



Universidad Autónoma de Zacatecas
“Francisco García Salinas”



Doctorado en Ciencias Básicas
Unidad Académica de Matemáticas



NÚMEROS DE DOMINACIÓN Y EMPAQUETAMIENTO DE CIERTAS GRÁFICAS DE FICHAS

Tesis

Que para obtener el título de
Doctor en Ciencias Básicas

Presenta

M. en M. Luis Manuel Ríos Castro

Asesores:

Dr. Jesús Leños Macías

Dr. Luis Manuel Rivera Martínez

Zacatecas, Zac., Agosto 2018

NÚMEROS DE DOMINACIÓN Y EMPAQUETAMIENTO DE CIERTAS GRÁFICAS DE FICHAS

Luis Manuel Ríos Castro
Asesor: Dr. Jesús Leños Macías
Co-asesor: Dr. Luis Manuel Rivera Martínez

*Dedicado a mis padres,
María Ustolia Castro Murillo,
Francisco Ríos Hernández.
Y a mi hermana Ariana.*

Luis Manuel Ríos Castro

Agradecimientos

A Dios y al universo por haber conspirado para mantenerme firme y no decaer a pesar las adversidades presentadas durante el esfuerzo y dedicación que comprendió mi posgrado.

A mis asesores, Dr. Jesús Leños y Dr. Luis Manuel Rivera, por su gran paciencia, ayuda y colaboración en cada momento de consulta y soporte en este trabajo. Al Dr. José Manuel Gómez por su colaboración, ayuda e invaluable consejos.

A mis padres, Maria Ustolia Castro Murillo, Francisco Ríos Hernández y a mi hermana Ariana, gracias por su gran apoyo incondicional.

A mis grandes amigos: excompañeros de biblioteca, Nidya, Tali, Juan y a mis camaradas de parrandas, Enrique, Ludwin, Mario y Paul por su amistad y por convivir conmigo en estos años de estudio. A todas las personas que indirecta o directamente me apoyaron en este periodo de mi vida.

Al CONACyT por la beca otorgada en estos años de estudio.

Resumen

Dada una gráfica G de orden $n \geq 3$, se define a $F_2(G)$ como la gráfica cuyo conjunto de vértices consiste de todos los 2-subconjuntos de $V(G)$, y dos vértices X, Y de $F_2(G)$ serán adyacentes si y solo si la diferencia simétrica de X y Y consta de dos vértices que son adyacentes en G . Hasta donde sabemos, la gráfica $F_2(G)$ fue introducida por Johns en 1988 [43]. Posteriormente, en 1991 Alavi et al. [2], la definieron con el nombre de *gráfica de doble vértice*.

En 2002, T. Rudolph [62] redefinió la misma gráfica bajo el nombre de el *cuadrado simétrico* de G . Similarmente, si en lugar de los 2-subconjuntos de $V(G)$, se consideran los k -subconjuntos de $V(G)$, donde $k \in \{2, \dots, n-1\}$, entonces obtenemos la gráfica $F_k(G)$ que se llama la *k -potencia simétrica de G* [9]. En [27] Fabila-Monroy et. al., a $F_k(G)$ la llamaron *gráfica de k -fichas de G* . Como se puede verificar en [3, 4, 6, 8, 9, 17, 18, 27, 39, 48, 52, 37, 53, 62, 66, 67] y las referencias contenidas en esos artículos, el interés en las gráficas $F_k(G)$ ha generado una gran cantidad de investigaciones en muchas ramas de las matemáticas discretas. Una de las líneas de investigación con mayor actividad consiste en estimar o determinar el valor exacto de diversos parámetros combinatorios de $F_k(G)$.

En este trabajo se presentan algunos resultados originales sobre la estimación de dos de estos parámetros: el número de dominación y el número de empaquetamiento de $F_2(P_n)$ y $F_3(P_n)$, en donde P_n denota a la gráfica camino de orden n . El resultado principal de esta tesis consiste en la determinación del valor exacto del número de empaquetamiento de $F_2(P_n)$. Este resultado tiene como consecuencia la confirmación de una conjetura de Rob Pratt sobre el tamaño máximo que puede tener un código binario de longitud n y peso constante 2 que es 1-corrector para una transposición adyacente, y ha sido publicado en [30]. En particular, esta conjetura proponía la función generatriz ordinaria correspondiente a la secuencia A085680 en la OEIS (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) [59].

