

# Campos de Markov, Criterios Convexos y No Convexos para la Restauración de Imágenes

J. I. De la Rosa, J. J. Villa, G. Miramontes,  
E. Gracia, Ma. A. Araiza, y C. Sifuentes

Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales,  
Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica,  
Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, Zac.-98068  
Tel: +(492)9239407, ext 1518,  
correo-e:vargasj@cantera.reduaz.mx, jvillah@cantera.reduaz.mx

**Resumen** – En el presente trabajo, presentamos algunos métodos alternativos para la restauración de imágenes. Dichos métodos están fundamentados en el uso de un tipo de cadenas de Markov conocidas mejor como Campos Aleatorios de Markov (CAMs). Diversas metodologías proponen el uso de información conocida de forma a priori para modelar de manera más eficaz el proceso de obtención de imágenes. Los métodos basados en CAMs son analizados y propuestos dentro de un marco Bayesiano y buscan sobre todo eliminar efectos de suavizado excesivo en la reconstrucción de imágenes ricas en bordes o contornos con discontinuidades acentuadas. Para responder a la última necesidad, se propone el uso de criterios con cierta convexidad que contribuyen con una ponderación adecuada de las funciones de costo y, de igual manera, para casos en donde los datos tienen bastante correlación y en donde las discontinuidades son mínimas.

**Abstract** – The present work illustrates some recent alternative methods to deal with digital image reconstruction. This collection of methods are inspired on the use of a class of Markov chains best known as Markov Random Fields (MRF). All of these new methodologies are also based on the prior knowledge of some information which will permit more efficiently modeling the image acquisition process. The methods based on the MRF's are proposed and analyzed in a Bayesian framework and their principal objective is to eliminate those effects caused by the excessive smoothness on the reconstruction process of images which are rich in contours or edges. In order to respond to the edge preservation, the use of certain convexity criteria are proposed which will lead to obtain adequate weighting of cost functions in cases where discontinuities are remarked and, even better, for cases where such discontinuities are very smooth.

**Palabras Clave** – *Cadenas de Markov, campos de Markov, convexidad y no convexidad, estimadores MAP.*

## I. INTRODUCCIÓN

EL realce en una imagen es la última meta de las técnicas de restauración de imágenes cuyo propósito es mejorar de alguna forma una imagen dada. Podemos considerar que la restauración es un proceso que intenta reconstruir o recuperar una imagen que ha sido distorsionada o degradada utilizando algún conocimiento a priori del fenómeno de distorsión o degradación. De este modo, las técnicas de restauración se orientan hacia el modelado de la distorsión y a aplicar un proceso inverso en cierto orden para la recuperación de la imagen original. Usualmente esto involucra la formulación de un criterio basado en una función de costo, el cual producirá una estimación óptima del resultado deseado. Como ya se mencionó, la meta de la restauración de imágenes es reconstruir la escena original a partir de una observación distorsionada o degradada. El proceso de recuperación es crítico para muchas aplicaciones dentro del procesamiento de imágenes.

Entre las nuevas o relativamente nuevas aproximaciones se encuentra el uso de los métodos de modos condicionados e iterativos [2], [3], [7]. La idea principal de dichos métodos es la construcción de un máximo a posteriori (MAP) o estimador de imágenes verdaderas por medio de campos aleatorios de Markov (CAM). Sin embargo, este método a sido aplicado en su mayoría a imágenes estructuralmente sencillas y con bajos niveles de intensidad. En el avance de las aplicaciones de estos métodos se consideran nuevos modelos de información contextual por medio de los CAM y se proponen para la restauración de imágenes reales. También se idea un esquema adaptable de rechazo o para datos aberrantes (outliers) para hacer frente a la situaciones en las cuales el ruido está presente en sus diferentes formas [11].

Aunque la restauración lineal clásica de imágenes ha sido estudiada por completo [3], los problemas más difíciles en la restauración de imágenes mediante la *deconvolución ciega* tienen numerosas posibilidades de investigación. Un breve repaso de los métodos de deconvolución ciega para imágenes esta dado en los trabajos [1], [11] y [12], los autores proponen algunos métodos y discuten otros más propuestos por investigadores del área. Los retos específicos encontrados en relación con la aplicación de restauración de imágenes se explican brevemente. Las descripciones analíticas de la estructura de una mejor aproximación en la deconvolución ciega de imágenes es como sigue: las áreas de aplicación, las propiedades de convergencia, la complejidad y la implementación considerando otros parámetros son abordados para cada aproximación.

Otra aproximación más dentro de la deconvolución ciega, es el método de deconvolución por recorrimiento variante para imágenes degradadas. Como ya se explicó anteriormente, una función de distorsión, degrada la calidad de una imagen obtenida mediante cualquier sistema ópto - electrónico. Un caso muy frecuente en el cual se distorsionan las imágenes es cuando se obtiene la imagen de un documento. Durante el proceso de adquisición se tienen errores, esto provoca deficiencias para el reconocimiento de los caracteres impresos en la imagen.

