UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior

Informe Académico de Desarrollo Profesional para obtener el grado de:

Maestra en Matemática Educativa

Presenta:

Alejandra Adame Esparza

Directores del trabajo:

M.A.T.I. Mónica del Rocío Torres Ibarra

M. en M. Elvira Borjón Robles

Dr. Fernando A. Hitt Espinosa

Zacatecas, Zac. Diciembre 2016

Este trabajo ha sido realizado gracias al

apoyo financiero otorgado por el

Consejo Nacional de Ciencia y

Tecnología (CONACyT) de

Septiembre de 2014 a Julio de 2016.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, a los 5 días del mes de diciembre del año 2016, quien suscribe **Alejandra Adame Esparza**, alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato y número de matrícula **34155937**; manifiesta que es el autora intelectual del trabajo de grado titulado *"Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior"* bajo la dirección M.A.T.I. Mónica del Rocío Torres Ibarra, la M. en M. Elvira Borjón Robles y el Dr. Fernando A. Hitt Espinosa.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Alejandra Adame Esparza

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradezco a CONACyT el apoyo brindado en estos años de estudio. Agradezco a los profesores de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas por todas las facilidades brindadas y por la confianza depositada en mi persona. Agradezco al personal del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (CEM-UAA) por apoyarme en todo momento para la realización de este trabajo.

Agradezco a mis tutores de tesis y lectores por sus múltiples enseñanzas y oportunas correcciones.

Agradezco profundamente a cada uno de los jóvenes que permitieron poner en práctica este proyecto de investigación:

Brenda Itzel, Andrea Marian, María Jaquelinne, Aurea Ariel, Patricia Valeria, Javier Andre, Aranxa Ivette, Héctor Manuel, Valeria Josseline, Jesse Dinorah, María Fernanda, Luis Daniel, Moisés, Alondra Cecilia, Frank Elgar, Karen Guadalupe, José Ángel, Mariana, Ángela Melisa, Nicolás, María Yessenia, Gladys Lizeth, Helios Omar, Mario Alejandro, Samantha, Ángel Eduardo, Carmen Xiklali, Daniel Isidro, Samuel, Ricardo Salvador, Michelle, David Alejandro, Jeniffer Itzel, Melissa Guadalupe, Daniela, Javier Mauricio, Uriel Edgardo, Elvia Daniela Guadalupe, Rafael Alejandro, Lizeth Alejandra, Vanessa Mariangel, Grecia Alejandría, Verónica Alexsandra, Sara, Yademira Valeria, Karla Ivonne, Brenda Carolina, Cynthia Cosette, Maria Fernanda, Axel Ali, Cinthya.

Agradezco a Dios, la vida, mi familia, mis amigos.

RESUMEN

El presente Informe Académico de Desarrollo Profesional lleva por título: Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior, y como tal, busca brindar a los docentes de la asignatura de Trigonometría una alternativa más para la impartición del tema antes mencionado.

En esta propuesta no se deja de lado el tratamiento algorítmico que se tiene tradicionalmente del tema, al contrario, busca que los estudiantes tengan a su disposición tal objeto en diferentes representaciones, de forma que la visualización de las mismas les ayude a construir y comprender el concepto de Identidad Trigonométrica.

Este trabajo tiene como sustento teórico la visualización matemática que no se restringe exclusivamente a un proceso de percibir las representaciones de los objetos matemáticos sino de transformarlos mentalmente y en la acción de producir representaciones ad hoc (en papel o computadora) que permitan al estudiante resolver diversos problemas.

Así, la visualización tiene el papel de promover la búsqueda de relaciones que permitan a los estudiantes dar sentido a lo que aprenden, en el proceso, el estudiante representa, transforma, propone, valida y pone en práctica una propuesta alternativa.

El diseño de tal propuesta exige el uso de una metodología que considere el error como parte natural de un proceso cognitivo para permitir una construcción completa de un concepto. Es así que, en este estudio, se hace uso de la Ingeniería Didáctica y se presentan los resultados y conclusiones obtenidos después de aplicar esta metodología a un grupo de 51 estudiantes de nivel medio superior.

PALABRAS CLAVE

Identidades Trigonométricas, Visualización, Representaciones, Comprensión

Contenido

Índice de Figuras

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación surge al reflexionar acerca de la práctica docente. Haciendo retrospectiva de mi experiencia como docente, llego a la conclusión que, de todos los temas matemáticos que impartido, el de la comprobación de Identidades Trigonométricas ha sido uno de los temas que presenta más problemas de aprendizaje.

La propuesta que se presenta surge como resultado del análisis de libros de texto comúnmente utilizados por profesores del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (CEM-UAA) y de una revisión de investigaciones que anteceden en este tema.

Se presentan los resultados de dichos análisis que son base para el diseño e implementación de nuestra propuesta.

El presente trabajo tiene como referente teórico la visualización matemática con la cual se pretende evidenciar los procesos mentales por los que los alumnos atraviesan al momento de trabajar con Identidades Trigonométricas centrada en la importancia de la conversión entre representaciones y los problemas que ello representa desde un punto de vista cognitivo.

El trabajo se encuentra dividido en 6 capítulos, los cuales describo a continuación: El capítulo 1 está dedicado al estado del arte, en él se encuentra una serie de investigaciones que anteceden en el tema de Identidades Trigonométricas; el capítulo 2 contiene una descripción de la problemática de nuestra investigación, pregunta de investigación e hipótesis, así como los objetivos particulares y generales que se pretenden alcanzar; el capítulo 3 habla acerca del marco teórico utilizado, en su contenido se hace una recuentro de los conceptos matemáticos que se utilizarán durante todo el trabajo, al mismo tiempo que se describen los principales preceptos de la Visualización Matemática; el capítulo 4 habla sobre la metodología, en él se describen cada una de las etapas que forman parte de la Ingeniería Didáctica y la manera en que estas fueron adaptadas en nuestro trabajo; en el capítulo 5 se hace una descripción y análisis de los resultados que obtuvimos, que son posteriormente contrastados con los resultados esperados realizados en la etapa de la Ingeniería Didáctica denominada análisis a priori; finalmente, en el capítulo 6 se podrán encontrar una serie de conclusiones personales y profesionales producto del análisis *a posteriori,* a las que se llegó tras la realización de la presente investigación.

Finalmente, como cierre del trabajo, se incluye una reflexión personal, en la que se describe el impacto que el desarrollo de este trabajo nos deja, tanto personal, como profesionalmente.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

La trigonometría es una de las ramas de las matemáticas más antiguas y aunque "ningún historiador se atreve a fijar sus inicios" (Villuendas, 1979, citado en Massa, Romero y Casals, 2009), no es desconocido por todos que desde siempre ha estado ligada a muchas otras ramas como la aritmética, la geometría y el álgebra.

A pesar de su trascendencia a lo largo de los siglos, en la actualidad algunos investigadores como Markel (1982) y Weber (2005) expresan con preocupación que en las escuelas se le está restando importancia.

Es aquí donde comienza nuestro estudio dándonos a la tarea de investigar el panorama actual que vive la trigonometría; de manera general se encontró que su "enseñanza y aprendizaje es un campo poco explorado por los investigadores de la didáctica de la matemática". (Fiallo, 2010, p. 45). Fiallo menciona que, "las pocas investigaciones encontradas señalan la complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría". (Fiallo, 2010, p. 1).

Dentro de las investigaciones que se han dedicado al tema, se encuentra la de Goldin (1983) donde comparten que una de las mayores dificultades que presentan los estudiantes de primer grado de ciencias y matemáticas de la Universidad de Illinois es respecto a los temas de trigonometría; estas conclusiones son compartidas por Markel (1982) y Weber(2005), quienes reportan que existen estudiantes universitarios que a pesar de sus excelentes aptitudes en matemáticas, ingresan a las universidades con vacíos con relación a conceptos trigonométricos fundamentales.

Por otro lado, se han encontrado investigaciones respecto a dificultades en temas específicos de la trigonometría, (Fi (2003) y Brown (2006); citados en Fiallo, 2010), por ejemplo, se plantean que la trigonometría en el plano coordenado es un tema difícil para los estudiantes y que además es muy poco lo que se ha hecho para investigar los motivos de dichas dificultades.

Por su parte Fiallo (2010) comenta que hay muchos factores que podrían estar involucrados en este problema como el hecho de que "la trigonometría es un tema complicado e interconectado que lleva a que los estudiantes tengan que estar cambiando las definiciones dadas para las razones trigonométricas de acuerdo al enfoque y contexto planteado". (Fiallo, 2010, p. 45).

Así como este autor le atribuye parte de la problemática al estar cambiando de definiciones, otros autores como Van Hiele (1957) señalan que una de las problemáticas de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría es el abuso de fórmulas, promoviendo un acercamiento de aprendizaje de memoria que al pasar el tiempo el estudiante olvida, en lugar de promover la construcción y deducción de las mismas.

Otra dificultad identificada en las investigaciones analizadas tiene que ver con la complejidad que muestran los estudiantes al tratar de comprender el concepto de razón involucrado en el tema de funciones trigonométricas. (Freudenthal, 2001; citado en Fiallo, 2010).

De manera más específica respecto al tema de Identidades Trigonométricas se encontró el trabajo de Dugdale (1989). Esta investigadora pretendía incluir representaciones gráficas a este tema. Hizo un comparativo entre dos formas diferentes de relacionar gráficos con Identidades Trigonométricas y encontró que sí eran introducidos como fundamento de las Identidades Trigonométricas, los estudiantes mostraban una actuación post experimental superior y variada en lo relacionado con representaciones gráficas de funciones.

CAPÍTULO 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1. PROBLEMÁTICA

Después de la revisión de antecedentes se logra destacar que una de las principales problemáticas actuales que vive la Trigonometría es la preponderancia de fórmulas y la ausencia de su sentido geométrico que, al no mostrar ninguna relación, imposibilita al estudiante en la construcción y por ende comprensión de muchos de los conceptos de esta rama de las Matemáticas, incluyendo el concepto de Identidad Trigonométrica.

2.2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo un acercamiento a la visualización de las Identidades Trigonométricas permitirá que los estudiantes construyan y comprendan dicho concepto?

2.3. MOTIVACIÓN

La principal razón por la que se ha elegido el tema de Identidades Trigonométricas es porque existe un interés personal relacionado con la labor docente. De manera empírica se ha observado que en el Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (CEM-UAA) existe una tendencia hacia la reprobación de cierta unidad de aprendizaje que comprende este tópico matemático. El reto es encontrar nuevos materiales que permitan enseñar este tema de una manera diferente a la tradicional, donde se muestre una verdadera comprensión por parte de los estudiantes, entendiendo como tradicional a todas aquellas formas de enseñanza basadas solamente en las sugerencias de ciertos libros de texto.

2.4. JUSTIFICACIÓN

Investigaciones como la de Dugdale (1989) permiten aseverar que un acercamiento visual de un concepto matemático, mejorará su comprensión. La autora muestra la enseñanza del tema de Identidades Trigonométricas de dos maneras distintas; en una, introduce las gráficas que conforman las Identidades como un auxiliar después de que los jóvenes ya las han manipulado y en la otra; primeramente, introduce las gráficas y posteriormente se manipulan. Se observó que los estudiantes del segundo grupo mostraron una comprensión más profunda del tema en comparación con los del primero grupo.

Lo anterior nos hace pensar que una serie de actividades donde las gráficas de las expresiones que forman las identidades estén incluidas aportará un nuevo enfoque de ver las cosas.

Para lograr que los estudiantes tengan acceso a estas de una manera más tangible, en la que puedan visualizar los comportamientos gráficos, analíticos y tabulares de ciertas funciones, consideramos oportuno el uso de algún tipo de software matemático.

La tecnología entonces jugará un papel muy importante en nuestra investigación ya que será una herramienta más para el logro de nuestros objetivos. Compartiendo la idea de Wenzelburger (1992), quien menciona que las condiciones dadas en un ambiente computacional favorecen la retención de los conceptos.

Por lo anterior se propone, como proyecto de desarrollo profesional, una propuesta de enseñanza alternativa, que involucra el uso del software GeoGebra así como varios instrumentos guía.

2.5. HIPÓTESIS

Con base en lo anteriormente mencionado, tenemos la hipótesis de que la implementación de un acercamiento visual, apoyado con software, facilitará la construcción y comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica por parte de los estudiantes.

2.6. OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS PARTICULARES

El objetivo general de este trabajo de investigación es *diseñar, validar y aplicar una serie de actividades como apoyo a la enseñanza, que faciliten al estudiante construir y comprender el concepto de Identidad Trigonométrica*. Para lograr lo anterior se tienen como objetivos particulares los siguientes:

- Hacer uso de la Ingeniería Didáctica, vista como producciones de situaciones de enseñanza, y de las distintas representaciones del concepto de Identidad Trigonométrica para **diseñar** un conjunto de actividades tendientes a que el estudiante construya y comprenda el concepto antes mencionado por medio de preguntas guiadas.

- **Programar**, por medio del software GeoGebra, instrumentos interactivos ad hoc a las actividades diseñadas en el punto anterior, de manera que sirvan de apoyo visual para la realización de las actividades en el aula.

- **Validar** los instrumentos del punto 1 y 2 por medio de una prueba piloto.

- **Aplicar** la propuesta a un grupo de segundo semestre del CEM-UAA en los tiempos marcados por el plan de estudio de dicha institución.

- **Analizar**, por medio de redes mentales de representaciones, los resultados obtenidos, que nos permitirán hacer una clasificación de los aprendizajes de los alumnos.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

3.1 VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA

Históricamente, la visualización ha jugado un papel muy importante en la comprensión y evolución de las matemáticas, por ejemplo Torres (2004) menciona que:

> En 1945 Jacques Hadamard realizó una investigación entre algunos matemáticos a fin de determinar sus métodos de trabajo. La conclusión a la que llegó fue sorprendente: casi todos ellos, salvo contadas excepciones, dijeron no atacar los problemas en términos verbales o algebraicos, sino con base en una vaga imaginación visual. (Torres, 2004, pp. 20)

En los inicios de la matemática, específicamente en la época de los Pitagóricos, la visualización era sumamente importante, el descubrimiento estaba ligado a los procesos de visualización. Es hasta Euclides en donde se transforma la matemática visual a una matemática lógico-deductiva, en donde la figura deja de ser un elemento central y empieza a jugar un papel secundario. La necesidad de una matemática lógico-deductiva era imperativa para librar a la matemática de contradicciones.

Retomando estas ideas, consideramos que un acercamiento didáctico en el aula, debe tomar en cuenta tanto el razonamiento lógico-deductivo (formal) como un acercamiento visual:

> la visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de *diferentes representaciones* de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema. (Hitt, 2003, pp. 3)

3.1.1 DEFINICIONES DE VISUALIZACIÓN

Ver no es lo mismo que visualizar, y el término visualización en el área de matemáticas se concibe como la exteriorización de los procesos mentales que se crean a través de las representaciones de un concepto, una manera de "ver lo invisible".

Visualizar en matemáticas no es lo mismo que en otras áreas, Blanco (2004), distingue la visualización como:

> … en las corrientes filosóficas es una técnica, entroncada en el análisis transaccional iniciado por Eric Berne (años 50's), que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente y tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos.
>
> Con la visualización matemática se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, *representables intuitivamente*, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación de ellos para la resolución de los problemas del campo. (Blanco, 2004, pp. 90)

Por su parte Hitt (1995), dice que Visualizar es crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando *diferentes representaciones del concepto* y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión.

Por otro lado, Duval (1999) distingue la visualización de la visión. Para él la visión aporta un acceso directo al objeto, pero no proporciona una aprehensión global del concepto, "la visualización hace visible todo lo que no es accesible a la visión" y explica que la visualización consiste en comprender directamente el conjunto de la configuración de las relaciones y en determinar qué es relevante en ella.

Autores como Zimmermann y Cunningham (1991), señalan que "Visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del diagrama, pero visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática *es el proceso de formar imágenes* (mentalmente, con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología), usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática. La visualización no es el fin mismo, sino el entendimiento".

Para Cantoral y Montiel (2003), realizar la actividad de visualización requiere la utilización de *nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico, algebraico, exigiendo también del uso de un lenguaje común* para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales.

En otro de sus artículos, Hitt (1998) menciona que comprender un concepto implica *una articulación coherente de las diferentes representaciones* que intervienen durante la resolución de problemas, es decir, un concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto mismo.

Sobre la construcción de los conceptos matemáticos, Duval (1993) establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la *interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación*. La comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación. En otras palabras, la aprehensión de un concepto sólo se logrará si existen actividades de conversión de una representación a otra y viceversa propiciando con esto la construcción de los conceptos matemáticos. Duval (1993) señala que la visualización requiere un "entrenamiento" especial", específico para cada registro y que no puede limitarse a la construcción de imágenes visuales. Explica que la construcción pone atención en enfocar sucesivamente en algunas unidades y propiedades, mientras que *la visualización consiste en comprender directamente el conjunto de la configuración de las relaciones y en determinar qué es relevante en ella*. Y apunta que lo más frecuente es encontrar estudiantes que únicamente logran una aprehensión local de las imágenes, sin ser capaces de "ver" la organización global relevante.

En otras palabras, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en cuestión. Así pues, la visualización como mediadora en el razonamiento de un alumno puede facilitar el proceso de resolución de problemas. De manera que, en una situación puesta en juego en el aula, el profesor guíe a los estudiantes a formarse una imagen de la situación y a describirlo y representarlo con sus propias palabras, creando una imagen o representación del mismo, que le permita lograr la asimilación del conocimiento.

Habremos de entender entonces a la visualización no como el simple acto de "ver", pues visualizar la función no significa "verla, mirar su gráfica", ya que el pensamiento matemático no se reduce a pensar cuando estemos ante una actividad matemática. Entendemos por visualización en el sentido de Hershkowitz (citado en Hitt, 2003), quien trata a la visualización como ***la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento de quien aprende.*** Ahora bien, realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado.

3.1.2. NIVELES DE VISUALIZACIÓN

Para poder tener un instrumento de medición en el quehacer de la visualización, tomamos como base a Hiebert y Carpenter (1992, citado en Hitt, 2003), quienes indican que comprender se definirá en términos de ***cómo se representa y se estructura la información***. Una idea matemática, procedimiento o hecho será entendido si forma parte de una red interna, es decir, *si su representación mental forma parte de una red de representaciones*. *El grado de comprensión estará determinado por el número y la fuerza de las conexiones*. Una idea matemática, un procedimiento o un hecho se comprenderán perfectamente si está vinculado a redes existentes con conexiones más fuertes o más numerosas, en este sentido, el propio Hitt (1998) describe 5 niveles que tienen que ver con la comprensión de los conceptos y que están basados en el tipo de representaciones que los estudiantes dominan y emplean, así como con el grado de dichas relaciones, estos niveles son:

Nivel 1: Reconocimiento de los elementos de un sistema semiótico.

Nivel 2: Transformaciones internas a un sistema semiótico.

Nivel 3: Conversiones (transformaciones externas) de una representación de un sistema semiótico a otro.

Nivel 4: Coordinación de representaciones entre diferentes sistemas.

Nivel 5: Producción de representaciones semióticas en la resolución de un problema.

Para los fines de este trabajo lo que se pretende es, que mediante una serie de actividades que involucran la manipulación de las identidades trigonométricas en diferentes representaciones, que apoyados con el uso de tecnología, permitan al alumno crear conexiones entre las representaciones manipuladas, es decir, analizar el nivel de comprensión que los estudiantes logran desarrollar del concepto de Identidad Trigonométrica.

Para una mejor comprensión de los términos manejados en el presente trabajo, tomaremos los siguientes preceptos:

Según Duval (2006), se debe distinguir entre dos tipos de representaciones:

1. *Representaciones mentales*, conformadas por todo el conjunto de concepciones o imágenes que un individuo tiene acerca de un objeto, son la interiorización de las representaciones semióticas
2. *Representaciones semióticas,* producciones constituidas por el empleo de signos; no son más que el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros.

Duval (2004) plantea tres actividades cognitivas inherentes a toda representación:

1. *Formación*. Representaciones de un registro semiótico particular, la cual constituye un conjunto de marcas perceptibles e identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
2. Tratamiento, Transformaciones propias de cada registro, de acuerdo con unas únicas reglas que le son propias al sistema, de modo que a partir de éstas se obtengan otras representaciones que puedan constituirse como una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
3. Conversión. Habilidad para el cambio de registro de representación semiótica, el poder convertir las representaciones producidas de un sistema de representación a otro sistema, de manera que este otro sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

3.2 MARCO MATEMÁTICO

Este apartado se incluye con la finalidad de conceptualizar los términos de los objetos matemáticos de los que se hará uso, entre los que se destacan:

3.2.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo son las relaciones entre sus lados. Para poder discutir estas funciones debemos expresar la variable independiente, que puede ser un simple número real o un número real que denote la medida de un ángulo en grados o en radianes, entonces denotamos, por ejemplo, $sen\, t$ o $sen\, \theta$. A esta variable independiente la llamaremos argumento (Guzmán, 2006, p. 103).

Si consideramos al ángulo θ restringido a $0 \leq \theta \leq 90°$, (como se observa en la figura 1) y tenemos un triángulo rectángulo cualquiera, donde llamamos "c" a la hipotenusa, "a" al cateto opuesto y "b" al cateto adyacente, las funciones trigonométricas, considerando el ángulo θ como argumento (véase figura 2). (Guzmán, 2006, p. 103-104).

$c = hipotenusa$

$b = cateto\ adyacente$

$a = cateto\ opuesto$

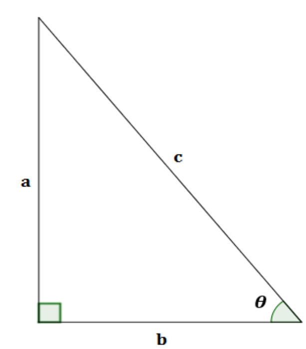


Figura 1. Lados de un triángulo

$$sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$cos\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$tan\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}$$

$$cot\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

$$sec\ \theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$csc\ \theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

Figura 2. Relaciones entre los lados del triángulo

3.2.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

Dos cantidades son recíprocas cuando su producto es igual a la unidad, por ejemplo $2\ y\ \frac{1}{2}$; de manera similar, las funciones trigonométricas recíprocas son aquellas cuyo producto es la unidad:

Así, como se observa en la figura 3, el seno y la cosecante, el coseno y la secante, y la tangente y la cotangente son funciones trigonométricas recíprocas (Guzmán, 2006, p.104).

$$sen\ \theta = \frac{a}{c}$$

$$cos\ \theta = \frac{b}{c}$$

$$tan\ \theta = \frac{a}{b}$$

$$cot\ \theta = \frac{b}{a}$$

$$sec\ \theta = \frac{c}{b}$$

$$csc\ \theta = \frac{c}{a}$$

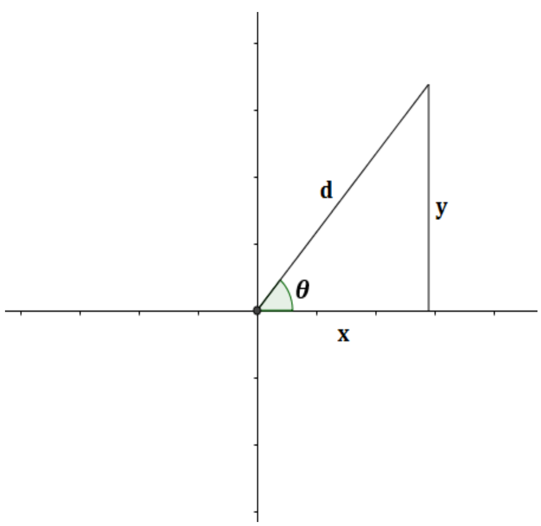
Figura 3. Funciones trigonométricas recíprocas

3.2.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEMENTARIAS

Dos ángulos son complementarios cuando suman 90°, por ejemplo, $25° + 65° = 90°$. En un triángulo rectángulo, sus ángulos agudos son complementarios. El prefijo "co" indica que el coseno de un ángulo es el seno de su complementario y viceversa; que la cotangente es la tangente de su complemento y que la cosecante es igual a la secante de su complemento y viceversa, entonces para los ángulos complementarios, el coseno, cotangente y cosecante de un ángulo son respectivamente iguales al seno, tangente y secante del ángulo complementario. Por ejemplo, el $seno\ de\ 10°$ es 0.173648177 igual al $coseno\ de\ 80°$ (Guzmán, 2006, p.105-106).

3.2.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER VALOR DEL ÁNGULO

Todo ángulo $\boldsymbol{\theta}$ tiene una representación en el plano cartesiano y puede asociarse con un triángulo rectángulo; así las funciones trigonométricas de dicho ángulo quedan determinadas como se muestra en las figuras 4, 5, 6 y 7 (Guzmán, 2006, p.107-109):

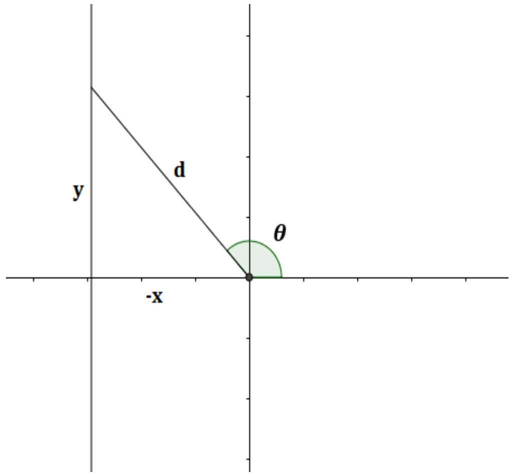


$$sen\ \theta = \frac{y}{d} \qquad csc\ \theta = \frac{d}{y}$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{d} \qquad sec\ \theta = \frac{d}{x}$$

$$tan\ \theta = \frac{y}{x} \qquad cot\ \theta = \frac{x}{y}$$

Figura 4. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo - 1

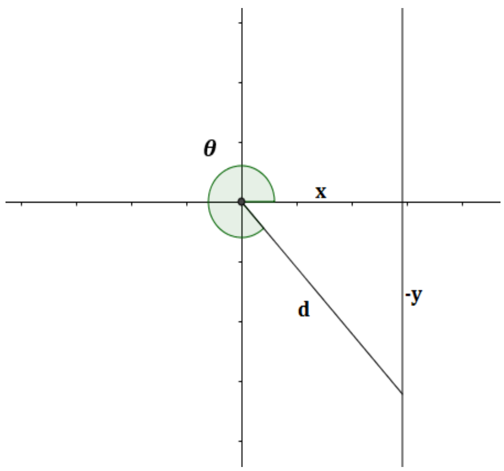


$$sen\ \theta = \frac{y}{d} \qquad csc\ \theta = \frac{d}{y}$$

$$cos\ \theta = \frac{-x}{d} \qquad sec\ \theta = \frac{d}{-x}$$

$$tan\ \theta = \frac{y}{-x} \qquad cot\ \theta = \frac{-x}{y}$$

Figura 5. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo - 2

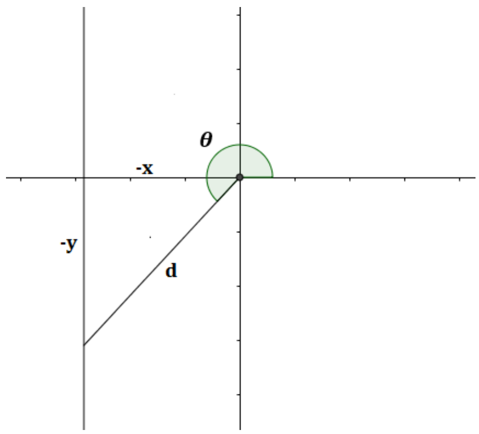


$$sen\ \theta = \frac{-y}{d} \qquad csc\ \theta = \frac{d}{-y}$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{d} \qquad sec\ \theta = \frac{d}{x}$$

$$tan\ \theta = \frac{-y}{x} \qquad cot\ \theta = \frac{x}{-y}$$

Figura 6. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo – 3



$$sen\ \theta = \frac{-y}{d} \qquad csc\ \theta = \frac{d}{-y}$$

$$cos\ \theta = \frac{-x}{d} \qquad sec\ \theta = \frac{d}{-x}$$

$$tan\ \theta = \frac{-y}{-x} \qquad cot\ \theta = \frac{-x}{-y}$$

Figura 7. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo – 4

3.2.5 IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Una Identidad Trigonométrica es una ecuación o fórmula donde intervienen funciones trigonométricas, que es válida para todos los ángulos o números reales para los cuales están definidos ambos lados de la igualdad (Zill, 2012, p. 414). Por ejemplo:

$$tan\ \theta + cot\ \theta = sec\ \theta\ csc\ \theta$$

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

4.1. INGENIERÍA DIDÁCTICA

La metodología que se utiliza en la presente investigación es la Ingeniería Didáctica la cual se caracteriza "por un esquema experimental basado en las *realizaciones didácticas* en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 1995, p.36). La Ingeniería Didáctica se caracteriza además por las formas de validación que maneja, ya que ésta es interna y se basa en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori descritos más adelante. A continuación se describirán cada una de las fases que conforman la Ingeniería Didáctica y la manera en como son retomadas en ésta investigación.

4.2 FASES DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La Ingeniería Didáctica consta de cuatro fases las cuales son necesarias para el logro de sus objetivos; dichas fases son 1) los análisis preliminares, 2) la concepción y análisis a priori de la secuencia de enseñanza, 3) la experimentación y 4) los análisis a posteriori y validación.

4.2.1 ANÁLISIS PRELIMINAR

La concepción de una secuencia de enseñanza se basa en un determinado número de análisis preliminares de los cuales, según Artigue (1995), los más frecuentes son:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

Artigue menciona que las exigencias de un análisis preliminar puede variar dependiendo de los objetivos de la investigación y que incluso existen trabajos en donde no interviene de manera explícita todos los componentes de análisis mencionados; inclusive se pueden encontrar trabajos en donde el análisis de las restricciones se efectúa distinguiendo las siguientes tres dimensiones:

- Una dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego.
- Una dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
- Una dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

En el caso de nuestra investigación se hará uso del análisis de las restricciones tomando en cuenta en cada dimensión lo siguiente:

Dimensión Epistemológica: Se estudia lo referente al surgimiento de las identidades trigonométricas y a conceptos relacionados con ellas como lo son las razones trigonométricas con la finalidad de analizar el orden en el que aparecieron en la historia y reflexionar si éste coincide con el que actualmente se introduce en las aulas escolares lo cual se puede ver reflejado en los libros de texto. Nos interesa ver la cronología de las diversas representaciones de un mismo objeto matemático y reflexionar si son las mismas que se utilizan en la actualidad.

Dimensión Cognitiva: Se analizan los errores típicos que presentan los estudiantes al momento de trabajar con identidades trigonométricas, además se estudian los diversos estilos de aprendizaje de los jóvenes centrándonos en los procesos visuales, auditivos y kinestésicos. La finalidad de éste análisis es reflexionar acerca del tipo de actividades que los jóvenes podrían necesitar para facilitar su aprendizaje y contrastarlas con lo que en las aulas se ofrecen.

Dimensión Didáctica: Se analizan 6 libros de texto con la finalidad de conocer cómo es manejado el tema de las identidades trigonométricas en cada uno de ellos. Se pretende contrastar lo encontrado con las otras dos dimensiones para poder decidir en determinado momento el tipo de actividades que se planearán para los jóvenes.

En esta dimensión se toma en cuenta el Plan de Estudios que siguen los estudiantes del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes con la finalidad de analizar los conocimientos con los que los estudiantes cuentan al llegar al tema de las identidades trigonométricas y cómo éstos fungen como cimientos para conocimientos nuevos.

4.2.2 CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

Tal como comenta De Faria (2006), en esta etapa el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no están fijadas por las restricciones. Estas son variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado.

Artigue (citado en De Faria, 2006), distingue dos tipos de variables, las concernientes a la organización global de la ingeniería (macro-didácticas o globales), y las concernientes a la organización local de la ingeniería, o sea, la organización de una secuencia o fase (micro-didácticas o locales).

Se menciona que ambos tipos de variables pueden ser generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza.

Artigue argumenta que tradicionalmente este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva, en las cuales se debe:

- Describir las selecciones del nivel local y las características de la secuencia de enseñanza que de ellas se desprenden.

- Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta secuencia para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone.
- Prever los campos de comportamientos posibles y tratar de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Otro punto importante es que, como en la Ingeniería Didáctica la validación es interna y comienza desde la concepción por medio del análisis a priori, el objetivo de éste debe ser "determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar pos comportamientos de los estudiantes y su significado" (De Faria, 2006, p.4), lo que se traducirá en un conjunto de hipótesis.

4.2.3 EXPERIMENTACIÓN

Inicia cuando se da el primer contacto del investigador con la población de estudiantes objeto de la investigación. Según De Faria (2006) la experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico entendido como el conjunto de reglas implícitas establecidas entre profesores y alumnos alrededor del saber a enseñar.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

4.2.4 ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

Como lo menciona Artigue (1995), este análisis se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, esto engloba las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza así como las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso.

Para la validación de las hipótesis formuladas en la investigación, se confrontan el análisis a priori y el a posteriori.

4.3 IMPLEMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA

4.3.1 ANÁLISIS PRELIMINARES

A continuación se presenta un análisis del campo de restricciones en el cual nos interesa centrarnos en la consolidación de las identidades trigonométricas a través de la historia (dimensión epistemológica), en los errores mostrados por los estudiantes en el estudio de este concepto y los diversos estilos de aprendizaje que tienen las personas (dimensión cognitiva) y en cómo son presentadas las identidades trigonométricas en los libros de texto (dimensión didáctica) y en el plan de estudios.

4.3.1.1 DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA

Surgimiento de las Identidades Trigonométricas.

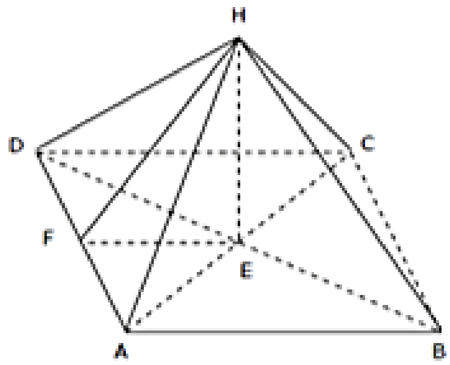
En este apartado se hace una recapitulación de algunos acontecimientos relevantes en la historia de la matemática que creemos pudieron desencadenar la conceptualización de las identidades trigonométricas. Para ello se toma como base parte del trabajo realizado por Montiel (2005) en su tesis doctoral, en donde se puede admirar que el camino para consolidar la idea de identidad trigonométrica como la conocemos en la actualidad fue un proceso de siglos en los cuales la trigonometría en general fue tomando forma y con ella ideas como el seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, conceptos que forman parte de los entes matemáticos con los que pretendemos trabajar.

En el recorrido histórico que se presenta a continuación se busca comprender la evolución, condiciones y problemáticas que determinaron el surgimiento de estos conocimientos.

Según Montiel (2005), la trigonometría históricamente se divide en dos momentos, el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos. Los inicios prácticos provienen de necesidades no propiamente matemáticas como la astronomía, la agrimensura y navegación. Así, un primer indicio del concepto de cotangente según Boyer (1968, citado en Montiel, 2005), se puede encontrar en el Papiro de Rhind donde, en el problema 56 de dicho documento se plantea que, en la construcción de una pirámide lo esencial era mantener la pendiente (inclinación) uniforme en cada cara. "Para lograr sus construcciones calculaban la separación de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura. Dicho cálculo recibía el nombre de *se-qet*, y con ello lograban mantener las proporciones de la pirámide y la inclinación de sus caras" (Montiel, 2005, p.68). De manera formal el *se-qet* se calculaba como sigue:

Supongamos que se tiene una pirámide con base en el cuadrado $ABCD$, el punto E como su centro, el punto H como su vértice y el punto F como el punto medio del lado AD, entonces el *se-qet* se definía como se muestra en la figura 8.

Con lo cual el *se-qet* resulta ser un concepto equivalente a la *cotangente* del ángulo de inclinación. Esta relación muestra a esta razón trigonométrica en términos de la proporción.



$$se - qet = \frac{EF}{EH}$$

Figura 8. Representación gráfica del Set-qet

Montiel (2005) menciona que en la matemática griega se encuentra por primera vez un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos centrales (o arcos correspondientes) en una circunferencia y las longitudes de las cuerdas que los subtienden. "Las propiedades de las cuerdas, tomadas como medidas de ángulos centrales e inscritos en una circunferencia, les eran familiares ya a los griegos en la época de Hipócrates (460 a.C.), y es muy probable que Eudoxo (408-355 a.C.) haya usado razones y medidas de ángulos para determinar el tamaño de la tierra y las distancias relativas del sol y la luna" (Boyer, 1968; citado en Montiel (2005)). En este periodo, el descubrimiento matemático estaba totalmente ligado a los procesos de visualización.