Índice general

Resumen	III
1. Preliminares	1
1.1. Notación y terminología	1
1.2. Números de dominación y empaquetamiento	4
1.2.1. Dominación en gráficas	4
1.3. Gráficas de fichas	9
1.4. Códigos correctores y empaquetamiento	14
1.5. Organización de esta tesis	17
2. Cota superior para $\gamma(F_2(P_n))$	19
2.1. Demostración del teorema 2.1	23
3. Cota inferior para $\rho(F_3(P_n))$	26
3.1. Notación y resultados auxiliares	26
3.2. Demostración del teorema 3.1	32
4. Valor exacto de $\rho(F_2(P_n))$	36
4.1. Resultados auxiliares	37
4.2. Cota inferior para $\rho(T(n))$	39
4.3. Cota superior para $\rho(T(n))$	44
4.3.1. Demostración del lema 4.5	53
5. Conclusiones y comentarios finales	60
Bibliografía	63

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos de los conceptos básicos que se usan en este trabajo, y al final damos una breve descripción sobre el contenido del resto de los capítulos.

1.1. Notación y terminología

Iniciamos estableciendo la notación y la terminología básica que usaremos. Sea X un conjunto finito no vacío de cardinalidad n . Si S es un subconjunto de X con cardinalidad $k \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces diremos que S es un k -conjunto de X . Denotaremos por $|X|$ a la cardinalidad de X .

Una *gráfica* G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ de conjuntos disjuntos tales que $V(G) \neq \emptyset$, y los elementos de $E(G)$ son 2-conjuntos de $V(G)$. Los elementos de $V(G)$ son los *vértices* de G , y los elementos de $E(G)$ son las *aristas* de G . Si u y v son vértices distintos de G , y $\{u, v\}$ es una arista de G , entonces abreviaremos este hecho con $uv \in E(G)$.

Una gráfica G es *finita* si $V(G)$ es finito. El número $|V(G)|$ es el *orden* de G , y el número $|E(G)|$ es el *tamaño* de G . De aquí en adelante, todas las gráficas que se mencionen serán finitas y, a menos que se establezca otra cosa, $G = (V(G), E(G))$ denotará a una gráfica de orden $n \geq 3$.

Sean u y v vértices de G . Diremos que u y v son *adyacentes* si $uv \in E(G)$. Si u y v son adyacentes, entonces u y v son los *extremos* de la arista uv , y la arista uv es *incidente* con u y con v . Si u_1v_1 y u_2v_2 son dos aristas distintas de G , entonces diremos que son *adyacentes* si y solo si tienen exactamente

un extremo en común.

Sea v un vértice de G . La *vecindad* de v es el conjunto de vértices de G que son adyacentes a v . Este conjunto será denotado por $N_G(v)$. Decimos que u es *vecino* de v si $u \in N_G(v)$. Se generaliza el concepto de vecindad para subconjuntos de $V(G)$ de la siguiente manera. Dado $W \subseteq V(G)$ no vacío, definimos la vecindad de W en G como el conjunto

$$\{v \in V(G) \mid uv \in E(G), \text{ para algún } u \in W\}$$

y lo denotamos por $N_G(W)$.

El *grado* $d_G(v)$ de un vértice v en G es el número de aristas incidentes en él. El *grado mínimo* de G se define como $\min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$, y se denota por $\delta(G)$. Similarmente, el *grado máximo* de G se define como $\max\{d_G(v) : v \in V(G)\}$, y se denota por $\Delta(G)$.

Cuando sólo existe una gráfica bajo consideración, la referencia a G en las dos últimas definiciones se omitirá.

Dos gráficas H y G son *isomorfas* si existe una función $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que es biyectiva y $uv \in E(G)$ si y solo si $f(u)f(v) \in E(H)$. Usaremos $G \cong H$ para decir que H y G son isomorfas. De ahora en adelante no haremos distinción entre gráficas isomorfas.

Una gráfica H será una *subgráfica* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si H es una subgráfica de G , entonces escribiremos $H \subseteq G$. Alternativamente, diremos que G es una *supergráfica* de H , siempre y cuando $H \subseteq G$. Si $H \subseteq G$ y $V(H) = V(G)$, entonces H es una *subgráfica abarcadora* de G . Similarmente, si $H \subseteq G$ y $H \neq G$, entonces H es una *subgráfica propia* de G , y escribiremos $H \subset G$.

Sea G una gráfica y sea U un subconjunto no vacío de $V(G)$. La subgráfica de G *inducida* por U es la subgráfica H de G tal que $V(H) = U$ y $uv \in E(H)$ si $uv \in E(G)$. La subgráfica de G inducida por U se denota por $G[U]$.

