

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"



UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA



IMPLEMENTACIÓN DE PRESENTACIONES MONTESSORI PARA LA ENSEÑANZA DE TRES CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Informe de Práctica de Desarrollo Profesional
que para obtener el grado de
Maestra en Matemática Educativa
con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

María Guadalupe Reyes Erdmann

Directores de la Práctica de Desarrollo Profesional:

Dra. Carolina Carrillo García

Dr. José Iván López Flores

Dedicatoria

*Dedico este trabajo a mis padres Isabel e Hilario,
mis hermanas Alejandra y Valeria
y a mi sobrino Rogelio, quienes siempre me han
brindado su apoyo incondicional.*

Agradecimiento

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Becaria No. 636307

Agradecimiento

Doy gracias primeramente a Dios por haberme permitido llegar hasta este momento tan gratificante dentro de mi vida profesional, en la que culmino un nuevo grado académico. Que me concedió la dicha de conocer personas que han significado mucho en mi vida y que ahora considero mi familia. Que a lo largo de los dos años que viajaba a la ciudad de Zacatecas me concedió la dicha de llegar con bien a mi casa.

A mis padres de los que siempre he recibido un apoyo incondicional para enfrentarme a nuevas experiencias y me han alentado para seguir preparándome día con día. Que me acompañaron en los momentos de frustración, desesperación y que no me abandonaron en ningún momento a lo largo de esta travesía que decidí emprender.

A mis asesores, la Dra. Carolina Carrillo y el Dr. Iván López, que me apoyaron dentro y a lo largo de la maestría, brindándome sus conocimientos y comprensión en los momentos requeridos, de los cuales me llevo mucho conocimiento y sabiduría ya que siempre me motivaron a ser una mejor estudiante y profesionista.

A la Dra. Celina Chavarría, por la revisión desinteresada de este documento y las observaciones hechas principalmente a los apartados del método Montessori.

A mis sinodales, la M.C. Nancy Calvillo Guevara, al MME. Orlando Jiménez Longoria y al MME. Alonso Del Río Ramírez, por las observaciones y sugerencias hechas, ya que sin duda ayudaron a mejorar este trabajo.

A la institución donde realicé este trabajo, el Colegio Renilde Montessori, a la Maestra Marta Galván y a la Maestra Susana Galván que me abrieron las puertas y brindaron su apoyo para explorar una metodología educativa en ese momento desconocida para mí y de la que hoy me quedo fascinada por el vasto conocimiento que me ha dejado y que ha influido en mi práctica pedagógica actual.

A la Unidad Académica de Matemáticas que me recibió para formarme como Maestra en Matemática Educativa y a la Universidad Autónoma de Zacatecas, que me proporcionó los recursos y el apoyo incondicional en las labores internas y externas que contribuyeron en lo que hoy estoy culminando.

M.C. Nancy Calvillo Guevara

Responsable del Programa de Maestría en Matemática Educativa

De la Unidad Académica de Matemáticas

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre “Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria” y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la LESEM María Guadalupe Reyes Erdmann, estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria, cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 18 de octubre del 2019

Dra. Carolina Carrillo García

Dr. José Iván López Flores

Dra. en D. Samanta Deciré Bernal Ayala
Responsable del Departamento Escolar
De la Universidad Autónoma de Zacatecas
“Francisco García Salinas”

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre “Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria” y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la LESEM María Guadalupe Reyes Erdmann, egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 2 de diciembre del 2019

Dra. Carolina Carrillo García

Dr. José Iván López Flores

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 15 del mes de octubre del año 2019, la que suscribe María Guadalupe Reyes Erdmann, egresada del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 37185841; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado “Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria” bajo la dirección de la Dra. Carolina del Rosario Carrillo García y el Dr. José Iván López Flores.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

LESEM María Guadalupe Reyes Erdmann

RESUMEN

El método Montessori fue creado por la Dra. María Montessori a principios del siglo XX y actualmente sigue vigente alrededor del mundo, sus ideas siguen presentes dentro de las corrientes educativas. En el presente informe de Práctica de Desarrollo Profesional se presenta un análisis del uso de materiales Montessori, apoyado por el diseño de tres presentaciones que contienen elementos establecidos por dicho método. El motivo principal por el cual se abordó el diseño de éstas es simple: en la institución en la que se desarrolló la práctica se cuenta con el material, sin embargo, para llevar a cabo en el método Montessori las presentaciones son necesarias y no las había para los temas que se seleccionaron.

Una presentación Montessori consta de varios elementos, los cuales pueden ser incluidos o no dependiendo del nivel educativo en el que se encuentren los estudiantes y la materia de la que se trate. Para el caso de matemáticas de secundaria, se incluyeron los siguientes: propósito directo, propósito indirecto, punto de interés, control de error y el desarrollo de la presentación.

Las presentaciones Montessori que se diseñaron tienen como propósito apoyar la comprensión de los conceptos matemáticos de la desigualdad del triángulo, binomio al cubo y eventos probabilísticos. Se aplicaron con tres grupos de secundaria de un colegio que implementa el Método. Al hacer uso de materiales didácticos, para la revisión de antecedentes se realizó una búsqueda en la que se reportaron supuestos y resultados sobre su aplicación. De esta forma, como marco conceptual se utilizaron aspectos que influyen en el aprendizaje de los estudiantes, los cuales están presentes dentro de la filosofía, y que Montessori abordó en libros de su autoría y que son relevantes para este informe.

Dentro de las aportaciones que se obtuvieron se encuentran las presentaciones elaboradas, así como las rúbricas diseñadas para observar su efectividad, y las entrevistas y pruebas finales como herramientas que permiten evaluar la adquisición de aprendizajes esperados. Al respecto, los resultados de los grupos de primero y tercer grado se pueden considerar favorables, ya que la mayoría de los estudiantes alcanzaron los aprendizajes esperados presentes en las rúbricas que se elaboraron para las presentaciones; mientras que en el grupo de segundo, si bien no se obtuvo lo pretendido, sí surgieron aspectos importantes a considerar en el proceso de mejora de la presentación.

Palabras clave: Método Montessori, educación secundaria, desigualdad del triángulo, binomio al cubo, eventos probabilísticos.

María Guadalupe Reyes Erdmann

ABSTRACT

The Montessori Method was created by Doctor Maria Montessori, in early XX century and nowadays it remains valid all around the world: her educational ideas are alive among the current educational trends. This professional practice presents an analysis of the use of Montessori materials, including the design of three presentations which contain elements established by the Montessori Method. The design of presentations is due to the fact that there were none in the target school, and in order to carry out the Montessori method, presentations are required.

A Montessori presentation consists of different elements, which can be included or not depending on the students' educational level and the subject. In case of Mathematics in secondary education, the elements of direct purpose, indirect purpose, interest point, control of error and development of the presentation are included.

The Montessori presentations designed have the purpose of helping the comprehension of mathematic concepts of triangle inequality, the binomial cube and probabilistic events. It was applied in three secondary level groups in a private school that implements the Montessori approach. A background search included the assumptions and results regarding the application of the didactic materials. The conceptual framework included influences in the learning of the students, according to the philosophy and approaches by Maria Montessori documented in her own books and conferences.

The results obtained include the presentations elaborated, the rubrics designed to observe their effectiveness as well as and the interviews and final tests as tools to evaluate the acquisition of the intended learnings. The results of the first and third grade are considered as beneficial, where the majority of students achieved the intended learnings in the rubrics elaborated for the presentations; meanwhile, in the second grade group, even if it was not possible to achieve what was intended, there emerged important aspects to consider in the process of improving the presentations.

Key Words: Montessori Method, secondary/middle education, triangle inequality, the binomial cube, probabilistic events.

María Guadalupe Reyes Erdmann

ÍNDICE GENERAL

Dedicatoria	i
Agradecimiento	iii
Agradecimiento	v
RESUMEN	xiii
ABSTRACT	xv
INTRODUCCIÓN	xxiii
CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1 Motivación del estudio.....	1
1.2 Antecedentes	2
1.2.1 Materiales didácticos (MD)	2
1.2.2 Precusores de los MD.....	4
1.2.3 Investigaciones sobre MD	5
1.2.5 Ventajas y desventajas de implementar MD	7
1.2.6 Investigaciones con material Montessori	8
1.2.7 Los materiales didácticos en los planes de estudio	9
1.3 Investigaciones sobre los conceptos matemáticos	9
1.3.1 Investigaciones sobre la enseñanza de la desigualdad del triángulo	10
1.3.2 Investigaciones sobre la enseñanza algebraica del binomio al cubo	11
1.3.3 Investigaciones sobre la enseñanza de eventos probabilísticos	12
1.4 Reflexión.....	12
1.5 Planteamiento formal	13
1.5.1 Problemática.....	13
1.5.2 Problema de investigación	14
1.5.3 Pregunta de investigación	14
1.5.4 Objetivo general.....	14
1.5.5 Objetivos particulares	14
1.5.6 Hipótesis	14
1.5.7 Justificación.....	15
CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL	16
2.1 Perspectiva histórica de María Montessori	16
2.2 Periodos sensibles.....	17
2.3 Planos del desarrollo	18

2.3.1	Primer periodo	19
2.3.2	Segundo periodo.....	19
2.3.3	Tercer periodo	20
2.3.4	Cuarto periodo	20
2.4	El desarrollo de la inteligencia.....	20
2.5	La normalización	21
2.6	Ambiente preparado	22
2.7	El papel del guía	23
2.8	La educación cósmica.....	23
2.9	El material Montessori	24
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA.....		27
3.1	Tipo de investigación	27
3.2	Diseño de la Investigación	27
3.3	Método Montessori	28
3.3.1	Propósito directo.....	28
3.3.2	Propósito indirecto	29
3.3.3	Punto de interés	30
3.3.4	Control de error.....	30
3.3.5	Desarrollo de la presentación.....	31
3.4	Instrumentos para la recolección de datos.....	32
3.5	Población de estudio.....	33
3.5.1	Primer grado	33
<i>Normalización:</i>	34
3.5.2	Segundo grado	34
<i>Normalización:</i>	35
3.5.3	Tercer grado	35
<i>Normalización:</i>	36
CAPÍTULO 4: RESULTADOS		37
4.1	Primer grado	37
4.1.1	Presentación.....	37
4.1.2	Rúbricas.....	40
4.1.3	Entrevista.....	43
4.1.4	Prueba escrita	43

4.1.5 Durante la presentación	44
4.1.6 Resultados de las entrevistas	45
4.1.7 Resultados de la prueba escrita	47
4.1.8 Resultados de las rúbricas de cada alumno.....	50
4.2 Segundo grado	54
4.2.1 Presentación	54
4.2.2 Rúbricas	58
4.2.3 Entrevista	61
4.2.4 Prueba escrita	62
4.2.5 Durante la presentación	63
4.2.6 Resultados de la entrevista	65
4.2.7 Resultados de la prueba escrita	66
4.2.8 Resultados de las rúbricas	70
4.3 Tercer grado.....	74
4.3.1 Presentación	74
4.3.2 Rúbricas	78
4.3.3 Entrevista	81
4.3.4 Prueba escrita	82
4.3.5 Durante la presentación	83
4.3.6 Resultados de la entrevista	84
4.3.7 Resultados de la prueba escrita	85
4.3.8 Resultados de las rúbricas	87
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES.....	94
5.1 Retomando el problema inicial	94
5.2 Recomendaciones hacia una mejora.....	96
5.3 Posibles futuras investigaciones	97
5.4 Reflexión como docente	98
REFERENCIAS	99
ANEXO 1. MARCO TEÓRICO-MATEMÁTICO.....	105
Trazo de triángulos	105
Productos Notables	105
Eventos	105
ANEXO 2: PRUEBAS ESCRITAS	107

Primer grado	107
Segundo grado	111
Tercer grado	118

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Duración de periodos sensibles en la etapa de la mente absorbente (Valenzuela, 1981).....	18
Figura 2. Planos del desarrollo, de María Montessori (Andújar y Rosillo, 2016).....	19
Figura 3. Abanico (Montessori, 1982).....	22
Figura 4. Banco, material Montessori (Reseteomatemático, 2016).....	29
Figura 5. Niño trabajando con material Montessori (Le Guay, 1984).....	29
Figura 6. Torre rosa, material Montessori (Alupé, 2018).....	31
Figura 7. Presentación con los alumnos de primer grado.....	45
Figura 8. Respuesta de la alumna A1.2.....	47
Figura 9 Respuesta de la alumna A1.6.....	48
Figura 10. Respuesta del alumno A1.1.....	48
Figura 11. Respuesta del alumno A1.5.....	48
Figura 12. Respuesta de la alumna A1.6.....	49
Figura 13. Respuesta del alumno A1.5.....	49
Figura 14. Aplicación con segundo año.....	65
Figura 15. Representación del alumno A2.4.....	66
Figura 16. Representación del alumno A2.2.....	67
Figura 17. Respuesta del alumno A2.4.....	67
Figura 18. Ejercicio del alumno A2.6.....	67
Figura 19. Respuesta del alumno A2.6.....	68
Figura 20. Desarrollo algebraico del binomio al cuadrado de la alumna A2.9.....	68
Figura 21. Desarrollo algebraico del binomio al cubo del alumno A2.2.....	68
Figura 22. Aplicación con tercer grado.....	84
Figura 23. Relación del alumno A3.3.....	85

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.1.....	40
Tabla 2 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.2.....	40
Tabla 3 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.3.....	41
Tabla 4 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.4.....	41
Tabla 5 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.5.....	42
Tabla 6 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.6.....	42
Tabla 7 Resultados de los aprendizajes esperados de los alumnos de primer grado.....	49
Tabla 8 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.1.....	50
Tabla 9 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.2.....	51

Tabla 10 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.3	51
Tabla 11 Resultados de los aprendizajes esperados de la alumna A1.4	52
Tabla 12 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.5	52
Tabla 13 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.6	53
Tabla 14 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.1	58
Tabla 15 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.2	59
Tabla 16 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.3	59
Tabla 17 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.4	59
Tabla 18 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.5	59
Tabla 19 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.6	60
Tabla 20 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.7	60
Tabla 21 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.8	60
Tabla 22 Rúbrica de aprendizajes esperados de la alumna A2.9	61
Tabla 23 Resultados de los alumnos de segundo año, por aprendizaje esperado.	69
Tabla 24 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.1	70
Tabla 25 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.2	70
Tabla 26 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.3	71
Tabla 27 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.4	71
Tabla 28 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.5	72
Tabla 29 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.6	72
Tabla 30 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.7	73
Tabla 31 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.8	73
Tabla 32 Resultados de los aprendizajes esperados de la alumna A2.9	73
Tabla 33 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A3.1	78
Tabla 34 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A3.2	79
Tabla 35 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A3.3	79
Tabla 36 Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A3.4	80
Tabla 37 Resultados de los aprendizajes esperados de los alumnos de tercero.	86
Tabla 38 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A3.1	87
Tabla 39 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A3.2	88
Tabla 40 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A3.3	89
Tabla 41 Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A3.4	91

INTRODUCCIÓN

La educación Montessori actualmente está cobrando fuerza y significación. Las nuevas reformas educativas en México se enfocan hacia una educación humanista en la que se toman en cuenta las actitudes y el bienestar de los alumnos; siendo Montessori una de las precursoras del humanismo, sus ideas se están retomando en la educación contemporánea. A pesar de la distancia temporal del surgimiento de su teoría hasta nuestros días, en muchos países aún se trabajan aspectos que planteó en su método. Como menciona Zafra: “Si nos aproximamos a María Montessori con cualquier instrumento de búsqueda de las nuevas tecnologías de la información podemos apreciar que sus teorías siguen vigentes y que hay miles de Colegios Montessorianos por todo el mundo” (2012, p. 9).

María Montessori fue una mujer con preparación en varias disciplinas; esto le permitió hacer afirmaciones dentro del campo educativo con pleno conocimiento de sus principios y que mantienen hoy en día su vigencia e influencia en la comunidad de profesores. Además, fue capaz de relacionar su primera carrera (la medicina) con el ámbito educativo, aportando aspectos del desarrollo del niño que se pueden percibir en su teoría. Así fue que Montessori diseñó un método en el que aborda diversos aspectos que influyen en el proceso de enseñanza - aprendizaje. En él propone etapas de desarrollo, toma en cuenta un ambiente preparado como lugar de trabajo, la convivencia entre los alumnos y el maestro, la preparación de la guía, la educación cósmica y la importancia de los materiales, entre otros aportes.

Uno de los aspectos más reconocidos y vinculados al método Montessori es el uso de materiales didácticos concretos, pero cabe aclarar que ella no sólo desarrolló e implementó materiales didácticos que facilitarían la enseñanza sino que principalmente enfatizó una pedagogía enfocada al desarrollo integral de las personas.

La inclusión de materiales didácticos dentro de un aula de clases no es tarea sencilla (como tampoco suele serlo la enseñanza misma de las matemáticas). El uso de materiales didácticos representa darle un giro a la educación tradicional. Presentar conceptos matemáticos curriculares de una forma diferente puede generar el interés de los estudiantes, al manipular objetos que podrían considerar juguetes (¿qué mejor para un niño que aprender jugando?) que apoyen su exploración y aprendizaje. Cabe resaltar que en el sistema Montessori se requiere que los estudiantes manipulen materiales concretos y de esta forma se apropien de lo abstracto; esto quiere decir que en un determinado momento, al haber dominado el uso del material (lo que significaría que han entendido el tema en cuestión, que han pasado de lo concreto a lo abstracto), puedan resolver los problemas o situaciones sin la necesidad de hacer uso de él, y que éste habrá cumplido con su propósito.

En sus inicios, Montessori atendió poblaciones de niños considerados como débiles mentales. Respecto a ello, cabe mencionar que, en mi experiencia como docente, he trabajado con alumnos con alguna discapacidad intelectual, visual y motriz, y he observado que los materiales didácticos concretos pueden favorecer su aprendizaje, en específico en la materia de matemáticas. Esto puede deberse a que no se enfrentan con los conceptos abstractos desde una primera instancia, sino que pueden hacer las manipulaciones necesarias que propicien su comprensión; es decir, se favorece el aprendizaje cuando los aprendices pueden explorar materiales concretos que expresen algún concepto.

En el análisis de antecedentes se encontraron pocas investigaciones realizadas con los materiales Montessori en el nivel secundaria; esto puede deberse a que los principales aportes de la Dra. Montessori fueron para las etapas de los 0 a los 12 años, durante las primeras etapas del desarrollo; aunado a ello, pudimos observar que las presentaciones no suelen ser compartidas públicamente. Por ello el interés de abarcar tres temas, y con ello generar información e incrementar el material con el que cuenta el colegio actualmente.

En este trabajo se consideró el método Montessori para diseñar tres planeaciones, que dentro del método se conocen como presentaciones, que acompañaran materiales didácticos para la enseñanza de los conceptos de la desigualdad triangular, binomio al cubo y eventos probabilísticos. La idea de la elaboración de estas tres planeaciones se pudo llevar a cabo debido a las condiciones de los grupos con los que se trabajó, ya que fueron grupos de 4 a 9 estudiantes por grado, por lo que se pudo aplicar y hacer el análisis de las presentaciones. Estos diseños se aplicaron en el Colegio Renilde Montessori, en el que la autora de este trabajo se desempeña como docente de la asignatura de matemáticas de los tres niveles académicos del nivel secundaria. Dicha profesora tiene una preparación como maestra de matemáticas en el nivel secundaria y se encuentra en formación en cuanto a la metodología Montessori.

Al tener una única maestra para los tres grados, se aplicó una presentación en cada uno de ellos, abarcando toda la población estudiantil de la secundaria. Al ser una Práctica de Desarrollo Profesional se respetaron y mantuvieron las condiciones regulares del aula, por lo que se incluyó también a los alumnos con necesidades educativas especiales, que cumplieron con los requerimientos para el manejo del material y de los temas a tratar.

Para su presentación en este reporte de la Práctica de Desarrollo Profesional, se ha dividido en cinco capítulos que a continuación se describen:

En el Capítulo uno, denominado Planteamiento del problema de desarrollo profesional, se presenta la motivación inicial de este estudio, los antecedentes relacionados con materiales didácticos y trabajos realizados con el método Montessori. Además del planteamiento formal de la Práctica de Desarrollo Profesional.

Para el segundo capítulo, correspondiente al Marco conceptual del trabajo, se hizo una investigación sobre aquellos aspectos teóricos de la filosofía Montessori que

intervienen directamente en el trabajo. En primer lugar se presenta una reseña sobre la vida y obra de María Montessori, con el objetivo de conocer cuáles fueron las circunstancias que la llevaron a la elaboración de su método, al tratarse de la primera médica mujer de Italia, conocía aspectos teóricos del desarrollo humano y, mediante la observación sistemática, identificó aquellos que favorecen el aprendizaje. También se incluyen las etapas del desarrollo humano y su descripción. Los periodos sensibles de aprendizaje, refiriéndose a lapsos en los que el ser humano aprende de una forma más rápida. La importancia del desarrollo de la inteligencia en la persona, el papel del maestro llamado *guía* dentro del sistema, la educación cósmica y el salón de clases.

El siguiente capítulo, correspondiente a la metodología implementada, muestra el tipo de investigación realizada. En él se describe el diseño metodológico propio de la investigación; es decir, los pasos que se llevaron a cabo para poder llegar a las tres presentaciones propuestas, así como su aplicación y análisis. Asimismo, se exponen aspectos importantes del método Montessori, se definen puntos como el propósito directo e indirecto, punto de interés, control de error y cómo se desarrolla una presentación Montessori.

En el cuarto capítulo se presenta un análisis de resultados obtenidos a partir de las presentaciones que se hicieron, las entrevistas con cada uno de los alumnos, pruebas escritas y las rúbricas de trabajo.

En el quinto capítulo se muestran las conclusiones obtenidas a partir del análisis de los resultados; para ello, se retomaron los objetivos y pregunta iniciales. Éstas se pueden resumir en que las presentaciones Montessori son un elemento crucial dentro del método, cada uno de los elementos que se proponen tienen un papel importante ya que son la guía para la utilización del material y que toman aspectos relevantes en cada etapa del desarrollo del estudiante y las necesidades grupales e individuales.

Por último, se hace el listado de referencias consultadas para el desarrollo y sustento de esta práctica. Entre las principales, aquellas que permiten la comprensión del método Montessori.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Motivación del estudio

Una de las principales razones por las que me interesé en el uso de materiales didácticos nació en mi trabajo docente en el Colegio Renilde Montessori, ubicado en la ciudad de Durango, en el cual se propicia el uso de material didáctico para el aprendizaje de los estudiantes. La institución está certificada por la AMI (Association Montessori Internationale), quien se encarga de regular y continuar con investigaciones y creación de material que tenga las características necesarias dentro del método Montessori.

Anteriormente, mientras estudiaba en la Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de Durango, observé que cuando llegábamos a la práctica docente con algún material didáctico en la materia de matemáticas, los estudiantes se interesaban por explorarlo esto me hizo considerar que el simple hecho de captar su atención ya representaba una ventaja. Dentro de este contexto, presenté materiales como el Tangram para representar áreas y perímetros y la Oca matemática en probabilidad; éstos fueron algunos de los que en el marco de mi experiencia como profesora en formación tuvieron más éxito, entendiéndolo por ello que el insumo didáctico no se quedaba en el plano de la motivación sino que se reflejaba en el aprovechamiento de los estudiantes.

Con relación al aprovechamiento del estudiante, considero importante ser conscientes de que los materiales didácticos no son infalibles. Es decir, no basta con presentárselo al estudiante y suponer que éste aprenderá automáticamente, sino que se deben considerar diversos factores que intervienen en el tema abordado, como los antecedentes, o hacer un análisis previo sobre la posible efectividad que pueda o no tener, así como otros factores relacionados con las vivencias de los estudiantes.

Desde mi contexto, como profesora de un colegio Montessori, pretendo analizar tres materiales didácticos que se utilizan en este sistema en el nivel secundaria para la enseñanza de las matemáticas y proponer la presentación para aplicarlos. El ingresar como docente en el nivel primaria, donde el uso de los materiales es más común, y observar la metodología que se utiliza, me motivó para querer aplicar este método en el nivel secundaria, en el que actualmente laboro.

Al haberse enfocado Montessori en el nivel preescolar, y brevemente al nivel primaria, es comprensible que en el nivel secundaria no se tenga tanto material didáctico para la enseñanza en este sistema. En particular, considero que la materia de matemáticas es adecuada para este trabajo, ya que el uso de material didáctico puede favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Por lo que, en este trabajo, se atiende una

necesidad desde el ámbito de la educación con este método, así como una necesidad formativa en el campo de la capacitación docente de quien esto escribe.

Finalmente, pienso que diseñar e implementar un material didáctico representa un gran reto, es importante que se aplique según los fundamentos y filosofía que Montessori creó y comprobó que funcionaban.

1.2 Antecedentes

María Montessori fue una de las precursoras en la comprensión de la significancia de materiales concretos para apoyar el aprendizaje indirecto. Montessori dedicó parte de su vida a comprobar su efectividad, sobre todo en preescolar; es por ello que se utilizará como marco teórico su ideología y metodología, también se analizarán algunas de las características de sus materiales.

Asimismo, para la elaboración de este trabajo se consultaron diferentes fuentes sobre materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas. A continuación se presentan breves reseñas de dicho análisis, así como algunas de las ventajas y desventajas del uso de materiales didácticos que algunos autores han reportado.

1.2.1 Materiales didácticos (MD)

Dentro de este apartado se presenta la definición que proponen algunos autores sobre los materiales didácticos. Morales (2012) expone que son el “conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje” (p. 10). Por su parte, Manrique y Gallego (2012) argumentan que los materiales didácticos son “una alternativa para el aprendizaje práctico-significativo, que depende, en gran medida, de la implementación y apropiación que haga el docente de ello” (p. 105). Cascallana (1988) expresa que “a través de las actividades realizadas con los materiales concretos, el niño puede avanzar en su proceso de abstracción de los conocimientos matemáticos” (p. 29). Los diferentes autores mencionados brindan definiciones propias de los materiales didácticos, que si bien no son idénticas sí coinciden en que son herramientas que al ser manipuladas fomentan el aprendizaje en los estudiantes.

Así, los materiales didácticos son una herramienta útil dentro del aula, ya que representan un elemento físico mediante el cual el estudiante puede apoyarse para construir conocimiento. El material da una primera impresión al alumno sobre lo que se requiere que aprenda, la manipulación de éstos lo ayudará a establecer esquemas mentales y a hacer sus propias interpretaciones. En este sentido, Villalta (2011) los cataloga como “el conjunto de objetos, aparatos o apoyos destinados a que la enseñanza sea más provechosa y el rendimiento del estudiante [sea] mayor” (p. 10).

Algunos autores clasifican los materiales didácticos según su diseño, uso, estructura o alguna otra característica. Por su parte, Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011) retoman la distinción propuesta por Cascallana (1998) entre materiales estructurados y no estructurados:

Especialmente en educación infantil, los juguetes, objetos de embalaje, material de desecho, etc., constituyen recursos para la captación de cualidades matemáticas siendo útiles para que los niños se relacionen con las formas, posiciones, posibilidades de movimiento, practiquen el conteo, midan, etc. A estos objetos son a lo que Cascallana llama materiales no estructurados. Los materiales estructurados, en cambio, son específicos para la enseñanza, han sido diseñados con este fin (p. 42).

Esta clasificación puede considerarse una primera gran división de los materiales. Entre los no estructurados, como estipula Cascallana (1998), puede estar alguna cinta métrica, canica, entre otros, ya que su primer fin no fue para enseñar; en cambio los estructurados son hechos con el propósito de la enseñanza aprendizaje de algún tema en particular, ejemplo de ello podrían ser los bloques lógicos de Dienes, los dominós temáticos, las regletas Cuisenaire, entre otros.

Por otra parte, Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011) reportan otra clasificación según las necesidades educativas o institucionales que se tengan: “conviene destacar las *intenciones educativas*, el *contenido matemático* que permiten trabajar, las *cualidades educativas* que tengan, o su *interés para que estén en el departamento de Matemáticas del centro de enseñanza*” (p. 42). En lo que se refiere a las intenciones educativas, se centra en lo que se requiere que los estudiantes aprendan, el contenido matemático se refiere al tema, las cualidades educativas, es decir las características que los estudiantes posean y, por último, el interés para que estén en el departamento de enseñanza, por tanto sí son realmente útiles para la enseñanza dentro de las instituciones.

En otros informes, Pérez (2008, citado en Godínez, 2017) argumenta que “los materiales son distintos elementos que pueden agruparse en un conjunto, reunidos de acuerdo a su utilización en algún fin específico [...] El material didáctico es aquel que reúne medios y recursos que facilitan la enseñanza y el aprendizaje” (p. 19); por lo que si utilizamos una herramienta que nos ayude a generar conocimiento por su estructura y su función, lo podemos denominar material didáctico. Sobre ello, Villalta (2011) afirma que:

Más que ilustrar tiene por objeto llevar al alumno a trabajar, investigar, descubrir y a construir. Adquiere así un aspecto funcional dinámico, propiciando la oportunidad de enriquecer la experiencia del alumno, aproximándolo a la realidad y ofreciéndole ocasión para actuar (p. 10).

Entonces se puede decir que podría tener una mayor significación para el alumno si éste tiene la oportunidad de manipularlo por sí mismo a diferencia de sólo verlo.

Abordando someramente aspectos históricos, referente a cómo llegaron los materiales didácticos a México, Aquino y Maturano (2001) expresan que:

Fue introducido en la etapa de la evangelización (1525-1528) pues los primeros misioneros se dieron a la tarea de preparar materiales didácticos para enseñar la fe cristiana y ser entendidos; de acuerdo con Gloria Bravo: “esos primeros misioneros franciscanos fueron en América Latina los iniciadores de algún intento primitivo de la stampa o imprenta, (...) los que después se imprimían sencillamente en papel de maguey o en cualquier otra materia de las que acostumbraban usarse para los códices. (...) por medio de figuras jeroglíficas, empezaron su predicción y enseñanza” (p. 28).

