos matemáticos que dificultan la solución de ecuaciones.

(p. 230)

Tomando en cuenta esta información para uno de los organizadores del currículo que comprende el análisis didáctico, el análisis cognitivo considera el estudio de los errores que los estudiantes pueden cometer al momento de realizar las actividades de aprendizaje. Asimismo, las dificultades que subyacen a esos errores para permitir su interpretación. Por esta razón,

dentro de esta fase se considerarán las dificultades relacionadas al álgebra y a las ecuaciones que se hagan presentes en este tópico. En el capítulo correspondiente al análisis cognitivo se profundizará más sobre estos errores y dificultades.

Ahora, como una herramienta de apoyo y que servirá de referencia al análisis de instrucción, a continuación se presentan algunas investigaciones que han tratado estas dificultades mediante propuestas basadas en la matemática educativa. En el caso de la ecuación cuadrática se han diseñado propuestas de intervención que dicen favorecer la enseñanza de este contenido matemático escolar. Algunos, a través de la utilización de material didáctico como el “*puzzle* algebraico” (Gustin y Avirama, 2014); otros mediante la evaluación de la idoneidad didáctica del tema (Posadas, 2013); promoviendo la formulación de ecuaciones cuadráticas de una incógnita (Gozde y Kursat, 2015); presentando las ecuaciones de segundo grado desde un enfoque babilónico (Radford y Guérette, 1990); así como estableciendo una revisión de la noción de ecuación cuadrática en los estudiantes (Liebenberg, Linchevski, Sasman, Oliver, Lukhele y Lamberchts, 1999). Estas investigaciones dan evidencia de posibles opciones que podrían utilizar los profesores en la enseñanza de la ecuación cuadrática.

Aunque las propuestas incluyen en algunos casos evidencias de su uso con estudiantes, generalmente se hacen con fines para la investigación y por lo tanto no obedecen a los tiempos e intereses del ámbito escolarizado. Luego, pese a la existencia de propuestas para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en este contenido, en muchos casos son desconocidas para los profesores y cuando se conocen, es difícil su implementación en el aula de matemáticas. Esta situación puede generar que la enseñanza se fundamente en la experiencia o esté sujeta a los libros de texto provocando una práctica rutinaria mediante una planificación global. Es decir, al ver la planificación y a la enseñanza como una secuenciación de contenidos matemáticos.

Las secciones anteriores permiten establecer aquellos elementos que delimitan el problema planteado en este informe de desarrollo profesional. Primero, la importancia de la planificación que se presenta desde el momento en que se aborda un contenido matemático escolar y el profesor toma conciencia de las posibles limitaciones que podría enfrentar el alumno cuando se le proponen las actividades diseñadas. Para el caso de la ecuación cuadrática, esto implicaría tomar en cuenta las dificultades y errores presentes en la enseñanza del álgebra en el nivel secundaria, para así, evitar caer en prácticas que prioricen los procedimientos sino más

bien en la comprensión conceptual de estos, y cómo estos elementos se articulan para poder apoyar al profesor en el desarrollo y evaluación de una clase de matemáticas para un tema específico.

En segundo lugar, el promover el análisis didáctico como una herramienta que permite realizar de manera sistemática la gestión de una clase. En particular se afirmó que es un marco teórico-metodológico que por medio de sus cuatro análisis permite orientar las acciones del profesor para organizar la enseñanza. En este caso, se comienza con la determinación del contenido que se va a tratar. Luego, considerando las capacidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes estableciendo conjeturas sobre los posibles caminos a los que pueden recurrir y las limitaciones que se pueden presentar. Después, con base en lo anterior, realizando el diseño de las tareas para su puesta en práctica. Finalmente, analizando las actuaciones del profesor y los estudiantes para obtener las reflexiones de todo el proceso.

Lo expuesto en torno a la ecuación cuadrática me permitió problematizar y situar este contenido dentro de mi práctica educativa. En este caso, se identifica que es un contenido central en el grado en el que me desempeño como profesor y me brinda referentes que pudieran permitirme afrontar obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de este contenido con mis alumnos de tercer grado de secundaria. El resultado esperado además de mi desarrollo profesional es promover de manera exitosa el desarrollo de capacidades y competencias específicas para este contenido.

## **1.2. Planteamiento del Problema**

Las situaciones anteriores muestran, por un lado, una problemática relacionada con la necesidad de metodologías basadas en conceptos y herramientas de la Matemática Educativa que puedan ser utilizadas por los profesores para la gestión de una clase de matemáticas. De tal manera que incluyan herramientas para promover que se organice el conocimiento matemático y didáctico de los contenidos; además de brindar elementos para el análisis sobre el diseño, implementación y evaluación de actividades en torno a los contenidos a enseñar. Por otro lado, está la problemática relacionada a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática. Aquí se identificó que en estos procesos de enseñanza se priorizan los tratamientos procedimentales y rutinarios alejados de una reflexión conceptual.

Además, se observa que el problema no parece ser la falta de propuestas sino la manera en la que podrían ser consideradas por los profesores en su práctica docente diaria. Es decir, “la literatura presenta propuestas y ejemplos realizados por investigadores que asumen el papel de profesor, pero no dan necesariamente luces sobre cómo un profesor puede utilizarla para su trabajo diario en el aula” (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 95).

El problema sobre la falta de guía de cómo los profesores pueden utilizar las propuestas originadas por las investigaciones puede atenderse con el análisis didáctico y a su vez retroalimentarse con las experiencias de profesores que decidan aplicar el análisis didáctico a sus prácticas. Desde esta perspectiva y con este marco teórico metodológico, se considera una opción con la cual el profesor “identifica, organiza y selecciona los significados de un tema matemático que considere relevantes a efectos de la planificación de la instrucción” (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 37). Lo anterior, a partir de un análisis del conocimiento previo y del contenido en cuestión con el fin de organizar las competencias y capacidades que se espera que los estudiantes desarrollen.

Los procesos de selección y adecuación de las propuestas surgidas de la investigación deben ser contrastadas con los significados y objetivos de aprendizaje planteadas en los marcos de referencia del sistema educativo en el que se desempeña el profesor. Lo anterior debe partir con la identificación de las capacidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes en torno a la ecuación cuadrática. Con base en lo anterior se diseñan, analizan y seleccionan las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje en la instrucción. Finalmente, se requiere de un proceso evaluativo donde el profesor determine las capacidades que los estudiantes han desarrollado y las dificultades que se manifestaron durante la instrucción. Este proceso es el llamado ciclo del análisis didáctico; incluyendo los cuatro organizadores del currículo matemático escolar.

En este informe de práctica de desarrollo profesional se propone que todas las etapas del análisis didáctico para el tema de ecuación cuadrática sean establecidas desde la mirada del profesor. Las reflexiones de este proceso de intervención docente permitirán, en nuestra opinión, identificar cuáles son las ventajas y desventajas de aplicar este marco teórico-metodológico desde una situación escolarizada.

Para clarificar los propósitos de este informe de intervención docente se presentan a continuación la pregunta de desarrollo profesional, el objetivo general y los objetivos específicos.

### **1.2.1. Pregunta de desarrollo profesional**

¿Cuáles son los resultados en mi práctica docente de implementar el análisis didáctico como herramienta de intervención educativa en el caso de la enseñanza-aprendizaje de la ecuación cuadrática?

### **1.2.2. Objetivo General y Particulares**

Experimentar el diseño, ejecución y evaluación de la unidad didáctica del contenido de ecuación cuadrática por medio del análisis didáctico como un medio para mejorar mi práctica docente.

#### *Objetivos particulares*

1. Identificar y organizar los significados y objetivos de aprendizaje del contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática en el nivel secundaria.
2. Determinar las capacidades y dificultades asociadas al aprendizaje de la ecuación cuadrática con base en las hipótesis de cómo los estudiantes aprenden.
3. Diseñar, analizar y seleccionar las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje en la instrucción para el tema de ecuación cuadrática en un grupo de 3ro. de secundaria en la ciudad de Zacatecas.
4. Determinar las capacidades que los estudiantes han desarrollado y las dificultades que se manifestaron para establecer reflexiones de todo el proceso desde la mirada del profesor.
5. Reflexionar sobre los resultados de la experimentación y su incidencia en mi práctica docente.

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

La revisión de la literatura me ha permitido tomar conciencia sobre la importancia de la planificación y sus efectos en el desarrollo y evaluación de una clase. Lo anterior, debido a que funciona como un referente para la organización y sistematización de las actividades de aprendizaje.

La planificación es entonces un elemento que permite orientar la actuación del profesor, ya que brinda elementos para el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas. Asimismo, permite identificar los objetivos, contenidos, metodología y evaluación para promover que sus estudiantes aprendan determinados contenidos y se contribuya en la promoción de competencias descritas en el currículum actual.

Desde esta perspectiva, existe un marco teórico-metodológico llamado análisis didáctico, el cual se entiende como las actividades que un profesor debería realizar al momento de diseñar, ejecutar y evaluar una clase y se configura por organizadores del currículum. Estos organizadores son herramientas conceptuales y metodológicas que le permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar información sobre los múltiples significados del contenido matemático al plantear los objetivos de aprendizaje descritos en los planes de estudio y libros de texto.

Desde este marco teórico-metodológico, un significado está compuesto por 1) los modos en los que se establecen relaciones con otros términos matemáticos, 2) las diferentes formas en las que el término y las relaciones se pueden representar y 3) los fenómenos que sustentan el concepto.

Lo anterior se realiza basándose en cuatro análisis propuestos por Gómez (2009) y son:

- El *análisis de contenido*, como procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto.
- El *análisis cognitivo*, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje;
- El *análisis de instrucción*, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de instrucción; y
- El *análisis de actuación*, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

(p. 475)

Los análisis mencionados anteriormente conforman un ciclo que comienza con la determinación del contenido a tratar, los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr, la percepción del docente acerca de la comprensión de los escolares teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional. Esto servirá de referencia a cada uno de los organizadores que componen el ciclo del análisis didáctico.

Cabe mencionar otro componente que constituye a este ciclo: el análisis conceptual (Rico, 2013), el cual se ajusta a una dialéctica de análisis-síntesis, por lo que implica realizar una revisión de los conceptos y términos, para posteriormente realizar una aproximación histórico-crítica y génesis epistemológica, de manera que la síntesis se presenta como los conceptos y red de significados que articulan un tema.

A continuación, se describirá cada análisis que conforma el marco teórico metodológico adoptado. Lo anterior permitirá tener mayor claridad respecto a los organizadores del currículo que fueron utilizados en el proyecto de intervención docente y en donde el tema matemático a desarrollar fue la ecuación cuadrática.

## **2.1 Análisis de contenido**

El contenido matemático escolar es el eje central del análisis didáctico. El análisis de contenido matemático de referencia es un procedimiento en el que el profesor identifica, organiza y selecciona los significados que considera relevantes para un tema matemático, a efectos de la planificación de la instrucción.

De esta manera, el análisis de contenido es un organizador curricular que se subdivide en categorías que permiten analizar un contenido matemático escolar con el fin de abordar los significados de un concepto. Estas categorías son:

***Estructura conceptual*** con la cual se consideran los conceptos, los procedimientos y las relaciones entre ellos, así como tres aspectos del currículo escolar (Gómez, 2009):

- *Estructuras matemáticas involucradas*: Todo concepto matemático está relacionado con al menos dos estructuras matemáticas: a) la estructura matemática que el concepto figura, y b) las estructuras matemáticas de las que él forma parte.
- *Relaciones conceptuales*: Las relaciones que se establecen entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto figura, los objetos que son casos particulares de dicho concepto.



- *Relaciones de representaciones*: Consisten en la exploración de los significados de un concepto que requiere de los sistemas de representación ya que a través de ellos es posible identificar la forma en la que se presenta el concepto.

(p. 477)

**Sistemas de representación** con el cual se consideran los sistemas de signos que permiten designar un concepto dado que un mismo concepto o estructura matemática se puede representar en diferentes sistemas de representación. La exploración de los significados de un concepto requiere de los sistemas de representación, puesto que con ellos es posible identificar los modos en que el concepto se presenta. Las operaciones entre signos son caracterizadas en las siguientes categorías según Gómez (2007):

1. *Creación y presentación de signos o expresiones*. Operación que permite determinar expresiones válidas e inválidas.
2. *Transformación sintáctica invariante*. Transformación de un signo en otro dentro de un mismo sistema de representación sin que el objeto matemático designado por estos signos cambie.
3. *Transformación sintáctica variante*. Transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, en la que el objeto matemático designado cambia.
4. *Transformación entre sistemas de representación*. Operación que se refiere al procedimiento en el cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto y que pertenecen a diferentes sistemas de representación.

(p. 43)

**Fenomenología**, ésta se apoya en información proveniente de la estructura conceptual y los sistemas de representación ya que proviene de la descripción de los fenómenos para los que es el medio de organización y de la relación que el concepto o la estructura tiene con esos fenómenos. La fenomenología es un “elemento constitutivo del significado de un concepto [que surge] de una visión funcional del currículo, en virtud del cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto” (Gómez, 2007, p. 50). Desde esta perspectiva resulta imprescindible en la planificación establecer una relación entre la estructura matemática en cuestión y los grupos de fenómenos asociados a ella. La identificación de los fenómenos es el primer paso para el análisis fenomenológico, es útil comenzar con un listado de fenómenos, donde para realizarlo es útil preguntarse sobre los usos de tema y problemas donde se utiliza, para agruparlos en a) contextos fenomenológicos y b) subestructuras y c) relación entre contextos fenomenológicos y subestructuras.

- *Contextos fenomenológicos*: Se refiere el modo en que se usan los conceptos en una o varias situaciones, a través de dos preguntas:
  - ¿Para qué se usa el tema matemático?
  - ¿A qué problemas da respuesta el tema?
- *Subestructuras*: Consiste en considerar la estructura conceptual del tema, identificar subestructuras de esa estructura conceptual y explorar si algunas de esas subestructuras organizan grupos de fenómenos.
- *Relación entre contextos fenomenológicos y subestructuras*: En el listado de fenómenos se pueden establecer cómo esos fenómenos se agrupan en contextos fenomenológicos porque comparten las mismas características estructurales. También se pueden identificar las subestructuras del tema y establecer qué subestructura corresponde a cada fenómeno.
 

(Gómez, 2007, p. 50-55)

La relación entre la fenomenología, los sistemas de representación y la estructura conceptual asume gran importancia a la hora de considerar los procesos de modelización. Dentro de estas tareas se pone de manifiesto la complejidad de significados de la estructura matemática, los posibles significados y las relaciones entre ellos.

## 2.2 Análisis cognitivo

En este análisis, el profesor debe describir qué competencias desea que desarrollen sus estudiantes considerando la estructura matemática revisada anteriormente en el análisis de contenido. También, debe considerar los errores que pueden cometer los estudiantes al trabajar con dicho contenido y cuáles dificultades de aprendizaje hay detrás de ellos.

Con estos referentes, se organiza y fundamenta el análisis cognitivo y se entienden como:

- 1) *Competencias*: Es lo que el profesor desea que sus estudiantes sean capaces de hacer a partir de los contenidos y a cómo pueden movilizar y usar los conocimientos aprendidos.
- 2) *Errores*: Comprende el estudio de los errores a los que los estudiantes pueden incurrir en la ejecución de tareas relacionadas con el tópico. Asimismo, al análisis de las dificultades que subyacen esos errores y permiten su interpretación.

El análisis cognitivo debe atender tanto lo que hacen y pueden hacer los estudiantes, como también en los errores que cometen.

Así, en este análisis, el profesor, debe analizar, describir y caracterizar:

- qué competencias deben desarrollar los estudiantes de secundaria mediante un tópico;

- en qué grado pueden desarrollarse tales competencias;
- en qué errores pueden incurrir los escolares y qué dificultades subyacen a esos errores,
- cómo relacionar esas dificultades con un desarrollo inadecuado o incompleto de alguna de esas competencias.

(Lupiáñez y Rico, 2008, p.3)

### 2.3 Análisis de instrucción

El análisis de instrucción, como parte del análisis didáctico, es producto del análisis de contenido y cognitivo, pues el fin de éste es el diseño de tareas matemáticas que constituyen la unidad didáctica de manera que estas tareas deben ser compatibles con ambos análisis.

En el análisis de instrucción entonces “vamos a estudiar de qué medios dispone el profesor para lograr sus fines” (Flores, Gómez y Marín 2013, p.1), aquí, el foco de atención es la enseñanza. Es decir, se trata de hacer una descripción de los medios que va a poner en práctica el profesor para lograr los propósitos de aprendizaje, tomando como base los análisis anteriores. Como organizador del currículo, el análisis de instrucción se basa en las siguientes secciones:

**Medios de enseñanza.** - Los materiales y recursos permiten al profesor plantear tareas para que los alumnos utilicen los conceptos matemáticos. Así, los alumnos pueden aprender a factorizar ecuaciones haciendo uso de material didáctico como las tabletas algebraicas que incluyen las medidas de sus lados para contrastar la relación entre el producto de la longitud de sus lados y la expresión algebraica que representa el área, aspecto que los lleva a acudir a la fenomenología de la factorización para resolver la tarea.

- *Recursos.* Se entiende por recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el profesor decide incorporar en sus enseñanzas.
- *Materiales.* Los materiales se distinguen de los recursos porque, inicialmente, se diseñan con fines educativos. En general, un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones. Por ello no hay una frontera que delimite claramente qué es un material y qué es un recurso.

**Tareas matemáticas.** - Según Marín (2010, citado por Flores, Gómez y Marín, 2013, p. 10), llamamos tarea a una propuesta para el alumno que implica una actividad de él en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje. Marín señala que no se incluirá en el término tarea las actividades en las que el

profesor no ha planteado explícitamente las acciones que se le demandan al alumno y no puede, por ello, evaluar su consecución.

***Componentes de la tarea matemática.*** - Para precisar el concepto de tarea matemática debemos comenzar por examinar de qué se componen. Los componentes de ésta, según Flores, Gómez y Marín (2013, p. 12) son:

1. La formulación de la tarea, es decir, los estímulos que facilitan que los alumnos lleven a cabo la actividad de aprendizaje.
2. La meta de la tarea matemática, que establece de qué manera la tarea pretende contribuir a los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.
3. Un conjunto de materiales y recursos disponibles.
4. Un conjunto de capacidades que se activan al usar los materiales y recursos para lograr la meta.
5. El contenido matemático que está implicado en la tarea, tanto en su intención educativa como el que es necesario para resolver la tarea matemática.
6. La situación de aprendizaje, como el contexto en el que adquieren significado las acciones que se contemplan en la tarea.

Dado que las tareas matemáticas son las protagonistas del análisis de instrucción, es necesario realizar cuatro pasos:

- caracterizar las tareas, es decir, determinar sus componentes;
- analizar las tareas, es decir, examinar de qué forma puede contribuir al logro de las expectativas de aprendizaje y a la superación de las limitaciones de aprendizaje;
- modificar las tareas para que se ciñan mejor a estos propósitos del profesor; y, finalmente,
- diseñar la secuencia de tareas y analizarla de cara a su posible modificación.

Todas estas acciones se realizan utilizando diferentes criterios como:

- En primer lugar, las tareas deben ser compatibles con el análisis del contenido, por lo que deben estar vinculadas al análisis y selección de los contenidos realizados anteriormente.
- Las tareas tienen que contribuir a las expectativas de aprendizaje descritas en el análisis cognitivo, y deben afrontar las limitaciones de aprendizaje, reflejadas en las dificultades o errores. Por lo tanto, tenemos que fijar las condiciones de realización de las tareas, así como su grado de complejidad.
- Las tareas permiten incorporar recursos y materiales, que facilitan poner en juego capacidades como las establecidas en el análisis cognitivo del tema, optimizando los propósitos de aprendizaje del mismo.
- La reunión de todas las tareas previstas debe constituirse en un conjunto coherente en la planificación de las secuencias de aprendizaje, adecuándose a los caminos de aprendizaje establecidos en el análisis cognitivo.
- También las tareas deben concretar y ser compatibles con la forma de llevar a cabo la gestión de la clase, de manera que sea posible y que se relacione de manera más adecuada con las expectativas de aprendizaje.

La sección que completa el análisis de instrucción es:

***Secuenciación de tareas en la unidad y diseño de una clase.*** - Una vez establecidas las tareas a realizar en el transcurso de la unidad didáctica, se procede a organizarlas en secuencias que correspondan a las sesiones de clase. Por tanto, la finalidad de este último apartado es organizar las tareas en la unidad didáctica, identificar las sesiones de clase de que se compone, distribuir las tareas en estas sesiones y finalmente diseñar una sesión de clase.

La secuencia de enseñanza tiene que guardar ciertas regularidades, que permitan al alumno saber qué se va a trabajar, qué se espera que aprenda al final del estudio, que le lleve a distinguir qué aprendizaje se ha realizado, a qué contenido y objeto matemático corresponde, etc.

Giné y Parcerisa (2003, citado en Flores, Gómez y Marín, 2013) nos recuerdan que el ritmo habitual de un proceso formativo debe guardar una cierta secuencia que ellos concretan en tres fases:

- La fase *inicial*, en la que el fin es poner al alumno en situación de aprender; comprende la presentación del tema y la recogida de información sobre las concepciones previas de los alumnos.
- La fase *de desarrollo*, en la que se realizan los aprendizajes, mediante la ejecución de las tareas.
- La fase *de cierre*, en la que se estructuran y consolidan aprendizajes, además de examinar en qué grado se han logrado los objetivos previstos. (p. 37).

El papel de la actividad o de la tarea no es objetivo, sino que depende de las condiciones en que se realizan, de las tareas y aprendizajes anteriores, etc. El grado en que se contextualiza el contenido, los elementos de estímulo y motivación, y el peso que tiene el contenido a aprender en cada tarea nos puede dar una indicación de su función en la secuencia. Por tanto, la función dependerá de sus potencialidades, pero también de las demás tareas.

#### **2.4 Análisis de actuación**

De los organizadores del currículo, el análisis de actuación “está vinculado a la evaluación, sin embargo, no es equivalente a ella” (Gómez, 2007, p. 94). Dependiendo de la concepción que los profesores tengan de la evaluación, la relación entre estos dos procedimientos puede ser más o menos estrecha.

Gómez (2007) menciona que, en el análisis de actuación, se pueden comparar las previsiones sobre lo que se esperaba que sucediera en el aula con lo que realmente sucedió, por ello se puede:

- Establecer en qué medida se lograron los objetivos de aprendizaje, al identificar los caminos de aprendizaje que los escolares ejecutaron y en qué medida las capacidades correspondientes contribuyeron a las competencias que consideraba pertinentes;
- Revisar si las áreas introdujeron a los escolares a ejecutar caminos de aprendizaje en los que el profesor preveía que ellos pudieran manifestar dificultades, si esas dificultades se manifestaron (los escolares incurrieron en errores al ejecutar esos caminos de aprendizaje) y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades;
- Identificar aquellos caminos de aprendizaje (y capacidades) que se pusieron en juego y aquellos que no; y
- Reconocer las capacidades, caminos de aprendizaje, dificultades y estrategias no previstos y que se manifestaron en la práctica.

En este análisis entonces, se pretende ver si los estudiantes alcanzan los objetivos de aprendizaje previstos, si las tareas que se diseñaron, al ser compatibles con el análisis de contenido y cognitivo, contribuyen al logro de tales objetivos y a la superación de errores, y finalmente, si la unidad didáctica contribuye al logro del aprendizaje esperado.

Para obtener información certera, analizar la unidad didáctica, y mi actuación docente, se pueden adoptar los siguientes aspectos para guiar la observación y el registro de la información citados en Romero y Gómez (2015):

- *Compartir la meta de la tarea con los escolares.* ¿Resultó significativo compartir la meta de la tarea y dotarla de significado con respecto a los criterios de logro compartidos al principio del objetivo?, ¿resultó efectivo? ¿por qué?, ¿comprendieron la meta los escolares y lograron autoevaluarse con respecto a ella, ¿en qué medida?
- *Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego.* Las secuencias de capacidades identificadas dentro de los caminos de aprendizaje previstos de una tarea deben facilitar el proceso de observación de en qué medida y de qué manera la clase y/o distintos grupos de alumnos dentro de ella logran las expectativas de aprendizaje previstas para la tarea en cuestión. También ha de observarse los errores que salieron a la luz cuando los estudiantes abordaron las tareas. ¿Se manifestaron los errores previstos a lo largo de los caminos? ¿Surgieron otros no previstos? ¿Cuáles? ¿En qué grupos de estudiantes?
- *Ayudas.* Para cada tarea se diseñaron ayudas para proporcionar en el caso de que los estudiantes incurrieran en los errores previstos. ¿Cuáles se aplicaron? ¿Hizo falta idear nuevas ayudas? ¿Por qué? ¿Se logró algún progreso en la superación de los errores? ¿En qué medida?
- *Materiales y recursos.* El diseño de algunas tareas contempla la utilización de algún material o recurso. Su uso por parte de los alumnos, ¿transcurrió de la forma prevista? ¿aparecieron ventajas o inconvenientes que no se habían tenido en cuenta?, ¿qué repercusiones tuvo a nivel cognitivo?, ¿y a nivel afectivo?
- *Agrupamiento y gestión de la comunicación.* Los agrupamientos previstos, ¿pudieron llevarse a cabo y resultaron adecuados para propiciar el aprendizaje? Las preguntas específicas para fomentar el desarrollo y la expresión del pensamiento matemático durante la tarea, ¿dieron juego durante las interacciones?, ¿hubo dificultades al respecto?, ¿qué juego dieron? La comunicación matemática es una competencia que puede tardar en desarrollarse, puesto que no suele practicarse en las aulas habitualmente. En este sentido, ¿se notó un progreso con respecto a tareas anteriores?, ¿de qué tipo?
- *Temporalización.* ¿Transcurrió la tarea según los tiempos previstos en el caso de sus distintas partes? ¿Hubo que acelerar el ritmo de la clase para ajustarse a lo previsto o, por el contrario, los alumnos terminaron antes de lo planificado para la tarea o alguno/s de sus apartados? ¿Resultó conveniente alargar el tiempo dedicado a la tarea, en aras de lograr una mayor asimilación por parte del alumnado? En caso afirmativo, ¿qué modificaciones implicó en la secuencia de tareas?
- *Complejidad.* ¿Tuvo la tarea la complejidad prevista para la clase en su conjunto? ¿Hubo alumnos o grupos de alumnos para los que resultó más o menos compleja de lo previsto? ¿Por qué?

- *Significatividad.* Para la tarea se hicieron previsiones con respecto a la significatividad que podía tener para los alumnos e incluso se introdujeron elementos para fomentarla. ¿Cómo de significativa les resultó la tarea? ¿Surtieron el efecto deseado los aspectos introducidos? En caso negativo, ¿por qué?
- *Función de la tarea dentro de la secuencia.* Las previsiones que se hicieron con respecto a la función de la tarea y su ubicación en la secuencia, ¿resultaron acertadas?, ¿qué variaciones hubo? ¿por qué?

(p. 14)



### CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN EL CONTENIDO DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

El análisis didáctico se configura de “organizadores del currículo” (Rico, 1997a), los cuales son herramientas conceptuales y metodológicas que le permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar información sobre los múltiples significados de la estructura matemática. Estos organizadores, desde un punto de vista metodológico orientan al análisis didáctico comenzando con la realización de una planificación determinando un objetivo de aprendizaje para realizar un plan de actividades y ponerlas en práctica para posteriormente evaluar los resultados (Figura 1).