Sea G una gráfica de orden n . Una *trayectoria* de G es una sucesión (v_1, \dots, v_m) de m vértices de G , tal que (i) $1 \leq m \leq n$, (ii) $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para cada $i \in \{1, \dots, m-1\}$, y (iii) $v_i \neq v_j$ siempre que $i \neq j$. Un $v_1 v_m$ -*camino* en G es una trayectoria (v_1, \dots, v_m) tal que todos los vértices v_1, \dots, v_m son distintos. Una *gráfica camino* de n vértices es una gráfica P cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $E(P) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\}$. La *longitud* de P es el número de aristas que tiene P y la denotaremos por $\ell(P)$. En algunas ocasiones a una gráfica camino la llamaremos simplemente camino si no da lugar a confusión.

No es difícil ver que dos caminos con igual longitud son isomorfos. En vista de esto, usaremos P_m para denotar a cualquier camino de orden m (y longitud $m - 1$).

Una gráfica G es *conexa* si para cada par de vértices distintos u y v de G , existe un uv -camino. En el otro caso, diremos que G es *disconexa*.

Sea G una gráfica conexa y sean u y v vértices distintos de G . La *distancia* entre u y v en G se define como sigue.

$$d_G(u, v) := \min\{\ell(P) \mid P \text{ es un } uv\text{-camino en } G\}.$$

Igual que antes, cuando exista una sola gráfica bajo consideración, la referencia a G en $d_G(u, v)$ se omitirá.

Un *ciclo* C de orden m en una gráfica G es una trayectoria (v_1, \dots, v_m) tal que todos los vértices v_1, \dots, v_{m-1} son distintos y $v_1 = v_m$. Si C es un ciclo en G tal que $V(C) = V(G)$, entonces C es un *ciclo Hamiltoniano*.

La *gráfica ciclo* o simplemente *ciclo* de orden m es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_m\}$ y $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{m-1}v_m, v_mv_1\}$. No es difícil ver que dos ciclos con igual orden son isomorfos. En vista de esto, usaremos C_m para denotar a cualquier ciclo de orden m .

El *producto cartesiano* de dos gráficas G_1 y G_2 , denotado por $G_1 \square G_2$ es una gráfica tal que $V(G_1 \square G_2) = \{(g, h) : g \in G_1, h \in G_2\}$ y dos vértices (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son adyacentes en $G_1 \square G_2$ si y solo si $g_1 = g_2$ y $\{h_1, h_2\} \in E(G_2)$, o $h_1 = h_2$ y $\{g_1, g_2\} \in E(G_1)$. Ver ejemplo en figura 1.1.

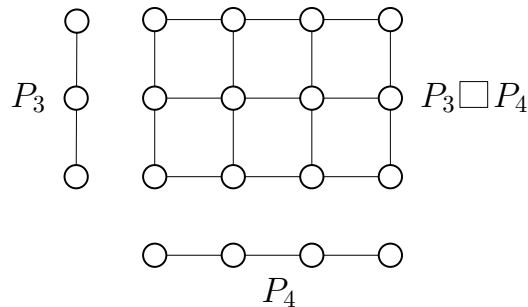


Figura 1.1: Gráficas P_3 y P_4 y su gráfica producto $P_3 \square P_4$.

Un *conjunto de empaquetamiento* (o *packing*) de una gráfica G es un subconjunto de vértices S de $V(G)$ tal que para cada par $u, v \in S$ se tiene

que $d_G(u, v) \geq 3$. La definición anterior es de acuerdo a [32] (página 1093, definición D28). El *número de empaquetamiento* $\rho(G)$ de G se define como

$$\rho(G) = \text{máx}\{|A| : A \text{ es conjunto de empaque de } G\}$$

Un *conjunto dominante* de una gráfica G es un subconjunto S de vértices de $V(G)$ tal que cada vértice v en $V(G) \setminus S$ es vecino de algún vértice de S . El *número de dominación* $\gamma(G)$ de G se define como

$$\gamma(G) = \text{mín}\{|B| : B \text{ es conjunto dominante de } G\}$$

Un conjunto S de $V(G)$ es llamado *conjunto independiente* de G si para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq S$, u y v no son adyacentes. Un conjunto independiente S es *máximo*, si para todo conjunto independiente S' de G se cumple que $|S'| \leq |S|$.

Sea Δ el grado máximo de una gráfica G de orden n , un conjunto de $S \subseteq V(G)$ es un conjunto *k-independiente* si la subgráfica inducida por S tiene grado máximo menor o igual a $k - 1$.

Un conjunto de aristas E de G es *independiente* si cualesquiera dos elementos de E no son adyacentes.

Si G es una gráfica con $\gamma(G) = k$ y $V(G)$ admite una partición en k subconjuntos V_1, \dots, V_k tales que cada subgráfica inducida $G[V_i]$ es una subgráfica completa de G , entonces se dice que G es *descomponible*.

Si G es una gráfica, entonces G^2 denotará a la supergráfica de G que resulta de agregar una arista a G entre cada par de vértices que están a distancia 2.