Como ya se sabe la restauración de una imagen es el proceso de recuperación de una imagen

degradada a su condición original revirtiendo los efectos conocidos o estimados de la función de distorsión. Por lo tanto, la característica de degradación es una información crucial y debe ser supuesta o estimada durante el desarrollo. Esta puede ser una función de punto extendido (point spread function - PSF) de la distorsión o bien es la distribución de probabilidad de la contaminación por ruido, en el caso de los filtros MAP sólo se considera el ruido gaussiano aditivo. Existe otra fuente de información la cual impone una regla clave en el procesamiento de imágenes. Esta es una información contextual o espacial, que representa la similitud o correlación entre los valores de intensidad en un vecindario de píxeles bien definido. El modelado mediante los CAM de esta interacción espacial se introduce en [2] y se demuestra que es una herramienta potente en el procesamiento de imágenes [3], [4], [5], [7], [16]. Combinando estas dos formas de información de manera estadística, la restauración de una imagen se favorece según una estimación a partir del máximo a posteriori de imágenes verdaderas cuando son conocidas sus funciones de distorsión.

La idea es construir un MAP que estime las imágenes verdaderas utilizando la condición de CAM modelando la información local que pertenece a la misma imagen. Una forma más extendida de este método para restauración de imágenes reales se hace para situaciones en las cuales se considera el ruido aditivo. Los algoritmos propuestos se desarrollan para una señal ligeramente degradada, con filtros recursivos no lineales los cuales muestran excelentes capacidades en la preservación de los detalles de la imagen y suavizan los efectos de ruido.

En la sección II se describe de forma general la definición de CAM y el posicionamiento de los estimadores MAP, en lo concerniente a las diversas funciones de potencial que se pueden obtener para llevar a cabo la inversión, éstas se describen en la sección III en donde se introducen la convexidad y no convexidad, y en la sección IV en donde se discute la estabilidad del estimador MAP. La sección V ilustra un ejemplo de cómo se define el estimador MAP según algún criterio seleccionado, y finalmente la sección VI brinda algunas conclusiones y comentarios finales.

## II. CAMPOS ALEATORIOS DE MARKOV Y MAP

El problema de estimación de imágenes en un marco Bayesiano se remonta a la solución de un problema inverso, en donde la solución se lleva a cabo en un ambiente totalmente estocástico. A lo largo del texto,  $X$ : representa a un campo de dos dimensiones (o imagen a ser estimada),  $Y$ : representa la imagen observada (en forma matricial) con ruido o distorsionada, y  $\hat{X}$ : es el estimador de  $X$  en función de los datos  $Y$ . En nuestros días ha crecido la popularidad de los estimadores y los que se utilizan más son:

*Estimador de Máximo de Verosimilitud (MV)*: Produce un ruido excesivo. Se tiene un problema mal planteado si existe una cantidad pequeña de datos. Sin duda, es necesario explotar toda la información de que se dispone de forma apriori.

*Estimador de Máximo A posteriori (MAP)*:

$$\hat{x}_{\text{MAP}} = \arg \min_{x \in \mathbf{X}} p(x|y) = \arg \max_{x \in \mathbf{X}} (\log p(y|x) + \log g(x)), \quad (1)$$

en este caso, se puede llevar a cabo una regularización mediante el uso de un campo aleatorio de Markov  $g(x)$  para modelar la información apriori mediante una distribución,

$\mathbf{X}$  es el conjunto de los píxeles  $x$  capaces de minimizar  $p(x|y)$ , y  $p(y|x)$  es la función de verosimilitud de  $y$  dado  $x$ .

El CAM se puede representar de manera genérica mediante la siguiente ecuación:

$$g(x) = \frac{1}{Z} \exp \left( - \sum_{c \in \mathbf{C}} V_c(x) \right) \quad (2)$$

en donde  $Z$  es una constante de normalización,  $\mathbf{C}$  es el conjunto de “cliques”  $c$  o vecindario local de elementos, y  $V_c(x)$  es una función dada en términos del vecindario local. En general los “cliques” corresponden al conjunto de vecindarios de píxeles. Un teorema introducido por Hammersley-Clifford [7], [2] demuestra la equivalencia entre las distribuciones de Gibbs y los campos aleatorios de Markov. En general, los CAM pueden representar varias fuentes de imágenes. La desventaja de su uso es que generalmente el procedimiento de estimación se lleva a cabo bajo un esquema de minimización local (tiempo de cálculo considerable).