De esta forma, los evangelizadores tenían una herramienta que les permitía comunicarse con los indígenas y transmitirles su religión.

Cabe aclarar que anteriormente ya se mostraban vestigios en culturas como la maya en la que se utilizaba el ábaco llamado *Nepohualzintzin* con el que se apoyaban para realizar algunas operaciones tanto en el sistema decimal como vigesimal. Aunque el ábaco no es exclusivo de esta cultura sí fue uno de los más importantes y fue utilizado inicialmente para el comercio.

1.2.2 Precursores de los MD

Los materiales didácticos se han ido creando y evolucionando dependiendo de las necesidades del contexto escolar. Una de las precursoras de su diseño e invención que la doctora Montessori, quien empezó a observar cómo funcionaban en un grupo de niños de hospicio.

[Montessori] Dio aportes muy importantes a la educación donde implementó los materiales didácticos que tiene como nombre “reactivos didácticos”, “trabajos” o “ejercicios” en su centro llamado *Casa Dei Bambini* el objetivo principal es reconocer las habilidades y desarrollar el potencial innato que tiene el niño a la hora de realizar diversas actividades, éstas deben de ser en espacios libres y armónicos, por otra parte se debe verificar en qué áreas el niño se desenvuelve mejor, a la vez ver cuáles se le dificultan, para así seleccionar material adecuado para cada niño (Godínez, 2017, p. 20).

Por su parte, Decroly (1915, citado por Godínez, 2017) afirma que el propósito de los materiales didácticos es “Fortalecer el cuerpo y el espíritu de la infancia” y esto puede hacerse:

A través de materiales que propicien en el niño un desarrollo lógico, comunicativo y motriz, a la vez que puedan adquirir habilidades para leer, percibir y comprender conceptos matemáticos. El material de Ovidio Decroly tiene diversas características las cuales son sencillas, atractivas, lavables y no costosas, la clasificación sería visual, auditiva, motoras, asociación de ideas e iniciación a la lectura (Godínez, 2017, p. 20).

Otro pedagogo que apostó por el uso de materiales didácticos fue Federico Froebel (1826), de quien Godínez (2017) hace referencia:

En cuanto a su propuesta primera infancia inventó diversos materiales didácticos que reciben el nombre de dones o regalos, explica que un material no vale por la apariencia sino por el beneficio y desarrollo que va a provocar en el infante, el objetivo es que el niño pueda adquirir conocimientos a través del material didáctico y fomenta auto-actividades, por otra parte el docente debe de verificar cada actividad que realice el niño (p. 19).

En el listado de precursores de los materiales didácticos está indiscutiblemente el Dr. Zoltan Dienes, matemático húngaro conocido principalmente por sus bloques lógicos, conformados por 48 piezas, 12 triángulos, 12 círculos, 12 rectángulos y 12 cuadrados, que tienen distintas características (grosor, tamaño y color) y se utilizan en el desarrollo del pensamiento lógico.

[Dienes] Es un personaje único en el campo de la educación matemática no sólo por sus teorías de cómo las estructuras matemáticas pueden ser una efectiva enseñanza desde los tempranos años del conocimiento, usando juegos manipulativos sino también por su incansable atención durante más de 50 años de prácticas escolares a través de su trabajo de campo en el Reino Unido, Italia, Austria, Brasil, Canadá, Papua, Nueva Guinea y los Estados Unidos: sus teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas han influenciado a muchas generaciones en educación matemática particularmente aquellos que han trabajado con números racionales, proyectos matemáticos y más recientemente con modelos y el área de investigación (Hincapié y Riaño, 2008, p. 97).

Por otra parte, “aunque [los materiales y recursos] no siempre fueron bien considerados, grandes pedagogos e investigadores en la Didáctica de las Matemáticas potenciaron su uso e incluso crearon los suyos propios” (Quereda, 2012, p. 45). Los materiales didácticos “han sido utilizados desde los tiempos antiguos como apoyo a la comprensión de nociones matemáticas” (Quereda, 2012, p. 45). Es decir que la utilización de éstos no es algo que esté de moda o sea un nuevo invento, sino que desde hace tiempo se utilizan materiales y recursos que permiten hacer una representación de los conceptos matemáticos.

1.2.3 Investigaciones sobre MD

Siguiendo la premisa sobre la utilidad de los MD dentro de la enseñanza de las matemáticas se han realizado diversas investigaciones en las que se defiende su efectividad.

Trabajar con el material motiva a los estudiantes. Según Rodríguez y Ryan (2001) “los estudiantes valoran positivamente el material y reconocen que les gusta trabajar en este soporte porque les aporta un valor diferente al del material en papel” (p. 197). Cuando el docente obtiene este tipo de opiniones sobre el material puede ser un aliciente para trabajar en presentarles algo novedoso que les motive a seguir aprendiendo, y sobre todo que los sorprenda constantemente.

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

Santos (2008) trabajó con materiales didácticos con jóvenes y adultos y destacó entre otros aspectos su carácter funcional, en el que resume que:

Se debe aplicar a la resolución de problemas concretos de la vida cotidiana, por medio de una metodología y del uso de una terminología que se adapte a lo que está estudiando. Lo que no significa cerrarse a los conocimientos necesarios para continuar los estudios (p. 164).

En el ámbito de la educación básica, Manrique y Gallego (2012) señalan que:

Actualmente se habla de un aprendizaje más dinámico con los infantes, puesto que su mayor atracción es el juego, por lo tanto, la motivación y la planificación de las clases deben girar en torno a ello, es decir, buscar que, a través del juego e interacción con los materiales didácticos, el estudiante adquiera las habilidades requeridas en su proceso formativo (p. 102).

Por otra parte, Ararat, Nieva y Nieva (2014) plantean que

Las herramientas didácticas son instrumentos que permiten la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos, siendo éstos indispensables y estratégicos en el momento de la enseñanza-aprendizaje. Además de propiciar comprensión de los ejes temáticos relacionados con la vida cotidiana también incentiva a la creatividad, el pensamiento lógico, a desarrollar capacidad de análisis frente a diversas problemáticas, potencializar habilidades y destrezas, favoreciendo el aprendizaje significativo. (p. 33).

Ararat, Nieva y Nieva (2014) expresan en las conclusiones de su estudio que lograron fortalecer los procesos de enseñanza - aprendizaje de las fracciones algebraicas por medio de:

La utilización de materiales didácticos [...], de una didáctica lúdica, motivadora e integradora, siendo ésta pertinente en el contexto de los estudiantes, da espacio para el apropiamiento educativo, la seguridad personal, la integración y la exploración de sus conocimientos y creatividad (p. 87).

En torno a los aportes no propiamente cognitivos que se generan mediante el uso de materiales, Navarrete (2017) expresa que “los materiales didácticos ofrecen actividades matemáticas atractivas y motivadoras para hacer cambiar la actitud del alumnado hacia el ámbito de las matemáticas” (p. 16). Asimismo, Gyöngyösi (2012) explica que “a través de juegos y actividades de matemáticas con los demás, los estudiantes construyen un sentido de valores matemáticos, y con base en eso actúan construyendo y modificando su pensamiento” (p. 25).

En general, en el análisis de trabajos en los que se hace uso de Materiales Didácticos se observan resultados favorables, tanto en el aprendizaje de los alumnos como en la aceptación que tienen en el aula. Asimismo, mediante la implementación de materiales didácticos, además de propiciar el aprendizaje de conocimientos matemáticos, se impulsaron otras habilidades (como la concentración y el orden) en los estudiantes al desarrollar las actividades.

Al manipular el material, el alumno puede hacer sus propias conjeturas, siendo ésta una manera diferente de tener una primera impresión hacia un tema o contenido. Si el joven lo ve y siente, se propiciará la creación de esquemas mentales diferentes a los que podría desarrollar con sólo imaginarlo. En este sentido, Santos (2015) argumenta que “las contribuciones del material didáctico aplicado da como resultado un impacto positivo en los alumnos, superando mucho sus limitaciones y mostrándose como una alternativa favorable para la enseñanza de las matemáticas” (p. 181).

Por su parte, Fernández (2008) expone que los estudiantes “expresaron su satisfacción por la utilización de material didáctico manipulativo, [...] valorando muy positivamente los aspectos lúdicos y su contribución positiva al aprendizaje de las matemáticas, de una forma más amena y divertida” (p. 371). De esta forma se puede observar que la utilización del material didáctico fomenta en los estudiantes las habilidades lúdicas, al hacer uso de los sentidos, como el tacto, vista y oído para relacionarlo con el tema que se pretende que aprendan.

Conviene atender la advertencia de Villalta, quien afirma que “el uso del material didáctico será efectivo si hay una participación mental activa de parte de los alumnos por medio de la atención, interés y percepción adecuada” (2011, p. 10). Por tanto, se debe señalar que hay requerimientos para su aplicación en el aula, de manera tal que represente realmente un beneficio hacia el aprendizaje de los estudiantes, obteniendo de esa forma resultados favorables.

Es posible observar en los reportes de las investigaciones que analizamos que los autores tienden a exaltar las bondades del uso de materiales didácticos. En este reporte queremos también tener en cuenta aquellas desventajas que, de manera inherente, puede conllevar la implementación de dichos materiales.

1.2.5 Ventajas y desventajas de implementar MD

Dentro de la aplicación de materiales didácticos se han encontrado algunas ventajas y desventajas.

Entre las ventajas, además de las que pueden percibirse en el apartado anterior, Alsina, Burgués y Fortuny (2012) afirman que “constituye una importante baza en la adquisición de conceptos, relaciones y métodos geométricos ya que posibilita una enseñanza activa de acuerdo con la evolución intelectual del alumno” (p. 16).

Navarrete añade que “permiten al alumnado participar activamente y realizar actividades de manera autónoma” (2017, p. 16). De ello observamos que implementar materiales didácticos no requiere siempre que sea el maestro quien enseñe a los estudiantes a usarlos, se trata de permitirle al alumnado experimentar y que hagan interpretaciones desde su punto de vista con la aprobación o corrección del docente.

Por otra parte, se puede decir que “estimulan y orientan el proceso aprendizaje del estudiante, permitiéndole la adquisición de información y experiencias; el desarrollo de actitudes y adopción de normas de conducta, de acuerdo con los objetivos que se quieren lograr”. (Cabello, 2006, p. 21).

Es de resaltar que fueron escasas las desventajas que se encontraron reportadas, una de ellas es la que expone Navarrete (2017) al afirmar que pueden haber problemas de tipo económico “por el elevado coste que presentan los materiales didácticos; aunque por el contrario ante esta situación se puede optar por la elaboración propia” (p. 17).

A pesar de esto, es necesario ser conscientes de que la introducción de materiales didácticos en el aula representa una innovación y como tal, se debe tener cuidado con los cambios que pueden representar en torno tanto a la enseñanza como a la forma de adquirir los conocimientos matemáticos o de cualquier ciencia.

1.2.6 Investigaciones con material Montessori

Durante el paso de los años se han hecho distintas investigaciones sobre la metodología Montessori; es de advertir que en ellas no sólo se enfocan a la matemática. Abett (2013) reporta que “El método Montessori es también conocido como pedagogía científica, puesto que se basa en la observación del infante y en la experimentación con él en el quehacer educativo” (p. 284).

En ese sentido, Mella (2011) argumenta que:

Respecto la metodología utilizada en esta sala de clases, se cumple con la triada niño-guía-espacio preparado, pues están los niños dispuestos y con todo su potencial para aprender, se encuentra el guía articulador que potencia los aprendizajes y existe un ambiente preparado para su estimulación. Donde independiente a las dificultades (tanto de recursos como de infraestructura), poco a poco están logrando que los infantes se atrevan a aprender por ellos mismos (p. 142).

El método Montessori está pensado en el desarrollo de los estudiantes, por ello Montessori afirma que es necesario seguir al niño, hacer una observación profunda en la que la persona adulta debe respetar los procesos de cada individuo. “Montessori trabaja con niños, porque fue diseñado para niños” (Bagby y Sulak, 2010, p. 8).

Uno de los aspectos fundamentales que aborda Montessori es el *ambiente preparado* para la presentación de los materiales y la clase; con ello se refiere a la limpieza, orden y control de todo lo que sucede dentro del aula. Respecto a ello, Quispe (2015) comenta que:

Los niños trabajan con materiales concretos científicamente diseñados, que brindan las llaves para explorar el mundo y para desarrollar habilidades cognitivas básicas. Los materiales están diseñados para que el niño pueda reconocer el error por sí mismo y hacerse responsable del propio aprendizaje. El adulto es un observador y un guía;

ayuda y estimula al niño en todos sus esfuerzos. Le permite actuar, querer y pensar por sí mismo, ayudándolo a desarrollar confianza y disciplina interior (p. 4).

Dentro del método, a las secuencias didácticas o planeaciones se les denomina *presentaciones* y los materiales Montessori deben estar debidamente respaldados por al menos una en la que se muestre explícitamente el uso que se les debe de dar y los pasos a seguir.

El “método”, como los montessorianos se apresuran a señalar, no puede reducirse a una colección de técnicas de instrucción, objetivos curriculares o materiales didácticos. Más bien, la práctica de la educación Montessori implica la participación en una forma altamente coherente y con una textura profunda (Consentino, 2005, p. 212).

La Metodología, al tratarse de un trabajo personalizado, ha permitido que se ponga una atención especial en cada uno de los estudiantes; todo ello, su carácter humanista y su profunda investigación en las etapas y necesidades del desarrollo, ha llevado a este método a adquirir notoriedad en el ámbito educativo.

1.2.7 Los materiales didácticos en los planes de estudio

Los planes y programas educativos se encuentran en constante cambio y los docentes deben estar actualizándose sobre lo que los estudiantes requieren. En esta investigación, se tomaron en consideración los planes y programas educativos de 2011 y 2017, dado que en el ciclo escolar 2018-2019 (momento en que se realizó la observación) sólo el grupo de primer grado entró en el nuevo plan de estudios 2017, mientras que segundo y tercero continuaron con el anterior de 2011.

El Plan de Estudios (2011) da la libertad a los profesores de la utilización de materiales didácticos. En él se expone que:

El reconocimiento de la población estudiantil, del escenario escolar y las posibilidades que éste brinda, serán elementos fundamentales para preparar la experiencia de clase. Por ejemplo, determinar si es posible usar alguna herramienta tecnológica o materiales manipulables, ocupar espacios alternativos al salón de clases (p. 81).

De esta manera, se considera responsabilidad del docente identificar en qué situaciones es conveniente la utilización de los materiales didácticos; y no se enfoca en proporcionar alguno o decidir en qué temas sería conveniente su manejo.

El Plan de Estudios (2017), denominado Aprendizajes Clave, no hace propuestas ni mención sobre la utilización de materiales didácticos, dando así libertad de cátedra a los profesores para que utilicen los recursos didácticos que consideren necesarios.

1.3 Investigaciones sobre los conceptos matemáticos

Los tres conceptos matemáticos que se abordaron en este trabajo han sido objeto de estudio de otras investigaciones en el intento de propiciar una mejor enseñanza, con el fin de

favorecer aprendizajes que permanezcan en los estudiantes, de manera que no sólo se trate de aprender fórmulas o reglas que ya han sido establecidas y que no tienen sentido o alguna utilidad para los alumnos.

En los siguientes tres apartados se reseñarán investigaciones y perspectivas sobre la enseñanza correspondiente de estos conceptos.

1.3.1 Investigaciones sobre la enseñanza de la desigualdad del triángulo

La desigualdad triangular aparece curricularmente en el eje Forma, espacio y medida, dentro del tema Figuras y cuerpos geométricos, en donde se espera que los estudiantes, aprendan a “analizar la existencia y unicidad en la construcción de triángulos” (Aprendizajes clave, 2017, p. 178). Por ello la importancia de que conozcan las situaciones en las que es posible o no trazar un triángulo con el uso de tres segmentos de cualquier magnitud.

Para propiciar el aprendizaje de la desigualdad del triángulo en los estudiantes es conveniente buscar que el enunciado y la identificación de las situaciones en las que es posible trazar un triángulo cobren sentido en el alumno, para que sea capaz de practicarlo efectivamente en una situación o problema dado. Fernández y del Río (2015) reportan que “las construcciones erróneas en Matemáticas pueden aprovecharse didácticamente en el aprendizaje, así mediante las cuestiones pertinentes, podrá detectarse si los errores son debidos a la construcción o al propio concepto de triángulo que tenga el alumno” (p. 387).

En ocasiones es conveniente hacer uso de otros materiales, más allá del juego de geometría, que puedan ser vistosos y novedosos para el estudiante, como complemento al dominio que deberían tener sobre el uso de él. Al respecto, Iquinas (2017) reporta que:

El desempeño de los estudiantes se puede favorecer mediante el uso de instrumentos no convencionales en clase de geometría, pues determina un escenario de posibilidades para desarrollar la visualización, ya que la utilización de uno o varios instrumentos por parte del estudiante sirve como puente en el paso de la acción humana de ver a la acción matemática de visualizar; y esto sin duda genera cambios en la enseñanza de la geometría (p. 112).

En este caso, trabajar con un material didáctico es una forma en la que los estudiantes pueden hacer manipulaciones al deslizar los lados de un triángulo para verificar si es posible o no construirlo. Desde el ámbito vygotskyano, Fernández y Del Río (2015) hacen una propuesta en la que trabajan esta construcción con el uso de popotes y plastilina, aportan que “el uso de estos materiales permite la manipulación de los objetos geométricos, un acercamiento intuitivo a la geometría del plano y los procesos de construcción implicados son lógicos y eficientes” (p. 390). Sin embargo, sería recomendable hacer uso de un material (como los mecanos) que no se doble o tome alguna curvatura para

representar los lados, ya que los lados son segmentos rectos, es posible que los popotes no representen en su totalidad lo que se pretende que los estudiantes visualicen.

Finalmente, otra investigación en la que se usan materiales didácticos para la enseñanza de la desigualdad del triángulo es la de Hernández (2016), en la que se trabaja con alumnos de secundaria. En ella se les presentan regletas graduadas para la construcción de los triángulos y reporta que “cuando manipularon el material y pudieron observar las condiciones de existencia de un triángulo, ellos consiguieron darle ese sentido que les ayudaría a recordarlo en dado momento que fuera necesario aplicar este conocimiento previo” (p. 140).

1.3.2 Investigaciones sobre la enseñanza algebraica del binomio al cubo

El binomio al cubo se encuentra dentro de los productos notables y para propiciar su enseñanza se han realizado diversas investigaciones y propuestas didácticas que pretenden que los estudiantes desarrollen este conocimiento.

Los productos notables son “ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la información” (Baldor, 2011, p. 97). Sin embargo, se ha optado por no sólo llevar estas reglas al aula y exponerlas a los estudiantes, sino por la utilización de material que ayude a la visualización de éstos.

Flores y Olivar (2008) reportan que “un elemento de valor didáctico es que los estudiantes puedan construir su propio aprendizaje, de esta manera puedan armar el producto notable a través de la conceptualización proporcionada” (p. 29). Barreto (2012) utiliza hojas de colores para representar el binomio al cuadrado, en donde a^2 la representa con color rojo, b^2 con azul y ab verde, con ello pretendía ilustrar que:

Elevar una suma de un binomio al cuadrado o a una potencia dos desde un punto de vista geométrico, significa sumar dos cuadrados que tienen la longitud de cada uno de los términos del binomio más dos rectángulos que tienen por longitud los lados del binomio (p. 117).

Otra propuesta didáctica que se ha hecho fue mediante el uso de la tecnología, Sánchez (2010) plantea su enseñanza a través del uso de software como visualizador de una representación geométrica de los binomios al cuadrado. Existen diferentes materiales que tratan de presentar a los estudiantes una forma en la que se pueden representar de forma geométrica y algebraica los productos notables; sin embargo, es de notar la importancia que tienen los conocimientos previos con los que los estudiantes cuentan, como son potencias, áreas y nociones básicas de álgebra.

1.3.3 Investigaciones sobre la enseñanza de eventos probabilísticos

Ramírez (2018) expone que “la probabilidad y el azar han sido campos del conocimiento humano mal interpretados o incomprensidos. Cuando nacemos intuitivamente aprendemos aritmética, geometría, física, etc., pero la probabilidad suele causar muchas dudas en los estudiantes” (p. 14).

Aunque hay diversas investigaciones en torno a la probabilidad y su enseñanza (Batanero, 2005, 2006), los eventos probabilísticos son un tema poco trabajado dentro de la matemática educativa. Son escasas las propuestas en específico para la enseñanza de la probabilidad, en comparación con otros temas de matemáticas en los que las exploraciones y propuestas para su didáctica son abundantes.

Los trabajos de investigación encontrados que usan materiales didácticos para la enseñanza de la probabilidad se remiten a explicar el pensamiento aleatorio (Gallardo, Cañadas, Martínez-Santaolalla y Molina, 2007; Ramírez, 2018) y establecer la probabilidad de ocurrencia de eventos, así como la definición del espacio muestral, que es vista durante los primeros años de secundaria, siendo básicamente éstos los conocimientos que adquieren los estudiantes sobre esta rama de las matemáticas. Para el manejo de estos conceptos en este documento se denominaron como eventos, sin embargo otros autores suelen llamarlos sucesos y de ambas formas es correcto.

1.4 Reflexión

Si aceptamos que los resultados nacionales en Educación Matemática no son favorables, es evidente que debemos buscar nuevas estrategias que promuevan y mantengan a los jóvenes en un constante interés por aprender. Después de la revisión acerca del uso de los materiales didácticos, se puede plantear como una alternativa el trabajar con estas herramientas en la clase de Matemáticas.

Las opiniones de algunos autores sobre la creación y uso de materiales didácticos permiten confirmar que llegar al aula con algo que llame la atención de los jóvenes, que presente una planeación estructurada y relación con los temas que se pretenden aprender es un buen inicio, ya que la mayoría puede interesarse por trabajar y no sólo utilizar lápiz y papel. Teniendo el ambiente propicio para enseñar, debemos ser cuidadosos con el diseño del material (y la secuencia de enseñanza completa) de manera que, además de ser una herramienta apropiada para atraer la atención, logre ser un medio para que visualice, comprenda y formalice aspectos, características o propiedades de un concepto matemático. Éste debe ser el propósito del material, favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por ello se propone que el diseño sea afín con lo que se requiere, ya que si en un primer contacto la clase no está bien planeada (la terminología y las preguntas guía), el

material perderá su función. Por eso es necesario que se planee con antelación cómo se guiará a los estudiantes.

Crear e implementar materiales didácticos no representa una tarea fácil. Se requiere de un amplio conocimiento de la didáctica y la matemática, de manera que éstos representen un verdadero cambio en la enseñanza. No sólo por llevarlos al salón de clases significa que se tendrá éxito, el trabajo que esté detrás de su diseño e implementación será pieza fundamental en su triunfo o fracaso. Por ello se recomienda que antes de utilizarlos se tenga una extensa preparación para evitar que los estudiantes tomen ideas equivocadas sobre ellos pensando que sólo se trata de juegos o que no aprenderán nada de ellos.

El hecho de cambiar la metodología de enseñanza, hace reflexionar sobre los puntos que son necesarios cambiar y cuales conservar, el proceso de investigar un tipo de enseñanza en la que varios autores dan su opinión, exponen posturas y brindan su opinión sobre algunas experiencias al utilizar material didáctico y el método Montessori, permite darse cuenta de la importancia de la preparación continua que deben tener los profesores para buscar una mejora dentro de su práctica pedagógica.

1.5 Planteamiento formal

1.5.1 Problemática

En la elaboración de su método, Montessori se enfocó prioritariamente en el nivel previo a la primaria, de los 0 a los 6 años. Abordó también algunos aspectos de nivel primaria, elaborando algunos materiales enfocados hacia ese nivel educativo.

Actualmente, en el nivel primaria generalmente se cuenta con los materiales necesarios para que el niño se desarrolle en todas las materias, incorporado a lo que la Secretaría de Educación Pública (SEP) espera que aprendan. El estar en contacto con el sistema Montessori y ver cómo se hacen las presentaciones en este nivel ha hecho que se pretenda incorporarlos también en secundaria, de manera puntual en la asignatura de Matemáticas.

Con el paso del tiempo, los estudiosos de su método fabricaron materiales para los siguientes niveles educativos, secundaria y bachillerato, pero contar con ellos es más complicado porque son más escasos y su costo es aún más elevado. Además de que, en particular, en secundaria (nivel educativo de nuestro interés) se han elaborado pocos materiales didácticos siguiendo su método, así que no es tan fácil encontrarlos en este nivel ni que estén adaptados a nuestro sistema educativo.

1.5.2 Problema de investigación

En el nivel secundaria del colegio donde labora la autora de esta Práctica de Desarrollo Profesional no se han diseñado las presentaciones de materiales que se requiere que los alumnos manipulen en un sistema Montessori en el proceso de enseñanza-aprendizaje de algunos conceptos matemáticos.

1.5.3 Pregunta de investigación

¿Cuál sería una propuesta de presentación de materiales Montessori para fomentar la construcción de los conceptos matemáticos: desigualdad del triángulo, binomio al cubo y eventos probabilísticos en estudiantes de nivel secundaria?

1.5.4 Objetivo general

Proponer tres presentaciones para enseñar tres temas de matemáticas (desigualdad del triángulo, binomio al cubo y eventos probabilísticos), uno para cada grado, en el colegio Renilde Montessori.

1.5.5 Objetivos particulares

Para alcanzar este objetivo general, se plantearon cuatro objetivos particulares:

- Indagar sobre la enseñanza de los temas elegidos, preferentemente mediada por materiales didácticos.
- Diseñar presentaciones que incorporen el uso de los materiales didácticos con base en el Método Montessori.
- Implementar las presentaciones diseñadas.
- Con base en el análisis de los resultados obtenidos, proponer mejoras en las presentaciones.

1.5.6 Hipótesis

Según Hernández, Fernández y Baptista, “las hipótesis nos indican lo que estamos buscando o tratando de probar y pueden definirse como explicaciones tentativas del fenómeno investigado formuladas a manera de proposiciones” (1997, pág. 76); es decir, las hipótesis son respuestas tentativas a la pregunta de investigación. En este sentido, para este trabajo no es posible responder de manera precisa desde el planteamiento cómo serían las presentaciones propuestas, previo al diseño e implementación. Sin embargo, es posible

argumentar que las presentaciones Montessori deben incluir los aspectos contemplados en el método: el propósito directo, propósito indirecto, punto de interés y control de error.

Al trabajar con materiales didácticos concretos, se debe verificar que el material cumpla con características adecuadas al plano de desarrollo en el que se encuentre el estudiante y mediante las que se desarrolle la inteligencia del niño; contemplar por ejemplo, los colores, la textura, entre otros. Además, el material, en conjunto con las preguntas de intervención, debe permitir el paso de lo concreto a lo abstracto, propiciando que el estudiante posteriormente pueda emplear su conocimiento sin su utilización. Finalmente, en la presentación, mediante la contemplación del trabajo experimental de los estudiantes con el material, se debe poder corroborar si pasó o no a lo abstracto.

Tomando en cuenta estos aspectos, se espera que los alumnos de primer grado puedan deducir el enunciado de la desigualdad del triángulo utilizando las barras de colores, en segundo grado justifiquen de manera geométrica el binomio al cuadrado y cubo para resolver ejercicios algebraicos con el uso del binomio al cubo y en tercer grado identifiquen eventos probabilísticos mediante el uso de las estampillas.

1.5.7 Justificación

El hacer una investigación, implementación y análisis de los materiales Montessori permitirá proponer presentaciones de manera fundamentada. Esto beneficiará a la institución y especialmente al aula de Matemáticas ya que la escuela pertenece a la AMI y debe cumplir con ciertos requerimientos para estar dentro de ella. Se incorporarán nuevos materiales que ayudarán al acercamiento y utilización de un método establecido por organizaciones internacionales y la misma María Montessori.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se presentan elementos teóricos del Método Montessori que se deben contemplar en el diseño de las presentaciones. Se inicia con una perspectiva histórica sobre la vida de Montessori, para comprender las aportaciones que ella realizó no sólo en el ámbito educativo sino también de desarrollo de la persona. Se presentan aspectos como los periodos de aprendizaje, la educación cósmica, el desarrollo de la inteligencia, la normalización, el ambiente preparado y el papel del guía.

2.1 Perspectiva histórica de María Montessori

María Montessori nació en Italia en agosto de 1870. De madre maestra y de padre técnico, “Inicialmente no fue pedagoga, sino médica con un profundo interés en la persona humana, tanto como el ser social como participante en el orden ontológico fundamental” (Montessori, 1991, p. 17). Montessori fue la primera médico mujer de Italia, y posteriormente fue profesora de antropología e higiene en la Universidad de Roma. Estar al tanto del desarrollo físico del individuo la llevó a hacer observaciones relacionadas con su desarrollo integral, ella defendía que al conocer al ser humano también se conocen sus necesidades y habilidades.

En un inicio trabajó con niños considerados “anormales” en el *Instituti Speciali Medico-pedagogici* junto con el psiquiatra Guiseppe Montessano, con quien posteriormente abriría el Instituto médico-pedagógico con los 50 niños recuperados.

En 1907, abre la primera Casa de los Niños (Casa dei bambini) en un barrio desfavorecido de la capital. Estas guarderías, que acogían a niños de tres a seis años que residían en la zona, constituyen las bases de uno de los mayores movimientos pedagógicos contemporáneos. En lugar de la asistencia, Montessori promueve, en realidad, la educación basada en el método experimental y en la observación científica, dando los primeros pasos de lo que se convertirá en la escuela nueva de la infancia, con los niños como centro (Santerini, 2013, p. 1).