1.2. Números de dominación y empaquetamiento

Tanto el número de dominación como el número de empaquetamiento de una gráfica son parámetros bien conocidos en la teoría de gráficas. Nuestro propósito en esta sección es presentar un breve recuento de algunos de los aspectos que más se han estudiado sobre estos dos parámetros.

1.2.1. Dominación en gráficas

La noción de conjunto dominante de una gráfica se remonta a por lo menos el siglo XVII, cuando en la India se planteaban diversos problemas en el

juego de ajedrez relacionados con determinar del número mínimo de piezas del mismo tipo (reinas, alfiles, torres, etc.), que eran necesarias para proteger al resto de los cuadros del tablero. Un ejemplo concreto de este tipo de cuestionamientos es la siguiente: ¿cuál es el mínimo número de reinas que se deben colocar en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, de tal manera que cada cuadrado no ocupado por ninguna reina esté dominado (es decir, pueda ser atacado) por al menos una de las reinas? Tiempo después, a principios del siglo XX, algunos problemas de este tipo fueron publicados, adquiriendo con el tiempo cierta fama [1, 47]. Este es el caso, por ejemplo, del bien conocido problema de las *Ocho Reinas* [1] y sus generalizaciones. A pesar de estas referencias históricas sobre la noción de dominación en gráficas, no fue sino hasta 1962, cuando Berge [14] y Ore [51] introdujeron formalmente, de manera independiente, el concepto de número de dominación de una gráfica. Durante los subsecuentes diez años se publicaron muy pocos trabajos sobre el tema, pero en 1975 y 1977, Cockayne y Hedetniemi presentaron una recopilación sobre los pocos resultados conocidos hasta esas fechas [21, 22]. El trabajo de Cockayne y Hedetniemi desencadenó un notable interés sobre el tema, el cual tuvo como consecuencia que durante los siguientes trece años se publicaran más de 300 artículos sobre dominación. Como veremos enseguida, el estudio del número de dominación de diversas familias de gráficas y de algunos aspectos relacionados, sigue vigente. Como ocurre con la mayoría de los parámetros de las gráficas, el problema de determinar el número de dominación de una gráfica es un problema NP-duro. Esto fue demostrado por Garey y Johnson en 1979 [50].

Producto cartesiano de gráficas y número de dominación

En 1962 Vizing [64] propuso el problema de determinar el número de dominación del producto cartesiano de dos gráficas en términos del número de dominación de sus factores. Cinco años después, en 1968, él mismo publicó la siguiente conjetura.

Conjetura 1.1. (*Vizing [65]*) *Para cualesquier dos gráficas G y H ,*

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H).$$

Hasta donde se sabe, esta conjetura sigue abierta y ha sido clasificada por Cockayne [20] como uno de los principales problemas a resolver en dominación. Algunos intentos por demostrarla han derivado en resultados parciales.

Por ejemplo, en 1979 Barcalkin y German demostraron que la conjetura de Vizing es verdadera para las gráficas descomponibles.

Teorema 1.2. (Barcalkin [13]) *Si K es una subgráfica abarcadora de una gráfica descomponible G tal que $\gamma(K) = \gamma(G)$, entonces para cualquier gráfica H*

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(K)\gamma(H).$$

Dos familias de gráficas que cumplen con el Teorema 1.2 son los árboles y los ciclos. Por ejemplo, Jacobson y Kinch [42] demostraron que $\gamma(G \square T) \geq \gamma(G)\gamma(T)$ cuando T es un árbol. El-Zahar y Pareek [25] en 1991 demostraron que la conjetura de Vizing se cumple cuando G y H son ciclos. En [25] también demostraron el siguiente teorema.

Teorema 1.3. (El-Zahar y Pareek [25])

$$\gamma(G \square H) \geq \min\{|V(G)|, |V(H)|\}.$$

Empleando este teorema, en 1988 Rall publicó el siguiente resultado:

Teorema 1.4. (Rall [23]) *Sea H una gráfica arbitraria. Existe un entero positivo r tal que si G es cualquier gráfica con $\gamma(G) \leq r$ y $|V(G)| \geq |V(H)|$ entonces $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$.*

Número de dominación de $P_n \square P_m$

En virtud de que la conjetura de Vizing sobre producto cartesiano de gráficas ha resultado ser un problema difícil, parte de la comunidad combinatoria ha optado por intentar variantes de la conjetura más accedibles. Uno de estos problemas es la determinación del número de dominación del producto cartesiano de gráficas relativamente simples. Por ejemplo, $P_n \square P_m$, la cual es mejor conocida como la *gráfica malla* de orden $n \times m$. Sin embargo, el problema de determinar el número de dominación del producto cartesiano de gráficas en general es también un problema NP-completo, incluso cuando se restringe a subgráficas arbitrarias de la gráfica producto [12, 44]. Por otra parte, Hare y Hedetniemi [35] desarrollaron un algoritmo que determina $\gamma(P_n \square P_m)$ en tiempo lineal siempre y cuando m sea fijo.