Existe una gran variedad de modelos de tipo CAM que dependen de funciones de costo también conocidas como funciones de potencial que pueden ser utilizadas. Cada función de potencial caracteriza las interacciones entre los píxeles de un mismo grupo local. Un ejemplo muy común de dichas funciones, son las del tipo:

$$\sum_{\{i,j\} \in \mathbf{C}} \rho(\lambda[x_i - x_j]), \quad (3)$$

en donde  $\lambda$  es una constante, y los píxeles  $x$  pertenecen a un grupo local, además, se puede redefinir

$$\Delta = \lambda[x_i - x_j]. \quad (4)$$

#### A. Campo Aleatorio de Markov Gaussiano (CAMG)

Un CAMG se puede expresar de forma general como se indica a continuación:

$$g(x) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{(2\pi)^{N/2}} |B|^{1/2} \exp(-\lambda^2 x^t B x) \quad (5)$$

en donde  $B$  es una matriz simétrica y positiva definida (matriz de covarianza), y obteniendo el logaritmo de la ecuación anterior tenemos

$$\log g(x) = -\lambda^2 \left( \sum_{s \in \mathbf{S}} a_s x_s^2 + \sum_{\{s,r\} \in \mathbf{C}} b_{sr} |x_s - x_r|^2 \right) + \text{cte}, \quad (6)$$

en donde  $\mathbf{S}$  es el conjunto de sitios  $s$  centrales o píxeles sobre los cuales se centra el CAM durante el procesamiento, y el subíndice  $r$  indica que se trata de los vecinos de  $s$ , además

$$a_s = \sum_{r \in \mathbf{S}} B_{sr}, \quad b_{sr} = -B_{sr} \quad (7)$$

El estimador MAP proviene de la minimización de la función de costo siguiente:

$$\hat{x}_{\text{MAP}} = \arg \min_{x \in \mathbf{X}} \left\{ -\log p(y|x) + \lambda^2 \left( \sum_{s \in \mathbf{S}} a_s x_s^2 + \sum_{\{s,r\} \in \mathbf{C}} b_{sr} |x_s - x_r|^2 \right) \right\}. \quad (8)$$

El resultado de este estimador es una imagen con ruido excesivo o bien una imagen generalmente fuera de foco; lo anterior se debe a que existe una penalización bastante grande. Para controlar un poco el carácter de la penalización es necesario considerar dos aspectos acerca de la convexidad de las funciones de potencial: a) función convexa y b) función no convexa.

### III. CONVEXIDAD Y NO CONVEXIDAD

#### A. No convexidad

Sea la función:

$$\log g(x) = - \sum_{\{s,r\} \in \mathbf{C}} b_{sr} \rho(\lambda |x_s - x_r|) + \text{cte}, \quad (9)$$

en donde la función  $\rho$  es creciente, pero no convexa. Este tipo de distribuciones permite modelar los bordes y las regiones suaves de una imagen. Una función de potencial de este tipo se utilizó en trabajos de Blake y Zisserman [4]:

$$\rho(\Delta) = \min\{|\Delta|, T\}^2 \quad (10)$$

en donde  $T$  es un umbral predeterminado. Entonces, la función anterior es cuadrática para valores próximos a cero y es plana pasando el umbral  $T$  lo cual permite la consideración en el modelado de bordes acentuados. Las distribuciones no convexas presentan algunas desventajas prácticas y teóricas:

- Problema de minimización global.
- La estimación MAP se aproxima utilizando varias técnicas por lo que la solución depende del método utilizado para la minimización.
- Existe un problema en cuanto a la calidad de la imagen restaurada, puesto que los bordes superiores a  $T/\lambda$  son más acentuados que aquellos que son inferiores a  $T/\lambda$  que son suaves.
- La reconstrucción o proceso de estimación no es estable debido a que no existe continuidad de la función  $\hat{x}(y)$ .

#### B. Convexidad

La consideración de funciones de potencial convexas es una puerta a la solución, pues aunque son menos penalizantes que las funciones cuadráticas, éstas nos brindan un panorama más favorable para llevar a cabo la restauración. Un ejemplo de este tipo de funciones, es la función de Huber:

$$\rho(\Delta) = \begin{cases} \Delta^2 & \text{Si } |\Delta| \leq T, \\ T^2 + 2T|\Delta - T| & \text{Si } |\Delta| > T \end{cases} \quad (11)$$

La región lineal ( $|\Delta| > T$ ) permite la consideración de bordes acentuados. La convexidad permite en la práctica una minimización más global y eficaz, aunque tiene las siguientes desventajas:

- La selección de  $T$  necesita el conocimiento de las amplitudes de los bordes de la imagen original.
- Un sólo umbral  $T$  no puede describir en general los bordes de una imagen real.
- Se busca determinar un estimador MAP que sea estable e independiente de un parámetro de escalamiento  $T$ .

En trabajos recientes [5]-[10] se introducen nuevas funciones de potencial, las funciones propuestas son funciones cuasi-cuadráticas (o mitad-cuadráticas) las cuales hacen una caracterización de una cierta convexidad en la penalización (extensión de penalización) que permite la contrucción de estimadores eficientes en el sentido de la preservación de información original ligada a una imagen fuente y también al tiempo necesario de procesamiento. Por otro lado, en los trabajos de Alison Gibbs [9] se propone obtener la distribución a posteriori de las imágenes, en este caso es necesario hacer uso de métodos de simulación estocástica potentes tales como las técnicas de Monte Carlo mediante cadenas de Markov (MCMC) [13], [14], [15]. Si es posible obtener la distribución a posteriori de cualquier imagen, entonces se puede muestrear dicha distribución y obtener el estimador MAP, o bien el estimador de la mediana el cual es sensible de coincidir con el MAP, pues ambos buscan el modo principal de la distribución a posteriori.