Con Aristarco (310-230 a.C.) se puede ver el surgimiento de otra idea fundamental en nuestro estudio, la razón *tangente*. "Aristarco sostenía que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto (90°) formado por las líneas Sol-Luna y Luna-Tierra" (Montiel, 2005, p.71). Aristarco suponía que la órbita de la luna era un círculo en cuyo centro se encontraba la Tierra y que la Luna lo recorría siempre a la misma velocidad. "Si el Sol estuviera tan lejos que sus rayos nos llegaran siempre paralelos - lo que equivale a poner al Sol a una distancia infinita- , los cuartos de la Luna ocurrirían cuando el ángulo Sol-Tierra-Luna es recto" (Montiel, 2005, p.71). (Véase figura 9)

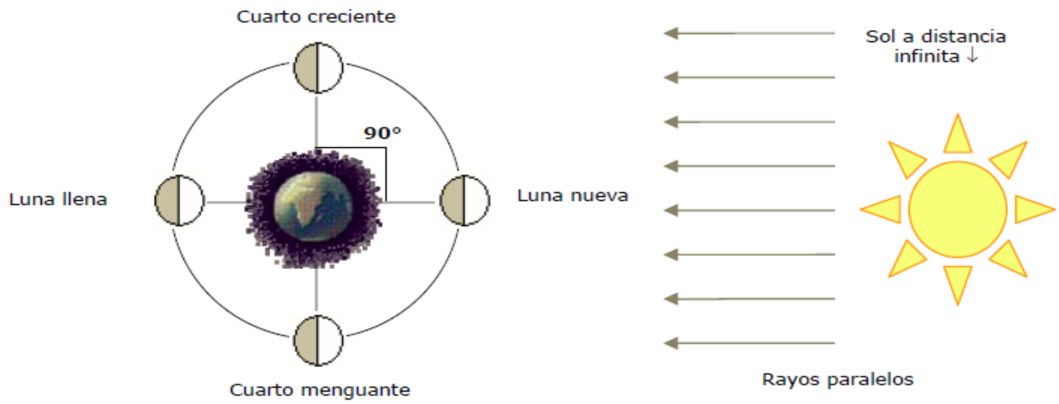


Figura 9. Razón tangente propuesta por Aristarco

"En cambio, si el Sol se encuentra a una distancia finita, sus rayos divergen formando un ángulo (véase figura 10). La secuencia de las fases ya no está dividida en partes iguales. El lapso entre la luna nueva y el cuarto creciente es menor que el lapso entre este último y la luna llena. Por la misma razón el intervalo entre luna la luna llena y el cuarto menguante es mayor que el intervalo entre éste y la siguiente luna nueva" (Montiel, 2005, p.72).

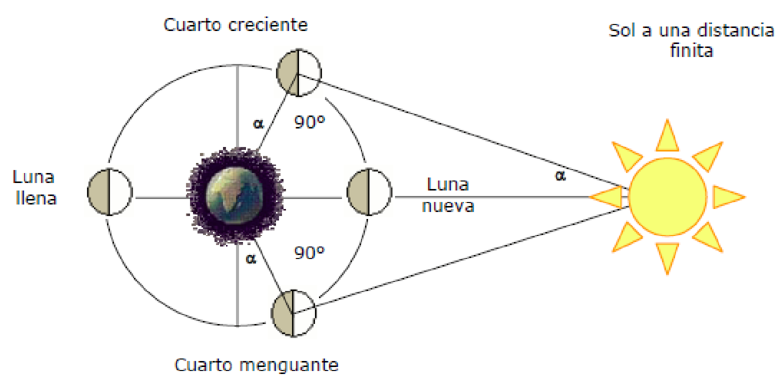
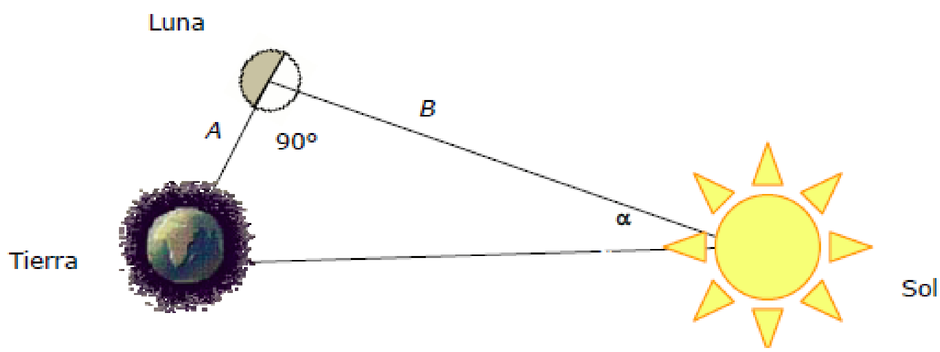


Figura 10. Sol situado a una distancia finita

"Aristarco encontró que el ángulo α, que forman los rayos del Sol que abarcan la órbita de la Luna, tiene que ser igual a la diferencia angular entre la posición de la medio luna". "Si llamamos A la distancia de la Tierra a la Luna y B a la distancia de la Luna al Sol, resulta que hay una sencilla razón entre A, B y α, que hoy conocemos como tangente (véase figura 11).



$$\tan \alpha = \frac{A}{B}$$

En otras palabras, determinando α se podría calcular qué tanto más lejos está el Sol de la Luna que la Luna de la Tierra. Como para Aristarco la Luna se movía con una velocidad constante en una trayectoria circular alrededor de la Tierra, entonces él debía medir cuánto tarda la Luna en darle una vuelta completa a la Tierra, para lo cual basta con medir el tiempo que transcurre, por ejemplo, entre dos lunas nuevas. Una vez determinado esto, y si el Sol estuviera a una distancia infinita, hay que dividir este lapso de tiempo entre cuatro para obtener el tiempo que debería transcurrir entre cada fase lunar. Empleando números concretos, si el periodo de la Luna es de 29 días y medio o 708 horas, entonces el cambio de fase se estaría dando cada 177 horas. Sin embargo, Aristarco observó que el cuarto creciente ocurría seis horas antes de lo esperado. El ángulo α de la figura anterior correspondía a seis horas de movimiento de la Luna (Montiel, 2005).

“De aquí Aristarco deduce que, puesto que la Luna recorría su órbita con velocidad constante, el ángulo α que se buscaba determinar debería estar en la misma proporción a una vuelta completa (360°) y que las seis horas de discrepancia al periodo completo de 708 horas: $\frac{\alpha}{360} = \frac{6}{708}$ de donde $\alpha = \frac{6}{708}(360°)$ (Montiel, 2005, p. 73).

"Aristarco expresó la relación entre las distancias $\frac{Tierra-Luna}{Luna-Sol}$, que hoy en día es $\tan 3° = 0.05$, como *la distancia del Sol a la Luna es veinte veces la distancia de la Luna a la Tierra*. Este cálculo es erróneo, pero no por el método, sino por los datos numéricos" (Montiel, 2005, p.73). El problema es que el cuarto creciente ocurría solamente 18 minutos antes de lo esperado y no seis horas como había observado Aristarco (Ruiz y de Regules, 2002; citado en Montiel, 2005), de tal manera que en realidad *el Sol está 400 veces más lejos de la Luna que la Luna de la Tierra.* (Montiel, 2005).

Para Montiel (2005), el elemento más importante en la construcción de las nociones trigonométricas en este momento de la historia es la proporción expresada como razón.

Fue alrededor del siglo II a.C. que Hiparco de Nicea (190 a 120 a.C.) construye la primera tabla trigonométrica. Por su padre Ptolomeo construye tablas de cuerdas subtendidas por los arcos de una circunferencia dividida en 360 partes cuyo diámetro se supone dividido en 120 unidades. Los resultados a los que llegó fueron que la longitud de la cuerda que se subtiende bajo 90 grados será aproximadamente de 84.51.10 de las partes de las que el diámetro tiene 120 y la que se subtiende bajo 120 será de 103.55.23 de las mismas (Montiel, 2005). Ptolomeo construye una tabla como la que se muestra en la figura 12:

Ángulo	Cuerda		
36	37°	4′	55″
60	60°		
72	70°	32′	3″
90	84°	51′	10″
120	103°	55′	23″

Figura 12. Tabla de Ptolomeo

"Seguido de estos primeros cálculos, Ptolomeo establece el teorema que le permitirá operar con las longitudes encontradas, seguido de tres corolarios de donde se pueden calcular más longitudes de cuerda: la cuerda de la diferencia de dos arcos, la cuerda de la mitad de un arco y la cuerda de la suma de dos arcos. Dichos corolarios son equivalentes a las identidades trigonométricas para el seno de la diferencia de dos ángulos, el seno de la mitad de un ángulo y el seno de la suma de dos ángulos" (Montiel, 2005, p.78).

Años más tarde, con la declinación del imperio romano, el centro de investigación matemática comenzó a desplazarse hacia la India y más tarde a Mesopotamia (véase figura 13). A diferencia de la trigonometría griega, en la hindú se determinó la semicuerda correspondiente al ángulo doble, es decir, el antecedente del seno actual (Montiel, 2005).

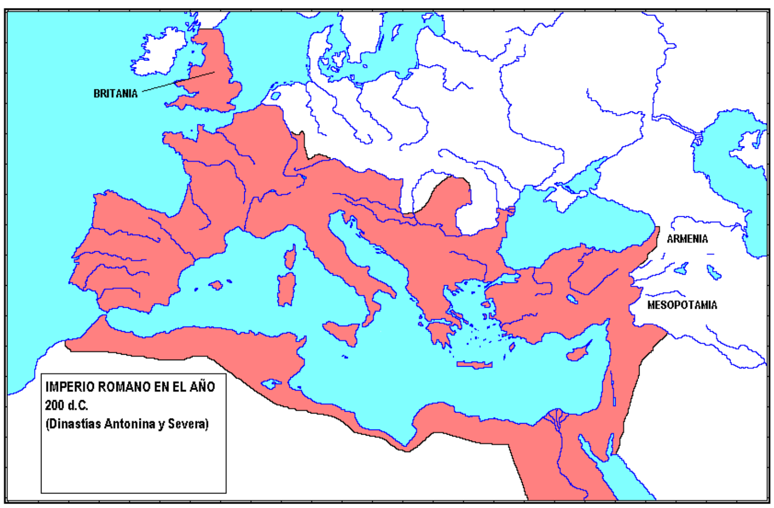


Figura 13. Ubicación de la Antigua Grecia en 200 d.C.

Dentro de las contribuciones hindús se encuentra el Aryhabatiya, escrito por Aryhabata (489 – 499 d.C), que proporcionaba la tabla de los valores del seno (ardha-jya, o mitad de la cuerda) de los ángulos comprendidos entre 3°45' y 90° y el Khanda Khandayaka de Brahmagupta (665 d.C) el cual dice cómo, dada una tabla de senos, se encuentran los intermedios (Montiel, 2005).

Por su parte los árabes sistematizaron el uso del seno del ángulo, en lugar de la correspondiente cuerda helénica. Además del seno-verso $(1 - \cos\alpha)$ e introdujeron las restantes funciones trigonométricas (Montiel, 2005).

Habas al –Hasib fue el primer árabe que elaboró una tabla de senos y Abul Wefa calculó con 9 decimales exactos el seno de 30′ y a partir de él elaboró una tabla de senos que va de 15′ en 15′; independientemente construyó la tabla de tangentes y secantes. En su tratado Kitab al –Kabil definió y usó de las seis funciones trigonométricas.

De la cuerda al seno

“En sus orígenes la trigonometría no trata directa y exclusivamente con la similitud de dos triángulos rectángulos. La medición, construcción y la astronomía son algunas de las actividades donde surgen las nociones trigonométricas. Incluso el llamado “cálculo de sombras” es considerado precursor de la trigonometría formal. El problema teórico que se plantearon los griegos consideraba todo triángulo (plano o esférico) inscrito en un círculo (o esfera, según el caso), con lo que cada uno de sus lados se convertían en una cuerda (como se muestra en la figura 14). Para estimar las partes del triángulo se debe encontrar la longitud de la cuerda como función del ángulo central (arco central medido en grados). Esta fue la tarea principal de la trigonometría por varios siglos” (Montiel, 2005, p.81).

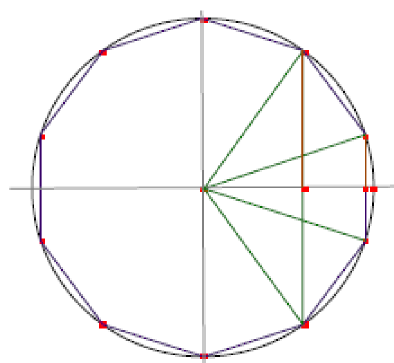


Figura 14. Cuerdas dentro de una circunferencia

"Fue en el Aryhabatiya que se utiliza la palabra ardha-jya para denominar la mitad de la cuerda y en ocasiones se intercambiaban los términos (jya-ardha) o se hacían más cortos (jya o jiva). En las traducciones al árabe del Aryhabatiya se mantiene la palabra jiva. Sin embargo la pronunciación se modifica a jiba o jaib, y jaib en árabe significa seno (pecho o corazón). Finalmente de la traducción del árabe al latín jiba se traduce como sinus, que significa seno, bahía o curva" (Montiel, 2005, p.81).

Es un hecho que el descubrimiento de la matemática antes de Euclides tenía un soporte visual muy fuerte. Posiblemente las contradicciones señaladas por los filósofos eleáticos a través de sus paradojas (tal como la más conocida de Aquiles y la Tortuga, formulada por Zenón) obligó a los griegos a la construcción de una matemática lógico-deductiva en donde el rol de la figura disminuyó considerablemente.

Por todo lo anterior se puede ver que las razones trigonométricas surgieron por el afán de comprender el funcionamiento del mundo o de querer resolver alguna problemática específica. De cualquier manera se observa que los inicios de estos conceptos fueron totalmente geométricos haciéndonos pensar que quizá esa forma de proceder podría ser retomada y aplicada en las aulas de clase. Por el momento, de este análisis se rescatan dos cosas:

1) La importancia de representar geométricamente a las razones trigonométricas (en nuestro caso a las identidades trigonométricas);
2) La importancia de asociar a las razones trigonométricas (en nuestro caso identidades trigonométricas) a una situación problema de la vida real de los estudiantes.

4.3.1.2 DIMENSIÓN COGNITIVA

Dentro de esta dimensión primeramente hablemos de los errores que comenten los estudiantes en el tema de Identidades Trigonométricas. Para ello se analizaron 46 exámenes individuales que un profesor del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes les aplicó a sus estudiantes en un curso ordinario de la asignatura de Geometría y Trigonométria. Los estudiantes durante cerca de dos semanas habían recibido indicaciones acerca del tratamiento de estos éntes matemáticos y habían realizado diversos ejercicios. Ha de notarse que el enfoque que el profesor le dio al tema fue meramente algebraico.

En todos los ejercicios se tenía que partir de un lado de la igualdad y mediante sustituciones de equivalencias de expresiones trigonométricas y algoritmos algebraicos, llegar al otro lado de la igualdad.

Observando las respuestas de los estudiantes, se pudo reconocer lo siguiente:

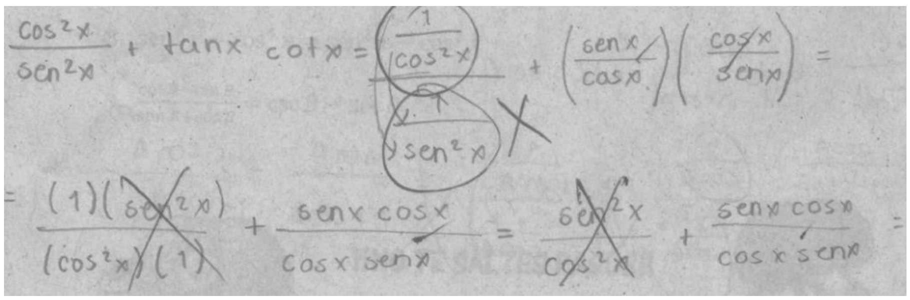


Figura 15. Error en la interpretación de equivalencias. Estudiante 1

En la figura 15 podemos observar que los estudiantes llegan a confundir las identidades trigonométricas, es decir, plasman como equivalencias expresiones que no lo son; en este ejemplo se observa que el estudiante sustituyó $\frac{1}{cos^2x}$ por cos^2x.

Observamos que lo anterior se repitió en múltiples ejercicios y en diversos estudiantes (véase figura 16).

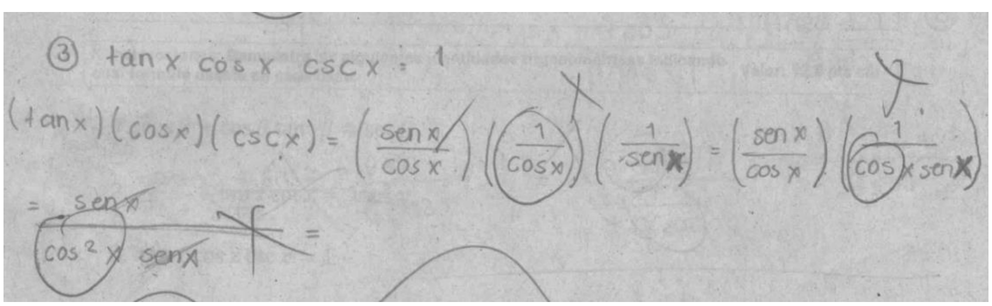


Figura 16. Error en la interpretación de equivalencias. Estudiante 2

Se encontraron también estudiantes que por el contrario, si hacían las sustituciones pertinentes pero tenían diversos tipos de errores al hacer las simplificaciones necesarias, como se muestra en la figura 17.

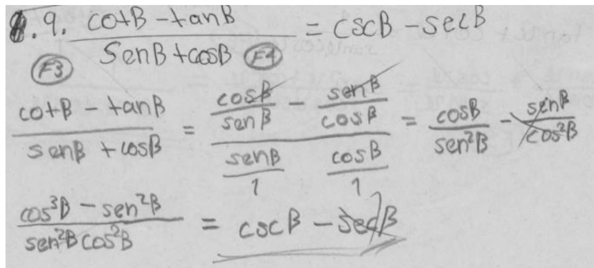


Figura 17. Error de sustitución en respuestas de estudiantes

El estudiante de la figura 17, por ejemplo, aplica incorrectamente la jerarquía de operaciones haciendo que su resultado no sea el adecuado.

La siguiente persona desarrolla erróneamente la respectiva suma de fracciones (véase figura 18):

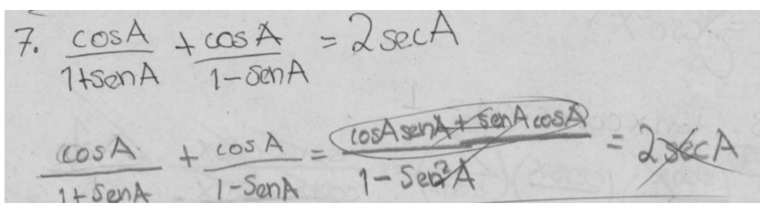


Figura 18. Error de estudiante en la suma de fracciones

Este estudiante aplica correctamente las equivalencias correspondientes, pero se equivoca en la simplificación de la suma de fracciones ya que elimina términos del numerador y del denominador que no deberían ser cancelados (véase figura 19).

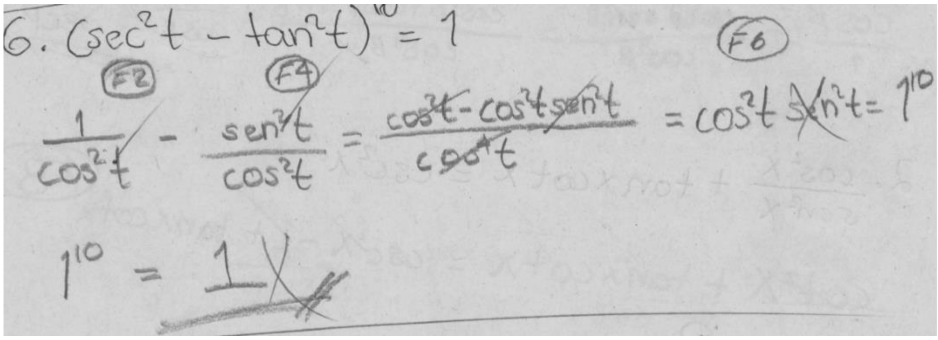


Figura 19. Error en cancelación de términos

El estudiante de la figura 20 domina a la perfección técnicas como la factorización pero no alcanza a distinguir que $sen^2x + cos^2x = 1$.

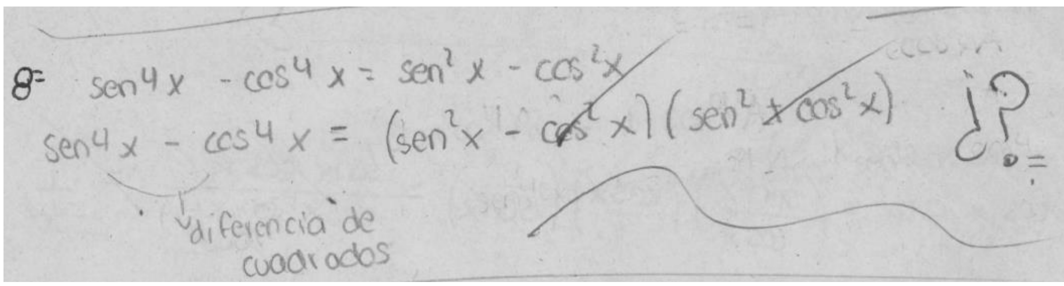


Figura 20. Error de distinción de identidad

El siguiente estudiante (véase figura 21) muestra de nuevo lo que sucede cuando no se conocen las equivalencias de expresiones trigonométricas.

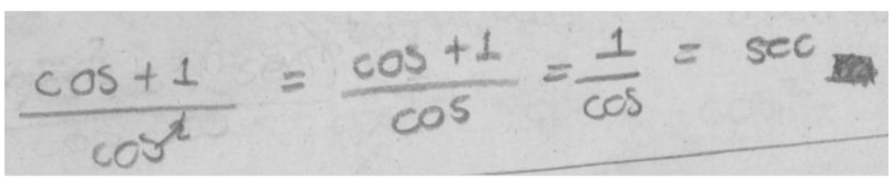


Figura 21. Error en interpretación de equivalencia

Por otra parte, el siguiente estudiante (véase figura 22) confunde una multiplicación de fracciones con una suma de fracciones y eso desencadena que todo el procedimiento sea erróneo.

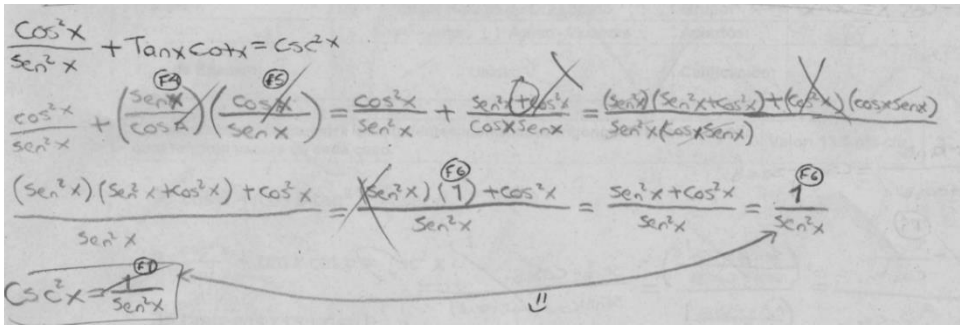


Figura 22. Confusión en operación realizada

El siguiente ejemplo, presenta un error por omisión del cuadrado del seno además de eliminación incorrecta de términos (véase figura 23).

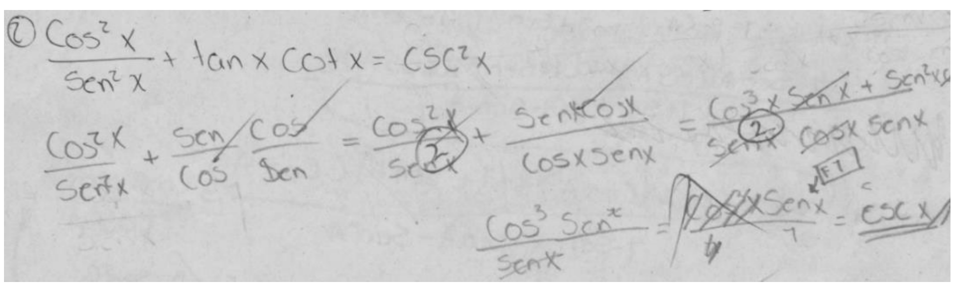


Figura 23. Omisión de potencia

Por otra parte, pudimos notar también un razonamiento cíclico; el estudiante cree que avanza cuando en realidad no hace nada (véase figura 24).

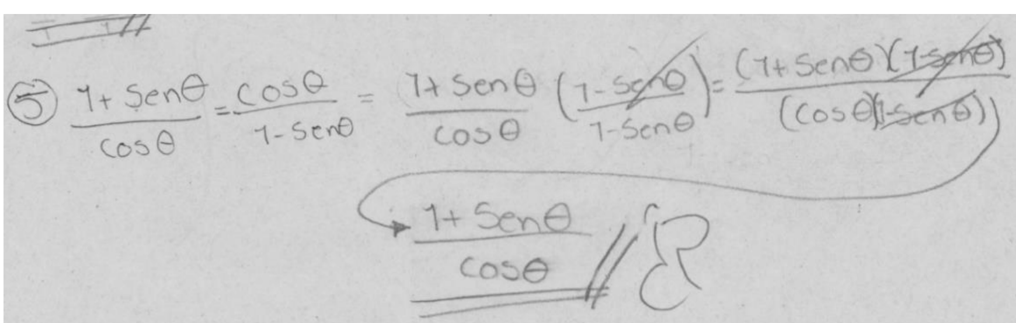


Figura 24. Razonamiento cíclico – estudiante 1

Otro ejemplo como lo anterior se puede observar en la siguiente figura (25)

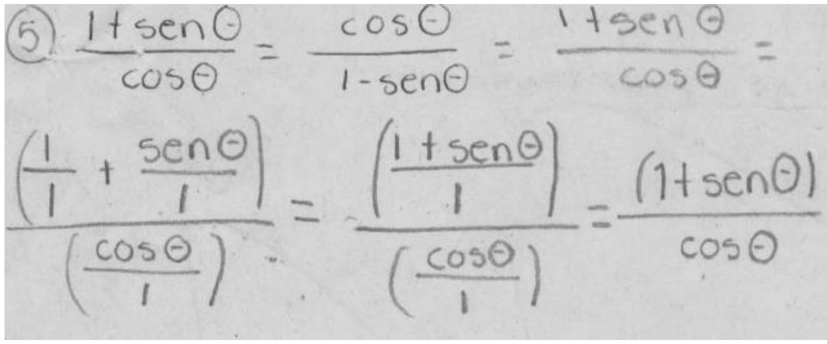


Figura 25. Razonamiento cíclico – estudiante 2

En ocasiones, como en el estudiante de la figura 26, los estudiantes ya no saben qué identidad utilizar o simplemente qué más hacer:

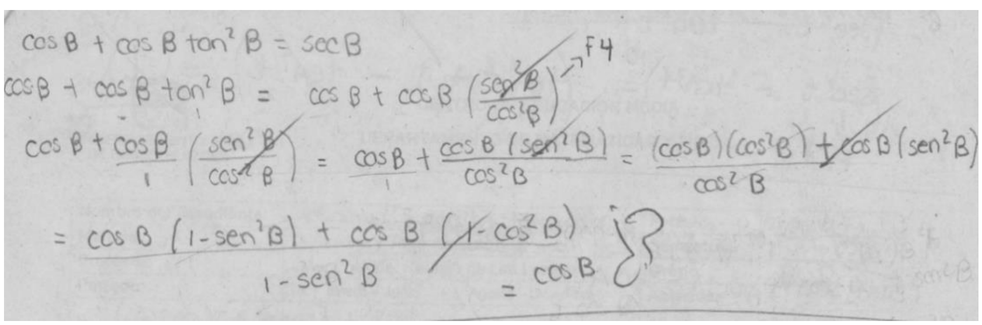


Figura 26. Desconocimiento de uso de identidades

Después del análisis anterior se puede distinguir de manera general que los estudiantes tienen dos tipos de problemas; por un lado, no conocen las equivalencias de expresiones trigonométricas, suponemos que podría ser debido a que ni siquiera comprenden su significado. Por otra lado muestran problemas algorítmicos al momento de realizar simplificaciones en las expresiones, dichos problemas debido posiblemente a su carencia de solidez en operaciones que involucran fracciones.

En la presente investigación se tratará el problema de la comprensión del concepto de identidad trigonométrica buscando también impactar a problemas de otras índoles, como los problemas algorítmicos.

La visualización matemática nos permitirá hacer que nuestra propuesta apoye fuertemente el tipo de aprendizaje visual por medio de las representaciones que se le presentarán al alumno, al aprendizaje auditivo por medio de las discusiones guiadas por el profesor que se generarán en el aula, y al aprendizaje kinestésico por medio de la experimentación que la herramienta interactiva propicia.

4.3.1.3 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

Para esta dimensión se tomaron en cuenta los libros de texto que aparecen en el programa de Geometría y Trigonometría del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes. Lo que se analizó en estos libros es la forma cómo presentan el tema al público. De manera general se observa que los libros van presentando los ejercicios subiendo cada vez más el grado de dificultad, comenzando con comprobaciones sencillas en donde solo se necesita hacer sustituciones de ciertas identidades trigonométricas y operaciones básicas como multiplicación o división de fracciones.

Los ejercicios que son más complicados tienen que ver con comprobaciones que requieren más pasos para poder realizarse, utilizan operaciones algebraicas tales como la adición de fracciones, la factorización y la multiplicación.

Lo ampliamente rescatable en cada uno de los libros son las “sugerencias” que los autores manejan con la intención de que este tipo de ejercicios sean realizables.

Leithold (1989) comenta que la familiaridad de los estudiantes con las identidades fundamentales en sus diferentes formas es decisiva. Esto nos lleva a pensar que en las actividades planteadas, antes que nada, se debe considerar que de alguna manera los estudiantes dominen y sepan a la perfección identidades trigonométricas fundamentales como las que se muestran en la siguiente figura:

$$cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta} \;\;; \quad sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta} \;\;; \quad csc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta} \;\;;$$

$$tan\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} \;\;; \;\; cot\,\theta = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}; \; sen^2\theta + \; cos^2\theta = 1$$

Figura 27. Identidades planteadas en Leithold (1989)

Para comenzar a trabajar con identidades trigonométricas, se muestran dos maneras de proceder, una de ellas es tomar cada lado de la identidad por separado y llegar a la misma forma equivalente. Otra alternativa propuesta es tomar un lado de la identidad, desarrollar y llegar a la expresión contenida en el otro lado. Para la realización de las actividades deberemos escoger una sola manera de proceder para evitar futuras confusiones por parte de los estudiantes.

Para saber decidir en qué forma comenzar a manejar las identidades trigonométricas, Nieles (2000) sugiere reducir el término más complicado al más simple, considerando que una expresión fraccionaria se considera más compleja que una expresión lineal y que un producto de expresiones se considera más complejo que una expresión lineal. Con esto podemos decidir qué tipos de ejercicios elegir para cada una de las actividades a realizar y a la vez pensar en cómo ésta información le pueda ser útil al estudiante para que éstos tengan una manera de discernir al momento en que se enfrenten solos con los problemas.

Aunque existen varios caminos posibles para trabajar con una identidad trigonométrica y con ello varias sustituciones posibles, algunos autores sugieren conveniente convertir las identidades a expresiones que queden escritas solamente en términos de senos y cosenos. Goodman (1996) menciona que "cambiar todo en términos de senos y cosenos es el método más sistemático que se podría utilizar". Estas afirmaciones nos hacen pensar que quizá éste sea un camino adecuado para el trabajo a realizar con las identidades trigonométricas en las actividades.

Con los argumentos anteriores, observamos que Leithold (1989) es el único autor de los analizados que sugiere que, antes de comenzar a manipular una expresión que se sospecha como identidad, se trace la gráfica de la función de cada miembro de la expresión. El hecho de que las gráficas sean las mismas en todos los puntos para los cuales las funciones están definidas nos convencerá de que se tiene una identidad válida procediendo después a comprobarla de manera general, así el trabajo no será en vano. Si se sospecha que una expresión no es una identidad, se recomienda igualmente primero trazar la función de cada miembro de la expresión para verificar que las gráficas son diferentes, después se procedería a comprobar algebraicamente que la expresión no es una identidad, para ello sólo se necesita encontrar un número del dominio de la variable para la cual la igualdad no sea válida.

Haciendo a un lado los libros de texto pero enfocándonos en la misma vertiente, el trabajo de Dugdale sugiere considerar el uso de gráficas como fundamento de las identidades trigonométricas. Esto, aunado a lo anterior nos permite crear una serie de actividades donde las gráficas de las expresiones que forman las identidades estén incluidas aportando con esto un nuevo enfoque de ver las cosas. El hecho de involucrar gráficos nos incita a incluir actividades en donde los estudiantes tengan contacto con algún tipo de software matemático en donde lo visual sea un aliciente más en la construcción de las ideas matemáticas que queremos introducir.

Por otro lado, por ser un proyecto de desarrollo profesional se ha considerado aplicar las actividades resultantes en un aula ordinaria de clase, en los tiempos marcados por el calendario escolar.

Conocer el Programa de la Materia de Geometría y Trigonometría nos ayuda a tener una visión global de cuáles son los conocimientos previos que los estudiantes dominan y que servirán de cimientos para la formación de nuevos conocimientos.

El Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes es un bachillerato basado en competencias que busca la interconexión y transversalidad de todos los conocimientos que ahí se aprenden. De manera particular en el programa de la materia de Geometría y Trigonometría se marcan las siguientes competencias a desarrollar en los estudiantes:

1) Expresar ideas y conceptos, en distintos contextos, de manera adecuada usando el lenguaje matemático, lógico y/o los propios de cada disciplina.

2) Proponer alternativas para la solución de problemas y desarrollar proyectos personales y en equipo con un espíritu emprendedor.
3) Trabajar tanto colaborativamente como de forma independiente asumiendo responsablemente las tareas que le corresponden.

Siguiendo estos propósitos, las actividades planeadas pretenderán abonar al desarrollo de estas competencias.

Dentro de los conocimientos previos que los estudiantes en teoría manejan al llegar al tema de Identidades Trigonométricas y que se involucra directamente con este se encuentran los siguientes:

Unidad 1

- Concepto de ángulo y su clasificación.
- Sistemas de medición angular y sus interrelaciones.

Unidad 2

- Simbología para representar los elementos de un triángulo.
- Teorema de Pitágoras.
- Razones trigonométricas de triángulos rectángulos.
- Funciones recíprocas y complementarias.
- Funciones trigonométricas directas e inversas.

Unidad 3

- Círculo trigonométrico.
- Funciones trigonométricas para cualquier valor del ángulo.
- Ángulos positivos y negativos, cuadrangulares, coterminales y simétricos.
- Gráfica de las funciones trigonométricas básicas.

En nuestras actividades se buscará que parte de los conocimientos previos de los estudiantes se vean reflejados y sirvan para la construcción y comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica.

Consideramos que también es de suma importancia saber qué conocimientos vendrán después de nuestro tema de interés para que éste pueda ser manejado de tal manera que aporte a la construcción del conocimiento próximo. Los conceptos que se manejan en la unidad 6 son:

- Concepto de ecuación trigonométrica.
- Diferencia entre identidad y ecuación trigonométrica.
- Algoritmos para la solución de ecuaciones trigonométricas.

En las actividades se trabajará para que en determinado momento exista un vínculo temático entre las unidades 5 (unidad de interés) y la unidad 6.

Para finalizar, la unidad en la que se pretenden plantear las actividades contiene los siguientes temas:

- Concepto de identidad.
- Deducción de las identidades básicas.
- Identidades de ángulos compuestos.
- Expresiones trigonométricas equivalentes.
- Comprobación mediante procedimientos algebraicos.

Ya que nuestro principal objetivo es la construcción y comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica, pretendemos que las actividades planteadas sean introductorias para dicha unidad y que abarquen entre el primero y segundo punto del temario.

4.3.2 CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

Una vez realizados los análisis preliminares y con base en ellos, se procedió a proponer actividades que contemplaran lo que se destacó en cada una de las dimensiones señaladas y que a la vez consideraran diversas representaciones del concepto de Identidad Trigonométrica, con la finalidad de propiciar la construcción y comprensión de este concepto.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, las actividades descritas a continuación vienen a darse como introducción a la comprobación de Identidades Trigonométricas, tema que forma parte de la quinta unidad del segundo semestre de Bachillerato de la asignatura de Geometría y Trigonometría.

Tomando en cuenta lo observado en el análisis de la dimensión epistemológica, estas actividades estuvieron pensadas para que en todo momento los estudiantes tuvieran en sus manos representaciones gráficas de los entes matemáticos con los que se trabaja.

Como resultado se tuvo la creación de un instrumento interactivo desarrollado mediante el software "GeoGebra" y una secuencia de preguntas guiadas. A continuación se describen aquellas preguntas/actividades que abonan a la construcción y comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica. Las actividades completas se pueden apreciar en el anexo 1.