En 1984 Jacobson y Kinch [41] publicaron los primeros valores exactos para $\gamma(P_n \square P_m)$ cuando $n = 2, 3, 4$ y cualquier entero positivo m . Después, Hare [34] desarrolló un algoritmo que es empleado para conjeturar fórmulas

simples para $\gamma(P_n \square P_m)$, donde $1 \leq n \leq 10$. En 1992 Chang y Clark [19] confirmaron de manera formal las fórmulas de Hare, y adicionalmente, para enteros $8 \leq n \leq m$, dieron una construcción de un conjunto dominante, que genera la siguiente cota superior:

$$\gamma(P_n \square P_m) \leq \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4.$$

Más aún, Chang y Clark afirmaron que esta cota superior es precisamente el número requerido $\gamma(P_n \square P_m)$. Dicho de manera formal, ellos propusieron la siguiente conjetura.

Conjetura 1.5. (Chang y Clark [19]) *Para cualquier par de enteros n y m , con $16 \leq n \leq m$, se tiene que,*

$$\gamma(P_n \square P_m) = \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4.$$

Fisher [15] desarrolló un algoritmo que utiliza programación dinámica para buscar periodicidad en conjuntos dominantes, y le sirvió para encontrar valores exactos de $\gamma(P_n \square P_m)$ para m fijo y $n \leq 21$, confirmando así la conjetura de Chang y Clark para $n \leq 21$.

En 2004, Guichard [33] publicó la siguiente cota inferior para $\gamma(P_n \square P_m)$, la cual difiere de la cota superior anterior sólo por 5.

Teorema 1.6. (Guichard [33]) *Para cada $16 \leq n \leq m$,*

$$\gamma(P_n \square P_m) \geq \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 9.$$

Finalmente, en 2011 Daniel Gonçalves y otros [31], empleando los métodos de Fisher, cálculos por computadora y técnicas de optimización combinatoria, pudieron demostrar la conjetura de Chang y Clark.

Dominación, empaquetamiento e independencia en gráficas y algunas de sus relaciones

Nuestro objetivo en esta sección es presentar algunas relaciones que ocurren entre los parámetros de dominación, empaquetamiento e independencia de las gráficas. En particular, nos enfocamos en $P_n \square P_m$ debido a que $F_2(P_n)$

es una subgráfica inducida de $P_n \square P_m$, y parte de la información que se conoce de $P_n \square P_m$ sobre estos parámetros será utilizada en los subsecuentes capítulos. Recordemos que el número de empaquetamiento de una gráfica G es el mayor tamaño de un conjunto de empaque de $S \subseteq V(G)$ y se denota como $\rho(G)$. Una relación bien conocida entre el número de dominación y el número de empaquetamiento es la siguiente.

Observación 1.7. *Para cualquier gráfica G se tiene que, $\rho(G) \leq \gamma(G)$.*

Además, se sabe que $\rho(T) = \gamma(T)$ siempre que T sea un árbol. Por otro lado, Jacobson y Kinch en 1986 demostraron que la conjetura de Vizing [41] se cumple para cualquier gráfica cuyo número de empaquetamiento es igual a su número de dominación, y además demostraron el siguiente resultado.

Teorema 1.8. *(Jacobson y Kinch [41]) Para cualquier par de gráficas G y H , se cumple la siguiente desigualdad*

$$\gamma(G \square H) \geq \max\{\rho(G)\gamma(H), \rho(H)\gamma(G)\}.$$

En 1993 Fisher [16] publicó los valores exactos para $\rho(P_n \square P_m)$ cuando $n, m \in \mathbb{Z}^+$. En particular, demostró el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *(Fisher [16]) Si n y m son enteros mayores que 8, entonces*

$$\rho(P_n \square P_m) = \left\lceil \frac{nm}{5} \right\rceil.$$

Como ya veremos en el último capítulo de esta tesis, este resultado de Fisher jugará un papel importante en la determinación de $\rho(F_2(P_n))$, nuestro resultado principal.

Otro parámetro clásico en teoría de gráficas relacionado con el número de empaquetamiento es el número de independencia. En seguida presentaremos algunos resultados conocidos sobre el número de independencia del producto cartesiano de gráficas en términos de los parámetros de las gráficas factores.

Observación 1.10. *Para cualesquiera par de gráficas G y H , se cumple la siguiente desigualdad*

$$\alpha(G \square H) \geq \alpha(G)\alpha(H).$$

En 1963 Vizing publicó la siguiente cota inferior no trivial para el número de independencia del producto cartesiano de gráficas.