Además, se reconoce que “el método Montessori es aplicable a todo estrato social, entre la población de los ghettos y barrios pobres, entre la clase media, entre los muy ricos, y como en instituciones públicas y privadas” (Montessori, 1991, p. 19). Este sistema permite desenvolver al individuo en varios rubros de la vida, ya que lo que pretende es desarrollar la personalidad, con el objetivo de lograr una vida madura e independiente en la etapa adulta.

Se puede decir que entre las personas que iniciaron con el estudio de la educación estuvo Montessori. Röhrs (1994) reporta que “Montessori fue una de los primeros en intentar establecer una verdadera ciencia de la educación” (p. 176) ya que se preocupaba por que los niños recibieran una buena educación, misma que estuviera pensada en ellos y sus necesidades individuales, por ello la individualización de su método.

Montessori presenta cinco principios básicos, el primero es *el respeto por los niños*, es decir el profesor debe mostrar respeto por los niños; el segundo, es *la mente absorbente del niño*, ellos pueden educarse a sí mismos, el niño aprende sólo por el hecho de vivir, por este motivo puede aprender todo de su ambiente; el tercero son *los períodos sensibles*, en los cuales los infantes pueden adquirir una habilidad con mucha facilidad; el cuarto se trata del *ambiente preparado*, se necesita un ambiente que sea organizado cuidadosamente para el estudiante, diseñado para fomentar su autoaprendizaje y crecimiento; el quinto es *el rol del adulto*, que es guiar al niño y darle a conocer el ambiente en forma respetuosa y cariñosa.

2.2 Períodos sensibles

Montessori “observó que existe una sucesión de periodos mediante los cuales, el niño revela una sensibilidad particular, desarrolla con mayor facilidad algunas aptitudes y se interesa más intensamente en tal o cual ejercicio o determinado objeto” (Yaglis, 1989, p. 77), a éstos se refería como *periodos sensibles*. Por ello, en el sistema Montessori se trabaja con pequeñas cantidades de alumnos, esto le permite al guía hacer una observación más detallada de cada uno de ellos, en donde puede identificar estos periodos en los que los estudiantes pueden aprender quizá de una forma más rápida y por lo tanto hacerles la presentación de un material. Yaglis (1989) reporta que el concepto de periodos sensibles no es de la autoría de Montessori pero sí es uno de los personajes que más aportó sobre ello.

La expresión “periodos sensibles del desarrollo” pertenece a Hugo Vries 1901, biólogo holandés. Él fue el primero en desarrollar una teoría de las mutaciones, según la cual el desarrollo de los organismos vivientes pasa por una transformación de sus caracteres principales (p. 77).

Estos periodos son transitorios, es decir, se presentan durante un determinado tiempo y luego desaparecen. Es por ello que al identificar que se presentan es conveniente explotarlos en los estudiantes y tratar de conseguir que se apropien de la mayor cantidad posible de conocimiento.

Como se muestra en la Figura 1, en la etapa de los cero a los seis años se presentan seis periodos que son pieza fundamental en la construcción del individuo. El lenguaje se construye desde el embarazo, a través de la imitación de sonidos de su lengua materna, lo que paulatinamente lo lleva a emitir sonidos, siendo a los tres años la cúspide de este desarrollo.

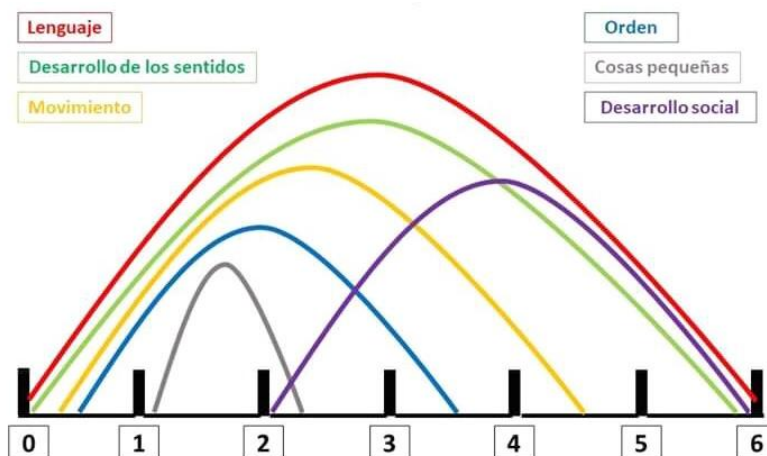


Figura 1. Duración de periodos sensibles en la etapa de la mente absorbente (Valenzuela, 1981).

En la constitución de los sentidos el niño aprende a ir refinándolos, como identificar formas, texturas, olores, sonidos, sabores, colores, entre otros, con el uso de la vista, olfato, gusto, oído y tacto. Para el movimiento, la repetición juega un papel importante, ya que a través de ella se logra un control. La etapa de orden surge aproximadamente al medio año, en donde el infante busca crear un orden externo y le genera cierta frustración el no tenerlo. Este orden lo prepara para las matemáticas, al empezar a ver una sucesión de números que tienen una ordenanza.

Para entender la forma como aprende el individuo es necesario conocer las etapas que son importantes en su desarrollo físico y cognitivo. Para trabajar con estudiantes de secundaria, el profesor debe estar informado sobre el desarrollo humano y Montessori enfocó sus esfuerzos en hacer las observaciones necesarias para establecer los periodos sensibles y los planos del desarrollo.

2.3 Planos del desarrollo

Montessori presenta cuatro planos del desarrollo que se refieren a la evolución de las personas que abarcan de los cero a los 24 años, los que divide en lapsos de seis años. El primer y tercer planos se caracterizan por ser aquellos en los que se presentan mayores cambios en la persona, tanto físicos como mentales, Montessori los denomina infancia y adolescencia, en la Figura 2 se observa que se encuentran de color rojo. Los periodos de la niñez y madurez los presenta en color azul puesto que se trata de un lapso en el que hay cierta estabilidad al no presentarse cambios físicos y mentales significativos.

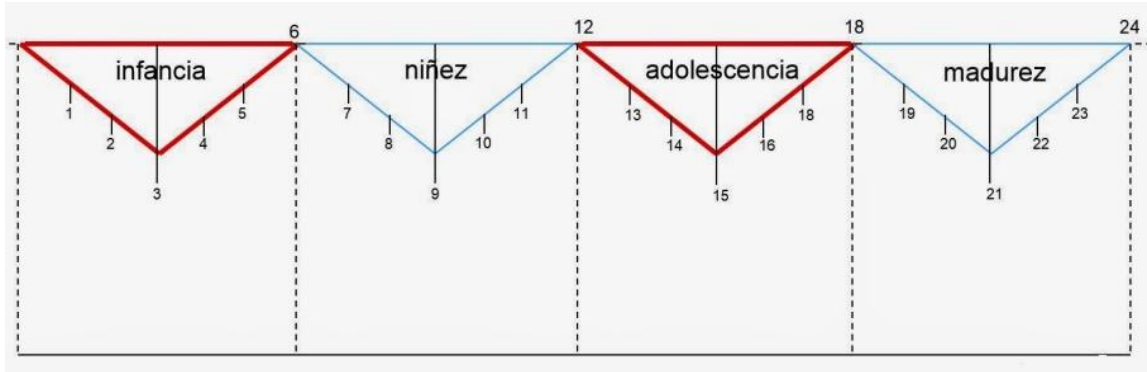


Figura 2. Planos del desarrollo, de María Montessori (Andújar y Rosillo, 2016).

2.3.1 Primer periodo

Se habla de una fase del embrión psíquico del niño, en la que su psique está en formación. A este plano se le llama la mente absorbente “¿y cómo ocurre esto? Se dice <<Recuerda las cosas>>; pero, para recordar hay que tener una memoria, y el niño no tiene memoria” (Montessori, 1990, p. 42). Durante esta etapa las características que debe aprender son el movimiento, el lenguaje y lo que significa adaptación. Es un explorador sensorial, aprende a través de los sentidos y la manipulación de los objetos. En la subfase de 3 a 6 años presenta un mayor interés sobre ¿qué es cada objeto?

2.3.2 Segundo periodo

En este periodo, también conocido como la niñez, el niño presenta una necesidad de independencia, desarrollo de la imaginación e incrementa su socialización. En el sistema Montessori se divide en dos etapas, en la primera le llaman Taller I en la que conviven los niños de primero, segundo y tercero, con edades entre los 6 a 8 años. En la segunda etapa se trata de cuarto, quinto y sexto, de 9 a 11 años, denominado Taller II.

Además en estos talleres se presentan las grandes lecciones de Montessori, en las que mediante fábulas se trabaja el origen del conocimiento, mismo que denomina educación cósmica.

Durante este tiempo se presentan menos cambios físicos, por lo que se puede decir que se trata de una etapa de estabilidad. Además, se trata de una preparación para otra etapa en la que se vuelven a presentar cambios considerables, la adolescencia.

2.3.3 Tercer periodo

Se refiere a la adolescencia, en él el individuo es un explorador de la vida social. Este periodo es similar al primero, ya que la persona atraviesa por cambios físicos, se le dificulta la concentración, necesita aceptación social buscando identificación con los diferentes estándares de belleza y está en busca de una identidad.

Se trata de una preparación para la vida adulta, en donde la persona cursa la escuela secundaria y el bachillerato, tratándose de una edad de los 12 a los 18 años, en los que se prepara para la vida adulta. En este periodo se presenta rebeldía y una serie de cuestionamientos hacia la autoridad.

2.3.4 Cuarto periodo

Se refiere a la madurez, donde se presenta una estabilidad en cuanto a cambios físicos, pero ahora el individuo debe tomar decisiones, generalmente ingresa a la universidad o a una población económica activa.

Estos periodos son universales, es decir que se presentan en todos los niños, son transitorios, las características sólo se presentan en el momento que corresponde.

2.4 El desarrollo de la inteligencia

Montessori afirmaba que en la primera infancia la inteligencia se desarrollaba a través de los sentidos, a medida que éstos se iban refinando mediante el uso del material Montessori. El principal sentido que pretendía desarrollar es el del tacto que se relaciona principalmente con la mano, forma parte del medio por el cual se forman los conceptos abstractos.

La mano es un órgano elegante y complicadísimo de estructura, que permite las manifestaciones intelectuales y establece relaciones especiales con el ambiente: el hombre, puede decirse, que <<toma posesión del ambiente con sus manos>> transformándolo con el auxilio de su inteligencia, cumpliendo su misión de esta manera, en el inmenso escenario del universo (Montessori, 1982, p. 136).

La inteligencia se desarrolla dando herramientas para estimular el trabajo personal, en el caso de los niños, ésta es diferente en comparación con la de los adultos. San Julián (2016) expone que:

El niño y la niña poseen una inteligencia distinta a la de las personas adultas, quienes adquieren los conocimientos con la inteligencia, mientras que los niños y niñas lo absorben con su vida psíquica, por ejemplo, el infante aprende el lenguaje de su entorno simplemente viviendo (p. 10).

Por ello, el entorno se debe diseñar, planificar de tal manera que los estudiantes puedan estar en un ambiente adecuado, tomando en cuenta sus periodos sensibles, en contacto con el material, que lo manipulen y realicen preguntas sobre ello, que los pueda llevar a crear su propio conocimiento.

2.5 La normalización

Un aspecto importante dentro de la convivencia de un salón de clases es la *normalización*, la cual “proviene de la <<concentración>> en un trabajo” (Montessori, 1986/1990, p. 258). De ella se deriva que el estudiante comprenda las normas implícitas que existen en el salón de clases, normas de convivencia con las que se preserva la paz y se crea un ambiente de sana convivencia. Se dice que un “niño normalizado es un niño que, en virtud de un entorno que le ha permitido desarrollarse normalmente, ha logrado la autodisciplina y el control (físico y mental) necesarios para una vida saludable” (Consentino, 2006, p. 67).

Dentro de la normalización se toma en cuenta la disciplina, Montessori la describe en una historia en la que una maestra daba una orden y los niños la ejecutaban inmediatamente:

A pesar de esta aparente dependencia, actuaban según su propia iniciativa, disponiendo de su tiempo. Solos cogían los objetos, ordenaban la escuela y cuando la maestra llegaba con retraso o salía, dejando solos a los niños, todo seguía bien, esta era la principal atracción observada: el orden y la disciplina unidas íntimamente a la espontaneidad (Montessori, 1982, p. 207).

Para hablar de una normalización en el aula y en el alumno, primero se debe tomar en cuenta al niño como individuo. Para ello es importante la observación, desde que el estudiante se presenta en el salón de clases, el guía debe observar con detalle su persona, desde su expresión hasta los movimientos y las actitudes que muestre, a partir de ello hará un diagnóstico en el que lo ubicará. Montessori presenta un abanico (ver Figura 3) en el que se muestran algunas características para ubicar al niño.

Cuando los niños pueden concentrarse, todas las líneas a la derecha de esta mediana desaparecen, y sólo queda un tipo que presenta las características representadas por las líneas que se hallan a la izquierda. La pérdida de tantos defectos superficiales no es obra del adulto, sino del niño mismo, que atraviesa la línea principal con toda su personalidad: y entonces se alcanza la normalidad (Montessori, 1986/1990, p. 256).

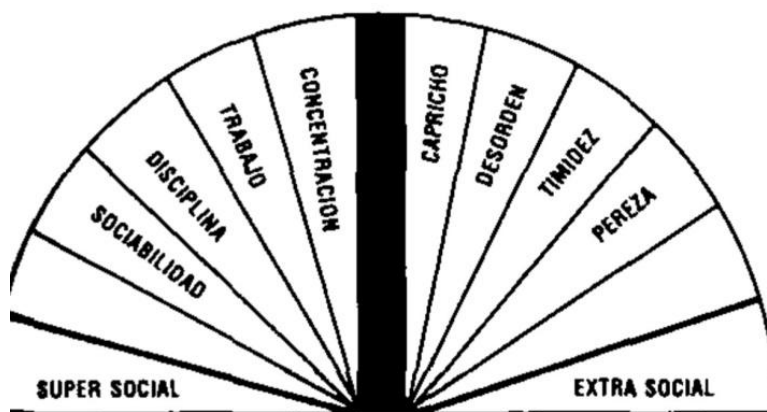


Figura 3. Abanico (Montessori, 1982).

Se dice entonces que mejorar el ambiente dentro del aula de clases fue una de las principales metas de Montessori y que:

Es un logro de Montessori haber creado condiciones que permitiesen a los niños manifestar sus naturales propensiones de desarrollo como parte del subsecuente comportamiento respecto al trabajo. Les dio a los niños un medio ambiente apropiado y libertad guiada para que pudiesen actuar de acuerdo con sus necesidades, ritmo y compás interiores, y como resultado, revelaron características que antes no se les atribuían (Mario Montessori, 1991, p. 14).

Cuando se habla de disciplina, es común pensar que se trata de que el individuo esté de alguna manera sometido ante una autoridad mayor, ya sea otra persona o él mismo, pero “el verdadero significado de la disciplina es autocontrol” (Tittle y Ohlhaber, 1977, p. 12); es decir, tomar en cuenta las exigencias personales y tener control interior.

2.6 Ambiente preparado

Dentro de la educación Montessori se maneja el ambiente preparado, refiriéndose a todo lo que está en contacto con el niño y que interviene a la hora de su enseñanza, reduciendo los obstáculos al mínimo, “el entorno preparado es un aspecto importante de Montessori. Su propósito es proporcionar los mejores recursos posibles para el máximo funcionamiento y el desarrollo de los niños y las niñas” (Kahn, 1990, p. 28).

Las consideraciones que se deben tener están en relación con el plano de desarrollo y subfase en la que se encuentre el niño, los periodos sensitivos y las tendencias humanas operando en el período de vida. Para que se trate de un ambiente preparado se debe tratar de un lugar en el que no importa el tamaño, sino que permita el trabajo del niño de acuerdo con su edad, que tome en cuenta los materiales y muebles con los que se cuenta. El niño debe sentirse libre en el aula, por tanto ésta tiene que ser segura. El adulto a cargo

tiene la responsabilidad de preparar y mantener el ambiente sin obstáculos. Se propone tener respeto hacia el trabajo del niño.

2.7 El papel del guía

Este método centra la atención en el ambiente, en donde el papel del maestro es *pasivo*, no debe obstaculizar la actividad del niño, y *activo* en lo que respecta a ser el enlace entre el niño y el ambiente.

Lo que más ha suscitado discusiones ha sido la inversión de papeles entre el maestro y el niño; el maestro sin cátedra, sin autoridad y casi sin enseñanza y el niño, transformando en el centro de actividad, que aprende solo, libre en la elección de sus ocupaciones y de sus movimientos (Montessori, 1982, p. 176).

El guía es responsable de todo lo que ocurre dentro del aula, debe anticiparse a las posibles contingencias que se presenten. Por ello se habla de un ambiente preparado, en donde se tome en cuenta el acomodo del material, el acceso a cada área y el desarrollo de las clases, “Todo esto exige un entorno especial, y la preparación de un personal práctico” (Montessori, 1917, p. 127).

Algunas aulas también cuentan con la participación de un co-guía, que tiene la función de asistir al guía en los casos que requiera ayuda, como por ejemplo, acomodar el material, mantener el orden mientras hay presentación con otros alumnos e incluso dirigir presentaciones. Pero es realmente el guía quien tiene el mando sobre lo que sucede en el aula de clases.

2.8 La educación cósmica

Una de las piezas fundamentales en la metodología de Montessori es la *educación cósmica*, enfocada principalmente en la edad de los 6 a los 12 años, lo que en el sistema educativo mexicano, abarca los seis años de educación primaria. Dentro de ella se abordan cinco lecciones impresionistas, que tratan de satisfacer el interés de la niñez por saber de dónde venimos.

Botero (2004) reporta que “el Cosmos es el origen y la materia irrebable de la naturaleza en tanto orden de la vida, y por esto lo es también del hombre” (p. 115). Por ello, estas lecciones son historias que se cuentan en la educación primaria, no se hace de manera aislada, sino que tienen relación entre sí. Para llegar a comprender la necesidad que tiene el ser humano de la utilización y comprensión de las matemáticas, es conveniente que antes conozca la evolución que han tenido a lo largo de la historia. Se trata de relatar a los estudiantes el proceso que ha llevado a la creación y evolución de las matemáticas.

Las cinco lecciones que se abordan son:

- *La historia del universo*

En ella se relata cómo fue la creación del universo y de nuestro sistema solar desde la explosión del Big Bang, también se le conoce como “El Dios sin manos”.

- *La historia de la vida*

En la historia de la vida se cuenta cómo fue el proceso del surgimiento y evolución de la vida, empezando desde los seres más pequeños y el transcurso que se llevó para que surgieran diferentes tipos de especies.

- *La historia del ser humano*

En esta lección se habla específicamente de la especie de los seres humanos, se habla desde la época de los primeros pobladores de la Tierra y cómo fueron evolucionando a través de los años.

- *La historia de la escritura*

Se trata de la historia de la escritura y de la comunicación. Se habla de una evolución que surgió en el ser humano para establecer comunicación entre ellos y de una forma en la que pudieran intercambiar información de manera no presencial.

- *La historia de los números*

En la historia de los números, se menciona la necesidad que tuvieron las primeras civilizaciones para hacer conteos y poder comunicarse entre ellos esa información.

Es necesario recordar que este enfoque se aplica para la educación en general, no sólo para la educación matemática. Sin embargo, en esta investigación nos centraremos en el conocimiento matemático, principalmente en la quinta categoría, la historia de los números.

2.9 El material Montessori

El diseño del material Montessori se basa en el método científico. Montessori observaba el comportamiento de los niños y a partir de ello obtenía sus conclusiones: “usando la experimentación y la observación, Montessori creó y adaptó materiales basados en lo que ella determinó que eran ‘las preferencias estéticas y sensoriales de los niños en color, dimensión y textura’” (Loeflefer, 1992, citado en Reed, 2008, p. 5). Por ello, la elaboración del material Montessori requiere tiempo y busca una estética que sea llamativa para los estudiantes.

La función fundamental del material es generalmente hecha a un lado cuando es comparada con el equipo que se encuentra en la mayoría de salones de clase de preprimaria. La desilusión con el material Montessori resulta debido a las comparaciones superficiales (Montessori, 1991, p. 35).

El material Montessori, al tener una línea de investigación que respalda su efectividad (véase, por ejemplo, Lillard, 2000a y 2000b), no debe ser considerado un material didáctico común, en vista de que éste se ha desarrollado mediante investigación. Al efectuar el diseño de los materiales se toma en cuenta que tiene que ir acompañado de una serie de pasos muy marcados para los estudiantes, denominada *presentación*, mediante la cual se pretende guiar a que los alumnos construyan conocimiento y puedan dar el paso de lo concreto a lo abstracto.

Montessori elaboró su material pensando en que, a partir de los conceptos concretos, el niño pudiera construir “las bases de su conocimiento” y no sólo memorizarlo. A la vez, la estética es parte del atractivo, por lo tanto debe dársele una buena impresión sensorial, interesante a la vista y que los estudiantes puedan manipularlo.

Cuando se habla de un ambiente preparado, también incluimos al material:

No sólo debe ser atractivo, estético y práctico, desde la posición de los niños de diferentes grupos de edades, sino reflejar la organización y el orden necesarios para que una comunidad funcione adecuadamente. Deben derivarse no del deseo del adulto por imponer su autoridad, sino que, como al regular el tráfico, de un deseo de permitir a todo individuo libertad de actividad independiente en tanto su libertad no interfiera con la de los demás (Montessori, 1991, p. 39).

Al referirse a un Material Montessori se puede decir que se trata de algo concreto, del que el niño puede aprender a su ritmo tomando lo que necesita, haciendo las manipulaciones que requiere sin la interrupción del guía o de sus compañeros. Otra característica importante del material es el control del error: que el niño al ir manipulándolo pueda verificar si lo que está haciendo es correcto, de manera que si no lo es no se vea bien estructurado, construido o le pueden sobrar piezas. En el caso de que no lo identifique será necesario evaluar su percepción visual.

El sentido del tacto juega un papel importante dentro de la utilización del material, por ello es necesario que tenga la textura, tamaño, peso y temperatura adecuados; en lo que se refiere a la vista se considera el color; en el oído, se toma en cuenta el sonido que pueda emitir. En ese sentido, Cabello (2006) reporta que un material debe de “ser resistente y duradero ante las acciones experimentales del niño” (p. 22), por lo que se tiene que optar por los materiales resistentes; es por ello que en el caso de Montessori se elaboran principalmente con madera.

El material montessoriano está diseñado para ayudar al niño según la etapa de desarrollo en la que se encuentre. Le ayuda en su concentración y a establecer un orden interno y externo, para ello siempre se le debe presentar todo acomodado y al finalizar su utilización lo tiene que dejar de la misma forma, respetando el espacio ocupado por sus compañeros y permaneciendo en silencio para su propia concentración y la de los demás.

Montessori no veía los materiales como juguetes, sino como instrumentos de aprendizaje, por ello rechazaba la idea de que el material se hiciera de plástico, éste debía ser de madera o materiales que se asemejaran a los que se utilizan en la vida adulta. Debido a que los instrumentos manejados por los adultos eran difíciles de manipular por los niños, debían ser del mismo material pero adaptados al tamaño de los infantes para una mejor maniobra.

Además, los materiales deben tener una recompensa para los estudiantes. Al respecto Montessori reporta que “los objetos deben servir principalmente para ofrecer posibilidades de gratificación. Al manejarlos, los niños también descubrirán algunas de sus cualidades objetivas, pero esto es más o menos un problema secundario” (p. 31).

En cuanto a los materiales que se utilizan para la enseñanza de las Matemáticas, se dice que pueden ser “poderosos para enseñar [...] porque forman un plan de estudios coherente, que pasa de representaciones concretas de conceptos a niveles de abstracción creciente, que culminan en algoritmos de papel y lápiz” (American Montessori Society [AMS], 2002, citado en Donabella y Rulle, 2008, p. 4).

En este capítulo se han presentado aspectos teóricos generales que conforman la filosofía Montessori y que serán contemplados en el diseño, aplicación y mejora de las presentaciones de los conceptos matemáticos y serán incluidos directa o indirectamente. Cabe destacar que para llevar a cabo lo antes mencionado, es necesario entender que las presentaciones van de la mano con las bases filosóficas del método Montessori. Éste que no solamente habla de la parte matemática, sino también de la humanística, en la que se toman en cuenta los saberes de los alumnos, las etapas de maduración y las necesidades grupales e individuales de cada uno. Además de crear una preparación de los alumnos para llegar a la presentación con los elementos necesarios que le ayuden a construir el conocimiento que se espera tome del material.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En el presente capítulo se hace una descripción de elementos metodológicos propios del trabajo desarrollado por Montessori y que se esperan en el diseño de presentaciones dentro de esta línea. Asimismo, se describen aspectos propios de una investigación, tales como el desarrollo de las herramientas y la población de estudio.

3.1 Tipo de investigación

La práctica de desarrollo profesional que se realizó fue de tipo cualitativa. Según Kothari (2004), la investigación de tipo cualitativo es aquella “donde el objetivo es descubrir los motivos subyacentes del comportamiento humano” (p. 3). Consideramos que esta descripción se apega a lo realizado en este trabajo.

3.2 Diseño de la Investigación

Posterior a la revisión de antecedentes y el planteamiento formal de la investigación, se realizaron diversas actividades para la consecución del objetivo planteado:

Se usaron tres materiales didácticos implementados con las respectivas presentaciones. Éstas fueron diseñadas respetando los aspectos contemplados en el Método Montessori. Se aplicaron en el nivel secundaria, con un concepto para cada grado.

Los conceptos fueron seleccionados derivados del material que poseía la institución en la que se hizo la observación. Los aspectos matemáticos se abordaron conforme al libro de texto con el que se trabaja dentro de la escuela, mismo que fue seleccionado por la directora, ya que durante el ciclo escolar el grupo de primer grado se rigió bajo el Nuevo Modelo Educativo 2017, mientras que segundo y tercero aún estuvieron con el Plan de Estudios 2011. Por ello, con el fin de hacer una unificación hacia la forma de trabajo, se siguió lo marcado por el libro de texto. Éste fue seleccionado por la directora del plantel, que aunque no siguen el método Montessori, si están autorizados por la SEP.

Asimismo, para la toma de datos se hizo una triangulación de instrumentos en las observaciones, en las que se emplearon videograbaciones, entrevistas y una prueba de conocimientos a los estudiantes que participaron en las aplicaciones.

La aplicación de los instrumentos se llevó a cabo en tres sesiones para cada grado, en la primera se aplicó la presentación, en la segunda la entrevista individual y en la tercera una prueba escrita la cual se termina llenado una rúbrica con la información recabada en los pasos dos y tres.

3.3 Método Montessori

En este apartado se describirán los elementos incluidos en el diseño de las presentaciones que se utilizaron para la implementación de los materiales. La implementación se llevó a cabo como parte de las presentaciones internas de la institución.

De acuerdo con el Método Montessori, el docente debe preparar el ambiente en el que se desarrollará la presentación y prever las posibles situaciones que se pueden presentar en el momento de la clase. Durante la presentación se muestra una serie de pasos muy marcados, es decir, en los que se haga uso de la gesticulación y que el estudiante se percate de lo que está realizando el guía. Además los pasos deben estar secuenciados, se deben llevar a cabo para que el niño pueda aprovechar y tomar la información que necesita del material. “Respecto a su método, [Montessori] era estricta al requerir a aquellos que deseaban aplicarlo en su nombre que siguiesen sus instrucciones. De otro modo confundirían el asunto con el experimento de ella” (Montessori, 1991, p. 18), por ello antes de hacer una presentación a los estudiantes, el guía tiene que estar bien preparado y dominar la presentación para evitar crear alguna confusión, omitir algo o propiciar la creación de algún conocimiento erróneo.

Cabe destacar que para la aplicación de los materiales, los estudiantes se encontraban en un estado de normalización. Es decir, que ya se habían adaptado al ambiente y al guía, saben en dónde se encuentran los materiales del área de matemáticas y pueden reconocerlos cuando se les pide su transportación.

Siguiendo el formato empleado en los años de formación de las dos guías Montessori de la institución para el desarrollo de las presentaciones internas, las presentaciones que se diseñaron e implementaron se compusieron de cinco elementos: propósito directo, propósito indirecto, punto de interés, control de error y el desarrollo de la presentación.

Las presentaciones propuestas fueron diseñadas por la autora de este trabajo, revisadas por los asesores del mismo y avaladas por las dos guías Montessori. Luego se analizó su efectividad, para ello se evaluó si después de la aplicación de las presentaciones los estudiantes aprendieron lo que durante el diseño de las presentaciones se planteó, es decir, los aprendizajes esperados para cada uno, verificando o no la efectividad de las mismas, para posteriormente proponer mejoras en su diseño.

3.3.1 Propósito directo

El propósito directo hace referencia a lo que se espera que los estudiantes aprendan. Por ejemplo, en la Figura 4 se presenta el banco para hacer sumas; un propósito directo es que los estudiantes vean cómo se realiza el cambio de unidad, reconociendo las unidades, decenas, centenas y millares.

En una primera instancia se le presenta de una forma en la que sea capaz de ver cómo se componen cada una de las unidades y compare las cantidades con las que está trabajando.



Figura 4. Banco, material Montessori (Reseteomatemático, 2016).

Feez (2007) reporta que “el objetivo directo del trabajo es una ‘generalización de ideas’ con el niño reconociendo figuras en el entorno” (p. 301), es decir presentarle el material con el objetivo de que aprenda un conocimiento. En la Figura 5 se muestra cómo uno de los estudiantes reconoce y sitúa cada figura a través de la ubicación en el lugar que le corresponde.



Figura 5. Niño trabajando con material Montessori (Le Guay, 1984).

3.3.2 Propósito indirecto

El propósito indirecto es aquel que viene sin la intención de que el alumno lo aprenda. Siguiendo con el ejemplo del banco Figura 4, un propósito indirecto es que se vea el punto, lo lineal, la superficie y el volumen. Feez (2007) define el propósito indirecto en un ejemplo

acerca de la geometría en donde expresa que es “el uso futuro de estas formas en el estudio de la geometría” (p. 301), que puede ser la revisión de áreas y perímetros.