La propuesta se conforma por una secuencia de seis actividades en donde el uso del software GeoGebra toma un papel fundamental ya que él es la base de los ocho programas que complementan cada una de las actividades y en donde los estudiantes pueden interactuar con distintas representaciones del concepto de expresión trigonométrica.

Las actividades se llevarán en el aula de clases de los estudiantes en equipos de 4 a 5 personas donde cada equipo cuente con una computadora con los respectivos programas instalados. La propuesta se maneja como actividades guiadas en las que los estudiantes interactúan con los programas, donde se da un espacio para la reflexión y otro más para la retroalimentación por parte del docente. Esta actividad es recomendada tanto para pequeños como grandes grupos.

Actividad 1

El objetivo es que los estudiantes deduzcan de manera intuitiva las identidades trigonométricas básicas (ver figura 28); que comprendan el hecho de que dos expresiones trigonométricas que producen el mismo gráfico, son equivalentes.

Pregunta 1: El bosquejo

En esta sección el estudiante asocia cada una de las expresiones trigonométricas planteadas con una gráfica que es única para cada expresión. El estudiante reproduce lo observado.

La realización de esta práctica para los estudiantes no es nueva ya que en el desarrollo de la unidad 3 del programa de la materia los jóvenes conocieron que cada expresión trigonométrica tiene una representación gráfica, esto cuando vieron las gráficas de seno, coseno y tangente.

Del análisis didáctico y epistemológico rescatamos la importancia de tener una representación gráfica en todo momento.

Esta sección de la actividad tiene por objetivo que el estudiante identifique dos tipos de representaciones del mismo ente matemático, la representación algebraica y la representación gráfica; si el estudiante logra hacerlo estaría transitando entre estos registros, es decir, estaría visualizando la relación entre una expresión trigonométrica y su gráfica.

Pregunta 2: ¿Existen gráficas que se parezcan entre sí? ¿En qué OTRA ocasión se traza la misma gráfica que se produce al hacer clic en el botón tan x?

El estudiante realiza un análisis visual de las gráficas, si es capaz de identificar similitudes entre ellas, entonces estará realizando un tratamiento interno en el registro gráfico. Si el estudiante visualiza que al menos que existe otra expresión trigonométrica que produce la misma gráfica que la expresión $tan(x)$, entonces estará transitando del registro gráfico al registro algebraico.

Pregunta 3: ¿Qué otras gráficas encuentras parecidas?

El estudiante realiza un análisis visual de las gráficas, si es capaz de identificar similitudes entre ellas, entonces el estudiante estará realizando un tratamiento interno en el registro gráfico.

Si el estudiante identifica que existen expresiones trigonométricas (en apariencia distintas) que producen las mismas gráficas, entonces estará transitando del registro gráfico al registro algebraico, es decir, el estudiante es capaz de visualizar el comportamiento gráfico de las expresiones trigonométricas.

Pregunta 4: ¿A qué crees que se deba lo anterior? (El hecho de que se den ciertas igualdades entre gráficas aunque la expresión sea distinta).

Si la respuesta dada por el alumno está fundamentada en lo observado en las gráficas o hace referencia a estas el estudiante estará transitando del registro gráfico al registro verbal. Si la respuesta dada está fundamentada en lo observado en las expresiones trigonométricas o hace referencia a estas el estudiante estará transitando del registro algebraico al registro verbal, en cualquier caso, se deduce que ha logrado un grado de visualización respecto al comportamiento gráfico.

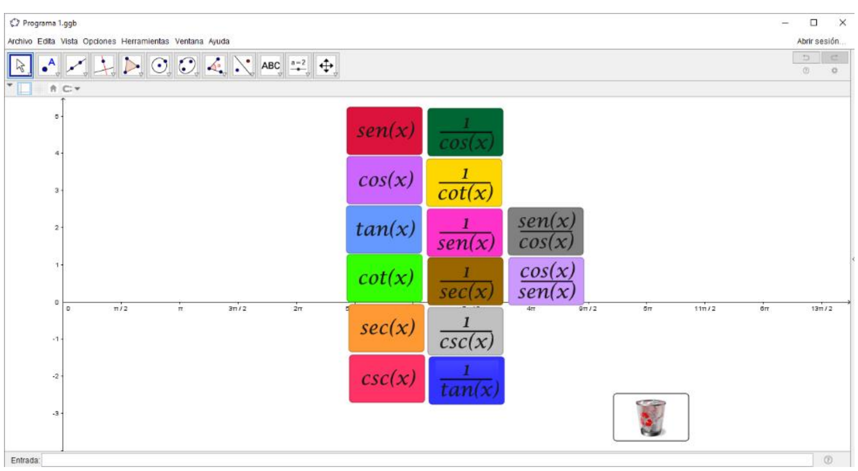


Figura 28. Entorno del programa en GeoGebra utilizado para el desarrollo de la Actividad 1

Actividad 2

Esta actividad tiene por objetivo que los estudiantes recuerden el círculo trigonométrico y la relación que tienen ciertas rectas notables del mismo con el valor de las razones trigonométricas para diversos ángulos (ver figura 29)

Pregunta 1: ¿Qué observas entre los valores de la primera y segunda tabla?

Si el estudiante describe relaciones numéricas que en efecto existen, pero que no tienen que ver con la reciprocidad entre valores numéricos, el estudiante estará realizando un tratamiento interno en el registro tabular. Si el estudiante describe relaciones numéricas relacionadas con la reciprocidad entre valores numéricos, el estudiante estará transitando del registro tabular al registro algebraico.

Pregunta 2: ¿Cómo escribirías lo observado a manera de fórmulas?

Esta sección de la actividad busca abonar al conocimiento de las equivalencias trigonométricas básicas en los estudiantes, para que poco a poco las dominen ya que son pieza clave para el manejo de Identidades Trigonométricas más elaboradas.

Con esta pregunta se pretende que el estudiante, con ayuda de la representación tabular, identifique la igualdad de expresiones trigonométricas equivalentes. Si el estudiante logra lo anterior estará transitando entre el registro tabular y el registro algebraico, es decir, estará visualizando el comportamiento de los datos contenidos en la tabla.

Pregunta 3: Describe ampliamente lo que aprendiste el día de hoy.

Esta es una de las preguntas que intenta que el estudiante exprese abiertamente sus ideas acerca de lo aprendido. Con esto pretendemos abonar a las competencias que describe el programa de la materia.

Si el estudiante da una respuesta fundamentada en lo observado en las tablas o hace referencia a estas, estará realizando un tránsito entre el registro tabular y el registro verbal. Si el estudiante da una respuesta fundamentada en lo observado en las expresiones trigonométricas o hace referencia a estas, estará transitando entre el registro algebraico y el registro verbal; en cualquier caso, podemos observar el grado de visualización de ha logrado tener el alumno al identificar el mismo objeto en distintas representaciones, la actividad descrita se presenta en la figura 29.

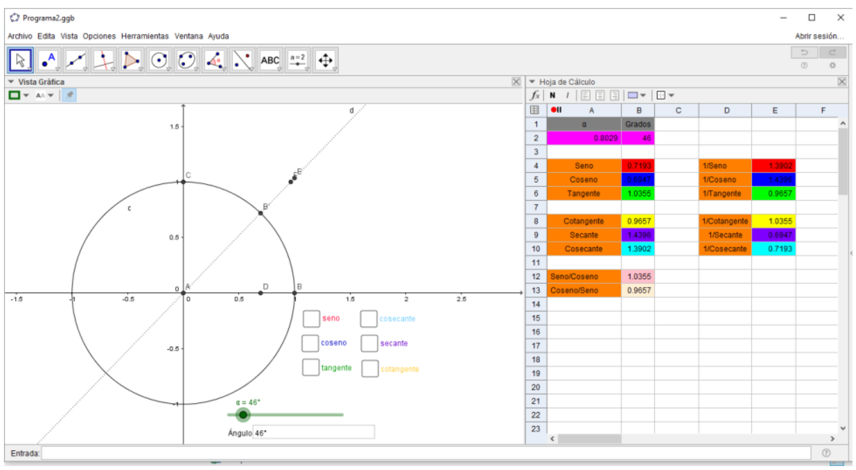


Figura 29. Entorno del programa en GeoGebra utilizado para el desarrollo de la Actividad 2

Actividad 3

Su objetivo es que los estudiantes deduzcan la identidad trigonométrica $sen^2x + cos^2x = 1$ y no solo eso, sino que además comprendan su significado, para lo cual se utilizará como recurso nuevamente el círculo trigonométrico junto con el Teorema de Pitágoras (ver figura 30).

Pregunta 1: ¿Lo que se muestra en la pantalla tiene algo que ver con "Pitágoras"?

En esta pregunta se pone en juego parte del conocimiento previo de los estudiantes, haciendo referencia a la unidad 2, en donde se trabajó lo referente al Teorema de Pitágoras. Se espera que al momento de que el estudiante manipule el respectivo programa en GeoGebra, su conocimiento previo le sirva de puente para el conocimiento nuevo que queremos que descubra.

En esta pregunta, si el estudiante hace una relación de las figuras observadas en el programa con el Teorema de Pitágoras, describiéndolo adecuadamente y escribiendo su representación algebraica (puede suceder que solamente escriba la representación algebraica), entonces el estudiante estará realizando un tránsito entre el registro figural y el registro algebraico, con el objetivo es que el alumno logre visualizar que las figuras presentadas son otra forma en la que se presentan las expresiones trigonométricas.

Pregunta 2: ¿Qué cambios observas en las figuras?

En esta actividad, si el estudiante se da cuenta de que al mover el ángulo, los catetos se mueven y con ellos sus respectivas áreas, pero que la hipotenusa (y su área) no lo hace y además hace una descripción específica de lo observado, entonces el estudiante estará realizando un tránsito entre el registro figural y el registro verbal, es decir, estará logrando una visualización en términos de relación entre los valores presentados en la figura.

Pregunta 3: ¿Cuál sería la expresión matemática que represente los comportamientos observados?

En este punto se espera que el estudiante deduzca la identidad pitagórica $sen^2x + cos^2x = 1$, esto con lo que él observe en las tablas trabajadas. Si el estudiante deduce la expresión correctamente estará realizando un tránsito entre el registro tabular y el registro algebraico (véase figura 30).

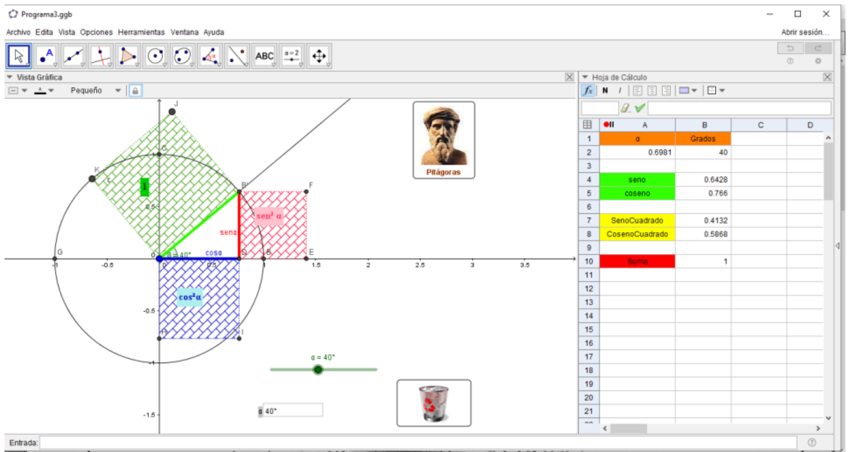


Figura 30. Entorno del programa en GeoGebra utilizado para el desarrollo de la Actividad 3

Actividad 4

Su objetivo es mostrar al estudiante que existen expresiones trigonométricas más complejas, en apariencia iguales, pero que no son identidades trigonométricas (ver figura 31 y 32).

Pregunta 1: ¿Cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera?

Al estudiante se le muestra una supuesta equivalencia entre expresiones trigonométricas con el objetivo de que identifique si es o no verdadera. Hemos de notar que no se trata de una equivalencia verdadera. Se espera que el estudiante dé una respuesta apoyándose en las actividades que se han ido realizando (conocimientos previos, estrategias previas). El objetivo es que el estudiante haga referencia a que para saber si dos expresiones son iguales, se pueden graficar cada una y ver cómo son las gráficas entre sí o que sugiera evaluar cada expresión en ciertos valores de ángulo y que si dichos valores son iguales indicarían que las expresiones también lo serían. Si el estudiante da una respuesta haciendo énfasis en las representaciones gráficas estará realizando un tránsito entre el registro algebraico y el registro gráfico. Si el estudiante da una respuesta haciendo énfasis en las representaciones tabulares (numéricas) entonces estará transitando del registro algebraico al registro tabular, si sus respuestas son las esperadas, el estudiante habrá logrado visualizar que las representaciones gráficas de dos expresiones equivalentes son iguales.

Pregunta 2: ¿Qué puedes decir de la expresión del punto 1? ¿Es cierta o falsa? ¿Por qué?

En este caso, si el alumno justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación tabular de los ejercicios anteriores el estudiante estará realizando un tránsito del registro tabular al registro verbal. Si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación gráfica de los ejercicios anteriores, el estudiante estará realizando un tránsito del registro gráfico al registro verbal, en cualquier caso, habrá logrado visualizar una equivalencia.

Pregunta 3: ¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior sí se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir?

Independientemente de que la respuesta a esta interrogante sea negativa o afirmativa, estamos interesados en analizar cómo son sus justificaciones. Si el estudiante justifica haciendo énfasis en alguna representación tabular entonces el estudiante realizará un tránsito del registro tabular al registro verbal. Si justifica haciendo énfasis en alguna representación gráfica entonces el estudiante estará realizando un tránsito del registro gráfico al registro verbal; en cualquiera de estos casos, sus argumentos nos permitirán determinar el grado de visualización que se ha logrado con esta actividad.

Pregunta 4: Con solo observar las gráficas podrías localizar si existe algún ángulo para el cual sea verdadera la expresión del punto 1. ¿Cómo le harías?

Se espera que el estudiante, después de observar cuidadosamente la gráfica, mencione que hay un lugar en donde las gráficas coinciden (chocan) y que ese podría ser el posible valor buscado. Si el estudiante logra lo anterior, estaría transitando del registro gráfico al registro verbal, es decir, la trasposición de las gráficas le permitirá visualizar que si las gráficas coinciden en un punto, éste punto es el único valor en el que la expresión se hace verdadera para ambas expresiones.

Pregunta 5: ¿Qué indica el punto que aparece en la pantalla?

Se espera que el estudiante identifique que el punto señalado en la pantalla es el valor para el cual la expresión del punto 1 es verdadera. De hacer esto posible, el estudiante estará transitando del registro figural al registro verbal (véase figura 31).

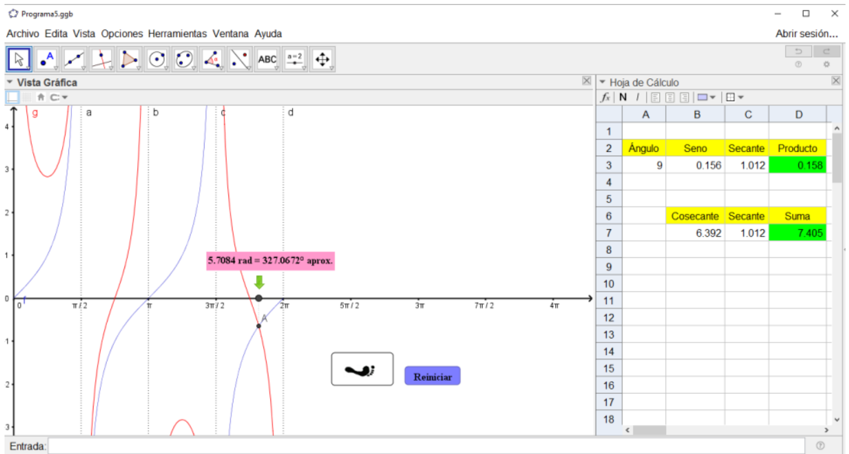


Figura 31. Entorno del programa en GeoGebra utilizado en el punto 5 de la Actividad 4

Pregunta 6: ¿Qué sucede con los valores en dicha vista?

Se espera que el estudiante mencione que el respectivo producto y suma de las expresiones trigonométricas para ese ángulo son iguales. Si lo hace, estará transitando del registro tabular al registro verbal.

Pregunta 7: ¿Qué concluirías de la expresión trigonométrica en este ejercicio?

Se espera que el estudiante concluya que la expresión trabajada no es identidad porque no es válida para todos los valores de ángulos; el estudiante estará transitando entonces del registro verbal al registro tabular y de vuelta al registro verbal ya que primero procesa la definición de Identidad Trigonométrica que le presentamos, busca una justificación y expresa sus conclusiones; con sus argumentos podemos valorar el grado de visualización que ha logrado respecto a los valores de un ángulo dado en una expresión trigonométrica y cómo deberán comportarse éstos para que se trate de una identidad (véase figura 32).

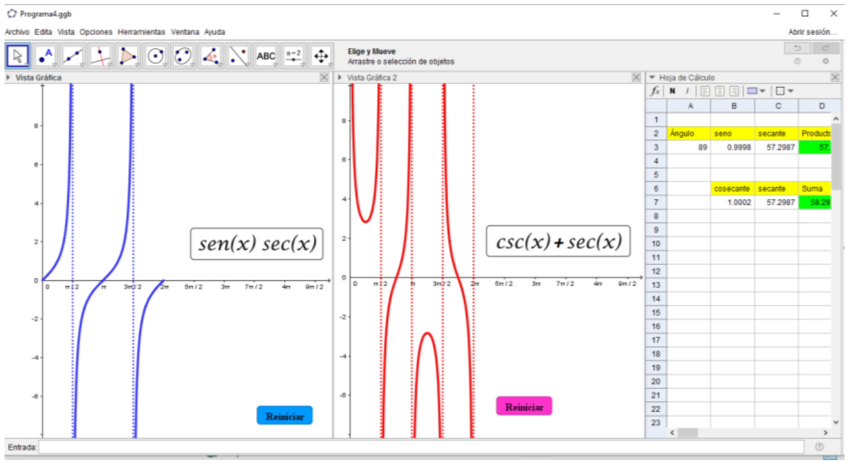


Figura 32. Entorno del programa en GeoGebra utilizado para el desarrollo de la Actividad 4

Actividad 5

Su objetivo es mostrar al estudiante que los valores de cualquier ángulo en expresiones trigonométricas equivalentes hacen verdadera la identidad (ver figura 33 y 34).

Pregunta 1: ¿Cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera?

Al estudiante se le muestra una supuesta equivalencia entre expresiones trigonométricas y se le pregunta lo anterior. Hemos de notar que en esta ocasión si trata de una equivalencia verdadera. Se espera que haga referencia a que para saber si dos expresiones son iguales, se pueden graficar cada una y ver cómo son las gráficas entre sí o que sugiera evaluar cada expresión en ciertos valores de ángulo y que si dichos valores son iguales indicarían que las expresiones también lo serían. Si el estudiante da una respuesta haciendo énfasis en las representaciones gráficas estará realizando un tránsito entre el registro algebraico y el registro gráfico. Si el estudiante da una respuesta haciendo énfasis en las representaciones tabulares (numéricas) entonces estará transitando del registro algebraico al registro tabular, es decir, estará logrando la visualización de una identidad a partir de su comportamiento gráfico.

Pregunta 2: ¿Qué puedes decir de la expresión del paso 1? ¿Es cierta o falsa? ¿Por qué?

Si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación tabular de los ejercicios anteriores el estudiante estará realizando un tránsito del registro tabular al registro verbal. Si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación gráfica de los ejercicios anteriores, el estudiante estará realizando un tránsito del registro gráfico al registro verbal, es decir, será capaz de identificar la veracidad de una identidad con su comportamiento.

Pregunta 3: ¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior no se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir?

Independientemente de que la respuesta a esta interrogante sea negativa o afirmativa, estamos interesados en analizar cómo son sus justificaciones. Si el estudiante justifica haciendo énfasis en alguna representación tabular entonces el estudiante realizará un tránsito del registro tabular al registro verbal. Si justifica haciendo énfasis en alguna representación gráfica entonces el estudiante estará realizando un tránsito del registro gráfico al registro verbal; en cualquier caso, el estudiante ha logrado visualizar cómo deben ser los valores para que la igualdad se cumpla.

Pregunta 4: ¿Podrías localizar si existe algún ángulo para el cual no se cumpla la expresión del paso 1?

Se espera que el estudiante, después de observar cuidadosamente la gráfica, mencione que no existe lugar alguno en donde las gráficas no coincidan (siempre chocan/ están traslapadas). Es decir, no existe ángulo para el cual la igualdad no se cumpla. Si el estudiante logra lo anterior, estaría transitando del registro gráfico al registro verbal y con ello estará visualizando que esta es la principal característica de una identidad.

Pregunta 5: Por lo anterior, la expresión trabajada en este ejercicio ¿es una Identidad Trigonométrica?

Se espera que el estudiante concluya que la expresión trabajada sí es identidad y que justifique su respuesta con base a lo que observa en las gráficas o con base en lo que observa en la tabulación de las expresiones. Si justifica con lo primero estaría transitando del registro verbal al registro gráfico. Si justifica con lo segundo estaría transitando del registro verbal al registro tabular, sus argumentos nos permitirán corroborar el grado de visualización que ha logrado con esta actividad.

Pregunta 6: ¿Existirá alguna manera de probar que la expresión anterior es verdadera sin usar un software graficador como recurso? ¿Qué opinas al respecto?

Se espera que el estudiante dé sugerencias acerca de lo interrogado. Lo deseable sería que se saliera de lo mostrado (lo gráfico y tabular) y que involucrara sugerencias que tuvieran que ver con la parte algebraica de las expresiones. Si tiene una respuesta basada en ideas gráficas estará transitando del registro gráfico al verbal; si justifica su respuesta con ideas de tabulación estará transitando del registro tabular al registro verbal; si justifica su respuesta con ideas algebraicas, estaría transitando del registro algebraico al verbal, el comportamiento del software en esta actividad se puede observar en las figuras 33 y 34.

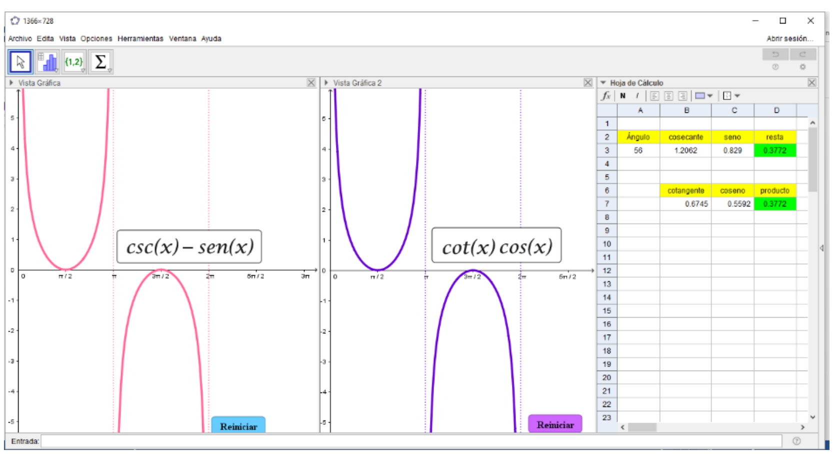


Figura 33. Entorno 1 GeoGebra utilizado para el desarrollo de la Actividad 5

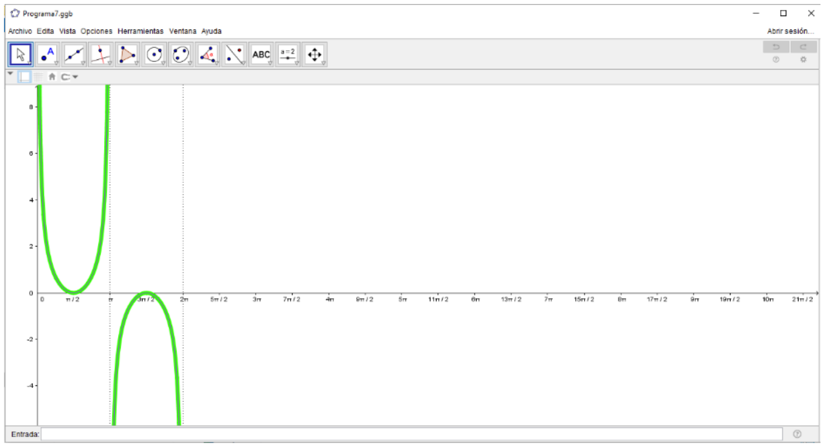


Figura 34. Entorno 2 GeoGebra utilizado para el desarrollo de la Actividad 5

Actividad 6

En esta actividad se pretende mostrar que cierta expresión trigonométrica se trata de una Identidad Trigonométrica. El objetivo principal es que los estudiantes conozcan que existe un método para comprobar las equivalencias de manera formal, sin necesidad de graficar o de obtener valores para casos particulares. Es decir, le permitirá visualizar que las expresiones presentadas son verdaderas sin importar el ángulo.

En la primera parte de la actividad se les presenta a los estudiantes una equivalencia de expresiones y mediante cierta manipulación del software, dicha expresión va teniendo transformaciones. Se les interroga acerca de esos cambios.

Pregunta 1: ¿Qué cambios notas en la pantalla si das clic en cada opción?

El estudiante describe los cambios que observa. Si comenta cambios relacionados meramente con la forma de las gráficas el estudiante estará realizando un tratamiento interno en el registro gráfico. Si el estudiante describe cambios relacionados con las expresiones trigonométricas, éste estará efectuando un tratamiento interno en el registro algebraico. Si el estudiante describe solamente cambios superficiales como por ejemplo colores, éste estará realizando un tratamiento en el registro figural.

Pregunta 2: ¿Por qué esa opción (3) mantiene la gráfica original mientras las otras opciones cambian por completo la gráfica?

Se espera que el estudiante llegue a la conclusión de que la opción 3 no cambia la forma de la gráfica ya que $tan(x)$ se está sustituyendo por $\frac{sen(x)}{cos(x)}$, siendo estas expresiones equivalentes. Si el estudiante expresa lo anterior estará realizando un tratamiento interno en el registro algebraico.

Pregunta 3: Sin probar las opciones puedes decir ¿cuál de ellas no alterará la gráfica original?

Se espera que el estudiante llegue a la conclusión de que la opción 4 no cambia la forma de la gráfica ya que $cot(x)$ se está sustituyendo por $\frac{cos(x)}{sen(x)}$, siendo estas expresiones equivalentes. Si el estudiante expresa lo anterior estará realizando un tratamiento interno en el registro algebraico.

Pregunta 4: ¿Qué cambios notas en la pantalla si das clic en cada opción?

El estudiante describirá los cambios que observa. Si comenta cambios relacionados meramente con la forma de las gráficas el estudiante estará realizando un tratamiento interno en el registro gráfico. Si el estudiante describe cambios relacionados con las expresiones trigonométricas, éste estará efectuando un tratamiento interno en el registro algebraico. Si el estudiante describe solamente cambios superficiales como por ejemplo clores éste estará realizando un tratamiento en el registro figural.

Pregunta 5: ¿Por qué esa opción (4) mantiene la gráfica original mientras las otras opciones cambian por completo la gráfica?

Se espera que el estudiante llegue a la conclusión de que la opción 4 no cambia la forma de la gráfica ya que $cot(x)$ se está sustituyendo por $\frac{cos(x)}{sen(x)}$, siendo estas expresiones equivalentes. Si el estudiante expresa lo anterior estará realizando un tratamiento interno en el registro algebraico.

La segunda sección de la actividad está destinada a ir presentándoles a los estudiantes algunos ejemplos de algoritmos que se tienen que seguir al momento de querer ver la veracidad de las expresiones trigonométricas.

Pregunta 6: ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera?

Si los estudiantes identifican que se está usando el algoritmo de la suma de fracciones el estudiante estará realizando un tratamiento interno en el registro algebraico. Se espera que la mayoría de los estudiantes identifiquen este algoritmo ya que es parte de los conocimientos previos que deberían de tener.

Pregunta 7: ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera?

Si los estudiantes identifican que se trata de la utilización de la identidad trigonométrica $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, entonces el estudiante estará realizando un tratamiento dentro del registro algebraico.

Pregunta 8: ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera?

Si los estudiantes identifican que solamente la fracción fue separada ya que se trata de una multiplicación de fracciones, el estudiante estará realizando un tratamiento interno en el registro algebraico. Se espera que la mayoría de los estudiantes identifiquen este algoritmo ya que es parte de los conocimientos previos que deberían de tener.

Pregunta 9: ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera?

Si los estudiantes identifican que se trata de la utilización de la identidad trigonométrica $\frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$ y $\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \csc(x)$, entonces el estudiante estará realizando un tratamiento dentro del registro algebraico.

Pregunta 10: ¿Qué puedes concluir?

Si el alumno justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación tabular de los ejercicios anteriores el estudiante estará realizando un tránsito del registro tabular al registro verbal. Si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación gráfica de los ejercicios anteriores, el estudiante estará realizando un tránsito del registro gráfico al registro verbal. Si justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación algebraica, el estudiante estará realizando un tránsito del registro algebraico al registro verbal, en cualquiera de los casos, su justificación nos permitirá valorar el grado de visualización que ha logrado en esta actividad.

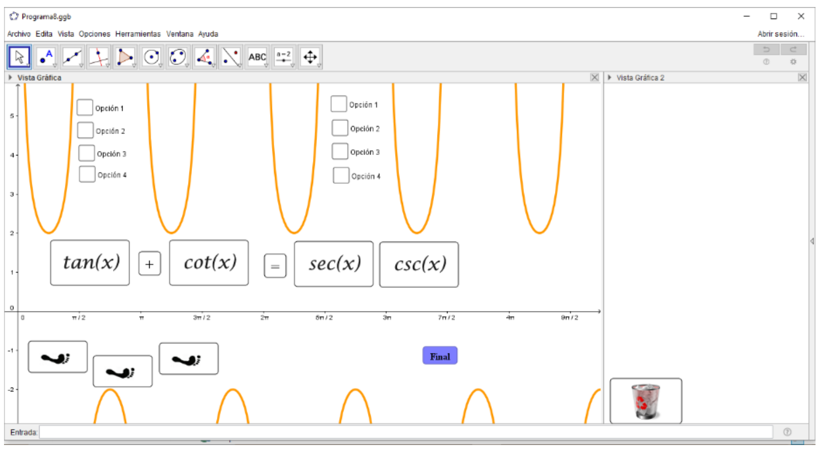


Figura 35. Entorno del programa en GeoGebra utilizado para el desarrollo de la Actividad 6

Como se puede apreciar, durante la creación de las actividades estuvieron presentes distintas representaciones del concepto de Identidad Trigonométrica ya que estamos interesados en estudiar qué tipo de conexiones se presentan entre las mismas para poder concluir con qué profundidad los estudiantes están comprendiendo el concepto de Identidad Trigonométrica.

Durante las actividades tanto los conocimientos previos como los posteriores están presentes con el objetivo de que ningún conocimiento se perciba como aislado. En la actividad 4 surge en concepto de ecuación trigonométrica como otro tipo de expresión que solamente es válida para ciertos valores del ángulo. Este concepto se retomará en la unidad 6 del curso.

Hemos de destacar que el trabajo colaborativo está presente en todo momento, al igual que la búsqueda de expresión de ideas y alternativas de solución por parte de los estudiantes lo cual pretende abonar a las competencias genéricas que plantea el programa de la materia.

Respecto a la dimensión didáctica del concepto de Identidad Trigonométrica se consideran las sugerencias de algunos autores teniendo el propósito de que los estudiantes conozcan y se familiaricen con identidades trigonométricas básicas que más adelante se utilizarán para desarrollos más complejos.

Al momento de manejar las equivalencias de expresiones trigonométricas, el modo de proceder será realizar modificaciones pertinentes solo a un lado de la equivalencia para evitar confusiones por parte de los estudiantes. En todo momento se tiene en mente la idea de Dugdale (1989), de representar de manera gráfica a las Identidades Trigonométricas trabajando por separada cada lado de las equivalencias.

Dentro de la dimensión cognitiva siempre se pretende que los estudiantes comprendan las equivalencias básicas y las logren identificar. También en todo momento se piensa que las actividades deben de ir dirigidas a estudiantes tanto visuales, auditivos y kinestésicos. Para ello nos auxiliamos primordialmente del software GeoGebra, y se pretende emplear discusiones guiadas en todo momento.

4.3.3 EXPERIMENTACIÓN

Antes de ser aplicadas, las actividades se realizó una prueba piloto con un grupo de 5 estudiantes de sexto semestre del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes. En dicho pilotaje se cronometraron tiempos de aplicación, se verificaron la comprensión de las preguntas y se verificaron las respuestas esperadas.

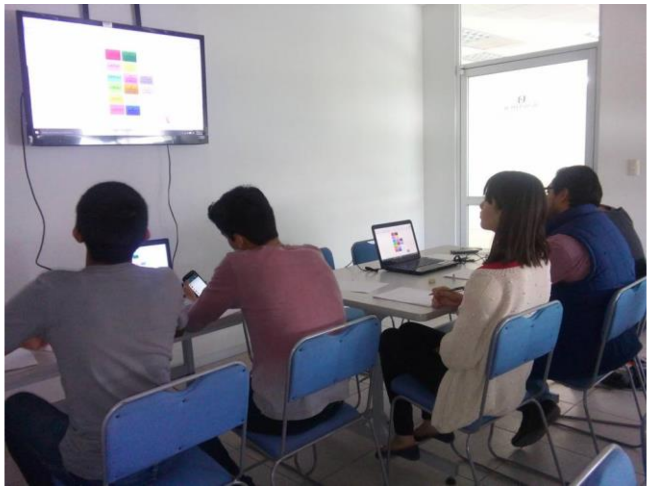


Figura 36. Estudiantes que participaron en la prueba piloto

Una vez realizados los cambios pertinentes, la aplicación se llevó a cabo en el CEM-UAA con un grupo de estudiantes de segundo semestre cuyas edades oscilaban entre los 15 y 16 años (véase figura 37).

Figura 37. Grupo de estudiantes con el que se realizó el estudio

Es un grupo mixto de 51 estudiantes (33 mujeres y 18 hombres), al cual se le dio seguimiento durante todo el semestre.

La aplicación se llevó a cabo en el aula habitual de clases contando con varias computadoras portátiles para el desarrollo de las actividades en GeoGebra.

En todo momento se contó con la guía de la profesora del curso (investigadora), quien coordinaba los tiempos de cada una de las actividades y daba retroalimentaciones pertinentes y oportunas.

Figura 38. Estudiantes trabajando en la secuencia de actividades propuesta.

La aplicación correspondió a los tiempos ordinarios que maneja el programa de estudios. El tema forma parte de la quinta unidad de aprendizaje, comenzando a aplicarse a partir el día 7 de abril del 2016.

En total se aplicaron 6 actividades en un lapso de 7 días, en sesiones de aproximadamente 50 minutos en donde los estudiantes, guiados por la profesora-investigadora, interactuarán con el software al mismo tiempo que completaban la guía; en la tabla 1 se hace un desglose de los tiempos y sesiones destinados a cada una de las actividades, los cuales concuerdan con el abordaje propuesto en el programa de estudios.

Tabla 1. Tiempos destinados a la aplicación de las actividades

Tiempos de la Implementación			
Actividad	**Tiempos Estimados**	**Tiempos Reales**	**Fecha Real de la Aplicación**
Actividad 1	1 sesión de 50 min.	2 sesiones de 50 minutos.	Jueves 07 y Viernes 08 de abril.
Actividad 2	1 sesión de 50 min para actividades 2 y 3.	1 sesión de 50 min exclusivos actividad 2.	Lunes 11 de abril.
Actividad 3		1 sesión de 50 min exclusivos actividad 3.	Martes 12 de abril.
Actividad 4	1 sesión de 50 min para actividades 4 y 5.	1 sesión de 50 min exclusivos actividad 4.	Miércoles 13 de abril.
Actividad 5		1 sesión de 50 min exclusivos actividad 5.	Jueves 14 de abril.
Actividad 6	1 sesión de 50 min.	1 sesión de 50 min.	Viernes 15 de abril.

4.3.4 RESULTADOS

Para facilitar el reporte de resultados se realizó una codificación para cada una de las preguntas descritas en el análisis a priori considerando tanto el tránsito entre registros como el tratamiento interno de registros, en los cuales están inmersas las diferentes representaciones del concepto de Identidad Trigonométrica.

Actividad 1

El compendio de las respuestas y codificación obtenidos para en análisis de esta actividad, se encuentra desglosados en el anexo 2 de este documento, distribuidos en tablas por cada una de las preguntas, que posteriormente fueron codificados una tabla final, cuyo esquema está formado por cada uno de los registros utilizados en las diferentes actividades, y donde las columnas representan los tránsitos realizados (que son descritos en cada actividad) y las filas representan cada uno de los alumnos que participaron, como se muestra a continuación:

	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 4
	CA->G	TG+	CG->A	TG+	CG->A	CG->V	CA->V
E_1	1	1	1	1	1	0	0
E_2	1	1	1	1	1	0	0
E_3	1	1	1	1	1	0	0
E_4	1	1	1	1	1	0	0
E_5	1	1	1	1	1	0	0
E_6	1	1	1	1	1	0	0
E_7	1	1	1	1	1	0	1

Figura 39. Esquema del compendio contenido en el anexo 2

A continuación explica la codificación para cada pregunta por actividad.