Teorema 1.11. (*Vizing [64]*). Para cualesquiera par de gráficas G y H , se cumple la siguiente desigualdad

$$\alpha(G \square H) \geq \alpha(G)\alpha(H) + \min\{|G| - \alpha(G), |H| - \alpha(H)\}.$$

Klavžar en 2005 propuso un procedimiento para determinar una cota inferior de $\alpha(G \square H)$, cuando G y H son bipartitas.

Teorema 1.12. (*Klavžar [46]*) Sean G y H gráficas bipartitas con biparticiones V_1, V_2 y W_1, W_2 , respectivamente. Si $\alpha(G) = |V_1|$ y $\alpha(H) = |W_1|$, entonces

$$\alpha(G \square H) = |V_1||W_1| + |V_2||W_2|.$$

El resultado anterior también se puede encontrar en el libro [38] (teorema 7.2).

Hasta donde sabemos, no existen otras cotas inferiores generales para $\alpha(G \square H)$. Por el otro lado, Hagauer and Klavžar demostraron el siguiente resultado, el cual requiere que una de las gráficas factores sea bipartita. Además, note que dicho resultado está expresado en términos del número de 2-independencia de la otra gráfica factor.

Teorema 1.13. (*Hagauer, Klavžar [36]*) Sea G cualquier gráfica y sea H una gráfica bipartita. Entonces

$$\alpha(G \square H) \geq \frac{|H|}{2} \alpha_2(G),$$

y la igualdad se cumple si H tiene un apareamiento perfecto.

La siguiente observación es fácil de verificar y establece una relación bastante general entre el número de empaquetamiento de G y el número de independencia de G^2 . Donde G^2 es la gráfica definida al final de la sección 1.1.

Observación 1.14. Si G es una gráfica, entonces $\rho(G) = \alpha(G^2)$.

1.3. Gráficas de fichas

En 1988 Johns obtiene su Ph. D. con el trabajo titulado *Generalized distance in graphs* [43], aunque su trabajo se centra en estudiar distancias generalizadas en gráficas, Johns define un cierto tipo de gráfica cuyas

adyacencias están en términos de la distancia. Tal gráfica se define como sigue. Sea G una gráfica conexa de orden n y sea k un entero tal que $1 \leq k \leq n - 1$. La k -subgráfica G_k de G es la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los k -conjuntos de $V(G)$ y dos k -conjuntos X y Y son adyacentes en G_k si $d_G(G[X], G[Y]) = 1$. Donde, $d_G(G[X], G[Y]) = 1$ si y solo si existen vértices adyacentes en G con $u \in X$ y $v \in Y$ tales que $X - u = Y - v$. Se puede demostrar que la gráfica G_k es la misma que $F_k(G)$. La gráfica $F_k(G)$ ha sido redefinida de diferentes maneras y por varios autores, además se han estudiado varios de sus parámetros, ver por ejemplo [2, 3, 4, 6, 8, 17, 9, 52, 18, 37, 62, 53, 39, 66, 67, 27, 48]. Como veremos más adelante, en 2012 Fabila et. al. [27] redefinieron esta gráfica llamándola “gráfica de fichas” y estudiaron algunos de sus parámetros. A continuación presentamos una reseña histórica sobre las gráficas de fichas.

Como se mencionó anteriormente, Johns define las gráficas de 2-fichas en 1988. En 1991 Alavi et al. [2], redefine a las gráficas de 2 fichas y les da el nombre de gráficas de doble vértice de G . En el survey de Alavi et al. [3] se pueden encontrar propiedades sobre planaridad y conexidad de estas gráficas, tales propiedades se obtuvieron en los 90’s. Algunos años después, en 2002, T. Rudolph [62] re-introdujo la misma gráfica bajo el nombre de *cuadrado simétrico* de G , y la empleó para el estudio del problema del isomorfismo en gráficas y en conexión con problemas en mecánica cuántica.

En 2004, Saad S. y Al-Tobali determinaron el *número vinculante (binding number)* $b(G)$ de la gráfica de doble vértice de la gráfica completa de n vértices K_n .

Teorema 1.15. (Saad S. y Al-Tobali [61]) *Sea un entero $n \geq 5$. Entonces*

$$b(F_2(K_n)) = \frac{\binom{n}{2} - 1}{\binom{n}{2} - 2(n - 2)}.$$

Posteriormente, en 2007, la noción de gráficas de doble vértice fue extendida por Audenaert et al. [9] para cualquier $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, y la correspondiente $F_k(G)$ fue llamada la k -potencia simétrica de G . En [9] se estudiaron principalmente los parámetros *fuertemente regular* y *el espectro* de tales gráficas, también se presentan algunas relaciones de $F_k(G)$ con mecánica cuántica. En ese mismo año, J. Jacob, W. Goddard y R. Laskar, presentaron algunos resultados de $F_2(G)$ respecto al *número cromático* y *planaridad*. A continuación presentamos algunos de ellos.