3.3.3 Punto de interés

Trabajar con un material requiere de paciencia, por ello no se debe forzar al niño para que lo tome o pasar más tiempo del requerido en él. Los estudiantes siempre deben tener interés en trabajar, por ello se recomienda que sólo se destine el tiempo suficiente para su aprendizaje, ya que si pasa demasiado tiempo en él podría perderlo y si no lo comprende le generará frustración.

El material debe de cumplir con la función de generar un aprendizaje inmediato, es decir desde el primer contacto con él puede generar conocimiento aunque no se trate del propósito directo. Por ejemplo, al estarlo manipulando va aprendiendo sobre colores, texturas, peso, entre otros aspectos que podrían favorecer que empiece a hacer sus redes mentales para apropiarse de los conceptos abstractos.

La etapa de presentación presenta la indicación como un medio para resaltar un movimiento crítico, un objeto o parte de un objeto como un punto de interés. Esto se logra mediante el gesto de señalar, enmarcando un movimiento con una vacilación exagerada ensayada, o con menos frecuencia (Feez, 2007, p. 270).

3.3.4 Control de error

Cuando el niño está utilizando el material Montessori puede ir evaluando su progreso, los materiales están diseñados de manera que él mismo pueda observar si lo que está haciendo es correcto o no lo es, así como el avance que está teniendo, sin la necesidad de la aprobación del adulto. Como menciona Mak: “una característica de los materiales de la Dra. Montessori es que se autocorrigien, lo que significa que el niño verá por sí mismo si ha cometido un error” (2014, p. 23).

Algunos materiales son autocorrectivos a nivel visual, mientras que otros en los que no es tan evidente presentan alguna tarjeta, imagen o enunciado con la respuesta y que sin la necesidad de que el guía le indique si está bien o no, él lo pueda verificar por sí mismo. Éste es el caso de los alumnos que ya pueden leer o tener un mayor nivel de cognición, en cambio para la etapa de la mente absorbente se opta por una autocorrección visual. Un ejemplo de ello es la Torre rosa (Figura 6), ya que si no se arma de manera correcta no tendrá el soporte necesario para mantenerse erguida, además de que estéticamente no se verá bien.

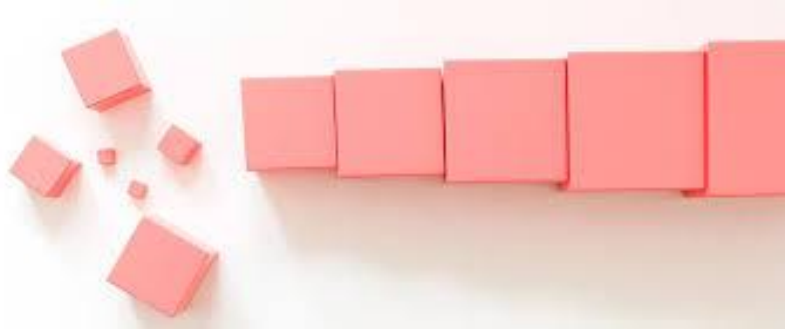


Figura 6. Torre rosa, material Montessori (Alupé, 2018).

Cuando se les hacen correcciones constantemente a los alumnos se les crea un miedo al error. Desde esta metodología, es necesario dejar que se equivoque y que a partir de ello aprenda a autocorregirse, transmitiéndole que no siempre es importante llegar a un resultado correcto, sino aprender durante el proceso.

Montessori (1986/1990) afirma que:

Es preciso admitir que todos podemos equivocarnos; es una realidad de la vida, o sea que admitirlo ya es dar un gran paso hacia el progreso. Si debemos recorrer los caminos de la verdad y de la realidad, debemos admitir que podemos equivocarnos todos, de lo contrario seríamos perfectos. Por tanto, será mejor demostrar una actitud simpática hacia el error, y considerarlo como un compañero que vive con nosotros y que tiene una finalidad, porque realmente la tiene (p. 309).

3.3.5 Desarrollo de la presentación

Las presentaciones se deben diseñar contemplando los elementos recién descritos y dependiendo del nivel en el que se encuentre el alumno. En los primeros niveles el guía no habla, su papel se enfoca en apoyar al niño y hacer los movimientos muy marcados durante la manipulación de los materiales; posteriormente, con gestos dar la aprobación o indicar que no es correcto lo que está haciendo. Mientras que en niveles posteriores, tal es el caso de primaria y secundaria, ya existe una mayor interacción entre el guía y el alumno, de esta forma se pueden hacer preguntas en las que se oriente al estudiante a tomar los conocimientos que requiere.

Durante la presentación, el guía se debe situar del lado derecho del alumno (si es diestro el maestro), de manera que no le obstruya la vista al alumno y no de frente a manera de no invertir el material a la vista del alumno o de él mismo.

Las presentaciones Montessori “son de tres tipos: presentaciones colectivas, presentaciones grupales, y presentaciones individuales” (Joosten, 1968, p. 12). Una presentación *individual* es aquella que se aplica a un solo estudiante, esto puede deberse a que ya esté preparado para ella o porque aún no la domine. Las presentaciones *colectivas*

son aquellas en las que se trabaja con un grupo seleccionado de la población estudiantil, y las *grupales* son las que se realizan con todos los alumnos.

La presentación se hace cuando el estudiante se enfrenta al material por primera vez o si tiene que tomar algo diferente. Antes de la realización de la presentación se recomienda que el adulto verifique que el material se encuentre completo y en orden, así como hacer un previo ensayo para evitar utilizar términos incorrectos y para recordar la estructura y los elementos mencionados en los apartados anteriores.

El maestro acompañará al alumno en todo momento, desde la invitación a trabajar con el material, ir por él al estante, durante la presentación y al finalizarla. Es importante reconocer que durante la ejecución de la presentación el adulto sólo se enfocará en él o los estudiantes a los que se los esté mostrando; he ahí la importancia de la co-guía, ya que se hará cargo de los alumnos restantes para que no exista ninguna interrupción en el proceso de la misma.

3.4 Instrumentos para la recolección de datos

Para la recolección de datos, durante la aplicación se hizo uso de diferentes instrumentos para evaluar y determinar los aprendizajes de los estudiantes. Se hizo una triangulación de instrumentos en la que se utilizaron la videograbación, entrevista y una prueba de conocimientos.

El propósito de la entrevista fue conocer si los estudiantes adquirieron el conocimiento que se planteó en el propósito directo durante la presentación. Considerando que, de no haber sido así y si hubiera dudas o conocimientos incorrectos, se podrían aclarar dejando que el estudiante manipule el material para explicarlo y haciendo los cuestionamientos sin la interrupción de sus compañeros y que él solo demostrara lo que sabía. Para Álvarez-Gayou (2003) la entrevista “busca entender el mundo desde la perspectiva del entrevistado, y desmenuzar los significados de sus experiencias” (p. 109).

La videograbación fue de utilidad, ya que en ella se observaron detalles que durante la aplicación de las presentaciones no fue posible. Por ejemplo, ver la forma en la que se desempeñó la guía, los comentarios que hicieron los estudiantes, las posturas y acciones que tenían en el transcurso, así como para observar cualquier detalle que influyera en la práctica. Al respecto, García (2011) reporta que:

El vídeo permite obtener mayor información por la posibilidad de registrar imagen y sonido. En el caso de entrevistas, el investigador puede ocuparse sólo de las preguntas y luego, al revisar el material de vídeo, enterarse de comportamientos, expresiones, factores ambientales y anímicos que pudieran afectar e intervenir en el desarrollo de la entrevista (p. 4).

Por último, la prueba de conocimientos que se les aplicó para dar muestra de si los alumnos lograron conseguir los aprendizajes esperados de cada sesión; a su vez dar el paso de lo concreto a lo abstracto a través de la utilización del material didáctico y la presentación, aquí propuestas. Aunque la filosofía Montessori indica que no se les debe de aplicar exámenes a los estudiantes, ya que la medición de sus aprendizajes se hace de acuerdo al avance que se tenga, en el sistema educativo mexicano no están exentos de su aplicación, por lo que se les tenía que preparar en ese aspecto.

Al final se hizo el llenado de una rúbrica por estudiante, diseñada acorde con los aprendizajes esperados según el nivel de conocimientos que se espera pueda alcanzar. Ésta se llenó con los datos recogidos en la entrevista y la prueba.

3.5 Población de estudio

Para la práctica de desarrollo profesional se seleccionaron tres grupos de secundaria, uno de cada grado, con la intención de diseñar las presentaciones del material y llevarlas a cabo. Los grupos presentaban algunos estudiantes con necesidades educativas especiales, por ello los aprendizajes esperados que se plantearon para ellos fueron enfocados en sus capacidades específicas, dependiendo de las características cognitivas de cada uno. Con ello se pretendió que en la medida de su desarrollo pudieran aprender algo de lo que se revisó en la clase; se esperaba que algunos se desarrollaran más que otros, dependiendo de su nivel de abstracción y de si eran capaces de pasar de lo concreto a lo abstracto y resolver la prueba final.

Para referirnos a los estudiantes se utilizaron claves que inician con la letra A (de alumnos), seguida del número que representaba el grado y, por último, el número de lista que le correspondía en el momento de la aplicación. Por ejemplo, el primer alumno de la lista de segundo grado quedó representado como A2.1.

3.5.1 Primer grado

El grupo de primer año estuvo conformado por seis estudiantes con edades de 12 o 13 años, de los cuales tres son hombres y tres mujeres.

Los estudiantes A1.1, A1.2 Y A1.3 no presentan alguna discapacidad o situación especial, son hábiles en cuanto a cálculo mental, operaciones básicas, trazo de figuras geométricas con el uso de juego de geometría y pensamiento lógico matemático. Los tres estudiantes provienen de la escuela primaria perteneciente al mismo colegio Renilde Montessori, saben trabajar con material Montessori y su desempeño dentro de la clase se considera dentro de un rango satisfactorio.

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

La alumna A1.4 ingresó en el mes de enero de un sistema diferente, presentó un diagnóstico de lento aprendizaje, tiene lapsos de concentración cortos, es decir, no puede estar por más de 3 minutos enfocada en la misma actividad por lo que se le tuvo que ayudar para que no divagara en otras cosas. Sus conocimientos matemáticos se limitan a hacer conteos pequeños del 1 al 10 sin relacionar el símbolo con la cantidad y no sabe leer ni escribir.

El alumno A1.5 ingresó a mediados de febrero, tiene dificultades para seguir instrucciones por lo que se retrasa en los trabajos y tiene miedo a expresar sus dudas.

La alumna A1.6 ingresó una semana antes de la aplicación, por lo que estaba en proceso de evaluación diagnóstica para identificar los conocimientos previos que tenía. Venía de un sistema diferente y de otro estado, sin embargo, no presentó algún diagnóstico que indicara requerimiento de atención especial.

Normalización:

La normalización del grupo se dio a las pocas semanas de su creación (siendo esto a mediados de septiembre) tomando en cuenta que el inicio del ciclo escolar fue en agosto.

Se trata de alumnos que ya conocen las reglas de un aula Montessori, pues tres de ellos provienen de la misma institución Montessori. Aun así se remarcaron algunas reglas de convivencia que se debían respetar, además de indicárseles que nos sujetaríamos a los temas establecidos en el libro de texto y el libro de los Aprendizajes clave (2017).

Para los alumnos A1.4, A1.5 y A1.6 fue complicada la adaptación a las reglas y a la convivencia, ya que en sus escuelas anteriores los grupos eran más numerosos en comparación con los que tiene el colegio. También expresaron que las clases eran diferentes, pues anteriormente todo el grupo recibía la misma educación mientras que ahora cada quien recibe los trabajos que puede realizar, es decir que si no se entendió un tema o actividad en específico, se le pone un ejercicio en el que trabaje esa situación.

3.5.2 Segundo grado

El grupo de segundo grado estuvo conformado por 8 hombres y una mujer, con edades entre los 13 y 14 años.

Los alumnos A2.2, A2.4, A2.5, A2.6 y A.2.9, no presentan ninguna situación especial que requiera hacer adecuaciones del nivel a los temas, ya que no presentan algún diagnóstico que diga lo contrario.

En el caso de los estudiantes A2.1 y A2.8, se requirió hacer adecuaciones ya que tienen lento aprendizaje, necesitaron que se les explicara en más de una ocasión, de forma personalizada y los aprendizajes esperados se plantearon conforme a sus capacidades.

Los dos alumnos restantes A2.3 y A2.7 tienen Síndrome de Down, el primero sólo cuenta hasta diez e identifica figuras como triángulos y círculos, mientras que el segundo se encuentra en el mismo nivel que los estudiantes con lento aprendizaje.

En general presentaron problemas al resolver exámenes, ya que aunque demostraban tener conocimientos durante las actividades o la clase, en una prueba escrita sin ayuda se les dificultó, por lo que requirieron apoyo para resolverla.

Normalización:

La adaptación se dio hasta finales del mes de octubre, debido a que se integraron dos nuevos estudiantes al grupo que ya estaba conformado por seis alumnos.

El proceso de ajuste en un inicio fue complicado debido al hecho de las diferencias notables en conocimientos: pues mientras que cuatro estudiantes pueden resolver las actividades establecidas por el programa normalmente, los demás se ven limitados cognitivamente para hacerlo. Por ello, el proceso llevó más tiempo en comparación con el de los otros dos grupos.

Los estudiantes que se integraron fueron los que tuvieron más dificultades para adaptarse al ritmo de trabajo. Se buscó trabajar en un orden externo, empezando desde las notas que realizaban en su libreta, por lo que el transcurso de ejecutar las labores escolares con las especificaciones requeridas se tornó complicado, debido a la poca atención que recibían. La normalización también implicó instrucción de normas de convivencia ya establecidas, como los modales, al pedir las cosas por favor, decir gracias, acomodar el material después de usarlo, el pedir ayuda en el momento que se requiere, acudir con el material completo a la clase, respetar al profesor y compañeros, así como no tener miedo de ser juzgado al expresar que no se tiene un conocimiento.

La alumna A2.9, que se integró a finales del mes de enero, aún estaba en el proceso de normalización, ya que provenía de una escuela de enseñanza tradicional en las que experimentó problemas de ansiedad ante el trabajo en clase. Se trataba de la única mujer en el grupo, pero eso no fue factor en la convivencia con sus compañeros.

3.5.3 Tercer grado

El grupo de tercero estuvo conformado por cuatro alumnos hombres entre 14 y 15 años. Los estudiantes A3.1, A3.2 y A3.4 no presentaron ninguna condición cognitiva que requiriera de atención.

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

El alumno A3.3 tiene un diagnóstico de lento aprendizaje, por lo que se requirió explicarle en más de una ocasión y estar pendiente de que no se distrajera con las conversaciones de los demás. Además, requirió supervisión para el trabajo pero en la mayoría de las ocasiones fue capaz de llegar al mismo nivel de sus compañeros.

Normalización:

El grupo de tercero se normalizó a mediados del mes de septiembre, debido a que se llevó una secuencia desde primer grado con la misma profesora, en los que se han estado trabajando actitudes, conducta y especificaciones de los trabajos y cómo debe estar conformada su libreta.

El proceso de adaptación estuvo dirigido hacia comprender que se encuentran en el último grado de la secundaria y que pasarán a bachillerato, en donde la forma de trabajo será totalmente diferente a como la han trabajado durante sus tres años en el colegio, por lo que deberán tener una mayor autonomía en el cumplimiento de los trabajos y tareas.

El alumno A3.4 se integró en el mes de enero, él ya había estado el año pasado en el grupo, así que ya conocía a sus compañeros y la forma de trabajo, por lo que no fue difícil el proceso de adaptación.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de las presentaciones con los estudiantes del Colegio Renilde Montessori, nivel secundaria. Se incluyen los diseños propuestos de las presentaciones, las rúbricas, guion de entrevista y la prueba aplicada, así como los datos obtenidos mediante estas herramientas. Esto expuesto por grado académico.

4.1 Primer grado

4.1.1 Presentación

Propósito directo:

- Construcción de triángulos a través de las barras con código de color.
- Que deduzcan la desigualdad del triángulo.

Propósito indirecto:

- Preparación para los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.
- Preparación para teorema de Pitágoras.

Punto de interés:

- Colocar las tachuelas en los orificios de las barras.
- Armar los triángulos en el elemento de fijación.

Control de error:

- Afirmar que se puede construir un triángulo con tres segmentos de cualquier magnitud.

Tarjeta de control del error:

Desigualdad del triángulo

“La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado”

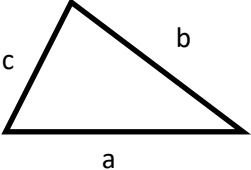


Diagram of a triangle with sides labeled a , b , and c .

$$a + b > c$$
$$b + c > a$$
$$a + c > b$$

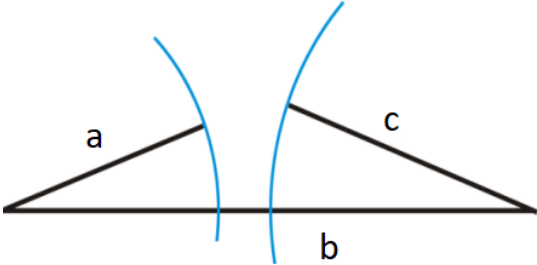


Diagram of a triangle with sides a , b , and c . Two blue arcs are drawn to illustrate the inequality $a + b > c$.

$$a + b > c$$
$$b + c > a$$
$$c + a < b$$

Edad: de 12 y 13 años.

Material: Caja de madera con set geométrico.



Incluye:

- Tachuelas.
- Curvas de plástico.
- Elementos de fijación.
- Barras con código de color.
- 1 ángulo de medición de plástico.

Desarrollo de la presentación:

1. Se invita a los estudiantes a trabajar con el “set geométrico”.
2. Se transporta la caja a la mesa en la que se va a trabajar.
3. Se abre la caja y se le muestran a los alumnos elemento por elemento y se les explica para qué sirven.
4. Para iniciar con el tema se les indica que se trata de triángulos.
5. Se cuenta una breve historia de ellos, empezando por la etimología de la palabra, la cual se subdivide en dos, *tri* que quiere decir tres y *ángulo*, es decir en conjunto es tres ángulos. El triángulo, también se dice que es constructor, ya que con ellos se puede construir cualquier figura geométrica.
6. Al ser esta figura tan interesante hay una rama de las matemáticas que se encarga exclusivamente del estudio de ellos y se llama Trigonometría. Ésta tiene sus inicios en épocas antes de Cristo

Hace más de 3,000 años los babilonios y los egipcios ya empleaban los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para realizar medidas en agricultura los primeros, y nada más y nada menos que en la construcción de las pirámides por los segundos (Flores, 2018, p. 8).
7. Primero se trabajará con los triángulos que se pueden construir, por lo que se toma una barra amarilla, naranja y rosa. Se hacen varios ejercicios de este tipo y se les cuestiona sobre si se pudiera formar un triángulo con tres segmentos cualesquiera.
8. Ahora se trabajará con los triángulos que no se pueden formar, por lo que se les pedirá a cada uno que tomen una barra amarilla, una café y una roja para que formen su triángulo.
9. Se toman tres barras, de manera que la suma de las menores sea igual a la del lado mayor.
10. Se les cuestiona si pudieron formar su triángulo, ¿qué explicación pudieran dar de ello?
11. Se les cuestionan las características que deberían de tener los lados de un triángulo para poder formarse.
12. Se concluye que para que se pueda trazar un triángulo la suma de dos lados debe ser mayor a la de un tercero y se indica que se trata del enunciado de la Desigualdad de Triángulos en matemáticas.
13. Se anota en su libreta como evidencia de trabajo de la tarjeta de control de error.
14. Se guarda el material y uno de los estudiantes lo transporta al área de matemáticas de donde se tomó.
15. Se les da las gracias a los estudiantes.

4.1.2 Rúbricas

Tabla 1

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.1

Aprendizajes esperados	A1.1	Observaciones
1- Identifica un triángulo.		
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).		
3- Enuncia una definición de triángulo.		
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		
5- Construye un triángulo con las barras de colores.		
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.		
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.		
8- Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con tres segmentos.		
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.		
10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.		

Tabla 2

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.2

Aprendizajes esperados	A1.2	Observaciones
1- Identifica un triángulo.		
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).		
3- Enuncia una definición de triángulo.		
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		
5- Construye un triángulo con las barras de colores.		
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.		
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.		

-
- 8- Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con tres segmentos.
 - 9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.
 - 10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.
-

Tabla 3

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.3

Aprendizajes esperados	A1.3	Observaciones
1- Identifica un triángulo.		
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).		
3- Enuncia una definición de triángulo.		
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		
5- Construye un triángulo con las barras de colores.		
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.		
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.		
8- Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con tres segmentos.		
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.		
10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.		

Tabla 4

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.4

Aprendizajes esperados	A1.4	Observaciones
1- Identifica un triángulo.		
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).		
3- Enuncia una definición de triángulo.		
4- Construye un triángulo con las barras de colores.		

Tabla 5

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.5

Aprendizajes esperados	A1.5	Observaciones
1- Identifica un triángulo.		
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).		
3- Enuncia una definición de triángulo.		
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		
5- Construye un triángulo con las barras de colores.		
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.		
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.		
8- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.		
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.		
10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.		

Tabla 6

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A1.6

Aprendizajes esperados	A1.6	Observaciones
1- Identifica un triángulo.		
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).		
3- Enuncia una definición de triángulo.		
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		
5- Construye un triángulo con las barras de colores.		
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.		
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.		
8- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.		
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.		
10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.		

4.1.3 Entrevista



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
Entrevista de conocimientos primer grado



Guion de entrevista

- 1- Con ayuda del material, muestra tres casos en los que se pueden armar triángulos.
- 2- Menciona dos características de los triángulos.
- 3- Menciona una breve reseña de la historia de los triángulos.
- 4- Muestra con las barras tres casos en los que NO se pueda armar un triángulo.
- 5- Explica la desigualdad del triángulo.
- 6- Explica de manera numérica la desigualdad del triángulo.
- 7- Menciona las medidas de tres casos en los que se pueda trazar un triángulo.
- 8- Menciona las medidas de tres casos en los que no se pueda trazar un triángulo.

4.1.4 Prueba escrita

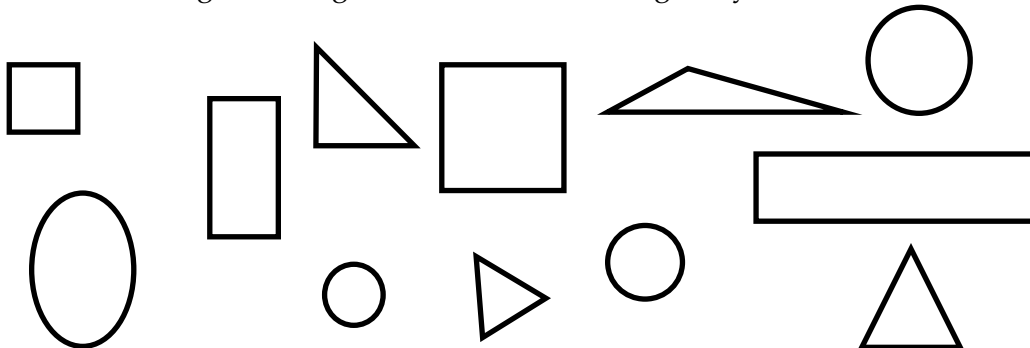


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
Prueba de conocimientos primer grado



Nombre: _____

- 1- Observa las siguientes figuras, identifica los triángulos y enciérralos en un círculo.



- 2- Escribe dos características que tengan los triángulos:

a) _____

- b) _____
- 3- Describe qué es un triángulo: _____

- 4- Escribe una breve reseña sobre la historia de los triángulos: _____

- 5- Escribe el enunciado de la desigualdad del triángulo: _____

- 6- De las siguientes medidas, selecciona los casos en los que se puede trazar un triángulo.
- a) 3, 7, 10 b) 67, 23, 45 c) 9, 12, 18 d) 3.4, 4.5, 7.9
- e) 67, 33, 44 f) 56.7, 23.9, 45.6

4.1.5 Durante la presentación

La presentación del material del tema de la desigualdad triangular se llevó a cabo con seis estudiantes de primer grado, mismos que ya han sido descritos anteriormente. La clase se llevó a cabo como se tenía estipulado, a excepción de la explicación de la parte numérica, en la que los estudiantes pudieron observar cómo se lleva a cabo dicha desigualdad pero ahora con la utilización de material.

La impresión que se tuvo con los estudiantes durante la presentación no representó lo mismo en los que iniciaron el ciclo y además conocen la manera de trabajar con el material, a los que se integraron ya iniciado el ciclo y que además provenían de un sistema diferente. Con los tres alumnos que se integraron se notó que tenían un poco de nerviosismo, ya que no habían tenido una experiencia con las presentaciones de forma grupal y menos ser grabados.

Cuando se les empezó a mostrar el material los alumnos A1.1, A1.2 y A1.3 expresaron que ya habían trabajado con él en primer grado, por lo que ya lo conocían, pero aun así fue necesario indicar de qué piezas se trataba, que las barras de colores simularían los lados de los triángulos y que con las tachuelas las fijaríamos en el tablero. La presentación se llevó a cabo como se planteó, después de mostrarles varios ejemplos en los que sí se formaban triángulos, los alumnos afirmaban que con tres segmentos no importando su magnitud se podía formar un triángulo, siendo esto algo que se esperaba; se dio paso a uno de los propósitos de la clase, el mostrarles un contraejemplo en el que se

viera que no es así, se tomaron tres barras en las que no se pudo formar, en ese momento se dieron cuenta que lo que ellos afirmaban no era cierto.

Cuando se les empezó a cuestionar, la alumna A1.2 mencionó “supongo que la medida de los tenía que ser igual o más grande que la del lado mayor” entonces se procedió a mostrarles un ejemplo donde la suma de las dos barras menores fuera igual a la de la más grande. Inmediatamente al preguntarles si se formaba el triángulo la misma alumna exclamó “entonces tiene que ser más grande”. Para explicar la desigualdad y puntualizar los argumentos de los alumnos se utilizó primero un ejemplo en el que sí se podía formar un triángulo y se hicieron comparaciones con las sumas de los lados, en este caso las tres combinaciones siempre superaban al tercero. En el segundo ejemplo donde no se podía formar, de igual manera se hicieron las combinaciones de la suma de los números, los alumnos pudieron observar que en una de ellas la suma de dos no superaban a la del tercero.

Después de los ejemplos se dio paso a la lectura del enunciado de la desigualdad del triángulo de la tarjeta de control de error, así como la explicación de los ejemplos que ahí estaban ilustrados preguntando si había dudas o no y se procedió a guardar el material. En la Figura 7 se muestra la presentación grupal con los alumnos de primer año, en la que se puede observar el acomodo de los estudiantes.



Figura 7. Presentación con los alumnos de primer grado.

4.1.6 Resultados de las entrevistas

Los alumnos A1.1, A1.2 y A1.3 dieron muestra de que comprendieron la desigualdad triangular, ya que respondieron de forma correcta todas las preguntas que se les hicieron, trabajaron y manipularon el material de manera autónoma y ordenada, es decir, sabían qué piezas tomar en el caso de sí poder formar el triángulo y en el caso en que no se podía hacer. Cada vez que terminaban de utilizar las piezas para un ejercicio, las regresaban al lugar que correspondía y tomaban sólo lo que necesitaban. La única ayuda que requirieron fue en la parte numérica, ya que no se había visto durante la presentación, por ello se les mostró un ejemplo para que vieran el caso en el que se forma y en el que no es así. Después,

ellos pudieron identificar entre medidas que se les proporcionaban si era posible o no trazarlo, para que finalmente pudieran proponer ellos los casos.

En el caso de la alumna A1.4 se recogieron resultados durante la entrevista, ya que no sabe leer y no puede responder la prueba escrita. El aislamiento sirvió ya que al distraerse con facilidad, se pudo notar que en esta situación prestó mayor atención a diferencia de cuando se encuentra en el aula con sus compañeros. Cuando se le pidió que formara un triángulo con las barras de colores, tomó 3 del mismo color pero trataba de formar un cuadrado, pues no intentaba cerrarlo y colocaba las barras de manera que constituyeran ángulos rectos, por ello se le ayudó para que formara el triángulo. Cuando se le daba una instrucción no la seguía, era necesario mostrarle un ejemplo para que ella lo siguiera posteriormente.

Para evitar que se fuera con la idea de que los triángulos tienen los tres lados de la misma magnitud, se le mostró un ejemplo en el que los tres lados fueran diferentes, pero al cuestionarla sobre cómo se llamaba la figura, ella insistía en que se trataba de un cuadrado, debido a que es el nombre de la figura que tiene más presente. Por ello se le orientó para que contara los lados y a toda figura que tuviera tres lados le llamara triángulo. De esta forma, se le fueron mostrando varios ejemplos y con la ayuda de su mano irlos contando, ya que de no ser así perdía la cuenta.

En el caso del alumno A1.5 no mostró en la entrevista que se hayan consolidado los aprendizajes que se plantearon durante la presentación, por ello fue necesario aterrizar los puntos que aún no habían quedado claros. Uno de ellos fue que no recordaba las características que tienen los triángulos, por ello se le invitó a observarlos para que se percatara del número de lados y ángulos que tienen. Tampoco recordaba algo de la historia por lo que se tuvo que realizar nuevamente.

Cuando se le pidió que pusiera tres casos en los que no era posible formar triángulos con las barras, se le complicó, ya que las tomaba y dejaba sin unir uno de los vértices, por lo que él afirmaba que no era posible aun cuando sí se podía. Al hacer dos ejemplos de la misma forma, mejor optó por tomar una de las barras grandes y dos de las más pequeñas para que fuera evidente que no se podía formar.