Pregunta 1: El bosquejo

Tránsito del registro algebraico al registro gráfico.

El estudiante asocia cada una de las expresiones trigonométricas planteadas con una gráfica que es única para cada expresión. Enseguida, reproduce lo observado. Esta actividad aporta a que el estudiante identifique dos tipos de representaciones del mismo ente matemático, la representación algebraica y la representación gráfica.

En la tabla 1 del anexo 2, se concentraron todas las respuestas de los estudiantes, agrupadas de la siguiente manera:

- En la columna 1, se clasifican aquellos estudiantes que contestaron exactamente la respuesta considerada como esperada en el análisis a priori.
- En la segunda columna, se clasifican a los estudiantes que dieron una respuesta cercana a la esperada. Como se tratan de respuestas con contenido matemático es muy sencillo distinguir cuando un estudiante contestó o no lo esperado.
- Para la tercer columna, se toman en cuenta a aquellos estudiantes que se alejaron de la respuesta esperada pero que sin embargo con la manera de responder enriquecen el trabajo.

En la tabla de codificación del anexo 2, se utiliza encabezado de columna se utiliza $C_{A\to G}$ como el símbolo que será utilizado para representar un tránsito entre el registro algebraico y el registro gráfico. De acuerdo a los bosquejos realizados por los estudiantes (ver figura 40), sus valores son: 1 para los estudiantes que bosquejaron adecuadamente y 0 para los estudiantes que no realizaron bosquejos adecuados, el compendio completo de esta información se encuentra en el anexo 2 de este documento.

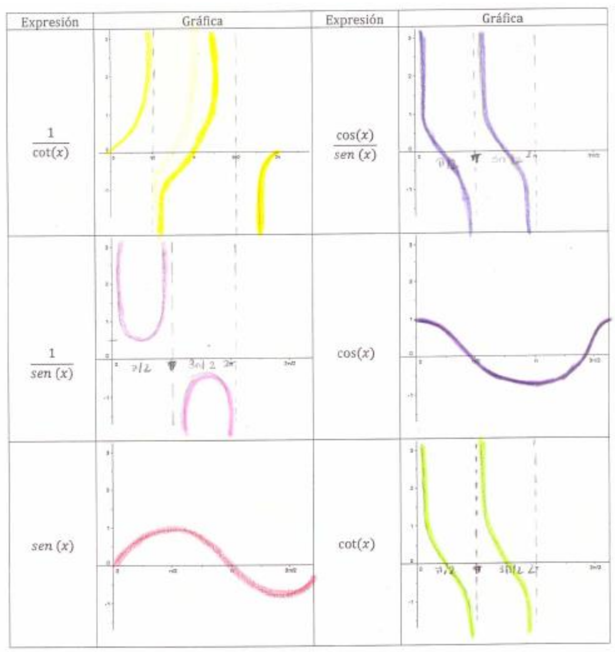


Figura 40. Ejemplo de Bosquejo en respuesta a las preguntas de la Actividad 1

Pregunta 2: ¿Existen gráficas que se parezcan entre sí? ¿En qué OTRA ocasión se traza la misma gráfica que se produce al hacer clic en el botón tan x?

Tratamiento interno en el registro gráfico.

Tránsito del registro gráfico al registro algebraico.

La tabla 2 del anexo 2 concentra las respuestas obtenidas de los alumnos en la realización de esta actividad.

Para la codificación, el estudiante realiza un análisis visual de las gráficas y es capaz de identificar similitudes entre ellas (Columna $T_{G\uparrow}$). El estudiante identifica al menos que existe otra expresión trigonométrica que produce la misma gráfica que la expresión $tan(x)$ (Columna $C_{G\rightarrow A}$).

En la columna $T_{G\uparrow}$ se representa un tratamiento interno en el registro gráfico. Los valores que se utilizaron son: 1 para los estudiantes que respondieron sí a la primera pregunta y que al menos contestaron la segunda pregunta con una de las equivalencias esperadas, en este caso $\frac{1}{\cot(x)}$ o $\frac{sen(x)}{\cos(x)}$, tal como puede observarse en la figura 41. El valor 0 se otorga a los estudiantes que respondieron no a la primera pregunta o que contestaron con cualquier otra equivalencia la segunda pregunta (figura 42).

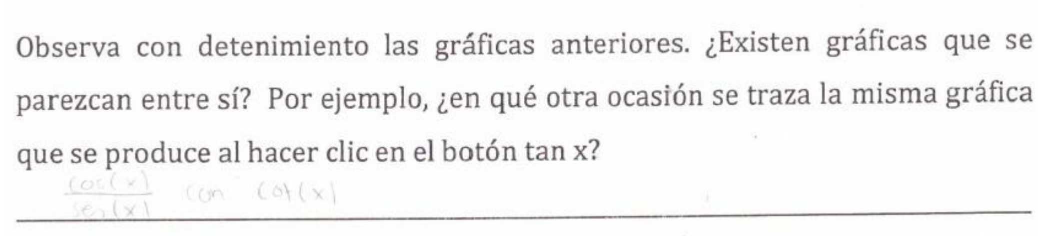
En caso de que los estudiantes contestaran que si a la primera pregunta, se tuvo que voltear a ver la segunda pregunta. Como en la pregunta anterior, $C_{A\rightarrow G}$ será el símbolo para representar un tránsito entre el registro algebraico y el registro gráfico. Si el estudiante contesto la segunda pregunta con al menos una de las equivalencias esperadas (en este caso $\frac{1}{\cot(x)}$ o $\frac{sen(x)}{\cos(x)}$) se marcará con un uno; y se marca con cero a los estudiantes que respondieron con cualquier otra equivalencia.

Observa con detenimiento las gráficas anteriores. ¿Existen gráficas que se parezcan entre sí? Por ejemplo, ¿en qué otra ocasión se traza la misma gráfica que se produce al hacer clic en el botón tan x?

Si, 1/Cot X, Sen(x) / Cos(X).

Figura 41. Respuesta en la que se identifican similitudes

Hay que tener presente que un cero en $T_{G\uparrow}$ implica automáticamente un cero en $C_{G\rightarrow A}$.


Observa con detenimiento las gráficas anteriores. ¿Existen gráficas que se parezcan entre sí? Por ejemplo, ¿en qué otra ocasión se traza la misma gráfica que se produce al hacer clic en el botón tan x?

$\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$ con $\cot(x)$

Figura 42. Ejemplo en el que se da como respuesta una expresión que no corresponde

Pregunta 3: ¿Qué otras gráficas encuentras parecidas?

Tratamiento interno en el registro gráfico.

Tránsito del registro gráfico al registro algebraico.

La tabla 3 del anexo 2, concentra todas las respuestas obtenidas por los estudiantes en el desarrollo de esta actividad.

El estudiante realiza un análisis visual de las gráficas y es capaz de identificar similitudes entre ellas ($T_{G\uparrow}$). El estudiante identifica que existen expresiones trigonométricas (en apariencia distintas) que producen las mismas gráficas. ($C_{G\rightarrow A}$).

$T_{G\uparrow}$ simboliza lo mismo que en la pregunta anterior. Se marca con un uno a los estudiantes que respondieron con al menos una equivalencia diferente (como puede verse en la figura 43) a la de la pregunta anterior; se marca con un cero si del total de las relaciones que contestó se equivoca en la mitad.

$C_{G\rightarrow A}$ simboliza lo mismo que en las preguntas anteriores, un cero en $T_{G\uparrow}$ implica automáticamente un cero en $C_{G\rightarrow A}$.

Un uno en $T_{G\uparrow}$ no implica necesariamente un uno en $C_{G\rightarrow A}$, al menos que el estudiante haya contestado 4 o más equivalencias correctamente.

¿Qué otras gráfica encuentras parecidas?

$\frac{1}{\cos x}$ y $\sec x$		
$\frac{1}{\sec x}$ y $\cos x$		

Figura 43. Ejemplo de respuesta con al menos una equivalencia diferente a las solicitadas

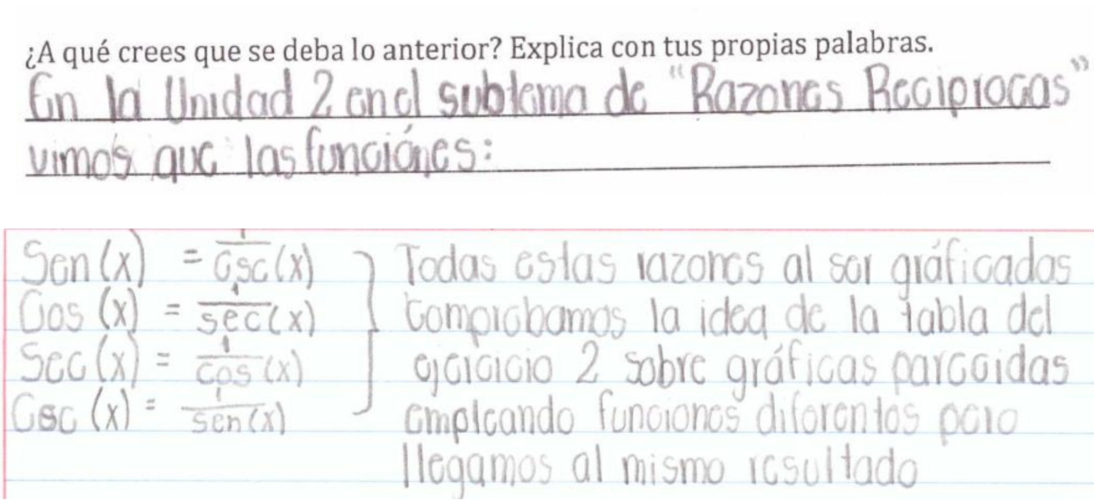
Pregunta 4: ¿A qué crees que se deba lo anterior? (El hecho de que se den ciertas igualdades entre gráficas aunque la expresión sea distinta)

Tránsito del registro gráfico al registro verbal

$C_{G\to V}$ será el símbolo para representar un tránsito entre el registro gráfico y el registro verbal. Se marca con un uno si el estudiante da una respuesta fundamentada en lo observado en las gráficas o hace referencia a estas; se marca con cero si no realiza lo anterior.

Tránsito del registro algebraico al registro verbal

$C_{A\to V}$ será el símbolo para representar un tránsito entre el registro algebraico y el registro verbal. Se marca con un uno si el estudiante da una respuesta fundamentada en lo observado (figura 44) en las expresiones trigonométricas o hace referencia a estas; se marca con un cero (figura 45) si no realiza lo anterior.



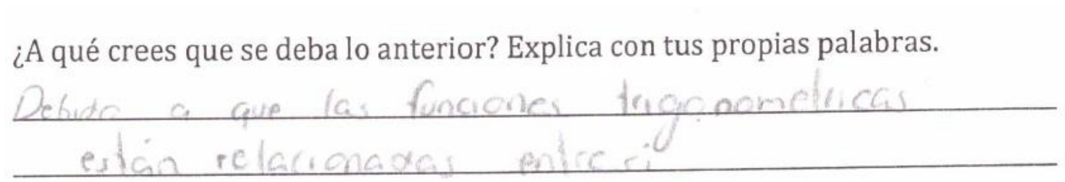
¿A qué crees que se deba lo anterior? Explica con tus propias palabras.

En la Unidad 2 en el subtema de "Razones Recíprocas" vimos que las funciones:

$$\left.\begin{aligned} Sen(x) &= \frac{1}{Csc(x)} \\ Cos(x) &= \frac{1}{sec(x)} \\ Sec(x) &= \frac{1}{cos(x)} \\ Csc(x) &= \frac{1}{sen(x)} \end{aligned}\right\}$$

Todas estas razones al ser gráficadas comprobamos la idea de la tabla del ejercicio 2 sobre gráficas parecidas empleando funciones diferentes pero llegamos al mismo resultado

Figura 44. Ejemplo de respuesta fundamentada en algún registro



¿A qué crees que se deba lo anterior? Explica con tus propias palabras.

Debido a que las funciones trigonometricas están relacionadas entre sí

Figura 45. Ejemplo de respuesta sin fundamento en un registro

Actividad 2

Al igual que en la actividad anterior, se hace una tabla que concentra las respuestas obtenidas (Anexo 3), la distribución de las columnas se describe en la preguntas correspondientes, mientras que las filas representan a los alumnos participantes, como se muestra en la siguiente figura:

	Pregunta 1	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 3
	TT+	CT->A	CT->A	CT->V	CA->V
E_1	0	0	1	1	0
E_2	1	0	2	1	0
E_3	0	0	0	1	0
E_4	0	0	0	1	0
E_5	1	0	1	1	0

Figura 46. Ejemplo del condensado de respuestas para la actividad 2

Pregunta 1: ¿Qué observas entre los valores de la primera y segunda tabla?

Tratamiento interno en el registro tabular.

$T_{T\uparrow}$ simboliza el tratamiento interno en el registro tabular. Se marca con uno si el estudiante describe relaciones numéricas que en efecto existen, pero que no tienen que ver con la reciprocidad entre valores numéricos. Se marca con un cero si el estudiante describe cualquier otro tipo de relación que no sea verdadera (ver figura 47).

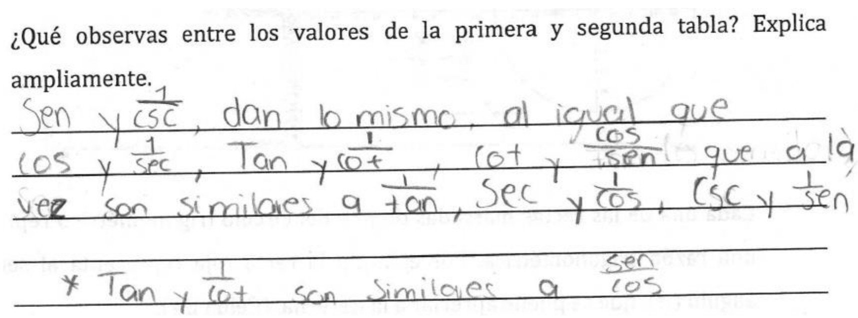
¿Qué observas entre los valores de la primera y segunda tabla? Explica ampliamente.

los de la segunda tabla la mayoria son mas amplias, lo cual nos indica cuales medidas de angulos son mas grandos, pero al realizar las ultimas 2 funciones la cifra disminuye. Ademas todos son distintos caminos para tratar de llegar al mismo resultado

Figura 47. Respuesta en la que se describe una relación verdadera

Tránsito del registro tabular al registro algebraico.

$C_{T\to A}$ simboliza el tránsito del registro tabular al registro algebraico. Se marca con un uno si el estudiante describe relaciones numéricas relacionadas con la reciprocidad entre valores numéricos. Se marca con un cero para cualquier otro tipo de relaciones descritas por los estudiantes (ver figura 48). Además, un uno aquí implica un uno en $T_{T\uparrow}$


¿Qué observas entre los valores de la primera y segunda tabla? Explica ampliamente.

Sen y $\frac{1}{csc}$, dan lo mismo, al igual que cos y $\frac{1}{sec}$, Tan y $\frac{1}{cot}$, cot y $\frac{cos}{sen}$ (que a la vez son similares a $\frac{1}{tan}$, Sec y $\frac{1}{cos}$, Csc y $\frac{1}{sen}$

* Tan y $\frac{1}{cot}$ son similares a $\frac{sen}{cos}$

Figura 48. Respuesta en la que se muestra coherencia de relaciones y valores

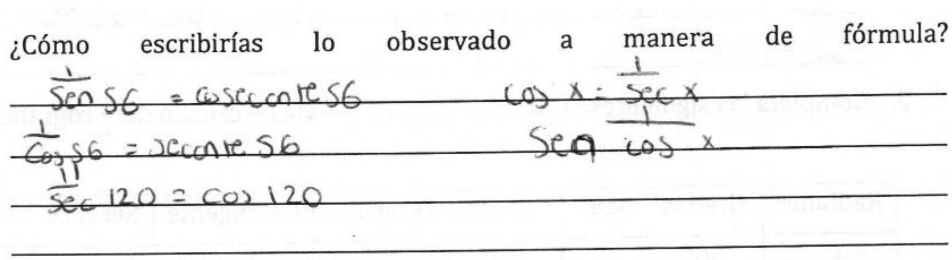
Pregunta 2: ¿Cómo escribirías lo observado a manera de fórmulas?

Tránsito del registro tabular al registro algebraico

$C_{T\to A}$ simboliza el tránsito del registro tabular al registro algebraico. Con ayuda de la representación tabular, el estudiante identifica la igualdad de expresiones trigonométricas equivalentes.

Creamos tres criterios ($C_{T\to A}$):

1) Los estudiantes que identifican de una a tres expresiones trigonométricas equivalentes se le da el valor de 1.
2) Los estudiantes que identifican de cuatro a siete expresiones trigonométricas equivalentes se le da el valor de 2.
3) Los estudiantes que identifican de ocho a diez expresiones trigonométricas equivalentes se le da el valor de 3 (ver figura 49).

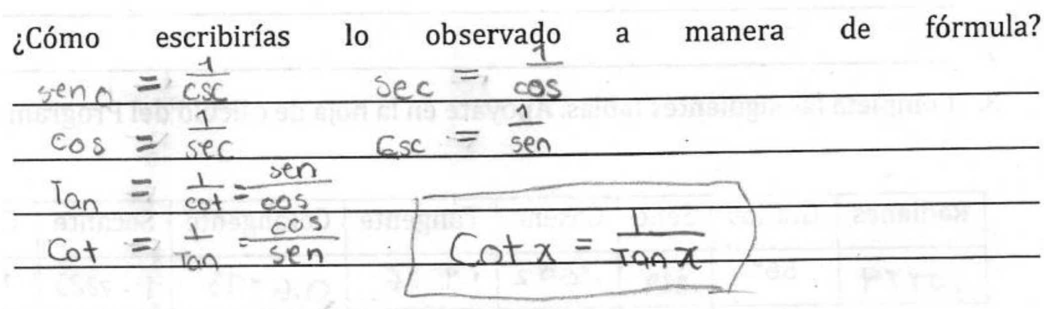

¿Cómo escribirías lo observado a manera de fórmula?

$\frac{1}{\text{sen } 56}$ = cosecante 56 $\quad$ cos x = $\frac{1}{\text{sec } x}$

$\frac{1}{\cos 56}$ = secante 56 $\quad$ sen = $\frac{1}{\cos x}$

$\frac{1}{\sec 120}$ = cos 120

Figura 49. Estudiante que identifica una expresión trigonométrica equivalente


¿Cómo escribirías lo observado a manera de fórmula?

sen = $\frac{1}{\text{csc}}$ $\quad$ sec = $\frac{1}{\text{cos}}$

cos = $\frac{1}{\text{sec}}$ $\quad$ csc = $\frac{1}{\text{sen}}$

Tan = $\frac{1}{\text{cot}}$ = $\frac{\text{sen}}{\text{cos}}$

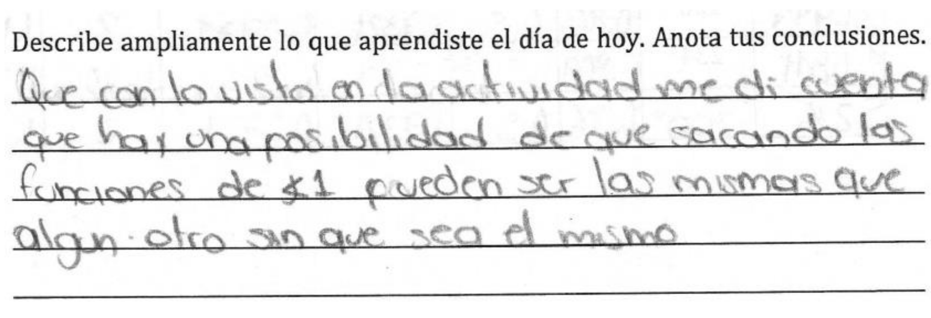
Cot = $\frac{1}{\text{Tan}}$ = $\frac{\text{cos}}{\text{sen}}$ $\quad$ $\boxed{\text{Cot } x = \frac{1}{\text{Tan } x}}$

Figura 50. Estudiante que identifica 10 expresiones equivalentes

Pregunta 3: Describe ampliamente lo que aprendiste el día de hoy.

Tránsito del registro tabular al registro verbal

$C_{T \to V}$ simboliza el tránsito del registro tabular al registro verbal. Se marca con uno si el estudiante da una respuesta fundamentada con lo observado en las tablas o hace referencia a estas; se marca con cero si no realiza lo anterior (ver figura 51).

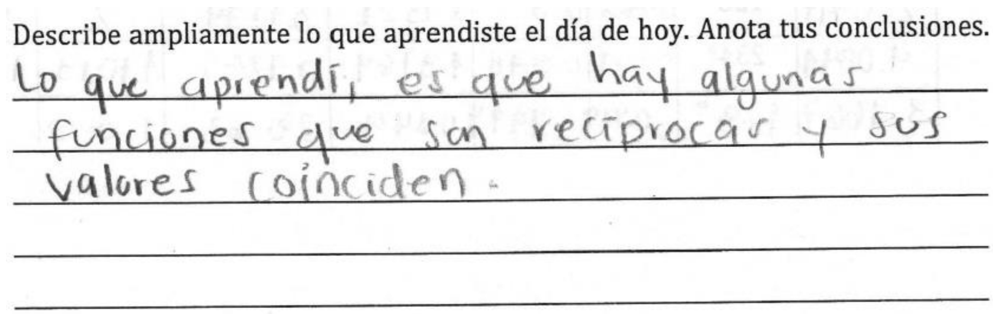

Describe ampliamente lo que aprendiste el día de hoy. Anota tus conclusiones.

Que con lo visto en la actividad me di cuenta que hay una posibilidad de que sacando las funciones de ≠1 pueden ser las mismas que algun otro sin que sea el mismo

Figura 51. Respuesta con fundamento en representación tabular

Tránsito del registro algebraico al registro verbal

$C_{A \to V}$ simboliza el tránsito del registro algebraico al registro verbal. Se marca con uno si el estudiante da una respuesta fundamentada con lo observado en las expresiones trigonométricas o hace referencia a estas; se marca con cero si no realiza lo anterior (ver figura 52).



Describe ampliamente lo que aprendiste el día de hoy. Anota tus conclusiones.

Lo que aprendí, es que hay algunas funciones que son reciprocas y sus valores coinciden.

Figura 52. Respuesta fundamentada en lo observado en expresiones

Actividad 3

El concentrado de respuestas obtenidas en esta actividad queda desglosado en el Anexo 4 de este documento, la distribución de las columnas se describe en la preguntas correspondientes, mientras que las filas representan a los alumnos participantes, como se muestra en la siguiente figura:

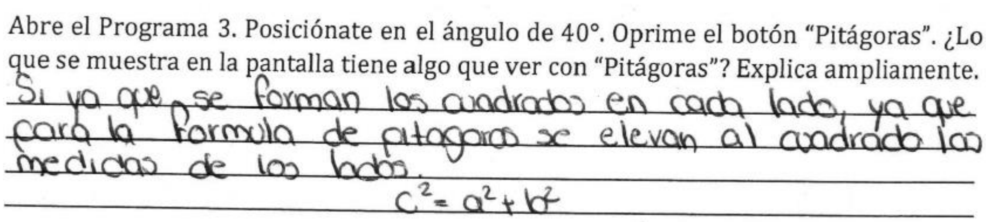
	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3
	CF->CA	CF->CV	CT->CA
E_1	0	1	0
E_2	1	1	0
E_3	0	1	0
E_4	0	1	1
E_5	0	0	0
E_6	1	1	0
E_7	1	1	1

Figura 53. Ejemplo de concentrado de respuestas de la actividad 3

Pregunta 1: ¿Lo que se muestra en la pantalla tiene algo que ver con "Pitágoras"?

Tránsito del registro figural al registro algebraico

$C_{F \to A}$ Simboliza el tránsito del registro figural al registro algebraico. Si el estudiante hace una relación de las figuras observadas con el Teorema de Pitágoras (véase figura 54), describiendo adecuadamente y escribiendo su representación algebraica, o escribiendo solamente su representación algebraica, se marca al estudiante con el valor de uno. Se marca con el valor de cero si describe cualquier otra relación observada.



Abre el Programa 3. Posiciónate en el ángulo de 40°. Oprime el botón "Pitágoras". ¿Lo que se muestra en la pantalla tiene algo que ver con "Pitágoras"? Explica ampliamente.

Si ya que se forman los cuadrados en cada lado, ya que para la formula de pitagoras se elevan al cuadrado las medidas de los lados.

$c^2 = a^2 + b^2$

Figura 54. Tránsito correcto entre el registro figural y algebraico

Pregunta 2: ¿Qué cambios observas en las figuras?

Tránsito del registro figural al registro verbal

$C_{F \to V}$ Simboliza el tránsito del registro figural al registro verbal. Si el estudiante hace una descripción específica de lo observado dándose cuenta de que al mover el ángulo, los catetos se mueven y con ellos sus respectivas áreas, pero que la hipotenusa (y su área) no lo hace, se marca al estudiante con el valor de uno. Se marca con el valor de cero si describe cualquier otro tipo de cambio.

En la vista gráfica, mueve el deslizador. ¿Qué cambios observas en las figuras? Describe ampliamente.

Mientras se mueve el deslizador el Seno, coseno e hipotenusa van cambiando, por ninguna posa de el la dano

Figura 55. Respuesta en la que no se logra el tránsito entre registros

Pregunta 3: ¿Cuál sería la expresión matemática que represente los comportamientos observados?

Tránsito del registro tabular al registro algebraico.

$C_{T \to A}$ simboliza el tránsito del registro tabular al algebraico. Se marca con cero si el estudiante deduce una expresión incorrecta; se marca con uno si el estudiante deduce la expresión trigonométrica adecuada:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

¿Cuál sería la expresión matemática que represente los comportamientos observados?

$(Sen^2x)(Cos^2x) = 1$

Figura 56. Deducción incorrecta de una expresión

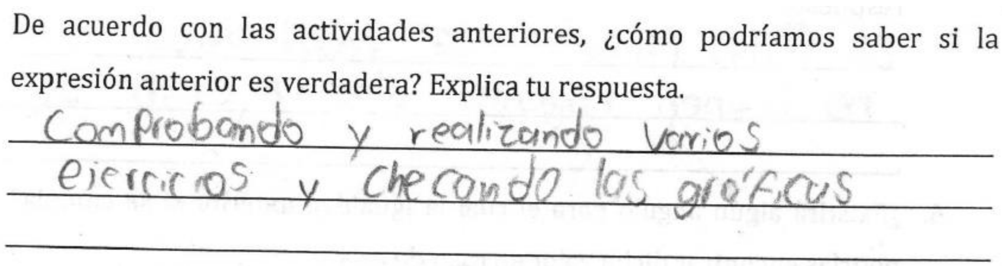
Actividad 4

Pregunta 1: ¿Cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera?

Tránsito del registro algebraico al registro gráfico.

El condensado de respuestas de esta actividad se encuentra en el anexo 5 de este documento, a continuación se explica cómo se creó la tabla que concentra esta información.

$C_{A \to G}$ Simboliza tránsito del registro algebraico al registro gráfico. Si el estudiante da una respuesta haciendo énfasis en las representaciones gráficas tratadas en las actividades anteriores entonces se le asignará el valor de uno (ver figura 57).


De acuerdo con las actividades anteriores, ¿cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera? Explica tu respuesta.

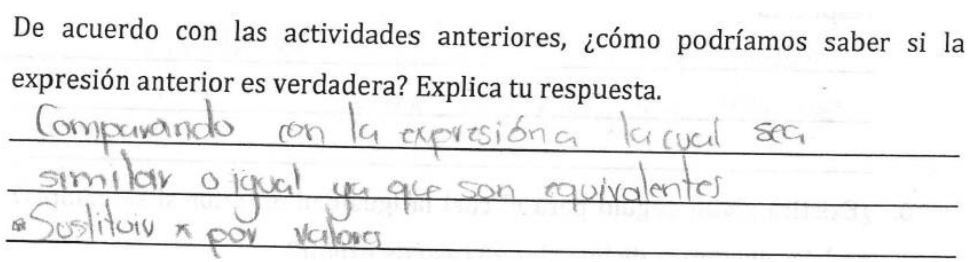
Comprobando y realizando varios ejercicios y checando las gráficas

Figura 57. Respuesta con énfasis en representación gráfica

Tránsito del registro algebraico al registro tabular.

$C_{A \to T}$ Simboliza tránsito del registro algebraico al registro tabular. Si el estudiante da una respuesta haciendo énfasis en las representaciones tabulares tratadas en las actividades anteriores entonces se le asignará el valor de uno (ver figura 58).

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores.


De acuerdo con las actividades anteriores, ¿cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera? Explica tu respuesta.

Comparando con la expresión a la cual sea similar o igual ya que son equivalentes

* Sustituir x por valores

Figura 58. Respuesta con énfasis en representación tabular

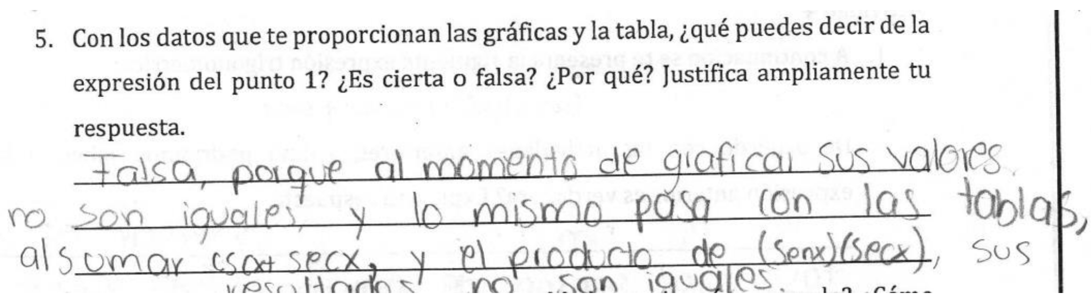
Pregunta 2: ¿Qué puedes decir de la expresión del punto 1? ¿Es cierta o falsa? ¿Por qué?

Tránsito del registro tabular al registro verbal.

$C_{T\rightarrow V}$ Simboliza el tránsito del registro tabular al registro verbal. Si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación tabular de los ejercicios anteriores se le asignará el valor de uno. Se le asignará el valor de cero en caso contrario (ver figura 59).

Tránsito del registro gráfico al registro verbal.

$C_{G\rightarrow V}$ Simboliza el tránsito del registro gráfico al registro verbal. Si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación gráfica de los ejercicios anteriores se le asignará el valor de uno. Se le asignará el valor de cero en caso contrario.


5. Con los datos que te proporcionan las gráficas y la tabla, ¿qué puedes decir de la expresión del punto 1? ¿Es cierta o falsa? ¿Por qué? Justifica ampliamente tu respuesta.

Falsa, porque al momento de graficar sus valores no son iguales, y lo mismo pasa con las tablas, al sumar csx+secx, y el producto de (senx)(secx), sus resultados no son iguales.

Figura 59. Repuesta con énfasis en el uso de 2 representacione

Pregunta 3: ¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior sí se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir?

Independientemente de que la respuesta a esta interrogante sea negativa o afirmativa, estamos interesados en analizar cómo son sus justificaciones.

Tránsito del registro tabular al registro verbal.

$C_{T\rightarrow V}$ Simboliza un tránsito del registro tabular al registro verbal. Si el estudiante justifica haciendo énfasis en alguna representación tabular le corresponderá el valor de uno.

Tránsito del registro gráfico al registro verbal.

$C_{G \rightarrow V}$ Simboliza un tránsito del registro gráfico al registro verbal. Si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en alguna representación gráfica le corresponderá el valor de uno (ver anexo 5).

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores.

¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior sí se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir?

No, porque en las gráficas no se unen en ningun punto

Figura 60. Respuesta con énfasis en representación gráfica

Pregunta 4: Con solo observar las gráficas podrías localizar si existe algún ángulo para el cual sea verdadera la expresión del punto 1. ¿Cómo le harías?

Tránsito de representación gráfica a representación verbal.

$C_{G \rightarrow V}$ Simboliza el tránsito del registro gráfico al registro verbal. Se marcará con un uno si el estudiante, después de observar cuidadosamente la gráfica, mencione que hay un lugar en donde las gráficas coinciden (chocan) y que ese podría ser el posible valor buscado. Se marcará con un cero si el estudiante no realiza lo anterior.

Abre el Programa 5. En él encontraras las gráficas anteriores en una sola vista. Con solo observar las gráficas podrías localizar si existe algún ángulo para el cual sea verdadera la expresión del punto 1? ¿Cómo le harías? Explica ampliamente.

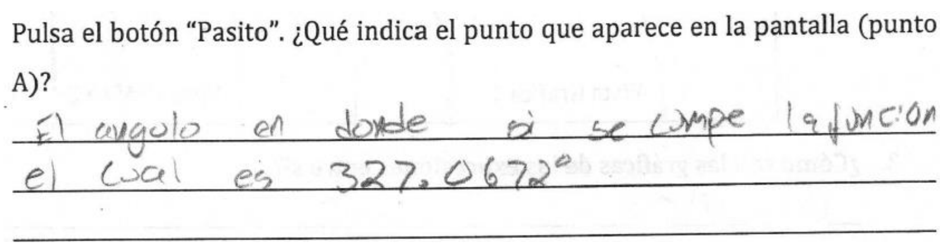
Si, pero observando se cruzan las 2 gráficas.

Figura 61. Respuesta que refleja el tránsito del registro gráfico al verbal

Pregunta 5: ¿Qué indica el punto que aparece en la pantalla?

Tránsito de representación figural a representación verbal.

$C_{F\rightarrow V}$ Simboliza tránsito del registro figural al registro verbal. Se marca con un uno si el estudiante identifica que el punto señalado es el valor para el cual la expresión del punto 1 es verdadera. Se marca con cero en caso contrario.


Pulsa el botón "Pasito". ¿Qué indica el punto que aparece en la pantalla (punto A)?

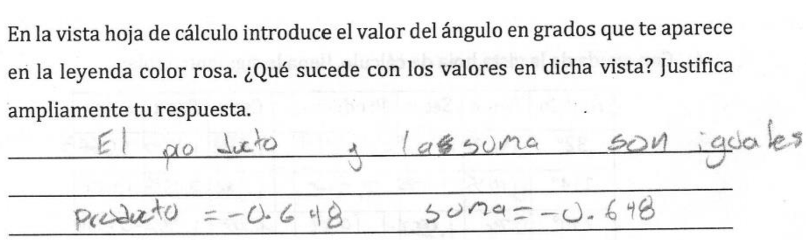
El angulo en donde se compe la funcion el cual es 327.0672°

Figura 62. Tránsito del registro figural al verbal

Pregunta 6: ¿Qué sucede con los valores en dicha vista?

Tránsito de representación tabular a representación verbal.

$C_{T\rightarrow V}$ Simboliza un tránsito del registro tabular al registro verbal. En este caso si el estudiante menciona que el respectivo producto y suma de las expresiones trigonométricas para ese ángulo son iguales, se marcará con un uno a ese estudiante. En caso contrario se marcará con un cero.


En la vista hoja de cálculo introduce el valor del ángulo en grados que te aparece en la leyenda color rosa. ¿Qué sucede con los valores en dicha vista? Justifica ampliamente tu respuesta.

El producto y la suma son iguales

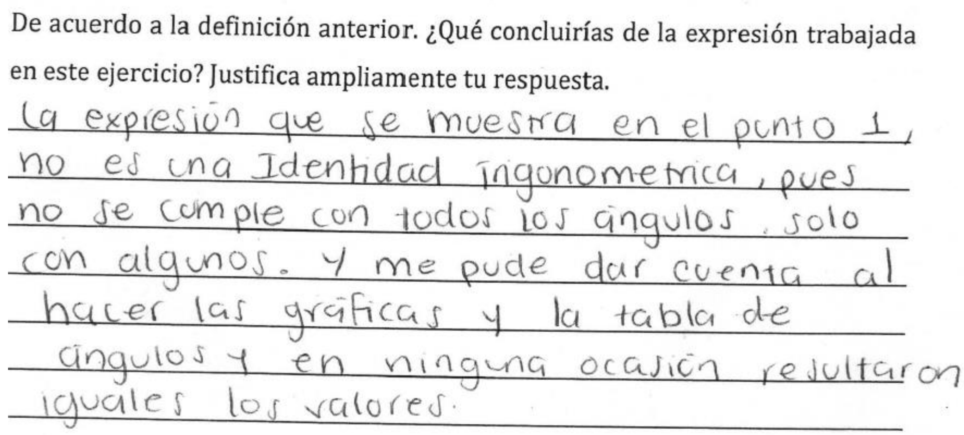
producto = -0.648 suma = -0.648

Figura 63. Tránsito del registro tabular al verbal

Pregunta 7: ¿Qué concluirías de la expresión trigonométrica en este ejercicio?