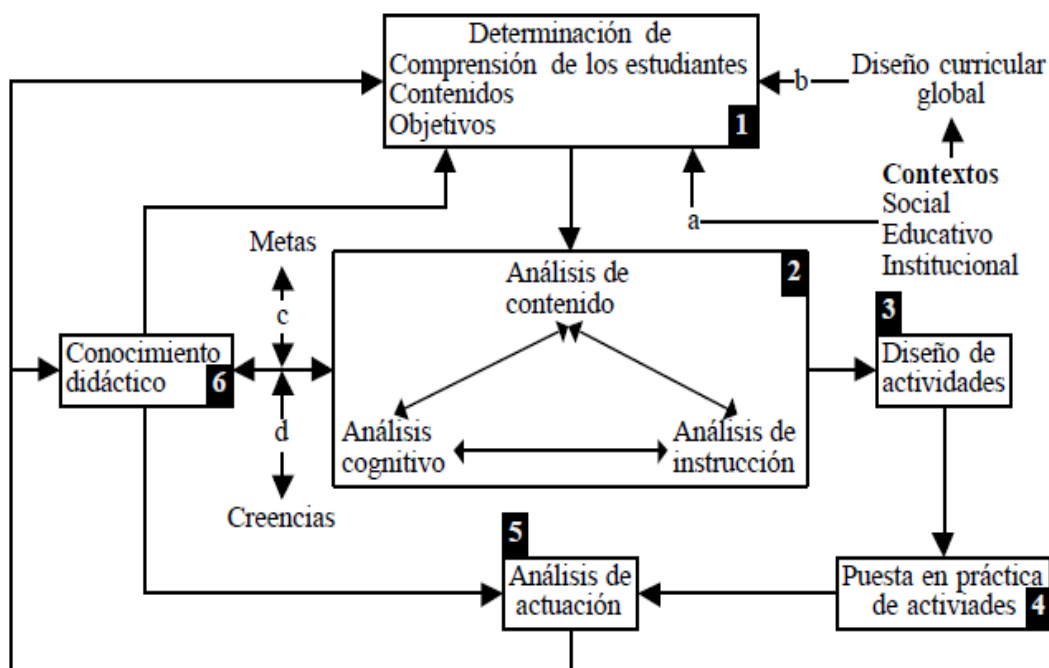


Figura 1. Ciclo del análisis didáctico Gómez (2009, p. 476)

Para dar una explicación al diagrama del ciclo del análisis didáctico (Figura 1) propuesto en Gómez (2009):

1. El ciclo del análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr. Esto, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los estudiantes y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1).
2. Con esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo, al identificar y

organizar los múltiples significados del concepto objeto de la instrucción. La realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende y debe ser compatible con los resultados del análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de los análisis (cuadro 2).

3. En el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados de referencia y, con base en ellos y en los objetivos, identifica las capacidades que pretende desarrollar en los escolares. También formula conjeturas sobre los posibles caminos por los que se puede desarrollar su aprendizaje cuando ellos aborden las tareas que conforman la instrucción. El profesor utiliza esta información para diseñar, evaluar y seleccionar estas tareas. La selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de éstas, puede llevar a un nuevo ciclo de análisis (relación entre cuadros 2 y 3).

4. El profesor pone en práctica las actividades seleccionadas o diseñadas (cuadro 4) y, al hacerlo,

5. Analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5).

6. Finalmente, el conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que un profesor pone en juego durante este proceso y que se ve retroalimentado cada que se activa el ciclo.

(p. 476)

Luego, en el diagrama de la Figura 1 se presenta al análisis didáctico como un proceso cíclico debido a que mientras se trabaja en un análisis, por ejemplo, el análisis cognitivo, es posible realizar una revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción, ya que “su formulación debe ser compatible con los resultados del análisis de contenido y cognitivo, pero a su vez se puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis” (Gómez, 2009 p. 476), permitiendo así un tránsito entre dichos análisis según las necesidades que se vayan presentando en el proceso.

El objetivo de esta investigación es la mejora de la práctica docente, por esta razón, el producto de los análisis antes mencionados generó lo siguiente: Análisis de contenido, cognitivo y de instrucción: una planificación con la cual se incidió en la enseñanza de un contenido después de haber analizado el contenido en sí, las expectativas de aprendizaje, las limitaciones y las tareas que contribuyen al logro de los aprendizajes esperados.

En el análisis de actuación, se realizó una reflexión de todo el proceso donde se valoraron tanto las fortalezas como las áreas de oportunidad que se presentaron desde el diseño, puesta en práctica y evaluación de la unidad didáctica y de esta manera hacer ciertos ajustes para mejorarla.

### **3.1 Diseño del proyecto de desarrollo profesional**

Para poder realizar el diseño de este proyecto de desarrollo profesional es necesario poner en claro el objetivo del mismo: *Experimentar el diseño, ejecución y evaluación de la unidad didáctica del tema de ecuación cuadrática por medio del análisis didáctico como un medio para mejorar mi práctica docente.* Dado que se realizó en una escuela secundaria, desde la matemática educativa, demanda considerar los aspectos que inciden en este ámbito que condicionan las interacciones que se llevan a cabo dentro de este contexto. De aquí que se realice con un enfoque cualitativo que:

Reconoce que la realidad se construye por los individuos al interactuar en su mundo social y se centra en comprender el significado que la gente ha construido; es decir, en reconocer cómo hacen sentido de su mundo y de las experiencias que tienen en él (Campo y Restrepo, 2002, p. 86).

Lo anterior puesto que es una práctica de desarrollo profesional; lo que demanda el análisis de situaciones que incide en el aprendizaje de un contenido matemático escolar que en este caso es la ecuación cuadrática. Se retoma este enfoque porque como mencionan Marshall (2011) y Preissle, (2008, citado en Hernández, Fernández y Baptista, 2006) “El enfoque cualitativo es recomendable cuando el tema de estudio ha sido poco explorado o no se ha hecho investigación al respecto en ningún grupo social específico” (p. 358). Esto porque como se ha mencionado anteriormente, pese a que el análisis didáctico presenta varios alcances, no se han encontrado estudios en los que se lleve a cabo con el contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática, asimismo que la experimentación se busca realizar en una situación real.

De esta manera, se considera se cumplirán los objetivos propuestos ya que se pretende que, en mi papel como profesor en activo, sea yo quien diseñe, lleve a la práctica y evalúe una propuesta de intervención educativa con el uso de la herramienta teórico-metodológica del análisis didáctico para entonces valorar el papel de éste en mi desarrollo profesional y determinar alcances que enriquezcan los resultados de la investigación relativos a su implementación en una situación real.

### **3.2 Descripción de los alumnos del tercer grado**

Este proyecto de desarrollo profesional se llevó a cabo en una institución educativa del nivel secundaria que se encuentra ubicada a orillas del centro histórico de la ciudad de Zacatecas. Esta

región presenta un índice de pobreza media-baja; además, el 80% de la población estudiantil proviene de familias disfuncionales. Estos indicadores según encuesta realizada por Trabajo Social de la misma institución. La escuela secundaria lleva por nombre “Emiliano Zapata” y es la institución donde yo laboro como profesor de matemáticas desde el 15 de agosto de 2015.

La propuesta fue implementada durante el ciclo escolar 2016-2017, en el cual me encontraba dando clases en el tercer grado de secundaria, por lo que se aplicó a un grupo de este grado. Este grupo estaba formado por un total de 22 alumnos, 11 hombres y 11 mujeres, con edades entre los 14 y 15 años.

El tema que se trabajó en esta propuesta es la ecuación cuadrática por las siguientes razones: 1) es una experimentación en una situación real por lo cual se tiene que escoger un tema calendarizado en el ciclo escolar 2016-2017, 2) es uno de los contenidos centrales de este nivel ya que se aborda en 4 de los 5 bloques correspondientes a este ciclo y 3) es un contenido en el que he detectado que los estudiantes presentan dificultades. Por mencionar una de ellas la dificultad de abordar a las tareas algebraicas desde la aritmética, pues se evidencia que para los estudiantes el álgebra no funge como una herramienta, por lo cual, sus componentes (ecuaciones, incógnitas, exponentes) no son relevantes.

Por esta razón, en mi labor como docente, mi interés reside en la utilización de una herramienta metodológica que permita organizar y gestionar mi práctica docente tomando en cuenta las limitaciones en la enseñanza de un contenido matemático escolar y contribuir a su tratamiento. En este momento, es donde el análisis didáctico cobra relevancia, ya que “es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, S/F p. 3).

Dado que mi estudio es una práctica de desarrollo profesional que está guiada por un marco teórico-metodológico, el diseño está orientado por la realización de cuatro análisis que componen al análisis didáctico. A continuación, en los siguientes capítulos se presentan resultados de cada uno.

## CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE CONTENIDO DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

La naturaleza de esta investigación es una práctica de desarrollo profesional cuyo objetivo general es la experimentación en una situación real con la herramienta teórico-metodológica del análisis didáctico. Éste comienza con el análisis de contenido, donde el eje central es la organización de los múltiples significados del tema matemático escolar, que en este caso es la ecuación cuadrática. En este capítulo se realiza el análisis de contenido de la ecuación cuadrática desde las categorías propuestas en Rico (2013).

### 4.1 Análisis conceptual

Rico (2013) menciona que el análisis conceptual permite revisar los conceptos y nociones básicas sobre el conocimiento matemático, sobre sus fundamentos e historia, sobre sus génesis y desarrollo, sobre los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje. De esta manera, con este análisis se pretende una reducción teórica para trabajar y profundizar sobre los conceptos como una técnica de estudio para conseguir precisión y dominio en su uso.

#### 4.1.1 Historia y epistemología de la ecuación cuadrática

La teoría de ecuaciones menciona que una ecuación polinómica es la que se puede expresar de la siguiente forma general:

$$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 0$$

Donde  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  son coeficientes numéricos que pertenecen a los reales y  $n$  es el número entero, el cual indica el grado de la ecuación, siempre y cuando  $n > 0$  y  $a_n \neq 0$ . De aquí que la ecuación de segundo grado, sea una expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ donde } a, b \text{ y } c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Algunas culturas evidenciaron el uso de este tipo de ecuaciones, por lo que adquiere relevancia en la historia y desarrollo de las matemáticas. Entre estas culturas están los: babilonios, griegos y árabes. A continuación, mencionaremos los principales hallazgos o contribuciones relacionados con la ecuación cuadrática en cada una de ellas.

#### Babilonios

Según Kline (1992, p. 26) los babilonios resolvían problemas como: “Hallar un número tal que sumado a su inverso de un número dado”. En notación moderna se puede escribir que lo que buscaban ellos era  $x$  y  $x^{-1}$  tales que  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  y  $x + x^{-1} = b$ . Estas dos ecuaciones dan como resultante  $x^2 - bx + 1 = 0$ . Se valían entonces de una expresión para resolver ecuaciones de segundo grado. A continuación, se presenta el desarrollo que permite ver cómo llegar de las dos expresiones a la ecuación cuadrática resultante; lo anterior se hace mediante los procedimientos que se utilizan actualmente en el ámbito escolar.

Si  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  entonces;

$$x + \frac{1}{x} = b$$

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{x} = b$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = b$$

$$x^2 + 1 = bx$$

$$x^2 - bx + 1 = 0$$

Ruiz (S/F) menciona que los babilonios estaban en posesión de la fórmula cuadrática. Resolvían ecuaciones de la forma  $x^2 + bx = c$ ,  $x^2 - bx = c$  siempre con  $b > 0$  y  $c > 0$ . Existen otros ejemplos de ecuaciones con 3 incógnitas, pero simples.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1/400 \text{ con } x - y = 10 \text{ y } y - z = 10$$

No tenían números negativos debido a que las cantidades hacían alusión a longitudes, por lo tanto no eran aceptadas las raíces de ecuaciones cuadráticas con soluciones negativas. Sin embargo, sí podían calcular con números racionales. El logro de los babilonios fue notable considerando que no contaban con la notación que tenemos actualmente y, además, por la gran abstracción que tenían, ya que las ecuaciones cuadráticas las veían como cuadráticas disfrazadas.

### Griegos

En la solución de ecuaciones cuadráticas “los griegos usaban claramente métodos babilonios” (Ruíz, S/F, p. 116), a esta cultura se le atribuyen grandes aportes en cuanto a las concepciones de ecuaciones cuadráticas, por ejemplo:

En la obra *Los Elementos* de Euclides se observa el manejo de relaciones cuadráticas por medio de situaciones geométricas. El término “cuadrado” se concibe como una figura geométrica que genera una concepción a partir de áreas teniendo en cuenta las longitudes, por ejemplo, la cantidad multiplicada por sí misma generaría las expresiones que actualmente conocemos como elevar al cuadrado.

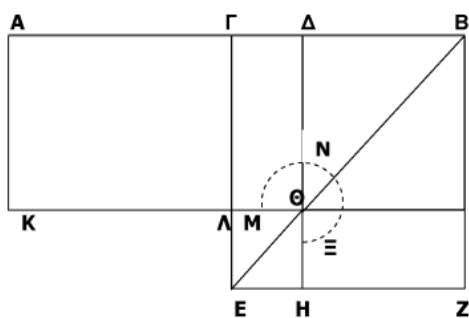


Figura 2. Elevar al cuadrado de forma geométrica (Mesa, 2008, p. 24)

Diofanto plantea y resuelve ecuaciones de segundo grado de la forma:  $ax^2 = 0$ ,  $ax^2 + bx = c$ ,  $ax^2 = bx$  con problemas como “encontrar dos números tales que su suma sea 20 y su producto sea 26. Sea la suma 20, 96 el producto y  $2x$  la diferencia, los números buscados son  $10+x$ ,  $10-x$ , por lo tanto  $100 - x^2 = 96$ , entonces  $x=2$  y los números buscados son 12 y 8.” (Kline, 1970, p. 193).

En esta época es importante notar que, aunque es familiar para los griegos la noción de forma cuadrática, en la mayoría de los casos se observa que se encuentra ligada a problemas relacionados con la solución de ecuaciones con un método geométrico más que a la modelización de situaciones de variación y cambio (Mesa, 2008, p. 28).

### Árabes

Los árabes fueron quienes pusieron el nombre al álgebra, viene de un libro escrito por Al-Khwarizmi en el siglo VIII. Para la ecuación cuadrática, Al-Khwarizmi consideraba únicamente las raíces positivas a pesar de que sabían que existían las raíces negativas, sin embargo, los

árabes no las utilizaron porque los problemas que planteaban los resolvían de manera aritmética y geométrica, y como no se pueden dibujar cuadrados por ejemplo con magnitudes negativas, es por ello que no utilizaban este tipo de raíces (Mesa, 2008, p.28).

Posteriormente, los griegos y árabes resolvieron ecuaciones cuadráticas mediante el mismo método (completando el cuadrado mediante aplicación de áreas cómo se muestra más adelante). Ambas civilizaciones se valieron de la representación geométrica para resolver problemas algebraicos. Por ejemplo, para resolver ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx = c$$

Los griegos (Euclides) y árabes (Al-Khwarizmi y Tabit Ben Qurra), desarrollaron el siguiente procedimiento, para encontrar un número  $x$  tal que

$$x^2 + 4x = 140$$

Consideraban a  $x$  como el lado de un cuadrado de área  $x^2$  y  $4x$  como el área de un rectángulo de lados 4 y  $x$ . Luego,  $x^2 + 4x$ , es el área de la figura 3.

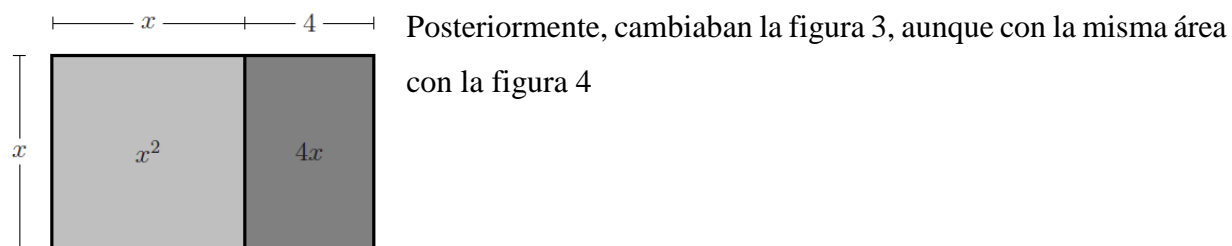


Figura 3. Procedimiento de Al-Khwarizmi y Tabit Ben Qurra (1)

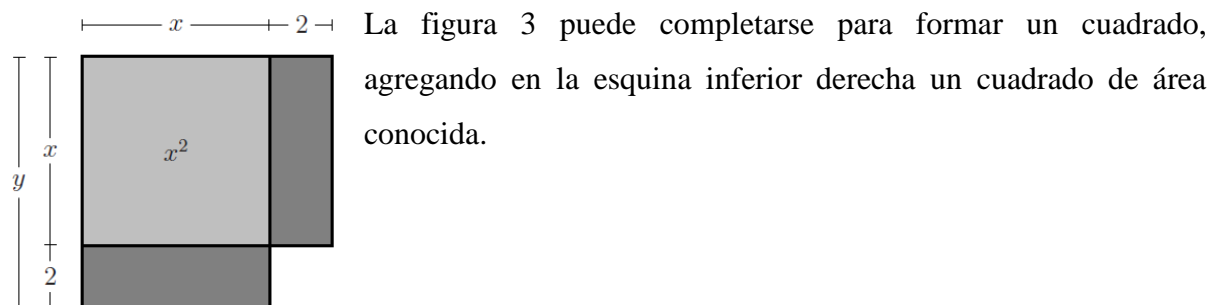
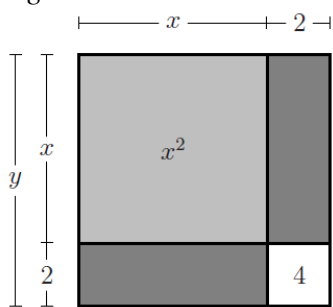




Figura 4. Procedimiento de Al-Khwarizmi y Tabit Ben Qurra (2)



Así, la región sombreada tiene un valor de  $140u^2$  (corresponde a  $x^2 + 4x$ ), como el área del cuadrado blanco es de  $4u^2$ , el área total de la figura es de  $144u^2$ , así el lado del cuadrado ( $y$ ) mide  $12u$  y  $x = 10u$ . (Ver figura 5).

Figura 5. Procedimiento de Al-Khwarizmi y Tabit Ben Qurra (3)

Este tipo de situaciones permitieron determinar también soluciones de una ecuación cuadrática de diferentes tipos utilizando un método geométrico según era el caso:

- I) Cuadrado de la cosa igual a cosas:  $x^2 = bx$
- II) Cuadrado de la cosa igual a número:  $x^2 = c$
- III) Cuadrado de la cosa más cosas igual a número  $x^2 + bx = c$
- IV) Cuadrado de la cosa más número igual a cosas  $x^2 + c = bx$
- V) Cuadrado de la cosa igual a cosas más número  $x^2 = bx + c$

Los árabes lograron aportar al álgebra en cuestiones de solución de ecuaciones cuadráticas por medio de un álgebra retórica para ese entonces, pues como se puede observar, en este momento no se tenía un concepto de lo que en nuestros días es una incógnita, por ello se mencionaba “una cosa” para referirse a algo desconocido.

Vale la pena mencionar que los aspectos histórico-epistemológicos no suelen ser presentados dentro de los libros de texto o en los planes y programas de estudio.

#### 4.1.2 Conceptos y términos básicos

Este análisis “es una herramienta metodológica para controlar la complejidad semántica, seleccionar opciones idóneas y disponer de un aparato teórico adecuado para la investigación educativa” (Rico, 2013 p. 5). Por ello, es imprescindible la identificación de descripciones, definiciones, listas, ejemplos, entre otros, con el fin de examinar los significados y conexiones entre términos. Todo lo anterior permitirá determinar en este caso los puntos clave del tema matemático escolar con base en los objetivos de enseñanza y aprendizaje de éste para el nivel secundaria.

En este apartado, se pretende abordar los conceptos implícitos en el aprendizaje de este contenido, pues dentro del álgebra abordada en el nivel secundaria es de gran importancia reconocer los significados inherentes al contenido para comprender el concepto de ecuación cuadrática.

Este análisis, en el papel de profesor, permite cumplir una de las demandas para enseñar este contenido: conocer los elementos y conceptos que son base para el aprendizaje de la ecuación cuadrática. Por ello, la revisión del plan de estudios (2011) y los libros de texto de educación secundaria nos brindan referentes para saber desde dónde abordar el concepto y lo que se espera de éste.

En este caso iniciaremos con la definición de ecuación cuadrática y una primera clasificación de las mismas propuestas en el libro “Matemáticas por competencias 3”:

Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas son aquellas igualdades cuyo máximo exponente de alguna de sus incógnitas es 2; además son de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ . Cuando tienen sus tres términos, se conocen como ecuaciones *completas*, y cuando falta el término lineal o independiente se les llama, *incompletas*. Este tipo de ecuaciones se pueden resolver por medio de operaciones inversas, por factorización o por fórmula general (p. 17).

El enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria plantea que “el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar para solucionar problemas...” (SEP, 2011, p. 20). Por ello, considerando el aprendizaje esperado de este contenido matemático escolar, en donde se espera que el alumno “resuelva problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado” se realiza un desglose de los conceptos y procedimientos relacionados con el enfoque didáctico y el aprendizaje esperado.

Conceptos:

- Igualdad
- Ecuación
- Miembros
- Términos
- Incógnita
- Soluciones

- Grado
- Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática completa
- Ecuaciones cuadráticas incompletas

Procedimientos (métodos de solución):

- Operaciones inversas
- Factorización
- Completando el cuadrado
- Fórmula general

### 4.1.3 Red de significados

En este apartado se realiza una síntesis de conceptos y procedimientos relacionados al contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática presentándolos por medio de un mapa conceptual que “destaca las ideas principales manejadas y compendia sus relaciones” (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2010, p.12).

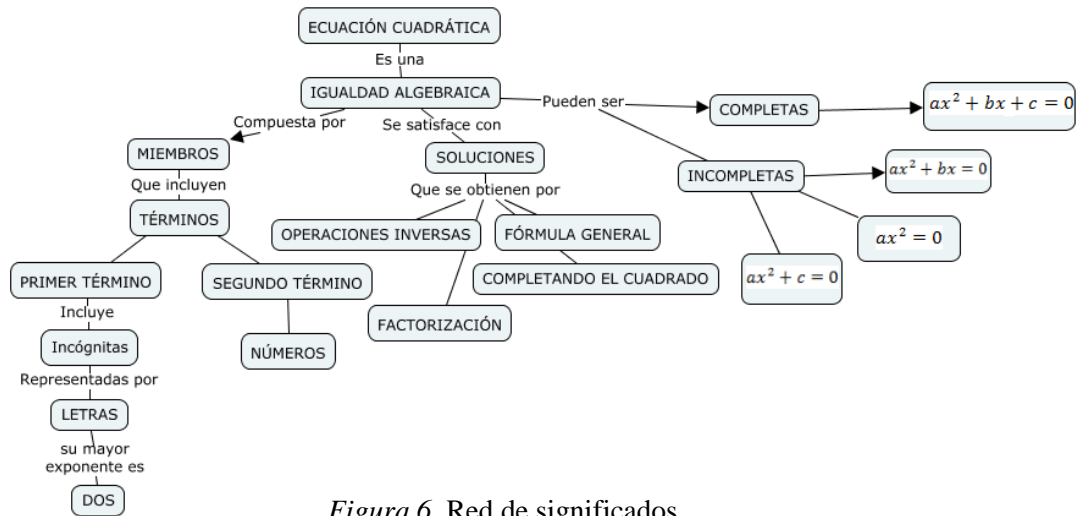


Figura 6. Red de significados

## 4.2 Focos prioritarios

### 4.2.1 Sistemas de representación

La exploración de los significados de un concepto requiere de los sistemas de representación, puesto que con ellos es posible identificar los modos en que el concepto se presenta. Este

organizador del currículo constituye también al análisis de contenido. Kaput (1992, citado en Cañadas y Gómez 2015, p. 17) define a un sistema de representación como “un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523). Las reglas a las que hace referencia este autor determinan cómo crear un signo que pertenezca al sistema, cómo reconocer si un signo dado pertenece a él, y cómo transformar signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos.

El papel de los sistemas de representación en el análisis de contenido demanda identificar las representaciones asociadas al tema y qué relaciones se pueden establecer entre esas representaciones. “Analizar cómo se expresan los elementos de la estructura conceptual y cuáles de esas formas de expresión constituyen sistemas de representación puede ayudar a conocer los significados del tema desde la perspectiva de los sistemas de representación” (Cañadas y Gómez, 2015, p. 19).

Estos autores consideran los siguientes sistemas de representación:

- i) Numérico
- ii) Simbólico
- iii) Tabular
- iv) Gráfico
- v) Geométrico
- vi) Pictórico
- vii) Verbal
- viii) Manipulativo
- ix) Ejecutable (relacionado con las TIC)

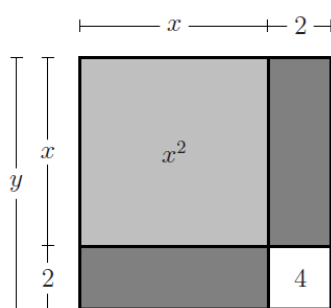
Dado que los contenidos matemáticos tienen sus propias características, no todos los sistemas de representación juegan el mismo papel en todos los temas, por ello, a continuación se presentan los sistemas de representación que juegan un papel importante en el contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática en el nivel secundaria.

*Sistema de representación simbólico:*

Todas las ecuaciones cuadráticas, dada su naturaleza algebraica, se pueden representar simbólicamente de la forma:  $ax^2 + bx + c = 0$  donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales, con la condición de que  $a \neq 0$ . Esta expresión se conoce como ecuación cuadrática completa, mientras que las ecuaciones cuadráticas incompletas son:  $ax^2 = 0$ ,  $ax^2 + bx = 0$  y  $ax^2 + c = 0$ .

*Sistema de representación geométrico:*

La representación geométrica es útil para representar una multiplicación, pero en el caso de la ecuación cuadrática ha sido utilizado para resolverlas mediante el procedimiento conocido como “completando el cuadrado”.



*Sistema de representación verbal:*

El sistema de representación verbal pone de manifiesto las propiedades de los elementos matemáticos involucrados. En el caso de la ecuación cuadrática permite obtener expresiones simbólicas que dan cuenta su naturaleza, por ejemplo: “encontrar dos números tales que su suma sea 20 y su producto sea 26”.

Es importante mencionar que, al obtener las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, éstas se pueden convertir en las coordenadas de las intersecciones de la gráfica asociada a su función cuadrática (parábola) con el eje de las abscisas. Sin embargo, al tratar el sistema de representación gráfico, se tiene más relación con el tema de la función cuadrática; tema que queda fuera de los alcances del tercer grado del nivel secundaria. Por esta razón, en este estudio y dado que el aprendizaje esperado es: *Resolver problemas que implican ecuaciones de segundo grado*, se omite esta representación al igual que la tabular.

Para finalizar el primer análisis en la planeación de una unidad didáctica y que consiste en la organización de los diferentes significados para la ecuación cuadrática se presenta la

fenomenología. Con esto se completan los tres organizadores que constituyen los significados de un tema matemático escolar y con ello el análisis de contenido correspondiente.

#### 4.2.2 Fenomenología

La identificación de fenómenos adecuados para un tema constituye el primer paso para el análisis fenomenológico. Al respecto se abordan los contextos fenomenológicos para referirse “al modo en que se usan los conceptos en una o varias situaciones” (Rico *et al.* 2008, p. 11) de aquí que las preguntas centrales son: ¿para qué se usa el tema matemático? Y ¿a qué problemas da respuesta el tema?