#### IV. ESTABILIDAD DEL ESTIMADOR MAP CUANDO SE USAN CAM CONVEXOS

Hadamard define originalmente que un problema está bien condicionado o definido, con el hecho de que su solución satisfaga las siguientes condiciones:

- 1) Existencia de la solución,
- 2) Solución única,
- 3) Dependencia continua con respecto a los datos a modelar.

La tercera condición también se conoce como condición de estabilidad la cual expresa la continuidad del estimador en función de los datos bajo análisis.

*Teorema 1 ([4])* Sea  $f(\cdot, \cdot)$  una función continua y tal que para todo  $y$ ,  $f(\cdot, y)$  es estrictamente convexa y con un mínimo local, entonces

$$\arg \min_{x \in \mathbf{X}} f(x, y) \quad (12)$$

es una función única y continua en  $y$ .

En consecuencia, si  $f(x, y) = -\log p(x, y)$  es estrictamente convexa con respecto a  $x$  y continua con respecto a  $(x, y)$ , el estimador MAP estará bien condicionado y la estabilidad de éste será asegurada. De forma práctica sólo es necesario seleccionar una  $\rho$  estrictamente convexa (o solamente convexa). El objetivo es obtener un modelo a priori (y por lo tanto una estimación MAP) que no dependerá de un solo parámetro de umbral  $T$ .

La homogeneidad dentro del procedimiento de estimación en el caso de un criterio convexo se da para:

$$\arg \max_{x \in \mathbf{X}} \log p(\alpha y, \alpha x) = \arg \max_{x \in \mathbf{X}} \log p(y, x), \quad (13)$$

es suficiente con que se respeten las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\log p(\alpha y|\alpha x) &= \beta(\alpha) \log p(y|x) + \Upsilon_1(\alpha), \\ \log g(\alpha x) &= \beta(\alpha) \log g(x) + \Upsilon_2(\alpha).\end{aligned}\tag{14}$$

La forma de la función  $\log p(y|x)$  generalmente es determinada según la física del problema bajo análisis. Un ejemplo de función homogénea es el que se presenta a continuación:

$$p(z) = \frac{q}{2\Gamma(1/q)} \exp(-|z|^q)\tag{15}$$

Si consideramos la siguiente ecuación de observación,

$$Y = AX + D^{-1}Z\tag{16}$$

en donde  $A$  es la matriz de regresión y  $D$  una matriz definida para  $Z$ , para esta ecuación se tiene una distribución

$$\log p(y|x) = -\|D(Y - AX)\|_q^q + \text{cte}, \quad 1 \leq q \leq 2\tag{17}$$

y si además  $g(x)$  es homogénea para un mismo coeficiente ( $\beta(\alpha) = \alpha^q$ ), entonces el estimador MAP es homogéneo. La función  $g$  es homogénea para el caso en el que  $-\log g(x)$  es estrictamente convexa. La homogeneidad es una condición importante, pues si se cumple con esta se asegura la estabilidad y convergencia del estimador.

*Teorema 2 ([4])* Una función de densidad  $g$  es homogénea y tal que  $-\log g(x)$  es convexa si y solamente si

$$-\log g(x) = \|X\|^p + \text{cte}, \quad 1 \leq p.\tag{18}$$

La utilización de una función de distribución a priori basada en el logaritmo, convexa y homogénea permite que se tenga un gran abanico de selecciones posibles. Por ejemplo, se puede proponer una simple generalización de los CAMG denominados campos aleatorios de Markov gaussianos generalizados CAMGG, esto es para

$$\rho(\Delta) = |\Delta|^p, \quad 1 < p < 2\tag{19}$$

tendremos

$$\log g(x) = -\lambda^p \left\{ \sum_{s \in \mathbf{S}} a_s x_s^p + \sum_{\{s,r\} \in \mathbf{C}} b_{s,r} |x_s - x_r|^p \right\} + \text{cte},\tag{20}$$

en donde  $a_s > 0$  y  $b_{s,r} > 0$ . De manera práctica se recomienda seleccionar  $a_s = 0$  ( $\log p(y|x)$  así, se puede asegurar la unicidad de  $\hat{x}_{\text{MAP}}$ ), obteniendo

$$\log g(x) = -\lambda^p \left\{ \sum_{\{s,r\} \in \mathbf{C}} b_{s,r} |x_s - x_r|^p \right\} + \text{cte},\tag{21}$$

en donde  $\log p(y|x)$  es estrictamente convexa y por lo tanto  $\hat{x}_{\text{MAP}}$  es continua en  $y$ , y continua en  $p$ . Señalamos que la importancia en la selección de  $p$ , es tal que  $p$  puede asegurar una cierta velocidad de convergencia, y calidad en la imagen restaurada.