Tránsito de representación verbal a representación tabular-verbal.

$C_{V \to T - V}$ Simboliza un tránsito del registro verbal al tabular y un regreso del tabular al verbal. Si el estudiante concluye que la expresión trabajada no es identidad porque no es válida para todos los valores de ángulos, entonces a ese estudiante se le marca con el valor de uno; en caso contrario se le asigna el valor de cero.


De acuerdo a la definición anterior. ¿Qué concluirías de la expresión trabajada en este ejercicio? Justifica ampliamente tu respuesta.

La expresión que se muestra en el punto 1, no es una Identidad trigonometrica, pues no se cumple con todos los angulos, solo con algunos. Y me pude dar cuenta al hacer las gráficas y la tabla de angulos y en ninguna ocasión resultaron iguales los valores.

Figura 64. Tránsito del registro verbal al tabular y de regreso al verbal

Actividad 5

El concentrado de respuestas correspondientes a esta actividad se encuentra en el anexo 6 de este documento, a continuación de describe la forma en la que fueron elaboradas.

Pregunta 1: ¿Cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera?

Tránsito del registro algebraico al registro gráfico.

$C_{A \to G}$ Simboliza tránsito del registro algebraico al registro gráfico. Se marca un uno si el estudiante hace referencia a las representaciones gráficas tratadas en las actividades anteriores.

Tránsito del registro algebraico al registro tabular.

$C_{A \to T}$ Simboliza tránsito del registro algebraico al registro tabular. Se marca un uno si el estudiante hace referencia a las representaciones tabulares tratadas en las actividades anteriores.

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores.

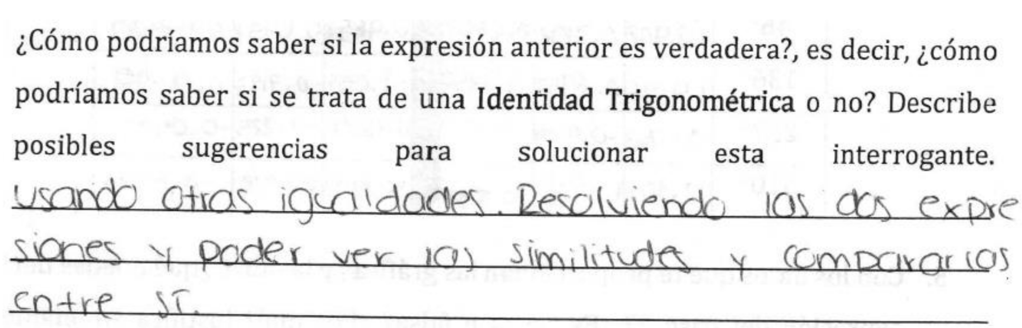

¿Cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera?, es decir, ¿cómo podríamos saber si se trata de una **Identidad Trigonométrica** o no? Describe posibles sugerencias para solucionar esta interrogante.
usando otras igualdades. Resolviendo los dos expre-siones y poder ver los similitudes y compararlos entre sí.

Figura 65. Respuesta en la que no se hace referencia a ninguna representación

Pregunta 2: ¿Qué puedes decir de la expresión del paso 1? ¿Es cierta o falsa? ¿Por qué?

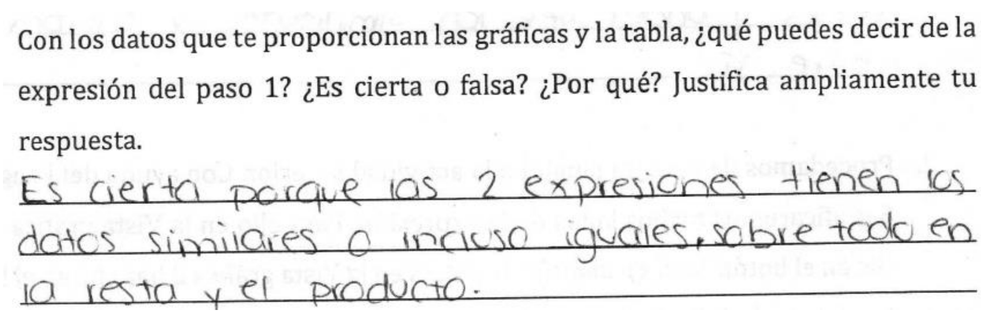
Tránsito del registro tabular al registro verbal.

$C_{T \to V}$ Simboliza tránsito del registro tabular al registro verbal. Se marca un uno si la respuesta del estudiante hace énfasis en la representación tabular de los ejercicios anteriores.

Tránsito del registro gráfico al registro verbal.

$C_{G \to V}$ Simboliza tránsito del registro gráfico al registro verbal. Se marca un uno si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación gráfica de los ejercicios anteriores.

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores.


Con los datos que te proporcionan las gráficas y la tabla, ¿qué puedes decir de la expresión del paso 1? ¿Es cierta o falsa? ¿Por qué? Justifica ampliamente tu respuesta.

Es cierta porque los 2 expresiones tienen los datos similares o incluso iguales, sobre todo en la resta y el producto.

Figura 66. Respuesta con énfasis en la representación tabular

Pregunta 3: ¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior no se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir?

Independientemente de que la respuesta a esta interrogante sea negativa o afirmativa, estamos interesados en analizar cómo son sus justificaciones.

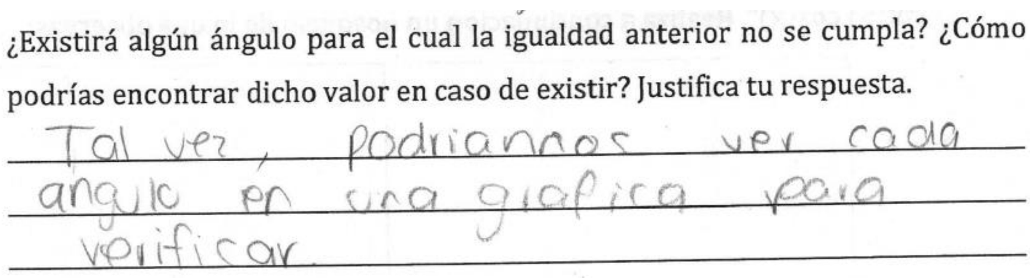
Tránsito del registro tabular al registro verbal.

$C_{T \to V}$ Simboliza el tránsito del registro tabular al registro verbal, luego si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en alguna representación tabular entonces se marca con un uno a ese estudiante.

Tránsito del registro gráfico al registro verbal.

$C_{G \to V}$ Simboliza el tránsito del registro gráfico al registro verbal. Si el estudiante justifica su respuesta haciendo énfasis en alguna representación gráfica entonces se marca con un uno a ese estudiante.

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores.


¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior no se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir? Justifica tu respuesta.

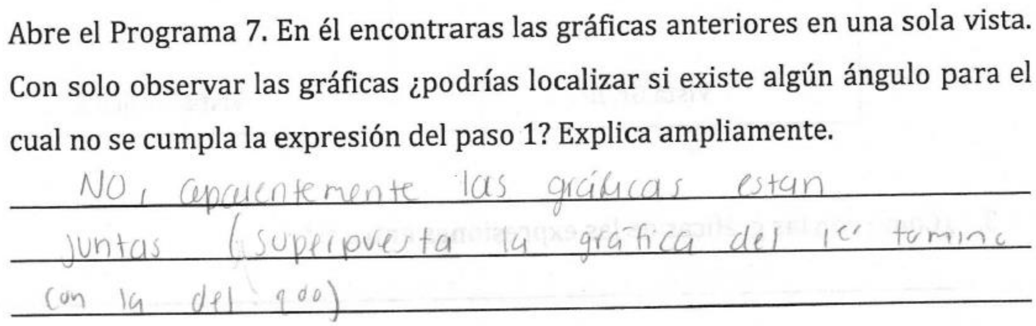
Tal vez, podriamos ver cada angulo en una grafica para verificar.

Figura 67. Respuesta con énfasis en la representación gráfica

Pregunta 4: ¿Podrías localizar si existe algún ángulo para el cual no se cumpla la expresión del paso 1?

Tránsito del registro gráfico al registro verbal.

$C_{G \to V}$ Simboliza el tránsito del registro gráfico al registro verbal. Se espera que el estudiante, después de observar cuidadosamente la gráfica, mencione que no existe lugar alguno en donde las gráficas no coincidan (siempre chocan/ están traslapadas). Es decir, no existe ángulo para el cual la igualdad no se cumpla. Si el estudiante logra lo anterior se marca con un uno, en caso contrario se marca con un cero en la tabla de condensado.


Abre el Programa 7. En él encontraras las gráficas anteriores en una sola vista. Con solo observar las gráficas ¿podrías localizar si existe algún ángulo para el cual no se cumpla la expresión del paso 1? Explica ampliamente.

NO, aparentemente las gráficas estan juntas (superpuesta la gráfica del 1er termino con la del 2do)

Figura 68. Tránsito del registro gráfico al registro verbal

Pregunta 5: Por lo anterior, la expresión trabajada en este ejercicio ¿es una Identidad Trigonométrica?

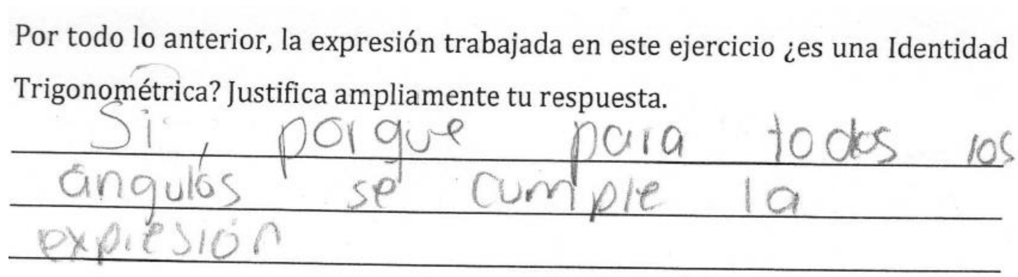
Tránsito del registro verbal al registro gráfico.

$C_{V \to G}$ Simboliza tránsito del registro verbal al registro gráfico. Si el estudiante responde que sí se trata de una identidad trigonométrica y lo justifica con base a lo que observa en las gráficas entonces se marca con un uno a este estudiante.

Tránsito del registro verbal al registro tabular.

$C_{V \to T}$ Simboliza tránsito del registro verbal al registro tabular. Si el estudiante responde que sí se trata de una identidad trigonométrica y lo justifica con base a lo que observa en las tablas entonces se marca con un uno a este estudiante (ver anexo 8).

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores (


Por todo lo anterior, la expresión trabajada en este ejercicio ¿es una Identidad Trigonométrica? Justifica ampliamente tu respuesta.

Si, porque para todos los angulos se cumple la expresión

Figura 69. Evidencia de tránsito entre registro tabular y verbal

Pregunta 6: Existirá alguna manera de probar que la expresión anterior es verdadera sin usar un software graficador como recurso. ¿Qué opinas al respecto?

Tránsito de representación gráfica a representación verbal.

$C_{G \to V}$ Simboliza un tránsito del registro gráfico y el verbal. Se marca con un uno al estudiante que basa su respuesta en ideas gráficas.

Tránsito de representación tabular representación verbal.

$C_{T \to V}$ Simboliza un tránsito del registro tabular al registro verbal. Se marca con un uno al estudiante que basa su respuesta en ideas de tabulación.

Tránsito de representación algebraica a representación verbal.

$C_{A \to V}$ Simboliza un tránsito del registro algebraico al registro verbal. Se marca con un uno al estudiante que basa su respuesta en ideas algebraicas.

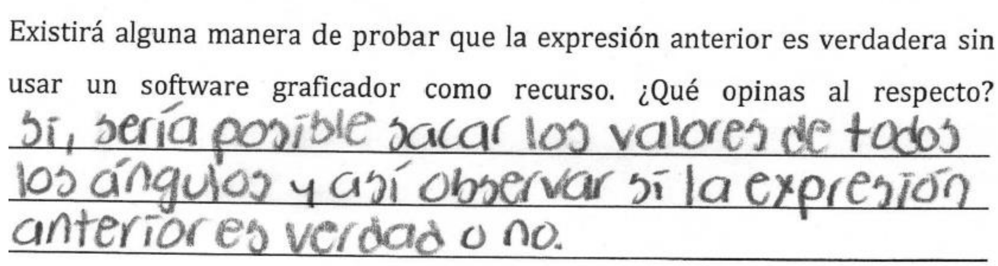

Existirá alguna manera de probar que la expresión anterior es verdadera sin usar un software graficador como recurso. ¿Qué opinas al respecto?
Sí, sería posible sacar los valores de todos los ángulos y así observar si la expresión anterior es verdad o no.

Figura 70. Respuesta que refleja el tránsito del registro tabular al verbal

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores.

Actividad 6

El concentrado de las respuestas correspondientes a esta actividad se encuentra desglosado en el anexo 7 de este documento, a continuación se describe cada una de las preguntas.

Pregunta 1: ¿Qué cambios notas en la pantalla si das clic en cada opción?

Tratamiento interno en el registro gráfico

$T_{G\upharpoonleft}$ Simboliza tratamiento interno en el registro gráfico. Se marca con un uno al estudiante que comenta cambios relacionados meramente con la forma de las gráficas.

Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\upharpoonleft}$ Simboliza tratamiento interno en el registro algebraico. Se marca con un uno al estudiante describe cambios relacionados con las expresiones trigonométricas.

Tratamiento interno en el registro figural.

$T_{F\upharpoonleft}$ Simboliza tratamiento interno en el registro figural. Se marca con un uno al estudiante que describe solamente cambios superficiales como por ejemplo cambio en los colores.

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores.

¿Qué cambios notas en la pantalla si das clic en cada opción? Explica detalladamente todo lo que observas.

Opción 1: Tan (x) cambia por 1/Sen x y aparece otra linea en la gráfica diferente

Opción 2: Tan (x) cambia por cos (x) / Sen (x), aparece una nueva

Opción 3: la gráfica se mantiene igual pero la expresión cambia Sen (x) / Cos (x) por el lugar de Tan(x)

Opción 4: Tan (x) cambia a 1/Cos (x), la gráfica cambia de forma, combinando la opción 2 y 3

Figura 71. Respuesta de un tratamiento interno en el registro gráfico

Pregunta 2: ¿Por qué esa opción (3) mantiene la gráfica original mientras las otras opciones cambian por completo la gráfica?

Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\uparrow}$ simboliza un tratamiento interno en el registro algebraico. Se marca con un uno al estudiante que llegue a la conclusión de que la opción 3 no cambia la forma de la gráfica ya que tan(x) se está sustituyendo por sen(x) / cos(x) siendo estas expresiones equivalentes. Se marca con un cero en cualquier otro caso.

¿Por qué esa opción mantiene la gráfica original mientras las otras opciones cambian por completo la gráfica? Justifica ampliamente tu respuesta.

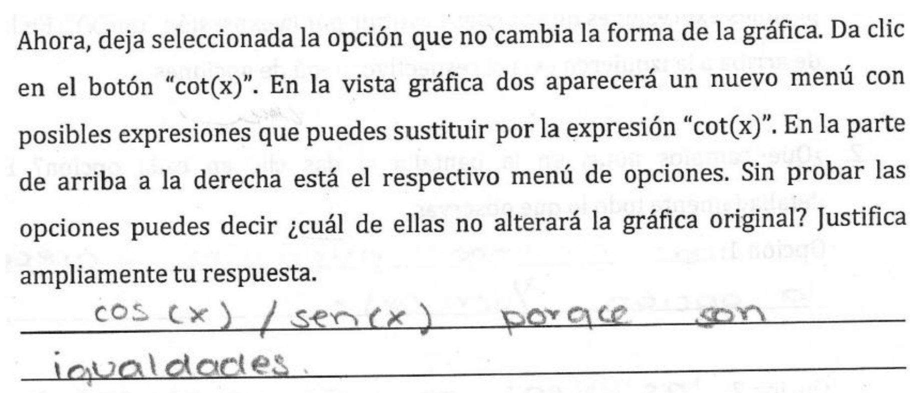
porque tan x es equivalente a Sen x / Cos x

Figura 72. Respuesta de un tratamiento interno en el registro algebraico

regunta 3: Sin probar las opciones puedes decir ¿cuál de ellas no alterará la gráfica original?

Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\uparrow\uparrow}$ Simboliza un tratamiento interno en el registro algebraico. La doble flecha significa que el estudiante requiere una mayor abstracción mental para llegar a esta respuesta. Se marca con un uno al estudiante que llegue a la conclusión de que la opción 4 no cambia la forma de la gráfica ya que cot(x) se está sustituyendo por cos(x) / sen(x) siendo estas expresiones equivalentes. Se marca con un cero en cualquier otro caso.



Ahora, deja seleccionada la opción que no cambia la forma de la gráfica. Da clic en el botón "cot(x)". En la vista gráfica dos aparecerá un nuevo menú con posibles expresiones que puedes sustituir por la expresión "cot(x)". En la parte de arriba a la derecha está el respectivo menú de opciones. Sin probar las opciones puedes decir ¿cuál de ellas no alterará la gráfica original? Justifica ampliamente tu respuesta.

cos (x) / sen(x) porqe son
igualdades.

Figura 73. Respuesta de un tratamiento interno del registro algebraico

Pregunta 4: ¿Qué cambios notas en la pantalla si das clic en cada opción?

Tratamiento interno en el registro gráfico

$T_{G\uparrow}$ Simboliza un tratamiento interno en el registro gráfico. Se marca con un uno al estudiante que comenta cambios relacionados meramente con la forma de las gráficas.

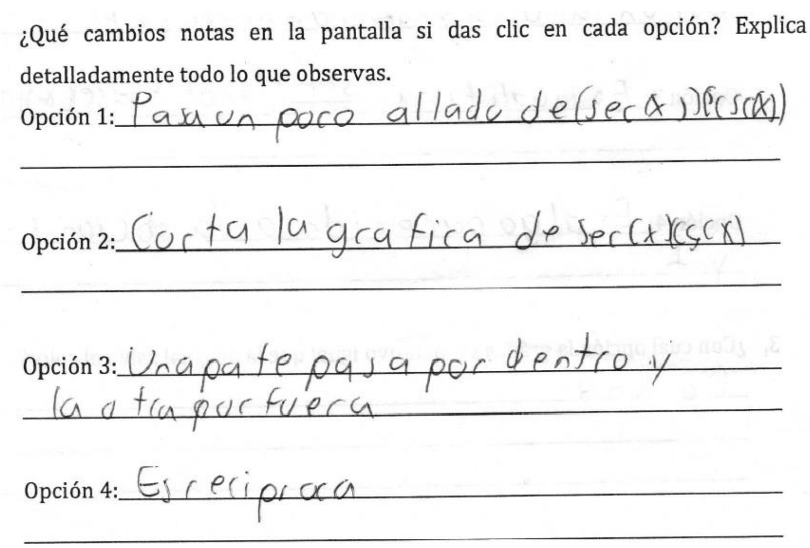
Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\uparrow}$ Simboliza un tratamiento interno en el registro algebraico. Se marca con un uno al estudiante que describe cambios relacionados con las expresiones trigonométricas.

Tratamiento interno en el registro figural.

$T_{F\uparrow}$ Simboliza un tratamiento interno en el registro figural. Se marca con un uno al estudiante que describe solamente cambios superficiales como por ejemplo cambio en clores.

Se le asignará el valor de cero si el estudiante no da una respuesta asociada a cualquiera de las dos representaciones anteriores.



¿Qué cambios notas en la pantalla si das clic en cada opción? Explica detalladamente todo lo que observas.

Opción 1: Pasa un poco allado de(sec(x))(csc(x))

Opción 2: Corta la grafica de sec(x)csc(x)

Opción 3: Una pate pasa por dentro y la otra por fuera

Opción 4: Es reciproca

Figura 74. Respuesta donde se realiza un tratamiento en el registro figural

Pregunta 5: ¿Por qué esa opción (4) mantiene la gráfica original mientras las otras opciones cambian por completo la gráfica?

Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\uparrow}$ Simboliza un tratamiento interno en el registro algebraico. Se marca con un uno al estudiante que llega a la conclusión de que la opción 4 no cambia la forma de la gráfica ya que $cot(x)$ se está sustituyendo por $\frac{cos(x)}{sen(x)}$ siendo estas expresiones equivalentes. Se marca con cero en caso contrario.

¿Por qué esa opción mantiene la gráfica original mientras las otras opciones cambian por completo la gráfica? Justifica ampliamente tu respuesta.

Porque la formula Co reciproca a Cot (x)

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Figura 75. Respuesta de un tratamiento en el registro algebraico

Pregunta 6: ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera?

Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\uparrow}$ Simboliza un tratamiento en el registro algebraico. Se marca con un uno si el estudiante identifica que se está usando el algoritmo de la suma de fracciones. Se marca con cero en caso contrario.

Una vez que identificaste las opciones que no cambian la forma original de la gráfica, da clic en el primer "pasito" que aparece en la parte de abajo. ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera? (Si necesitas regresar un paso atrás da clic al bote de basura).

Se sumaron como si fueran fracciones

Figura 76. Respuesta de tratamiento en el registro algebraico

Pregunta 7: ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera?

Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\uparrow\uparrow}$ Simboliza un tratamiento interno en el registro algebraico. La doble flecha significa que el estudiante requiere una mayor abstracción mental para llegar a esta respuesta. Se marca con un uno al estudiante que identifica que se trata de la utilización de la identidad trigonométrica $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$. Se marca con cero cualquier otra respuesta.

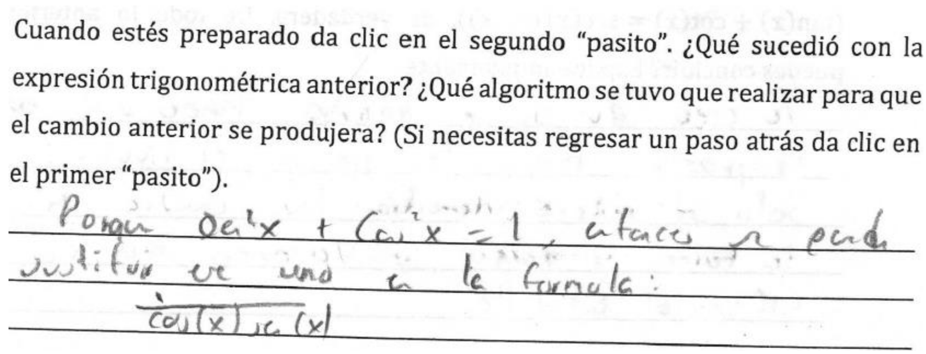


Figura 77. Respuesta de un tratamiento en el registro algebraico

Pregunta 8: ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera?

Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\uparrow}$ Simboliza un tratamiento interno en el registro algebraico. Se marca con uno al estudiante que identifica que solamente la fracción fue separada ya que se trata de una multiplicación de fracciones. Se marca con cero cualquier otra respuesta.

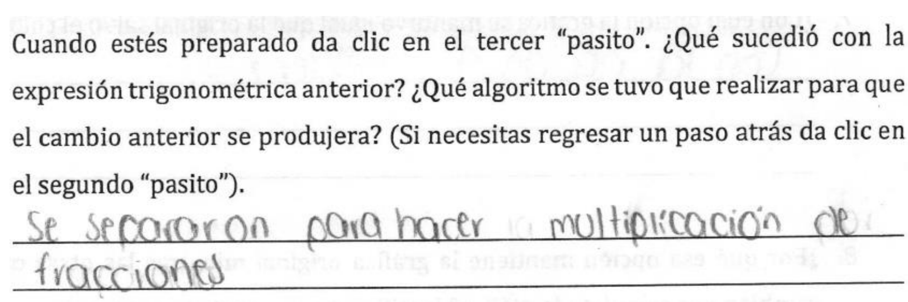
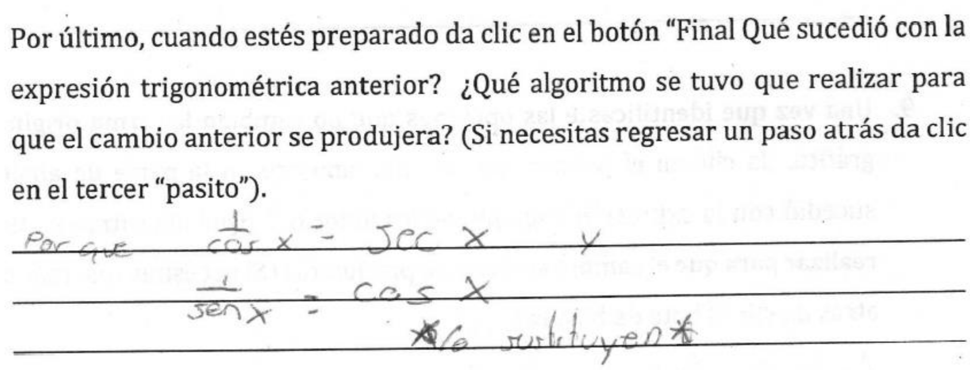


Figura 78. Respuesta de un tratamiento en el registro algebraico

Pregunta 9: ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera?

Tratamiento interno en el registro algebraico.

$T_{A\uparrow\uparrow}$ Simboliza un tratamiento interno en el registro algebraico. La doble flecha significa que el estudiante requiere una mayor abstracción mental para llegar a esta respuesta. Se marca con un uno al estudiante que identifica que se trata de la utilización de la identidad trigonométrica $\frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$ y $\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \csc(x)$. Se marca con cero cualquier otra respuesta.



Por último, cuando estés preparado da clic en el botón "Final Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera? (Si necesitas regresar un paso atrás da clic en el tercer "pasito").

Porque $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ y

$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \cos x$

lo sustituyen

Figura 79. Respuesta de tratamiento en el registro algebraico

Pregunta 10: ¿Qué puedes concluir?

Tránsito de representación gráfica a representación verbal.

$C_{G \to V}$ Simboliza el tránsito del registro gráfico al registro verbal. Se marca con un uno al estudiante que justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación gráfica de los ejercicios anteriores.

Tránsito de representación tabular a representación verbal.

$C_{T \to V}$ Simboliza el tránsito del registro tabular al registro verbal. Se marca con un uno al estudiante que justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación tabular de los ejercicios anteriores.

Tránsito de representación algebraica a representación verbal.

$C_{A \to V}$ Simboliza el tránsito del registro algebraico al registro verbal. Se marca con un uno al estudiante que justifica su respuesta haciendo énfasis en la representación algebraica.

Lo que acabas de hacer es tu primera comprobación de un Identidad Trigonométrica. Es decir, haz probado que la expresión inicial de esta actividad ($\tan(x) + \cot(x) = \sec(x)\csc(x)$), es verdadera. De todo lo anterior ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

Si se pueden comprobar si una Identidad Trigonometrica es verdadera o se puede llamar así, empleando las funciones reciprocas de las funciones trigonómetricas, no necesariamente graficando, pues tienen relaciones entre si.

Figura 80. Respuesta de un tránsito del registro algebraico al verbal

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

En el siguiente apartado hablaremos primeramente del análisis de los resultados obtenidos y después haremos un contraste de los resultados esperados con los resultados obtenidos.

Como mencionamos anteriormente, entendemos la visualización matem en el sentido de Hershkowitz (citado en Hitt, 2003), quien trata a la visualización como ***la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento de quien aprende.***

Utilizaremos el término de comprensión de acuerdo a Hitt (1998), quien menciona que comprender un concepto implica una articulación coherente de las diferentes representaciones que intervienen durante la resolución de problemas. Con esta premisa es que se planearon las actividades, ya que estamos interesados en analizar cómo es que el tránsito y tratamiento de las distintas representaciones del concepto de Identidad Trigonométrica propician la construcción y comprensión del mismo y en qué medida lo hacen.

Por su parte, Duval (1993) menciona que la comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, es decir, que la aprehensión de un concepto sólo se logrará si existen actividades de conversión de una representación a otra y viceversa propiciando con esto la construcción de los conceptos matemáticos.

Por otro lado, Hiebert & Carpenter (1992, citado en Hitt, 1998) definen comprender en términos de cómo se representa y se estructura la información. Mencionan que una idea matemática, procedimiento o hecho será entendido si forma parte de una red interna, es decir, si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión estará determinado por el número y la fuerza de las conexiones.

Es por ello que, con la ayuda de los niveles de comprensión de Hitt (1998), se clasificaran a los estudiantes dependiendo de las conexiones existentes entre las diversas representaciones del concepto. Dichas conexiones formaran redes de representaciones cuyo número y fuerza nos determinaran el grado de comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en los estudiantes.

De acuerdo a la simbología plasmada en el apartado de resultados, distinguiremos las acciones de los estudiantes utilizando la siguiente notación para la constitución de nuestros niveles de comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica:

Reconocimiento de los elementos de un registro de representación: manejaremos el registro verbal (RV), el registro algebraico (RA), el registro gráfico (RG), el registro tabular (RT), y el registro figural (RF).

Tratamiento interno dentro de un mismo registro: TV↑, TA↑, TG↑, TT↑ TF↑.

Tránsito de un registro de representación a otro: CV→A, CA→G, etc.

Coordinación entre registros, cuando existe tránsito de ida y regreso: CV↔A, CA↔G, CV↔G, etc.

Hitt maneja 5 niveles de comprensión de los conceptos, nosotros manejaremos solamente 4 de esos niveles ya que el quinto nivel referente del uso de los diversos registros para la solución de problemas no fue contemplado en las actividades. Los niveles que manejaremos son:

Nivel 1: En este nivel clasificamos a los estudiantes que tienen ideas imprecisas acerca de un concepto. Presentan una mezcla incoherente de diferentes representaciones del concepto.

Nivel 2: En este nivel clasificamos a los estudiantes que realizan tratamientos (transformaciones) dentro de un mismo registro de representación.

Nivel 3: En este nivel clasificamos a los estudiantes que realizan de manera satisfactoria tareas de tránsito (conversión) de un registro de representación a otro.

Nivel 4: En este nivel clasificamos a los estudiantes que articulan diferentes registros de representación, es decir, los estudiantes que manipulen el tránsito entre registros de ida y vuelta.

Hemos de remarcar que los niveles 1, 3 y 4 están íntimamente conectados. Si un estudiante está en el nivel 4 es porque al menos manipula dos articulaciones, es decir, transita de ida y vuelta en dos pares de registros. De esta manera realiza al menos 4 tareas satisfactorias de tránsito y entonces el estudiante recae en el nivel 3. Como realiza tránsitos, el estudiante estaría reconociendo mínimo tres registros de representación distintos y esto lo posicionaría en el nivel 1.

Por otro lado, en el nivel 2 caen todos los estudiantes ya que las actividades desde los primeros ejercicios abonan al tratamiento interno del registro gráfico.

Es importante señalar aquellas preguntas que de una u otra manera abonan a cada uno de los niveles de comprensión, en la siguiente tabla se describen cómo cada una de las preguntas influyen en la ubicación en determinado nivel de acuerdo a las acciones realizadas:

Tabla 2. Ubicación en niveles de cada pregunta, de acuerdo a acciones esperadas

Pregunta	**Nivel 1**
P1A6; P4A6; P1A3; P2A3; P5A4	**RF**
P1A1; P1A4; P1A5; P5A5; P2A1; P3A1; P1A6; P4A6; P2A1; P3A1; P4A1; P2A4; P3A4; P4A4; P2A5; P3A5; P4A5; P6A5; P10A6	**RG**

P4A1; P4A1; P3A2; P3A2; P2A3; P2A4; P2A4; P3A4; P3A4; P4A4; P5A4; P6A4; P7A4; P2A5; P2A5; P3A5; P4A5; P5A5; P5A5; P6A5; P6A5; P6A5; P10A6	**RV**
P1A2; P1A2; P2A2; P3A2; P3A3; P1A4; P2A4; P3A4; P3A4; P6A4; P7A4; P1A5; P2A5; P3A5; P5A5; P6A5;P10A6	**RT**
P1A1; P1A4; P2A1; P3A1; P4A1; P1A2; P2A2; P3A2; P1A3; P3A3; P1A4; P1A5;P1A5; P6A5;P1A6; P2A6; P3A6; P4A6; P5A6; P6A6; P7A6; P8A6; P9A6;P10,A6.	**RA**

Nota: $PiAj$, donde P se refiere a la pregunta, i hace referencia al número de tal pregunta, A simboliza la actividad y j es número de tal actividad, con $i \in \{1,2,\ldots,9,10\}, j \in \{1,2,\ldots,5,,6\}$.

Por ejemplo, si un estudiante contestó satisfactoriamente la pregunta 1 de la actividad 6 (P1A6) entonces ese estudiante abona a entrar en el nivel 1 ya que maneja al menos una representación figural.

Tabla 3. Ejemplo otorgado de acuerdo al tipo de tratamientos realizados

Pregunta	**Nivel 2**
P1A3; P2A3; P5A4; P1A6; P4A6	**TF**↑
P1A1; P2A1; P2A1; P3A1; P3A1; P4A1; P1A4; P2A4; P3A4; P4A4; P1A5; P2A5; P3A5; P4A5; P5A5; P6A5; PIA6; P4A6; P10A6	**TG**↑

P1A2	**TT↑**
P1A6; P2A6; P3A6; P4A6; P5A6; P6A6; P7A6; P8A6; P9A6	**TA↑; TA↑↑**

Por ejemplo, si un estudiante contestó satisfactoriamente la pregunta 1 de la actividad 3 (P1A3) entonces ese estudiante abona a entrar en el nivel 2 ya que maneja al menos un tratamientos dentro del registro figural.

Tabla 4. Ubicación en el nivel 3 de acuerdo a la conversión de registros

Pregunta	**Nivel 3**
P2A3; P5A4	**CF->CV**
P1A3	**CF->CA**
P1A1; P1A4; P1A5	**CA->CG**
P4A1; P3A2; P6A5; P10A6	**CA->CV**
P1A4; P145	**CA->CT**
P1A2;P2A2;P3A3	**CT->CA**
P3A2; P2A4; P3A4; P6A4; P7A4; P2A5; P3A5; P6A5; P10A6	**CT->CV**
P2A1; P3A1	**CG->A**

P4A1; P2A4; P3A4; P4A4; P2A5; P3A5; P4A5; P6A5; P10A6	**CG->V**
P7A4; P5A5	**CV->T**
P5A5	**CV->G**

Si un estudiante contestó satisfactoriamente la pregunta 2 de la actividad 3 (P2A3) entonces ese estudiante abona a entra en el nivel 3 ya que realizan de manera satisfactoria la conversión del registro figural al registro verbal.

Tabla 5. Ubicación en el nivel 4 de acuerdo a la conversión de registros

Pregunta	**Nivel 4**		**Pregunta**
P4A1; P2A4; P3A4; P4A4; P2A5; P3A5; P4A5; P6A5; P10A6	**CG->CV**	**CV->CG**	P5A5
P7A4; P5A5	**CV->CT**	**CT->CV**	P3A2; P2A4; P3A4; P6A4; P7A4; P2A5; P3A5; P6A5; P10A6
P1A2;P2A2;P3A3	**CT->CA**	**CA->CT**	P1A4; P145
P2A1; P3A1	**CG->A**	**CA->G**	P1A1; P1A4; P1A5

Si un estudiante contestó satisfactoriamente la pregunta 4 de la actividad 1 (P4A1) y la pregunta 5 de la actividad 5 (P5A5) entonces ese estudiante abona a entra en el nivel 4 ya que articula el registro gráfico y el registro verbal.

5.1 CLASIFICACIÓN EN LOS DIFERENTES NIVELES DE VISUALIZACIÓN.

Ahora clasifiquemos a los estudiantes de acuerdo a sus actuaciones en la solución de las preguntas. Comenzaremos por el nivel 3 porque, como ya mencionamos, éste está interconectado con los niveles 1 y 4.

Primeramente, estábamos interesados en conocer, de todas las conversiones planteadas, cuáles eran las que los estudiantes realizaban de acuerdo a nuestra descripción en la sección de “Concepción”.

Para discernir si un estudiante realizaba o no cierto tránsito se tomó en cuenta que el estudiante realizara dos conversiones del mismo tipo con la intención de reafirmar la acción. Por ejemplo, para el tránsito del registro algebraico al registro verbal existen 4 preguntas que abonan a la conversión. Si el estudiante realizó al menos 2, para nosotros dominará este tipo de tránsito.

La únicas excepciones en este caso serían los tránsitos del registro figural al registro algebraico y del registro verbal al registro gráfico, ya que para estas conversiones solo existe una pregunta relacionada, así que si el estudiante la contesta adecuadamente, automáticamente se le considerará que domina dicho tránsito.

5.1.1 TRÁNSITOS REALIZADOS POR LOS ALUMNOS.

Los tránsitos específicos que realiza cada estudiante en el transcurso de las 6 actividades quedan desglosados en el anexo 8 de este documento.

La descripción del nivel 3 nos dice que los estudiantes que realizan de manera satisfactoria tareas de tránsito de un registro a otro entran en este nivel, así que si un estudiante realizó al menos 2 de todos estos tránsitos entra en esta categoría teniendo como resultado que los 51 estudiantes lo hace.