Dado que la investigación se realizará en el nivel educativo secundaria, a continuación se presentan los contextos fenomenológicos acordes a éste. En particular se enuncian los problemas escolares a los que este tema generalmente responde:

- Don Matías quiere comprar un terreno cuadrangular, pero desconoce sus dimensiones, ¿de qué manera se puede obtener el área?
- Alejandro compró un libro de juegos y retos matemáticos, al resolver un crucigrama algebraico encontró un dato que dice: el cuadrado de tres veces un número más 24, es igual a 240. ¿cuál es la ecuación que representa esta solución?, ¿cuál es el valor del número que cumple con ésta?
- El tío de Rubén tiene una bodega con estacionamiento para 4 camiones de carga. Ancho= $x$ , largo= $x+16$  ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el total del área?
- Si al doble del cuadrado de la edad que tiene un niño y al triple de esta edad se le añaden 48 años, suman 200 años, ¿qué edad tiene el niño?

Las subestructuras matemáticas que subyacen son:

- Operaciones inversas
- Factorización
- Fórmula General

La identificación de subestructuras, consiste en considerar la estructura conceptual del tema y explorar si algunas de esas subestructuras organizan grupos de fenómenos. En el caso de los contextos fenomenológicos considerados en el nivel secundaria, tienen que ver con la

solución de las ecuaciones cuadráticas. Por esta razón, las subestructuras matemáticas tienen que ver con los métodos de solución de tales ecuaciones cuadráticas mientras que los fenómenos tienen que ver con: encontrar cantidades desconocidas mencionadas en enunciados verbales y encontrar longitudes de figuras dada su área.

### **4.3 Mapa conceptual de la ecuación cuadrática**

Con la herramienta técnica del análisis de contenido, el profesor puede establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las matemáticas escolares. Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) mencionan que:

Mediante este análisis se desarrollan las capacidades del profesor de matemáticas para establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, que son conocimientos necesarios para marcar expectativas sobre el aprendizaje de los alumnos y para delimitar y diseñar tareas basadas en la concreción de unas demandas cognitivas. (p. 3).

En esta labor sería deseable que el profesor sea capaz de construir una estructura conceptual mediante un mapa conceptual en donde se identifiquen los conceptos, sistemas de representación y los fenómenos que modelizan a la ecuación cuadrática. Así como también, se evidencien las relaciones que se pueden establecer entre diferentes sistemas de representación y entre elementos dentro de un mismo sistema, y las relaciones entre las subestructuras de la estructura matemática en cuestión y los fenómenos que ellos modelizan.

Con la herramienta del mapa conceptual, “se establecen nexos entre el conocimiento conceptual y procedimental de un mismo núcleo de conceptos básicos” (Lupiáñez, 2009, p. 45). El resultado que sintetiza todo el proceso de análisis de contenido de la ecuación cuadrática se presenta en la *Figura 7*.

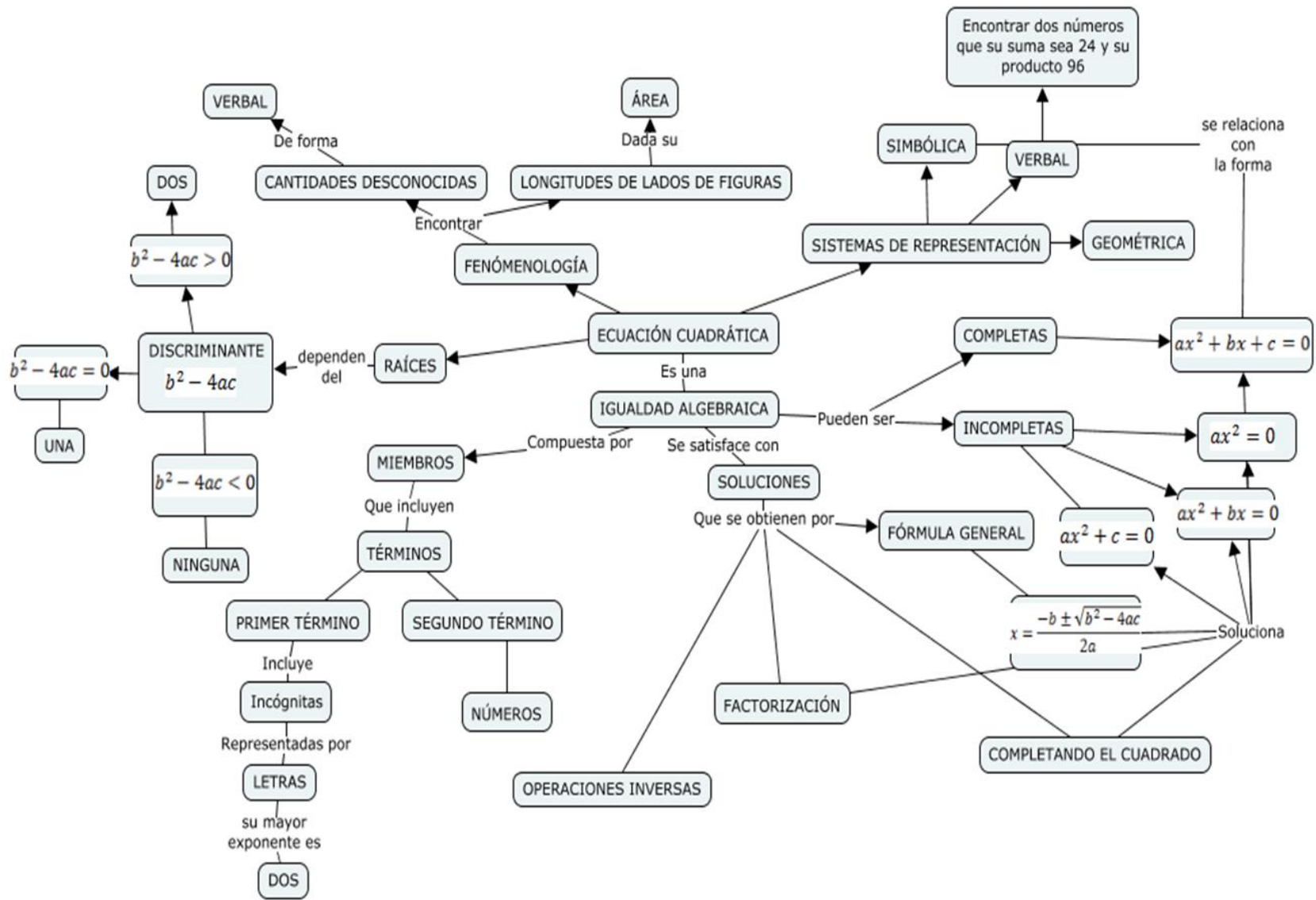


Figura 7. Mapa conceptual de la ecuación cuadrática.



## **CAPÍTULO 5. ANÁLISIS COGNITIVO**

Este análisis corresponde al segundo organizador del currículo del ciclo del análisis didáctico cuyo fin es “organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico” (Rico, 2013, p.23). Gómez (2002) menciona que, en el análisis cognitivo, el profesor describe hipótesis de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje.

Es aquí donde el profesor debe preocuparse de estudiar la complejidad de significados de la estructura matemática desde la perspectiva de que va a ser objeto de aprendizaje, por ello debe describir qué competencias desea que desarrollen los estudiantes y en qué errores pueden incurrir y cuáles dificultades de aprendizaje hay detrás de ellos. Las categorías que conforman este análisis son: Expectativas de aprendizaje, Limitaciones en el aprendizaje y Demandas cognitivas.

### **5.1 Expectativas de aprendizaje**

Como ya se ha mencionado anteriormente, la naturaleza de este estudio demanda tomar en cuenta los aspectos del ámbito educativo que impactan en el contexto en que se realizará la intervención, de aquí que en este apartado sea imprescindible considerar las expectativas de aprendizaje de este contenido debido a que “cada tema requiere, al menos, enunciar sus prioridades cognitivas, determinar su objeto y su alcance, organizar y relacionar dichas prioridades” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 63). Tales expectativas tienen su referencia en el plan de estudios 2011 y el programa de matemáticas, ya que documentan lo que se espera que los alumnos aprendan y sean capaces de hacer con determinado contenido matemático.

El aprendizaje esperado de este contenido es que el alumno “resuelva problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado”, sin embargo, de alguna manera se encuentran implícitas las competencias matemáticas presentadas en el programa de estudios matemáticas 2011:

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS
<p><b>Resolver problemas de manera autónoma.</b> Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; por ejemplo, problemas con solución única, otros con varias soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos; problemas o situaciones en los que sean los alumnos quienes planteen las preguntas. Se trata de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.</p>
<p><b>Comunicar información matemática.</b> Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; se establezcan nexos entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones y se inferan propiedades, características o tendencias de la situación o del fenómeno representado.</p>
<p><b>Validar procedimientos y resultados.</b> Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.</p>
<p><b>Manejar técnicas eficientemente.</b> Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución incompleta o incorrecta. Esta competencia no se limita a usar de forma mecánica las operaciones aritméticas, sino que apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema; en la utilización del cálculo mental y la estimación; en el empleo de procedimientos abreviados o atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema, y en evaluar la pertinencia de los resultados. Para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas distintos; así adquirirán confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas.</p>

Figura 8. Competencias matemáticas (SEP, 2011, p. 23)

Estas competencias son los referentes más importantes que se deben considerar desde el comienzo para establecer los objetivos de aprendizaje de cada contenido y de esta manera, establecer una vinculación entre dichos objetivos y las competencias matemáticas.

Con base en el análisis de contenido y la revisión del plan de estudios 2011, en específico el enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas, las competencias, capacidades y aprendizaje esperado, se presentan a continuación los focos de interés para el aprendizaje de este contenido que se plantean a manera de objetivos generales y específicos de cada uno de ellos.

Generales:

- *Caracterizar y reconocer ecuaciones cuadráticas*
- *Resolver ecuaciones cuadráticas según su tipo*
- *Aplicar ecuaciones cuadráticas a la solución de problemas*

Estos objetivos se realizaron tomando en cuenta el aprendizaje esperado “resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado”, por ello, para lograrlo es indispensable caracterizarlas. Cada uno de estos objetivos de aprendizaje está conformado a su vez por capacidades más específicas que permitirán al profesor determinar los aprendizajes de sus estudiantes. En este caso se proponen las siguientes:

Para el primer objetivo de aprendizaje o competencia específica para el tema de ecuación cuadrática, que es “*caracterizar y reconocer ecuaciones cuadráticas*”, se proponen las siguientes capacidades:

1. Construir ejemplos de ecuaciones cuadráticas simbólicamente
2. Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general (completas)
3. Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas
4. Identificar el término cuadrático
5. Identificar el término lineal
6. Identificar el término independiente
7. Reconocer ecuaciones cuadráticas

*Resolver ecuaciones cuadráticas según su tipo*

1. Resolver ecuaciones cuadráticas completas por fórmula general.
2. Resolver ecuaciones cuadráticas completas por factorización.
3. Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas.
4. Conocer que todas las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver utilizando fórmula general.
5. Aplicar operaciones algebraicas para resolver problemas en los que se utilicen ecuaciones cuadráticas.

*Aplicar ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas*

1. Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación verbal para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.
2. Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación geométrico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.
3. Interpretar la solución de la ecuación cuadrática en el contexto del problema planteado.

Para las competencias matemáticas: Resolver problemas de manera autónoma (RP), Comunicar información matemática (CI), Validar procedimientos y resultados (VP) y Manejar técnicas eficientemente (MT), en las siguientes tablas se establecen las expectativas de aprendizaje generales y específicas y su vinculación con dichas competencias:

*Tabla 1.* Capacidades del Objetivo de aprendizaje 1 y su relación con las competencias matemáticas.

<b>OBA1. Caracterizar y reconocer ecuaciones cuadráticas</b>		<b>RP</b>	<b>CI</b>	<b>VP</b>	<b>MT</b>
C1.1	Construir ejemplos de ecuaciones cuadráticas simbólicamente		X		
C2.1	Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general		X	X	
C3.1	Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas		X	X	
C4.1	Identificar el término cuadrático		X		
C5.1	Identificar el término lineal		X		
C6.1	Identificar el término independiente.		X		
C7.1	Reconocer ecuaciones cuadráticas		X		
C8.1	Caracterizar ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas.		X		

*Tabla 2.* Capacidades del Objetivo de aprendizaje 2 y su relación con las competencias matemáticas.

<b>OBA2. Resolver ecuaciones cuadráticas según su tipo</b>		<b>RP</b>	<b>CI</b>	<b>VP</b>	<b>MT</b>
C1.2	Resolver ecuaciones cuadráticas completas por fórmula general		X	X	X

C2.2	Resolver ecuaciones cuadráticas completas por factorización		X	X	X
C3.2	Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas		X	X	X
C4.2	Conocer que todas las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver utilizando fórmula general.				
C5.2	Aplicar operaciones algebraicas para resolver problemas que utilicen ecuaciones cuadráticas			X	X

Tabla 3. Capacidades del Objetivo de aprendizaje 3 y su relación con las competencias matemáticas.

<b>OBA3. Aplicar ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas</b>		<b>RP</b>	<b>CI</b>	<b>VP</b>	<b>MT</b>
C1.3	Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación verbal para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.	X	X	X	X
C2.3	Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación geométrico para resolver problemas que impliquen	X	X	X	X

	el uso de ecuaciones cuadráticas.				
C3.3	Interpretar la solución de la ecuación cuadrática en el contexto del problema planteado	X	X	X	X

Tabla 4. Total de veces en las que se contribuye al desarrollo de las competencias matemáticas.

TOTAL	RP	CI	VP	MT
<b>OBA1. Caracterizar y reconocer ecuaciones cuadráticas</b>		<b>6</b>	<b>2</b>	
<b>OBA2. Resolver ecuaciones cuadráticas según su tipo</b>		<b>3</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
<b>OBA3. Aplicar ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
<b>TOTAL</b>	<b>3</b>	<b>12</b>	<b>9</b>	<b>7</b>

Los resultados de estas tablas pueden mostrar que se contribuye en mayor medida al desarrollo de algunas competencias, sin embargo no es así, sino que en los objetivos se plantearon se pretende incidir en todas de cierta manera ya que en mi opinión como profesor, no se debe dar prioridad a una de las competencias sino abonar al desarrollo de todas en diferente medida. Asimismo, para cumplir con el aprendizaje esperado, desde mi perspectiva, es importante darle peso también a la caracterización, a los métodos de solución para entonces sí plantear ecuaciones cuadráticas a la solución de problemas.

## **5.2 Limitaciones de aprendizaje**

El análisis de las limitaciones de aprendizaje se realizó desde la literatura reportada por diversas investigaciones, así como desde un cuestionario aplicado a mis estudiantes. Ambos aspectos se presentan en este apartado.

### **5.2.1 Desde los resultados de investigación**

El estudio del pensamiento matemático en la educación básica se aborda desde preescolar con aspectos que se consideran básicos como el conteo; mientras que, en el caso de primaria y secundaria, se orientan en aprender a resolver problemas y formular preguntas que validen la eficacia de determinada herramienta matemática. También, en el nivel secundaria, adquiere auge el estudio del álgebra. Cabe mencionar que, en este nivel escolar, se da el tránsito entre la aritmética y el álgebra, situación que se caracteriza como una dificultad de esta etapa ya que los alumnos quieren abordar situaciones que demandan el uso del álgebra desde su conocimiento aritmético.

Uno de los propósitos de estudio de las matemáticas de este nivel espera que los alumnos: “modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones” (SEP, 2011, p. 14). Por ello, este tipo de contenidos se dividen en el estándar curricular: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

En este eje se abordan temas que incluyen contenidos relacionados con el álgebra como son: problemas aditivos, problemas multiplicativos, patrones y ecuaciones. Con los cuales se “articula y organiza el tránsito de la aritmética, la geometría, la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico” (SEP, 2011, p. 49), por lo que se entiende que el álgebra se considera como una generalización de la aritmética.

El tipo de problemas que generalmente se proponen, son aquellos que los alumnos pueden resolver por medio de la aritmética, y no le vean una utilidad al álgebra, por ejemplo, aquellos en los que se pretende encontrar la edad de una persona, aquellos en los que se piensa un número desconocido, se agrega otro conocido y como resultado nos da otro conocido, aspecto que los alumnos abordan a partir de sus conocimientos aritméticos previos.

De aquí que la utilización del álgebra para resolver situaciones matemáticas sea subestimada, provocando que no se le encuentre una utilidad.

Cuando el álgebra no se utiliza como herramienta se puede entender que existen ciertos aspectos que evitan que los alumnos comprendan procesos algebraicos para que resuelvan situaciones que implican su uso. Rojano (2010) menciona que el hecho de utilizar una letra para representar un valor desconocido es una situación en la que los alumnos muestran un pensamiento pre-algebraico ya que evidencian una resistencia a operar con lo desconocido.

En esta situación se presenta una incompreensión del álgebra debido a que “el alumno no encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no sabe cómo trabajar con letras o éstas no tienen significado para él” (Ruano, 2008, p. 67), lo cual genera que retrocedan al uso de la aritmética.

En la educación básica se ha manejado al álgebra como una generalización de la aritmética, aspecto que puede ser una de las explicaciones de que los alumnos en todo momento quieran hacer uso de la aritmética para resolver problemas en los que es más sencillo hacer uso de la herramienta del álgebra por el hecho de que facilita el trabajo en cuestión de optimización.

Hasta el momento, se han mencionado algunas dificultades que inciden al trabajar con álgebra desde esta perspectiva. A continuación, se abordan algunas categorizaciones y clasificaciones realizadas por diferentes autores referentes a los errores cometidos por los estudiantes en álgebra ya que estos son elementos que dan información al profesor para tener referentes de lo que puede presentarse en el aula para idear acciones que le ayuden al tratamiento de estos.

La primera clasificación es la presentada por Socas (1997) quien organiza a los errores relacionados al álgebra según su origen:

- Obstáculo
- Ausencia de Sentido
- Actitudes afectivas y emocionales



Para comprender a qué se refiere con errores cuyo origen son los obstáculos es necesario retomar algunos conceptos relacionados. Un obstáculo lo vamos a entender como “un conocimiento adquirido, no a la falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas” (Bachelard, 1938, citado por Ruano *et al.* 2008 p. 63). Asimismo, los obstáculos se clasifican en:

- Obstáculos de origen *epistemológico*: Son aquellos a los cuales uno no puede ni debe escapar del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta.
- Obstáculos de origen *didáctico*: Parecen no depender más que de una elección o de un proyecto del sistema educativo. Están relacionados con las decisiones que tome el profesor al momento de plantear una situación de enseñanza.
- Obstáculos de origen *ontogenético*: Son aquellos que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto a un momento de su desarrollo, se desarrollan conocimientos apropiados a los medios y objetivos.

Ahora, los errores que tienen origen en una “ausencia de sentido” se generan en tres estadios del desarrollo que se dan en los sistemas de representación y se pueden diferenciar en tres etapas:

- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.
- Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.
- Errores del álgebra debidos a características propias del lenguaje algebraico.

Finalmente, los errores que tienen su origen en “actitudes afectivas y emocionales” tienen distinta naturaleza: falta de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc. Propias que se adoptan al momento de abordar una situación matemática que implica el uso del álgebra.

Una segunda organización de errores es la de Radatz (1979, citado por García, Segovia y Lupiáñez (2010) que presenta una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis.

### **1. Errores debidos a dificultades de lenguaje**

El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

### **2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.**

Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas.

### **3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.**

Se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática.

Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.

### **4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.**

La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Interesan cinco subtipos:

- Errores por *perseveración*, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
- Errores de *asociación*, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de *interferencia*, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de *asimilación*, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
- Errores de *transferencia negativa* a partir de tareas previas.

### **5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.**

Surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

(p. 147)

Por último, Movshovitz-Hadar; Inbar y Zaslavsky (1987b, citado por García, Segovia y Lupiáñez (2010) caracterizan también los errores de las resoluciones de los estudiantes al operar algebraicamente de la siguiente manera:

**1. Datos mal utilizados:** se incluyen aquí, los casos en que se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; se hace una lectura incorrecta del enunciado.

**2. Interpretación incorrecta del lenguaje:** se incluyen aquí los casos de errores debido a una traducción errónea de conceptos o símbolos matemáticos, dados en lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto (Designar un concepto por un símbolo que designa a otro concepto y operar con el mismo en su uso convencional). A veces se produce, también una

interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa. Desconexión entre lo analítico y gráfico.

**3. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones:** aquí se consideran los errores que se cometen por deformación de un principio, regla o definición determinada: aplicar la propiedad distributiva a una operación o función no lineal; cita o escritura errónea de una definición, teorema o fórmula identificable.

**4. Errores al operar algebraicamente:** sumar, restar, multiplicar, etc. expresiones algebraicas y al transponer términos.

**5. No verificación de resultados parciales o totales:** se incluyen los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el alumno hubiese contrastado la solución con el enunciado tal vez el error habría podido evitarse.

**6. Errores lógicos:** en este grupo se incluyen los errores que se cometen por falacias de razonamiento. Justificaciones inadecuadas. Explicaciones ilógicas.

**7. Errores técnicos:** en esta categoría se consideran los errores de cálculo, errores al transcribir datos del temario.

(p. 147)

Como se puede observar, las investigaciones anteriores se enfocan en errores del álgebra en general.

### 5.2.2 Desde los resultados de aula

Con el fin de detectar errores específicos del contenido de ecuaciones cuadráticas, ya que en el análisis cognitivo “el profesor debe tener en cuenta las dificultades y errores a las que se enfrentan los escolares cuando abordan tareas” (Gómez, 2007, p. 73), se diseñó un instrumento que consta de 6 actividades y un total de 12 reactivos (Ver Anexo 2) sobre aspectos básicos del contenido de ecuaciones cuadráticas; los cuales se distribuyeron como se indica en la Tabla 5.

Tabla 5. Contenido de los ítems

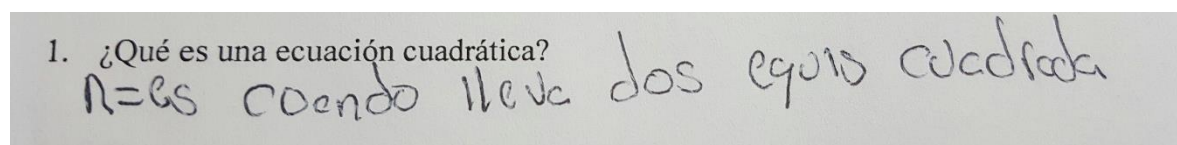
Ítem	Contenido de ecuaciones de segundo grado
1, 2, 3	Definición de ecuación cuadrática -Forma -Partes
4	Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas conocidos
5 (a,b)	Planteamiento de ecuaciones cuadráticas sencillas
6 (a,b,c,d,e,f)	Resolución de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

Una característica principal de este contenido es que es procedimental, por ello los ítems implicaban este tipo de caracterización.

Se analizaron los ítems presentados a los estudiantes para identificar los errores en la resolución de las tareas relativas al contenido de ecuaciones cuadráticas para detectarlos y tener referentes para considerarlos tanto en el diseño de las actividades como en su tratamiento y su relación con las competencias y las capacidades que falta desarrollar. Se obtuvieron los siguientes:

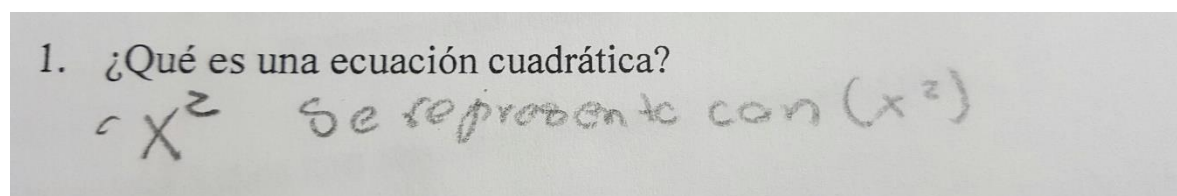
*I. Definiciones incorrectas o preconcepciones*

En el caso de los ítems 1, 2 y 3, los estudiantes sólo mencionaron ideas acerca de lo que entienden más no una definición completa de la ecuación cuadrática, su forma general y las partes de ésta. Ejemplo:



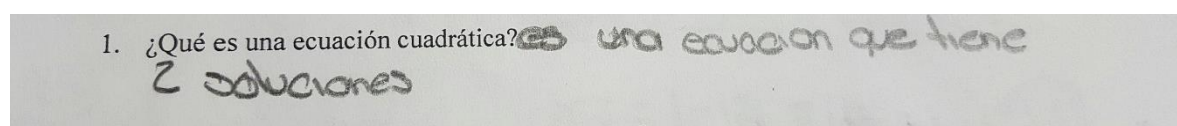
1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?  
n=bs cuando lleva dos equis cuadrada

Figura 9. Respuesta de estudiante 11 al ítem 1



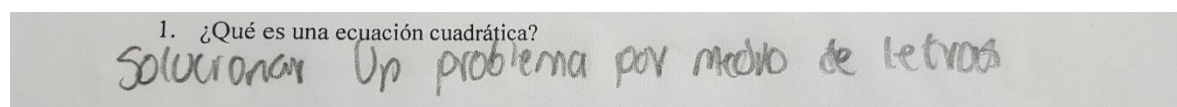
1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?  
 $x^2$  se representa con  $(x^2)$

Figura 10. Respuesta de estudiante 13 al ítem 1



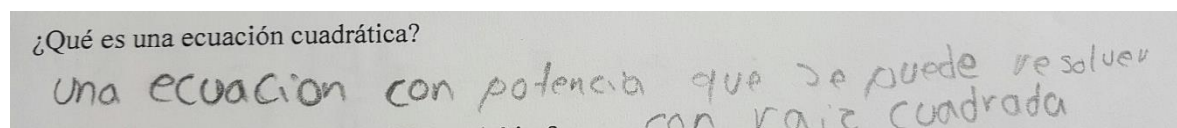
1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?  
es una ecuacion que tiene 2 soluciones

Figura 11. Respuesta del estudiante 2 al ítem 1



1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?  
Solucionar un problema por medio de letras

Figura 12. Respuesta del estudiante 4 al ítem 1



¿Qué es una ecuación cuadrática?  
una ecuacion con potencia que se puede resolver con raíz cuadrada

Figura 13. Respuesta del estudiante 20 al ítem 1

La información presentada hasta el momento me dice que los estudiantes tienen preconcepciones de los elementos de una ecuación cuadrática, mas no una definición formal ni una representación. Es una situación relevante por el hecho de la noción de igualdad, por ello se rescata ya que en algunos casos ésta se ve como una “operación” de la que se obtiene un resultado.

II. *Procedimientos propios no válidos*

En el caso del ítem 5a, confunden el área con el perímetro, por lo que dividen el valor del área entre 4 para obtener “la longitud de los lados de un cuadrado”, Figura 14. También en el caso de la solución de ecuaciones cuadráticas, pues utilizan procedimientos que en algún momento les funcionaron pero después ya no.

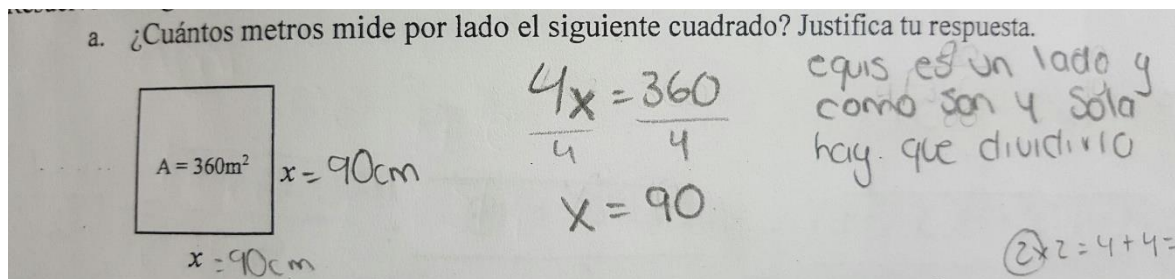


Figura 14. Respuesta del estudiante 2 al ítem 5a

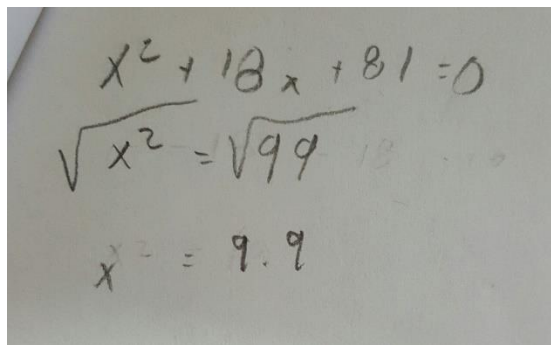


Figura 15. Respuesta del estudiante 6 al ítem 6d.

$$x^2 - 2x = 0$$

$$+ 2 \quad + 2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$$

$$x = 1.4$$

Figura 16. Respuesta del estudiante 6 al ítem 6b.