Al no recordar el enunciado de la desigualdad triangular, se hizo uso de la tarjeta de control de error para que el alumno lo leyera nuevamente y de esa forma lo pudiera comprobar con el uso de las barras, sin embargo no fue así, no fue capaz de hacerlo por sí mismo, por lo que se le explicó nuevamente. A la hora de pasar a lo numérico también se le tuvo que explicar, para que posteriormente él propusiera ejemplos e identificara casos cuando sí era posible y cuando no.

La alumna A1.6 sí pudo formar los triángulos que se le pidieron con el material. No recordó sobre la historia, por lo que se tuvo que repasar para que lo tuviera presente para la prueba escrita. Para los casos en los que se le pedía que no se pudiera formar el triángulo,

inmediatamente tomó uno de los más grandes y dos de los pequeños; sin embargo en el segundo caso tomó tres barras con las que sí se podía formar un triángulo pero no había unido dos de las barras. Al mostrarle que sí se podía, optó por seguir la estrategia que tenía en un inicio, tomar una grande y dos pequeñas.

Al momento de cuestionarla sobre el por qué no se podían formar los triángulos con las barras ella fue capaz de explicarlo a su manera, sin embargo, no recordaba el enunciado de la desigualdad, por ello se le explicó nuevamente con los materiales. Cuando se dio paso a la parte numérica, sí pudo poner un ejemplo sin necesidad de ayuda. De igual forma sucedió con el caso en el que no era posible formar un triángulo, sin embargo, no pudo dar una explicación de ello. Sus ejemplos eran parecidos a los que ponía con las barras en el primer caso, ponía números que no tuvieran mucha diferencia y en el segundo uno era muy grande y los otros dos pequeños. Después de que se le explicó que tenía que hacer las sumas de los lados, ella fue capaz de identificar ejemplos en los que sí era posible y en los que no, incluso ya hacía directamente la suma de los dos menores y verificar si superaban al lado mayor.

4.1.7 Resultados de la prueba escrita

El primer aprendizaje que se planteó en la rúbrica consistía en que identificaran un triángulo. Todos los alumnos fueron capaces de identificarlo, a excepción de la alumna con lento aprendizaje. Fue necesario orientarla para que contara los lados de la figura, contando los lados uno por uno con el apoyo del material sin perder el conteo para poder nombrarlo como triángulo; de otra manera, afirmaba que la figura era un cuadrado sin prestar atención.

Los cinco estudiantes que debieron aprender dos características de los triángulos, respondieron que tienen tres lados y tres ángulos internos, incluso, dos de ellos escribieron que la suma de los ángulos internos es de 180° (ver Figura 8). Este aspecto formaba parte de un tema previo, se había revisado en otra clase, sin embargo lo recordaron y también atribuyeron esa característica.

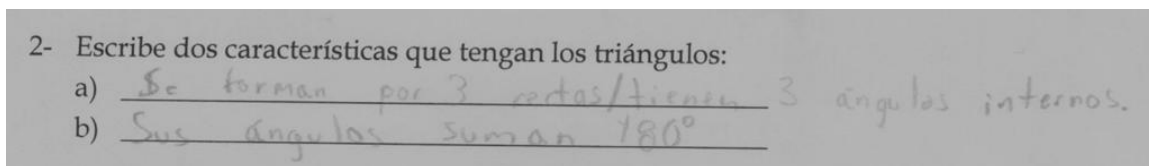


Figura 8. Respuesta de la alumna A1.2.

Para la pregunta de la definición de triángulo, la estudiante A1.6 menciona que es tres lados tres ángulos iguales (Figura 9). Con ello se puede observar que le quedaron claras las características, sin embargo no es capaz de construir una definición a partir de ello.

3- Describe qué es un triángulo: es un tres lados tres ángulos iguales

Figura 9 Respuesta de la alumna A1.6.

El estudiante A.1.5 sólo menciona que se trata de una figura geométrica, mientras que los tres restantes sí escriben que se trata de una figura cerrada de tres lados.

En el aspecto de la reseña de historia de los triángulos, los estudiantes A1.1, A1.2 y A1.3 muestran fragmentos de lo que se les expuso o trataron de poner algo para no dejar el espacio vacío. Por ejemplo, el estudiante A1.1 escribe que los primeros en utilizarlos eran los griegos, cuando la información que se les proporcionó era que los babilonios y egipcios hacían uso de ello. Al parecer, su respuesta se enfocó en mencionar alguna de las civilizaciones antiguas, aun cuando no fuera la correcta. Esto puede apreciarse en la Figura 10:

4- Escribe una breve reseña sobre la historia de los triángulos: Los primero en utilizar los triángulos fueron los griegos

Figura 10. Respuesta del alumno A1.1.

Sin embargo, los alumnos A1.5 y A1.6 dejaron el espacio en blanco aun cuando durante la entrevista ya se les había recordado este aspecto.

En el inciso en el que tenían que escribir el enunciado de la desigualdad del triángulo, sólo los alumnos A1.1, A1.2 y A1.3 lograron hacerlo. Por otro lado, a los alumnos A1.5 y A1.6 no les fue posible; en el primer caso, (ver Figura 11) el joven tiene nociones, sin embargo no fue capaz de expresarlo correctamente.

5- Escribe el enunciado de la desigualdad del triángulo: Es la suma de dos lados del triángulo del tercer lado es mayor

Figura 11. Respuesta del alumno A1.5.

La alumna A1.6, en su intento por recrear el enunciado, trata de explicar que si uno es menor que el otro no se podrá, sin embargo le faltó puntualizar que la suma de dos de ellos tiene que ser mayor a la de un tercero, por lo que no llegó a expresarlo correctamente, como se muestra en la Figura 12.

5- Escribe el enunciado de la desigualdad del triángulo: si ~~un~~ mide menor que el otro no se podrá figurar. (formar)

Figura 12. Respuesta de la alumna A1.6.

Para la identificación de los ejemplos numéricos en los que sí se podía construir un triángulo, sólo el alumno A1.5 no logró hacerlo, como se observa en la Figura 13 selecciona los incisos *a*, *c* y *e* como los casos en los que sí es posible, siendo que el *a* y *d* son los dos ejemplos en los que no es posible.

6- De las siguientes medidas, selecciona los casos en los que se puede trazar un triángulo.
 a) 3, 7, 10 b) 67, 23, 45 c) 9, 12, 18 d) 3.4, 4.5, 7.9
 e) 67, 33, 44 f) 56.7, 23.9, 45.6

Figura 13. Respuesta del alumno A1.5.

En la Tabla 7 se muestran los resultados obtenidos de los aprendizajes esperados de los estudiantes, mismos que fueron recolectados a partir de la entrevista y prueba escrita. Se puede observar que los avances que tuvieron los alumnos A1.1, A.1.2 y A1.3 fueron superiores a los de sus compañeros, quizá debiéndose a la preparación que se tuvo con ellos con más tiempo, la normalización al trabajo y en las estructuras de orden.

Tabla 7

Resultados de los aprendizajes esperados de los alumnos de primer grado.

	A1.1	A1.2	A1.3	A1.4	A1.5	A1.6
Aprendizajes esperados						
Identifica un triángulo.	✓	✓	✓		✓	✓
Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).	✓	✓	✓		✓	✓
Enuncia una definición de triángulo.	✓	✓	✓	X		
Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		✓	✓	X		
Construye un triángulo con las barras de colores.	✓	✓	✓	X	✓	✓
Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.	✓	✓	✓	X		

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	✓	✓	X	✓	✓
Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	✓	✓	X		✓
Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.	✓	✓	✓	X		✓
Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.	✓	✓	✓	X		

4.1.8 Resultados de las rúbricas de cada alumno

Tabla 8

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.1

Aprendizajes esperados	A1.1	Observaciones
1- Identifica un triángulo.	✓	
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).	✓	
3- Enuncia una definición de triángulo.	✓	
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.	✓	
5- Construye un triángulo con las barras de colores.	✓	
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.	✓	
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
8- Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.	✓	
10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.	✓	

Tabla 9

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.2

Aprendizajes esperados	A1.2	Observaciones
1- Identifica un triángulo.	✓	
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).	✓	
3- Enuncia una definición de triángulo.	✓	
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.	✓	
5- Construye un triángulo con las barras de colores.	✓	
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.	✓	
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
8- Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.	✓	
10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.	✓	

Tabla 10

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.3

Aprendizajes esperados	A1.3	Observaciones
1- Identifica un triángulo.		
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).	✓	
3- Enuncia una definición de triángulo.		
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		
5- Construye un triángulo con las barras de colores.	✓	
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.	✓	
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
8- Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz		

- de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.
- 10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.
-

Tabla 11

Resultados de los aprendizajes esperados de la alumna A1.4

Aprendizajes esperados	A1.4	Observaciones
1- Identifica un triángulo.		Durante la entrevista, fue necesario ver varios ejemplos, en los que se mostraran triángulos, ya que cuando se le cuestionaba, no observaba la figura y decía que era un cuadrado. Fue necesario ayudarla a enfocar su atención en la figura y que contara los lados para que se diera cuenta de qué figura se trataba.
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).		Para evitar darle mucha información, durante la entrevista sólo se le indicaba que tenía tres lados, para que de esta manera los contara y se diera cuenta que se trata de un triángulo.

Tabla 12

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.5

Aprendizajes esperados	A1.5	Observaciones
1- Identifica un triángulo.	✓	
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).	✓	
3- Enuncia una definición de triángulo.		Sólo menciona que se trata de una figura.
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		No recuerda sobre la historia de los triángulos, en la entrevista se le volvió a explicar, pero en la prueba no lo recordó.
5- Construye un triángulo con las barras de colores.	✓	
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.		Tiene noción, sin embargo su explicación no es clara.
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
8- Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con		Se le tuvo que ayudar para que lo recordara y ya viendo

tres segmentos.	un ejemplo lo hizo por sí mismo.
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.	Aunque se vieron ejemplos en la entrevista, no fue capaz de identificarlos en la prueba.
10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.	Tiene noción y da muestra de una parte, sin embargo no es clara.

Tabla 13

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A1.6

Aprendizajes esperados	A1.6	Observaciones
1- Identifica un triángulo.	✓	
2- Conoce las características de un triángulo (tres ángulos y tres lados).	✓	
3- Enuncia una definición de triángulo.		Su definición no es clara, sólo pone las dos características que se le mostraron.
4- Hace una breve reseña de la historia de los triángulos.		
5- Construye un triángulo con las barras de colores.	✓	
6- Explica los motivos por los cuales se puede o no construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.		No recuerda sobre la historia de los triángulos, en la entrevista se le volvió a explicar, pero en la prueba no lo recordó.
7- Muestra a través del material cómo es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
8- Muestra a través del material cómo no es posible construir un triángulo con tres segmentos.	✓	
9- Teniendo la medida de los tres lados, es capaz de determinar si es posible o no trazar el triángulo sin el uso del material.	✓	
10- Conoce el enunciado de la desigualdad de triángulo.		Sabe cuándo es posible y cuando no con el material, sin embargo, no expone el enunciado de forma clara.

4.2 Segundo grado

La aplicación de las actividades en el grupo de segundo año no tuvo el impacto que se había planteado durante el diseño. Los resultados reflejaron que los estudiantes no alcanzaron los aprendizajes esperados.

4.2.1 Presentación

Propósito directo:

- Que los alumnos visualicen la representación geométrica del binomio al cuadrado.
- Que los alumnos relacionen la representación algebraica con la geométrica que tiene el binomio al cubo.

Propósito indirecto:

- Preparación para elevar un polinomio a una potencia dada.
- Cálculo de áreas de figuras compuestas.
- Cálculo de volúmenes de cuerpos compuestos.

Punto de interés:

- Armado del cubo.

Control de error:

- La tapa de la caja.
- Tarjeta de control de error del binomio al cuadrado.

Binomio al cuadrado
 $(a + b)^2$

“El cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo término, más el segundo término al cuadrado”

$a^2 + 2ab + b^2$

- Tarjeta de control de error del binomio al cubo.

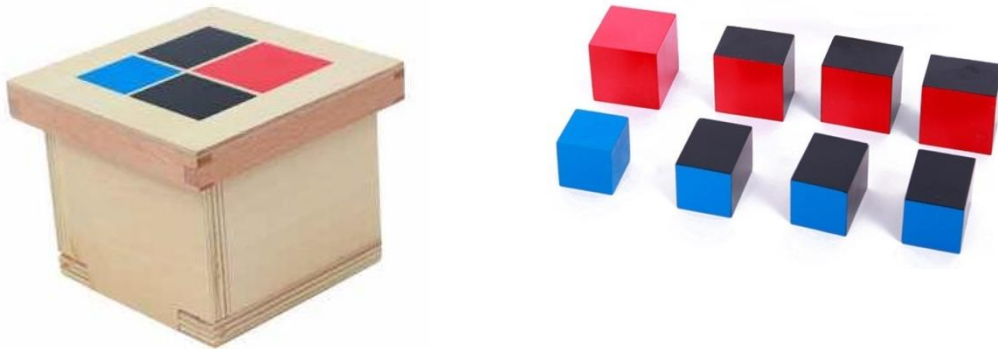
Binomio al cubo”
 $(a + b)^3$

“El cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo término, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo”

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Edad: 12 a 14 años.

Material: binomio al cubo



b	b	b	a	a
a	ab	ab	a^2	b^2
a^3	b^3	a^2b	a^2b	a^2b
ab^2	ab^2	ab^2	b	a

Incluye:

- Caja de madera
- Tapa de la caja con el patrón del binomio al cuadrado
- 8 cuerpos de madera
- 18 tarjetas etiquetadas con las diferentes medidas

Desarrollo de la presentación:

1. Se invita a los estudiantes a trabajar con el binomio al cubo.
2. Transportar el material de su repisa a la mesa de trabajo.
3. En una primera instancia se hará de manera sensorial, armando el cubo y señalando la relación de cada pieza con la tapa de control de error. Los alumnos deben visualizar que con las 8 piezas se forma el cubo y que esto conlleva un orden.
4. Se establecerán las características que tienen los cuerpos geométricos. Se va a comentar que se trata de dos cubos, uno rojo y otro azul, tres prismas cuadrangulares de base color rojo y tres prismas cuadrangulares de base color azul.
5. Se va a comentar que

Los griegos antiguos usaron el “*gnomon*”, el cual es la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño. Euclides amplía el significado de *gnomon* aplicándolo a paralelogramos en general. Aristóteles decía que el *gnomon* es la figura que añadida a un cuadrado aumenta sus lados pero no altera su forma.
6. Declarar el objetivo de la actividad como el cálculo del volumen del cubo. Para ello, se indagará sobre los conocimientos previos de los estudiantes, recordando las fórmulas necesarias para obtener dicho volumen; entre ellas, se espera llegar a que hallar el área de la base es un paso necesario.
7. Para la obtención del área de la base se les mostrará la tapa de la caja, en la que se puede observar un cuadrado compuesto por un cuadrado rojo grande, uno azul más pequeño y dos rectángulos de color negro.
8. Se explicará el uso de variables para representar cantidades de magnitud desconocida. Se usarán las etiquetas para indicar las longitudes de los lados del cuadrado, a representará la longitud del lado del cuadrado rojo, b la del azul; se les solicitará a los alumnos que denoten la base y altura de los rectángulos negros.
9. Habiendo establecido las literales para cada uno de los lados, se calcularán las áreas de los cuadriláteros. Se comenzará por los cuadrados, obteniendo $a \times a$ o a^2 para el rojo y $b \times b$ o b^2 para el azul. Para los rectángulos, ambos tienen las mismas magnitudes, por lo que al obtener el área de uno, sabremos la del otro. Usamos la fórmula del área de un rectángulo, $A = bh$, obteniendo $a \times b$, que queda expresado como ab .
10. Ahora que ya se conocen las áreas de cada uno de los polígonos que conforman el cuadrado, se sumarán para obtener su área total, quedando la suma de la siguiente

- manera: $a^2 + b^2 + ab + ab$. Como tenemos dos términos semejantes, que se pueden reducir, entonces la expresión del área de cuadrado quedará $a^2 + b^2 + 2ab$.
11. Conociendo el área de la base de la caja y teniendo establecidas las literales correspondientes a los cuerpos geométricos, podemos obtener los volúmenes de cada uno de ellos. Para el caso de los cubos se multiplica el área de la base por la altura, obteniendo para el rojo la multiplicación de $a^2 \times a = a^3$ y para el cubo azul $b^2 \times b = b^3$. En los prismas cuadrangulares de base a^2 , la altura es b , por lo que su expresión quedará a^2b y para los de base b^2 su altura es a y su expresión ab^2 .
 12. Ya que hemos calculado y representado todos los volúmenes, podemos reunirlos en una sola expresión $a^3 + b^3 + a^2b + a^2b + a^2b + b^2a + b^2a + b^2a$, reduciendo los términos semejantes, la expresión quedará de la siguiente manera $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a$.
 13. Teniendo el área del cuadrado y el volumen del cubo, se explicará a los estudiantes que a este tipo de multiplicaciones se les conoce como productos notables. Son reglas que establecen el resultado de un producto algebraico sin necesidad de efectuarlo. En el caso del binomio al cuadrado, representado como $(a + b)^2$, se trata de la multiplicación de $(a + b)(a + b)$, la regla es “el cuadrado del primer término, más el doble del primero por el segundo, más el segundo al cuadrado” $a^2 + 2ab + b^2$. Para el caso binomio al cubo, representado como $(a + b)^3$, la multiplicación es $(a + b)(a + b)(a + b)$, cuya regla de desarrollo es “el cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término”.
 14. Se relaciona de manera explícita la expresión algebraica con la expresión geométrica desarrollada con el material, con el apoyo de la tarjeta de control de error en la que se ilustran las multiplicaciones.
 15. Presentar en la pizarra el desarrollo algebraico de algunos productos notables.
 16. Se da las gracias a los estudiantes.

4.2.2 Rúbricas

Tabla 14

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.1

Aprendizajes esperados	A2.1	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.		
2- Identifica el binomio al cuadrado.		
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).		
4- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		
5- Identifica el binomio al cubo.		

- 6- Nombra los cuerpos geométricos.
7- Menciona el enunciado del binomio al cubo.

Tabla 15

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.2

Aprendizajes esperados	A2.2	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente. 2- Identifica el binomio al cuadrado. 3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos). 4- Obtiene las superficies a través de literales. 5- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado 6- Identifica el binomio al cubo. 7- Nombra los cuerpos geométricos. 8- Obtiene los volúmenes de cada cuerpo. 9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		

Tabla 16

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.3

Aprendizajes esperados	A2.3	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.		

Tabla 17

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.4

Aprendizajes esperados	A2.4	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente. 2- Identifica el binomio al cuadrado. 3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos). 4- Obtiene las superficies a través de literales. 5- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado 6- Identifica el binomio al cubo. 7- Nombra los cuerpos geométricos. 8- Obtiene los volúmenes de cada cuerpo. 9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		

Tabla 18

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.5

Aprendizajes esperados	A2.5	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.		

-
- 2- Identifica el binomio al cuadrado.
 - 3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).
 - 4- Obtiene las superficies a través de literales.
 - 5- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado
 - 6- Identifica el binomio al cubo.
 - 7- Nombra los cuerpos geométricos.
 - 8- Obtiene los volúmenes de cada cuerpo.
 - 9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.
-

Tabla 19

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.6

Aprendizajes esperados	A2.6	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente. 2- Identifica el binomio al cuadrado. 3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos). 4- Obtiene las superficies a través de literales. 5- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado 6- Identifica el binomio al cubo. 7- Nombra los cuerpos geométricos. 8- Obtiene los volúmenes de cada cuerpo. 9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		

Tabla 20

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.7

Aprendizajes esperados	A2.7	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente. 2- Identifica el binomio al cuadrado. 3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos). 4- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado 5- Identifica el binomio al cubo. 6- Nombra los cuerpos geométricos. 7- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		

Tabla 21

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A2.8

Aprendizajes esperados	A2.8	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente. 2- Identifica el binomio al cuadrado. 3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos		

- rectángulos).
- 4- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado
 - 5- Identifica el binomio al cubo.
 - 6- Nombra los cuerpos geométricos.
 - 7- Menciona el enunciado del binomio al cubo.

Tabla 22

Rúbrica de aprendizajes esperados de la alumna A2.9

Aprendizajes esperados	A2.9	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.		
2- Hace una breve reseña de los productos notables.		
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).		
4- Relaciona las expresiones algebraica y geométrica del binomio al cuadrado.		
5- Representa las unidades de medida de las superficies a través de literales.		
6- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		
7- Identifica y nombra los cuerpos geométricos.		
8- Representa las unidades de medida de los volúmenes a través de literales.		
9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		
10- Realiza el desarrollo algebraico.		

4.2.3 Entrevista



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
 "Francisco García Salinas"
 UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
 Maestría en Matemática Educativa
 Entrevista de conocimientos segundo grado



Guion de entrevista

- 1- Arma el cubo.
- 2- Nombra las figuras.
- 3- Nombra los cuerpos geométricos.
- 4- Con el material, muestra cuál es el binomio al cuadrado.
- 5- Con el material, muestra cuál es el binomio al cubo.
- 6- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado.
- 7- Menciona el enunciado del binomio al cubo.

4.2.4 Prueba escrita

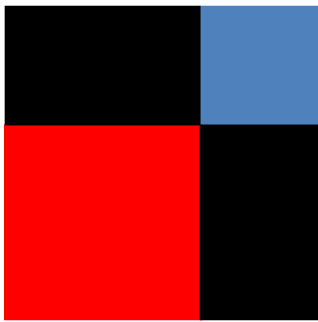


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
Prueba de conocimientos segundo grado



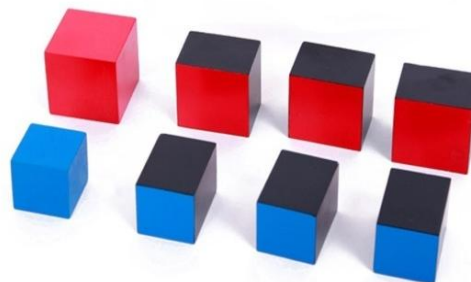
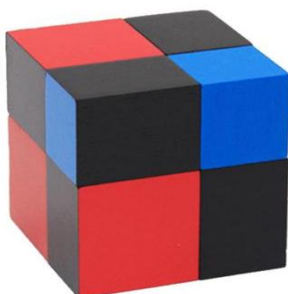
Nombre: _____

- 1- Utilizando literales, calcula el área de cada figura y del cuadrado.



- 2- Escribe la regla del binomio al cuadrado: _____

- 3- Utilizando literales, calcula el volumen de cada uno de los cuerpos y del cubo que se forma.



4- Escribe la regla del binomio al cubo: _____

5- Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

a) $(f + r)^2 =$

b) $(g + 7)^2 =$

6- Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

a) $(y + h)^3 =$

b) $(j + 5)^3 =$

4.2.5 Durante la presentación

Antes de iniciar la presentación del material, se buscó la forma de acomodar a los estudiantes para que todos tuvieran buena visibilidad, tanto del material como de la profesora, ya que a diferencia de los otros dos grupos, éste contaba con nueve alumnos. Se esperaba que todos pudieran observar bien la presentación.

Para comenzar, uno de los estudiantes transportó el material a la mesa de trabajo. Se les indicó que se trataba del binomio al cubo y que observaran lo que se iba a hacer con él. Se realizó el armado de manera sensorial, es decir que utilizando la tapa de la caja que ya tiene el patrón de los colores en orden, se sacó cada una de las piezas y se colocó en el lugar que le correspondía, así primero la primera capa y luego la segunda, verificando siempre los colores. Se armó nuevamente pero colocando los cuerpos dentro de la caja. Durante esta actividad, los alumnos se observaban muy atentos, no emitían ningún ruido y acercaban su cuerpo para alcanzar a ver mejor.

Al pasar a la identificación de los nombres de los cuerpos geométricos, se notó que algunos estudiantes todavía solían confundir los nombres y al cubo lo llaman cuadrado, por ello fue necesario aclararles, mostrándoles el material, que no se trata de una figura plana sino de un cuerpo, ya que el cuadrado carece de altura. Después de que otros alumnos mencionaran que los cuerpos azules y rojos se trataban de cubos, se les mostró el cuerpo de base azul y caras laterales para que los nombraran, el alumno A2.4 expresó que se trataba de un prisma rectangular, ante lo que el estudiante A2.6 corrigió señalando que era un prisma cuadrangular porque tenía bases cuadradas. Con el cuerpo de base roja y caras laterales negras, surgió una de las respuestas esperadas de los alumnos, que dijeran que se trataba de un cubo o que no lo identificaran como prisma ya que su altura era menor que

las aristas de sus bases, así que se explicó que también se trataba de un prisma cuadrangular aunque su elevación sea menor.

Se les expuso que se iba a obtener el volumen total del cubo, y que para ello se requiere conocer la fórmula del volumen del cubo. La alumna A2.9 mencionó que ésta es área de la base por altura, entonces primero se procedió a obtenerla. La tapa de la caja fungió como la base, de esta manera los jóvenes no la verían como un cuerpo. Para encontrar el área, se les indicó a los alumnos que no se utilizarían medidas y se les preguntó qué se podría utilizar; el joven A2.2 respondió que letras. A partir de nombrar el lado del cuadrado rojo como a y el ancho de rectángulo azul como b , se les cuestionó a los estudiantes sobre los valores que deberían de tomar los otros lados; en esa pregunta iba implícita la justificación es decir que para colocar las otras literales tenían que conocer de qué figuras se trataba. Los estudiantes ubicaron las literales restantes correctamente.

Para obtener el área total, se les pidió que primero la calcularan de forma separada, es decir, que hallaran la de cada una de las figuras que la componían. Se inició con los cuadrados, durante esta parte donde se requería tener un mayor conocimiento previo sobre las fórmulas y multiplicaciones de literales. Los alumnos A2.1, A2.3, A2.7 y A2.8 perdieron el interés por la clase, en este punto ya no era tan interesante para ellos lo que sus compañeros estaban observando, incluso ahora ya desviaban su mirada del material y la postura de su cuerpo era diferente.

Después de haber obtenido las cuatro áreas se tuvo como resultado $a^2 + ab + ab + b^2$, en esta expresión se reducen los términos semejantes de manera que se obtiene $a^2 + 2ab + b^2$. En el proceso de la obtención del volumen de los cubos, los alumnos copiaron los procedimientos. Cuando se calculó que el volumen del cubo rojo era a^3 , entonces dijeron que el del azul era b^3 . Sin embargo, no sucedió lo mismo con los prismas, en los dos casos se les ayudó para calcularlas, ya que no pudieron hacer el intercambio de las literales, es decir que si en el prisma de base azul el volumen era ab^2 , en el de color rojo sería a^2b .

Después de haber obtenido las áreas y volúmenes se procedió a leer las tarjetas de control de error en las que, a manera de resumen, se les explicó que todo el procedimiento que se realizó ya había sido estudiado y que se les conocía como productos notables. El procedimiento algebraico se tenía que hacer siguiendo los enunciados, por ello mientras se iban leyendo se resolvía. En los ejemplos donde se usaron como primer y segundo término literales lo relacionaban con los expuestos, sin embargo, cuando uno de ellos era literal surgían las confusiones y no les quedaba muy claro el por qué se tenían que hacer las multiplicaciones de los términos.

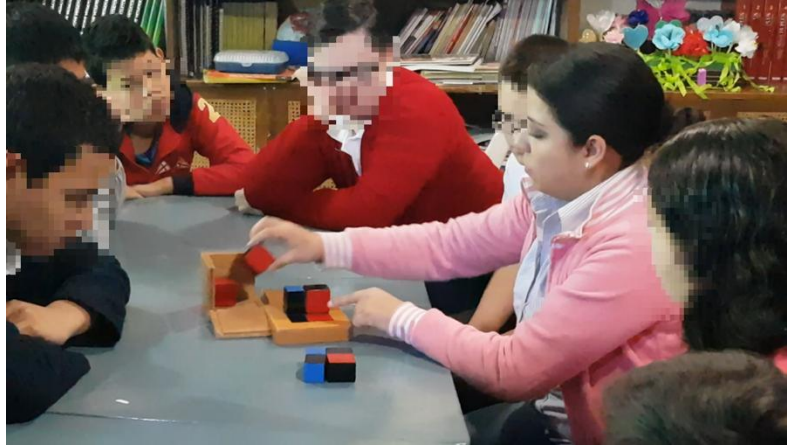


Figura 14. Aplicación con segundo año.

4.2.6 Resultados de la entrevista

Para la construcción del cubo, los nueve alumnos pudieron hacerlo, ya que se apoyaban en la tapa que era su control de error. Ninguno de los ocho habló sobre la parte de la historia que se les había expuesto, sobre las particiones que se hacían de los cuadrados. Para el nombramiento de las figuras sólo el alumno A2.1 tuvo dificultad, con los cuadrados sí lo hizo, sin embargo para los rectángulos también decía que eran cuadrados y al darse cuenta que no era así preguntó que cómo se llamaba “la que tenía los lados larguitos”.

Para la identificación de los cuerpos geométricos, los estudiantes A2.1 y A2.7 no lo consiguieron; el primero no pudo nombrar ninguno, cuando se le indicó que el cuerpo de color rojo se trataba de un cubo inmediatamente dijo “entonces éstos también son cubos”, refiriéndose a los prismas cuadrangulares de base roja. Ante ello, se hizo nuevamente un análisis de las características que tienen y que por ello son nombrados. El alumnos A2.7 tomo el cubo rojo y pasó su dedo por el contorno de una de las caras y exclamó que era un “cuadrado” al preguntarle por el cubo de color azul dijo “éste es como éste” relacionándolo con el cubo rojo. Para nombrar los prismas se le orientó para que lo recordara, primero se le dio a elegir entre prisma o pirámide y después con base en la forma de su base decir de qué tipo era.