Automáticamente, puesto que, al realizar al menos 2 tránsitos el estudiante utiliza al menos 3 registros de representación, se tiene que también los 51 estudiantes caen en el nivel 1.

Para el nivel 4 las cosas no son tan triviales, necesitas rescatar qué estudiantes hicieron tareas de articulación (al menos 2 tránsitos de ida y vuelta). Para ver el tipo de articulación por estudiante ver anexo 9.

Se tienen que 5 estudiantes se encuentran en el nivel 4 con las siguientes articulaciones:

E_11: Articulación entre el registro tabular y el registro verbal y entre el registro gráfico y el registro verbal.

E_12: Articulación entre el registro algebraico y el registro tabular y entre el registro gráfico y el registro verbal.

E_13 y E_14: Articulación entre el registro algebraico y el registro gráfico y entre el registro algebraico y el registro tabular.

E_34: Articulación entre el registro algebraico y el registro gráfico y entre el registro gráfico y el registro verbal.

Observamos que entre estos 5 estudiantes las conversiones que más se repiten son entre el registro algebraico y el gráfico, entre el registro algebraico y el tabular y entre el registro gráfico y el verbal.

Tenemos que estas interconexiones entre los diversos registros de representaciones van a formar redes de representaciones (Hitt, 1998) cuyo número y fuerza determinaran el grado de comprensión de concepto de Identidad Trigonométrica.

Según lo pensado en la "Concepción", la siguiente sería un ejemplo de red que se formaría si el estudiante realizara todos los tránsitos y articulaciones esperadas:

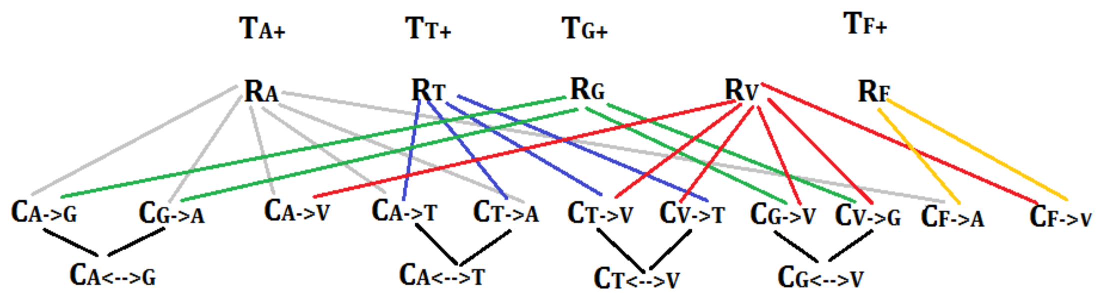


Figura 81.Ejemplo de red de representaciones completa o ideal de las actividades

En contraste con lo esperado, a continuación se muestra la red de uno de los estudiantes que se clasificó en el nivel 4 y de 2 estudiantes clasificados en el nivel 3.

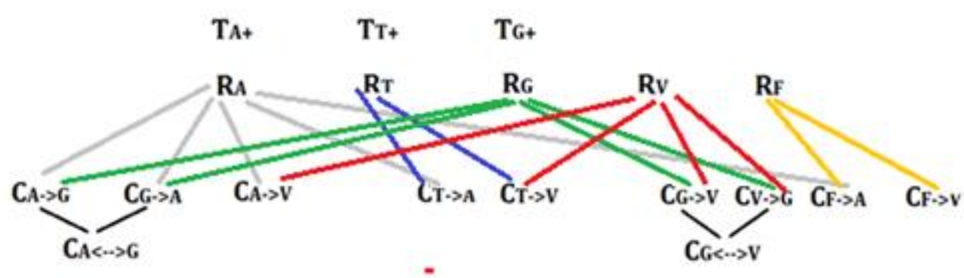


Figura 82. Red de representaciones del estudiante 34

La red completa generada por la totalidad de los estudiantes que participaron en el estudio, se encuentra descrita en el anexo 10 de este documento.

Se puede apreciar que, aunque el estudiante recae en el nivel 4, su red de representación ya carece de ciertos elementos en comparación con la red esperada.

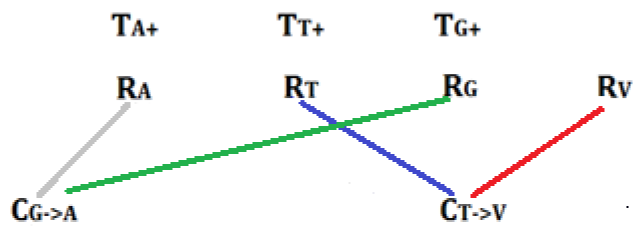


Figura 83. Red de representaciones del estudiante 42

Se puede apreciar que, este estudiante está en el nivel 3 puesto que realiza dos tránsitos entre registro diferentes, sin embargo su red carece de muchas conexiones.

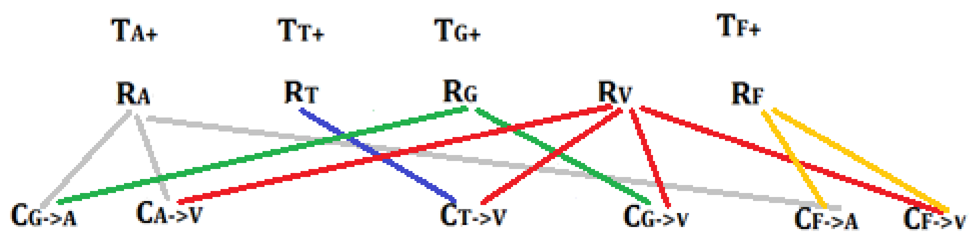


Figura 84. Red de representaciones del estudiante 10

Este es otro ejemplo de un estudiante que está categorizado en el nivel 10, sin embargo, a diferencia del pasado, este estudiante tiene más conexiones debido a que realiza más tránsito entre registros de representación.

Siguiendo la línea de Hiebert & Carpenter (1992, citado en Hitt, 1998), donde el grado de comprensión de un concepto estará determinado por el número y la fuerza de las conexiones, comparando estos tres estudiantes, claramente se distingue al estudiante que en teoría comprende mejor el concepto de Identidad Trigonométrica.

Podemos apreciar, que el número de conexiones del estudiante 34 es mucho mayor que la de los otros dos estudiantes, mostrando que este estudiante es más competente que los otros en el dominio de conocimiento relativo al concepto de Identidad Trigonométrica.

Con los resultados obtenidos, se puede apreciar que se cumplieron los propósitos manejados en el análisis a priori ya que todos los estudiantes manejaron de una u otra forma las interconexiones planteadas en la fase de "Concepción".

Volviendo a la visualización matemática en el sentido de Hershkowitz (citado en Hitt, 2003), se cumple que todos los estudiantes fueron capaces de manejar diversas representaciones del concepto de Identidad Trigonométrica. Aún más, los 5 estudiantes que entraron en el nivel 4 de nuestra categoría fueron capaces de transformar (transitar), generar, comunicar y reflexionar sobre toda la información que se les presentó, lo que para nosotros los hace visualizadores en potencia. Ya que la visualización tiene que ver con comprender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión, podemos decir que todos los estudiantes cumplieron con el objetivo de visualizar matemáticamente hablando.

CONCLUSIONES

Respecto a la pregunta de investigación planteada: ¿Cómo un acercamiento a la visualización de las Identidades Trigonométricas permitirá que los estudiantes construyan y comprendan dicho concepto?, la presente propuesta contribuyó a que a través de una serie de actividades donde estuvieran presentes diversas representaciones del concepto en cuestión, el estudiante pudiera manejar diversas interconexiones y con ello construir, comprender y por ende visualizar el concepto de Identidad Trigonométrica.

Considero que los objetivos de la investigación han sido cumplidos en su totalidad ya que como primer resultado valioso se encuentra la realización de una propuesta diferente a las existentes con una carga muy fuerte respecto a lo visual.

Los resultados que arroja la presente investigación dan prueba de que la visualización matemática, con ayuda de las diversas representaciones de los conceptos y los medios tecnológicos, bajo un diseño cuidadoso de actividades, son un medio para atacar los problemas de la enseñanza en las aulas, si bien no todos los existente, si los orientados a las buenas prácticas en el aula.

Las limitaciones de la presente propuesta recaen en que por ser una propuesta tecnológica, su realización sería poco viable o más complicada si se deseara aplicar en ambientes carentes de la tecnología básica.

El ideal de la propuesta sería aplicarla en un ambiente en donde existiera un equipo de cómputo por cada uno de los estudiantes.

Ha de resaltarse que una pieza clave en la realización de las actividades es la guía oportuna del profesor y las retroalimentaciones pertinentes.

En el futuro se piensa enriquecer con más ejemplos respecto a la actividad 6.

Para finalizar quisiera compartir una reflexión final:

Muy pronto en mi vida supe que quería dedicarme a la docencia, pero observando mí práctica sabía que como todo ser humano tenía fallas. Entro a la maestría para poder mejorar como docente, con la esperanza de poder profesionalizarme, y más que por mí, por los estudiantes, ya que me doy cuenta que año tras año son cientos los jóvenes en los que dejamos huella.

Este trabajo de investigación ha cambiado mi manera de ver las cosas, me ha enseñado que para ser cada día mejor no basta con tener ideas en tu cabeza, me ha enseñado a concretizarlas, fundamentarlas y con ello valorarlas. En estos dos años de estudio ha cambiado un interruptor en mí, he aprendido que hasta las cosas más "difíciles" de enseñar tienen una manera en la que pueden ser abordadas y que la creatividad no tiene límites cuando se trata de obtener un beneficio para los estudiantes.

Mi práctica docente ha cambiado, yo considero que para bien, me he convertido en una persona más sensible, más comprensiva, más analítica, más responsable, y sobre todo con ganas de seguir realizando proyectos en beneficio de los estudiantes.

REFLEXIÓN FINAL

Muy pronto en mi vida supe que quería dedicarme a la docencia pero, observando mí práctica, sabía que como todo ser humano tenía fallas. Entro a la maestría para poder mejorar como docente, con la esperanza de poder profesionalizarme, más que por mí, por los estudiantes, ya que año tras año son cientos los jóvenes en los que dejamos huella.

Cursar la Maestría Profesionalizante en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Zacatecas fue una gran oportunidad en mi crecimiento tanto personal como profesional. Estar rodeada de personas con las mismas aspiraciones e inquietudes me ayudó a motivarme a ser ese factor de cambio que a veces tanto hace falta.

Estando en la maestría puse en juego algunas prácticas que habían estado olvidadas, redescubrí la importancia del trabajo en equipo y de debatir y defender en todo momento nuestros ideales. Las múltiples retroalimentaciones por fin las pude ver como aprendizaje y pude reconocer que no importa quien seas o que hagas, siempre hay nuevas cosas por aprender de los demás.

Este trabajo de investigación ha cambiado mi manera de ver las cosas, me ha enseñado que para ser cada día mejor no basta con tener ideas en tu cabeza, me ha enseñado a concretizarlas, fundamentarlas y con ello valorarlas.

En estos años de estudios me he vuelto una persona más sensible y comprensiva a lo que respecta la labor decente. Ha cambiado un interruptor en mí, he aprendido que hasta las cosas más “difíciles” de enseñar tienen una manera en la que pueden ser abordadas y que la creatividad no tiene límites cuando se trata de obtener un beneficio para los estudiantes.

Mi práctica docente ha cambiado, yo considero que para bien, me he convertido en una persona más analítica, más responsable, y sobre todo con ganas de seguir realizando proyectos en beneficio de los estudiantes.

De manera personal, el apoyo que me brindaron en la Unidad de Matemáticas de la UAZ y por parte de CONACyT ha sido invaluable, ya que me han brindado, entre otras cosas, la oportunidad de vivir una de las experiencias más enriquecedoras de mi vida. La estancia de Investigación realizada en la ciudad de Montreal, Quebec, en Canadá abrió mi mente a un mundo de posibilidades, entre ellas, revivió en mí la idea de seguir mis estudios de Doctorado. El intercambio académico y cultural vivido ha sido inigualable, al igual que el buen trato y el aprendizaje brindado en esta ya mi segunda Alma Máter.

Después de estos años me siento parte de la gran familia de Matemáticos Educativos y espero pronto poder ser orgullosamente llamada Maestra en Matemática Educativa y pasar a formar parte de este selecto grupo de personas que sin importar lo que pase en sus vidas, siempre están buscando el bienestar de la sociedad, comprometidos siempre con la educación de este hermoso país, México.

REFERENCIAS

- Anfossi, A. (1989). *Curso de trigonometría rectilínea*. México: Progreso.
- Artigue, M., Douady, R. Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Recuperado de: http://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf
- Baldor, A. (2008). *Geometría y Trigonometría*. México: Grupo Editorial Patria.
- Blanco, M. (2004). Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO. Universidad de Valladolid, España.
- Cantoral, R. y Montiel G. (2003). *Visualización y pensamiento matemático*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Churches R. y Terry R. (2009). *PNL para profesores. Cómo ser un profesor altamente eficaz.* Colección AMAE. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer.
- De Faria, E. (2006). *Ingeniería didáctica. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, (2).* Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%205.pdf
- Dugdale, S. (1989). *Building a qualitative perspective before formalizing procedures: Graphical representations as a foundation for trigonometric identities*. Universidad de Illinois. Recuperado de: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411132.pdf
- Duval R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, Vol. 5.
- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representacón*. LA GACETA DE LA RSME , Vol 9.1, p.143-168.

- Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* (Tesis doctoral). Valencia, España.
- Goldin, G. (1983). *Performance Difficulties Reported by First-Year Public School Science and Mathematics Teachers in Illinois.*
  Northern Illinois Univ. De Kalb.
- Goodman, A. y Hirsch, L. (1996*). Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Guzmán, A. (2006). *Geometría y Trigonometría.* México: Grupo Patria Cultural.
- Hitt, F. (1998). *Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function*. JMB, Journal of Mathematical Behavior. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.
- Hitt, F. (2003). *Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques ?* Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia.
- Leithold, L. (1989). *Matemáticas previas al cálculo: análisis funcional y geometría analítica*. México: Harla.
- Markel, W. (1982). *Trigonometry - Forgotten and abused? School Science and Mathematics.*
- Massa, M., Romero, F. y Casals, M. (2009). *La Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de la Trigonometría. El Teorema de Pitágoras.*
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* (Tesis doctoral). D.F, México.
- Niles, N. O. (2000). *Trigonometría Plana*. México: LIMUSA.
- Programa de la Materia de Geometría y Trigonometría del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes. Recuperado de: http://www.uaa.mx/centros/cem/
- Swokowski y Cole. (2005). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México. Thomson Learning.

- Torres, C. (2004). *Lo visual y lo deductivo en matemáticas*, Miscelánea Matemática Num. 40
- Van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Utrecht.
- Weber, K. (2005). *Students´Undestanding of Trigometric Function.* Mathematics Education Research Journal.
- Zill, D. y Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. México: Mc Graw Hill.

ANEXOS

Anexo 1. Diseño Final de las Actividades (presentado a los estudiantes).

Universidad Autónoma de Zacatecas

"Francisco García Salinas"

Unidad Académica de Matemáticas

Nombre del estudiante: ____

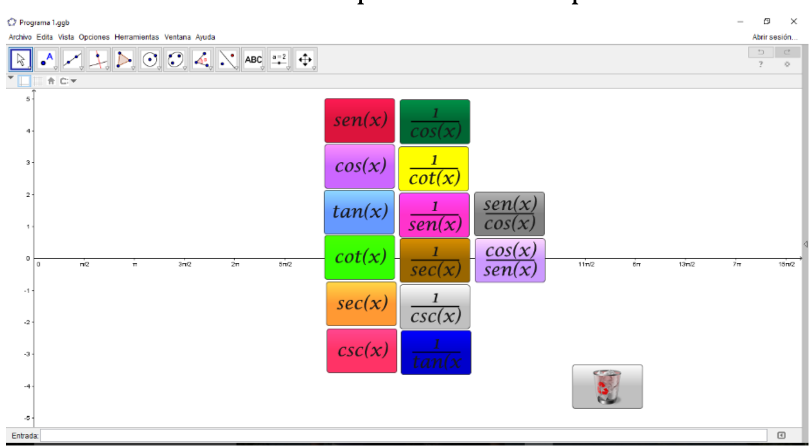
Género: Mujer/Hombre   Edad (años cumplidos): __________

Semestre: ___________ Grupo: __________ Turno: ___________   Fecha: ______________

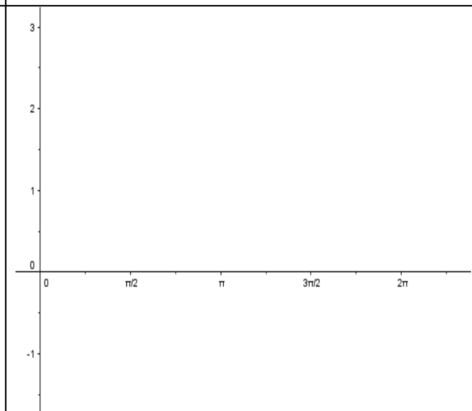
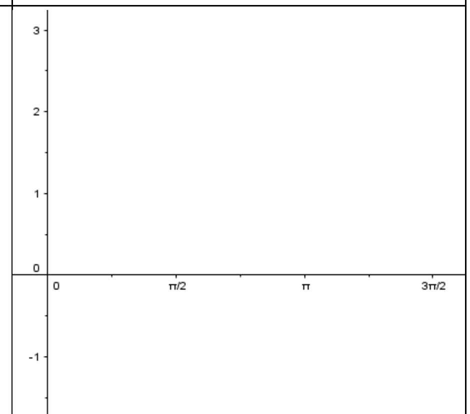
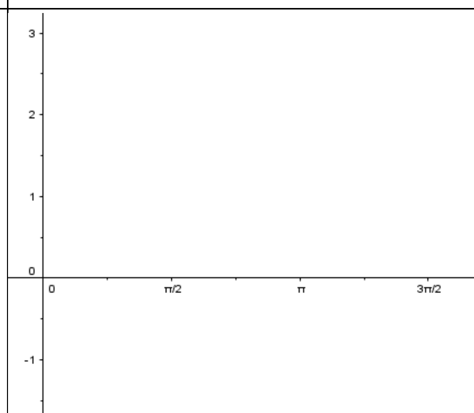
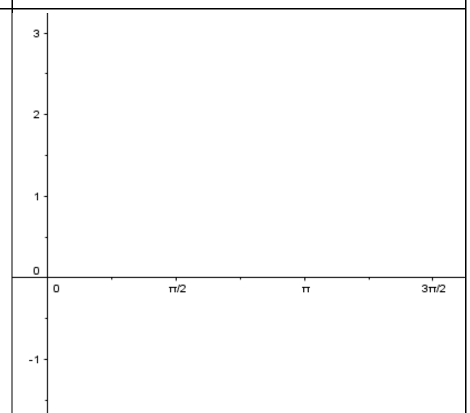
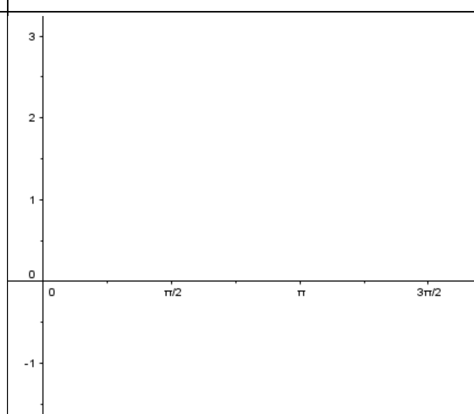
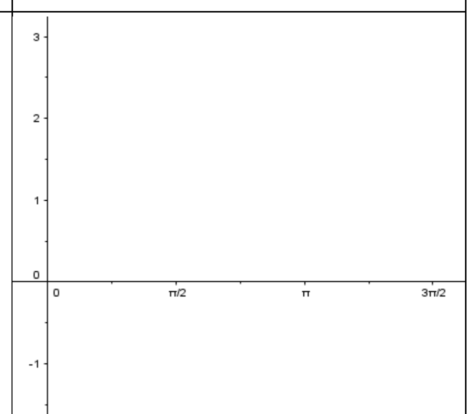
El presente diseño forma parte del Informe Académico de Desarrollo Profesional de la LMA Alejandra Adame Esparza, con el cual se pretende obtener el grado de Maestra en Matemática Educativa por parte de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Tu participación en el desarrollo de las actividades es muy importante por lo que se te pide por favor sigas las instrucciones al pie de letra y registres absolutamente todo lo que se te indique. Gracias por tu valiosa colaboración.

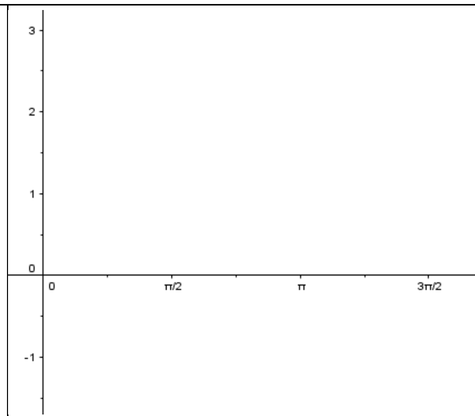
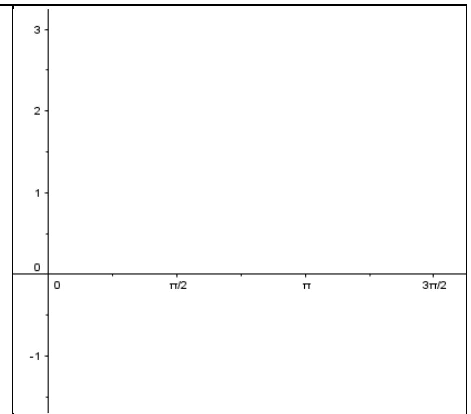
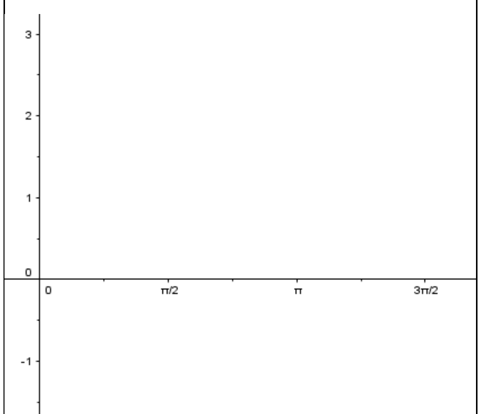
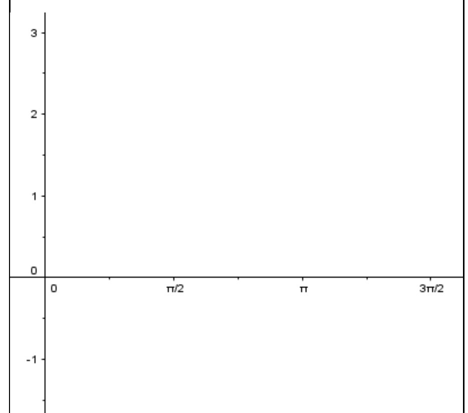
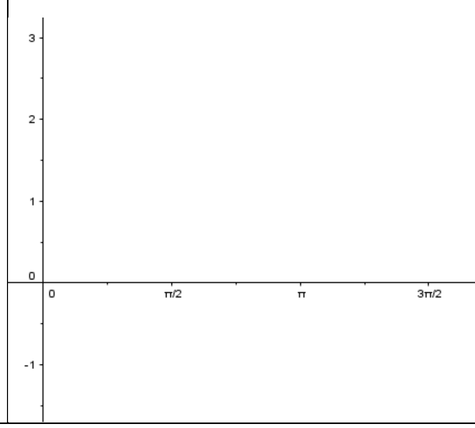
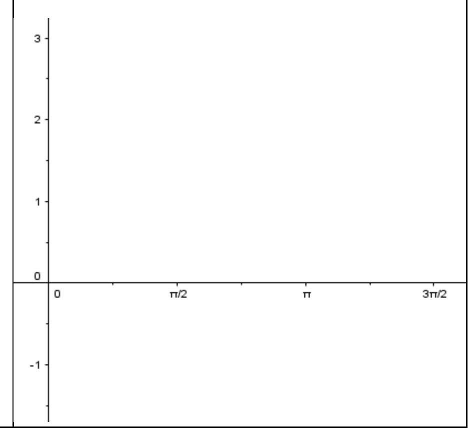
Actividad 1

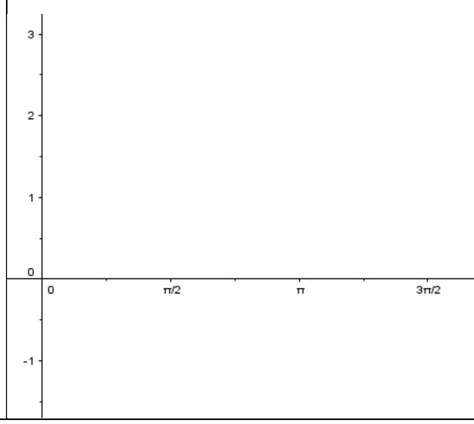
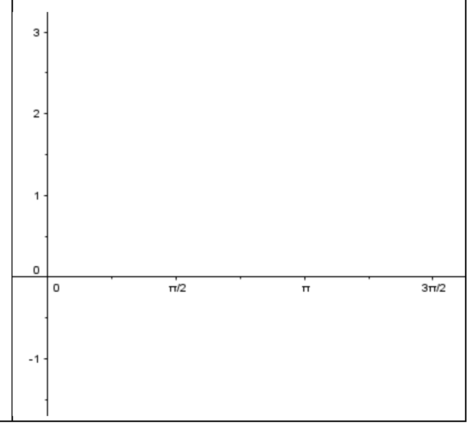
Abre el Programa 1 de GeoGebra. Se te presentará una pantalla como la siguiente:



En cada uno de los botones de colores está escrita una expresión trigonométrica. Si le das clic a cualquiera de ellos se te presentará la representación gráfica de dicha expresión. Haz clic sobre el botón que se te indica y sobre estas páginas reproduce las respectivas gráficas. No tienes que ser muy preciso, pero si intenta hacer un bosquejo lo más exacto que puedas.

Expresión	Gráfica	Expresión	Gráfica
$\frac{1}{\cot(x)}$		$\frac{\cos(x)}{sen\ (x)}$	
$\frac{1}{sen\ (x)}$		$\cos(x)$	
$sen\ (x)$		$\cot(x)$	

<table>
<tr>
<td>$\frac{1}{\cos(x)}$</td>
<td></td>
<td>$\tan(x)$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{1}{\csc(x)}$</td>
<td></td>
<td>$\csc(x)$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{sen(x)}{\cos(x)}$</td>
<td></td>
<td>$\frac{1}{\tan(x)}$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

$sec\ (x)$		$\frac{1}{\sec(x)}$	

Contesta detalladamente las siguientes preguntas:

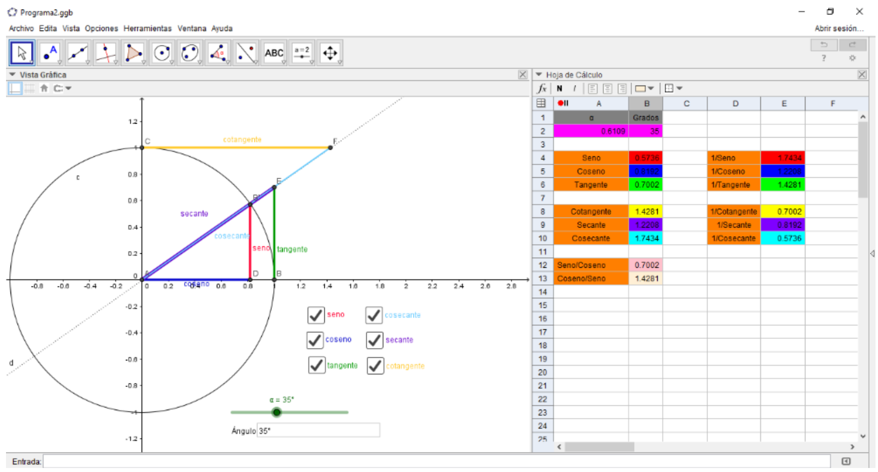
1. Observa con detenimiento las gráficas anteriores. ¿Existen gráficas que se parezcan entre sí? Por ejemplo, ¿en qué otra ocasión se traza la misma gráfica que se produce al hacer clic en el botón tan x?

2. ¿Qué otras gráfica encuentras parecidas?

3. ¿A qué crees que se deba lo anterior? Explica con tus propias palabras.

Actividad 2:

1. Abre el Programa 2; encontrarás un deslizador que te permitirá posicionarte en el ángulo (α) que desees. Activa todas las opciones que aparecen en la pantalla.



Cada una de las rectas marcadas dentro del círculo trigonométrico representa una razón trigonométrica. Por ejemplo la recta roja representa al seno del ángulo (α), que se puede apreciar a la derecha. (Celda B4).

2. A continuación mueve el deslizador. ¿Qué observas con las medidas que aparecen a tu derecha? (En la hoja de cálculo).Explica ampliamente.

____

____

____

3. Completa las siguientes tablas. Apóyate en la hoja de cálculo del Programa 2.

Radianes	Grados	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
	56°						
	120°						
	234°						

Grados								

	$\frac{1}{seno}$	$\frac{1}{coseno}$	$\frac{1}{tangente}$	$\frac{1}{cotangente}$	$\frac{1}{secante}$	$\frac{1}{cosecante}$	$\frac{seno}{coseno}$	$\frac{coseno}{seno}$
$56°$								
$120°$								
$234°$								

4. ¿Qué observas entre los valores de la primera y segunda tabla? Explica ampliamente.

____

____

____

____

____

5. ¿Qué observas con los valores en el ángulo que tú sugeriste?

____

____

6. ¿Cómo escribirías lo observado a manera de fórmula?

____

____

____

____

7. Describe ampliamente lo que aprendiste el día de hoy. Anota tus conclusiones.

____

____

____

____

____

Actividad 3

1. Abre el Programa 3. Posiciónate en el ángulo de 40°. Oprime el botón "Pitágoras". ¿Lo que se muestra en la pantalla tiene algo que ver con "Pitágoras"? Explica ampliamente.

   ____
   ____
   ____
   ____

2. En la vista gráfica, mueve el deslizador. ¿Qué cambios observas en las figuras? Describe ampliamente.

   ____
   ____
   ____
   ____

3. ¿Qué sucede con los valores en la hoja de cálculo? Describe ampliamente.

   ____
   ____
   ____
   ____

4. Completa los valores que se te piden en la siguiente tabla. Apóyate en la hoja de cálculo.

x	sen^2x	cos^2x	Suma
32°			
114°			
235°			
316°			

5. ¿Qué observas con los valores de la columna "Suma"?

   ____
   ____

6. ¿Sucederá lo mismo para otros ángulos? Escribe dos ejemplos más.

x	sen^2x	cos^2x	Suma

7. ¿Cuál sería la expresión matemática que represente los comportamientos observados?

   ____
   ____

Actividad 4

1. A continuación se te presenta la siguiente expresión trigonométrica:

$$(sen\ x)(\sec x) = \csc x + \sec x$$

De acuerdo con las actividades anteriores, ¿cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera? Explica tu respuesta.

____

____

____

2. Con ayuda del Programa 4 graficaremos ambos lados de la expresión. Para ello en la Vista gráfica 1 haz clic en el botón "sen(x) sec(x)". Después en la Vista gráfica 2 haz clic en el botón "csc(x)+sec(x)". Realiza a continuación un bosquejo de lo que observas:

Vista Gráfica 1	Vista Gráfica 2

3. ¿Cómo son las gráficas de las expresiones entre sí?

____

4. Con ayuda de la vista hoja de cálculo, llena la siguiente tabla:

Ángulo	Sen x	Sec x	Producto		Csc x	Sec x	Suma
32°							
114°							
230°							
279°							

5. Con los datos que te proporcionan las gráficas y la tabla, ¿qué puedes decir de la expresión del punto 1? ¿Es cierta o falsa? ¿Por qué? Justifica ampliamente tu respuesta.

____

____

____

6. ¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior sí se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir?

____

____

____

7. Abre el Programa 5. En él encontraras las gráficas anteriores en una sola vista. Con solo observar las gráficas podrías localizar si existe algún ángulo para el cual sea verdadera la expresión del punto 1? ¿Cómo le harías? Explica ampliamente.

____

____

____

8. Pulsa el botón "Pasito". ¿Qué indica el punto que aparece en la pantalla (punto A)?

____

____

____

9. En la vista hoja de cálculo introduce el valor del ángulo en grados que te aparece en la leyenda color rosa. ¿Qué sucede con los valores en dicha vista? Justifica ampliamente tu respuesta.

____

____

____

____

____

¿Sabías que…

Una **Identidad Trigonométrica** se define como una expresión o fórmula donde interviene funciones trigonométricas, que es válida para **todos** los ángulos o números reales para los cuales están definidos ambos lados de la igualdad?

10. De acuerdo a la definición anterior. ¿Qué concluirías de la expresión trabajada en este ejercicio? Justifica ampliamente tu respuesta.

Actividad 5

1. Ahora trabajaremos con la siguiente expresión trigonométrica:

$$\csc x - sen\, x = (\cot x)(\cos x)$$

¿Cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera?, es decir, ¿cómo podríamos saber si se trata de una **Identidad Trigonométrica** o no? Describe posibles sugerencias para solucionar esta interrogante.

____

____

____

2. Procedamos de manera similar a la actividad anterior. Con ayuda del Programa 6 graficaremos ambos lados de la expresión. Para ello en la Vista gráfica 1 haz clic en el botón "csc(x)- sen(x)". Después en la Vista gráfica 2 haz clic en el botón "cot(x) cos(x)". Realiza a continuación un bosquejo de lo que observas:

Vista Gráfica 1	Vista Gráfica 2

3. ¿Cómo son las gráficas de las expresiones entre sí?

____

4. Con ayuda de la vista hoja de cálculo, llena la siguiente tabla:

Ángulo	Csc x	Sen x	Resta		Cot x	Cos x	Producto
46°							
136°							
257°							
310°							

5. Con los datos que te proporcionan las gráficas y la tabla, ¿qué puedes decir de la expresión del paso 1? ¿Es cierta o falsa? ¿Por qué? Justifica ampliamente tu respuesta.

____

____

____

6. ¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior no se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir? Justifica tu respuesta.

____

____

____

7. Abre el Programa 7. En él encontraras las gráficas anteriores en una sola vista. Con solo observar las gráficas ¿podrías localizar si existe algún ángulo para el cual no se cumpla la expresión del paso 1? Explica ampliamente.

____

____

____

8. Por todo lo anterior, la expresión trabajada en este ejercicio ¿es una Identidad Trigonométrica? Justifica ampliamente tu respuesta.

____

____

____

9. Existirá alguna manera de probar que la expresión anterior es verdadera sin usar un software graficador como recurso. ¿Qué opinas al respecto?

____

____

____

____

Actividad 6

1. Abre el Programa 8. En la parte central se presenta la siguiente expresión:

$$\tan(x) + \cot(x) = \sec(x)\csc(x)$$

Lo que se pretende es mostrar que se trata de una Identidad Trigonométrica.

En la pantalla aparece de color naranja la gráfica del lado izquierdo de la expresión (es decir, sec(x) csc(x)). Vamos a ir cambiando el lado derecho de la expresión y veamos que sucede.

Presiona el botón “tan (x)”. En la vista gráfica dos se despliegan un menú con posibles expresiones que puedes sustituir por la expresión “tan(x)”. En la parte de arriba a la izquierda está el respectivo menú de opciones.

2. ¿Qué cambios notas en la pantalla si das clic en cada opción? Explica detalladamente todo lo que observas.

   Opción 1:____

   ____

   Opción 2:____

   ____

   Opción 3:____

   ____

   Opción 4:____

   ____

3. ¿Con cuál opción la gráfica se mantuvo igual que la original salvo el color?

____

____

____

4. ¿Por qué esa opción mantiene la gráfica original mientras las otras opciones cambian por completo la gráfica? Justifica ampliamente tu respuesta.

____

____

____

____

____

5. Ahora, deja seleccionada la opción que no cambia la forma de la gráfica. Da clic en el botón “cot(x)”. En la vista gráfica dos aparecerá un nuevo menú con posibles expresiones que puedes sustituir por la expresión “cot(x)”. En la parte de arriba a la derecha está el respectivo menú de opciones. Sin probar las opciones puedes decir ¿cuál de ellas no alterará la gráfica original? Justifica ampliamente tu respuesta.

____

____

6. ¿Qué cambios notas en la pantalla si das clic en cada opción? Explica detalladamente todo lo que observas.

Opción 1:____

____

Opción 2:____

____

Opción 3:____

____

Opción 4:____

____

7. ¿Con cuál opción la gráfica se mantuvo igual que la original salvo el color?

   ____

   ____

   ____

8. ¿Por qué esa opción mantiene la gráfica original mientras las otras opciones cambian por completo la gráfica? Justifica ampliamente tu respuesta.

   ____

   ____

9. Una vez que identificaste las opciones que no cambian la forma original de la gráfica, da clic en el primer "pasito" que aparece en la parte de abajo. ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera? (Si necesitas regresar un paso atrás da clic al bote de basura).