Teorema 1.16. (*J. Jacob, W. Goddard, R. Laskar [29]*) Para cualquier gráfica G , se cumple que $\chi(F_2(G)) \leq \chi(G)$.

En particular se puede notar que $\chi(F_2(C_4)) = \chi(C_4) = 2$ y $\chi(F_2(K_4)) = 3 < \chi(K_4)$.

Teorema 1.17. (*J. Jacob, W. Goddard, R. Laskar [29]*) Si G es de orden $n \geq 2$ y contiene k triángulos, entonces $F_2(G)$ contiene $k(n - 2)$ triángulos.

Otros resultados también se publicaron en 2007 por A. Kirlangic e I. Buyukkuscu [11], estos están relacionados con *árboles binomiales*.

Continuando con la línea de investigación iniciada en [62], años más tarde, en 2009, Barghi y Ponomarenko demostraron el siguiente resultado sobre gráficas *co-espectrales* (gráficas cuyas matrices de adyacencia tienen el mismo conjunto de valores propios) no isomorfas.

Teorema 1.18. (*Barghi, Ponomarenko [52]*) Para cada entero positivo n existe una infinidad de parejas de gráficas no isomorfas G y H tales que $G^{(m)}$ y $H^{(m)}$ son co-espectrales.

Independientemente, empleando diferentes métodos, en 2010 A. Alzaga et al. [8] también demostraron el teorema 1.18. Un año después, en 2011 P. Dundar y Z. Yorgancioglu publicaron algunos otros resultados sobre el *número cromático total* de algunas gráficas de fichas. Algunos de esos resultados se muestran a continuación.

Teorema 1.19. (*P. Dundar y Z. Yorgancioglu [24]*) El número cromático total de la gráfica de doble vértice es,

$$\chi_T(F_2(G)) \geq \Delta(F_2(G)) + 1.$$

Teorema 1.20. (*P. Dundar y Z. Yorgancioglu [24]*) Para cada gráfica G y H subgráfica de G se cumple que,

$$\chi_T(F_2(G)) \geq \chi_T(F_2(H)).$$

En 2012 Fabila-Monroy et al. [27] re-introdujeron, por tercera vez, $F_k(G)$. Sea G una gráfica de orden $n \geq 3$ y sea k un entero tal que $1 \leq k \leq n - 1$. La *gráfica de k -fichas* de G , denotada por $F_k(G)$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los k -conjuntos de $V(G)$, donde dos vértices X y Y son adyacentes en $F_k(G)$ si su diferencia simétrica consta de exactamente

dos vértices que son adyacentes en G . En [27] estudian, entre otras, las siguientes propiedades de gráficas de k -fichas: conectividad, diámetro, número cromático y caminos Hamiltonianos.

La gráfica de fichas $F_k(G)$, se puede ver como “*un modelo de k -fichas indistinguibles asignadas a los vértices de una gráfica G , las cuales se mueven de un vértice a otro por de las aristas de la gráfica*” [27]. A este tipo de problema de reconfigurar fichas se le puede relacionar con el problema de movimiento de guijarros PM (*pebble motion*). A continuación definimos dicho problema. Consideremos un arreglo A de k guijarros distintos numerados, $1, \dots, k$ y asignados a k vértices distintos de G ¿es posible transformar A en otro arreglo B moviendo los guijarros sobre las aristas de G de tal manera que cada vértice contenga a lo más un guijarro? Este problema ha sido estudiado por Auletta et al. [10] y por Kornhauser et al. [45] desde el punto de vista algorítmico.

En este trabajo, usaremos la notación y el enfoque propuesto por Fabila-Monroy et al. [27] para las gráficas de k -fichas. Siguiendo este enfoque, enseguida presentaremos una breve discusión sobre algunos resultados que han sido reportados desde entonces [6, 17, 53, 48].

El siguiente teorema es uno de los resultados principales en [17].

Teorema 1.21. (*Carballosa et al. [17]*) *Sea G una gráfica de orden $n \geq 3$ y sea $k \in \{2, \dots, n-1\}$. $F_k(G)$ es regular si y solo si uno de los siguientes casos se cumple.*

1. G es isomorfa a la gráfica completa K_n sobre n vértices,
2. G es isomorfa a $\overline{K_n}$,
3. G es isomorfa a la gráfica bipartita completa $K_{1,n-1}$ y $k = n - 2$,
4. G es isomorfa a $\overline{K_{1,n-1}}$ y $k = n - 2$.