En este apartado se encuentran dos aspectos relevantes, en la figura 14: la estudiante tiene una confusión de lo que es el área y el perímetro, lo cual me da información de que no están viendo al área como un producto de dos dimensiones, sino como la suma de los 4 lados de la figura. En el caso de la figura 15 y 16 se observa lo que podría ser un obstáculo, pues el estudiante está intentando resolver las ecuaciones cuadráticas con operaciones inversas en casos en los que no es posible, por ello se evidencia que utiliza un conocimiento que tuvo funcionalidad en cierto momento pero en este caso ya no.

Como profesor, me da información para aclarar estas situaciones cuando se presenten y tomarlo en cuenta como consideraciones previas de que es un camino que probablemente los alumnos recurran a él, para ello, el diseño de las tareas se consideró esta situación.

### III. Utilización de la aritmética en situaciones que demandan el uso del álgebra

En el caso del ítem 5 b en el que se pretende que planteen una ecuación para encontrar el valor del número desconocido, realizan por ensayo y error las operaciones de elevar al cuadrado y sumar 4 para obtener el 8.

El cuadrado de un número más 4 es igual a 8, ¿Cuál es ese número?

$$\text{El } 2 = (2^2) + 4 = 4 + 4 = 8$$

Figura 17. Respuesta del estudiante 18 al ítem 5b.

En este caso, puedo decir que el profesor propició de alguna manera esta respuesta, pues en ningún momento se solicitó que con la información realizaran una ecuación, sino que

las indicaciones sólo solicitaron conocer cuál era ese número dejando abierta la posibilidad a muchos caminos. Esta situación no es un aspecto negativo, sino que no tiene relación con el contenido, ya que se espera que los estudiantes utilicen ecuaciones cuadráticas para resolver problemas.

#### IV. Procedimientos inconclusos

En algunos casos muestran errores aritméticos.

$$\begin{aligned} X &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(0)}}{2} \\ X &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \\ X^1 &= \frac{2 + 0}{1} = 2 \\ X^2 &= \frac{2 - 0}{1} = 2 \end{aligned}$$

Figura 18. Procedimiento del estudiante 6 al ítem, 6a.

En este caso, se observa que los estudiantes se apropian medianamente del procedimiento de solución, por ello demanda el diseño de una actividad que aclare los pasos y tome en cuenta las operaciones aritméticas que se realicen para evitar los errores que cometen, por ejemplo al multiplicar por cero o los signos.

#### V. Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática incompleta.

No asocian correctamente los valores de ésta tomando en cuenta su forma o clasificación, por ejemplo, la ecuación  $x^2 + 7 = 0$  ellos asocian  $a=1$ ,  $b=7$  y  $c=0$

cuando lo que no se tiene es el término lineal, por lo tanto b sería 0 y c=7.

$$e) x^2 - 49 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -49 \quad c = 0$$

$$x = \frac{-(-49) \pm \sqrt{(-49)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)} = \frac{49 \pm \sqrt{2401 - 4}}{2} = \frac{49 \pm \sqrt{2397}}{2}$$

$$\sqrt{48.9}$$

$$x_1 = \frac{49 + 48.9}{2} = \frac{97.9}{2} = 43.7$$

Figura 19. Procedimiento del estudiante 10 al ítem 6e

A continuación, en la Tabla 6 se presenta la frecuencia de errores por ítem en el instrumento aplicado:

Tabla 6. Errores por ítem

Ítem	Errores					Total
	I	II	III	IV	V	
1	7	0	0	0	0	21
2	15	0	0	0	0	23
3	7	0	0	0	0	21
4	14	0	0	0	0	14
5 <sup>a</sup>	0	18	0	2	0	20
5b	0	0	14	0	0	14
6a	0	4	0	2	8	14
6b	0	4	0	0	8	12
6c	0	2	0	0	9	11
6d	0	4	0	0	2	7
6e	0	1	0	4	7	12
6f	0	3	0	2	5	10
Total	43	36	14	10	16	



Una vez calculada la frecuencia de estos errores presentes en el instrumento, a continuación se presenta la relación que guardan estos errores con las clasificaciones anteriormente rescatadas de la literatura en la Tabla 7:

*Tabla 7.* Relación de los errores encontrados con los propuestos por la literatura.

<b>Error</b>		<b>Socas (1997)</b>	<b>Radatz (1979)</b>	<b>Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)</b>
E. I	Definiciones incorrectas o preconcepciones	Errores con origen en actitudes afectivas y emocionales	Dificultades del lenguaje Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	Empleo incorrecto de propiedades y definiciones
E. II	Procedimientos propios no válidos		Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes	Empleo incorrecto de propiedades y definiciones
E. III	Utilización de la aritmética en situaciones que demandan el uso del álgebra.	Ausencia de sentido: errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética	Dificultades del lenguaje	Interpretación incorrecta del lenguaje
E. IV	Procedimientos inconclusos	Ausencia de sentido: Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	Empleo incorrecto de propiedades y definiciones Errores al operar algebraicamente
E. V	Asociaciones incorrectas de los elementos de una	Ausencia de sentido: Errores de procedimiento	Aprendizaje deficiente de hechos,	Datos mal utilizados

	ecuación cuadrática incompleta.	en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.	destrezas y conceptos previos	Empleo incorrecto de propiedades y definiciones
--	---------------------------------	--	-------------------------------	---

### 5.3 Demandas cognitivas

Esta categoría se centra en el estudio de “las tareas mediante las cuales se reta al alumno a dar respuesta a diversas cuestiones cuyo propósito está en el logro del aprendizaje y en la superación de los errores relativos al tema” (Rico, 2013, p. 23). Las tareas matemáticas y su vinculación con las expectativas de aprendizaje y las competencias matemáticas configuran esta categoría. Por ello, a continuación, se presentan aquellas tareas que favorecen el cumplimiento de los objetivos específicos de las expectativas antes mencionadas.

#### *Expectativa 1. Caracterizar y reconocer ecuaciones cuadráticas*

El estudio del álgebra en la educación secundaria se ha abordado de forma tradicional “priorizando los tratamientos procedimentales y rutinarios” (Hurtado y Torres, 2015, p.3), lo cual refleja la ausencia de una reflexión conceptual sobre los procedimientos y los elementos teóricos necesarios para este contenido matemático.

Ésta puede ser una razón por la que los alumnos sólo presentan ideas cuando se les cuestiona acerca del concepto de ecuación cuadrática pues no se han apropiado del concepto o de una definición completa acerca de lo que formalmente es. Por esta razón y con base en los objetivos específicos de esta expectativa, es necesaria una actividad en la que los estudiantes pongan en juego sus ideas previas para dar paso entonces a la formalización del concepto de ecuación cuadrática. Ejemplo:

**Consigna 1 :** De las siguientes ecuaciones, marca con una X aquellas que para ti no son ecuaciones cuadráticas.

$x + 2 = x + 8$		$x^2 + 3x = 0$	
$x^2 + 18x + 81 = 0$		$-3x^2 + 14x^4 + 5x^3 + 8x - 2$ $= 0$	
$8x^2 = 16$		$x + 4 = 0$	
$5x^3 + 2x^2 - x + 2 = 25$		$2x^2 + 6 = 0$	
$x + y = 17$		$25 = 5x^2$	

Esto para posteriormente solicitar que se encierren las ecuaciones cuadráticas y partir de ellas identificar sus características y llegar a una definición formal guiándose de las siguientes preguntas:

- ¿Qué es lo que distingue a estas ecuaciones de las demás?
- ¿Cuáles son las partes que componen a una ecuación cuadrática?
- ¿Qué tienen en común y qué diferente entre sí, esas ecuaciones cuadráticas?
- ¿Qué No cumplieron las expresiones que tacharon que según ustedes no son ecuaciones cuadráticas?
- ¿Qué cumplen las ecuaciones que encerraron?

Definición: Una ecuación cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  donde a, b y c son los coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los reales y  $a \neq 0$ .

Con esta actividad se pretende desarrollar que los estudiantes sean quienes expresen y representen información matemática contenida en una situación, en este caso al identificar las ecuaciones cuadráticas en su forma simbólica y la clasificación de éstas. Por ello, las capacidades que se pretende que desarrollen son:

1. Construir ejemplos de ecuaciones cuadráticas simbólicamente
2. Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general (completas)
3. Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas
4. Identificar el coeficiente cuadrático
5. Identificar el coeficiente lineal
6. Identificar el coeficiente independiente

### *Expectativa 2. Resolver ecuaciones cuadráticas según su tipo*

Si bien es cierto que este tipo de contenidos escolares se aborda primordialmente desde el aspecto procedimental, es necesaria una actividad de resolución de ecuaciones cuadráticas en las que se indique cuál método se debe utilizar, asimismo, promover la argumentación por parte de los estudiantes en cada paso que vayan realizando.

Una actividad para esta situación puede ser un problema en el que los alumnos modelen una ecuación a partir de lo expresado y solicitar en diferentes equipos que las resuelvan de diferente manera. Por ejemplo:

**Consigna 2.** Reunidos en equipos de 3 personas, resuelvan el siguiente problema:

*Un terreno de forma rectangular tiene por área,  $3600m^2$ , ¿cuáles son las dimensiones del terreno?*

Consideraciones previas: Establecer diferentes tipos de terrenos, para obtener diferentes tipos de ecuaciones, para que finalmente, los alumnos hagan una representación en una cartulina y justifiquen su procedimiento de solución. Se puede complementar esta actividad proponiendo ecuaciones cuadráticas completas e incompletas y solicitar que las resuelvan cada una por un método específico.

Con este tipo de actividades se pretende desarrollar las competencias: a) Validar procedimientos y resultados, ya que consiste en que los estudiantes expliquen y justifiquen sus procedimientos, b) Manejar técnicas eficientemente, donde usen eficientemente procedimientos para efectuar los cálculos que se les soliciten.

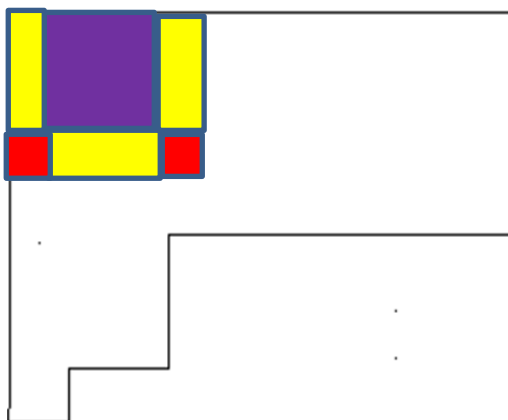
### *Expectativa 3. Aplicar ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas*

Uno de los objetivos específicos de esta expectativa es que los alumnos construyan representaciones simbólicas para resolver problemas en contextos no matemáticos que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas por lo que para lograrlo necesitan aplicar correctamente las operaciones algebraicas implícitas.

Esta expectativa pretende que los alumnos modelen ecuaciones cuadráticas a partir de situaciones. Por ello, este tipo de actividad demanda dar un problema a los estudiantes con el fin de que ellos encuentren la ecuación con la que se pueden encontrar sus soluciones.

**Consigna 3** Reunidos en equipos de 4 personas, analicen la siguiente situación:

Se quiere ampliar una habitación a todas las dimensiones de un terreno de la que esta forma parte que tiene la siguiente forma:



Con las piezas que se les entregaron, completen todas las partes que forman el terreno y encuentren la expresión algebraica que representa ese terreno tomando en cuenta los valores de cada una de las piezas que utilicen. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno, a partir de las de la habitación?

## **CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN**

En el análisis de instrucción el foco de atención es la enseñanza, por ello, el protagonismo se encuentra en las tareas matemáticas. Aquí el profesor debe identificar, describir y organizar dichas tareas para diseñar y ejecutar las actividades de enseñanza y aprendizaje que constituirán la unidad didáctica. Este análisis supone “la transformación y adaptación de las consideraciones realizadas en los dos análisis anteriores a las condiciones que se dan en un marco, para su interpretación” (Rico, 2013, p.23) ya que se basa en los resultados de los análisis anteriores (análisis de contenido y análisis cognitivo).

El papel de las tareas en el análisis de instrucción es determinante, por ello éstas deben cumplir con las siguientes condiciones (Flores, Gómez y Marín, 2010):

1. ser compatibles con el análisis de contenido,
2. deben contribuir a las expectativas de aprendizaje descritas en el análisis cognitivo y afrontar las limitaciones de aprendizaje,
3. incorporar recursos y materiales que facilitan poner en juego capacidades como las establecidas en el análisis cognitivo,
4. la reunión de las tareas previstas deben constituir un conjunto coherente en la planificación de las secuencias de aprendizaje y
5. deben concretar y ser compatibles con la forma de llevar a cabo la gestión de la clase de manera que sea posible y se relacione de manera adecuada con las expectativas de aprendizaje.

(p. 11)

La categoría del análisis de instrucción es: Funciones y tipos de tareas la cual se describe y desarrolla a continuación.

### **6.1 Funciones y tipos de tareas**

Las tareas matemáticas escolares o tareas matemáticas son “actividades concretas que implican una actuación matemática de alumnos y que identifican la forma en que vamos a llevar a cabo la enseñanza de nuestras clases” (Flores, Gómez y Marín, 2010, p. 9) para el desarrollo de la unidad didáctica. Por ello, a continuación, se presentan las tareas que serán parte de las sesiones que constituirán la unidad didáctica.

## ***Sesión 1. Reconocimiento de ecuaciones cuadráticas***

**Conceptos básicos:** Ecuación cuadrática, Miembros, Términos, Incógnita, Soluciones, Grado, Ecuación cuadrática completa, Ecuaciones cuadráticas incompletas

**Sistemas de representación:** Simbólico

**Contextos y situaciones:** Subestructuras (métodos de solución)

**Capacidades a desarrollar:**

- C1.1 Construir ejemplos de ecuaciones cuadráticas simbólicamente
- C2.1 Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general (completas)
- C3.1 Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas
- C4.1 Identificar el coeficiente cuadrático
- C5.1 Identificar el coeficiente lineal
- C6.1 Identificar el coeficiente independiente
- C7.1 Reconocer ecuaciones cuadráticas
- C8.1 Caracterizar ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas

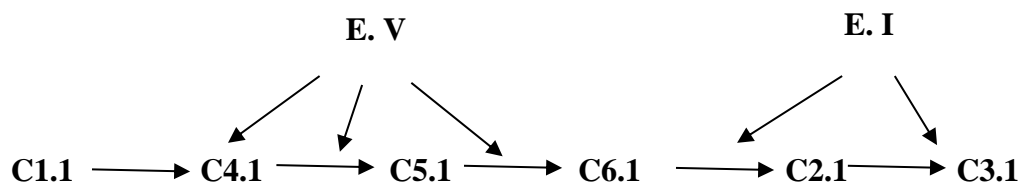
**Errores:**

- E.I Definiciones incorrectas o preconcepciones
- E.V Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

**Expectativas de aprendizaje:**

Caracterizar y reconocer ecuaciones cuadráticas

**Caminos de aprendizaje:**



**Tarea 1. (Duración aproximada: 15')**

**Formulación:** De las siguientes ecuaciones, marca con una X aquellas que para ti no son ecuaciones cuadráticas y contesta las preguntas

$x + 2 = x + 8$		$x^2 + 3x = 0$	
$x^2 + 18x + 81 = 0$		$-3x^2 + 14x^4 + 5x^3 + 8x - 2 = 0$	
$8x^2 = 0$		$x + 4 = 0$	
$5x^3 + 2x^2 - x + 2 = 25$		$2x^2 + 6 = 0$	
$x + y = 17$		$25 = 5x^2$	

**Meta:** En esta actividad se pretende que los estudiantes pongan en juego sus ideas previas para dar paso entonces a la formalización del concepto de ecuación cuadrática por medio del planteamiento de los siguientes cuestionamientos:

- ¿Qué es lo que distingue a estas ecuaciones de las demás?
- ¿Cuáles son las partes que componen a una ecuación cuadrática?
- ¿Qué tienen en común y qué diferente entre sí, esas ecuaciones cuadráticas?
- ¿Qué No cumplieron las expresiones que tacharon que según ustedes no son ecuaciones cuadráticas?
- ¿Qué cumplen las ecuaciones que no tacharon?

Definición: Una ecuación cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  donde a, b y c son los coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los reales y  $a \neq 0$ .

**Materiales y recursos:** Pintarrón, libreta.

**Capacidades:**

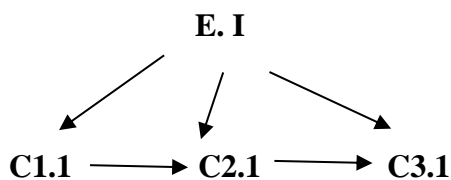
- C1.1** Construir ejemplos de ecuaciones cuadráticas simbólicamente
- C2.1** Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general (completas)
- C3.1** Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas
- C7.1** Reconocer ecuaciones cuadráticas

**Errores:**

- E.I** Definiciones incorrectas o preconcepciones



**Caminos de aprendizaje:**



**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado.

**Situación de aprendizaje:** Se pretende, que sean los estudiantes quienes expresen y representen información matemática contenida en una situación, en este caso al identificar las ecuaciones cuadráticas en su forma simbólica y la clasificación de éstas.

**Agrupamiento:** Los alumnos estarán organizados en gran grupo.

**Interacción:** Los cuestionamientos serán clave para guiar la interacción de los estudiantes para promover un debate.

## **Tarea 2. (Duración aproximada, 15')**

**Formulación:** Retomando la definición de ecuación cuadrática, vamos a analizar sus partes y reciben el nombre de:

$ax^2$  = Término cuadrático

$bx$  = Término lineal

$c$  = Término independiente

A partir de esta información, identifiquen los términos cuadráticos, lineales e independientes de cada una de las ecuaciones que ustedes consideraron como ecuaciones cuadráticas, utilizando un color para cada uno. Ejemplo:

$$x^2 + 18x + 81 = 0$$

**Meta:** Se pretende que los estudiantes identifiquen los términos cuadráticos, lineales e independientes de las ecuaciones de la tarea anterior con el fin de que se familiaricen con las características de cada uno y sean capaces de identificarlos al momento de analizar los métodos de solución.

**Materiales y recursos:** Pintarrón, libreta, colores.

**Capacidades:**

**C4.1** Identificar el término cuadrático

**C5.1** Identificar el término lineal

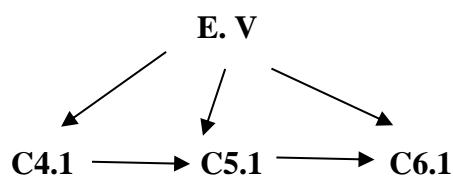
**C6.1** Identificar el término independiente

**Errores:**

**E.V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

**Contenido Matemático:** Ecuaciones de segundo grado

**Caminos de aprendizaje:**



**Situación de aprendizaje:** Los estudiantes, al momento de identificar los coeficientes cuadrático, lineal e independiente se familiarizarán con las características de cada uno al diferenciarlos por medio de la utilización de colores.

**Agrupamiento:** Los alumnos estarán organizados en gran grupo.

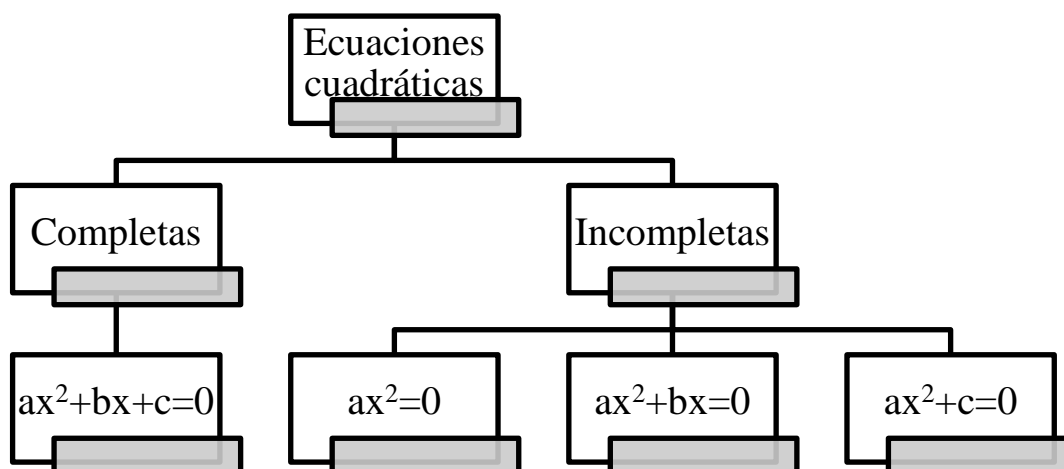
**Interacción:** Se permitirá la participación de los estudiantes para presentar algunos ejemplos en el pintarrón de lo que hicieron para favorecer una confrontación de resultados.

**Tarea 3. (Duración aproximada, 10')**

**Formulación:** Después de identificar los términos cuadráticos, lineales e independientes de estas ecuaciones, vamos a analizarlas

- ¿Qué similitudes encuentran en TODAS las ecuaciones?
- ¿Qué diferencias encuentran?

**Meta:** Que los alumnos encuentren que la similitud es que todas poseen un término cuadrático y sus diferencias son que algunas tienen término lineal o independiente, para entonces formalizar que las ecuaciones cuadráticas se clasifican de la siguiente manera:



COMPLETAS: Tienen tres términos: 1) cuadrático, 2) lineal, 3) independiente

INCOMPLETAS:

- Incompleta:  $ax^2 = 0$   
Tiene 1 término cuadrático
- Incompleta MIXTA  $ax^2 + bx = 0$   
Tiene 2 términos: 1) cuadrático, 2) lineal
- Incompleta PURA  $ax^2 + c = 0$   
Tiene 2 términos: 1) cuadrático, 2) independiente

**Materiales y recursos:** Pintarrón, Libreta

**Capacidades:**

**C2.1** Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general (completas)

**C3.1** Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas

**C8.1** Caracterizar ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas

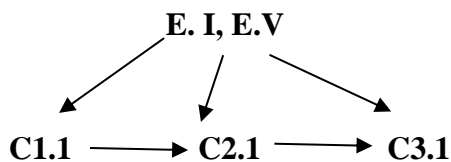
**Errores:**

**E.I** Definiciones incorrectas o preconcepciones

**E.V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado

**Caminos de aprendizaje:**



**Situación de aprendizaje:** Después de identificar las partes de las ecuaciones cuadráticas de la primera tarea, se pretende que al observar sus características sean ellos quienes las clasifiquen en completas e incompletas. Asimismo, que en el mapa conceptual agreguen comentarios que les permitan diferenciar las ecuaciones cuadráticas incompletas (incompleta mixta: posee término cuadrático e independiente).

**Agrupamiento:** Los alumnos estarán organizados en gran grupo.

**Interacciones:** El profesor fungirá como coordinador de la tarea para introducir la siguiente.

#### **Tarea 4. (Duración aproximada, 10')**

**Formulación:** Identifica el término cuadrático, lineal e independiente y ubica en los espacios del mapa conceptual las siguientes ecuaciones cuadráticas según su clasificación.

$5x + 3 = 15x^2$	$18x^2 = 1$	$x^2 = 0$	$0 = 3x^2 + 18$
$0 = 5x^2$	$3x^2 = 6x - 2$	$x^2 = 5x$	$2x^2 = 10x$
$x^2 + 3 = 0$	$x^2 = 6 + x$	$25x^2 + 12x = 0$	$2x^2 = 0$

**Meta:** Lograr que los alumnos clasifiquen por ellos mismos las ecuaciones cuadráticas que se les presenten al promover que las incluyan en el mapa conceptual que muestra las características de cada tipo de ecuación.

**Materiales y recursos:** Pintarrón, libreta.

**Capacidades:**

- C2.1** Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general (completas)
- C3.1** Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas
- C8.1** Caracterizar ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas

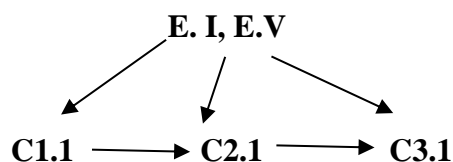
**Errores:**

**E.I** Definiciones incorrectas o preconcepciones

**E.V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado

**Caminos de aprendizaje:**



**Situación de aprendizaje:** Se pretende que los estudiantes al tener los antecedentes de la clasificación de las ecuaciones y sus características, ellos pongan en práctica para que sean ellos quienes clasifiquen otras ecuaciones.

**Agrupamiento:** El grupo estará organizado en forma de gran grupo.

**Interacciones:** El profesor al finalizar la actividad promoverá la participación de los estudiantes para que pasen al frente a colocar una ecuación cuadrática en el mapa conceptual según el tipo de ésta, con el fin de que argumenten el porqué de su elección.

## **Sesión 2. Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas**

**Conceptos básicos:**

(Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas)

1. Operaciones inversas
2. Factorización
3. Fórmula general

**Sistemas de representación:** Verbal, simbólico

**Contextos y situaciones:** Subestructuras (métodos de solución)

**Capacidades a desarrollar:**

**C2.1** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por fórmula general

**C2.2** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por factorización

**C2.3** Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas

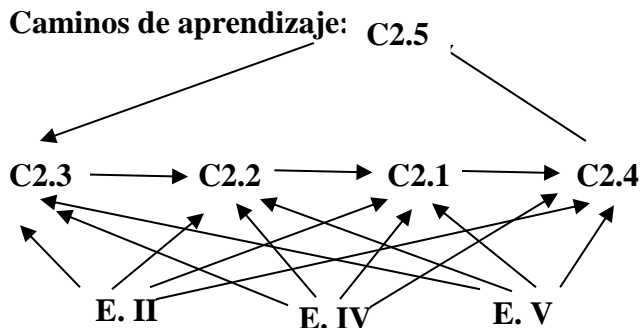
**C2.4** Conocer que todas las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver utilizando fórmula general.

**C2.5** Aplicar operaciones algebraicas para resolver problemas en los que se utilicen ecuaciones cuadráticas.

**Errores:**

- E. II Procedimientos propios no válidos
- E. IV Procedimientos inconclusos
- E. V Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática

**Caminos de aprendizaje:**



**Expectativas de aprendizaje:**

Resolver ecuaciones cuadráticas según su tipo

**Tarea 1. (Duración aproximada 10')**

**Formulación:** En las hojas se encuentran ecuaciones cuadráticas de un lado y su procedimiento de solución del otro, observa cuidadosamente los elementos de la ecuación (término cuadrático, lineal e independiente) para determinar cuál es su solución y unirla con un segmento.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x + 9)(x + 9) = 0$$

$$x + 9 = 0; \quad x + 9 = 0$$

$$x + \cancel{9} - 9 = 0 - 9; \quad x + \cancel{9} - 9 = 0 - 9$$

$$x = -9; \quad x = -9$$

$$x^2 = 16$$

$$2x^2 - 18 + 18 = 0 + 18$$

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{18}{2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$x = 3; \quad x = -3$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

$$x = 4; \quad x = -4$$

$$x^2 + 18x + 81 = 0$$

$$x(x + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad x + 4 = 0$$

$$x + 4 - 4 = 0 - 4$$

$$x = -4$$

$$2x^2 + 18 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

**Materiales y recursos:** Hojas de máquina de colores, pintarrón, libreta.

**Capacidades:**

**C2.1** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por fórmula general

**C2.2** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por factorización

**C2.3** Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas

**C2.5** Aplicar operaciones algebraicas para resolver problemas en los que se utilicen ecuaciones cuadráticas.

**C2.6** Relacionar la ecuación con el método de solución sugerido

**Errores:**

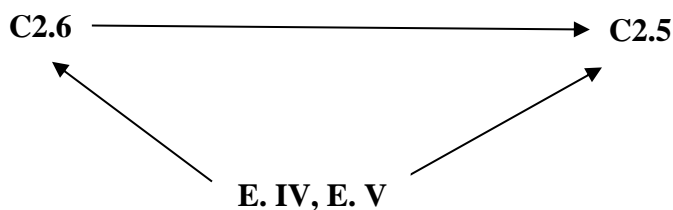
**E. II** Procedimientos propios no válidos

**E. IV** Procedimientos inconclusos

**E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática

**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado

***Caminos de aprendizaje:***



***Situación de aprendizaje:*** Se pretende que los alumnos pongan en juego los aprendizajes de la sesión anterior en donde identificaban los coeficientes de la ecuación cuadrática para relacionarlos con su procedimiento de solución según su tipo. Se realizará de esta manera para que sean ellos quienes encuentren qué se hace con cada término para obtener sus soluciones en lugar de que reproduzcan el procedimiento de solución.