## V. EJEMPLO

En esta sección consideramos el simple problema de restauración de una señal observada  $Y$  la cual tiene componentes de ruido aditivo, la ecuación de observación podría ser

$$Y = X + \sigma Z, \quad Z \text{ es ruido gaussiano generalizado.} \quad (22)$$

El estimador MAP para este problema en particular está dado por,

$$\hat{x}_{\text{MAP}} = \arg \min_{x \in \mathbf{X}} \left\{ \sum_{s \in \mathbf{S}} |y_s - x_s|^q + \sigma^q \lambda^p \sum_{s,r \in \mathbf{C}} b_{s-r} |x_s - x_r|^p \right\}. \quad (23)$$

Así, el problema de minimización nos lleva a considerar varios métodos:

- Técnicas iterativas globales tales como: el gradiente decendente, gradiente conjugado ...
- Técnicas de minimización local: minimización para cada pixel  $x_s$ .

Si retenemos una técnica de minimización local, entonces podemos expresar el estimador como

$$\hat{x}_s = \arg \min_{x \in \mathbf{X}} \left\{ |y_s - x_s|^q + \sigma^q \lambda^p \sum_{r \in \partial \mathbf{s}} b_{r-s} |x_s - x_r|^p \right\}, \quad (24)$$

Si consideramos el caso en el cual los parámetros  $p = q = 2$ , caemos en un caso puramente gaussiano en donde el estimador es similar al estimador de mínimos cuadrados (criterio cuadrático), con un término adicional de penalización lo cual degrada bastante la imagen estimada

$$\hat{x}_s = \frac{y_s + (\sigma \lambda)^2 \sum_{r \in \partial \mathbf{s}} b_{r-s} x_r}{1 + (\sigma \lambda)^2 \sum_{r \in \partial \mathbf{s}} b_{r-s}} \quad (25)$$

Por otro lado, en el caso en que  $p = q = 1$ , tenemos un criterio de valor absoluto, que converge al estimador de la mediana y que en la práctica es difícil de realizar:

$$\hat{x}_s = \text{median}(y_s, x_{r_1}, \dots, x_{r_I}). \quad (26)$$

En este caso no existe diferenciabilidad y esto no permite la estabilidad en ciertas etapas del cálculo de la minimización. Las operaciones locales no conducen a una estimación global. Entonces, la eficiencia numérica = problema difícil de resolver. Para casos intermedios de valores para  $p$  y  $q$ , se puede considerar el uso de métodos iterativos del tipo de sub-gradiente, de segmentación, multi-rejilla, utilizando ondículas, etc. Entonces, tendremos casos típicos tales como

- 1) Si tenemos valores para  $1 < p < 2$ : el estimador  $\hat{x}_{min.loc} \rightarrow \hat{x}_{min.glob}$ , lo cual quiere decir que algún mínimo local podría coincidir con el mínimo global.
- 2) Si además  $p \neq q$ , tenemos un caso de no homogeneidad, pero sin embargo:  $\hat{x}(\alpha y, \lambda) = \alpha \hat{x}(y, \alpha^{1-q/p} \lambda)$ , es decir se sigue asegurando la existencia y la convergencia del estimador pues se tiene continuidad con respecto a  $p$ .



Introduciendo entonces un ejemplo sencillo para la estimación de una imagen en donde se considera un criterio cuadrático, esto es  $p = q = 2$  (Caso gaussiano), en este ejemplo, primero generamos una imagen sintética, a la cual le aplicamos ruido gaussiano, con las siguientes características:

$$Y = X + \sigma Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, I\sigma^2), \quad \sigma = 2, \quad (27)$$

en donde  $I$  es la matriz identidad. En las Figuras 1 y 2 se muestran algunos resultados visuales para los casos en que  $p = q = 2$  y  $p = 1.2$  y  $q = 2$ , en ambos casos de estimación se utilizó un valor de  $\lambda = 5$ , es fácil comprobar que el primer estimador degrada los bordes de la imagen, aún y cuando la relación señal a ruido no es tan severa, por su lado el segundo estimador en donde  $p = 1.2$  degrada menos los bordes y permite una mejor estimación (mejor calidad visual) como se muestra de forma tridimensional en la Figura 2. Ahora es pertinente comparar algunos resultados obtenidos utilizando los mismos estimadores MAP basados en diferentes valores de  $p$  y conservando el valor de  $q = 2$ , en donde también los valores de  $\lambda$  serán diferentes, en esta comparación se utiliza la imagen estandar de “Lena”, a la cual se le agregan diferentes niveles de ruido:  $Z \sim \mathcal{N}(0, I\sigma^2)$ , con  $\sigma = 4$  que no degrada tanto la imagen original (ver Figura 3) y  $\sigma = 8$  que degrada de manera más significativa a la imagen original (ver Figura 4). En la Figura 3 se brindan resultados visuales cuando se utilizan dos estimadores diferentes, el primer estimador penaliza menos a la imagen y el resultado es una imagen algo difusa, sin embargo el segundo estimador brinda una imagen un poco más nítida. En las Figuras 4 y 5 se aprecia la mejora en términos de  $p$  si el valor de este parámetro se acerca a uno, la estimación es mejor, pero se corre el riesgo de mayores tiempos de cálculo.