Los ocho estudiantes identificaron con el material cuál representaba el binomio al cuadrado y cuál al cubo. Después de repetir la presentación de la obtención de las áreas de las figuras y volúmenes de los cuerpos en donde ahora los estudiantes tuvieron una mayor participación, ya que conocían el proceso y entre maestra alumno las iban obteniendo. Un caso en particular que requirió poca ayuda fue el del alumno A2.2 pues él colocó las tarjetas para nombrar los lados, con ello obtuvo las áreas de las figuras y a partir de ello los volúmenes de los cuerpos.

En el momento de preguntarles sobre las reglas del binomio al cuadrado y al cubo, ninguno la sabía. No eran capaces de enunciarlas aun cuando acababan de trabajar en su

justificación, por ello se les encomendó la tarea de revisar las tarjetas de control de error para que las leyeran y de esta forma se las aprendieran.

4.2.7 Resultados de la prueba escrita

El primer inciso de la prueba requería que los estudiantes utilizando literales encontraran las áreas de cada figura y por último la del cuadrado. Ninguno de los alumnos pudo hacerlo. En el cuadrado expresaban las literales a y b porque eran las que se utilizaban pero no las ubicaban en el lugar que le correspondía, y de ahí ya no podían pasar. Por ejemplo, el alumno A2.4 invirtió las literales en la figura, ya que el lado del cuadrado mayor se había representado con la letra a . Podemos observar que hace correctamente las multiplicaciones de las literales $a \times a$ y $b \times b$, sin embargo no las ubica en el lugar que les corresponde y no las hace con $a \times b$. Ver Figura 15. Por tanto no es capaz de obtener el área total del cuadrado.

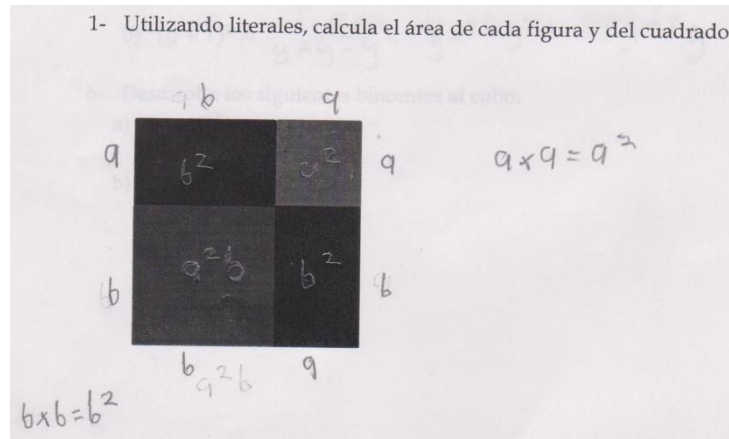


Figura 15. Representación del alumno A2.4.

Otro ejemplo que consideramos importante considerar es el del alumno A2.2 ya que el sí pudo obtener las áreas de cada una de las partes (Figura 16), incluso trazó una propia para representarlas; sin embargo también se le había pedido que obtuviera el área final y no lo hizo. De los alumnos fue quien tuvo una mayor aproximación.

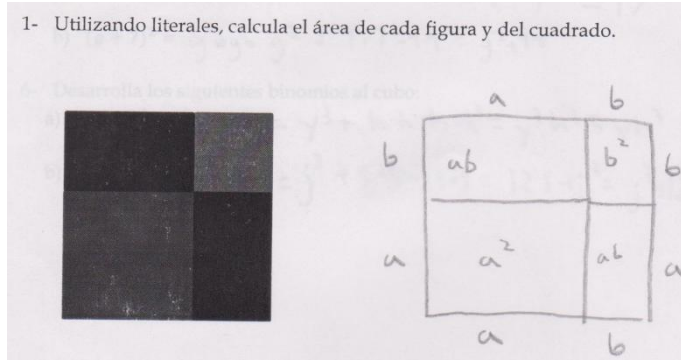


Figura 16. Representación del alumno A2.2.

En lo que respecta a la escritura del enunciado del binomio al cubo, sólo la alumna A2.9 lo hizo correctamente, los demás estudiantes mostraban nociones de ello, sin embargo ninguno lo concretó. En la Figura 17 se puede observar cómo el alumno A2.4 recuerda que se trata del primer y segundo términos al cuadrado pero lo que está en intermedio no lo logra concretar, por tanto su enunciado es incorrecto.

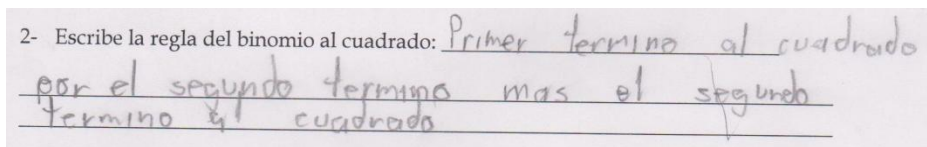


Figura 17. Respuesta del alumno A2.4.

Ahora, para el ejercicio de obtener los volúmenes de los cuerpos del binomio al cubo, los alumnos no pudieron hacerlo. Después de haber analizado los incisos anteriores esto era algo de esperarse, ya que para obtener dichos volúmenes se necesita conocer las fórmulas de áreas o ya tenerlas calculadas, lo cual no pasó con los alumnos. En el caso del alumno A2.6 (Figura 18) primero trata de poner las literales en el cubo, pero no lo hace correctamente. La instrucción que se le dio era obtener el volumen de cada uno de los cuerpos y no lo hace, trata de obtener el volumen final a partir de lo que recuerda pero es equívoco.

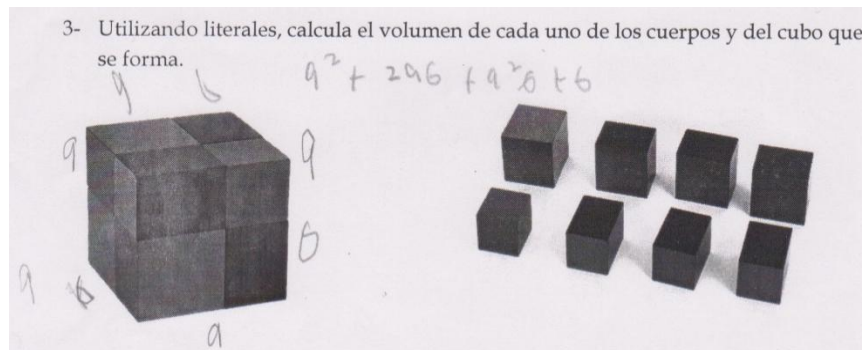


Figura 18. Ejercicio del alumno A2.6.

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

En cuanto al enunciado del binomio al cubo los estudiantes no pudieron expresarlo en la prueba, trataban de escribir los elementos que recordaban de ello, sin embargo no lo lograron concretar. En la Figura 19 se evidencia que el alumno A2.6 recuerda que los términos están al cubo, sin embargo lo demás no lo recuerda.

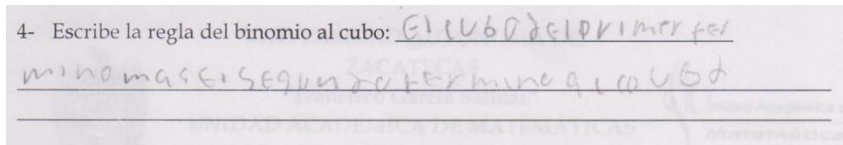


Figura 19. Respuesta del alumno A2.6.

Finalmente, se esperaba que los alumnos pudieran hacer el desarrollo algebraico del binomio al cuadrado y al cubo, pero después de haber revisado los incisos anteriores en donde no fueron capaces de reconstruirlos ni de recordar las reglas, era de esperarse que no lo obtuvieran. Como ya se había mencionado, la alumna A2.9 escribió correctamente el enunciado del binomio al cuadrado, el inciso a lo resolvió correctamente y en el b le faltó desarrollar la multiplicación de 2×7 y de elevar 7^2 , con ello da muestra de que logró comprender esta parte.

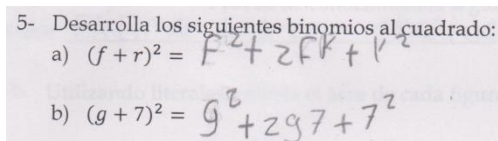


Figura 20. Desarrollo algebraico del binomio al cuadrado de la alumna A2.9.

Sin embargo, en el desarrollo del binomio al cubo, se veía que los jóvenes no tenían idea de ello y no supieron cómo hacerlo. En la Figura 21 se muestra cómo el alumno A2.2 trató de resolverlas como una multiplicación de monomios; sin embargo, al no poner los tres cae en el error de sólo hacer las multiplicaciones de los primeros términos y de los segundos para al final agregar una multiplicación entre ellos.

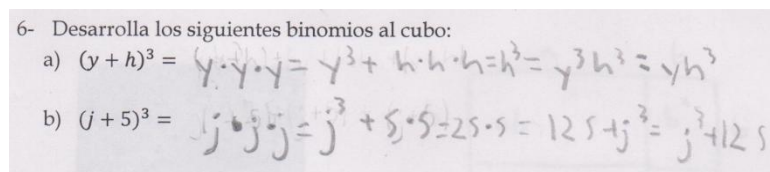


Figura 21. Desarrollo algebraico del binomio al cubo del alumno A2.2.

En la Tabla 2 se muestran los resultados de los aprendizajes esperados de los estudiantes que no requieren apoyos extra, mismos que se recolectaron a partir de la entrevista y prueba escrita. Las casillas marcadas con una x son aprendizajes que no se tomaron en cuenta para ese alumno.

Tabla 23

Resultados de los alumnos de segundo año, por aprendizaje esperado.

Aprendizajes esperados	A2.1	A2.2	A2.3	A2.4	A2.5	A2.6	A2.7	A2.8	A2.9
Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Hace una breve reseña de los productos notables.	X		X				X	X	
Identifica el binomio al cuadrado.	✓		X					✓	
Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
Relaciona las expresiones algebraica y geométrica del binomio al cuadrado.	X		X				X	X	
Representa las unidades de medida de las superficies a través de literales.	X	✓	X			✓	X	X	✓
Menciona el enunciado del binomio al cuadrado			X						✓
Identifica el binomio al cubo.	✓		X					✓	✓
Identifica y nombra los cuerpos geométricos.		✓	X	✓	✓	✓		✓	✓
Representa las unidades de medida de los volúmenes a través de literales.	X		X						
Menciona el enunciado del binomio al cubo.			X						
Realiza el desarrollo algebraico.			X						

4.2.8 Resultados de las rúbricas

Tabla 24

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.1

Aprendizajes esperados	A2.1	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	
2- Identifica el binomio al cuadrado.	✓	
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).		Sólo identifica los cuadrados.
4- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		No lo menciona.
5- Identifica el binomio al cubo.	✓	
6- Nombra los cuerpos geométricos.		Se le tuvo que ayudar para que los identificara, ya que decía que eran cuadrados.
7- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		No lo menciona.

Tabla 25

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.2

Aprendizajes esperados	A2.2	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	
2- Hace una breve reseña de los productos notables.		No la hace.
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).	✓	
4- Relaciona las expresiones algebraica y geométrica del binomio al cuadrado.		No las relaciona.
5- Representa las unidades de medida de las superficies a través de literales.	✓	
6- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		No lo menciona.
7- Identifica y nombra los cuerpos geométricos.	✓	
8- Representa las unidades de medida de los volúmenes a través de literales.		No las establece.
9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		No lo menciona.
10- Realiza el desarrollo algebraico.		Al no recordar los enunciados, no es capaz de hacer el desarrollo algebraico.

Tabla 26

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.3

Aprendizajes esperados	A2.3	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	Le gusta ser ordenado en su trabajo, por lo que pudo hacer el armado del cubo al llevar el mismo procedimiento que se hizo durante la presentación.

Tabla 27

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.4

Aprendizajes esperados	A2.4	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	
2- Hace una breve reseña de los productos notables.		No la hace.
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).	✓	
4- Relaciona las expresiones algebraica y geométrica del binomio al cuadrado.		No las relaciona.
5- Representa las unidades de medida de las superficies a través de literales.		Necesitó ayuda en la entrevista para poner las medidas de las literales, en la prueba no lo hizo.
6- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		No lo menciona.
7- Identifica y nombra los cuerpos geométricos.	✓	
8- Representa las unidades de medida de los volúmenes a través de literales.		No las establece.
9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		No lo menciona.
10- Realiza el desarrollo algebraico.		Al no recordar los enunciados, no es capaz de hacer el desarrollo algebraico.

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

Tabla 28

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.5

Aprendizajes esperados	A2.5	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	
2- Hace una breve reseña de los productos notables.		No la hace
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).	✓	
4- Relaciona las expresiones algebraica y geométrica del binomio al cuadrado.		No la hace
5- Representa las unidades de medida de las superficies a través de literales.		No lo hace
6- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		No lo menciona.
7- Identifica y nombra los cuerpos geométricos.		No los menciona
8- Representa las unidades de medida de los volúmenes a través de literales.	✓	
9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		No lo menciona.
10- Realiza el desarrollo algebraico.		No lo hace

Tabla 29

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.6

Aprendizajes esperados	A2.6	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	
2- Hace una breve reseña de los productos notables.		No la hace.
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).	✓	
4- Relaciona las expresiones algebraica y geométrica del binomio al cuadrado.		No las relaciona.
5- Representa las unidades de medida de las superficies a través de literales.	✓	
6- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		No lo menciona.
7- Identifica y nombra los cuerpos geométricos.	✓	
8- Representa las unidades de medida de los volúmenes a través de literales.		No las establece.
9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		No lo menciona.
10- Realiza el desarrollo algebraico.		Al no recordar los enunciados, no es capaz de hacer el desarrollo algebraico.

Tabla 30

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.7

Aprendizajes esperados	A2.7	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	
2- Identifica el binomio al cuadrado.		Requiere apoyo para identificarlo.
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).	✓	
4- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		No lo menciona.
5- Identifica el binomio al cubo.		Requiere apoyo para identificarlo.
6- Nombra los cuerpos geométricos.		No los nombra, menciona la forma de las caras que son cuadrados o rectángulos.
7- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		No lo menciona.

Tabla 31

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A2.8

Aprendizajes esperados	A2.8	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	
2- Identifica el binomio al cuadrado.	✓	
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).	✓	
4- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado		No lo menciona.
5- Identifica el binomio al cubo.	✓	
6- Nombra los cuerpos geométricos.	✓	
7- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		No lo menciona.

Tabla 32

Resultados de los aprendizajes esperados de la alumna A2.9

Aprendizajes esperados	A2.9	Observaciones
1- Arma el cubo con las 8 piezas correctamente.	✓	
2- Hace una breve reseña de los productos notables.		No la hace.
3- Identifica las figuras (dos cuadrados y dos rectángulos).	✓	
4- Relaciona las expresiones algebraica y geométrica del binomio al cuadrado.		No la hace.
5- Representa las unidades de medida de las superficies a través de literales.	✓	

6- Menciona el enunciado del binomio al cuadrado	✓	
7- Identifica y nombra los cuerpos geométricos.	✓	
8- Representa las unidades de medida de los volúmenes a través de literales.		No la hace.
9- Menciona el enunciado del binomio al cubo.		No lo menciona.
10- Realiza el desarrollo algebraico.		Aunque sólo recuerda el enunciado del binomio al cuadrado, no es capaz de hacer el desarrollo algebraico, de ninguno de los dos.

4.3 Tercer grado

Con el grupo de tercero, los resultados se consideran favorables. Los eventos seguro e imposible fueron los que menos se les dificultaron a los estudiantes ya que los ejemplos que mostraron durante la entrevista fueron claros; además expusieron que saben de qué se trata y en la prueba también lo demostraron, ya que los cuatro obtuvieron correctos los dos reactivos.

4.3.1 Presentación

Propósito directo:

- Que los alumnos expliquen e identifiquen los diferentes tipos de eventos probabilísticos (evento seguro, imposible, eventos mutuamente excluyentes, complementarios, dependientes e independientes) de nivel secundaria.

Propósito indirecto:

- Preparación para el cálculo de la probabilidad de diferentes tipos de eventos.

Punto de interés:

- Sacar las fichas de la bolsa sin ver.
- Hacer sus estimaciones sobre un posible evento.

Control de error:

Tarjeta de control con las definiciones de los eventos.

Eventos probabilísticos

- **Evento seguro:** su probabilidad de ocurrencia es igual a 1.

Por ejemplo:

Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número potencia de 10, la probabilidad será de 1, ya que todos los números lo son.

- **Evento imposible:** su probabilidad es 0.

Por ejemplo:

Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número 20, la probabilidad será de 0, ya que no hay ninguna estampilla de este color.

Eventos probabilísticos

- **Eventos mutuamente excluyentes:** son dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Por ejemplo:

Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde, tomando en cuenta que sólo se puede sacar uno a la vez. Estos eventos son excluyentes pues no pueden ocurrir a la misma vez.

Eventos probabilísticos

- **Eventos complementarios:** son dos eventos posibles cuya suma de sus probabilidades es 1.

Por ejemplo:

Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde.

Eventos probabilísticos

- **Evento independiente:** es un evento que no depende de otro para que suceda.

Por ejemplo:

Al introducir las fichas de los tres colores, al hacer un sacamiento obtener una ficha roja, devolverla a la bolsa, hacer un segundo sacamiento y obtener una verde, son eventos independientes porque el primero no afecta al segundo.

- **Evento dependiente:** dos eventos son dependientes, si el resultado del primero afecta al segundo.

Por ejemplo:

Al introducir las fichas de los tres colores, se hace un sacamiento y se obtiene una ficha roja la cual no se devuelve a la bolsa, posteriormente se hace un segundo sacamiento y ya no se tiene la misma posibilidad de obtener determinado color, porque ya no hay la misma cantidad inicial en la bolsa.

Edad: 14 y 15 años

Material: Estampillas y una bolsa negra.



Incluye:

- Caja de madera con seis divisiones.
- 50 fichas del 1 (verdes).
- 50 fichas del 10 (rojas).
- 50 fichas del 100 (azules).
- 50 fichas del 1000 (verdes).
- 10 bolos de cada color.

- 5 fichas de cada color.
- Bolsa negra.

Desarrollo de la presentación:

- 1- Se invita a los estudiantes a trabajar con las estampillas.
- 2- Un estudiante transporta las estampillas a la mesa de trabajo.
- 3- Se indica que va a trabajar con un tema de corte probabilístico para identificar cinco tipos de eventos.
- 4- Se les comenta que a los primeros que se les atribuye el estudio de las probabilidades fue a Pascal y a Fermat. “El primero le envió un problema al segundo sobre el lanzamiento de un dado. Fue así como inicio verdadero punto de partida de la moderna teoría de probabilidades” (Boyer, p. 457).
- 5- Se nombran los tipos de eventos con los que se va a trabajar: evento seguro, imposible, mutuamente excluyentes, complementarios, dependientes e independientes.
- 6- Se van a introducir las fichas del 1, 10, 100, 1,000 y se va a preguntar sobre la posibilidad de “obtener una potencia de 10”. Cada uno hará un sacamiento. Se establecerá que se trata de un evento seguro ya que en todos los sacamientos que se hagan siempre serán favorables.
- 7- En el segundo evento se va a preguntar si es posible obtener un número 30, como ellos observaron que no había ese número en la bolsa y conociendo los tipos de eventos, se establecerá que es 0, por lo tanto es un evento imposible.
- 8- Para el siguiente evento se pregunta si es posible obtener una ficha color azul y que sea mayor que 100. Al no ser así, se les indica que se trata de eventos mutuamente excluyentes ya que no hay fichas de color azul y que sean mayores de 100, por ello los dos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo.
- 9- Utilizando los bolos (uno rojo y uno verde), se pregunta qué tipo de eventos serían sacar un bolo rojo y en otro sacar uno verde. Se indica que se trata de eventos complementarios, ya que sólo esos dos pueden ocurrir y son todo el espacio muestral.
- 10- Para el último evento se introducen 5 fichas verdes, 5 azules y 5 rojas, se establece la probabilidad de ocurrencia de obtener las fichas de cada color. Cada estudiante hace un sacamiento y se queda con la ficha; después de que la primera persona obtuvo su ficha, para la segunda ya no aplicaban las mismas probabilidades de obtener los colores, por lo que se les pide que las establezcan y así sucesivamente hasta que se hagan los 4 sacamientos. Se indica que en esos casos las probabilidades tienden a cambiar, por lo que se trata de eventos dependientes, ya que dependen de lo que suceda en el anterior.
- 11- Se regresan las fichas y en una segunda ronda se van regresando las fichas cada vez que se haga un sacamiento. En este caso, al regresar las fichas la probabilidad de los

diversos sacramentos no se ve afectada. Se establece entonces que se trata de eventos independientes.

12- Se ve la tarjeta de control de error en donde se establecen las definiciones de los eventos y las anotan en su libreta.

13- Se guarda el material.

14- Se da las gracias a los estudiantes.

4.1.2 Rúbricas

Tabla 33

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A3.1

Aprendizajes esperados	A3.1	Observaciones
1- Identifica un evento seguro con el uso del material.		
2- Identifica un evento imposible con el uso del material.		
3- Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.		
4- Identifica un evento complementario con el uso del material.		
5- Identifica un evento independiente con el uso del material.		
6- Clasifica un evento a partir de cierta situación.		
7- Explica qué es un evento seguro.		
8- Explica qué es un evento imposible.		
9- Explica qué es un evento mutuamente excluyente.		
10- Explica qué es un evento complementario.		
11- Explica qué es un evento independiente.		
12- Explica qué es un evento dependiente.		
13- Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.		
14- Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.		
15- Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.		
16- Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.		
17- Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.		
18- Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.		

Tabla 34

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A3.2

Aprendizajes esperados	A3.2	Observaciones
1- Identifica un evento seguro con el uso del material.		
2- Identifica un evento imposible con el uso del material.		
3- Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.		
4- Identifica un evento complementario con el uso del material.		
5- Identifica un evento independiente con el uso del material.		
6- Clasifica un evento a partir de cierta situación.		
7- Explica qué es un evento seguro.		
8- Explica qué es un evento imposible.		
9- Explica qué es un evento mutuamente excluyente.		
10- Explica qué es un evento complementario.		
11- Explica qué es un evento independiente.		
12- Explica qué es un evento dependiente.		
13- Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.		
14- Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.		
15- Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.		
16- Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.		
17- Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.		
18- Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.		

Tabla 35

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A3.3¹

Aprendizajes esperados	A3.3	Observaciones
1- Identifica un evento seguro con el uso del material.		
2- Identifica un evento imposible con el uso del material.		
3- Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.		
4- Identifica un evento complementario con el uso		

¹ La rúbrica de este estudiante no contemplaba los puntos del 7-12. Sin embargo, durante la entrevista él mostró un buen desempeño contestando adecuadamente, por lo que finalmente se le aplicó la misma rúbrica que a sus compañeros.

- del material.
- 5- Identifica un evento independiente con el uso del material.
 - 6- Clasifica un evento a partir de cierta situación.
 - 7- Explica qué es un evento seguro.
 - 8- Explica qué es un evento imposible.
 - 9- Explica qué es un evento mutuamente excluyente.
 - 10- Explica qué es un evento complementario.
 - 11- Explica qué es un evento independiente.
 - 12- Explica qué es un evento dependiente.
 - 13- Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 14- Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 15- Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 16- Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 17- Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 18- Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.
-

Tabla 36

Rúbrica de aprendizajes esperados del alumno A3.4

Aprendizajes esperados	A3.4	Observaciones
1- Identifica un evento seguro con el uso del material.		
2- Identifica un evento imposible con el uso del material.		
3- Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.		
4- Identifica un evento complementario con el uso del material.		
5- Identifica un evento independiente con el uso del material.		
6- Clasifica un evento a partir de cierta situación.		
7- Explica qué es un evento seguro.		
8- Explica qué es un evento imposible.		
9- Explica qué es un evento mutuamente excluyente.		
10- Explica qué es un evento complementario.		
11- Explica qué es un evento independiente.		
12- Explica qué es un evento dependiente.		
13- Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.		

- 14- Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 15- Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 16- Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 17- Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.
 - 18- Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.
-

4.3.3 Entrevista



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
Entrevista de conocimientos tercer grado



Preguntas

- 1- Explica qué es un evento seguro.
- 2- Explica qué es un evento imposible.
- 3- Explica qué son los eventos mutuamente excluyentes.
- 4- Explica qué son los eventos complementarios.
- 5- Explica qué es un evento dependiente.
- 6- Explica qué es un evento independiente.
- 7- Utilizando el material, plantea ejemplos para los eventos.

4.3.4 Prueba escrita



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
 "Francisco García Salinas"
 UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
 Maestría en Matemática Educativa
 Prueba de conocimientos tercer grado



Nombre: _____

1- Une con una línea el evento, con su definición y su ejemplo

Evento
Evento seguro
Evento imposible
Evento mutuamente excluyente
Eventos complementarios
Evento independiente
Evento dependiente

Definición
Son dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo.
Si el resultado del primero afecta al segundo.
Su probabilidad de ocurrencia es igual a 1.
Es un evento que no depende de otro para que suceda.
Su probabilidad es 0.
Son los dos resultados posibles y la suma de sus probabilidades es 1.

Ejemplo
Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número 20, la probabilidad será de 0, ya que no hay ninguna estampilla de este color.
Al introducir bolos en la bolsa sólo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde, tomando en cuenta que sólo se puede sacar uno a la vez. Estos eventos son excluyentes pues no pueden ocurrir a la misma vez.
Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde.
Al introducir las fichas de los tres colores, al hacer un sacamiento obtener una ficha roja, devolverla a la bolsa, hacer un segundo sacamiento y obtener una verde, son eventos independientes porque el primero no afectó al segundo.
Al introducir las fichas de los tres colores, se hace un sacamiento y se obtiene una ficha roja la cual no se devuelve a la bolsa, posteriormente se hace un segundo sacamiento y ya no se tiene la misma posibilidad de obtener determinado color, porque ya no hay la misma cantidad inicial en la bolsa.
Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número potencia de 10, la probabilidad será de 1, ya que todos los números lo son.

4.3.5 Durante la presentación

La presentación comenzó con los cuatro estudiantes, quienes tenían buena visibilidad del material y de la profesora. Se dio inicio presentando el propósito directo que se trata de eventos probabilísticos y comentando que los primeros en hacer estudio de la probabilidad se les atribuye a Pascal y Fermat. Para que los jóvenes tuvieran idea de los conceptos que iban a trabajar y durante los ejercicios pudieran estimar de qué evento se trata, se les dieron a conocer.

Primero se introdujeron tres fichas de cada denominación: del número 1, color verde; 10, azules; 100, rojas y 1000, verdes. Posteriormente, se les preguntó por la posibilidad de obtener de la bolsa una potencia del 10, los alumnos no lo recordaban así que se les dijo cuáles eran esos números. Cuando hicieron el primer sacamiento se pudieron observar atentos a lo que les salía tanto a ellos como a sus compañeros y al preguntarles que a quién le había salido una potencia del 10, el alumno A3.4, inseguro, con voz baja, dijo que a él; así que se les preguntó a cada uno para ver qué número habían obtenido y confirmar que todas sus fichas lo eran. Cuando se clasificó que obtener una potencia del 10 se trataba de un evento seguro se dio paso a la lectura de la tarjeta de control de error y con ello al cálculo de probabilidades. Por ello, en una hoja se recordó la ley de Laplace para expresarlas, los alumnos que más la recordaban eran el A3.1 y A3.2.

Los alumnos clasificaron sin problemas el evento seguro. Posteriormente, dedujeron que el siguiente se trataba de un evento imposible, ya que éste no podía ocurrir. Para los eventos mutuamente excluyentes, se les tuvo que decir en su totalidad de qué se trataba. Al presentarles el ejemplo de los eventos mutuamente excluyentes, y preguntarles si éstos eventos podían ocurrir al mismo tiempo y de qué evento se trataba, el alumno A3.1 mencionó que de uno imposible, lo que denota que ese evento cada vez le iba quedando más claro.

Para los eventos complementarios se utilizaron dos bolos, uno rojo y uno verde, durante la explicación se detalló el ejemplo ya que no lo pudieron determinar. Para el evento independiente los alumnos calcularon las probabilidades que tenían cada estampilla de salir, por ello la importancia de recordar de qué manera se realizaba. Cuando se dio paso al evento dependiente a los alumnos se les aclaró aún más el independiente, ya que concluyeron que si al hacer un sacamiento y se devuelve se trata de ése porque sus probabilidades no cambian al hacer un segundo sacamiento y si no se devuelve se trata de un dependiente ya que está sujeto a lo que suceda en el anterior.

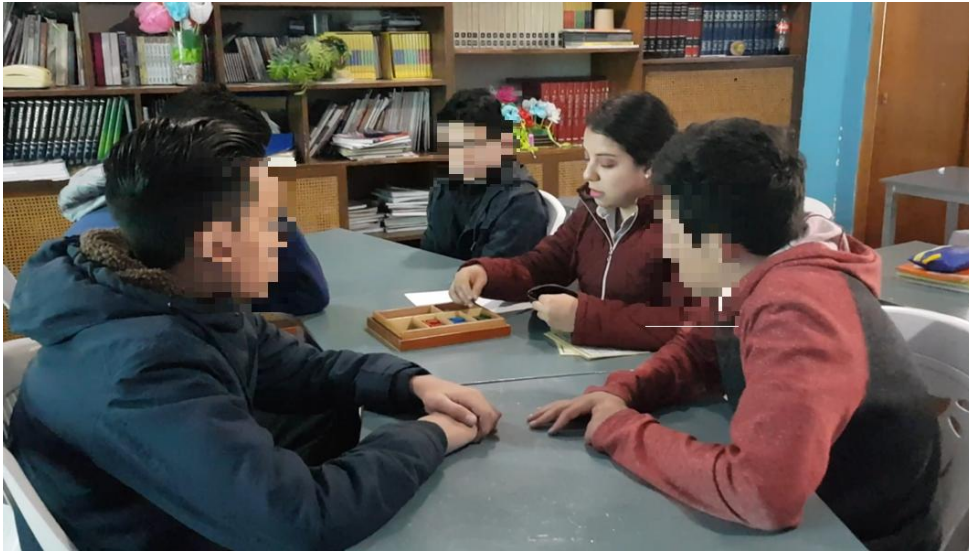


Figura 22. Aplicación con tercer grado.