***Agrupamiento:*** El grupo estará organizado en gran grupo.

***Interacciones:*** Las interacciones en este caso serán más que nada por parte de los alumnos, para al final solo socializar las respuestas en conjunto con el profesor.

**Tarea 2. (Duración aproximada, 25')**

***Formulación:*** El profesor le entregará a cada equipo una ecuación, en la cual los estudiantes tendrán que anotar en la cartulina lo siguiente:

- ¿Qué tipo de ecuación es según la clasificación vista en la sesión anterior?
- ¿Cuáles son los términos (cuadrático, lineal e independiente) de la ecuación?
- El Método y desarrollo utilizado para encontrar la o las soluciones de la ecuación cuadrática
- ¿Qué se tuvo que realizar para encontrar las soluciones de la ecuación?
- ¿Existirá otra manera de resolver esa misma ecuación? (Con este cuestionamiento, se pretende introducir a los estudiantes a que todas las ecuaciones de segundo grado se pueden resolver por fórmula general sin excepciones)

***Meta:*** Lograr que los estudiantes identifiquen el tipo de ecuación que es según la clasificación analizada en la sesión anterior y vean la relación con la solución según su tipo



y al final poner una nota extra que mencione que todas las ecuaciones de segundo grado sin excepción se pueden resolver utilizando la fórmula general.

**Materiales y recursos:** Hojas de máquina de colores, papel bond, pintarrón, libreta.

**Capacidades:**

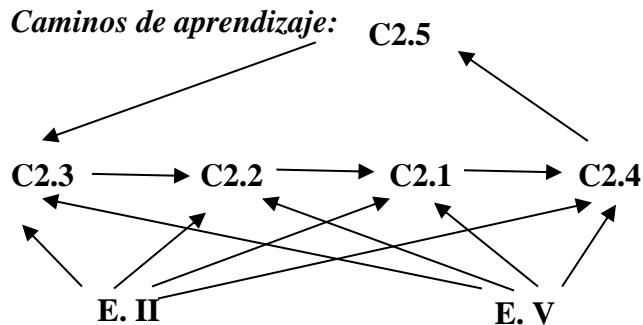
- C2.1 Resolver ecuaciones cuadráticas completas por fórmula general
- C2.2 Resolver ecuaciones cuadráticas completas por factorización
- C2.3 Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas
- C2.5 Aplicar operaciones algebraicas para resolver problemas en los que se utilicen ecuaciones cuadráticas.

**Errores:**

- E. II Procedimientos propios no válidos
- E. IV Procedimientos inconclusos
- E. V Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática

**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado

**Caminos de aprendizaje:**



**Situación de aprendizaje:** Los estudiantes, al entregárseles la ecuación cuadrática y su procedimiento de solución, serán quienes identifiquen primeramente qué tipo de ecuación es, qué elementos tiene (término cuadrático y lineal, sólo término cuadrático o término cuadrático e independiente) para observar qué se hace con ellos para encontrar sus soluciones. Al final se anotarán los nombres de los procedimientos de solución (fórmula general, factorización u operaciones inversas) y se pondrá una leyenda ejemplo:

Éste es el método de operaciones inversas y sirve para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas puras, ej.:  $ax^2 + c = 0$ .

**Agrupamiento:** Reunidos en 5 pequeños grupos de 5 personas cada uno.

**Interacciones:** Las interacciones se realizarán por parte del profesor para coordinar las exposiciones de los procedimientos por parte de los estudiantes, así como también para orientar a los pequeños grupos en cuanto a posibles dudas.

**Tarea 3. (Duración aproximada, 15')**

**Formulación:** Con la información analizada hasta el momento, resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas según su tipo.

**Meta:** Que los alumnos apliquen lo aprendido de métodos de solución de ecuaciones cuadráticas.

$$x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 = 81$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

**Materiales y recursos:** Pintarrón, libreta.

**Capacidades:**

**C2.1** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por fórmula general

**C2.2** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por factorización

**C2.3** Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas

**C2.5** Aplicar operaciones algebraicas para resolver problemas en los que se utilicen ecuaciones cuadráticas.

**Errores:**

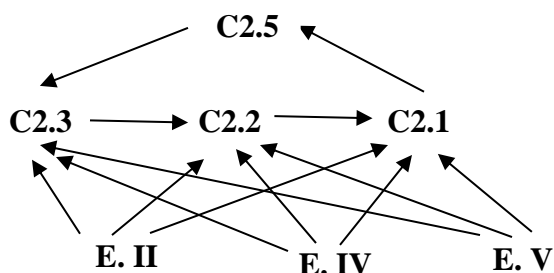
**E. II** Procedimientos propios no válidos.

**E. IV** Procedimientos inconclusos.

**E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado.

**Caminos de aprendizaje:**



**Situación de aprendizaje:** Se pretende que, con base en la información de las tareas anteriores como las exposiciones y la sesión 1, los alumnos sean capaces de identificar lo que se hace en cada caso para resolver ecuaciones cuadráticas según su tipo.

**Agrupamiento:** La organización será en gran grupo.

**Interacciones:** Las interacciones serán de los estudiantes ya que se pretende que sean ellos quienes resuelvan las ecuaciones según su tipo, sin embargo, el profesor estará pendiente de cualquier duda.

### **Sesión 3. Resolver problemas con ecuaciones cuadráticas**

**Conceptos básicos:** Ecuación cuadrática, Miembros, Términos, Incógnita, Soluciones, Grado, Ecuación cuadrática completa, Ecuaciones cuadráticas incompletas

(Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas)

1. Operaciones inversas
2. Factorización
3. Fórmula general

**Sistemas de representación:** Geométrico, Verbal, Simbólico.

**Contextos y situaciones:** Cálculo de áreas.

**Capacidades a desarrollar:**

**C3.1** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación verbal para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

**C3.2** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación gráfico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

**C3.3** Interpretar la solución de la ecuación cuadrática en el contexto del problema planteado.

**Errores:**

- E.II** Procedimientos propios no válidos.
- E. III** Utilización de la aritmética en situaciones que demandan el uso del álgebra.
- E. IV** Procedimientos inconclusos.
- E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

**Expectativas de aprendizaje:**

Aplicar ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas.

**Caminos de aprendizaje:**

**E. II, E. III, E. IV, E. V**



En esta sesión se pretende incluir los resultados del análisis de contenido, en específico de la fenomenología, en donde se encontró que los fenómenos que dieron origen al contenido matemático fueron los relacionados con el cálculo de áreas, de aquí que en las tareas diseñadas consideren estos contextos para obtener ecuaciones.

**Tarea 1 (Duración aproximada, 10')**

**Formulación:** Organizados en 5 pequeños grupos (3 de 4 personas y 2 de 5 personas) realicen lo siguiente:

Con las piezas que se te entregaron, construye un rectángulo.



(1 morado, 3 amarillos y 2 rojos)

Supongamos que el rectángulo formado con estas piezas representa la habitación de una persona, si el cuadrado morado tiene por longitud de lado  $x$ , el amarillo  $x + 1$ , y el rojo  $1 \times 1$ .

- ¿Cuánto mide la base?
- ¿Cuánto mide la altura?
- ¿Cuál es el área de la habitación?

**Meta:** Que los alumnos encuentren una ecuación cuadrática

**Materiales y recursos:** Material didáctico manipulable



(1 morado, 3 amarillos y 2 rojos)

**Capacidades:**

**C3.1** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación verbal para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

**C3.2** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación gráfico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

**Errores:**

**E.II** Procedimientos propios no válidos

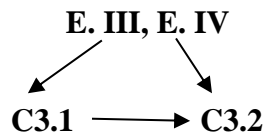
**E. III** Utilización de la aritmética en situaciones que demandan el uso del álgebra.

**E. IV** Procedimientos inconclusos

**E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática

**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado

**Caminos de aprendizaje:**



**Situación de aprendizaje:** Se pretende que los estudiantes encuentren que la longitud de los lados es  $(x+1)(x+2)$  para posteriormente obtener la ecuación  $x^2+3x+2=0$  y plantearles los siguientes cuestionamientos:

- ¿Qué tipo de ecuación es?
- ¿Cómo se puede saber que es una ecuación cuadrática?
- ¿Qué tipo de ecuación cuadrática es?
- Si quisiera conocer las dimensiones del rectángulo (largo y ancho) ¿Qué tendría que hacer?

- ¿Cómo podremos encontrar esa “solución” o “valor de x”?

Se espera también que resuelvan la ecuación según su tipo (completa) ya sea por fórmula general o factorización para en este caso hacer una intervención docente en donde se clarifique la solución según el contexto, por ejemplo, al mencionar que cuando se trata de distancias, no se pueden utilizar cantidades negativas.

**Agrupamiento:** 5 pequeños grupos.

**Interacciones:** Los alumnos reunidos en pequeños grupos discutirán qué se tiene que hacer para encontrar la longitud de los lados de la habitación.

**Tarea 2 (Duración aproximada, 10’)**

**Formulación:** Tomando en cuenta los valores de las piezas que se les entregaron, escriban la expresión algebraica que representa cada conjunto de fichas:



Cuadrado morado tiene por longitud de lado  $x$ , el amarillo  $x$  y  $1$ , y el rojo  $1 \times 1$ .

¿Cuál es la ecuación que representa esta situación?

- 1)
- 2)
- 3)

Si es necesario, se guiará a los estudiantes con las siguientes preguntas:

En el conjunto...

- ¿Cuántas fichas tengo cuyo valor es  $x^2$ ?
- ¿Cuántas fichas tengo cuyo valor es  $x$ ?
- ¿Cuántas fichas tengo cuyo valor es 1?

**Meta:** Que los alumnos encuentren las expresiones que se generan en los conjuntos de fichas para que se familiaricen con sus valores.

**Materiales y recursos:** Material didáctico manipulable.



**Capacidades:**

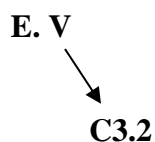
**C3.2** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación gráfico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

**Errores:**

**E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado

**Caminos de aprendizaje:**



**Situación de aprendizaje:** Se pretende que los alumnos se familiaricen con los valores de las fichas (el cuadrado morado tiene por longitud de lado  $x$ , el amarillo  $x$  y 1, y el rojo  $1 \times 1$ ) con el fin de funcionar como un antecedente para la siguiente tarea en la cual es imprescindible conocer su valor ya que este determinará la ecuación cuadrática que se obtiene de la situación.

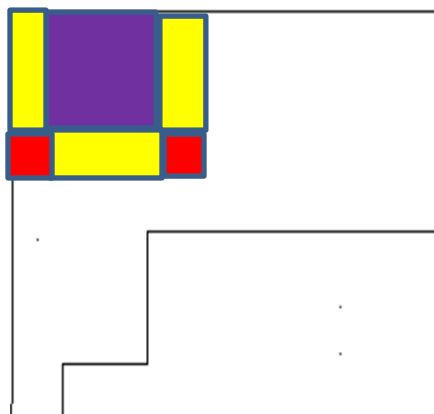
**Agrupamiento:** El grupo estará organizado en 5 pequeños grupos.

**Interacciones:** La interacción se realizará en los pequeños grupos para posteriormente, con ayuda del profesor compartir los resultados obtenidos en plenaria.

### Tarea 3 (Duración aproximada, 20')

**Formulación:** Organizados en los 5 pequeños grupos (3 de 4 personas y 2 de 5 personas) de la sesión anterior, analicen la siguiente situación:

Se quiere ampliar la habitación que tenemos a todas las dimensiones de un terreno que tiene la siguiente forma:



Con las piezas que se les entregaron, completen todas las partes que forman el terreno sin dejar espacios y encuentren la expresión algebraica que representa ese terreno, tomando en cuenta los valores de cada una de las piezas que utilicen.

**Meta:** Que los alumnos establezcan una relación entre las figuras geométricas y sus valores simbólicos con el fin de obtener ecuaciones cuadráticas para resolver problemas.

**Materiales y recursos:** Material didáctico manipulable.



**Capacidades:**

**C3.2** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación gráfico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

**C3.3** Interpretar la solución de la ecuación cuadrática en el contexto del problema planteado.

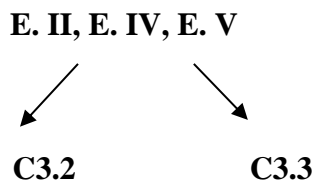
**Errores:**



- E. II Procedimientos propios no válidos.
- E. III Utilización de la aritmética en situaciones que demandan el uso del álgebra.
- E. IV Procedimientos inconclusos.
- E. V Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

**Contenido matemático:** Ecuaciones de segundo grado.

**Caminos de aprendizaje:**



**Situación de aprendizaje:** Se pretende promover que los estudiantes acomoden como crean conveniente las piezas para cubrir un plano que en este caso corresponde a un terreno, para posteriormente obtener expresiones algebraicas diferentes entre los equipos (para ello, se les dará un terreno diferente a cada uno) para obtener ecuaciones cuadráticas con base en los valores de cada pieza.

**Agrupamiento:** El grupo estará dividido en 5 pequeños grupos.

**Interacciones:** En esta tarea, las interacciones se darán primeramente entre los pequeños grupos para elegir cómo cubrir el plano, qué piezas utilizar, cuál sería la expresión que representa la situación, etc. Para posteriormente, permitir que los estudiantes pasen al pizarrón para compartir su procedimiento para llegar tanto a la ecuación como a sus soluciones.

## CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

Este análisis, según Gómez (2007):

Utiliza la información que surge de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para producir información que permita determinar la comprensión de los escolares en ese momento, los contenidos a tratar en el aula y los objetivos de aprendizaje que se deben buscar en el nuevo ciclo (p. 93).

En los análisis anteriores se establecieron expectativas de aprendizaje y errores para considerarlos en el diseño de tareas. En el análisis de actuación se pretende “1) establecer en qué medida y de qué manera se lograron las expectativas” y “2) explicar los logros anteriores en términos de la planificación (tareas diseñadas) y su implementación (lo que sucedió en clase, con particular atención a los ajustes que se realizaron a la planificación” (Romero y Gómez, 2015, p.11). Con el fin de conocer los logros que se obtuvieron en términos de aprendizaje

Por esta razón, a continuación, se presentan los resultados del análisis de actuación de mi práctica docente para la enseñanza de la ecuación cuadrática. Considerando los elementos sugeridos por Romero y Gómez (2015) para el diario del profesor en donde se incluyen las previsiones para cada tarea, las observaciones realizadas y los ajustes que se derivan de lo ocurrido en clase.

### ***Sesión 1. Reconocimiento de ecuaciones cuadráticas***

#### ***Tarea 1.***

*Compartir la meta con los escolares:* En este aspecto cabe mencionar que no se les mencionó la meta de la tarea ni de la sesión debido a que se pretendía que esta tarea la abordaran a partir de sus conocimientos previos; asimismo que no se había considerado desde el momento de la planificación realizarlo.

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* Las capacidades que se habían considerado para esta tarea fueron:

- C1.1** Construir ejemplos de ecuaciones cuadráticas simbólicamente
- C2.1** Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general (completas)
- C3.1** Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas
- C7.1** Reconocer ecuaciones cuadráticas

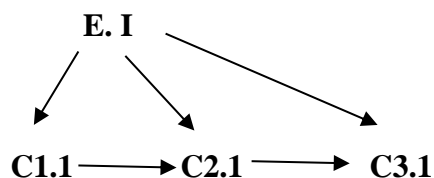
De éstas puedo decir que la capacidad que se promovió en mayor grado con la tarea 1 fue la **C7.1** pues las indicaciones sólo consistían en tachar aquellas que No son ecuaciones cuadráticas, por lo que puede entenderse que sólo implica reconocimiento de ecuaciones que son y que no son cuadráticas.

En la Tarea 1 confirmé que los estudiantes reconocen como características principales de la ecuación cuadrática el término cuadrático, el exponente y la igualación a cero. Esto último se considera que es una idea errónea.

En cuanto a los errores que se consideraron como parte de los caminos de aprendizaje para esta tarea, se consideró uno:

**E.I** Definiciones incorrectas o preconcepciones

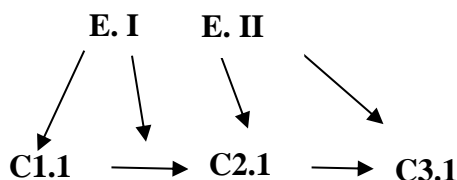
*Camino de aprendizaje:*



El cual se hizo presente con la estudiante **A10**, ya que no tachó la ecuación  $x + y = 17$ , es decir, la estaba considerando como ecuación cuadrática, de lo cual interpreto que, por el hecho de tener dos variables la estudiante la estaba considerando de segundo grado. También, al momento de la puesta en práctica de esta tarea, no se consideró en el camino de aprendizaje propuesto el error **E.II** (Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática) pues el estudiante **A13** estaba considerando la ecuación  $-3x^2 + 14x^4 + 5x^3 + 8x - 2 = 0$  como cuadrática, por lo cual se puede entender que no comprendió la definición en donde se menciona que el mayor exponente es 2 y él la estaba considerando sólo porque comienza con el término cuadrático.

De esta manera se propone un nuevo camino de aprendizaje para esta tarea:

*Camino de aprendizaje:*



*Ayudas:* Las ideas que se consideraron para la tarea consistieron en la realización de vistas periféricas en caso de que los estudiantes tuvieran dudas. Sin embargo, considero que hizo falta idear algunas nuevas; por ejemplo, abordar la definición en todo momento en las actividades posteriores con el fin de que los estudiantes se familiarizaran con ella y prevenir errores posteriores o simplemente contribuir a su aprendizaje. Así como también hizo falta pensar en problemas de modelación en donde se reforzaran estas características.

*Materiales y recursos:* Considerando la meta de esta tarea, se puede decir que transcurrió de forma prevista por el hecho de que sólo se esperaba que los alumnos reconocieran ecuaciones cuadráticas, sin embargo, una modificación que se puede realizar es utilizar material que sea más atractivo esto para llamar más la atención de los estudiantes, ya sea con hojas de colores.

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* La forma de agrupamiento de esta tarea fue en gran grupo y considero que fue la adecuada pues la comunicación que se pretendía establecer era para rescatar las ideas de todos y que todos las escucharan lo que permitiría retomarse para abordar una definición formal.

*Temporalización:* La tarea transcurrió según el tiempo previsto, sin embargo, al llevar a cabo la socialización, se realizó más rápido de lo esperado por el hecho de que las preguntas fueron coincidentes en cuanto al término cuadrático.

*Complejidad:* Considero que en este caso no hubo un grado de dificultad que se haya hecho presente, pues esta tarea más que nada se abordó desde los conocimientos previos de los estudiantes.

*Significatividad:* Esta tarea se consideró realizando previsiones acerca del reconocimiento de ecuaciones cuadráticas por lo que se obtuvo cierto grado de significatividad ya que se abordaron características fundamentales de las ecuaciones de segundo grado, sin embargo, considero que se pudo haber obtenido mayor significatividad en la socialización teniendo en cuenta las preguntas, las cuales se pueden reformular pues hubo algunas que guiaban a una misma respuesta. Por ello propongo las siguientes: ¿Cuál es la característica principal de las ecuaciones que no marcaron?, ¿Qué no cumplieron las ecuaciones que tacharon? ¿Por qué afirmas que son ecuaciones cuadráticas?, esto con el fin de que exploten todas las características en la medida de lo posible. También, puedo decir que en mi papel me faltó

problematizar más para favorecer la reflexión de los estudiantes en cuanto a las características de la ecuación cuadrática.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* Las previsiones con respecto a esta tarea, fueron también acertadas ya que la función de ésta era introducir a los estudiantes al contexto de las ecuaciones cuadráticas siendo ellos quienes las reconocieran. Aunque también considero que se puede mejorar por el hecho de que los alumnos tienen una idea errónea respecto a que este tipo de ecuaciones deben estar igualadas a cero cuando no siempre es así.

### ***Tarea 2.***

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* Para esta tarea, se consideraron las siguientes capacidades para desarrollar:

**C4.1** Identificar el término cuadrático

**C5.1** Identificar el término lineal

**C6.1** Identificar el término independiente

De las cuales considero que se cumplieron en la mayoría de los estudiantes pues no tuvieron problemas en identificarlos por medio de un colorama de la siguiente manera:  $x^2 + 18x + 81 = 0$ . De las capacidades que considero que se logró más que las demás fue la **C4.1** pues la tarea anterior permitió que los estudiantes relacionaran fundamentalmente las ecuaciones cuadráticas con el término cuadrático. El error que se consideró para estas capacidades como parte de los caminos de aprendizaje fue el **E. V** (Asociaciones incorrectas de los elementos de la ecuación cuadrática) el cual se presentó en esta tarea debido a que en algunos casos, los estudiantes confundían un término con otro en el caso del lineal e independiente pues en el caso del término cuadrático todos lo identificaron.

*Ayudas:* Considero que una de las ayudas que resultó productiva para esta tarea fue la utilización de colores para la identificación de los términos cuadrático, lineal e independiente ya que se les pidió que identificaran estos términos en las ecuaciones de la tarea anterior. La intención de utilizar colores consistía en que los escolares se familiarizaran con las características de los términos que componen a las ecuaciones cuadráticas asimismo para la ejecución de tareas posteriores. Al realizar las vistas periféricas noté que no tuvieron problema en hacerlo.

*Materiales y recursos:* En el análisis de instrucción, como mencionan Flores, Gómez y Marín, (S/F) “El foco de atención es la enseñanza. Se trata de hacer una descripción de los medios que va a poner en práctica el profesor para lograr sus propósitos”. Por ello, en esta tarea se pretendía que identificaran con colores los términos cuadrático, lineal e independiente de las ecuaciones de la tarea 1 que anotaron en su libreta. Por ello, el aspecto que favoreció que los estudiantes se apropiaran de las características de cada término fue la utilización de colores, lo cual se consideró después de estudiar el contenido por medio del análisis de contenido y análisis cognitivo. Cabe mencionar que esta utilización se puede dar sólo para familiarizarse con las características y posteriormente, sean capaces de identificarlos sin la utilización de colores.

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* En este caso, la organización gran grupo permitía observar los resultados individuales para observar capacidades o errores específicos de cada estudiante, esto como antecedente para que después ellos las clasificaran según su tipo.

*Temporalización:* En el caso de esta tarea el tiempo previsto fue superior al tiempo en el que realizaron esta tarea, pues no tuvieron dificultad para realizarla pues las tareas anteriores les permitieron darse cuenta con facilidad de lo que tenían que hacer en esta tarea.

*Complejidad:* Se puede decir que la tarea tuvo un nivel de dificultad bajo para los estudiantes, pues un indicador que me hizo darme cuenta de esta situación es que tardaron menos del tiempo previsto para la realización de esta tarea.

*Significatividad:* Considero que esta actividad tuvo un considerable grado de significatividad debido a que se fomentó por medio de la identificación de los términos cuadrático, lineal, e independiente que son base para la tarea posterior en donde el centro es la identificación de los términos de una ecuación cuadrática.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* Se diseñó esta tarea así por el hecho de que la clasificación de ecuaciones cuadráticas se da según los elementos de ésta. Si es completa tiene tres términos, uno cuadrático, uno lineal y uno independiente, si es incompleta sólo tiene un término cuadrático, si es incompleta mixta tiene un término cuadrático y un término lineal y si es incompleta pura tiene un término cuadrático y un término independiente,

asimismo que algunos cuestionamientos que se mencionarán posteriormente conectaban esta tarea con la posterior.

### **Tarea 3**

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* En este caso, el objetivo de la tarea es que los estudiantes conozcan la clasificación de ecuaciones cuadráticas según su forma, por medio de un mapa conceptual presentado por el profesor, para que los estudiantes fueran quienes encontraran las características, por ello, se les plantearon las siguientes preguntas:

- ¿Qué similitudes encuentran en TODAS las ecuaciones?
- ¿Qué diferencias encuentran?

Las respuestas de los estudiantes fueron las esperadas, pues respondieron que tienen en común que todas tenían un término cuadrático y la diferencia era que unas tenían término lineal y otras independiente o ambos, por ello, las capacidades que se propusieron a desarrollar en esta tarea se cumplieron.

Sin embargo, también se promovieron las capacidades:

**C4.1** Identificar el término cuadrático

**C5.1** Identificar el término lineal

**C6.1** Identificar el término independiente

En el caso de los errores que se consideraron en los caminos de aprendizaje se previeron los siguientes:

**E.I** Definiciones incorrectas o preconcepciones

**E.V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

Cabe mencionar que en esta tarea no se presentaron los errores, pues los estudiantes sólo tenían que conocer la clasificación como antecedente para la siguiente tarea. Por lo tanto el camino de aprendizaje para esta tarea quedaría de la siguiente manera:

***Camino de aprendizaje:***

**C1.1** → **C2.1** → **C3.1**

*Ayudas:* La ayuda primordial fue la presentación del mapa conceptual de la clasificación de ecuaciones y la relación con las tareas anteriores.

*Materiales y recursos:* En este caso se utilizaron hojas de colores que se colocaron en el pintarrón conforme se abordaba la clasificación.

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* La organización grupal siguió siendo de forma de gran grupo, pues en este caso los resultados de manera individual eran los primordiales.

*Temporalización:* En esta tarea, el tiempo previsto y realizado coincidió, pero considero que se hubiera podido aprovechar problematizando sobre las posibles formas de clasificación propuestas por los escolares.

*Complejidad:* No se tuvo dificultad debido a que sólo se les presentó a los estudiantes la forma en que las ecuaciones cuadráticas se clasifican, aspecto que se evidenció en el momento en que, en plenaria, los estudiantes clasificaron ecuaciones cuadráticas según su forma identificando las características de cada una.

*Significatividad:* Considero que el grado de significatividad de esta tarea fue un tanto bajo, pues en este caso el profesor fue quien les dio la clasificación como antecedente para la tarea posterior, aunque cabe mencionar que sin conocer esta clasificación no es posible realizar la clasificación de otras ecuaciones cuadráticas según su tipo. Una de las mejoras que se puede hacer a esta tarea es que los estudiantes propongan por sí mismos una clasificación de ecuaciones cuadráticas con base en las características de las que analizaron hasta el momento.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* Esta tarea tenía como finalidad ser un antecedente para la tarea posterior para lo cual sólo se pretendía que los estudiantes conocieran esta clasificación de ecuaciones cuadráticas para que después ellos pudieran clasificarlas.

#### ***Tarea 4.***

*Compartir la meta con los escolares:* No se compartió en esta sesión.