   ____

   ____

   ____

10. Cuando estés preparado da clic en el segundo "pasito". ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera? (Si necesitas regresar un paso atrás da clic en el primer "pasito").

    ____

    ____

    ____

11. Cuando estés preparado da clic en el tercer "pasito". ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera? (Si necesitas regresar un paso atrás da clic en el segundo "pasito").

    ____

    ____

    ____

12. Por último, cuando estés preparado da clic en el botón "Final Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera? (Si necesitas regresar un paso atrás da clic en el tercer "pasito").

    ____

    ____

    ____

13. Lo que acabas de hacer es tu primera comprobación de un Identidad Trigonométrica. Es decir, haz probado que la expresión inicial de esta actividad ($\tan(x) + \cot(x) = \sec(x)\csc(x)$), es verdadera. De todo lo anterior ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

    ____

    ____

    ____

    ____

    ____

    ____

    ____

    ____

¡Muchas Gracias! Tu colaboración ha sido muy valiosa.

ANEXO 2. Respuestas a la Actividad 1

Tabla 1. Respuestas a la pregunta 1.

Actividad 1				
Pregunta 1	El estudiante responde con la equivalencia $\frac{1}{\cot(x)}$ y $\frac{sen(x)}{\cos(x)}$	El estudiante responde con solo una de las equivalencia; $\frac{1}{\cot(x)}$ ó $\frac{sen(x)}{\cos(x)}$		El estudiante responde con cualquier otra equivalencia.
E_1	Sí, la de 1/cot(x) y sen(x)/cos(x)			
E_2	-Si existen gráficas parecidas. -Se produce la misma gráfica con sen(x)/cos(x) y 1/cot(x)			
E_3		• Sí, hay gráficas que se parecen entre sí. • 1/cot(x) tang x sen(x)/tan(x)		
E_4			Sen(x)/cos(x)	
E_5	Sí,1/cot x y sen x/cos x			
E_6	1/cot x, sen x/cos x			
E_7	Si sen x/cos x 1/cot x			
E_8			Sin x/cos x	
E_9	1/cot x sen x/cos x tan x			
E_10	Sí, sen x/cos x, 1/cot x			

E_11	Sí, tan x=1/cot(x) = sen x/cos x			
E_12			Sen x/cos x	
E_13	Sen(x)/cos(x) 1/cot(x)			
E_14	Si, 1/cot x, sen(x)/cos(x)			
E_15	Sen x/cos x, 1/cot x			
E_16	En sen(x)/cos(x) y 1/cot(x)			
E_17				-Si existen gráficas parecidas. -Un ejemplo sería en la gráfica sen(x) y 1/csc(x)
E_18	1/cot x sen x/cos x tan x			
E_19	Si, en sen x/cos x, 1/cot x			
E_20			Sin x/cos x	
E_21	Sí, sen x/cos x, 1/cot x			
E_22	Sen x/cos x 1/cot x			
E_23	Sen x/cos x y 1/cot x			
E_24	1/cot(x) sen(x)/cos(x)			
E_25	-Sí existen gráficas parecidas. -Se producen las mismas gráficas			

	con: sen(x)/cos(x) y 1/cot(x)			
E_26		1/cot(x) coseno(x)/seno(x)		
E_27				Si, por ejemplo: cos(x)/sen(x) = cot(x)
E_28			1/cos x , Sen x/cos x	
E_29	Sí, 1/cot x, sen x/cos x			
E_30		Sí, en 1/cot(x) también se muestra la misma que en tan(x)		
E_31	Sí tan x = sen x/cos x = 1/ cot x			
E_32	1/cot (x) sen x/cos x			
E_33			Sí existen parecidas, (sen x/cos x)	
E_34	Sí 1/cot x, sen x/cos x, tan x			
E_35	Sí, sen x/cos x 1/cot x			
E_36	Sí, se produce la misma gráfica sen(x)/cos(x) y 1/cot(x), tan(x)			
E_37	1/cot x, y sen x/cos x. Sí existen.			
E_38				Cos(x)/sen(x) con cot(x)

E_39	Sen(x)/cos(x) = 1/ cot(x)			
E_40	Tan x sen x/cos x 1/cot x			
E_41		Sí, tan(x) = 1/cot(x)		
E_42	Sí, 1/cot(x) y sen(x)/cos(x)			
E_43	Sí, 1/cot x y sen x/cos x			
E_44	Tan(x)=1/cot(x) = sen(x)/cos(x)			
E_45	Sí, en sen(x)/cos(x), 1/cot(x)			
E_46			En sen x/cos x	
E_47	Sí, 1/cot(x), y sen(x)/cos(x)			
E_48	Sí, la de 1/cot(x) y sen x/cos x			
E_49	Sí, en sen x/cos x y 1/cot x			
E_50	1/cot(x) sen(x)/cos(x)			
E_51		Sí, en 1/cot		

Tabla 2. Respuestas a la pregunta 2

Actividad 1			
Pregunta 2	El estudiante responde con todas las posibles equivalencias.	El estudiante responde con algunas posibles equivalencias (o le faltó al menos una).	El estudiante relaciona de manera incorrecta alguna equivalencia.

E_1	X		
E_2			X cos(x)/sen(x) - cot(x) - 1/cot(x)
E_3			X Cos x – 1/sen x
E_4	X		
E_5			X Sen x – 1/cos x Tan x – 1/cos x – sen x/cos x Cot – cos/sen x (omisión de x)
E_6		X	
E_7	X		
E_8		X (símbolo de diferente entre ellas)	
E_9	X (omisión de una x)		
E_10		X	
E_11		X	
E_12			1/tan y tan (omisión de las x's)
E_13			Sen – 1/cos (omisión de x´s)
E_14			Cot x – sen(x)/cos(x) - 1/tan(x) 1 cos(x) – sec(x)
E_15		X (omite x)	
E_16	X		
E_17		X	
E_18	X (omisión x)		
E_19	X (omisión x)		

E_20		X	
E_21			Sen x = 1/cos(x)
E_22	X		
E_23			1/sen x – csc x – 1/csc x
E_24		X	
E_25		X	
E_26		X	
E_27	X		
E_28			Cos x – 1/sen x
E_29	X		
E_30	X		
E_31	X		
E_32	X		
E_33	X		
E_34	X (omisión de x´s)		
E_35	X		
E_36	X (omisión x’s)		
E_37	X (omisión x)		
E_38	X		
E_39	X		
E_40		X	
E_41		X	
E_42		X	
E_43	X (omisión de x)		
E_44		X	
E_45			Tan(x) – sen(x)/cos(x) – cot(x)
E_46	X		
E_47	X		
E_48			Tan(x) – 1/cos/(x) – sen(x)/cos(x)
E_49		X	
E_50	X		
E_51	X		

Tabla 3. Respuestas a la pregunta 3

Pregunta 3	
E_1	Ya que al poner los distintos resultados las gráficas pueden ser lo mismo pero al revés. O algunas pueden ser recíprocas.
E_2	Debido a que las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí.
E_3	Las razones trigonométricas sen, cos y tan son similares/iguales a cot, sec y csc.
E_4	Algunas de estas gráficas están relacionadas.
E_5	No importa cuántas maneras existan, se llega a un mismo resultado pragmáticamente.
E_6	La relación entre sí de las funciones.
E_7	Si divides las funciones trigonométricas, (1/x), el resultado será recíproco a las funciones enteras.
E_8	Las funciones se relacionan de alguna forma.
E_9	Debido a que las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí.
E_10	Porque las razones son recíprocas y están relacionadas unas con las otras.
E_11	Yo creo que se debe a que son razones recíprocas, y por eso es que coinciden las formas en las gráficas.
E_12	Gracias a que algunas son recíprocas, pues manejan los mismos valores, pero invertidos.
E_13	Porque las funciones son recíprocas.
E_14	Las funciones son reciprocas pues están relacionadas, son diferentes fórmulas pero se llega al mismo resultado.
E_15	Por la forma en la que se dividen y que estas son reciprocas.
E_16	A que cada una de las funciones está relacionadas entre sí y podemos llegar a un mismo resultado siguiendo diferentes opciones.
E_17	Las razones trigonométricas tienen muchas relaciones, haciendo diferentes procedimientos pero obteniendo el mismo resultado.
E_18	Debido a que las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí.
E_19	Porque las funciones están relacionadas o sea recíprocas por lo tanto van a coincidir al momento de hacerlas.
E_20	La relación que tienen las funciones entre sí.

E_21	Que todas las razones están relacionadas entre sí mismas, son equivalentes y tienen un sentido parecido.
E_22	Las funciones son recíprocas.
E_23	Son gráficas recíprocas, están entrelazadas y pueden dar los mismos valores, por eso son iguales.
E_24	Pues yo creo que es porque al momento de dividir entre uno cambia sus propiedades y se parece al otro.
E_25	Debido a que las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí.
E_26	Creo que si se combinan ciertas funciones dan como resultado algo similar a otra función o debido a las razones recíprocas.
E_27	A que hay gráficas que son iguales debido a las expresiones que se hagan ya que una expresión como tal jamás va a ser igual a otra, p/i sen & cot, no se puede… …en cambio uno de ellos entre 1 son iguales, p/j: 1/cot = tan.
E_28	Hay diferentes maneras de llegar al mismo resultado.
E_29	Porque si comparas las 2 son lo mismo pero al revés, lo que nos enseñó en la U2. –sen csc- -cos sec- -tan cot-
E_30	A que si dividimos una razón trigonométrica sobre "1" o sobre otra obtendremos otra función o una gráfica similar a otra.
E_31	A que las funciones son recíprocas.
E_32	A que cuando el inverso de sen, cos y tan le colocas el número uno es igual a estos, esto también aplica al revés.
E_33	Porque las funciones están relacionadas entre sí, es decir, son recíprocas. Es lo que la maestra nos enseñó en una unidad pasada.
E_34	Debido a que las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí.
E_35	Que las funciones son recíprocas.
E_36	Debido a que las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí.
E_37	Que la relación den sen, cos, tan es recíproca con csc, sec y cot, son las mismas pero en apariencia distintas.
E_38	Razones recíprocas.
E_39	En la unidad 2 en el subtema de "Razones Recíprocas" vimos que las funciones:

	Sen(x) = 1/csc(x) Cos(x) = 1/sec(x) Sec(x) = 1/cos(x) Csc(x) = 1/sen(x) Todas estas razones al ser graficadas comprobamos la idea de la tabla del ejercicio 2 sobre gráficas parecidas empleando funciones diferentes pero llegamos al mismo resultado.
E_40	Que están relacionadas entre sí.
E_41	Existen diferentes formas de llegar al mismo resultado, se complementan ya que son recíprocas.
E_42	Las razones son recíprocas.
E_43	Debido a que las funciones trigonométricas se relacionan entre sí.
E_44	Están relacionadas, ya que como vimos en la unidad 2, todas las funciones son recíprocas y hay distintas maneras de llegar al resultado.
E_45	Las funciones se comportan así por el modo en que se estructuran las funciones para obtener un resultado igual con distintas funciones.
E_46	Que unas gráficas están relacionadas entre sí y todas tienen un resultado en común.
E_47	La relación entre sí que tienen las funciones, visto en la unidad 2.
E_48	Porque esa expresión (función) que nos muestra se puede expresar de otra manera (con otra función).
E_49	Yo pienso que es por la relación que tienen entre sí todas las funciones, como las recíprocas.
E_50	Pues se debe a que al sacar la división y los respectivos valores dan casi los mismos grados.
E_51	A que las razones son recíprocas.

Tabla de Condensado de respuestas de acuerdo a los tratamientos y tránsitos entre representaciones realizados

	Pregunta 1	**Pregunta 2**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Pregunta 3**	**Pregunta 4**	**Pregunta 4**
	CA->G	**TG+**	**CG->A**	**TG+**	**CG->A**	**CG->V**	**CA->V**
E_1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_2	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_3	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_4	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_5	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**

E_6	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_7	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_8	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_9	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_10	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_11	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_12	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_13	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_14	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_15	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_16	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_17	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_18	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_19	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_20	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_21	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_22	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_23	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_24	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_25	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_26	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_27	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_28	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_29	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_30	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_31	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_32	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_33	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_34	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_35	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_36	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_37	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_38	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_39	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_40	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_41	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_42	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_43	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_44	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_45	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_46	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**

E_47	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_48	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_49	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
E_50	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_51	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**

ANEXO 3. Respuestas a la Actividad 2

Tabla 1. Respuestas a la pregunta 4

Actividad 2				
Pregunta 4	El estudiante visualiza que sin importar el valor del ángulo se cumplen todas las igualdades entre los valores.*	El estudiante identifica relación de igualdad entre los valores de algunas expresiones sin importar el ángulo.	El estudiante identifica relación de igualdad entre los valores de algunas expresiones para algunos ángulos.	El estudiante identifica otro tipo de relaciones.
E_1				Si dividimos entre 1 una razón se repite el valor pero con el 1 que dividimos.
E_2	X			
E_3				En la primera tabla los valores van ascendentes, sin embargo, en la tabla dos van alternando: uno mayor, un menor que él, uno mayor del tercero y uno menor del cuarto. (Según sus ángulos).
E_4				Algunos de sus valores se relacionan, se parecen más en el

				<360°, aunque cada uno es diferente.
E_5				Los valores de cosecante se repiten en ambas tablas, pero pueden ser diferentes en cada razón pero chocan los mismos valores dependiendo el ángulo.
E_6				Los de la segunda tabla la mayoría son más amplias, lo cual nos indica cuales medidas de ángulos son más grandes, pero al realizar las últimas 2 funciones las cifras disminuyen. Además todos son distintos caminos para tratar de llegar al mismo resultado.
E_7	X			
E_8				En la segunda tabla dado que las razones trigonométricas se encuentran sobre 1 los resultados de la misma son más. (Ver pregunta 2 para comprender).
E_9				Que los valores son iguales, pero no es la

				misma función la que se aplica.
E_10				Que algunos valores aumentan y otros disminuyen, los valores de seno dan más de uno en 1/sen. Seno/coseno da un número mayor a 1 y cos/sen ronda entre el cero.
E_11				Hay ciertas similitudes en algunas funciones, ya que tal vez son correspondientes o recíprocas. En algunas si coinciden y en otras no.
E_12				Los resultados se repiten en ciertas funciones, se puede dar cuenta que los resultados son los mismos en aquellas funciones que son recíprocas como por ejemplo: 1/seno y cosecante o 1/coseno y secante.
E_13			Los valores que hay en la primera coinciden con otros en la segunda.	

			Seno con 1/cosecante .	
E_14		Son correspondientes, es decir, sen=1/csc, cot=1/tan, csc=1/sen, 1/tan=cos/sen, los valores obtenidos en algunas razones trigonométricas son iguales.		
E_15		Estos valores se repiten, también seno/coseno se repite con 1/cot.		
E_16				Los valores que hay en cada uno de los grados en ambas tablas, son los mismos, esto quiere decir que llegamos a los mismos resultados utilizando funciones diferentes, (razones trigonométricas).
E_17				Algunos de los datos en las dos tablas se relacionan de alguna manera, la cual lleva a tener el mismo resultado.
E_18				En la segunda tabla dado que las razones trigonométricas se encuentran sobre 1 los

				resultados de la misma son más altos que la primera tabla mayormente.
E_19				Tienen algunas similitudes en los datos ya que éstas se relacionan de alguna manera.
E_20				Son su recíproco.
E_21				Que los datos con números son los mismos en un grado determinado, tan solo que cambia de lugar el resultado (específicamente en relación con las razones trigonométricas).
E_22				Aumentaron, porque en la segunda ya estamos dividiendo por 1. Y otras salían igual.
E_23				Algunos valores se repiten ya que son recíprocas y tienen el mismo resultado.
E_24				Veo que con una simple división entre 1 completamente el resultado en la mayoría, y que hay igualdades como 1/cos

				=seno, 1/sec =cos, 1/cot =tan, 1/ tan = cot, y las cifras fueron variando y que 1/ tan=cos/sen y 1/cot =seno / coseno.
E_25	N/A			
E_26				En la segunda tabla dado que las razones trigonométricas se encuentran sobre uno los resultados de la misma son más altos que los de la primera tabla mayormente.
E_27				Algunos cambian a gran escala y otros solo van aumentando o disminuyen poco a poco según el ángulo.
E_28				Que los valores se voltean por ejemplo el valor de seno en la primera tabla pasa a ser el valor de la secante en la segunda tabla y así sucesivamente.
E_29		Sen =1/csc Cos =1/sec Tan=1/cot =sen/cos		
E_30				Tienen algunas similitudes en los datos ya que estas se

				relacionan de alguna manera.
E_31		Seno =1/csc Coseno=1/sec Tangente=1/cot Cotangente=1/tan Secante =1/cos Cosecante=1/sen Son recíprocas		
E_32				Que son los mismos valores en ambas tablas solo que con un diferente orden (investidos).
E_33				Que hay ciertas similitudes, y se pueden relacionar de alguna manera.
E_34		1/secante=coseno		
E_35		Coseno =1/secante		
E_36				La segunda tabla, dado que las razones trigonométricas se encuentran sobre uno los resultados de la misma son más altos que los de la primera tabla mayormente.
E_37				Que los valores de seno a cosecante en la segunda tabla se repiten igual que en la primera pero al revés y aunque sean diferentes todas se

				relacionan con el ángulo.
E_38	X recíprocos			
E_39				Que al realizar la división de 1 entre la función la cifra aumenta, sin embargo al realizar lo mismo con secante y cosecante en la división la cifra es más pequeña que la 1ra tabla, además la división entre sin/cos y cos/sen la cifra es igual a tangente y cot.
E_40				En la segunda tabla dado que las razones trigonométricas se encuentran sobre uno, los resultados de la misma son más altos que la primera tabla mayormente a comparación de la primera.
E_41		1/cosecante =seno 1/secante = coseno 1/cotangente=tangent e Son razones recíprocas.		Son los mismos valores, simplemente están volteados.
E_42				Depende de los ángulos es su valor

				junto con la razón trigonométrica correspondiente, son lo mismo solo que al contrario.
E_43				Los valores se repiten en los mismos grados, sólo que no conservan el mismo nombre, por ejemplo 1/sec es igual a coseno y así con todos los valores.
E_44				Son los mismos valores de cada grado, pero las fórmulas solo están combinadas.
E_45				Los valores de la segunda tabla aumentan según el uso de las funciones.
E_46				Los resultados cambian de orden y en algunos valores no cambian, en otros sí, esto se debe a las relaciones recíprocas.
E_47		Como vimos en la act1, gracias a las razones trigonométricas muchos valores son iguales por ejemplo Coseno=1/secante		

E_48		Que son los mismos valores pero en diferente orden Sen=1/cosecante Cos=1/secante Tan=1/cotangente		
E_49				Que existen relaciones entre los datos. Se puede apreciar fácilmente las relaciones recíprocas comparando resultados de ambas tablas. También existen estas relaciones seno/coseno=tangente Cos/sen=cotangente.
E_50				Son los mismos, nada más que invertidas, (en diferente orden).
E_51				Que son exactamente los mismos solo que van al contrario que en la primera tabla, lo único que varía es la adición de seno/coseno y coseno/seno en la segunda tabla.

Tabla 2. Respuestas a la pregunta 6.

Actividad 2			
Pregunta 6	El estudiante deduce todas las identidades trigonométricas básicas.	El estudiante deduce algunas de las identidades trigonométricas básicas.	El estudiante no deduce ninguna identidad trigonométrica básica o lo hace de manera errónea al menos para una de las deducidas.
E_1		Csc x=1/sen x	
E_2		Cosecante=1/seno, sec=1/coseno, cot=1/tan, tangente=1/cotangente, coseno=1/secante, seno=1/cosecante	
E_3			Cos=c.o/hip
E_4			La verdad no se me ocurre nada.
E_5			1/sen=sec, 1/cos=csc, 1/tan=cot, sen/cos=tan, cos/sen=cot
E_6			*Menor ángulo=pequeñas medidas. Mayor ángulo=grandes medidas.
E_7	X		
E_8			Sen x=1/csc x, cos x=1/sec x, tan x=1/cot x, cot

			x=1/tan x=cos x/sen x, csc x= 1/sec x , sec x=1/cos x
E_9			1/seno=cos, 1/cos=sec, 1/tan=cot, 1/cot=tan, 1/sec=cos, 1/csc=sen Cambian de lugar (Ver, une con flechas)
E_10		Sen=1/csc, cot=1/tan=cos/sen cos=1/sec	
E_11			Sen x=1/csc x, tan x=1/cot x, cos x=1/sen x, sec x=1/cos
E_12		Seno/coseno=1/cot (ver respuesta, es importante)	
E_13			Seno=1/cosecante, cos x=1/sec x, tan x=sen x/cos x, cot x=1/cot x, sec x= 1/sen x
E_14		Sen x=1/csc, cot x=1/tan x=cos x/sen x, csc=1/sen, 1/tan=cos/sen	
E_15	Sen = 1/csc, cos = 1/sec, tan = 1/cot = sen/cos, cot = 1/tan = cos/sen, sec =1/cos, cosecante=1/sen		
E_16	1/seno x=cosecante x, 1/cosecante x=coseno		

	x, 1/coseno x=secante x, 1/cosecante x=seno x, 1/tangente x=cotangente x, seno/coseno x=tangente x, 1/cotangente x=tangente x, coseno/seno x=cotangente x, cot=1/tan=cos/sen		
E_17	Cosecante = 1/seno, secante = 1/coseno, cotangente = 1/tangente, tangente = 1/cotangente, coseno = 1/secante, seno = 1/cosecante, tangente = seno/coseno, cotangente =coseno/seno		
E_18		Sen x=1/csc x Cos x=1/sec x Tan x=1/cot x Cot x=1/tan x	Csc 314°=1/sen 314°
E_19		Cos x=1/sec x Sec x=1/cos x	1/sen 56° =cosecante 56° 1/cos 56°=secante 56° 1/sec 120°=cos 120°
E_20		Sen x = 1/csc x, csc = 1/sen x, Cos x = 1/sec x,	

		sec = 1/cos x, tan x = 1/cot x, cot x = 1/tan x	
E_21		1/seno x= x cosecante 1/coseno x = x secante 1/tangente x=x cotangente 1/secante x=x coseno 1/cosecante x=x seno Seno/coseno x=x tangente Coseno/seno x= x cotangente	
E_22		Sen x= 1/csc x Cos x= 1/sec x Entre otras	
E_23			Csc 314°=1/sen 314°
E_24			1/sen =cos 1/cos =sec 1/sec = cos
E_25	N/A		
E_26		Sen x=1/cosecante x Tan x=1/cot x Cos x= 1/ sec x Cot x=1/ tan x Sec = 1/ cos	
E_27		Sen =1/csc Cos =1/sec Tan= sen/cos Cot =1/tan Sec=1/cos Csc =1/sen	
E_28			1/sen =sec 1/cos =csc 1/tan =cot Sen/cos=tan

			Cos/sen=cot
E_29	Sen x=1/csc x Cos x=1/sec x Tan x= 1/ cot x= sen/cos Cot x= 1/tan x= cos/sen Sec x=1/cos x Csc x=1/sen		Si los grados van de 1-180 el 1 va a ser un número pequeño y cuando se va acercando aumenta el número, si va de 180-360 los grados van de mayor a menor número.
E_30		1/sen56° = cosecante 56° 1/cos 56° =secante 56° 1/sec 120° = cos 120°	
E_31	X		
E_32		Cos=1/secante Sen=1/cosecante Tan=1/cotangente Cot=1/tangente Sec=1/coseno Csc=1/sen	
E_33			Cos x=1/sec x 1/cos x=sen x Sen x=1/cos x
E_34		Sen =1/csc Cos =1/sec Tan= sen/cos Cot =1/tan Sec=1/cos Csc =1/sen (flechas)	
E_35			c.o/hip c.o/c.a
E_36		Sen =1/csc Cos =1/sec Tan= sen/cos	

		Cot =1/tan Sec=1/cos Csc =1/sen	
E_37		Sen x =1/csc x Cos x =1/sec x Tan x=1/cot x = sen x/cos x Cot x =1/tan x Sec x=1/cos x Csc x =1/sen x	
E_38	X		
E_39	X		
E_40		Sen x =1/csc x Cos x =1/sec x Tan x=1/cot x Cot x =1/tan x Csc 314°=1/sen 314° Csc x= 1/sen x	
E_41	X		
E_42			1/sen 120° = 1/sen 300° **
E_43	X		
E_44			Csc 314° = 1/sen 314°
E_45			Sen del ángulo es diferente a 1/seno del ángulo
E_46		Sen --1/csc Cos --1/sec Tan -- 1/cot Cot -- 1/tan Sec -- 1/cos Csc -- 1/sen	
E_47		1/tan(x) =cot(x) 1/tan(x)=cos(x)/sen(x)	

		1/cot(x)=sen(x)/cos(x) Csc(x)=1/sen(x) Sec(x)=1/cos(x)	
E_48	X		
E_49	X		
E_50		Sen x =1/csc x Cos x =1/sec x Tan x=1/cot x Cot x =1/tan x Sec x=1/cos x Csc x=1/sen x	
E_51			Seno=c.o/h Coseno=c.a/h Tan=1/cot

Tabla 3. Respuestas a la pregunta 7

Actividad 2	
Pregunta 7	Percepción del aprendizaje por parte de los estudiantes.
E_1	Hoy aprendí que con los diferentes ángulos que nos puso, se pueden volver a hacer algunos datos de los que ya estaban. Como en 1/tangente y coseno/seno.
E_2	Yo aprendí que las funciones trigonométricas están relacionadas con las expresiones trigonométricas, ya que son los mismos valores en el momento de expresarlos en 2 tablas comparativas.
E_3	En el día, comprendí que algunas de las funciones pueden ser similares dependiendo de los ángulos.
E_4	Aprendí que en las razones trigonométricas algunos resultados se parecen entre sí.
E_5	Si tenemos cierto ángulo podemos tener diversos valores en cada razón trigonométrica y en ocasiones los valores pueden ser iguales.

E_6	*El día de hoy aprendí y apliqué las diferentes funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico, también aprendí que a mayor ángulo grandes medidas y a menor ángulo pequeñas medidas.
E_7	Si divides las funciones trigonométricas, (1/x), el resultado será recíproco a las funciones enteras.
E_8	Aprendí la forma de sacar las razones de seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante de cualquier ángulo, las similitudes entre una función y el resultado de dividir otra entre uno.
E_9	Que las funciones y los valores se relacionan dependiendo de cómo estén ubicados en la fórmula de la pregunta anterior.
E_10	Aprendí que las razones de distintos ángulos pueden ser iguales a pesar de que la medida sea distinta, las razones pueden variar mucho al dividirse o no, y muchas funciones pueden ser recíprocas.
E_11	Lo que aprendí es que hay algunas funciones que son recíprocas y sus valores coinciden.
E_12	Que algún ángulo puede compartir los mismos cocientes de una razón trigonométrica o con algunas variaciones, o que los cocientes son los mismos cuando una función es recíproca a otra.
E_13	Aprendí que las funciones trigonométricas son recíprocas y coinciden en algunos casos, también producen las mismas gráficas.
E_14	Las razones trigonométricas son recíprocas, al igual que sus funciones, los datos obtenidos son iguales en algunos casos.
E_15	Que se puede obtener el valor de alguna de las razones trigonométricas si se tiene otras razones.
E_16	No importa el ángulo que se utilice (con excepción de 0°, 90°, 270°, 360°, etc.), las funciones trigonométricas dan el mismo resultado que al realizar una inversa.
E_17	Pues se puede notar en la página, sin importar el ángulo, en cualquiera te darán expresiones trigonométricas.
E_18	Aprendí las formas de sacar las razones trigonométricas de cualquier ángulo, las similitudes entre una función y el resultado dividirlas.
E_19	Aprendí las razones trigonométricas se relacionan con otras como 1/sec con cosecante y así hay varios casos, esto quiere decir que puedes lograr formular un procedimiento que sirva para todos los datos que anotamos.
E_20	Las funciones trigonométricas tienen muchas relaciones entre sí.

E_21	Pues todo fue sencillo de digerir ya que me percaté de que según el cuadrante el ángulo expresará fenómenos que se verán al sacar sus razones trigonométricas (los datos son iguales), realmente ya entendí como sucede esto, así lo comprendo más.
E_22	Aprendí que, de un simple ángulo de la medida que ya deseé puedo sacar las diferentes funciones. Si ya la cambio, todo cambia, puede aumentar o disminuir.
E_23	Aprendí a plantear las fórmulas de igualdad de expresiones trigonométricas de manera didacta (didactil).
E_24	Aprendí acerca de las expresiones trigonométricas y de las igualdades que existen y que una simple división entre uno puede variar de gran manera un resultado.
E_25	N/A
E_26	Yo aprendí que las razones trigonométricas no son, o no tienen una secuencia en relación a los ángulos y que el simple hecho de que una razón se encuentre sobre uno modifica totalmente todo el resultado y pudimos ver las razones en comparación a sus razones recíprocas.
E_27	Lo que vi hoy fue en relación a los ángulos y sus razones trigonométricas, que según el ángulo todo lo demás se iba modificando.
E_28	Que al dividir por uno cambian los resultados del seno, coseno y tangente.
E_29	Entre más se acercan los grados a 180 mayores son sus propiedades, si se aleja, esas propiedades se disminuyen, la mayoría de las fórmulas se enlazan.
E_30	Aprendí que las razones trigonométricas se relacionan con otras como 1/seno con cosecante y así hay varios casos.
E_31	Cuando mueves el deslizador, los valores de las razones cambian. Las razones son recíprocas.
E_32	De que determinada función (cos, sen, tan, cot, sec, csc) es igual a 1 sobre su inversa.
E_33	Que todas las opciones y fórmulas están relacionadas entre sí, aparte las razones trigonométricas están unidas, una con una.
E_34	Como es que las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí, y que si divides una entre otra o entre 1, te da el valor de otra.
E_35	Pues con la actividad de las tablas me di cuenta que tenemos datos iguales o sea que puedes encontrar los números que son iguales.

E_36	Yo aprendí las formas de sacar las razones de seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante de cualquier ángulo, las similitudes entre una función y el resultado de dividirlas.
E_37	Bueno pues yo aprendí que si a la función base (sen, cos, tan, cot, sec, csc) le ponemos un 1 arriba los datos obtenidos de la forma base se repiten pero al revés, ya sea el ángulo que sea.
E_38	Las razones recíprocas nos sirven para obtener el mismo resultado pero con procedimiento diferente. En la circunferencia al mover los segmentos del triángulo cambian los valores de las razones trigonométricas.
E_39	Que a manera que un ángulo crece, sus medidas lo hacen proporcionalmente, igual si el ángulo se minimiza y todo tiene relación con las razones recíprocas.
E_40	Aprendí las formas de sacar las razones de seno, coseno, tangente, etc., de diferentes ángulos y me fije en las similitudes de ambas.
E_41	Si 1/csc es igual a seno, 1/sec es igual a coseno y 1/cotangente es igual a tangente significa que son razones recíprocas.
E_42	La relación que puede haber entre razones, grados, etc.
E_43	Las funciones se relacionan todas entre sí, es un fenómeno hermoso, extraño e increíble, es muy interesante ver cómo se relacionan todos los ángulos.
E_44	Hoy aprendí que las funciones trigonométricas sirven para poder resolver problemas acerca de área y perímetro, que a pesar de ser difíciles, no lo son cuando ya los entiendes.
E_45	Las funciones trigonométricas cambian según los valores de los ángulos propuestos y lo que se quiera dividir o multiplicar con ellas.
E_46	Que las razones trigonométricas pueden variar y ser recíprocas con otros solo si los ángulos coinciden, también varía si se multiplican o se dividen.
E_47	Las razones trigonométricas siempre están relacionadas, no importa el ángulo en el que se trabaje.
E_48	Que a partir de las funciones trigonométricas básicas (sen, cos, tan), puedes sacar más expresiones y que te den el mismo resultado, (es como expresar algo pero de diferentes maneras).
E_49	Aprendí que, como lo hemos visto en clases pasadas, existen relaciones sin importar el ángulo.

E_50	Pues aprendí que siempre seno va a ser igual a 1 dividido entre su valor contrario, al igual que coseno y tangente.
E_51	Que con lo visto en la actividad me di cuenta que hay una posibilidad de que sacando las funciones de <1 pueden ser las mismas que algún otro sin que sea el mismo.

Tabla de condensado de la Actividad 2 respecto a los tránsitos y tratamientos realizados

	Pregunta 1	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Pregunta 3**
	TT+	**CT->A**	**CT->A**	**CT->V**	**CA->V**
E_1	0	0	1	1	0
E_2	1	0	2	1	0
E_3	0	0	0	1	0
E_4	0	0	0	1	0
E_5	1	0	1	1	0
E_6	0	0	1	0	0
E_7	1	1	3	0	1
E_8	1	0	3	1	0
E_9	1	0	2	1	1
E_10	1	0	2	1	0
E_11	1	0	1	0	1
E_12	1	1	3	1	1
E_13	1	1	1	0	1
E_14	1	1	2	1	1
E_15	1	1	3	1	1
E_16	1	0	3	1	1
E_17	1	0	3	0	0
E_18	1	0	2	0	0
E_19	1	0	1	0	0
E_20	0	0	2	0	0
E_21	1	0	2	1	0
E_22	1	0	1	0	0
E_23	1	0	1	0	1
E_24	1	1	1	1	1
E_25	0	0	0	0	0
E_26	1	0	2	1	1
E_27	1	0	2	1	0
E_28	1	0	1	0	0
E_29	1	1	3	0	0
E_30	1	0	1	0	1
E_31	1	1	3	1	1

E_32	**1**	**0**	**2**	**0**	**1**
E_33	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_34	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**
E_35	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
E_36	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**
E_37	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**
E_38	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**
E_39	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**
E_40	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**
E_41	**1**	**1**	**3**	**0**	**1**
E_42	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_43	**1**	**1**	**3**	**0**	**1**
E_44	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_45	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
E_46	**1**	**0**	**2**	**0**	**1**
E_47	**1**	**1**	**2**	**0**	**1**
E_48	**1**	**1**	**3**	**0**	**1**
E_49	**1**	**1**	**3**	**0**	**1**
E_50	**1**	**0**	**2**	**0**	**1**
E_51	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

ANEXO 4. Respuestas de la Actividad 3.

Tabla 1. Respuestas a la pregunta 1

Actividad 3		
Pregunta 1	**Si encuentra relación (Describe el Teorema de Pitágoras)**	**Encuentra alguna otra relación (cuál)**
E_1	Si porque a la figura le falta un lado y si hacemos Pitágoras y esto que se muestra, sería igual.	
E_2	Si porque en el ángulo que se forma está delineado un triángulo en el cual se puede deducir la fórmula $a^2 = b^2 - c^2$	
E_3		Sí, es un triángulo rectángulo.
E_4	Sí, porque se muestran los cuadrados que explican el teorema de Pitágoras.	
E_5		Sí, porque son cuadrados que nos muestran la mayoría de sus datos.
E_6	La $Hip^2 = CO^2 + CA^2$, es decir, la hipotenusa es igual a la suma de los catetos.	
E_7	Sí, se puede ver que en el círculo hay un triángulo rectángulo, en el cual la suma de sus 2 catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa. (Se tiene que sacar raíz).	
E_8	Sí, porque la suma del cuadrado de los catetos es igual a la hipotenusa.	
E_9		Sí, porque es un triángulo rectángulo: tiene CA, CO, Hip, y está representado con cuadros para cada medida de sus lados.
E_10	Sí, muestra los catetos al cuadrado y la hipotenusa al cuadrado, tal como dice el teorema de Pitágoras.	
E_11	Sí, ya que se forma un triángulo rectángulo, que tiene una hipotenusa y 2 catetos. Y un triángulo es más grande que los otros y el área cabe de los dos triángulos en el más grande. $c^2 + c^2 = h^2$	
E_12	Sí, si sumamos $sen^2 + \ cos^2$, nos dará como resultado 1, o en este caso $CO^2 + \ CA^2$ será H^2, a esa H hay que sacarle la raíz cuadrada.	
E_13	*Sí tiene, es el teorema de Pitágoras.	
E_14	Sí, ya que se forman los cuadrados en cada lado, ya que para la fórmula de Pitágoras se elevan al cuadrado las medidas de los lados. $c^2 = a^2 + b^2$	
E_15	Sí, se forma un triángulo rectángulo al cual se le puede aplicar el teorema de Pitágoras.	