4.3.6 Resultados de la entrevista

Durante la aplicación de las entrevistas con los alumnos se observó que los alumnos además habían estudiado las tarjetas de control de error, ya que las definiciones que estaban exponiendo eran prácticamente iguales a las que se les habían presentado.

El alumno A3.1 mencionó correctamente los ejemplos y definición de los eventos seguro, imposible, pero para los mutuamente excluyentes sólo se quedó en la primera, así que se le explicó nuevamente un ejemplo de ello, diferente al que se había visto en la clase para que tuviera una nueva referencia. Para los eventos complementarios su definición necesitó ayuda al igual que su ejemplo, se notaba que el joven lo sabía pero no encontraba las palabras para expresarlo. Para los eventos independientes y dependientes utilizó el mismo ejemplo para explicarlos, pero en vez de mencionar el material él lo hacía con bolitas de colores, lo que es interesante ya que trató de salir de lo conocido.

La entrevista más corta que se presentó fue la del alumno A3.2 ya que de los cuatro fue quien pudo mencionar correctamente las definiciones y ejemplos que se le habían proporcionado, aun así se le explicó otro ejemplo diferente al visto durante la presentación para que quedara más claro. Los eventos independientes no los recordaba, cuando se le dio lectura a su definición el alumno recordó el ejemplo, sin embargo él decía que tenían cada uno un 50% de probabilidades y que por ello la suma de los dos era del 100%. Como ése es un caso especial, y para evitar que se quede con esa idea, se le mostró un ejemplo diferente en el que uno de los dos tiene mayor probabilidad de ocurrencia, modificando el número de bolos implicados. Los eventos independientes y dependientes los explicó de manera clara.

El estudiante A3.3 también estudió las definiciones y ejemplos, sin embargo se tuvieron que aclarar algunos puntos, recordando que tiene un diagnóstico de lento aprendizaje, fue una sorpresa ver que superó los aprendizajes que se tenían planteados en

su rúbrica. Mencionó bien la definición de un evento seguro, pero su ejemplo tenía algunas cosas que precisar, por ello se le explicó nuevamente para que lo comprendiera. El evento imposible lo expuso correctamente. Después se procedió con los eventos mutuamente excluyentes que también los explicó bien, pero se le volvió a explicar para que tuviera otro ejemplo presente. Los eventos complementarios sí los definió, sin embargo después de la entrevista anterior se le explicó un ejemplo diferente para evitar que también tuviera la idea de que las probabilidades siempre son del 50% y para reforzar su cálculo de probabilidades. Los eventos independientes y dependientes fueron nuevamente explicados para ello se hizo uso del mismo ejemplo, al final al preguntarles por las probabilidades el alumno fue capaz de mencionarlas de manera fraccionaria.

El último estudiante a entrevistar fue el A3.4, a quien prácticamente se le tuvo que dar nuevamente la presentación. El joven tenía nociones de lo que se hablaba y la mayoría de las veces respondía correctamente a las preguntas que se le realizaban, sin embargo no era capaz de dar una definición y ejemplo por sí solo, por lo que sólo complementaba lo que se le explicaba. Aun así calculó de manera correcta las probabilidades incluso cuando esta presentación fue la primera explicación que se le daba sobre ello.

4.3.7 Resultados de la prueba escrita

Los resultados de las pruebas de los estudiantes de tercero reflejaron que lograron comprender los tipos de eventos, en ella tenían que relacionar el tipo de evento con la definición y un ejemplo de ello.

De los cuatro alumnos que respondieron la prueba sólo el alumno A3.3 relacionó incorrectamente los eventos dependiente y complementario, invirtiendo las definiciones y ejemplos, como se observa en la Figura 19.

Evento mutuamente excluyente	Si el resultado del primero afecta al segundo	vez.
Eventos complementarios	Su probabilidad de ocurrencia es igual a 1.	Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde.
	Es un evento que no depende de otro para que suceda	Al introducir las fichas de los tres colores, al hacer un sacamiento obtener una ficha roja, devolverla a la bolsa, hacer un segundo sacamiento y obtener una verde, son eventos independientes porque el primero no afecta al segundo.
Evento independiente	Su probabilidad es 0.	Al introducir las fichas de los tres colores, se hace un sacamiento y se obtiene una ficha roja la cual no se devuelve a la bolsa, posteriormente se hace un segundo sacamiento y ya no se tiene la misma posibilidad de obtener determinado color, porque ya no hay la misma cantidad inicial en la bolsa.
Evento dependiente	Son los dos resultados posibles y la suma de sus probabilidades es 1.	Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número potencia de 10, la probabilidad será de 1, ya que todos los números lo son.

Figura 23. Relación del alumno A3.3.

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

Tabla 37

Resultados de los aprendizajes esperados de los alumnos de tercero.

Aprendizajes esperados	A3.1	A3.2	A3.3	A3.4
Identifica un evento seguro con el uso del material.	✓	✓	✓	
Identifica un evento imposible con el uso del material.	✓	✓		✓
Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.		✓	✓	
Identifica un evento complementario con el uso del material.			✓	
Identifica un evento independiente con el uso del material.	✓	✓		
Identifica un evento dependiente con el uso del material.	✓	✓		
Clasifica un evento a partir de cierta situación.	✓	✓	✓	✓
Explica qué es un evento seguro.	✓	✓	✓	
Explica qué es un evento imposible.	✓	✓	✓	✓
Explica qué es un evento mutuamente excluyente.		✓	✓	
Explica qué es un evento complementario.			✓	
Explica qué es un evento independiente.		✓		
Explica qué es un evento dependiente.		✓		
Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	✓	✓	✓
Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	✓	✓	✓
Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	✓		✓
Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	✓	✓	✓
Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	✓	✓	✓
Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	✓		✓

En la Tabla 37 se muestran los resultados obtenidos de los aprendizajes esperados de los alumnos de tercero, mismos que fueron recolectados a partir de las entrevistas y prueba escrita.

4.3.8 Resultados de las rúbricas

Tabla 38

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A3.1

Aprendizajes esperados	A3.1	Observaciones
1- Identifica un evento seguro con el uso del material.	✓	
2- Identifica un evento imposible con el uso del material.	✓	
3- Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.		Le fue complicado establecer con un ejemplo, ya que lo planteaba como un solo evento y no como dos, por lo que durante la entrevista se le orientó para que lo comprendiera.
4- Identifica un evento complementario con el uso del material.		Le fue complicado establecer con un ejemplo, ya que lo planteaba como un solo evento y no como dos, sin embargo sí sabía que la suma de las probabilidades de ambos es de 1, por lo que durante la entrevista se le orientó para que lo comprendiera.
5- Identifica un evento independiente con el uso del material.	✓	

6- Identifica un evento dependiente con el uso del material.	✓
7- Clasifica un evento a partir de cierta situación.	✓
8- Explica qué es un evento seguro.	✓
9- Explica qué es un evento imposible.	✓
10- Explica qué es un evento mutuamente excluyente.	
11- Explica qué es un evento complementario.	
12- Explica qué es un evento independiente.	
13- Explica qué es un evento dependiente.	
14- Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.	✓
15- Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.	✓
16- Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓
17- Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.	✓
18- Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓
19- Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓

Tabla 39

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A3.2

Aprendizajes esperados	A3.2	Observaciones
1- Identifica un evento seguro con el uso del material.	✓	
2- Identifica un evento imposible con el uso del material.	✓	
3- Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.	✓	
4- Identifica un evento complementario con el uso del material.		Durante la entrevista se le tuvo que mostrar otro ejemplo, ya que cuando se le cuestionó, no recordó de qué se trataba, y cuando se le empezó a explicar decía que cada uno de los eventos tenía que tener el 50%, por

		lo que se le presentó un ejemplo en el que no fuera así.
5- Identifica un evento independiente con el uso del material.	✓	
6- Identifica un evento dependiente con el uso del material.	✓	
7- Clasifica un evento a partir de cierta situación.	✓	
8- Explica qué es un evento seguro.	✓	
9- Explica qué es un evento imposible.	✓	
10- Explica qué es un evento mutuamente excluyente.	✓	
11- Explica qué es un evento complementario.		
12- Explica qué es un evento independiente.	✓	
13- Explica qué es un evento dependiente.	✓	
14- Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
15- Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
16- Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
17- Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
18- Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
19- Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	

Tabla 40

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A3.3

Aprendizajes esperados	A3.3	Observaciones
1- Identifica un evento seguro con el uso del material.	✓	
2- Identifica un evento imposible con el uso del material.		Se le tuvo que ayudar para que por medio del material lo pudiera comprender
3- Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.	✓	
4- Identifica un evento complementario con el uso del material.	✓	
5- Identifica un evento independiente con el uso del		No recordó cómo

material.		era el evento, por lo que en la entrevista se le explicó nuevamente.
6- Identifica un evento dependiente con el uso del material.		Necesitó ayuda para recordar el ejemplo.
7- Clasifica un evento a partir de cierta situación.	✓	
8- Explica qué es un evento seguro.	✓	
9- Explica qué es un evento imposible.	✓	
10- Explica qué es un evento mutuamente excluyente.	✓	
11- Explica qué es un evento complementario.	✓	
12- Explica qué es un evento independiente.		Durante la entrevista explicó de qué se trata.
13- Explica qué es un evento dependiente.		Durante la entrevista explicó de qué se trata.
14- Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
15- Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
16- Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.		En la prueba escrita, no lo identificó, por tanto no lo relacionó con su definición y ejemplo.
17- Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
18- Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
19- Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.		En la prueba escrita, no lo identificó, por tanto no lo relacionó con su definición y ejemplo.

Tabla 41

Resultados de los aprendizajes esperados del alumno A3.4

Aprendizajes esperados	A3.4	Observaciones
1- Identifica un evento seguro con el uso del material.		Fue necesario mostrarle nuevamente en la entrevista un ejemplo.
2- Identifica un evento imposible con el uso del material.	✓	
3- Identifica un evento mutuamente excluyente con el uso del material.		Fue necesario mostrarle nuevamente en la entrevista un ejemplo.
4- Identifica un evento complementario con el uso del material.		Fue necesario mostrarle nuevamente en la entrevista un ejemplo.
5- Identifica un evento independiente con el uso del material.		Fue necesario mostrarle nuevamente en la entrevista un ejemplo.
6- Identifica un evento dependiente con el uso del material.		Fue necesario mostrarle nuevamente en la entrevista un ejemplo.
7- Clasifica un evento a partir de cierta situación.	✓	
8- Explica qué es un evento seguro.		No fue capaz de explicar, por lo que en la entrevista se le indicó nuevamente de qué se trata.
9- Explica qué es un evento imposible.	✓	
10- Explica qué es un evento mutuamente excluyente.		No fue capaz de explicar, por lo que en la entrevista se le indicó nuevamente de qué se trata.

11- Explica qué es un evento complementario.		No fue capaz de explicar, por lo que en la entrevista se le indicó nuevamente de qué se trata.
12- Explica qué es un evento independiente.		No fue capaz de explicar, por lo que en la entrevista se le indicó nuevamente de qué se trata.
13- Explica qué es un evento dependiente.		No fue capaz de explicar, por lo que en la entrevista se le indicó nuevamente de qué se trata.
14- Da un ejemplo de un evento seguro en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
15- Da un ejemplo de un evento imposible en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
16- Da un ejemplo de un evento mutuamente excluyente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
17- Da un ejemplo de un evento complementario en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
18- Da un ejemplo de un evento independiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	
19- Da un ejemplo de un evento dependiente en una situación diferente a las vistas en clase.	✓	

En síntesis, las clases se desarrollaron conforme se habían planteado en las presentaciones. En el análisis de los videos, se pudo constatar la falta de algunos elementos tales como, relacionar la generalización con la parte numérica, una mayor interacción por parte de los alumnos y que tuvieran mayor contacto con el material, de manera que ellos lo pudieran manipular, aspectos que fueron incluidos en las entrevistas personales de los estudiantes.

Las entrevistas tenían la intención de verificar los conocimientos adquiridos y complementarlos, de ser necesario. En ese sentido, se observó que entre más alumnos había en el grupo, se tenía menos interacción y no podían tener la misma visibilidad del material y la presentación; asimismo, mantener el contacto con cada uno de ellos era más

complicado, al ser más estudiantes. Las entrevistas se realizaron de forma individual y apartados de sus compañeros, con el propósito de que no hubiera intervención de algún tercero ni distracciones.

Durante la aplicación de las pruebas los estudiantes se tenían que enfrentar solos a ellas, sin poder hacer preguntas ni usar el material para recordarlo. Sin embargo, algunos insistían en preguntar porque no recordaban algunas de las preguntas.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

En el presente capítulo se muestran las conclusiones y reflexiones finales que se derivan del análisis de resultados de la elaboración de las presentaciones, rúbricas, entrevistas y pruebas escritas, así como la aplicación de éstas con los estudiantes de secundaria.

5.1 Retomando el problema inicial

Retomando la pregunta de investigación que nos planteamos sobre ¿Cuál sería una propuesta de presentación de materiales Montessori para fomentar la construcción de los conceptos matemáticos, desigualdad del triángulo, binomio al cubo y eventos probabilísticos en estudiantes de nivel secundaria? Se ha llegado a varias conjeturas, entre ellas, por ejemplo, es que los elementos que propone Montessori para la presentación carecen de significación si no se tiene conocimiento del método. Que las presentaciones que se diseñaron pueden mejorar a partir de la investigación que se realizó a través de la aplicación de las presentaciones, las entrevistas y las pruebas escritas, que arrojaron información para conocer qué elementos fueron exitosos y cuáles no.

En la hipótesis se manejaron cuatro aspectos que deberían contener las presentaciones: el propósito directo, propósito indirecto, punto de interés y control de error. Siguiendo con esta idea, se han mantenido los mismos elementos, estableciendo ahora algunas cualidades que después de la realización de este informe son necesarias considerar en el momento de diseñar una presentación y llevarla a cabo con los estudiantes.

El propósito directo de una presentación Montessori tiene que ser acorde con los conocimientos previos que tienen los estudiantes de manera que no se sature a los estudiantes de información. Un ejemplo de ello es que en los grupos de primer y tercer año los conceptos presentados requerían menos conocimientos previos por ello y los alumnos podían recordar el proceso de creación de sus aprendizajes esperados. En cambio con el grupo de segundo tenían que tomar más elementos que los ayudaran a construir el nuevo conocimiento; tenían que recordar nombres de figuras, fórmulas de áreas, nombres de cuerpos, fórmulas de volumen y multiplicación de términos, para llegar a consolidar la regla del binomio al cuadrado y al cubo, además de pasar de la representación geométrica a una algebraica. Es por ello que aunque el propósito directo indicaba que los alumnos visualizaran la representación geométrica y algebraica del binomio al cubo, en la que se trató de abordar en una clase, era mucha información para procesar en una sola presentación.

Los propósitos indirectos siempre van de la mano con los directos, si los estudiantes no han consolidado los segundos, el primero pierde su intencionalidad, ya que no se está teniendo una verdadera preparación para un tema posterior. Los alumnos que realmente han alcanzado la apropiación del aprendizaje marcado en el propósito directo tienen los elementos necesarios para uno nuevo. Sin embargo, los estudiantes que en estas presentaciones no los alcanzaron no tienen la preparación adecuada para pasar al siguiente

nivel, por ello tendrán que repetir la presentación basándose en los resultados que se obtuvieron enfocándose en las dificultades que se obtuvieron según los resultados de las pruebas.

El control de error toma relevancia cuando se observa que los alumnos trabajan de manera autónoma. Un ejemplo de que los materiales Montessori son autocorregibles se dio cuando los estudiantes de segundo grado armaron el cubo, ellos se guiaron de la tapa para hacerlo, veían los colores y pieza por pieza las iban colocando. Las tarjetas de control de error entraron en juego durante las entrevistas, cuando los alumnos no recordaban los enunciados y reglas; por lo tanto, en ellas se debe contener ejemplos claros y precisos que apoyen al estudiante a retomar un conocimiento que ya se le dio y que no logró consolidar y por ello no lo recuerda. Durante la aplicación de las presentaciones, los alumnos de tercer grado fueron los que más contacto tuvieron con ellas, incluso las tomaban y se preguntaban los unos a los otros las definiciones y ejemplos de cada uno de los eventos. Por ello se puede decir que tuvieron un impacto positivo en ellos al buscar fortalecer sus aprendizajes y que se vieran reflejados en una entrevista y en la prueba escrita.

En lo que respecta al *punto de interés*, los estudiantes se encontraban atentos al material durante la presentación. El grupo de primer grado tuvo contacto con el material durante las entrevistas y fue ahí cuando presentaron las dificultades, en la formación de los triángulos se podía observar la dedicación que tenían al ir tomando cada barra de color y unir las tachuelas y que cada vez que terminaban una actividad guardaban cada pieza en su lugar, de manera que también quedaran acomodadas. Con ello se evidencia que *el orden juega un papel importante dentro del aprendizaje de los alumnos*, ya que el acomodo que se les dio durante la presentación lo reflejaban en sus entrevistas.

De igual forma sucedió con el grupo de segundo año, pero con ellos antes de hablarles de las características del material y lo que representaban, se les dio una presentación sensorial en la que la guía no habló, solamente construía el cubo a partir de los colores que le mostraba la tapa de control de error, durante ese procedimiento se observó a los estudiantes a la expectativa y atentos. Ésa fue la parte en la que los nueve estudiantes centraron su atención en ver qué era lo que estaba sucediendo, en lo que fue una explicación sin palabras. Sin embargo, durante las entrevistas en donde tuvieron ya el contacto con el material, los nueve alumnos pudieron hacer el armado del cubo, no obstante no reflejaron el orden que se había manejado durante la presentación, tomaban las piezas de la caja y en vez de pasarlas en la misma posición las volteaban y las observaban, entonces *su punto de interés se centró en la manipulación de cada pieza y no en el armado del cubo*.

El grupo de tercero sí tuvo contacto con el material durante la presentación y su punto de interés, como se tenía contemplado, era el hacer los sacamientos de la bolsa, incluso cada vez que introducían su mano en la bolsa trataban de revolver las estampillas. El *punto de interés* de una presentación Montessori trata de impactar en los alumnos a manera de que durante el proceso de la obtención del conocimiento *haya uno o varios*

elementos que los haga centrar su atención en el material aislándolo de los distractores y elementos que los lleven a perder su concentración.

Dentro de las tres presentaciones que se elaboraron hay elementos que se rescatan por su efectividad, entre ellos la aplicación de la presentación de las barras para que comprendieran la desigualdad del triángulo, aspecto que podían comprobar usándolas, también el uso de la tarjeta de control de error a las que autónomamente recurrieron los estudiantes de tercer grado para explicar las definiciones. Como en toda propuesta didáctica en la que se innova, hubo también aspectos que se pueden mejorar, tal es el caso del planteamiento de los propósitos directos, ya que se debe cuidar el establecimiento de metas alcanzables, asimismo el acomodo del aula y las preguntas que se elaboran hacia los estudiantes son factores a considerar. Al tratarse de una práctica de desarrollo profesional es posible regresar al aula y buscar repetir los temas con los cambios que a partir de este análisis busquen una mejora en la comprensión de los alumnos, es decir que se puede tomar un grupo diferente de estudiantes y aplicarlo tomando en cuenta los cambios antes mencionados.

El llevar a cabo una presentación con un grupo de estudiantes tiene que ser pertinente, el número de alumnos que la reciben es un factor importante dentro de su aprendizaje. Tiene que haber una visibilidad completa de lo que se le está mostrando. Un ejemplo de ello, es que con los grupos de primero y tercero con seis y cuatro alumnos respectivamente, la visión que cada uno tenía era buena al igual que el acercamiento con el material, a diferencia de los nueve alumnos que conforman segundo año, buscando que todos tuvieran visibilidad se tuvieron que separar un poco del material. El hacer la presentación con todos los alumnos cuando el grupo es relativamente grande no es algo recomendable, en nuestro caso se pudo haber dividido al grupo en dos partes, en la que se pudiera mejorar la visión para todos. Tomando en cuenta que los aprendizajes de las rúbricas en cuatro alumnos no incluían todos los elementos que las de sus compañeros, se hubiera optado por darles a ellos lo que necesitaban y no crearles confusiones al presentarles algo que no comprendieron y que les hizo perder el interés en la presentación.

5.2 Recomendaciones hacia una mejora

En la búsqueda de una mejora en el aprendizaje de los estudiantes y que es necesario considerar, se observa que el número de alumnos a los que se les va a presentar el material es un factor muy importante. Grupos numerosos obstruyen la vista, por ello es necesario estimar cuántos estudiantes tendrán una buena visibilidad y, de ser posible hacerla primero con ellos, para posteriormente hacerla con los demás.

El propósito directo se debe plantear en función del tiempo que se le dedique a la presentación y no debe de ser pretencioso; es decir, que se quiera lograr un aprendizaje

complejo y que en el transcurso de ello los alumnos no estén comprendiendo lo que se les quiere mostrar.

Uno de los aspectos que influyen dentro de la realización de la presentación hacia los estudiantes, es que el guía les debe de transmitir confianza a los estudiantes. Es necesario tener dominada la presentación con el fin de evitar que se pierdan elementos que son importantes para la comprensión del propósito directo y que a su vez no se pierda el punto de interés por aprenderlo.

La preparación no sólo es del guía, también se debe de hacer con los estudiantes. Es decir, que a la hora de hacer la presentación cada uno ya conozca qué es lo que tiene que hacer, cuándo puede intervenir, el orden a tomar y cómo actuar ante una distracción que pueda surgir en el aula.

Cuando se hace una presentación grupal, es indispensable tomar en cuenta que todos los estudiantes cuenten con los conocimientos necesarios para tomar la presentación, que tengan la normalización y los conocimientos previos para llevarla a cabo, a fin de consolidar el propósito directo y que por tanto el propósito indirecto cobre sentido cuando se convierta en el nuevo propósito directo.

Después del análisis de los resultados en los que se observa que algunos estudiantes no lograron completar los aprendizajes esperados, planteados en su rúbrica individual, se recomienda repetirla con el fin de que logren consolidarlos ya que en caso de enseñar otro tema que esté conectado o ligado a ello carecerá de conocimientos previos que los apoyen en la construcción de nuevos.

5.3 Posibles futuras investigaciones

Dentro de las opciones para posibles investigaciones posteriores consideramos que se podrían atender las siguientes:

- Realizar un estudio enfocado a mejorar la presentación de segundo grado, en la que primero solamente se trabaje el paso de lo geométrico a lo algebraico del binomio al cuadrado, teniendo como propósito indirecto la preparación para el binomio al cubo.
- Dada la política educativa actual de “Escuela para todos”, pudiera ser interesante indagar la construcción de conocimiento matemático con los estudiantes que tienen una necesidad educativa especial.
- Elaboración de más presentaciones enfocadas en el nivel educativo secundaria.
- Analizar qué aspectos del Método Montessori pueden ser implementados en la enseñanza tradicional.

5.4 Reflexión como docente

La elaboración de este informe de Práctica de Desarrollo Profesional tiene como objetivo atender problemas que se presentan dentro de mi aula de matemáticas: el primero, respecto a la falta de presentaciones en el nivel secundaria dentro de la institución en la que laboro, atendiendo a ello y tratando de cubrir los tres grados decido hacer una para cada grado. Pero no se trata solamente de hacerlas siguiendo algunos lineamientos que han sido adoptados en primaria, se trata de la comprensión del método en sí, así que antes de la elaboración fue necesario inmiscuirme dentro del método y conocer de qué manera están conectados los conceptos de la filosofía Montessori que intervienen dentro de la enseñanza de conceptos matemáticos y del nivel en el que se encuentran los alumnos.

El estudiar el método Montessori me ha llevado a comprender algunos conceptos importantes dentro de la educación que, desde mi formación como profesora de matemáticas, no me fue posible. Creo y estoy convencida que cualquier profesor, sin importar la asignatura o nivel académico, debería leer o conocer parte de la filosofía Montessori. Algunos piensan que se trata únicamente de la utilización de materiales didácticos pero no es así, en ella se abordan aspectos que pueden influir en la vida cotidiana, uno de ellos es el orden y que es uno de los aspectos que han mejorado dentro de mi labor como docente. Si nosotros como profesores mejoramos en este aspecto a la hora de pedir los trabajos, libretas, acomodo de las aulas e imagen, será algo que les estaremos transmitiendo a nuestros alumnos y que no importa en qué nivel te desempeñes o que método estés utilizando, se trata de fomentar el orden externo que los lleve a crear uno de manera interna y que de la misma forma suceda con los conocimientos que van adquiriendo.

Conocer a los estudiantes y las necesidades individuales que requieren no es una tarea fácil y menos cuando se tienen grupos numerosos, sin embargo considero que la observación juega un papel importante. Nosotros como profesores tenemos que adaptarnos a las necesidades educativas de los planteles y estudiantes que tengamos, por ello la importancia de la adquisición de habilidades y una buena preparación como profesores para atender las contingencias que se nos presenten.

La elaboración de este informe ha dejado en mí una experiencia de aprendizaje, quizá no tanto en lo que se refiere a conocimiento sino en el sentido de que la preparación de un profesor nunca es suficiente, cada vez se nos presentan nuevos retos que es necesario atender para ser los profesores profesionales que nuestros alumnos y país necesitan. Tenemos que seguir siendo investigadores en el aula, buscar siempre nuevas estrategias que nos permitan formar mejores estudiantes y, por tanto, mejores personas.

REFERENCIAS

- Abett, P. (2013). *Conformación y desarrollo del sistema parvulario chileno, 1905-1973: un camino profesional condicionado por el género*. (Tesis de doctorado no publicada). Facultad de Geografía e Historia. Universidad Complutense de Madrid. Madrid, España.
- Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. (2012). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Álvarez-Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa*. México: Paidós.
- Aquino, A., & Maturano, M. (2001). *La importancia del material didáctico en la enseñanza de las matemáticas en tercer grado de primaria*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. México, D.F.
- Ararat, L., Nieva, A., & Nieva, M. (2014). *Material didáctico para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en transición de séptimo a octavo grado de la institución educativa sagrado corazón*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Católica de Manzanara. Cauca, Colombia.
- Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Compañía Editora y Distribuidora de textos Americanos.
- Baldor, A. (2011). *Álgebra*. México: Grupo editorial Patria.
- Barreto, J. (2012). Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 38(1), 115-133.
- Batanero, C. (2005). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. ISBN: 84-688-0573-4. CD ROM
- Batanero, C. (2006). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime*, 8(3), 247, 263.
- Botero, D. (2004). Cosmos, hombre y utopía. *Palimpsestos*, 4(1), 114-121.
- Cabello, G. (2006). Relevancia de los medios y materiales educativos en el aprendizaje de la matemática en educación primaria. *III Encuentro de Matemáticas Del Caribe Colombiano*. Barranquilla, Colombia.
- Cascallana, M. (1998). *Iniciación a la matemática Materiales y recursos didácticos*. España: Santillana.
- Consentino, J. (2006). Big Work: Goodness, Vocation, and Engagement in the Montessori Method. *Curriculum Inquiry*, 36(1), 63-92.

- Donabella, M., & Rulle, A. (2008). Four Seventh Grade Students Who Qualify for Academic Intervention Services in Mathematics Learning Multi-Digit Multiplication with the Montessori Checkerboard. *TEACHING Exceptional Children Plus*, 4(3), 1-28.
- Feez, S. (2007). *Montessori's mediation of meaning: a social semiotic perspective*. (Tesis de doctorado no publicada). Faculty of Arts, School of Letters, Arts and Media. University of Sydney. Sydney, Australia.
- Fernández, J. (2008). *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio de sus efectos sobre una muestra de alumnos de 2º de primaria*. (Tesis de doctorado no publicada). Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Pedagogía Aplicada, Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona, España.
- Fernández, M., & Del Río, A. (2015). Construcción de triángulos con materiales manipulativos. *ReiDoCrea*, 4(1), 386-390.
- Flores, L. (2008). *Historia y didáctica de la trigonometría*. España: Publicatuslibros.com
- Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A., & Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Flores, W., & Olivares, S. (2008). *Unidad didáctica con el enfoque por competencia para la enseñanza de los productos notables*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad de las Regiones Autónomas de las Costa del Caribe Nicaraguense. Nueva Guinea, Nicaragua.
- Gallardo, S., Cañadas, M., Martínez-Santaolalla, M., & Molina, M. (2007). Jugando con la probabilidad. En Flores, Pablo; Roa, Rafael; Pozuelo, R. (Eds), *Investigación en el aula de matemáticas: estadística y azar* (pp. 200-207). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- García, M. (2011). El vídeo como herramienta de investigación: Una propuesta metodológica para la formación de profesionales en Comunicación. *Enlaces: Revista del CES Felipe II*, (13), 7.
- Godínez, G. (2017). *Material didáctico y su relación con el aprendizaje, sistematización de práctica profesional*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Rafael Landívar. Quetzaltenango, Guatemala.
- Gyöngyösi, E. (2012). Teaching and Learning Mathematics Through Games and Activities. *Acta Electrotechnica et Informatica*, 12(3), 23-26.
- Hernández R. (2016). *La desigualdad del triángulo, una secuencia didáctica para alumnos de secundaria incorporando material didáctico manipulable*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, Zacatecas.