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* Como ya se mencionó anteriormente, esta tarea tiene como base las tareas anteriores en donde se identificaban los términos cuadrático, lineal e independiente para entonces en esta tarea, clasificar las



ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas (mixtas y puras). Las capacidades que se consideraron para desarrollar en esta tarea son:

**C2.1** Expresar ecuaciones cuadráticas en su forma general (completas)

**C3.1** Expresar ecuaciones cuadráticas incompletas

**C8.1** Caracterizar ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas

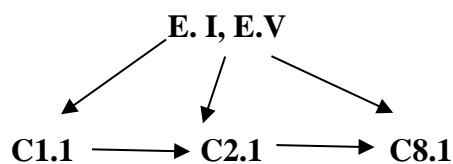
Con base en los resultados de la aplicación de la tarea, puedo decir que la tarea 2 fue de gran ayuda. Las capacidades que también estuvieron presentes en esta tarea fueron la **C4.1**, **C5.1**, **C6.1** (Identificar término cuadrático, lineal e independiente) ya que al tener identificados los términos que componen a una ecuación cuadrática es más sencillo clasificarlas según su forma. Las capacidades **C2.1** y **C3.1** mencionan que los estudiantes “expresen” ecuaciones cuadráticas tanto en su forma general (completas); sin embargo, en esta tarea los estudiantes no expresaron ecuaciones, sino que las caracterizaron, por ello puedo decir que la capacidad más significativa presente en esta tarea fue la **C8.1** (Caracterizar ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas) considerando los resultados obtenidos en las tareas anteriores. Los errores que se consideraron para esta tarea fueron:

**E.I** Definiciones incorrectas o preconcepciones

**E.V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

En el camino de aprendizaje considerado, se presentó en algunos casos que los estudiantes confundían una ecuación, por ejemplo  $18x^2 = 1$  con una ecuación incompleta, por el hecho de que sólo consideraron que poseía el término cuadrático, ignorando el término independiente. Esta situación evidenció la aparición del error **E.V** (Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática, pero aquí puedo agregar que sólo cuando la ecuación estaba desordenada, pues los estudiantes están acostumbrados a que en una ecuación cuadrática primero está el término cuadrático, después el lineal y al final el independiente cuando no siempre es así, por lo cual el camino de aprendizaje considerado, quedó de la siguiente manera:

*Caminos de aprendizaje:*



Ésta es entonces una de las razones por las que se les presentaron ecuaciones desordenadas para que las incluyeran en el mapa conceptual según los elementos que tuviera.

$$\begin{array}{cccc} 5x + 3 = 15x^2 & 18x^2 = 1 & x^2 = 0 & 0 = 3x^2 + 18 \\ 0 = 5x^2 & 3x^2 = 6x - 2 & x^2 = 5x & 2x^2 = 10x \\ x^2 + 3 = 0 & x^2 = 6 + x & 25x^2 + 12x = 0 & 2x^2 = 0 \end{array}$$

*Ayudas:* Para esta tarea, las ayudas que se dieron fueron cuando pasaron al pizarrón a ubicar las ecuaciones según como ellos creyeran que era su clasificación, para entonces solicitarles que se fijaran si eran las únicas completas e incompletas. Esta situación permitió que ellos identificaran las que no coincidían con la clasificación pues algunos estudiantes (sobre todo en las ecuaciones cuadráticas incompletas) confundían los elementos de la ecuación.

*Materiales y recursos:* En este caso, las hojas de colores que formaron el mapa conceptual permitieron que después los estudiantes pasaran a ubicarlas en el pintarrón según la clasificación que ellos consideraran. Una mejora para esto podría ser realizar también las ecuaciones en hojas de máquina para entregarlas al azar y en lugar de anotarlas en el pintarrón, pasar a pegarlas y cambiarlas de lugar en caso de ser necesario.

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* La organización grupal siguió siendo en gran grupo ya que me interesaban más los resultados individuales que en pequeños grupos ya que en estos influyen las ideas de los demás.

*Temporalización:* Esta tarea transcurrió según el tiempo previsto ya que los alumnos ya poseían un antecedente de las tareas anteriores para clasificar sus ecuaciones. Por ello, en cuanto se observó avance en su libreta, se les entregó un plumón a algunos para que pasaran al frente a clasificar las ecuaciones.

*Complejidad:* Dado que no se observó nivel de dificultad para ubicar las ecuaciones cuando éstas estaban “ordenadas” (primero el término cuadrático, después el lineal y al final el independiente), se desordenaron las ecuaciones con el fin de que no se quedaran con la idea de que siempre iban a tener un orden. Este aspecto generó que los alumnos asociaran incorrectamente los elementos de la ecuación cuadrática en algunos casos.

*Significatividad:* Considero que esta actividad adquirió un grado de significatividad más elevado, como se había previsto, en el momento en que se alternaron los términos ya que de esta manera y haciendo una integración de las tareas anteriores, los escolares pudieron clasificar las ecuaciones cuadráticas según su tipo y aunque se presentaron algunos errores, la discusión por parte de los alumnos fue muy enriquecedora ya que al momento de cambiar una ecuación que estaba mal ubicada, tenían que argumentar el porqué.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* La función de esta tarea, era que los alumnos conocieran la clasificación de ecuaciones cuadráticas según su forma con el fin de que, en la sesión posterior, observaran que según el tipo de ecuación se puede dar también un tipo de solución.

## ***Sesión 2. Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas***

### ***Tarea 1.***

*Compartir la meta con los escolares:* Dado que, en la sesión anterior, no se consideró desde la planificación el presentarles a los estudiantes la meta de la sesión ni de la tarea en específico, en esta sesión se les presentó ésta, a manera de propósito el cual era “aplicar los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas según su tipo”.

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* Desde el diseño de esta tarea, se consideraron las siguientes capacidades:

- C2.1** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por fórmula general
- C2.2** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por factorización
- C2.3** Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas
- C2.5** Aplicar operaciones algebraicas para resolver problemas en los que se utilicen ecuaciones cuadráticas.
- C2.6** Relacionar la ecuación con el método de solución sugerido

Para ello, se les presentó a los estudiantes cinco ecuaciones de lado izquierdo y del lado derecho los métodos de solución de dichas ecuaciones con el fin de que los estudiantes relacionaran con un segmento cada ecuación con su método de solución. Las indicaciones que se les dieron fueron que, reunidos en pequeños grupos (reunidos por afinidad) observaran los elementos de la ecuación cuadrática (término cuadrático, lineal e independiente) de cada una de las ecuaciones para que observaran qué se hace con ellos para que los relacionaran

con el método de solución que los involucrara, para lo cual puedo decir que no se tuvo problema.

En relación a las capacidades que se contemplaron, **C2.1, C2.2, C.2.3**, se menciona que los alumnos resuelvan ecuaciones según su tipo ya sea por fórmula general, factorización u operaciones inversas. Sin embargo, debo mencionar que estas capacidades no se fomentaron pues como se puede observar desde el principio de esta tarea, en ningún momento resolvieron ecuaciones por lo que la capacidad que se potenció en todo momento fue la **C2.6** (Relacionar la ecuación con el método de solución sugerido). Asimismo, de manera implícita se encuentran las capacidades de la sesión anterior **C1.3, C1.4, C1.5** (Identificar términos cuadrático, lineal e independiente) pues los alumnos tenían que observar qué se hace con estos términos en cada método de solución para poder relacionarlos.

Los errores previstos para esta tarea fueron:

**E. II** Procedimientos propios no válidos

**E. IV** Procedimientos inconclusos

**E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática

De los cuales puedo decir que en esta tarea no se presentaron, pues en los equipos no hubo problema para relacionar las ecuaciones con su método de solución ya que, al identificar los términos de cada ecuación, observaban lo que se hacía en el método de solución para poderlo relacionar.

Por esta razón, en la sesión 2 se considera necesario replantear las actividades tomando como base las capacidades, pues como ya se mencionó anteriormente, si en la capacidad el verbo es “resolver” es necesario promover actividades en las que los alumnos resuelvan ecuaciones y no sólo relacionen la ecuación con su método de solución. Aunque también es importante mencionar que se realizó de esta manera por el hecho de que en mi experiencia existe una mayor probabilidad de que los estudiantes cometan errores al no tener un punto de referencia y no saber cuál método utilizar para cada caso.

*Ayudas:* Las ayudas que se dieron a los estudiantes para la realización de la tarea fueron más que nada solicitarles que identificaran los términos como en la sesión anterior para que observaran qué se hace con ellos para encontrar su método de solución. Cabe mencionar que un error que tuve al inicio de la sesión fue el no realizar una retroalimentación de la sesión

anterior ya que noté que en un principio los alumnos estaban desorientados y hasta el momento en el que realicé este tipo de ayudas, los escolares comenzaron con la realización de esta tarea.

*Materiales y recursos:* Para esta tarea, se utilizaron hojas de colores para las ecuaciones y cartulinas para los procedimientos de solución, las cuales funcionaron para realizar la unión por medio de un segmento, en el pintarrón.

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* Para esta tarea, el grupo se dividió en pequeños grupos con el fin de que, dentro de ellos, los alumnos compartieran puntos de vista acerca de cuál es el método de solución y argumentaran el porqué. Aspecto que resultó fructífero y que se evidenció al no presentarse errores para encontrar el método de solución según su tipo.

*Temporalización:* El tiempo para esta tarea fue menos que el tiempo previsto, ya que como se mencionó anteriormente, los estudiantes, reunidos en pequeños grupos, no tuvieron problema para relacionar las ecuaciones de segundo grado con sus métodos de solución.

*Complejidad:* En esta tarea, la complejidad variaba según el tipo de ecuación y su método de solución pues en algunos era muy visible qué se hace con los elementos de la ecuación para obtener sus soluciones como el caso de las operaciones inversas; mientras que en otros casos como en la factorización por tanteo, en donde se debían encontrar dos números que sumados dieran el término lineal y multiplicados el término independiente, por lo cual no coincidían con los elementos de la ecuación original. Sin embargo, no fue un impedimento para los escolares ya que ya tenían un antecedente de éste método que se analizó en el segundo bloque.

*Significatividad:* Desde el diseño de esta tarea se consideró presentarlo de esta manera para cambiar la forma en que generalmente se enseñan los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas en donde el papel del maestro es exponer dicho método y el de los alumnos es reproducir lo que el maestro hace y repetirlo determinadas veces con ecuaciones similares a la presentada como ejemplo. Por esta razón, se presentó el método de solución y las soluciones de la ecuación para que los alumnos dedujeran cuál es el método de cada ecuación con base en la clasificación y la identificación de términos de la sesión anterior, lo cual permitió que se adquiriera cierto grado de significatividad al cambiar la forma de enseñanza

tradicional. Cabe mencionar que en este sentido también es imprescindible el papel de los conocimientos previos de los estudiantes pues ya tenían antecedentes de este contenido.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* El papel de esta tarea en el desarrollo de la unidad didáctica era que los alumnos se familiarizaran con los métodos de solución de ecuaciones de segundo grado según su tipo para abordarse en la sesión posterior.

### **Tarea 2.**

*Compartir la meta con los escolares:* Como ya se hizo mención en la tarea 1 de esta sesión, la meta se presentó como propósito de la sesión, el cual consistía en “conocer los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas según su tipo”.

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* Para el desarrollo de esta tarea, se consideraron las siguientes capacidades:

- C2.1** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por fórmula general
- C2.2** Resolver ecuaciones cuadráticas completas por factorización
- C2.3** Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas
- C2.5** Aplicar operaciones algebraicas para resolver problemas en los que se utilicen ecuaciones cuadráticas.

Esto porque se pretendía que, organizados en pequeños grupos, se les entregaría una ecuación con el método de solución que relacionaron con el fin de que explicaran en una hoja de papel bond el tipo de ecuación que es según la clasificación analizada en la sesión anterior, identificaran los términos cuadrático, lineal e independiente de la ecuación y anotaran qué se hace en cada paso para obtener las soluciones de la ecuación. Considero que en esta tarea, las capacidades tal y como están redactadas, no se cumplieron pues ésta más que nada se relacionaba con la capacidad **C2.6** pues en lugar de resolver las ecuaciones cuadráticas, los estudiantes relacionaron la ecuación con el método de solución sugerido.

Los errores que se consideraron como parte del camino de aprendizaje para esta tarea fueron:

- E. II** Procedimientos propios no válidos
- E. IV** Procedimientos inconclusos
- E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática

En este caso, puedo decir que las capacidades **C2.1, C2.2, C2.3**, no se promovieron en esta tarea, debido a que los estudiantes no estaban resolviendo ecuaciones cuadráticas por fórmula general, factorización u operaciones inversas, sino que estaban identificando qué operaciones se hacen considerando los elementos de la ecuación para obtener las soluciones de cada ecuación. Por ello, la capacidad que se potenció en mayor grado hacia esta tarea fue la **C2.5** al identificar las operaciones algebraicas que se realizaron en cada paso.

El pequeño grupo #5, fue el único que tuvo un error en la clasificación de su ecuación ya que la caracterizaron sólo como incompleta, sin considerar que contaba también con un término independiente. Todos los demás equipos acertaron en la clasificación de su ecuación y en la identificación de los elementos de su ecuación.

En el caso de identificar qué se hace con cada término de la ecuación para encontrar sus soluciones, el pequeño grupo #2 fue el único que no supo explicar qué se hacía con cada término, ya que se trataba del método de solución de factorización por el factor cero, pues no sabían por qué estaba primero una  $x$  y ésta se igualaba con cero.

*Ayudas:* Las ayudas que se dieron fueron más que nada en los equipos al hacerles los cuestionamientos de la tarea como ¿qué tipo de ecuación es?, ¿qué se hace con el término cuadrático?, ¿qué se hace con el término lineal/independiente? Para promover que los alumnos visualizaran lo que se hacía con cada uno.

*Materiales y recursos:* Los materiales que se utilizaron para esta tarea fueron los mismos que la tarea 1, pues se repartieron a los pequeños grupos la ecuación y el método de solución con el que unieron esa ecuación. En este sentido puedo decir que no me gustó estar reutilizando ese material y estarlo despegando del pintarrón, por lo que una de las mejoras que se pueden hacer en este sentido es utilizar otros materiales que sean los que se repartan a los pequeños grupos.

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* La organización de los estudiantes en pequeños grupos permitió que en ellos discutieran la clasificación de la ecuación según su tipo y lo que se hacía en cada paso de su método de solución para que posteriormente presentaran sus resultados a los demás pequeños grupos y el profesor formalizara ese método y le pusiera un nombre.

*Temporalización:* Esta tarea llevó más tiempo del que se tenía contemplado, por una parte, por la situación del material, que se utilizó el mismo de la tarea anterior (situación que no se había contemplado) así como también que no se les dijo a los estudiantes de cuánto tiempo disponían para realizar su papel bond, sólo se les mencionó que lo presentarían a los compañeros.

*Complejidad:* En esta tarea, el grado de dificultad dependía también del tipo de ecuación que se tratara pues en algunos casos sólo se mencionaba que había que obtener la operación inversa de la potenciación o raíz cuadrada de ambos términos para obtener los valores de  $x$ , mientras que, en otros, como el caso de las ecuaciones cuadráticas completas el método de la fórmula general y factorización implicaban más pasos.

*Significatividad:* Considero que el grado de significatividad era muy alto, pues demandaba que los estudiantes estuvieran atentos a lo que se hacía en cada paso para obtener la soluciones y no sólo lo mencionaran, sino que argumentaran el porqué de algunos pasos.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* Esta tarea, tenía como fin que los estudiantes se familiarizaran con los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas según su tipo para que posteriormente, en la siguiente tarea los aplicaran.

### **Tarea 3.**

*Compartir la meta con los escolares:* Se presentó como propósito de la sesión, el cual consistía en “conocer los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas según su tipo”.

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* Como ya se mencionó anteriormente, en la tarea anterior la temporalización prevista al momento del diseño de las tareas no coincidió con lo que sucedió en la puesta en práctica, ya que se llevó más tiempo del que se había considerado, por ello, la tarea 3 de la sesión no se pudo llevar a cabo.

*Ayudas:* No se pudieron llevar a cabo ya que no se realizó la tarea en la sesión.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* Esta tarea tenía como objetivo que los alumnos pusieran en práctica los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas según su clasificación para observar si relacionan el tipo de ecuación con su método de solución sugerido; asimismo, detectar los errores como el **E. V** al momento de realizar los pasos de dicho



método. Por esta razón y dada la importancia de esta tarea para la puesta en práctica de lo aprendido, dicha tarea se les dejó como trabajo para su casa.

### ***Sesión 3. Resolución de problemas de ecuaciones cuadráticas***

Dado que la tarea 3 de la sesión anterior no se pudo llevar a cabo, se comenzó esta sesión retomando estas ecuaciones solicitando a los alumnos, organizados en gran grupo, que mencionaran primero, qué tipo de ecuación es, cuál es el método que se utiliza para resolver este tipo de ecuaciones y que dijeran qué se tenía que hacer para encontrar las soluciones.

Se anotaron cuatro ecuaciones en el pintarrón

$$x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 = 81$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 12x = 0$$

En donde el único método de solución que no se abordó fue el de la fórmula general por el hecho de optimizar el tiempo para priorizar las tareas propias de esta sesión. Al socializar cómo realizar cada método de solución, no se observaron errores, sólo una confusión en el método para la última ecuación, pues para encontrar sus soluciones, los estudiantes querían utilizar operaciones inversas cuando el método ideal es la factorización utilizando el factor cero.

#### ***Tarea 1.***

*Compartir la meta con los escolares:* Para este caso, tampoco se les compartió a los estudiantes la meta de la sesión ni de cada una de las tareas. Sin embargo, de manera verbal, al inicio de esta tarea, se les comentó que iban a poner en práctica lo aprendido de las sesiones anteriores.

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* Para llevar a cabo esta sesión, las capacidades que se consideraron para esta tarea fueron:

**C3.1** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación verbal para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

**C3.2** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación gráfico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

Los caminos de aprendizaje que se consideraron, transcurrieron según lo previsto ya que a partir de la representación verbal que se les dio al inicio de esta tarea en donde se les solicitaba que construyeran un rectángulo que simulaba una habitación para después dar los valores de las fichas que utilizaron y encontrar las dimensiones de ésta (largo y ancho) dando lugar a la expresión simbólica por medio de una representación geométrica.

Los errores que se consideraron en este camino de aprendizaje fueron:

**E. II** Procedimientos propios no válidos

**E. III** Utilización de la aritmética en situaciones que demandan el uso del álgebra.

**E. IV** Procedimientos inconclusos

**E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática

Sin embargo, puedo decir que en esta actividad no se presentó ninguno, pues en los pequeños grupos encontraron la expresión simbólica sin problemas. Lo que sí se presentó en algunos casos (pequeño grupo 3 y 5) es que al solicitarles las dimensiones del rectángulo que simulaba la habitación, algunos al mencionarles que era un producto por ejemplo  $(x)(x)$  ellos señalaban que el resultado era  $2x$ , aspecto que se abordó en plenaria para aclarar que es  $x^2$ . También, otro error algebraico que se presentó es que los estudiantes al multiplicar  $(x+1)(x+2)$  algunos estudiantes mencionaban que el resultado era  $x^2+2$  ya que multiplicaban la incógnita por la incógnita y el valor independiente por el otro valor independiente.

*Ayudas:* Las ayudas que se brindaron a los estudiantes fueron en relación a errores como el mencionado anteriormente, en dos equipos, haciendo cuestionamientos y algunas comparaciones para lograr que encontraran la longitud de las dimensiones del rectángulo.

*Materiales y recursos:* El material que se utilizó fue el siguiente:



De los cuales se les mencionó a los estudiantes los valores de cada ficha, para que encontraran las dimensiones de la habitación.

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* La organización fue en pequeños grupos en donde se pretendía que, con base en la información que se les brindó desde un principio, discutieran las posibles dimensiones y argumentaran el porqué de su elección, asimismo de la ecuación al multiplicar sus dimensiones.

*Temporalización:* El tiempo para esta actividad se llevó a cabo como se había previsto, pues no se tuvo complicación para formar el rectángulo y después encontrar sus dimensiones.

*Complejidad:* En este caso, el grado de complejidad que presentaron los estudiantes fue en relación a la obtención de las dimensiones y de la ecuación cuadrática que representaba la habitación, lo cual tuvo su origen en los errores algebraicos que los estudiantes cometieron como los que se mencionaron anteriormente.

*Significatividad:* La significatividad es esta tarea era con el fin de encontrar las dimensiones primero de un rectángulo para que obtuvieran su expresión simbólica por medio de sus dimensiones.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* Esta tarea tenía como función que encontrarán primero las dimensiones del rectángulo para después, en la tarea posterior, cubrir un terreno con las piezas y encontrar las dimensiones de todo el terreno al encontrar la ecuación cuadrática que representa.

## ***Tarea 2.***

*Compartir la meta con los escolares:* Como ya se mencionó en la tarea anterior, se dijo al inicio de la sesión de manera verbal en donde se mencionó que en la sesión se iba a poner en práctica lo aprendido en las sesiones anteriores.

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* Para llevar a cabo la tarea, como parte de los caminos de aprendizaje previstos desde el diseño de ésta, se consideró desarrollar la siguiente capacidad:

**C3.2** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación gráfico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

Considero que esta capacidad se llevó a cabo pues por medio del material didáctico implementado, los estudiantes tenían que encontrar la expresión que representaban algunos

conjuntos de fichas con el fin de promover que se familiarizaran con el valor de cada una ya que esto sirve como un antecedente para la tarea posterior. El error que se consideró que los estudiantes podían incidir en él fue:

#### E. V Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática.

Pero este error no se hizo presente, pues los estudiantes no tuvieron problema en identificar la expresión que representaba cada conjunto de fichas.

*Ayudas:* Para lograr que los estudiantes encontraran las expresiones simbólicas que representaban los conjuntos de fichas, se plantearon los siguientes cuestionamientos a manera de ayuda:

En el conjunto...

- ¿Cuántas fichas tengo cuyo valor es  $x^2$ ?
- ¿Cuántas fichas tengo cuyo valor es  $x$ ?
- ¿Cuántas fichas tengo cuyo valor es 1?

Lo cual considero que ayudó para guiar a los estudiantes a encontrar las expresiones simbólicas de cada conjunto de fichas.

*Materiales y recursos:* Se utilizaron fichas que tenían un valor específico de sus lados, con lo que se podía conocer su área.



Uno de los errores que cometí fue que no llevé material para representar los conjuntos de cantidades en el pintarrón, sino que utilicé material de los que se iban a entregar a cada equipo, pues para encontrar las expresiones que representaban cada conjunto de fichas era necesario colocarlas en el pintarrón con el mismo material (no dibujarlas).

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* La organización del grupo continuó siendo en pequeños grupos, ya que se pretendía que en estos fueran ellos quienes identificaran la expresión simbólica que representaba cada conjunto de fichas.

*Temporalización:* El tiempo previsto para esta tarea, se llevó a cabo más rápido de lo esperado ya que los estudiantes se familiarizaron desde la tarea anterior con los valores de las fichas lo cual ocasionó que encontraran rápidamente las expresiones simbólicas solicitadas.

*Complejidad:* Considero que no hubo grado de dificultad, pues los estudiantes encontraron las expresiones simbólicas sin tener complicaciones ya que se habían familiarizado con los valores de las fichas.

*Significatividad:* Esta tarea resultó significativa por el hecho de que se consideró base para la tarea posterior para poder encontrar la expresión que representa un terreno que se cubrió con más fichas como las presentadas.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* Esta tarea tenía como fin que los estudiantes se familiarizaran con los valores de cada una de las fichas para encontrar expresiones simbólicas que representan los terrenos que se cubren con estas fichas y resolverlas por el método de solución según su tipo que crean conveniente.

### ***Tarea 3.***

*Compartir la meta con los escolares:* Se mencionó al inicio de la sesión de manera verbal como ya se presentó anteriormente.

*Caminos de aprendizaje que los escolares ponen en juego:* El camino de aprendizaje previsto para esta tarea, tenía contempladas las siguientes capacidades:

**C3.2** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación gráfico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

**C3.3** Interpretar la solución de la ecuación cuadrática en el contexto del problema planteado

De las cuales, puedo decir que se promovió la capacidad **C3.2** en mayor grado ya que la expresión simbólica que se obtenía era a partir de las representaciones geométricas de las fichas en conjunto que se utilizaron para el terreno y era el aspecto fundamental para poder llevar a cabo la tarea.

Puedo decir que, gracias a la realización de las tareas anteriores, en las que los escolares se familiarizaron con los valores de las fichas, no tuvieron complicaciones en

encontrar las expresiones que representaban las fichas que cubrían el terreno, por ello lograron encontrar las ecuaciones cuadráticas como se había previsto.

Otra de las capacidades que se pretendía que los estudiantes desarrollaran era la **C3.3**. Puedo decir que no se logró por la siguiente situación: Desde el diseño de esta sesión se consideró el material didáctico para que por medio de éste se obtuvieran expresiones simbólicas a partir de representaciones geométricas. Por esta razón, el foco de atención se centró en dicho material y los valores de cada una de las fichas para que, al tener las expresiones, los estudiantes utilizaran el método de solución sugerido según su tipo y al tener las soluciones interpretarlas en el contexto del problema planteado.

El problema fue que las soluciones de algunas de las ecuaciones generaban resultados de 0, lo cual era una inconsistencia pues se solicitaban las longitudes de las dimensiones del terreno y no era posible tener longitudes de ese valor. Ésta fue una situación que no se predijo ni se realizaron consideraciones previas en caso de que esto sucediera y de las que me di cuenta hasta que los estudiantes las comenzaron a resolver.

Los errores que se consideraron desde el camino de aprendizaje para esta tarea fueron los siguientes:

- E.II** Procedimientos propios no válidos
- E. III** Utilización de la aritmética en situaciones que demandan el uso del álgebra.
- E. IV** Procedimientos inconclusos
- E. V** Asociaciones incorrectas de los elementos de una ecuación cuadrática

De estos, se puede decir que se consideraron para los métodos de solución, sin embargo, al término de la tarea, no fue posible compartir los resultados por equipo por lo que no se obtuvo información acerca de todos los métodos de solución empleados en todos los equipos. Algo que sí se puede anticipar que todos los pequeños grupos utilizaron la fórmula general.

*Ayudas:* Se dieron más que nada en los pequeños grupos cuestionándolos acerca de cuántas fichas de cada tipo se tenían en el terreno para orientar a que encontraran la expresión simbólica.

*Materiales y recursos:* Los materiales que se utilizaron fueron los mismos de las tareas anteriores, sólo que ahora se les entregaron más piezas a los pequeños grupos para que

cubrieran todo el terreno y encontrarán la expresión simbólica que representaba todo el terreno para posteriormente resolver la ecuación cuadrática y encontrar las dimensiones del terreno.

Es importante mencionar que el material que se iba a entregar a los pequeños grupos se utilizó también para realizar conjuntos de fichas de la tarea anterior, aspecto que no se consideró desde el diseño de la tarea y que ocasionó que se tuviera que quitar el material que se había pegado en el pintarrón. Este aspecto impactó en el tiempo que se tenía para la realización de la tarea.

*Agrupamiento y gestión de la comunicación:* Se organizó el grupo en pequeños grupos para promover el debate entre ellos para elegir primeramente la expresión simbólica que representa el terreno y posteriormente, según el tipo de ecuación cuadrática que se obtuvo, elegir el método de solución sugerido.

*Temporalización:* La tarea llevó más tiempo del previsto ya que influyó primero la entrega del material que se tuvo que quitar del pintarrón para poder completar el de los pequeños grupos, así como también que los alumnos demoraron en realizar el método de solución de su ecuación, que casi en todos los pequeños grupos utilizaron la fórmula general.

*Complejidad:* Considero que, gracias a la realización de las tareas anteriores, la realización de esta tarea no tuvo un grado de dificultad significativo ya que los estudiantes se familiarizaron con el valor de las fichas y no tuvieron complicaciones para encontrar la expresión simbólica que representaba cada terreno en los pequeños grupos.