E_16	Sí, porque es la estructura que se necesita para Pitágoras, cada uno de los lados (hipotenusa y catetos) se necesitan al cuadrado como se muestra.	
E_17	Sí, se muestra el área al cuadrado de los 2 catetos y la hipotenusa, que es lo que resolvemos al utilizar Pitágoras.	
E_18	Sí, porque la suma del cuadrado de los catetos es igual a la hipotenusa.	
E_19		Sí porque aparece dos fórmulas que se multiplica al cuadrado y una distinta que da 1.
E_20	La $hip^2 = CO^2 + CA^2$ es decir la hipotenusa es la raíz de la suma de los cuadrados de los catetos.	
E_21	Sí ya que es totalmente Pitágoras, cada lado del triángulo está expresado al cuadrado con un cuadrado literalmente.	
E_22	Sí, podemos ver gráficamente la fórmula de Pitágoras.	
E_23	Sí, ya se muestra gráficamente la fórmula de Pitágoras, sus 2 catetos elevados al cuadrado y su hipotenusa al cuadrado.	
E_24		Sí porque en el cuadrado de la hipotenusa caben los dos cuadrados de los catetos.
E_25	N/A	
E_26	Sí porque la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.	
E_27	Sí, lo que se observa en la pantalla es un triángulo rectángulo y en sus lados tiene unos cuadrados y eso complementa la fórmula $H^2 = a^2 + b^2$	
E_28	Sí, si sumaras $sen^2 a + cos^2\, a = 1$	
E_29	Es un triángulo rectángulo y al sumar sus 2 catetos elevados al cuadrado es la hipotenusa elevada al cuadrado. $S^2 = P^2 + N^2$	
E_30	Sí, porque se muestra el teorema de Pitágoras gráficamente.	
E_31	N/A	
E_32	Si a que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de ambos catetos al cuadrado.	

E_33	Sí, te justifica el porqué de la fórmula de Pitágoras.	
E_34	Sí, está diciendo que el $(sen^2 a)$ + $(cos^2 a)$ te dará el valor de uno, o como postula Pitágoras que $c^2 = a^2 + b^2$	
E_35		Sí porque es un triángulo rectángulo.
E_36	Sí, porque la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado.	
E_37	Sí por el teorema de Pitágoras que dice que $a^2 = b^2 + c^2$	
E_38	Sí, en el triángulo rectángulo aparecen unos cuadrados en cada lado, Pitágoras dedujo que al sumar los 2 cuadrados más pequeños le daba el grande y los llamo catetos y al lado grande Hipotenusa.	
E_39	Sí, debido a que es un triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a la suma de los 2 catetos al cuadrado.	
E_40	Sí, porque la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa.	
E_41	Se puede ver el triángulo rectángulo en el cual la suma de los 2 catetos al cuadrado es la hipotenusa, si se saca raíz.	
E_42		Sí porque muestra medidas de lados y es un triángulo rectángulo solo que con algo extra que son cuadros formados con los lados.
E_43	Sí, muestra la relación “la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”, además de que te da funciones trigonométricas.	
E_44	Sí ya que es totalmente Pitágoras, cada lado del triángulo está expresado al cuadrado con, literalmente, un cuadrado.	
E_45	Sí, se forma un triángulo rectángulo, el cual se puede resolver con Teorema de Pitágoras.	
E_46	Sí ya que los cuadros que se muestran son por el teorema de Pitágoras.	
E_47	Sí, se muestra su teoría, aparecen los cuadrados que dan respuesta a su fórmula $c^2 + c^2 = h^2$	
E_48	Sí, porque explica de dónde sale la fórmula (teorema de Pitágoras) que se usa en triángulos rectángulo.	

E_49	Sí, se forma un triángulo rectángulo, por lo tanto cumple con el teorema de Pitágoras.	
E_50	Sí, en que aparece un triángulo rectángulo y los cuadrados de cada uno de sus lados y eso interpreta que $h^2 = C.O^2 + C.A^2$	
E_51		Sí, con la fórmula ya que al tener 2 se refiere al área y al no tenerlo al perímetro.

Tabla 2. Respuestas a la pregunta 2

Actividad 3		
Pregunta 2	Observa que los catetos si cambian pero la hipotenusa no y explica por qué (quitar esto del a priori)*.	Observa otros cambios (cuáles)
E_1	X	
E_2	X	
E_3	X	
E_4	X	
E_5		La hipotenusa se hace grande y luego pequeña.
E_6	X	
E_7	X	
E_8	X	
E_9	X	
E_10	X	
E_11		Las figuras aumentan o disminuyen.
E_12	X	
E_13	X	
E_14		Aumentan o disminuyen las medidas d los lados.
E_15	X	
E_16	X	
E_17		Cambia el tamaño de los cuadrados, que son los que representan los catetos e hipotenusa.

E_18		Si aumentan los grados el cateto opuesto de beta aumenta, y si lo disminuyes se hace más pequeño. El adyacente disminuye (si aumenta).
E_19		Se va agrandando o disminuyendo el tamaño pero la figura sigue siendo la misma.
E_20	X	
E_21		Conforme aumenta o disminuye la medida de una línea, también aumentan o disminuyen los cuadrados de cada lado.
E_22		Mientras se mueve el deslizador el seno, coseno e hipotenusa van cambiando, pero ninguna pasa del 1er plano.
E_23	X	
E_24	X	
E_25		
E_26	X	
E_27	…la hipotenusa no cambia debido a que es el radio del círculo.	
E_28		Mientras más se acerca a 90° seno aumenta y mientras que más se acerca a 0° coseno aumenta y tangente** se queda igual.
E_29	X	
E_30	X	
E_31		
E_32	X	
E_33		Se hace más grande o más chica, todo depende de los grados que pongamos.
E_34	X	
E_35	La hipotenusa nada más se inclina.	
E_36	X	

E_37	X	
E_38		Se modifica el tamaño de los cuadrados.
E_39	X	
E_40		Si aumentan los grados el cateto opuesto de beta aumenta y si lo disminuyes se hace más pequeño.
E_41	X	
E_42	X	
E_43	X (en la pregunta 3)	Aumentan y disminuyen a la vez los cuadrados siempre depende hacia donde lo muevas.
E_44		Los lados van cambiando conforme el deslizador.
E_45		Las figuras cambian de lugar según los grados o la abertura del triángulo, coseno se hace más pequeño o desaparece.
E_46	X	
E_47		Los cuadrados cambian conforme a las medidas del triángulo.
E_48		Que conforme cambian las medidas de los lados del triángulo, los cuadrados se achican o se agrandan (puede llegar a medir 0 un lado).
E_49	X	
E_50	X	
E_51	X	

Tabla 3. Respuestas a la pregunta 7

Actividad 3			
Pregunta 7	Deduce una expresión matemática adecuada de lo observado.	Deduce una expresión matemática que se acerca a lo esperado (cuál).	Deduce una expresión alejada a lo esperado.
E_1		$x = sen^2x + \ cos^2x = x$	

E_2		$suma = sen^2x + cos^2x$	
E_3		$(x)(sen^2x) + (x)(cos^2x) = 1$	
E_4	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_5			$x = \frac{sen^2x}{cos^2x} = 1$
E_6		$sen\ x^2 + cosx^2 = 1$	
E_7	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_8	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_9	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_10		$sen^2 + cos^2 = 1$	
E_11		$sen^2 + cos^2 = 1$ $x^2 + x^2 = 1$	
E_12	$sen^2a + cos^2a = 1$		
E_13	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_14	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_15	$sen^2x + cos^2x$ $= (Hipotenusa)^2$		
E_16	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_17	$sen^2x = 1$ $cos^2x = 1$		
E_18	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_19		$sen^2 + cos^2 = 1$	
E_20	$sen^2 + cos^2 = 1$		
E_21	$(sen^2x) + (cos^2x) = 1$		
E_22	$sen^2 + cos^2 = 1$		
E_23	$sen^2 + cos^2 = 1$		
E_24		$sen^2 + cos^2 = 1$	
E_25	N/A		
E_26	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_27		$sen^2x + cos^2x = H(suma)$ $a + b = H$	
E_28	$sen^2a + cos^2a = 1$		

E_29	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_30	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_31	N/A		
E_32	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_33	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_34	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_35	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_36	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_37	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_38	$c^2 = a^2 + b^2$ $sen^2x + cos^2x = 1$		
E_39			$(sen^2x)(cos^2x) = 1$
E_40	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_41	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_42	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_43	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_44	$(sen^2x) + (cos^2x) = 1$		
E_45	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_46	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_47	$(sen^2x) + (cos^2x) = 1$		
E_48	$sen^2x + cos^2x = 1$		
E_49	$(sen^2x) + (cos^2x) = 1$		
E_50	$(sen^2x) + (cos^2x) = 1$		
E_51			$sen = \left(\frac{1}{csc}\right)^2$ o $cos = \left(\frac{1}{sec}\right)^2$

Tabla de concentrado de respuestas respecto a los tránsitos entre registros

	Pregunta 1	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**
	CF->CA	**CF->CV**	**CT->CA**
E_1	**0**	**1**	**0**
E_2	**1**	**1**	**0**
E_3	**0**	**1**	**0**
E_4	**0**	**1**	**1**

E_5	0	0	0
E_6	1	1	0
E_7	1	1	1
E_8	0	1	1
E_9	0	1	1
E_10	1	1	0
E_11	1	0	0
E_12	1	1	1
E_13	0	1	1
E_14	1	0	1
E_15	0	1	0
E_16	1	1	1
E_17	0	0	0
E_18	0	0	1
E_19	0	0	0
E_20	1	1	0
E_21	0	0	1
E_22	0	0	1
E_23	1	1	1
E_24	0	1	0
E_25	0	0	0
E_26	1	1	1
E_27	1	1	0
E_28	1	0	1
E_29	1	1	1
E_30	0	0	1
E_31	0	0	0
E_32	1	1	1
E_33	0	0	1
E_34	1	1	0
E_35	0	1	1
E_36	1	1	1
E_37	1	1	1
E_38	1	0	1
E_39	0	1	0
E_40	0	0	1
E_41	1	1	1
E_42	0	1	1
E_43	1	0	1
E_44	0	0	1
E_45	0	0	1

E_46	**0**	**1**	**1**
E_47	**1**	**0**	**1**
E_48	**0**	**0**	**1**
E_49	**0**	**1**	**1**
E_50	**1**	**1**	**1**
E_51	**0**	**1**	**0**

ANEXO 5. Tabla de condensado de la Actividad 4

	Pregunta 1	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 2		Pregunta 3	Pregunta 3		Pregunta 3	Pregunta 3 3
	CA->CG	CA->CT	CG->CV	CT->CV	NO	CT->CV	CG->CV	SI	CT->CV	CG->CV
E_1	1	0	1	1		1	1		0	0
E_2	0	1	0	1		1	0		0	0
E_3	0	1	0	0		0	0		1	0
E_4	0	0	1	1		0	0		1	0
E_5	0	1	0	1		0	0		1	0
E_6	1	1	0	1		0	0		1	0
E_7	1	0	1	1		0	0		0	0
E_8	0	1	0	1		0	0		0	0
E_9	0	1	1	0		0	1		0	0
E_10	0	0	0	1		0	1		0	0
E_11	0	1	1	1		1	1		0	0
E_12	0	1	1	1		0	0		1	0
E_13	1	1	0	1		0	0		0	0
E_14	0	1	0	1		1	0		0	0
E_15	1	0	1	0		0	0		0	1
E_16	0	1	0	1		0	0		0	0
E_17	1	0	1	0		0	0		0	0
E_18	0	1	0	1		0	0		0	0
E_19	1	1	1	0		0	1		0	0
E_20	0	0	0	1		0	0		0	0
E_21	0	1	0	1		0	0		1	0
E_22	1	0	1	0		0	0		0	0
E_23	1	0	1	1		0	0		0	0

E_24	**0**	**0**	**1**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_25	**0**	**1**	**0**	**0**		**0**	**1**		**0**	**0**
E_26	**0**	**1**	**1**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_27	**1**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_28	**0**	**1**	**0**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_29	**0**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_30	**0**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**1**	**0**
E_31	**1**	**1**	**1**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_32	**0**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_33	**1**	**0**	**1**	**0**		**0**	**0**		**1**	**0**
E_34	**1**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_35	**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_36	**0**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_37	**0**	**1**	**1**	**1**		**0**	**0**		**1**	**0**
E_38	**0**	**0**	**1**	**0**		**0**	**0**		**1**	**0**
E_39	**0**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_40	**0**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_41	**0**	**1**	**1**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_42	**0**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_43	**0**	**1**	**1**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_44	**0**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_45	**1**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**		**0**	**1**
E_46	**0**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**1**	**0**

E_47	**0**	**1**	**1**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_48	**0**	**0**	**1**	**0**		**1**	**0**		**0**	**0**
E_49	**1**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**1**	**0**
E_50	**0**	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_51	**0**	**0**	**0**	**1**		**1**	**0**		**0**	**0**

	Pregunta 4	**Pregunta 5**	**Pregunta 6**	**Pregunta 7**
	CG->CV	**CF->CV**	**CT->CV**	**CV->CT-V**
E_1	**0**	**0**	**0**	**1**
E_2	**0**	**0**	**0**	**0**
E_3	**0**	**0**	**0**	**1**
E_4	**0**	**0**	**0**	**1**
E_5	**1**	**1**	**0**	**1**
E_6	**0**	**0**	**0**	**1**
E_7	**0**	**1**	**0**	**1**
E_8	**0**	**0**	**1**	**1**
E_9	**1**	**0**	**1**	**1**
E_10	**0**	**1**	**1**	**1**
E_11	**0**	**0**	**1**	**1**
E_12	**1**	**0**	**1**	**0**
E_13	**1**	**0**	**0**	**1**
E_14	**0**	**1**	**0**	**1**
E_15	**0**	**1**	**1**	**0**
E_16	**1**	**1**	**1**	**1**
E_17	**1**	**0**	**1**	**1**
E_18	**1**	**0**	**1**	**1**
E_19	**0**	**0**	**0**	**0**
E_20	**0**	**1**	**1**	**0**
E_21	**1**	**1**	**1**	**1**
E_22	**1**	**0**	**1**	**0**
E_23	**0**	**0**	**0**	**1**
E_24	**1**	**0**	**1**	**0**
E_25	**0**	**0**	**1**	**1**
E_26	**1**	**0**	**0**	**1**
E_27	**1**	**0**	**0**	**1**
E_28	**1**	**0**	**0**	**1**

E_29	**1**	**0**	**0**	**1**
E_30	**1**	**0**	**0**	**0**
E_31	**1**	**0**	**1**	**1**
E_32	**1**	**0**	**0**	**0**
E_33	**0**	**0**	**1**	**0**
E_34	**1**	**1**	**1**	**1**
E_35	**0**	**0**	**0**	**0**
E_36	**1**	**0**	**1**	**1**
E_37	**1**	**1**	**0**	**1**
E_38	**0**	**1**	**1**	**1**
E_39	**0**	**1**	**1**	**1**
E_40	**1**	**0**	**1**	**1**
E_41	**1**	**0**	**0**	**1**
E_42	**0**	**0**	**1**	**1**
E_43	**0**	**0**	**0**	**0**
E_44	**0**	**0**	**0**	**1**
E_45	**1**	**1**	**0**	**1**
E_46	**0**	**0**	**1**	**1**
E_47	**1**	**1**	**1**	**1**
E_48	**0**	**0**	**1**	**1**
E_49	**1**	**1**	**1**	**1**
E_50	**1**	**0**	**0**	**1**
E_51	**1**	**0**	**1**	**0**

ANEXO 6. Tabla de condensado de la Actividad 5

	Pregunta 1	P1	Pregunta 2	P2		Pregunta 3	P3	P3	P3	P3
	CA->CG	CA->CT	CG->CV	CT->CV	NO	CT->CV	CG->CV	SI	CT->CV	CG->CV
E_1	0	0	0	1		0	1		0	0
E_2	0	0	0	1		0	0		0	1
E_3	0	1	0	1		0	0		0	0
E_4	0	0	0	0		0	0		1	0
E_5	0	0	0	0		0	0		1	0
E_6	0	0	0	0		0	0		0	0
E_7	1	1	1	1		0	0		0	1
E_8	0	0	0	0		1	0		0	0
E_9	0	0	0	1		0	0		0	1
E_10	0	0	0	0		0	0		0	0
E_11	0	1	0	0		0	0		0	0
E_12	0	1	0	0		0	0		0	0
E_13	1	1	0	0		0	0		0	1
E_14	1	1	0	1		0	0		0	0
E_15	1	1	1	0		0	1		0	0
E_16	1	0	1	0		0	0		0	1
E_17	1	0	1	0		0	0		0	0
E_18	0	0	0	1		0	0		0	0
E_19	1	0	1	1		0	1		0	0
E_20	0	0	0	0		0	0		0	0
E_21	0	0	0	1		0	0		1	0
E_22	1	1	0	1		0	0		0	0
E_23	1	0	0	0		0	0		0	0
E_24	0	0	0	0		NP	NP		NP	NP
E_25	0	0	0	0		NP	NP		NP	NP
E_26	0	0	0	1		0	0		0	0
E_27	1	0	0	1		0	0		0	0
E_28	0	0	0	0		0	0		0	0
E_29	0	0	0	0		0	0		0	0
E_30	0	0	1	1		0	1		0	0
E_31	1	0	0	0		0	0		1	0
E_32	0	0	0	1		0	0		0	0
E_33	1	0	0	1		0	0		1	0
E_34	1	0	0	1		0	0		0	0
E_35	0	0	0	1		0	0		1	0
E_36	0	0	0	0		0	0		0	0
E_37	0	1	0	1		0	0		0	0

E_38	**1**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**1**
E_39	**1**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_40	**0**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_41	**1**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_42	**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_43	**1**	**0**	**0**	**1**		**0**	**1**		**0**	**0**
E_44	**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_45	**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_46	**0**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**1**	**0**
E_47	**0**	**0**	**1**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_48	**1**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_49	**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**		**0**	**1**
E_50	**0**	**1**	**1**	**1**		**0**	**0**		**0**	**0**
E_51	**0**	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**		**0**	**1**

	Pregunta 4	**Pregunta 5**	**Pregunta 5**	**Pregunta 6**	**Pregunta 6**	**Pregunta 6**
	CG->CV	**CV->CG**	**CV->CT**	**CG->CV**	**CT->CV**	**CA->CV**
E_1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_2	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_3	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
E_4	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_5	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_7	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_8	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_9	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_10	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_11	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_12	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_13	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
E_14	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_15	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_16	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_17	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_18	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_19	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_20	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_21	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_22	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**

E_23	0	0	0	0	0	0
E_24	NP	NP	NP	NP	NP	NP
E_25	NP	NP	NP	NP	NP	NP
E_26	0	0	0	0	0	0
E_27	0	0	0	0	0	0
E_28	0	0	0	0	0	0
E_29	1	0	0	0	0	0
E_30	1	0	0	1	0	0
E_31	0	0	0	0	0	0
E_32	0	0	0	0	0	1
E_33	0	0	0	0	0	0
E_34	1	1	0	1	1	0
E_35	1	1	0	1	0	0
E_36	0	0	0	0	0	0
E_37	1	0	0	0	1	0
E_38	1	0	0	0	0	0
E_39	0	0	0	0	1	0
E_40	0	0	0	0	0	0
E_41	1	0	0	0	0	0
E_42	0	0	0	0	0	0
E_43	1	0	0	0	0	0
E_44	0	0	0	1	0	0
E_45	1	0	0	0	0	0
E_46	1	1	1	0	0	0
E_47	1	0	0	0	0	0
E_48	0	0	0	0	0	0
E_49	0	0	0	0	0	0
E_50	0	0	0	0	0	1
E_51	1	1	0	1	0	0

ANEXO 7. Tabla de condensado de la Actividad 6.

	Pregunta 1	P1	P1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 4	Pregunta 4
	TG+	TA+	TF+	TA+	TA++	TG+	TA+	TF+
E_1	1	0	1	0	0	1	0	1
E_2	1	1	1	1	1	0	1	0
E_3	0	1	1	1	1	0	0	0
E_4	0	1	1	0	1	1	1	1
E_5	1	1	1	1	1	1	1	0
E_6	0	0	1	0	1	1	0	1
E_7	0	1	1	0	0	0	1	1
E_8	0	1	1	0	1	0	1	1
E_9	0	1	0	1	1	0	1	0
E_10	1	1	1	1	0	1	0	1
E_11	1	1	0	1	0	1	1	0
E_12	0	1	1	1	0	0	1	1
E_13	1	0	1	1	1	1	0	1
E_14	1	1	1	1	1	1	1	1
E_15	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
E_16	0	1	1	1	1	0	1	1
E_17	0	1	1	1	1	1	1	0
E_18	0	1	1	1	1	0	1	1
E_19	0	1	1	1	1	0	1	1
E_20	0	0	1	1	1	0	0	1
E_21	1	1	1	1	0	1	1	0
E_22	1	0	1	1	1	1	0	0
E_23	1	1	0	1	0	0	0	1
E_24	1	1	0	0	0	0	0	1
E_25	0	1	1	0	0	0	1	0
E_26	0	1	1	1	0	0	1	1
E_27	0	0	1	1	1	0	0	1
E_28	0	1	1	1	1	0	1	1
E_29	1	1	0	1	0	1	1	0
E_30	1	0	1	1	0	0	0	1
E_31	0	1	1	0	0	0	1	1
E_32	1	1	1	1	1	1	1	0
E_33	0	1	1	1	1	0	0	1
E_34	0	1	1	1	1	0	1	1
E_35	0	0	1	1	1	0	1	0
E_36	0	1	1	1	1	0	1	1
E_37	1	1	0	1	1	1	1	0

E_38	0	1	1	1	1	0	1	1
E_39	1	0	0	0	0	1	0	0
E_40	0	1	1	1	1	0	1	1
E_41	0	1	1	0	0	0	1	1
E_42	0	1	0	1	1	0	1	0
E_43	0	1	1	0	0	0	1	0
E_44	1	1	0	1	1	0	1	1
E_45	0	1	1	0	0	1	0	0
E_46	1	1	0	1	0	1	1	0
E_47	1	0	0	1	1	1	0	0
E_48	0	1	0	1	1	0	0	0
E_49	0	1	1	1	1	1	1	0
E_50	1	0	0	0	0	1	0	0
E_51	0	1	1	1	1	0	1	1

	Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7	Pregunta 8	Pregunta 9	Pregunta 10	Pregunta 10	Pregunta 10
	TA+	TA+	TA++	TA+	TA++	CG->CV	CT->CV	CA->CV
E_1	0	0	1	1	0	0	0	1
E_2	0	1	0	1	0	0	0	1
E_3	0	0	0	0	1	0	0	1
E_4	1	0	0	1	0	0	0	0
E_5	0	1	1	1	0	0	0	1
E_6	1	0	1	1	0	0	0	0
E_7	0	1	1	1	1	0	1	1
E_8	1	0	0	0	1	0	0	0
E_9	0	1	1	1	1	0	0	0
E_10	0	1	1	1	0	0	0	1
E_11	0	0	1	1	0	1	1	1
E_12	0	0	0	0	0	0	0	0
E_13	1	0	1	0	1	0	0	1
E_14	1	0	1	1	1	0	0	1
E_15	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP

E_16	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
E_17	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
E_18	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_19	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
E_20	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
E_21	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
E_22	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_23	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_24	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_25	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_26	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_27	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_28	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_29	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_30	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_31	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
E_32	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_33	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_34	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
E_35	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_36	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
E_37	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_38	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**

E_39	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_40	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_41	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_42	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_43	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_44	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_45	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_46	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
E_47	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
E_48	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
E_49	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
E_50	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
E_51	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

ANEXO 8. Tránsitos que realiza cada estudiante.

TRÁNSITOS	CA->G	CA->V	CA->T	CT->A	CT->V	CG->A	CG->V	CV->T	CV->G	CF->A	CF->V
E_1	SI	NO	NO	NO	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO
E_2	NO	NO	NO	NO	SI	SI	SI	NO	NO	SI	NO
E_3	NO	NO	SI	NO	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO
E_4	NO	NO	NO	NO	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO
E_5	NO	NO	NO	NO	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO
E_6	SI	NO	NO	NO	SI	SI	NO	NO	NO	SI	NO
E_7	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI
E_8	NO	NO	NO	SI	SI	NO	NO	NO	NO	NO	NO
E_9	NO	NO	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO
E_10	NO	SI	NO	NO	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI
E_11	NO	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO
E_12	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NO
E_13	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO
E_14	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	SI	NO
E_15	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	SI
E_16	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI
E_17	SI	NO	NO	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	NO
E_18	NO	NO	NO	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO	NO
E_19	SI	SI	NO	NO	NO	SI	SI	NO	NO	NO	NO
E_20	NO	NO	NO	NO	SI	NO	NO	NO	NO	SI	SI
E_21	NO	NO	NO	SI	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO

E_22	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_23	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_24	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**
E_25	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**
E_26	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_27	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_28	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_29	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_30	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_31	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_32	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_33	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_34	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**
E_35	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**
E_36	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_37	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**
E_38	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_39	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**
E_40	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_41	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_42	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_43	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_44	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_45	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**

E_46	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**
E_47	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_48	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_49	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**
E_50	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_51	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**

ANEXO 9. Articulaciones que realiza cada estudiante.

	CA<-->G	CA<-->T	CT<-->V	CG<--V
E_1	SI	NO	NO	NO
E_2	NO	NO	NO	NO
E_3	NO	NO	NO	NO
E_4	NO	NO	NO	SI
E_5	NO	NO	NO	NO
E_6	SI	NO	NO	NO
E_7	SI	NO	NO	NO
E_8	NO	NO	NO	NO
E_9	NO	NO	NO	NO
E_10	NO	NO	NO	NO
E_11	NO	NO	SI	SI
E_12	NO	SI	NO	SI
E_13	SI	SI	NO	NO
E_14	SI	SI	NO	NO
E_15	SI	NO	NO	NO
E_16	SI	NO	NO	NO
E_17	NO	NO	NO	SI
E_18	NO	NO	NO	NO
E_19	SI	NO	NO	NO
E_20	NO	NO	NO	NO
E_21	NO	NO	NO	SI
E_22	SI	NO	NO	NO
E_23	SI	NO	NO	NO
E_24	NO	NO	NO	SI
E_25	NO	NO	NO	NO
E_26	NO	NO	NO	NO
E_27	NO	NO	NO	NO
E_28	NO	NO	NO	NO
E_29	NO	NO	NO	NO
E_30	NO	NO	NO	NO
E_31	SI	NO	NO	NO
E_32	NO	NO	NO	NO
E_33	SI	NO	NO	NO
E_34	SI	NO	NO	SI
E_35	NO	NO	NO	SI
E_36	NO	NO	NO	NO
E_37	NO	SI	NO	NO
E_38	NO	NO	NO	NO

E_39	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
E_40	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_41	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
E_42	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_43	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
E_44	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_45	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
E_46	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
E_47	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
E_48	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
E_49	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
E_50	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**
E_51	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**

Anexo 10. Redes desarrolladas por los estudiantes

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Redes desarrolladas</th></tr>
<tr><td>E_1</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||||CT->CA|CT->CV|||CF->CV||CA->CG||CG->CV|CT->CV|CT->CV|CG->CV|||||CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_2</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||CF->CA|CF->CV|||CA->CT||CT->CV|CT->CV|||||||||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_3</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||||CT->CV|||CF->CV|||CA->CT||||CT->CV||||CV->CT|CT->CV||CA->CT||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_4</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||||CT->CV|||CF->CV|CT->CA|||CG->CV|CT->CV|||CT->CV||||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_5</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV|||||CA->CT||CT->CV|||CT->CV||CG->CV|CF->CV||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_6</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||||CT->CA|||CF->CA|CF->CV||CA->CG|CA->CT||CT->CV|||CT->CV||||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_7</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA|CA->CG||CG->CV|CT->CV|||||CF->CV||CV->CT|CT->CV|CA->CG|CA->CT|CG->CV|CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_8</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG||||TT||CT->CA|CT->CV|||CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV||||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_9</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV|CA->CV||CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|||CG->CV|||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_10</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|CT->CV||CF->CA|CF->CV||||CT->CV||CG->CV|||CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_11</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA||CA->CV|CF->CA|||CA->CT|CG->CV|CT->CV|CT->CV|CG->CV||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||CA->CT||</td></tr>
<tr><td>E_12</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|CT->CV|||CT->CV||CG->CV||CT->CV||||CA->CT||</td></tr>
<tr><td>E_13</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV||CF->CV|CT->CA|CA->CG|CA->CT||CT->CV||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV|CA->CG|CA->CT||</td></tr>
<tr><td>E_14</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA||CT->CA||CA->CT||CT->CV|CT->CV||||CF->CV||CV->CT|CT->CV|CA->CG|CA->CT||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_15</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV||CF->CV||CA->CG||CG->CV||||CG->CV||CF->CV|CT->CV|||CA->CG|CA->CT|CG->CV|</td></tr>
<tr><td>E_16</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV||||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG||CG->CV|</td></tr>
<tr><td>E_17</td><td>CA->CG|||TG|CG->CA|||TT||CT->CA|||||CA->CG||CG->CV|||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG||CG->CV|</td></tr>
<tr><td>E_18</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||||CT->CA||CA->CT||CT->CV||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>E_19</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|||||CA->CG|CA->CT|CG->CV|||CG->CV|||||||CA->CG||CG->CV|CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_20</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|||||CT->CA|||CF->CA|CF->CV||||CT->CV|||||CF->CV|CT->CV||||||</td></tr>
<tr><td>E_21</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||||CT->CA||CA->CT||CT->CV|||CT->CV||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_22</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|||||CT->CA|CA->CG||CG->CV||||||CG->CV||CT->CV|||CA->CG|CA->CT||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_23</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA|CA->CG||CG->CV|CT->CV|||||||CV->CT|CT->CV|CA->CG|||</td></tr>
<tr><td>E_24</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV||CF->CV||||CG->CV||||||CG->CV||CT->CV||||||</td></tr>
<tr><td>E_25</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||||||||||CA->CT||||CG->CV|||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_26</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|CT->CV|||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_27</td><td>CA->CG|||TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||CF->CA|CF->CV||CA->CG|||||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_28</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|||CF->CA||CT->CA||CA->CT||||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_29</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|||CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_30</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA||CA->CV|||CT->CA||CA->CT||CT->CV|||CT->CV||CG->CV||||||CG->CV|CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_31</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV||||CA->CG|CA->CT|CG->CV|CT->CV|||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||</td></tr>
<tr><td>E_32</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|||||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_33</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|||||CT->CA|CA->CG||CG->CV||||CT->CV||||CT->CV|||CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_34</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV||CA->CG|CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_35</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA||CT->CV|||CF->CV|CT->CA||||||||||||||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_36</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_37</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|CT->CV|||CT->CV||CG->CV|CF->CV||CV->CT|CT->CV||CA->CT||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_38</td><td>CA->CG|||TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA||CT->CA|||CG->CV||||CT->CV|||CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>E_39</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV||CF->CV|||CA->CT||CT->CV|||||CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_40</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||||CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_41</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_42</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||||||CF->CV|CT->CA||||CT->CV||||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_43</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|CF->CA||CT->CA||CA->CT|CG->CV||||||||||CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_44</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA||||CT->CA||CA->CT||CT->CV||||||||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_45</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||||CT->CV||||CT->CA|CA->CG||||||CG->CV|CG->CV|CF->CV||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_46</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||CA->CV||CF->CV|CT->CA||||CT->CV|||CT->CV||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_47</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|CF->CA||CT->CA||CA->CT|CG->CV|CT->CV|||||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|||CG->CV|CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_48</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|||CT->CA|||CG->CV||CT->CV|||||CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_49</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV||CF->CV|CT->CA|CA->CG|CA->CT||CT->CV|||CT->CV||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_50</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV||CA->CT|CG->CV|CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_51</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|CT->CV|||CF->CV|||||CT->CV|CT->CV||||CG->CV||CT->CV||||||CT->CV</td></tr>
<tr><td></td><td>REDES</td></tr>
<tr><td>E_1</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||||CT->CA|CT->CV|||CF->CV||CA->CG||CG->CV|CT->CV|CT->CV|CG->CV||||||CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_2</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||CF->CA|CF->CV|||CA->CT||CT->CV|CT->CV|||||||||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_3</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||||CT->CV|||CF->CV|||CA->CT|||||CT->CV|||||CV->CT|CT->CV||CA->CT||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_4</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||||CT->CV|||CF->CV|CT->CA|||CG->CV|CT->CV|||CT->CV|||||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_5</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||||||CA->CT||CT->CV|||CT->CV||CG->CV|CF->CV||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_6</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||||CT->CA|||CF->CA|CF->CV||CA->CG|CA->CT||CT->CV|||CT->CV|||||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_7</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA|CA->CG||CG->CV|CT->CV||||||CF->CV||CV->CT|CT->CV|CA->CG|CA->CT|CG->CV|CT->CV</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>E_8</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG||||TT||CT->CA|CT->CV|||CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV||||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_9</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV|CA->CV||CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|||CG->CV|||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_10</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|CT->CV||CF->CA|CF->CV||||CT->CV||CG->CV||||CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_11</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA||CA->CV|CF->CA||||CA->CT|CG->CV|CT->CV|CT->CV|CG->CV||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||CA->CT||</td></tr>
<tr><td>E_12</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|CT->CV|||CT->CV||CG->CV||CT->CV||||CA->CT||</td></tr>
<tr><td>E_13</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV||CF->CV|CT->CA|CA->CG|CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV|CA->CG|CA->CT||</td></tr>
<tr><td>E_14</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA||CT->CA||CA->CT||CT->CV|CT->CV|||||CF->CV||CV->CT|CT->CV|CA->CG|CA->CT||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_15</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV||CF->CV||CA->CG||CG->CV|||||CG->CV||CF->CV|CT->CV|||CA->CG|CA->CT|CG->CV|</td></tr>
<tr><td>E_16</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG||CG->CV|</td></tr>
<tr><td>E_17</td><td>CA->CG|||TG|CG->CA|||TT||CT->CA|||||CA->CG||CG->CV|||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG||CG->CV|</td></tr>
<tr><td>E_18</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||||CT->CA||CA->CT||CT->CV||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_19</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|||||CA->CG|CA->CT|CG->CV|||CG->CV||||||||CA->CG||CG->CV|CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_20</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|||||CT->CA|||CF->CA|CF->CV||||CT->CV|||||CF->CV|CT->CV|||||</td></tr>
<tr><td>E_21</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||||CT->CA||CA->CT||CT->CV|||CT->CV||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_22</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA||||CT->CA|CA->CG||CG->CV|||||CG->CV||CT->CV|||CA->CG|CA->CT||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_23</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA|CA->CG||CG->CV|CT->CV|||||||CV->CT|CT->CV|CA->CG|||</td></tr>
<tr><td>E_24</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV||CF->CV||||CG->CV|||||CG->CV||CT->CV|||||</td></tr>
<tr><td>E_25</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||||||||||CA->CT||||CG->CV|||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_26</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|CT->CV|||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_27</td><td>CA->CG|||TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||CF->CA|CF->CV||CA->CG|||||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>E_28</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|||CF->CA||CT->CA||CA->CT||||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_29</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|||CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_30</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA||CA->CV|||CT->CA||CA->CT||CT->CV|||CT->CV||CG->CV|||||||CG->CV|CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_31</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV||||CA->CG|CA->CT|CG->CV|CT->CV|||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||</td></tr>
<tr><td>E_32</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV||||||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_33</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|||||CT->CA|CA->CG||CG->CV||||CT->CV||||CT->CV|||CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_34</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV||CA->CG|CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_35</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA||CT->CV|||CF->CV|CT->CA||||||||||||||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_36</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_37</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV|CT->CV|||CT->CV||CG->CV|CF->CV||CV->CT|CT->CV||CA->CT||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_38</td><td>CA->CG|||TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV|CF->CA||CT->CA|||CG->CV||||CT->CV|||CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_39</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA|CT->CV|CA->CV||CF->CV|||CA->CT||CT->CV||||||CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_40</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA|CT->CV||||CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_41</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT|CG->CV||||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_42</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||||||CF->CV|CT->CA||||CT->CV|||||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_43</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|CF->CA||CT->CA||CA->CT|CG->CV|||||||||||CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_44</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|||||CT->CA||CA->CT||CT->CV||||||||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_45</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||||||CT->CV||||CT->CA|CA->CG|||||||CG->CV|CG->CV|CF->CV||CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_46</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||CA->CV||CF->CV|CT->CA||||CT->CV|||CT->CV||||CT->CV|CV->CT|CT->CV||||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_47</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|CF->CA||CT->CA||CA->CT|CG->CV|CT->CV|||||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV|||CG->CV|CT->CV</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>E_48</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV|||CT->CA|||CG->CV||CT->CV||||||CT->CV|CV->CT|CT->CV|CA->CG|||CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_49</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT|CT->CA|CT->CA||CA->CV||CF->CV|CT->CA|CA->CG|CA->CT||CT->CV|||CT->CV||CG->CV|CF->CV|CT->CV|CV->CT|CT->CV||||</td></tr>
<tr><td>E_50</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA|||TT||CT->CA||CA->CV|CF->CA|CF->CV|CT->CA||CA->CT||CT->CV|||||CG->CV|||CV->CT|CT->CV||CA->CT|CG->CV|CT->CV</td></tr>
<tr><td>E_51</td><td>CA->CG|TG|CG->CA|TG|CG->CA||CA->CV|TT||CT->CA|CT->CV|||CF->CV|||||CT->CV|CT->CV||||CG->CV||CT->CV||||||CT->CV</td></tr>
</table>