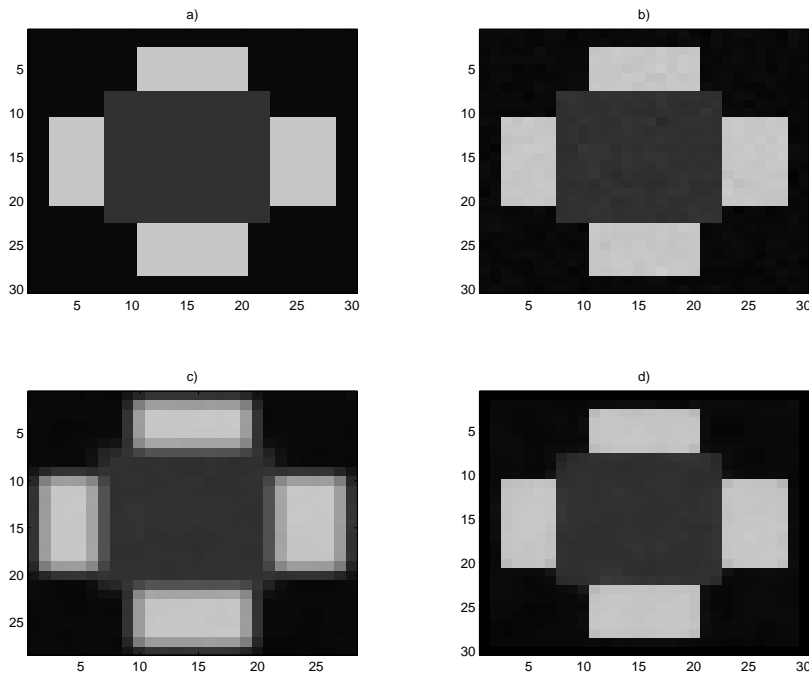


Figura 1. a) Imagen original sintética, b) Imagen con ruido, c) Imagen estimada para  $p = q = 2$ , d) Imagen estimada para  $p = 1.2$  y  $q = 2$ ,  $\lambda = 5$ .

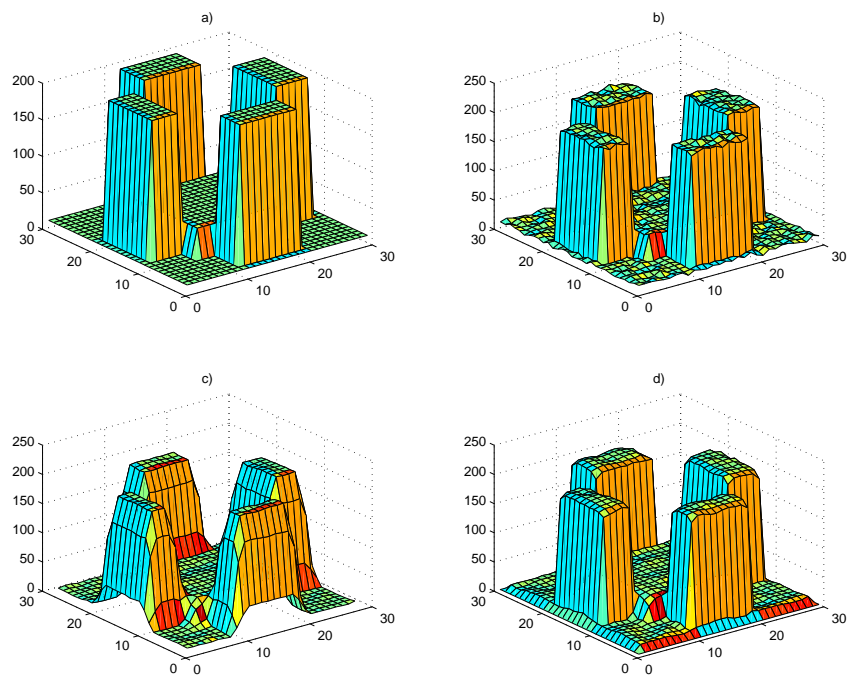


Figura 2. a) Imagen original sintética en 3-D, b) Imagen con ruido, c) Imagen estimada para  $p = q = 2$ , d) Imagen estimada para  $p = 1.2$  y  $q = 2$ ,  $\lambda = 5$ .