- Hincapie, G., & Riaño, H. (2006). Lógica con bloques lógicos. *Memorias XVI Encuentro de Geometría y IV encuentro de Aritmética* (pp. 695-722). Bogotá, Colombia.
- Iquinás, C. (2017). *Diseño de una situación de aprendizaje de la congruencia de triángulos para desarrollar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en los estudiantes de grado noveno del colegio San Gabriel Fundesia*. (Tesis de licenciatura no publicada). Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.
- Joosten, A. (1968). Exercises of Practical life: introduction and list. *The NAMTA Journal*, 38(2), 5-34.
- Kahn, D. (1990). *Implementing Montessori Education in the Public Sector*. Estados Unidos: Eric.
- Kothari (2004). *Research Methodology. Methods & Techniques. Second Revised Edition*. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.
- Lillard
- Mak, G. (2014). *Characteristics of Modern Montessori*. (Tesis de maestría no publicada). George Mason University. Fairfax, Estados Unidos de Norteamérica.
- Manrique, A., & Gallego, A. (2012). El Material Didáctico para la Construcción de aprendizajes significativos. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales*, 4(1), 101-108.
- Mella, M. (2011). *Estudio cualitativo de la implementación del método Montessori, en las niñas y niños de la sala de clases heterogénea de la sala cuna y jardín infantil El Roble de la comuna de la Pintana*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Academia de Humanismo Cristiano. Chile.
- Mode, E. (2005). *Elementos de la probabilidad y estadística*. España: Reverté.
- Montessori, M. (1917). *The advanced Montessori method*. London: William Heinemann.
- Montessori, M. (1982). *El niño. El secreto de la infancia*. México: Editorial Diana.
- Montessori, M. (1986/1990). *La mente absorbente del niño*. México: Editorial Diana.
- Montessori, Mario Jr. (1991). *La educación para el desarrollo humano. Comprendiendo a Montessori*. México: Diana.
- Morales, P. (2012). *Elaboración de material didáctico*. México: Red Tercer Milenio.
- Muñoz, C. (2014). *Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad de la Rioja. La Rioja, España.
- Navarrete, P. (2017). *Importancia de los materiales didácticos en el aprendizaje de las matemáticas*. (Tesis de Licenciatura no publicada). Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad de Jaén. Jaén, Andalucía.

- Quereda, N. (2012). *Materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Almería, España.
- Quispe, Y. (2015). *Aplicación del Método Montessori en el aprendizaje del área de Matemática en el aula del primero y segundo grados de educación primaria con discapacidad visual del CEBE Nuestra Señora del Carmen del Distrito de San Jerónimo de la Provincia del Cusco*. (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Nacional San Agustín de Arequipa. Perú.
- Ramírez, A. (2018). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del pensamiento aleatorio bajo el modelo escuela activa urbana*. (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia. Manizales, Colombia. FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
- Reed, M. (2008). Comparison of the Place Value Understanding of Montessori Elementary Students. *Investigations in Mathematics Learning*, 1(1), 1-26.
- Rodríguez, F., Navarro, C., Maldonado, E., Romero, J., Vicario, M., Campistrous, L., & Rizo, C. (2016). *Iniciación al álgebra elemental*. México: Díaz de Santos.
- Rodríguez, I., & Ryan, G. (2001). Integración de materiales didácticos hipermedia en entornos virtuales de aprendizaje: retos y oportunidades. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1(025), 177-203.
- Röhrs, H., (1994). *Die Reformpädagogik: Ursprung und Verlauf unter internationalem Aspekt*. Alemania: Prospects.
- San Julián, M. (2016). *Metodología Montessori de 0 a 3 años*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Salamanca. Salamanca, España.
- Sánchez, R. (2010). *La comprensión matemática de los productos notables, cocientes notables y descomposición factorial en el décimo año de los colegios "Víctor Mideros" y "Daniel Reyes" de la parroquia de san Antonio de Ibarra. Propuesta de metodología lúdica a través de software*. (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología, Universidad Técnica Del Norte. Ibarra, Ecuador.
- Santerini, M. (2013). Grandes de la educación: María Montessori. *Padres y Maestros / Journal of Parents and Teachers*, (349). Recuperado de <http://revistas.upcomillas.es/index.php/padresymaestros/article/view/959>
- Santos, B. (2015). Material didáctico de matemática en la educación de jóvenes y adultos: desafíos, perspectivas. *Revista Lusófona de Educação*, 1(29), 161-182.
- Schilling, K. (2011). Montessori Approach to Teaching/Learning and Use of Didactic Materials. *Education Graduate Symposium*. Universidad of Manitoba. Canadá.
- Secretaría de Educación Pública (SEP) (2000). *Planes y programas de estudio*. México: Autor.

-
- Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Aprendizajes Clave*. México: Autor.
- Tittle, B., & Ohlhaber, D. (1977). The Truth About Montessori. *Day care and early education*. 4(12), 12-42.
- Valdés, I. (2018). *Probabilidad y Estadística*. Recuperado 1 de octubre de 2108 de http://www.dcb.unam.mx/profesores/irene/Notas/Tema_2-1_pantcompl.pdf
- Villalta, T. (2011). *Elaboración de material didáctico para mejorar el aprendizaje en el área de matemáticas con los niños del séptimo año de educación básica de la escuela "Daniel Villagómez", parroquia Tayza, Cantón Santiago, de la Provincia de Morona Santiago 2010-2011*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Politécnica Salesiana, sede Cuenca. Cuenca, Ecuador.
- Wentworth, J., & Smith, D. (1972). *Geometría plana y del espacio*. México: Porrúa.
- Willoughby, S. (1999). *Probability and statistics*. United States of North America: Silver Burdett Company.
- Yaglis, D. (1989). *Montessori: la educación natural y el medio*. México: Trillas.
- Zafa, M. (2012). *Análisis Bibliométrico de María Montessori (1870-1952) en la Actualidad*. (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad de Málaga. Málaga, España.

ANEXO 1. MARCO TEÓRICO-MATEMÁTICO

Trazo de triángulos

Definiciones de triángulo:

“Llamase triángulo el espacio limitado por tres rectas que se cortan” (Wentworth y Smith, 1972, p. 7).

“Polígono de tres lados” (Gilmán, 1807, p. 3).

Enunciado de la desigualdad de triángulos por Wentworth y Smith (1972) “la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado; y la diferencia menor” (p. 54).

Por su parte, Gilmán (1807) lo reporta como que “en un triángulo cualquiera, en un lado, sea el que fuere, siempre es menor que la suma de los otros dos” (p. 11).

Productos Notables

“Se llaman productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación” (Baldor, 1983, p. 97).

Cuadrado de la suma de dos cantidades: “el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el doble de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda” (Baldor, 1983, p. 97).

“Se llaman productos notables o productos especiales a una serie de fórmulas que involucran expresiones algebraicas y que se emplean como una técnica en la simplificación de la resolución de operaciones entre expresiones algebraicas” (Rodríguez, Navarro, Maldonado, Romero, Vicario, Campistrous y Rizo, 2016, p. 96).

Cuadrado de un binomio: “es igual al cuadrado del primer término más el doble del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término” (Rodríguez, Navarro, Maldonado, Romero, Vicario, Campistrous y Rizo, 2016, p. 98).

Eventos

Probabilidad se define como “el estudio de fenómenos puramente aleatorios” (Willoughby, 1999, p. 1).

Eventos *complementarios* “el complemento de A, de un conjunto A, se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto universal U y que no pertenecen al elemento A; esto es,

$$A = \{x|x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

(Willoughby, 1999, p. 45).

Eventos *independientes*

Si el éxito del evento B no es influenciado o condicionado por un segundo evento A, para el cual $P(A) \neq 0$, tal que,


$$P(B|A) = P(B)$$

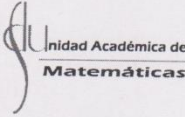
Se dice entonces que B es independiente de A (Mode, 2005, p. 50).

Eventos *mutuamente excluyentes* si se tienen dos o más eventos que pertenecen a S y al realizar el experimento solo puede ocurrir uno u otro, pero no simultáneamente. (Valdés, 2018).

ANEXO 2: PRUEBAS ESCRITAS

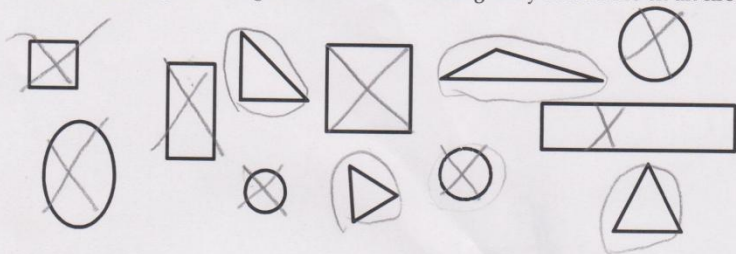
Primer grado


 UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
 ZACATECAS
 "Francisco García Salinas"
 UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
 Maestría en Matemática Educativa
 Prueba de conocimientos primer grado


 Unidad Académica de
 Matemáticas

Nombre: _____

1- Observa las siguientes figuras, identifica los triángulos y enciéralos en un círculo.



2- Escribe dos características que tengan los triángulos:

a) 3 lados

b) 3 ángulos

3- Describe qué es un triángulo: Una figura de 3 lados

4- Escribe una breve reseña sobre la historia de los triángulos: Los primeros en utilizar los triángulos fueron los griegos

5- Escribe el enunciado de la desigualdad del triángulo: 2 lados cualquiera sumados debe ser mayor que un tercero

6- De las siguientes medidas, selecciona los casos en los que se puede trazar un triángulo.

a) 3, 7, 10

b) 67, 23, 45

c) 9, 12, 18


d) 3.4, 4.5, 7.9

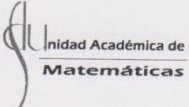
e) 67, 33, 44

f) 56.7, 23.9, 45.6

Ilustración 1. Prueba del alumno A1.1

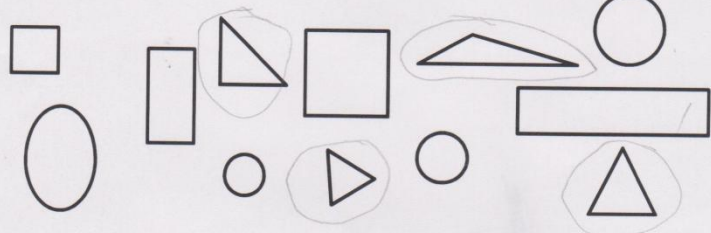
Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

 UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
Primer semestre de estudios primer grado



Nombre: _____

1- Observa las siguientes figuras, identifica los triángulos y enciérralos en un círculo.



2- Escribe dos características que tengan los triángulos:

a) Se forman por 3 rectas/tienen 3 ángulos internos.
b) Sus ángulos suman 180°

3- Describe qué es un triángulo: Una figura geométrica cerrada formada por 3 rectas.


4- Escribe una breve reseña sobre la historia de los triángulos: Fueron inventados o mejor dicho descubiertos por los griegos.

5- Escribe el enunciado de la desigualdad del triángulo: Los lados cualesquiera de un triángulo son mayores que el tercer lado.

6- De las siguientes medidas, selecciona los casos en los que se puede trazar un triángulo.

a) 3, 7, 10 b) 67, 23, 45 c) 9, 12, 18 d) 3.4, 4.5, 7.9
e) 67, 33, 44 f) 56.7, 23.9, 45.6

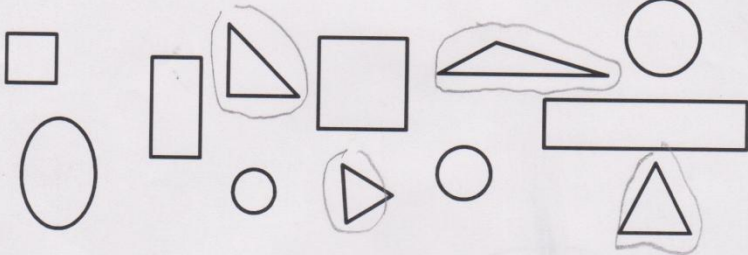
Ilustración 2. Prueba de la alumna A1.3


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
 "Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
 Maestría en Matemática Educativa
 Prueba de conocimientos primer grado

Unidad Académica de Matemáticas

Nombre: _____ 21/01/19

1- Observa las siguientes figuras, identifica los triángulos y enciérralos en un círculo.



2- Escribe dos características que tengan los triángulos:

a) tiene 3 lados.

b) tiene 3 ángulos.

3- Describe qué es un triángulo: una figura geométrica

4- Escribe una breve reseña sobre la historia de los triángulos: EV

5- Escribe el enunciado de la desigualdad del triángulo: Es la suma de un triángulo del tercer lado es mayor


6- De las siguientes medidas, selecciona los casos en los que se puede trazar un triángulo.

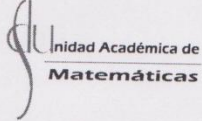
a) 3, 7, 10 b) 67, 23, 45 c) 9, 12, 18 d) 3.4, 4.5, 7.9

e) 67, 33, 44 f) 56.7, 23.9, 45.6

Ilustración 3. Prueba escrita del alumno A1.5

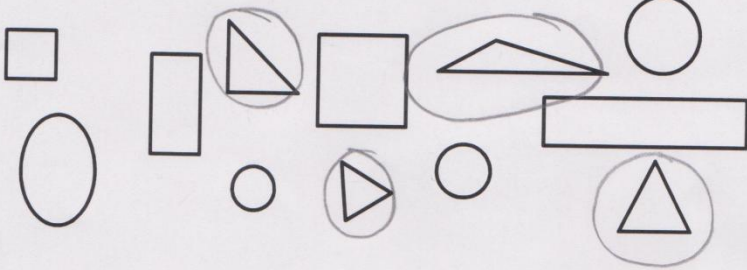
Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

 UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

 Unidad Académica de Matemáticas

Nombre: _____ nientos primer grado

1- Observa las siguientes figuras, identifica los triángulos y enciérralos en un círculo.



2- Escribe dos características que tengan los triángulos:
a) tres ángulos
b) tres lados

3- Describe qué es un triángulo: es un tres lados tres ángulos iguales

4- Escribe una breve reseña sobre la historia de los triángulos: _____

5- Escribe el enunciado de la desigualdad del triángulo: si mide menor que el otro nose podrá figurar. (formar).

6- De las siguientes medidas, selecciona los casos en los que se puede trazar un triángulo.

a) 3, 7, 10 b) 67, 23, 45 c) 9, 12, 18 d) 3.4, 4.5, 7.9
e) 67, 33, 44 f) 56.7, 23.9, 45.6

Ilustración 4. Prueba escrita de la alumna A1.6

Segundo grado

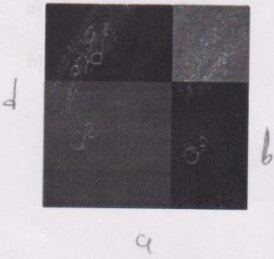
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
Prueba de conocimientos segundo grado

Unidad Académica de
Matemáticas

Nombre: _____

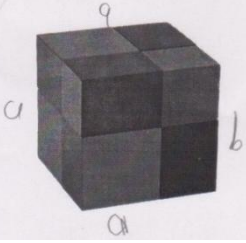
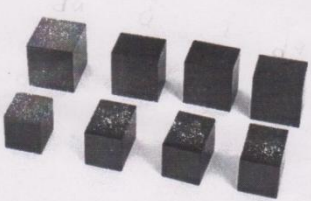
1- Utilizando literales, calcula el área de cada figura y del cuadrado.

6- Desarrolla a siguientes binomios al cuadrado:



2- Escribe la regla del binomio al cuadrado: _____

3- Utilizando literales, calcula el volumen de cada uno de los cuerpos y del cubo que se forma.

4- Escribe la regla del binomio al cubo: _____

5- Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

a) $(f + r)^2 =$ _____

b) $(g + 7)^2 =$ _____

6- Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

a) $(y + h)^3 =$ _____

b) $(j + 5)^3 =$ _____

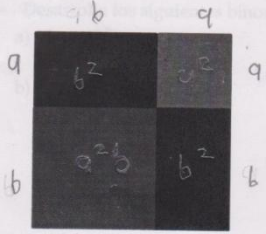
Ilustración 5. Prueba escrita del alumno A2.1

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
Prueba de conocimientos segundo grado

Unidad Académica de Matemáticas

Nombre: _____

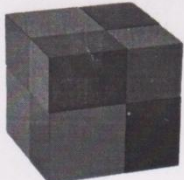
1- Utilizando literales, calcula el área de cada figura y del cuadrado.



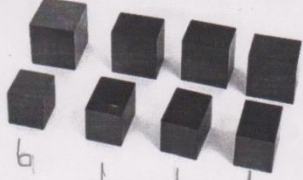
$a \times a = a^2$
 $b \times b = b^2$

2- Escribe la regla del binomio al cuadrado: Primer termino al cuadrado por el segundo termino mas el segundo termino al cuadrado

3- Utilizando literales, calcula el volumen de cada uno de los cuerpos y del cubo que se forma.



a^3



b^3

4- Escribe la regla del binomio al cubo: Primer termino mas el triple termino por el segundo termino mas el primer termino al cuadrado por triple termino al cuadrado mas el primer termino al cubo

5- Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

a) $(f+r)^2 = f \times f = f^2 \quad f \times r = fr \quad r \times f = rf \quad r \times r = r^2$

b) $(g+7)^2 = g \times g = g^2 \quad g \times 7 = g7 \quad 7 \times g = 7g \quad 7 \times 7 = 7^2$

6- Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

a) $(y+h)^3 =$

b) $(j+5)^3 =$

Ilustración 7. Prueba escrita del alumno A2.4

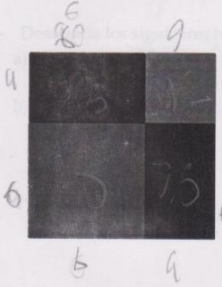
Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
Prueba de conocimientos segundo grado

Unidad Académica de
Matemáticas

Nombre: _____

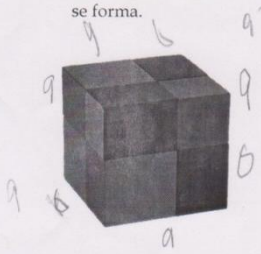
1- Utilizando literales, calcula el área de cada figura y del cuadrado.



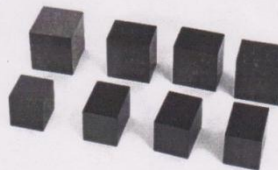
$a^2 + 2ab + b^2$

2- Escribe la regla del binomio al cuadrado: El primer término
por el primer término al cuadrado por el
segundo término al cuadrado por el

3- Utilizando literales, calcula el volumen de cada uno de los cuerpos y del cubo que se forma.



$a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$



4- Escribe la regla del binomio al cubo: El cubo del primer pol
inomio más el segundo término al cubo

5- Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

a) $(f+r)^2 = f^2 + 2fr + r^2$


b) $(g+7)^2 = g^2 + 14g + 49$

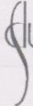
6- Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

a) $(y+h)^3 = y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3$

b) $(j+5)^3 = j^3 + 15j^2 + 75j + 125$

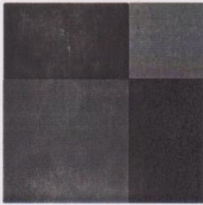
Ilustración 8. Prueba escrita del alumno A2.6


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
 "Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
 Maestría en Matemática Educativa
 Prueba de conocimientos segundo grado


 Unidad Académica de **Matemáticas**

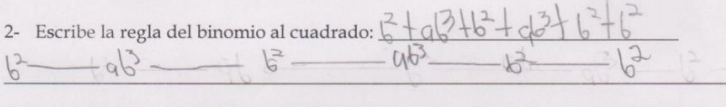
Nombre: _____

1- Utilizando literales, calcula el área de cada figura y del cuadrado.

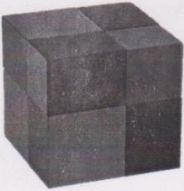
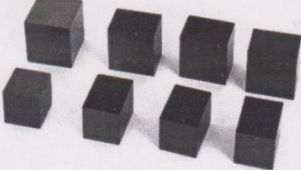


$a^2 + a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + b^2 =$

2- Escribe la regla del binomio al cuadrado: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



3- Utilizando literales, calcula el volumen de cada uno de los cuerpos y del cubo que se forma.

$a^3 + b^3 + a^3 + b^3 + a^3 + b^3$

4- Escribe la regla del binomio al cubo: _____

5- Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

a) $(f + r)^2 =$ _____

b) $(g + 7)^2 =$ _____

6- Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

a) $(y + h)^3 =$ _____

b) $(j + 5)^3 =$ _____

Ilustración 9. Prueba escrita del alumno A2.7

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Unidad Académica de
Matemáticas

Nombre: _____

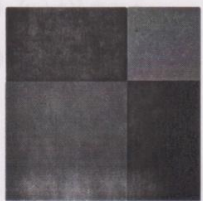
1- Utilizando literales, calcula el área de cada figura y del cuadrado.

Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

a

b

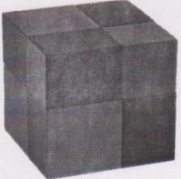
c

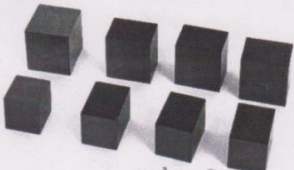


$(2ab^2 - a^2 + b^2)$

2- Escribe la regla del binomio al cuadrado: $(b^2 + a^2 + 2ab)$
es multiplicado por la literal de la otra
fórmula de la investigación

3- Utilizando literales, calcula el volumen de cada uno de los cuerpos y del cubo que se forma. $(b^2 + a^2 + 2ab)$ $(a^2 b + a b^2 + b^2 a)$





$(a^2 + b^2)$

$(a^2 b + a b^2)$

4- Escribe la regla del binomio al cubo: la regla de binomio
Al cubo es presentar binomio cubo entre
en para de los mismos en los cubos

5- Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

a) $(f + r)^2 = f^2 + 2fr + r^2$


b) $(g + 7)^2 = g^2 + 14g + 49$

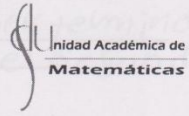
6- Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

a) $(y + h)^3 = y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3$

b) $(j + 5)^3 = j^3 + 15j^2 + 75j + 125$

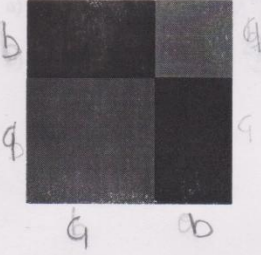
Ilustración 10. Prueba escrita del alumno A2.8


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
 "Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
 Maestría en Matemática Educativa
 Prueba de conocimientos acumulados



Nombre: _____

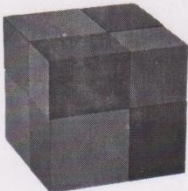
1- Utilizando literales, calcula el área de cada figura y del cuadrado.

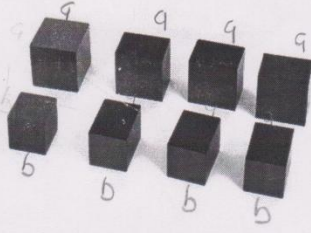


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2- Escribe la regla del binomio al cuadrado: El cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo término, más el segundo término al cuadrado

3- Utilizando literales, calcula el volumen de cada uno de los cuerpos y del cubo que se forma.





4- Escribe la regla del binomio al cubo: El cubo del primer término, más el doble de primer término por el segundo término, más el segundo término al cuadrado

5- Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

a) $(f+r)^2 = f^2 + 2fr + r^2$

b) $(g+7)^2 = g^2 + 2g7 + 7^2$

6- Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

a) $(y+h)^3 = y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3$

b) $(j+5)^3 = j^3 + 3j^2 \cdot 5 + 3j \cdot 5^2 + 5^3$

Ilustración 11. Prueba escrita del alumno A2.9

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria

Tercer grado

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Unidad Académica de
Matemáticas


Prueba de conocimientos tercer grado

Nombre: _____


1- Une con una línea el evento, con su definición y su ejemplo

Evento	Definición	Ejemplo
Evento seguro		Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número 20, la probabilidad será de 0, ya que no hay ninguna estampilla de este color.
Evento imposible	Son dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo.	Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde, tomando en cuenta que sólo se puede sacar uno a la vez. Estos eventos son excluyentes pues no pueden ocurrir a la misma vez.
Evento mutuamente excluyente	Si el resultado del primero afecta al segundo Su probabilidad de ocurrencia es igual a 1.	Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde.
Eventos complementarios	Es un evento que no depende de otro para que suceda Su probabilidad es 0.	Al introducir las fichas de los tres colores, al hacer un sacamiento obtener una ficha roja, devolverla a la bolsa, hacer un segundo sacamiento y obtener una verde, son eventos independientes porque el primero no afecto al segundo.
Evento independiente	Son los dos resultados posibles y la suma de sus probabilidades es 1.	Al introducir las fichas de los tres colores, se hace un sacamiento y se obtiene una ficha roja la cual no se devuelve a la bolsa, posteriormente se hace un segundo sacamiento y ya no se tiene la misma posibilidad de obtener determinado color, porque ya no hay la misma cantidad inicial en la bolsa.
Evento dependiente		Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número potencia de 10, la probabilidad será de 1, ya que todos los números lo son.

Ilustración 12. Prueba escrita del alumno A3.1



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa



Prueba de conocimientos tercer grado


Nombre: _____

1- Une con una línea el evento, con su definición y su ejemplo

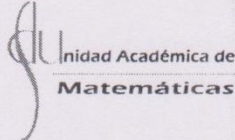
Evento	Definición	Ejemplo
Evento seguro		Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número 20, la probabilidad será de 0, ya que no hay ninguna estampilla de este color.
Evento imposible	Son dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo.	Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde, tomando en cuenta que sólo se puede sacar uno a la vez. Estos eventos son excluyentes pues no pueden ocurrir a la misma vez.
Evento mutuamente excluyente	Si el resultado del primero afecta al segundo Su probabilidad de ocurrencia es igual a 1.	Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde.
Eventos complementarios	Es un evento que no depende de otro para que suceda Su probabilidad es 0.	Al introducir las fichas de los tres colores, al hacer un sacamiento obtener una ficha roja, devolverla a la bolsa, hacer un segundo sacamiento y obtener una verde, son eventos independientes porque el primero no afecto al segundo.
Evento independiente	Son los dos resultados posibles y la suma de sus probabilidades es 1.	Al introducir las fichas de los tres colores, se hace un sacamiento y se obtiene una ficha roja la cual no se devuelve a la bolsa, posteriormente se hace un segundo sacamiento y ya no se tiene la misma posibilidad de obtener determinado color, porque ya no hay la misma cantidad inicial en la bolsa.
Evento dependiente		Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número potencia de 10, la probabilidad será de 1, ya que todos los números lo son.

Ilustración 13. Prueba escrita del alumno A3.2

Implementación de presentaciones Montessori para la enseñanza de tres conceptos matemáticos en educación secundaria



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa




Prueba de conocimientos tercer grado

Nombre: _____

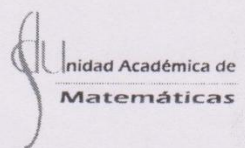
1- Une con una línea el evento, con su definición y su ejemplo

Evento	Definición	Ejemplo
Evento seguro	<p>Son dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo.</p> <p>Si el resultado del primero afecta al segundo</p> <p>Su probabilidad de ocurrencia es igual a 1.</p> <p>Es un evento que no depende de otro para que suceda</p> <p>Su probabilidad es 0.</p> <p>Son los dos resultados posibles y la suma de sus probabilidades es 1.</p>	Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número 20, la probabilidad será de 0, ya que no hay ninguna estampilla de este color.
Evento imposible		Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde, tomando en cuenta que sólo se puede sacar uno a la vez. Estos eventos son excluyentes pues no pueden ocurrir a la misma vez.
Evento mutuamente excluyente		Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde.
Eventos complementarios		Al introducir las fichas de los tres colores, al hacer un sacamiento obtener una ficha roja, devolverla a la bolsa, hacer un segundo sacamiento y obtener una verde, son eventos independientes porque el primero no afecto al segundo.
Evento independiente		Al introducir las fichas de los tres colores, se hace un sacamiento y se obtiene una ficha roja la cual no se devuelve a la bolsa, posteriormente se hace un segundo sacamiento y ya no se tiene la misma posibilidad de obtener determinado color, porque ya no hay la misma cantidad inicial en la bolsa.
Evento dependiente		Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número potencia de 10, la probabilidad será de 1, ya que todos los números lo son.

Ilustración 14. Prueba escrita del alumno A3.3



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa



Prueba de conocimientos tercer grado

Nombre: _____

1- Une con una línea el evento, con su definición y su ejemplo

Evento	Definición	Ejemplo
Evento seguro		Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número 20, la probabilidad será de 0, ya que no hay ninguna estampilla de este color.
Evento imposible	Son dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo.	Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde, tomando en cuenta que sólo se puede sacar uno a la vez. Estos eventos son excluyentes pues no pueden ocurrir a la misma vez.
Evento mutuamente excluyente	Si el resultado del primero afecta al segundo Su probabilidad de ocurrencia es igual a 1.	Al introducir bolos en la bolsa solo de color rojo y verde. La probabilidad de sacar uno que sea rojo o que sea verde.
Eventos complementarios	Es un evento que no depende de otro para que suceda Su probabilidad es 0.	Al introducir las fichas de los tres colores, al hacer un sacamiento obtener una ficha roja, devolverla a la bolsa, hacer un segundo sacamiento y obtener una verde, son eventos independientes porque el primero no afecto al segundo.
Evento independiente	Son los dos resultados posibles y la suma de sus probabilidades es 1.	Al introducir las fichas de los tres colores, se hace un sacamiento y se obtiene una ficha roja la cual no se devuelve a la bolsa, posteriormente se hace un segundo sacamiento y ya no se tiene la misma posibilidad de obtener determinado color, porque ya no hay la misma cantidad inicial en la bolsa.
Evento dependiente		Al introducir las estampillas con los números 1, 10, 100 y 1000, la probabilidad de obtener un número potencia de 10, la probabilidad será de 1, ya que todos los números lo son.

Ilustración 15. Prueba escrita del alumno A3.4