*Significatividad:* Considero que el grado de significatividad de esta tarea fue muy poco por el hecho de las características de las ecuaciones que se obtuvieron no fueron diseñadas con base en el problema sino con base en el material didáctico, lo cual tuvo repercusiones en cuanto a lo que se les solicitó ya que tales ecuaciones no fueron las idóneas para dar la solución como se quería lograr.

*Función de la tarea dentro de la secuencia:* Esta tarea tenía como objetivo que los estudiantes resolvieran un problema de ecuaciones cuadráticas para que encontrarán las dimensiones de un terreno. Sin embargo, las soluciones de las ecuaciones cuadráticas que se obtuvieron con base en las fichas no permitían interpretarse en el contexto del problema ya que las soluciones

daban cero, así como también que, debido al tiempo de la sesión, no fue posible llegar a este momento.

## **7.1 Evaluación de los aprendizajes de los estudiantes**

Esta evaluación se llevó a cabo en tres momentos: antes de la aplicación de la unidad didáctica por medio del cuestionario diagnóstico del contenido a trabajar donde se identificaron los errores a los que los estudiantes incurren en este tipo de tareas; durante la aplicación, en donde se realizaron listas de cotejo como parte del diario del profesor para identificar en ese momento si los alumnos estaban logrando las capacidades esperadas para cada tarea en cada sesión; y después de la aplicación, en donde se obtuvo el total de capacidades que los estudiantes promovieron al final de la aplicación de la unidad didáctica.

Estas evaluaciones han permitido conocer en qué medida las capacidades previstas, lograron desarrollar los estudiantes. Para ello, se realizó un instrumento (Anexo 3) con base en tales capacidades, involucrando tareas que evidenciaban su uso. A continuación se presentan las capacidades presentes en cada tarea.

### **TAREA 1.**

**C7.1** Reconocer ecuaciones cuadráticas

**C4.1** Identificar el término cuadrático

### **TAREA 2.**

**C4.1** Identificar el término cuadrático

### **TAREA 3.**

**C4.1** Identificar el término cuadrático

**C5.1** Identificar el término lineal

**C6.1** Identificar el término independiente

**C8.1** Caracterizar ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas

### **TAREA 4.**

#### **ECUACIÓN 1**

**C3.2** Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas.

#### **ECUACIÓN 2**

**C3.2** Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas

#### **ECUACIÓN 3**



**C2.2** Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización (tanteo)

**ECUACIÓN 4**

**C2.2** Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización (factor cero)

**ECUACIÓN 5**

**C1.2** Resolver ecuaciones cuadráticas por fórmula general

**TAREA 5.**

**C2.3** Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación geométrico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.

En la tabla, 8, se presentan los resultados del instrumento aplicado a los estudiantes, con la cual se realizó la evaluación de los mismos. Se utilizó la siguiente simbología: 0 si se consideró que no desarrollaron la capacidad y 1 si la desarrollaron.

*Tabla 8.* Resultados del instrumento de evaluación

ESTUDIANTE/CAPACIDAD	TAREA 4												TOTAL POR ALUMNO	
	TAREA 1		TAREA 2	TAREA 3				ECUACIÓN1	ECUACIÓN2	ECUACIÓN3	ECUACIÓN4	ECUACIÓN5		TAREA 5
	C7.1	C4.1	C4.1	C4.1	C5.1	C6.1	C8.1	C3.2	C3.2	C2.2	C2.2	C1.2		C2.3
A1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	5
A2														0
A3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	11
A4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	11
A5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
A6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
A7														0
A8														0
A9	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
A10	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	8
A11	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	7
A12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
A13	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	8
A14	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	9
A15	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	10
A16	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
A17	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
A18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
A19														0
A20	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	8
A21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
A22														0
A23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
<b>TOTAL DE ESTUDIANTES QUE LA PROMOVIERON</b>	14	11	14	14	10	13	13	11	13	10	8	11	12	

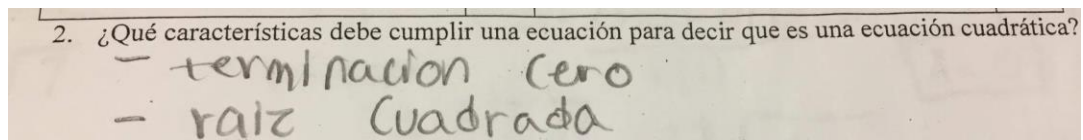
Como se puede observar en la *Tabla 8*, los resultados obtenidos por los estudiantes son muy variados ya que algunos al ejecutar las tareas del instrumento de evaluación, demostraron el desarrollo de algunas capacidades que se consideraron mientras que otros, no las demostraron.

Como ya se mencionó anteriormente, el contenido de ecuaciones de segundo grado ya se había trabajado con anterioridad en diferentes bloques correspondientes al 3er grado de secundaria. De aquí que una explicación a la obtención a los resultados variados se debe a que algunos de los estudiantes ya poseían algunas de las capacidades, por ejemplo la identificación del término cuadrático, lineal e independiente, las clasificaciones de las ecuaciones cuadráticas, conocían algún método de solución, por mencionar algunas. Estas capacidades funcionaron como conocimientos previos del contenido que les permitieron abordar las tareas propuestas.

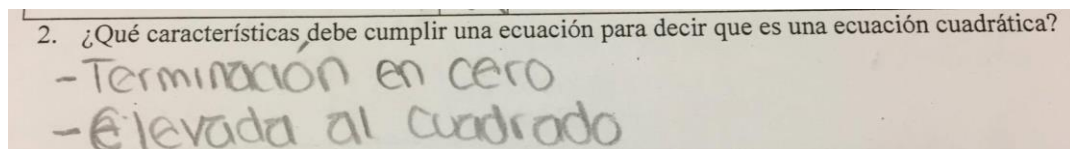
Regresando a los resultados de la *Tabla 8*, las capacidades que los estudiantes más desarrollaron fueron: **C7.1, C4.1, C6.1, C8.1 y C3.2**. Con lo cual, se puede decir que se abonó en mayor medida a las competencias CI (Comunicar información matemática) y MT (Manejar técnicas eficientemente) aunque, es importante mencionar que en las demás, también se obtuvieron resultados que no se pueden considerar como muy bajos en comparación con los mencionados.

Algunas posibles razones por la que algunos estudiantes no lograron promover las capacidades propuestas en las tareas pueden ser: En el caso de la tarea 1, algunos estudiantes no reconocían la existencia del término cuadrático como el elemento determinante que caracteriza a las ecuaciones cuadráticas. Por lo tanto, no lograron realizar la tarea 2, en la que se esperaba que los estudiantes fueran capaces de responder con dicha capacidad el cuestionamiento: ¿Qué características debe cumplir una ecuación para decir que es una ecuación cuadrática?

Esto me permitió identificar una idea errónea que tenían mis estudiantes. En particular, los estudiantes **A5, A11, A12, A13, A15, A20, A21, A23**, mencionaron que una de las características de una ecuación cuadrática “es que debe estar igualada a cero”.



*Figura 20.* Respuesta del estudiante A11 al ítem 2.



*Figura 21.* Respuesta del estudiante A15 al ítem 2.

Aunque desde el análisis de instrucción realizado en el diseño de las tareas, se consideró esta situación, en la tarea 1 las ecuaciones cuadráticas propuestas todas están igualadas a cero a excepción de una. Lo cual puede ser una de las explicaciones de esta situación. En este caso se debe modificar la tarea 1 incluyendo algunos otros ejemplos donde quede claro que esta condición de igualación a cero no debe ser una condición de la ecuación cuadrática.

En el caso de la tarea 3, en donde se esperaba que los estudiantes primeramente identificaran los términos cuadrático, lineal e independiente para después clasificarlos en el mapa conceptual según su forma como completas, incompletas, incompletas puras e incompletas mixtas, se observó que la mayoría no tuvo problema en identificar las completas ni las incompletas de la forma  $ax^2=0$ . Sin embargo, al clasificar las ecuaciones cuadráticas incompletas puras e incompletas mixtas era donde había mayor confusión, pues confundían ya sea el término lineal con el independiente o viceversa. Por esta razón, se puede decir que no se promovieron las capacidades **C5.1** y **C6.1**. Según mi experiencia puedo decir que el tiempo que se dedicó para dicha tarea fue muy limitado, pues no se realizó una retroalimentación que permitiera cerciorarme que efectivamente los estudiantes adquirieron dichas capacidades. Por lo tanto, propongo entonces realizar una actividad complementaria a ésta pero en otro momento, por ejemplo en el inicio de la siguiente sesión en donde se permita a los estudiantes recordar tales elementos y en conjunto comentar las características de éstas.

En el caso de la tarea 4 propuse que los estudiantes resolvieran ecuaciones cuadráticas según su tipo. Para cada ecuación se propuso una capacidad esperada como se muestra a continuación:

### ECUACIÓN 1

C3.2 Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas.

### ECUACIÓN 2

C3.2 Resolver ecuaciones cuadráticas incompletas por operaciones inversas

### ECUACIÓN 3

C2.2 Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización (tanteo)

### ECUACIÓN 4

C2.2 Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización (factor cero)

### ECUACIÓN 5

C1.2 Resolver ecuaciones cuadráticas por fórmula general

En el caso de la ecuación 1 y 2 en donde se esperaba que los estudiantes las resolvieran utilizando operaciones inversas, hubo algunos casos en los que comenzaron el procedimiento de manera correcta despejando la variable sumando o restando el término independiente para el otro lado de la igualdad. Sin embargo hubo algunos casos como la estudiante **A1**, que dejó el procedimiento hasta ahí, sin obtener la raíz cuadrada, o algunos otros casos en los que sin hacer ningún despeje, querían sacar raíz cuadrada directamente. Esto se muestra en las Figuras 22 y 23.

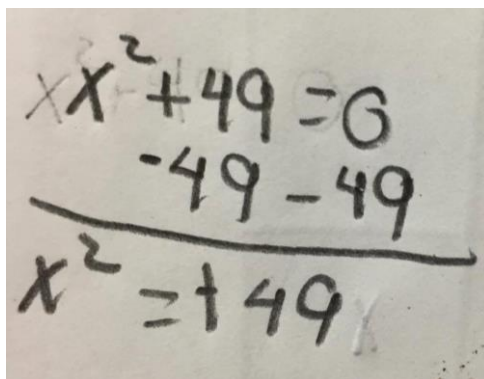

$$\begin{array}{l} \cancel{x}x^2 + 49 = 0 \\ -49 - 49 \\ \hline x^2 = 49 \end{array}$$

Figura 22. Respuesta del estudiante A1 al ítem 5a.

Handwritten student work showing the equation  $\sqrt{x^2 - 49} = 0$  and the solutions  $x = 7$  and  $x = -7$ .

Figura 23. Respuesta del estudiante A18 al ítem 5a.

La ecuación 3 se presentó esperando que los estudiantes utilizaran el método de factorización por tanteo y que detectaran fácilmente cuáles eran los dos números que sumados dieran 3 y multiplicados dieran 2. Sin embargo, el método que mayormente utilizaron los estudiantes fue la fórmula general. Una interpretación que puedo dar a esta situación es que en la tarea en la que se presentó a la fórmula general como un método de solución, el tipo de ecuación que se presentó a los estudiantes fue completa, por ello puede ser que los estudiantes relacionaran que cuando se tiene una ecuación como ésta, el método de solución es la fórmula general. Por esta razón, propongo decir específicamente a los estudiantes el método de solución que deben utilizar en cada ecuación debido a que el método de la fórmula general no es erróneo, sin embargo no es lo que se esperaba en este caso.

Para la ecuación 4 el método de solución sugerido es el de factorización obteniendo el factor cero. Sólo 8 estudiantes utilizaron este método, mientras que los demás tuvieron algunos errores. Uno fue el **E. II** Procedimientos propios no válidos, ya que algunos intentaron resolverla por medio de operaciones inversas tratando de “despejar” el término cuadrático e intentando obtener la raíz cuadrada del término lineal. Como se muestra en la Figura 24.

$$x^2 - 72x = 0$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{72}$$
$$x = 3.4$$

Figura 24. Respuesta del estudiante A3 al ítem 4d.

Puedo decir pues, que la capacidad **C2.2** ligada a resolver ecuaciones por factorización fue la que menos se promovió con mi planeación de clase y en la que los estudiantes tuvieron más complicaciones para ponerla en práctica. Por esta situación, propongo poner un mayor énfasis en este tipo de ecuaciones proponiendo situaciones en las que se obtengan ecuaciones que demanden la resolución de ecuaciones utilizando este método de factorización para favorecer que los estudiantes se familiaricen con éste.

En la ecuación 5 se esperaba que los estudiantes la resolvieran por medio de la fórmula general, lo cual se logró pues la mayoría lo realizó utilizando este método de solución, aunque también se presentaron algunos casos que intentaron realizarla por la factorización por tanteo. Pese a que se cumplió el objetivo de que los estudiantes resolvieran la ecuación mediante este método de solución, aún se presentó un error que se consideró en el análisis cognitivo, **E.IV** Procedimientos inconclusos, pues algunos estudiantes no terminaron el método de solución hasta obtener las soluciones de la ecuación. Una posible explicación al hecho anterior es que en la resolución de ecuaciones cuadráticas el enfoque fue el aspecto algorítmico dejando de lado la utilización de problemas en contextos no matemáticos, por lo cual no fue motivante para los estudiantes.

La tarea 5 estaba relacionada con la expectativa de aprendizaje 3 mencionada en el análisis cognitivo: “Utilizar ecuaciones cuadráticas en la resolución de problemas”. Con ésta se pretendía que los estudiantes resolvieran un problema, utilizando los aprendizajes hasta el momento por medio de una ecuación cuadrática. Sin embargo, al revisar las acciones de los

alumnos me doy cuenta que no se cumple el objetivo de dicha tarea. Algunas de las razones de esta situación son: no se desarrolló la capacidad **C2.3**: Construir representaciones simbólicas a partir de un sistema de representación geométrico para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas, pues aunque hubo estudiantes que sí la obtuvieron, en realidad se quedaron hasta ese paso, pues no intentaron encontrar las soluciones para resolver el problema. Tampoco se desarrolló la capacidad **C3.3** Interpretar la solución de la ecuación cuadrática en el contexto del problema planteado, pues los estudiantes que sí encontraron las soluciones, se quedaron en ello, sin ver qué representaban esas soluciones o para qué les podían servir en el problema en cuestión.

Como se puede observar, estas capacidades no se lograron, pues las sesiones de clase se enfocaron en el concepto y en los métodos de solución mas no en la modelización. Sin embargo, el hecho de que el análisis didáctico sea un ciclo permite que a partir de los resultados obtenidos, se oriente la realización para aplicaciones futuras, por ello en mi papel como profesor, propongo la aplicación de esta propuesta didáctica al inicio y complementarla con tareas enfocadas al desarrollo de las capacidades mencionadas anteriormente como por ejemplo algunas en las que partir de una representación geométrica se obtenga una algebraica y que interpreten la solución del problema redactando su argumentación del por qué.



## CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

La premisa del análisis didáctico es que es un método que se propone al profesor para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas desde una perspectiva ideal. Una de sus principales ventajas es que posibilita ver la planificación a un nivel local en donde se consideran y organizan los significados de determinado contenido matemático escolar. Esto implica un cambio en la mirada de la planificación a nivel global en donde sólo se abordan los contenidos como una secuenciación de temas y no desde su estructura.

En este trabajo se realizó una experimentación en situación real del análisis didáctico en donde el objeto de estudio fue mi práctica docente. Para ello se utilizó como contenido matemático escolar a la ecuación cuadrática. Para dar evidencia de las conclusiones y reflexiones con base en los resultados que tuvo el uso de este marco teórico metodológico en mi desarrollo profesional retomo la pregunta que guio esta investigación:

¿Cuáles son los resultados en mi práctica docente al implementar el análisis didáctico como herramienta de intervención educativa en el caso de la enseñanza-aprendizaje de la ecuación cuadrática?

Para dar respuesta al cuestionamiento mencionado, se presenta la respuesta a esta pregunta tomando en cuenta cada organizador del currículo.

### ***El papel del Análisis de Contenido en mi desarrollo profesional***

Este análisis se presenta como el primer organizador del currículo propuesto por el análisis didáctico. Se compone de tres organizadores que permiten determinar los significados de la ecuación cuadrática en el nivel secundaria: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

El análisis de contenido es la base del análisis didáctico, pues el contenido matemático funge como el eje central de todo el ciclo. Como mencioné en la motivación, en mi formación inicial yo realizaba fichas técnicas para estudiar el contenido, sin embargo, puedo decir que dejaba ciertos vacíos que relucían al momento de la puesta en práctica de mis unidades didácticas. Un ejemplo de esta situación es que no consideraba toda la

estructura conceptual de la que forma parte y en ocasiones al querer dar algunas ayudas a mis estudiantes tenía que recurrir a situaciones que no había tomado en cuenta previamente.

Puedo decir también que anteriormente consideraba que los conceptos era lo único que debía revisar para estudiar el contenido y sus relaciones en el marco curricular. Por ello, al realizar este análisis aprendí a revisar el contenido desde tres organizadores: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.

En el caso de la estructura conceptual supe que además de considerar los conceptos del contenido en sí, también hay que tomar en cuenta la estructura conceptual de la que forma parte. En los sistemas de representación, aprendí algunos procesos de construcción de representaciones como la creación, transformación y traducción de signos. Finalmente, con la fenomenología estudié los problemas que dieron origen al contenido matemático, así como también los contextos y subestructuras que lo dotan de significado.

Lo anterior me sirvió primeramente para estudiar el contenido desde estas tres perspectivas para tener claridad con respecto a éste, así como también para la realización de las tareas que componen mi propuesta didáctica. Consideré la fenomenología de la ecuación cuadrática para realizar problemas relativos al cálculo de áreas teniendo un sistema de representación geométrico para, a partir de ello, obtener una expresión simbólica la cual sería la ecuación cuadrática, involucrando también desde la estructura conceptual, la forma de la ecuación cuadrática y los métodos de solución.

Cabe mencionar también que en este último aspecto de la fenomenología, al visualizar mi contenido exclusivamente desde la perspectiva matemática, no consideré el análisis de fenómenos desde otras ciencias de manera que se pudiera haber considerado también para el diseño de la unidad didáctica.

El análisis histórico del contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática me ha permitido conocer que su surgimiento tuvo origen con problemas del cálculo de áreas de manera que, a partir de una representación geométrica, se obtiene una representación simbólica que, al resolverse, permite obtener los valores que solucionan un problema o situación. Esto me permitió reflexionar sobre cómo se enseña actualmente la ecuación cuadrática en el nivel secundaria. En este caso, no se aborda igual que como en los problemas

que le dieron origen y que se evidenció en su fenomenología. Ahora, se prioriza el sistema de representación simbólico y el tratamiento algorítmico ya que se presentan ecuaciones cuadráticas que el profesor resuelve por determinado método y el papel de los estudiantes es ejecutar las mismas acciones del profesor en otros ejemplos. Por ello, en esta propuesta didáctica se intentó abordar los tres significados proponiendo actividades de los tres cortes por ejemplo, desde un sistema de representación geométrico, llegar a uno simbólico, para posteriormente, dar solución a un problema considerando la estructura conceptual de la que forma parte.

Este análisis también me ayudó a profundizar en los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas. En el caso de completar el cuadrado, sólo conocía el proceso algebraico; pero no sabía una explicación del por qué se realiza de esa manera y cómo se proponía su solución con figuras geométricas. Esta situación puedo decir que la abordé de cierta manera, pues sólo se utilizó retomando la idea de completar un cuadrado con ciertas piezas para obtener una expresión simbólica que al resolverla, permitiera solucionar el problema, pero no se abordó el procedimiento como tal por lo siguiente: 1) Es un método que no se solicita abordar desde el currículum y 2) mi experiencia como profesor me orientó para sólo considerarlo como sistema de representación y no como método de solución, pues consideré que los estudiantes tendrían dificultades para su comprensión por lo cual tendría que desviar el centro de atención.

De cierta manera estos aspectos impactan directamente tanto en mi conocimiento del contenido como en el conocimiento didáctico que ahora tengo sobre el tema. Sin embargo, es importante mencionar que todo el conocimiento que se va adquiriendo, no es posible abordarlo en tiempos reales. Aunque sí permite realizar algunas acciones como producto de éste, por ejemplo, ahora me es más sencillo realizar ejemplos, analogías, que permitan clarificar dudas a los estudiantes en mi labor docente en este contenido matemático escolar. Por esta razón, el hecho de aplicar una propuesta didáctica y analizar los resultados, no es el fin, pues se está hablando de un ciclo, por lo que a partir de estos, se permite realizar cambios que se aplicarán en un futuro para seguir detectando fortalezas y áreas de oportunidad de manera que se pueda mejorar hablando en este caso del contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática.

Uno de los propósitos del análisis de contenido es identificar, organizar y seleccionar los significados del concepto matemático relevantes, en este caso, al realizar dicho análisis encontré que los significados que se potencian para el contenido de la ecuación cuadrática en los libros que hablan sobre el surgimiento y los libros de texto del nivel secundaria, guardan diferencias. Para ello se utilizó la triada que conforman a éste (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología).

Tanto en los libros de texto como en la historia del surgimiento de la ecuación cuadrática se mencionan como elemento central ligado a este contenido su resolución y los algoritmos para lograrlo. Las diferencias radican en las representaciones utilizadas y los contextos. En el significado potenciado en los libros de historia (Figura 25) se puede ver que la estructura conceptual es la relacionada a la resolución de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, el sistema de representación es geométrico y la fenomenología es el cálculo de áreas; mientras que en los significados potenciados en los libros de texto (Figura 26) se puede ver que también es la estructura conceptual relacionada a la resolución de ecuaciones cuadráticas, en algunos de ellos, el sistema de representación es simbólico ya que se enfocan en la ecuación cuadrática como tal y la fenomenología son contextos matemáticos pues el foco es la resolución de ecuaciones sin considerar situaciones. En otros casos (Figura 27), el sistema de representación es el verbal que tiene que ver con problemas de la vida real y la fenomenología se refiere a contextos no matemáticos ya que se presentan situaciones cotidianas.

En este sentido, retomando todo el conocimiento adquirido hasta el momento relativo al análisis de contenido, me ha permitido conocer que la realización de un análisis de esta magnitud requiere de mucho tiempo pues implica revisión bibliográfica para realizar un estudio de corte histórico, conceptual, fenomenológico y de representaciones, por lo que no es posible llevarlo a cabo en tiempo real.

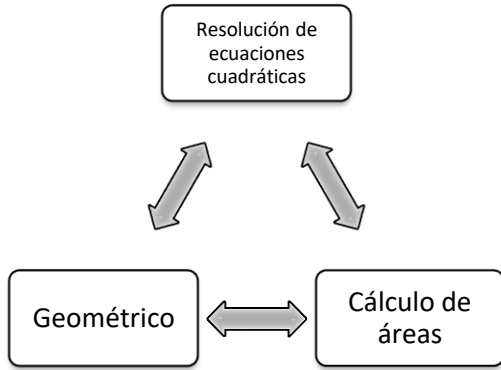


Figura 25. Significado potenciado en los libros de historia

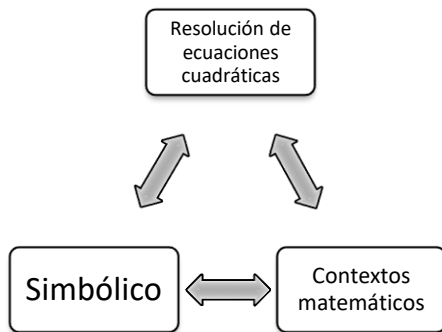


Figura 26. Significado potenciado en los libros de texto (1)

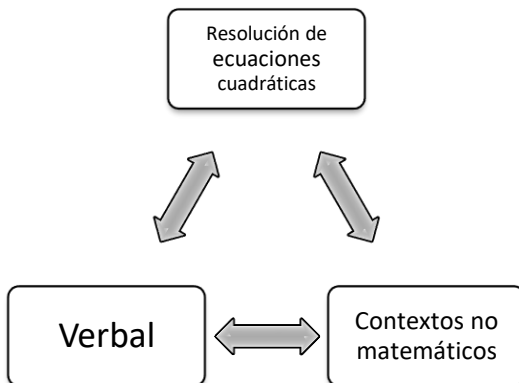


Figura 27. Significado potenciado en los libros de texto (2)

### ***El papel del Análisis Cognitivo en mi desarrollo profesional***

La realización de este análisis desde un primer momento, al escuchar el simple nombre llamó mucho mi atención pues el hecho de considerar un contenido matemático escolar desde la perspectiva del aprendizaje me resultó inquietante. Esto porque en ocasiones

en mi labor como profesor me he preocupado por mi papel como enseñante y he dado por hecho que si considero mi actuación como “buena” doy por hecho que mis estudiantes aprendieron lo esperado. Sin embargo, me doy cuenta que esto no es suficiente ya que es una situación subjetiva y por lo que es necesario dar cuenta con aspectos que evidencien tal aprendizaje.

El análisis cognitivo se configura por tres organizadores del currículo: expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas. En el caso de las primeras puedo decir que las consideraba a nivel global, mediante las competencias sin considerar los aspectos implícitos específicos. Por ejemplo, en la competencia resolver problemas de manera autónoma, consideraba que los alumnos por sí solos deberían resolverlos; pero no consideraba que también ellos deberían plantearlos, ser capaces de utilizar diferentes procedimientos, etc. En este punto, es importante mencionar que los consideraba de esta manera porque en el plan de estudios se encuentran así, muy genéricos.

Un ejemplo demostrativo de esta situación es que el aprendizaje esperado para el contenido en cuestión espera que el alumno: Resuelva problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado, pero ¿qué implica que el alumno resuelva?, ¿qué capacidades dan cuenta de que el alumno es capaz de resolver un problema que implica ecuaciones de segundo grado?, ¿cómo me doy cuenta de que el alumno sabe resolver un problema?... con estos cuestionamientos se puede observar que el aprendizaje esperado es muy general y es la forma en como se encuentra redactado en el plan de estudios al igual que muchos otros, situación que es un problema para muchos profesores ya que existe una falta de especificidad.

Con base en esta situación, este análisis me ayudó a reconocer que para poder evaluar competencias es necesario establecer unidades más simples como las capacidades ya que éstas en conjunto, ayudan a promover las competencias. Por ejemplo, volviendo a la competencia de resolver problemas de manera autónoma en la que se espera que los alumnos sean quienes planteen y resuelvan problemas; en este caso se propusieron capacidades relacionadas con el tema en cuestión. Algunas son: reconocer ecuaciones cuadráticas, identificar el coeficiente cuadrático, identificar el coeficiente lineal y discriminar el tipo de solución óptimo según su tipo pues se consideró que éstas son acciones previas a la resolución de problemas y en los procedimientos de solución, éstas vienen implícitas por lo que si no se

tiene claridad de ellas probablemente los errores que se han mencionado se seguirán haciendo presentes al trabajar con este contenido.

Una de las áreas de oportunidad en mi labor docente es la evaluación por competencias. En este análisis se propone la construcción de capacidades como los referentes fundamentales para saber si se está promoviendo cierta competencia. Lo anterior gracias a que las capacidades son aspectos medibles, a diferencia de las competencias que siguen siendo más generales. Por lo que puedo decir que esto fue un excelente elemento para incidir en mi actuación referida a este momento.