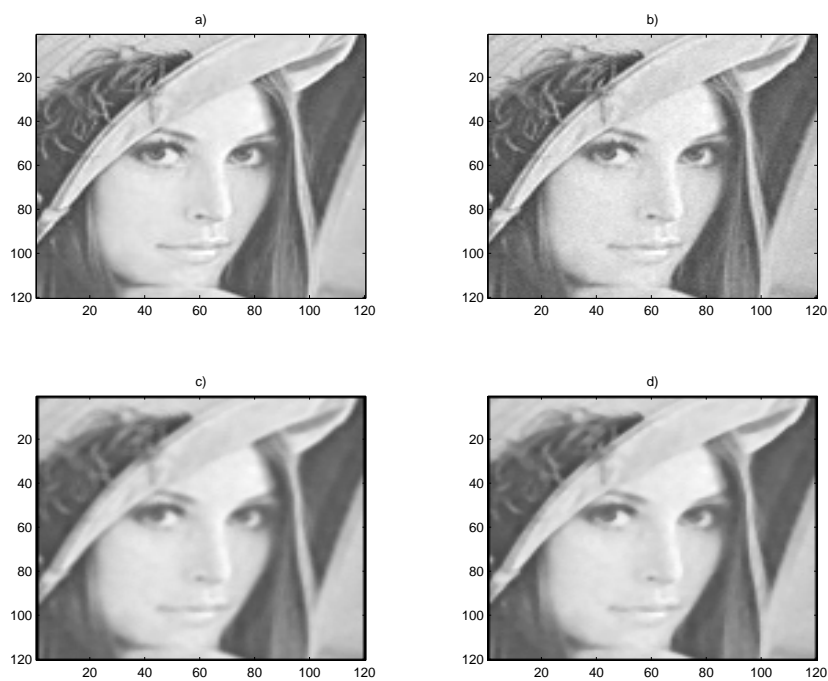


Figura 3. a) Imagen original de Lena ( $128 \times 128$ ), b) Imagen con ruido, c) Imagen estimada para  $p = 1.5$  y  $q = 2$ , d) Imagen estimada para  $p = 1.2$  y  $q = 2$ ,  $\lambda = 10$ .

## VI. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Ventajas del uso de la aproximación mediante CAMGG: existe continuidad del estimador en función de los datos para valores de  $1 < p \leq 2$ . El estimador es homogéneo (sólo en el

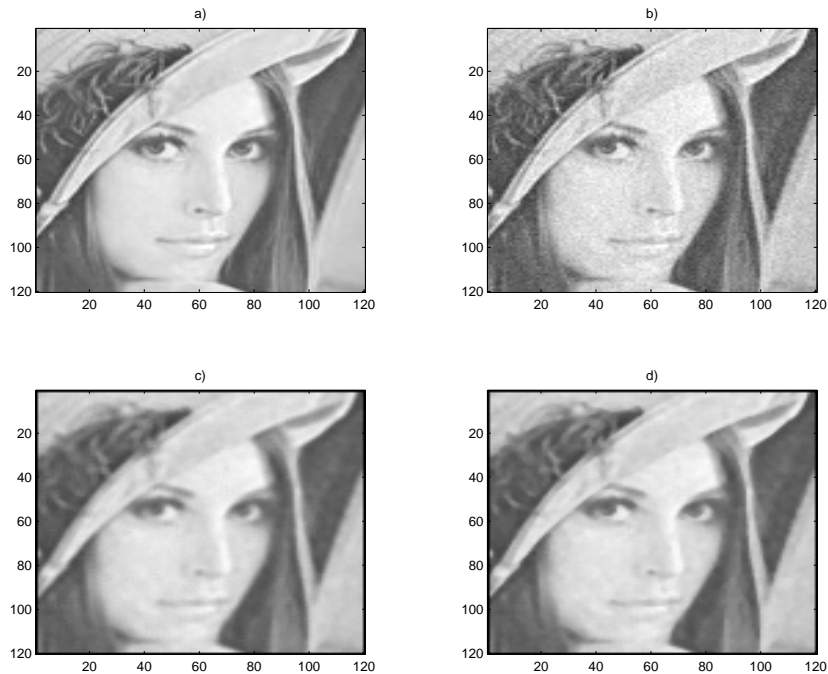


Figura 4. a) Imagen original de Lena, b) Imagen con ruido, c) Imagen estimada para  $p = 1.5$  y  $q = 2$ , d) Imagen estimada para  $p = 1.2$  y  $q = 2$ ,  $\lambda = 5$ .