Otro de los organizadores que configuran este análisis son los errores en los que los estudiantes pueden incurrir en el desarrollo de la unidad didáctica. Desde el momento en el que me propuse la búsqueda de antecedentes para determinar mi objeto de estudio, una de las limitaciones que presenté fue que encontré que existe poca evidencia de errores y dificultades específicas para la enseñanza y el aprendizaje de la ecuación cuadrática, sólo encontraba aquellos relativos al álgebra en general. Esto al principio me desmotivó, por el hecho de que era una observación constante que se me realizaba al momento de presentar los avances de mi trabajo de grado y por más que buscaba no encontraba. Sin embargo, al tratarse de una práctica de desarrollo profesional y bajo la perspectiva del análisis didáctico, no se propone en él un sustento teórico, sino que también cobran valor los que se identifican en la práctica docente desde la perspectiva de profesor pues personalmente, no es la primera vez que he impartido este contenido matemático escolar.

Para suplir la falta de especificidad de los errores y dificultades para el tema de ecuación cuadrática en la literatura analizada y como propuesta de mis compañeros de la maestría realice un examen diagnóstico para detectar errores específicos del contenido en cuestión. El cuestionario se diseñó desde mi experiencia, por ello hubo algunos errores. Por ejemplo, en algunas cuestiones no era claro qué debía utilizar, en otros priorizaba los aspectos conceptuales y en el caso de la solución de ecuaciones planteaba muchas para un tiempo muy limitado. Cabe aclarar que en el momento que diseñé y apliqué el instrumento dado que los estudiantes ya tenían antecedentes con éste, lo realicé para ver las deficiencias que aún tenían presentes los estudiantes y tomarlo como referente para el diseño de mi unidad didáctica. Por

ello, no tenía claridad respecto al papel de las capacidades, cuestión que considero hubiera ayudado a proponer un mejor instrumento.

Aunque no me agradó del todo el diseño del instrumento, al aplicarlo me di cuenta de aspectos interesantes que me ayudaron a realizar mi análisis. Si bien, los resultados obtenidos los pude relacionar con los errores del álgebra en general; también me ayudó a encontrar errores específicos de los estudiantes para este contenido y posteriormente plantear las expectativas de aprendizaje. Lo anterior tomando en cuenta las competencias y los aprendizajes esperados propuestos en el programa de la asignatura; mi experiencia como docente y los errores que pueden cometer los estudiantes al aprender este tema.

Otro componente del análisis cognitivo propuesto en Rico (2013) son las demandas cognitivas. Es aquí donde se presentan ejemplos de tareas que ayudan a cumplir las expectativas de aprendizaje y consideran el tratamiento de los errores encontrados. Este componente del análisis cognitivo fue un aspecto que no me agradó tanto, pues desde mi punto de vista, esto es mejor realizarlo en el análisis de instrucción ya que es en éste en donde el foco de interés son las tareas matemáticas como producto del análisis de contenido y análisis cognitivo. Es decir, es en el análisis de instrucción en donde las tareas se convierten en un medio de articulación de los resultados obtenidos en los análisis previos. Es por esta razón que en mis reflexiones no incluyo esta parte como un elemento central del análisis cognitivo.

La realización de este análisis me brindó varios aprendizajes. Por ejemplo, las capacidades que dan origen a las competencias, a relacionar errores encontrados durante mi práctica con los presentados por la literatura, a relacionar expectativas de aprendizaje, errores y capacidades para el desarrollo de un aspecto más general: las competencias matemáticas. Todo lo anterior incide en mi práctica docente de manera significativa, pues al establecer las capacidades y competencias relativas a este contenido, se brinda información para la evaluación pues se va conociendo si el estudiante va adquiriendo dichas capacidades y qué evidencia esto. También brinda referentes importantes para el diseño de caminos de aprendizaje que se pueden tomar en cuenta como consideraciones previas para las tareas y que se pueden modificar con base en los resultados para orientar actuaciones futuras.



### ***El papel del Análisis de Instrucción en mi desarrollo profesional***

Una vez realizado el análisis del contenido y cognitivo, en este análisis se estudian los medios de los que dispone el profesor para su enseñanza, por lo que el protagonismo se encuentra en las tareas matemáticas que formarán parte de la unidad didáctica y la manera de gestionarlas en el aula.

En este análisis el foco es la enseñanza, por ello se realizó el diseño de tareas considerando los resultados del análisis de contenido y cognitivo, con el fin de potenciar capacidades y tratar los errores al considerarlos en los posibles caminos de aprendizaje de los estudiantes. También debe tomar en cuenta que las tareas diseñadas sean compatibles con el análisis de contenido, contribuir a las expectativas de aprendizaje y afrontar limitaciones de aprendizaje, incorporar recursos y materiales y, finalmente, realizar una secuencia de aprendizaje coherente con los pasos mencionados anteriormente.

Para el diseño de cada una de las tareas, se consideraron estos aspectos y componentes de las mismas: Formulación, meta, materiales y recursos, capacidades, errores, caminos de aprendizaje, contenido matemático, situación de aprendizaje, agrupamiento e interacción. Cada uno de estos se respondió en cada una de las tareas que formaron parte de la unidad didáctica, por lo cual me ayudaron no sólo con el diseño sino también con la justificación del porqué de cada tarea, con base en los análisis anteriores y la secuenciación, aspectos que formaron parte de la gestión del aula para llevar a cabo la puesta en práctica de la unidad didáctica.

En cuanto a estos aspectos, puedo decir que al principio me parecieron interesantes pues de cierta manera estuve argumentando cada una de las tareas que diseñé para mi propuesta didáctica. Sin embargo, posteriormente, se me hicieron un tanto repetitivas pues como profesor al escoger cierta actividad existe una intencionalidad y el hecho de integrarla en una secuencia generaba que lo viera de esta manera.

De la misma manera considero que estos elementos deberían de mencionar a qué tipo de modelo de enseñanza corresponden, pues como ya se hizo mención anteriormente, el análisis didáctico carece de un diseño instruccional por lo cual, los aspectos que guían la creación de cada una de las tareas podrían considerarse que no corresponden con el plan de

estudios 2011 en el caso de México. Un ejemplo de esta situación es que, para el diseño de éstas, se solicita que se dé una meta, sin embargo, en este documento se dice que la actividad fundamental del alumno corresponde a la reflexión para establecer conjeturas que lo lleven al aprendizaje, por lo que darle al estudiante la meta considero que es estarlo guiando a lo que el profesor quiere y no dándole la libertad de que lo haga por sí mismo.

Otro aprendizaje que me brindó este análisis es referente a los caminos de aprendizaje, pues de cierta manera yo los consideraba lineales en cuanto a las capacidades, por ejemplo, en el diseño de dicho camino, consideraba que si se da una capacidad es posible adquirir la otra y entre éstas se pueden dar ciertos errores. Posteriormente, después de aplicar mi unidad didáctica observo que los caminos de aprendizaje no deben ser lineales como yo los consideraba pues los estudiantes pueden seguir trayectorias muy variadas.

### ***El papel del Análisis de Actuación en mi desarrollo profesional***

El análisis de actuación, como última fase del análisis didáctico, me permitió recoger información acerca de la puesta en práctica de las actividades con base en las actuaciones de los estudiantes. Por esta razón, el aprendizaje de los estudiantes y mi práctica docente, funcionan como el referente fundamental para conocer el conocimiento adquirido y los errores que los estudiantes no pudieron superar.

Para analizar los resultados, se revisaron las tareas tomando en cuenta los siguientes componentes: *compartir la meta con los escolares, caminos de aprendizaje que se ponen en juego, ayudas, materiales y recursos, agrupamiento y gestión de la comunicación, temporalización, complejidad, significatividad y función de la tarea dentro de la secuencia.*

Estos componentes del diario del profesor me ayudaron de manera significativa para establecer una relación *a priori* y *a posteriori* tanto de la preparación como en los resultados obtenidos de la aplicación. Esto con el fin de realizar mejoras a cada una de las tareas para considerarlos en futuras ejecuciones de la unidad didáctica, por ejemplo, hacer adecuaciones a la estructura conceptual, considerar otros focos prioritarios para la sesión con base en los aprendizajes esperados, al enfocarse en la modelización más que en el algoritmo.

Este análisis establece entonces en qué medida se lograron las expectativas, por ello, se realizó un instrumento de evaluación que constaba de tareas que reflejaban las capacidades

que se esperaba que los estudiantes desarrollaran al llevar a cabo la puesta en práctica de las tres sesiones contempladas de la unidad didáctica.

La aplicación de esta unidad didáctica mostró resultados muy variados en los estudiantes, ya que unos desarrollaron ciertas capacidades, mientras que otros desarrollaron esas mismas u otras, es decir, no todos desarrollaron las mismas consideradas. La gran mayoría de los estudiantes del grupo mencionaron que una característica fundamental de una ecuación cuadrática es su término cuadrático y un aspecto que llamó mi atención también fue que algunos mencionaban que dichas ecuaciones tenían que estar igualadas a cero, por ello propongo poner más atención en el tipo de ecuaciones que se están utilizando para ejemplificar para poder identificar sus elementos en diferentes tipos.

Éste es uno de los resultados que me permitió conocer el análisis de actuación, así como muchos otros relacionados a los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas y mi actuación en general estableciendo una relación entre el análisis de las tareas y los resultados obtenidos en la evaluación de los estudiantes.

Todo lo expresado anteriormente se considera da evidencia de los resultados de la aplicación de este marco teórico-metodológico a una situación cotidiana de mi labor como docente. Algunos aspectos es que el análisis didáctico me permitió aumentar mi conocimiento relativo al contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática; las competencias que se deben potenciar en éste y las capacidades que permiten evaluar la promoción de éstas; los errores específicos que los estudiantes cometen al presentarles tareas que impliquen este contenido. Esto considero que impacta en mi conocimiento didáctico y disciplinar como profesor y en la manera de ponerlo en juego en la preparación y en la puesta en práctica de la unidad didáctica de la ecuación cuadrática.

Este marco teórico metodológico aplicado a un contenido matemático escolar específico me brindó conocimientos que van más allá del tema elegido. De cierta manera me dio luces para saber qué hacer al momento de diseñar una unidad didáctica de otro contenido pues desde un principio se mencionó que es un diseño desde una perspectiva “ideal” que el profesor debería aplicar en su labor docente, proponiendo aspectos de corte conceptual y metodológico de la matemática educativa.

En mi caso, puedo decir que es una herramienta que sirve para preparar el contenido a enseñar, para ponerlo en práctica y evaluarlo, pues considero que hubo resultados considerables de mejora en este trabajo que lo demuestran. Sin embargo, en mi papel como profesor de matemáticas del nivel secundaria, puedo decir que el modelo sigue siendo ideal por el hecho de que no es posible realizar un análisis didáctico a corto plazo de cada contenido matemático escolar que se aborda en cualquier grado de este nivel, pues, aunque se considere a la planificación local, los tiempos que marca el calendario escolar no permiten realizar cada organizador del currículo de cada contenido.

Aunado a esto, se encuentra también la carga grupal en el caso de los docentes de secundaria. Por ejemplo, en mi caso, atiendo a 5 grupos cuyas características son muy diferentes entre sí, por ello, la realización de un análisis didáctico tomando en cuenta las características de cada uno resulta imposible en una situación real.

Pese a esta situación, el análisis didáctico brinda elementos que orientan la actuación diaria del profesor, por ejemplo, identificar los significados que mayormente se potencian en cada contenido permite considerar los sistemas de representación y los fenómenos que le dan origen para proponer las capacidades específicas que permiten identificar el aprendizaje del estudiante en las tareas que se propongan. Lo anterior teniendo en cuenta que también funciona para la evaluación del contenido.

### ***Retroalimentación al marco teórico desde la experiencia en situación real***

Finalmente, otro de los alcances del proyecto desarrollado giró en torno al análisis del marco teórico-metodológico implementado. A partir de la experiencia desarrollada en el aula, presento algunas reflexiones como profesor sobre la utilización de esta herramienta, mencionándolo a manera de ventajas y desventajas.

#### *Ventajas:*

- *Posibilita considerar la planificación a nivel local.* En particular, en mi experiencia en este trabajo, me permitió tomar en cuenta la estructura de la que forma parte el contenido y no sólo como conceptos aislados.
- *Amplía el conocimiento del profesor sobre la materia a enseñar.* Me brindó elementos para analizar y estudiar un contenido desde su estructura conceptual,

sistemas de representación y fenomenología. Cabe aclarar que esto no significa que como profesor enseñe todo este conocimiento nuevo dentro de las situaciones de aprendizaje desarrolladas, pero es un nuevo recurso que tengo y que puedo emplear en el momento que considere necesario.

- *Permite conocer los significados del contenido.* Tomando en cuenta los organizadores del análisis de contenido (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología), logré delimitar algunos de los focos prioritarios del contenido matemático en juego. Cabe aclarar que finalmente fui yo quien decidió qué significado priorizar, con base en diversos aspectos.
- *Permite contemplar un panorama previo más completo en torno a los estudiantes y su aprendizaje.* El análisis cognitivo me permitió establecer consideraciones previas de un tema específico al considerar las expectativas y los posibles errores. Esto me dio referencia también del panorama que podría encontrar al momento de la aplicación, valiendo la aclaración de que siempre se pueden presentar casos no previstos.
- *Permite establecer capacidades.* Las competencias planteadas en el plan de estudios son muy generales, las capacidades son expectativas de aprendizaje medible y están ligadas a las competencias. Al realizar el análisis cognitivo tuve que reflexionar en torno a la forma de promover dichas competencias.
- *Argumentar el diseño de cada una de las tareas.* El esquema de análisis para el diseño de cada una de las tareas que formarán parte de la unidad didáctica me permitió argumentar el porqué de su elección y su vinculación con los análisis anteriores, así como también con lo estipulado en el plan de estudios.

*Desventajas:*

- *No considera que la estructura matemática de ciertos contenidos es muy amplia.* La estructura matemática en ocasiones supera la estructura del contenido matemático escolar. Es decir, existen nociones relacionadas con el contenido que no es posible abordar en la unidad didáctica en cuestión.
- *No posee un diseño instruccional que oriente la puesta en práctica de la unidad didáctica.* Se presenta una guía para el diseño de la actividad, sin embargo, no hay

pautas de actuación respecto a la puesta en práctica. La duda que me queda es si esto es intencional, si existe alguna propuesta desde el marco teórico que desconozcamos o si representa un vacío teórico actual en este apartado.

- *Se centra en mayor medida en la planificación.* Para realizar los primeros tres análisis la teoría es muy clara sobre los pasos a seguir. Sin embargo, en la puesta en práctica no fue así.
- *Se centra en mayor medida en las tareas.* No hay un diseño que permita realizar un análisis de actuación enfocado en los estudiantes y la actuación docente, más bien está dirigido a las tareas.
- *Falta considerar los tiempos que implican los análisis necesarios para la planificación.* Uno de los más importantes aspectos que determina significativamente la aplicación de un marco teórico-metodológico a una situación escolarizada es que los tiempos que empleé para cada organizador no coincidieron con los del currículo, pensando en realizar una buena intervención.

En conclusión, dada la experiencia vivida, este marco teórico me parece idealista, en el sentido de que contempla el universo de conocimiento que debe tener un profesor al enseñar un concepto matemático. Este punto se magnificó tomando en cuenta que me encontraba dentro de un contexto de formación en el que se pide hacer uso del rigor y objetividad propios del método científico. En un ambiente real, de docencia, como profesor podría evitar realizar algunas de las pautas de actuación solicitadas dadas mi experiencia dentro de la asignatura y el conocimiento de mis estudiantes, por ejemplo.

Se deben considerar además de las ventajas y desventajas algunos aspectos en los que se debe poner atención, tales como la existencia de diferencias entre el modelo teórico y el contexto propio. Asimismo, advertir que los elementos que se consideran tanto para el diseño como evaluación de las tareas pueden no coincidir con el modelo de enseñanza que se intenta promover en el currículo. Sin embargo, tampoco se debe perder de vista que todo conocimiento representa oportunidades de mejorar mi práctica docente.



## Referencias

- Aros, D., Astudillo, N., Ramos, E. y Ruz, F. (S/F). Análisis didáctico para la enseñanza de las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. (Trad. José Babini) México: Siglo Veintiuno editores (Original en francés, 1938).
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Campillo, A. (2004). *Título de grado en matemáticas*. Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.
- Cañadas M. y Gómez P. (2013), Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD, documento inédito (Documentación), Bogotá, Universidad de los Andes. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/2061/>
- Dorsch, F. (1985). *Diccionario de psicología*. Quinta Edición. Barcelona: Herder.
- Escalante, V., y Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24(1), 107-132.
- Fernández, J. (2010). Unidad didáctica: Límite y Continuidad de Funciones. *Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Esp: Matemáticas)*. Universidad de Granada.
- Font, V. Planas, N y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), pp, 89-105.
- Fillooy, E. y Kieran, C. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, 229-240.
- Flores, P., Gómez, P. y Marin, A. (2013), Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD, documento inédito (Documentación), Bogotá, Universidad de los Andes. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/2061/>
- García, J., Segovia, I. y Lupiáñez J. (2010). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. Departamento de



- didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Recuperado de: [https://www.researchgate.net/profile/Jose\\_Lupianez2/publications](https://www.researchgate.net/profile/Jose_Lupianez2/publications)
- Godino, J. Rivas, M. Castro, W. Konic, P. (S/F). *Elementos para el análisis didáctico de situaciones problema en la formación matemática de maestros*. Recuperado de: <http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXII/dmdc/GodinoRivasCastroYKonic.pdf>
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal in Educational Psychology*. ISSN 1696-2095. No. 17, Vol. 7(1) pp.471-498. Editorial EOS: España.
- Gómez, P. (S/F). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/394/1/GomezP05-2797.PDF>
- Gomez, P. y Lupiáñez, L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la Formación Inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 79-98.
- Gozde, M. y Kursat, A. (2015). *Performance and Difficulties of Students in Formulating and Solving Quadratic Equations with One Unknown*. ESTP. Educational Sciences: Theory & Practice 15(4), 1137-1150.
- Gustin, J. y Avirama, L. (2014). *"Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo"*. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. Área de Educación Matemática: Santiago de Cali. Recuperado de: [http://www.academia.edu/8060744/UNA\\_PROPUESTA\\_PARA\\_LA\\_ENSE%3%91ANZA\\_DE\\_LA\\_ECUACI%3%93N\\_CUADR%3%81TICA\\_EN\\_LA\\_ESCUELA\\_A\\_TRAV%3%89S\\_DE\\_LA\\_INTEGRACI%3%93N\\_DEL\\_MATERIA\\_L\\_MANIPULATIVO](http://www.academia.edu/8060744/UNA_PROPUESTA_PARA_LA_ENSE%3%91ANZA_DE_LA_ECUACI%3%93N_CUADR%3%81TICA_EN_LA_ESCUELA_A_TRAV%3%89S_DE_LA_INTEGRACI%3%93N_DEL_MATERIA_L_MANIPULATIVO)
- Hernández, R. Fernández, C y Baptista, P. (2006) *Metodología de la investigación*. Cuarta Edición. Mc Graw-Hill. Interamericana: México

- Hurtado, C. y Torres, L. (2015). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. *XIV CIAEM*. Universidad del Valle: Colombia.
- Liebenberg, R., Linchevski, L., Sasman, M., Olivier, A., Lukhele, R., Lamberchts, J. (1999). *Algebra module 8 quadratic equations grade 9 teacher document*. Society Foundation for South Africa.
- Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral) Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada, España.
- Lupiáñez, J. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 35-48.
- Mesa Y. (2008). El concepto de función cuadrática: un análisis de su desarrollo. Trabajo de grado para optar el título de licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas. Universidad de Antioquía: Colombia.
- Mesa Y. y Villa, J. (S/F). Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática. Universidad de Antioquia, Medellín: Colombia.
- Mora, M. Gutiérrez, F., Herrera, F. (2013), Primer acercamiento de un análisis didáctico de la recta para el diseño de una propuesta de intervención en el aula desde un enfoque funcional. *I CEMACYC*: República Dominicana.
- Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. y Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14
- Posadas, P. (2013). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3º de educación secundaria obligatoria*. Granada, España.
- Radford, L. y Guérette, G. (1990). *Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach*. Laurentian University Research Funds.

- Radatz, H. (1979). Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.
- Rojano, M. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números*, 5-20.
- Romero, I. y Gómez, P. (2015). Apuntes sobre análisis de actuación. *Módulo 5 de MAD 3*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Rico, L. (1995): "Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas", Cap. 3. pp. 69-108, en J. Kilpatrik.; P. Gómez, y L. Rico: *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo en matemáticas. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice – Horsori.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 8(1), 1-15.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma 58*. Universidad de Granada, pp. 7-23.
- Ruano, R. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 61-74.
- Segovia., L. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- SEP. (2011). *Plan de estudios 2011*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2011). *Programa Matemáticas Secundaria*. México: Libros de Texto Gratuitos.

- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori
- Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación matemática*, 18(3), 5-38.

## Anexos

### ANEXO 1. Test de canales de percepción

NOMBRE \_\_\_\_\_ ESPECIALIDAD \_\_\_\_\_

GENERACIÓN \_\_\_\_\_ EDAD \_\_\_\_\_ SEXO \_\_\_\_\_ FECHA \_\_\_\_\_

#### DETERMINACIÓN DE LOS CANALES DE PERCEPCIÓN

Elije 20 palabras de la siguiente lista que por alguna razón llamen la atención

1. <i>Caliente</i>	21. <i>Color</i>	41. <i>Áspero</i>
2. <i>Sabroso</i>	22. <i>Ruidoso</i>	42. <i>Optimista</i>
3. <i>Visor</i>	23. <i>Picante</i>	43. <i>Difuso</i>
4. <i>Guitarra</i>	24. <i>Piano</i>	44. <i>Ronco</i>
5. <i>Observatorio</i>	25. <i>Tímido</i>	45. <i>Alegre</i>
6. <i>Comodidad</i>	26. <i>Luminoso</i>	46. <i>Chillón</i>
7. <i>Oscuro</i>	27. <i>Póster</i>	47. <i>Melodía</i>
8. <i>Cantante</i>	28. <i>Apasionado</i>	48. <i>Fotografía</i>
9. <i>Emocionante</i>	29. <i>Crepúsculo</i>	49. <i>Mojado</i>
10. <i>Brillante</i>	30. <i>Desabrido</i>	50. <i>Tenue</i>
11. <i>Amable</i>	31. <i>Cansado</i>	51. <i>Radio</i>
12. <i>Acordeón</i>	32. <i>Transparente</i>	52. <i>Televisión</i>
13. <i>Pálido</i>	33. <i>Musical</i>	53. <i>Frío</i>
14. <i>Paisaje</i>	34. <i>Visualizar</i>	54. <i>Oratoria</i>
15. <i>Perfumado</i>	35. <i>Trueno</i>	55. <i>Claro</i>
16. <i>Lejos</i>	36. <i>Agitado</i>	56. <i>Eco</i>
17. <i>Saxofón</i>	37. <i>Violín</i>	57. <i>Panorama</i>
18. <i>Sensación</i>	38. <i>Vergonzoso</i>	58. <i>Barítono</i>
19. <i>Nublado</i>	39. <i>Entonación</i>	59. <i>Tronar</i>
20. <i>Triste</i>	40. <i>Canción</i>	60. <i>Silbar</i>

Transfiere las respuestas a esta página señalando los números de las palabras que usted selecciono y luego sume los totales en cada columna

<i>COLUMNA A VISUAL</i>	<i>COLUMNA B AUDIO</i>	<i>COLUMNA C SENSO</i>
3	4	1
5	8	2
7	12	6
10	17	9
13	22	11
14	24	15

16	33	18
19	35	20
21	37	23
26	39	25
27	40	28
29	44	30
32	46	31
34	47	36
43	51	38
48	54	41
50	56	42
52	59	45
55	58	49
57	60	53

TOTAL \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_  
 Columna A X 5= \_\_\_\_\_ Columna B X 5= \_\_\_\_\_ Columna C X 5= \_\_\_\_\_

Indique su porcentaje en cada columna

100%

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>Visual</b>	<b>Auditivo</b>	<b>Kinestésico</b>

0%

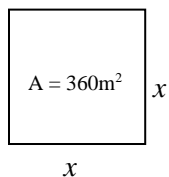
## ANEXO 2. Cuestionario diagnóstico para análisis cognitivo

NOMBRE: \_\_\_\_\_ 3<sup>er</sup>GRADO GRUPO “ A ”

**PROPÓSITO:** Obtener información correspondiente al contenido de ecuaciones cuadráticas para establecer un diagnóstico del grupo y posteriormente realizar un *análisis cognitivo* con base en los resultados obtenidos de éste cuestionario.

**INSTRUCCIONES:** Lea con atención y responda lo que se le pida.

1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
2. ¿Cuál es la forma de una ecuación cuadrática?
3. ¿Cuáles son las partes de una ecuación cuadrática?
4. ¿Cuáles métodos de solución de ecuaciones cuadráticas conoces?
5. Resuelve los siguientes problemas:
  - a. ¿Cuántos metros mide por lado el siguiente cuadrado? Justifica tu respuesta.



- b. El cuadrado de un número más 4 es igual a 8, ¿Cuál es ese número?
6. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas (realiza el procedimiento en la parte de atrás)
  - a)  $x^2 + 18x + 81 = 0$
  - b)  $5x^2 = 125$
  - c)  $x^2 - 2x = 0$
  - d)  $x^2 = 36$
  - e)  $x^2 - 49 = 0$
  - f)  $3x^2 - 11x - 4 = 0$



ANEXO 3. Instrumento de evaluación de la unidad didáctica

NOMBRE: \_\_\_\_\_ 3ºGRADO GRUPO “ A ”

**INSTRUCCIONES:** Lea con atención y responda lo que se le pida.

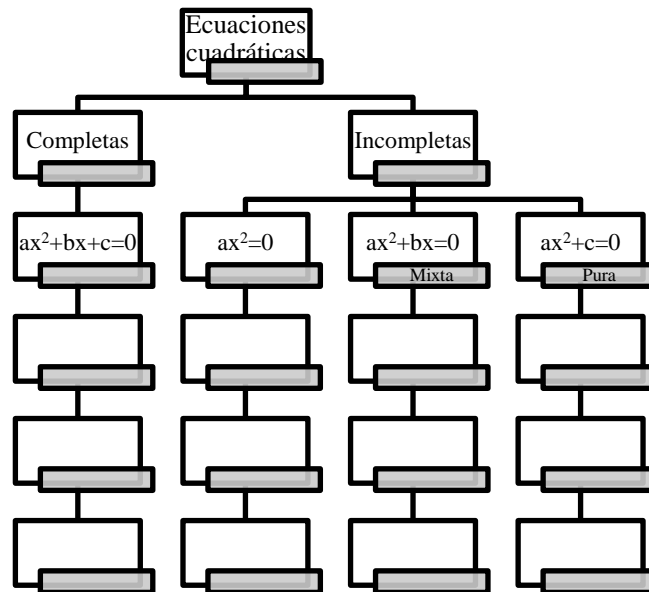
1. De las siguientes ecuaciones, marca con una X las que, para ti, no son ecuaciones cuadráticas:

$x + 2 = x + 8$		$x^2 + 3x = 0$	
$x^2 + 11x + 24 = 0$		$-8x^2 + 4x^4 + 15x^3 + 7x - 1 = 0$	
$x^2 = 0$		$x + 2 = 0$	
$6x^3 + x^2 - 3x + 16 = 55$		$2x^2 + 26 = 0$	
$x + y = 1$		$5 = 5x^2$	

2. ¿Qué características debe cumplir una ecuación para decir que es una ecuación cuadrática?

3. Identifica el término cuadrático, lineal e independiente de las siguientes ecuaciones cuadráticas y en el mapa conceptual, ubícalas según su clasificación

$5x + 3 = 15x^2$	$18x^2 = 1$	$x^2 = 0$	$0 = 3x^2 + 18$
$0 = 5x^2$	$3x^2 = 6x - 2$	$x^2 = 5x$	$2x^2 = 10x$
$x^2 + 3 = 0$	$x^2 = 6 + x$	$25x^2 + 12x = 0$	$2x^2 = 0$



4. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas según su tipo.

$$x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 = 81$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$