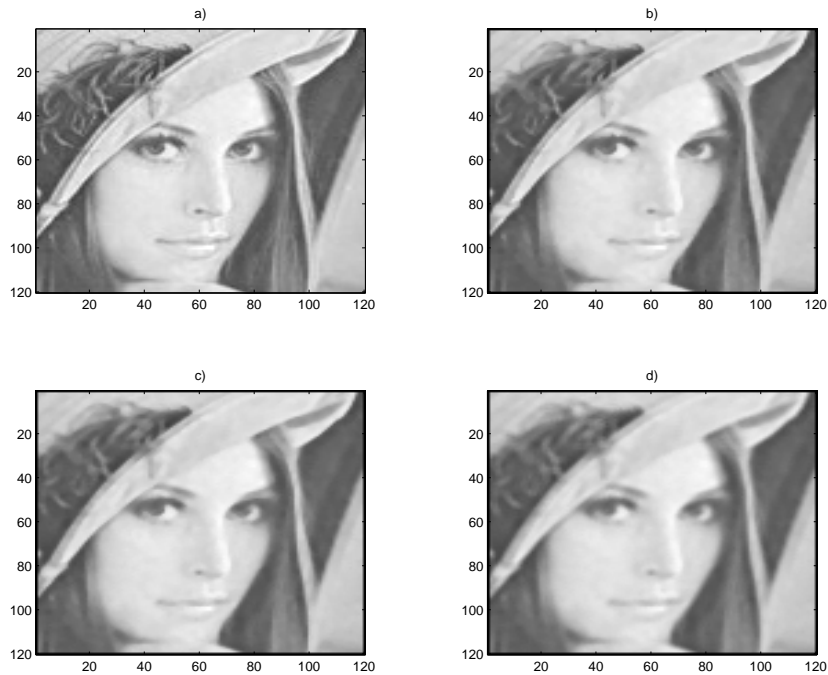


Figura 5. a) Imagen original de Lena, b) Imagen estimada para  $p = 1.1$  y  $q = 2$ , c) Imagen estimada para  $p = 1.2$  y  $q = 2$ , d) Imagen estimada para  $p = 1.5$  y  $q = 2$ ,  $\lambda = 5$ .

caso en que  $p = q$ ). Existe preservación de los bordes de acuerdo al grado de variabilidad de  $1 < p < 2$ . El estimador es robusto con respecto al nivel o relación señal a ruido. Por otro lado, las desventajas de los CAMGG se resumen en lo siguiente: existe una convergencia lenta para los casos de mayor penalización, esto es cuando  $p$  es pequeño. No hay convergencia hacia un estimador global cuando  $p = 1$ . No son pertinentes para el caso de imágenes en donde hay variaciones muy suaves. Como trabajo futuro se propone abordar las nuevas funciones de potencial, las cuales siguen estando basadas en un criterio de convexidad, pero que sugieren una mejor representación multitextura y menores tiempos de cálculo.

## RECONOCIMIENTOS

Agradecemos al Programa de Mejoramiento al Profesorado (PROMEP) de la Secretaria de Educación Pública (SEP) de México por su apoyo, este trabajo fué parcialmente apoyado por PROMEP-SEP bajo registro UAZAC PTC 24-103.5/03/1127.

## REFERENCIAS

- [1] Andrews, H. C., y Hunt, B. R., *Digital image restoration*, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., (1977).
- [2] Besag, J. E., "Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems", *J. Royal Stat. Soc. Ser. B*, Vol. B-36, pp. 192–236, (1974).
- [3] Besag, J. E., "On the statistical analysis of dirty pictures", *J. Royal Stat. Soc. Ser. B*, Vol. B-48, pp. 259–302, (1986).
- [4] Bouman, C., y Sauer, K., "A Generalized Gaussian Image Model for Edge-Preserving MAP Estimation", *IEEE Trans. on Nuclear Science*, Vol. 99, No. 4, pp. 1144–1152, (1992).
- [5] Champagnat, K., e Idier, J., "A Connection Between Half-Quadratic Criteria and EM Algorithms", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, No. 9, pp. 709–712, Sept. (2004).
- [6] Ciuciu, P., Idier, J., y Giovannelli, J.-F., "Regularized Estimation of Mixed Spectra Using Circular Gibbs-Markov Model", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 49, No. 10, pp. 2202–2213, Oct. (2001).
- [7] Geman, S., y Geman, C., "Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol. PAMI-6, pp. 721–741, Nov. (1984).
- [8] Giovannelli, J.-F., Idier, J., Boubertakh, R., y Herment, A., "Unsupervised Frequency Tracking Beyond the Nyquist Frequency Using Markov Chains", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 50, No. 12, pp. 2905–2914, Dec. (2002).
- [9] Gibbs, A. L., *Convergence of Markov Chain Monte Carlo algorithms with applications to image restoration*, Ph.D. Thesis, Department of Statistics, University of Toronto, (2000).  
URL : [www.utstat.toronto.edu](http://www.utstat.toronto.edu)
- [10] Idier, J., "Convex Half-Quadratic Criteria and Interacting Auxiliary Variables for Image Restoration", *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 10, No. 7, pp. 1001–1009, July (2001).
- [11] Katsaggelos, I. A. K., *Digital image restoration*, New York, Springer-Verlag, (1991).
- [12] Kundur, D., y Hatzinakos, D., "Blind image deconvolution", *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 43–64, May. (1996).
- [13] Neal, R. M., "Probabilistic inference using Markov Chain Monte Carlo methods," Tech. Rep., CRG-TR-93-1, Department of Computer Science, University of Toronto, URL : [www.cs.toronto.edu/~radford](http://www.cs.toronto.edu/~radford), (1993).
- [14] Robert, C. P., y Casella, G., *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer Verlag, 2nd Edition 2004.
- [15] Robert, C. P., *Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov*, Statistique Mathématique et Probabilité, Economica, France 1996.
- [16] Sauer, K., y Bouman, C., "Bayesian Estimation of Transmission Tomograms Using Segmentation Based Optimization", *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 2, No. 3, pp. 296–310, July (1993).