El siguiente resultado es una generalización de uno presentado por Alavi et al. [2] acerca de la planaridad de las gráficas de doble vértice.

Teorema 1.22. (*Carballosa et al. [17]*) *Sea G una gráfica conexa de orden mayor que 10. $F_k(G)$ es plana si y solo si $k = 2$ o $k = n - 2$ y $G \simeq P_n$.*

Recientemente en 2016 J. Leños y A. L. Trujillo presentaron el siguiente resultado sobre conexidad, el cual fue conjeturado por R. Fabila et al. [48] en 2012.

Teorema 1.23. (Leaños y Trujillo-Negrete [48]) Si G es una gráfica t -conexa con $t \geq k$, entonces $F_k(G)$ es $k(t - k + 1)$ -conexa.

Otros resultados sobre conexidad de $F_k(G)$ también pueden encontrarse en [17].

Si $G = K_n$ se sabe que la gráfica de k fichas de G es isomorfa a la gráfica de Johnson $J(n, k)$ la cual es Hamiltoniana, más aún es Hamiltoniana conexa [7]. Por otra parte, se sabe que existen gráficas Hamiltonianas cuya gráfica de doble vértice es no Hamiltoniana. Por ejemplo para los ciclos con $n = 4$ o $n \geq 6$, la gráfica de fichas $F_2(P_n)$ del ciclo C_n es no Hamiltoniana [5]. Sea k un número entero mayor que 2, en [27] demostraron que $F_k(K_{m,m})$ es no Hamiltoniana y si G es la gráfica rueda, Mirajkar y Priyanca [49] demostraron que $F_2(G)$ es Hamiltoniana. El siguiente resultado generaliza el resultado de Mirajkar y Priyanca.

Teorema 1.24. (Rivera y Trujillo-Negrete [53]) Sean n y k enteros positivos con $n \geq 3$ y $1 \leq k \leq n - 1$. Si G es la gráfica abanico de orden n , entonces $F_k(G)$ es Hamiltoniana.

Algunos otros resultados sobre Hamiltonicidad se pueden encontrar en [3].

Sobre el número de independencia de las gráficas de fichas $\alpha(F_k(G))$ se conocen pocos resultados. Enseguida presentamos tres de ellos.

Teorema 1.25. (Samodivkin et al. [54]) Si G es una gráfica con conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$, entonces

$$\alpha(F_2(G)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \alpha(G[v_{k+1}, \dots, v_n]).$$

En 2016 de Alba et al. [6] estudiaron el número de independencia de algunas gráficas de fichas. Los principales resultados al respecto son los siguientes.

Teorema 1.26. (de Alba et al. [6]) Para n y m enteros no negativos.

- $\alpha(F_2(K_{n,m})) = \max\{mn, \binom{m+2}{2} - mn\}$.
- $\alpha(F_2(P_n)) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.
- $\alpha(F_2(C_n)) = \lfloor n \lfloor n/2 \rfloor / 2 \rfloor$.

Teorema 1.27. (de Alba et al. [6]) Sean n y m enteros no negativos.

- Si $G = K_{1,n}$ la estrella de orden $n + 1$, $n \geq 1$, entonces

$$\alpha(F_k(K_{1,n})) = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{si } k \leq (n + 1)/2 \\ \binom{n}{k-1} & \text{si } k > (n + 1)/2. \end{cases}$$

- Si $G \in \{P_{2n}, C_{2n}, K_{n,n}\}$ y k es impar con $1 < k < n - 1$, entonces

$$\alpha(F_k(G)) = \binom{2n}{k}/2.$$

1.4. Códigos correctores y empaquetamiento

En esta sección presentaremos la relación que existe entre cierta clase de códigos correctores y el número de empaquetamiento de la gráfica $F_k(P_n)$. Iniciamos introduciendo un poco de notación, y recordando algunos conceptos básicos de teoría de códigos.

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Usaremos $\{0, 1\}^n$ para denotar al conjunto de todos los vectores de longitud n , con entradas en $\{0, 1\}$. Similarmente, si $k \in \{0, \dots, n\}$, usaremos $\{0, 1\}_k^n$ para denotar al subconjunto de vectores de $\{0, 1\}^n$ que tienen exactamente k unos (y $n - k$ ceros).

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y sea $k \in \{0, \dots, n\}$. Un *código binario de longitud n y peso constante k* es un subconjunto $S \subseteq \{0, 1\}_k^n$. Los elementos en S son las *palabras código*.

Sea $n \geq 2$ un número entero y sea $k \in \{0, \dots, n\}$. Si $u \in \{0, 1\}_k^n$, entonces usaremos $B_e(u)$ para denotar al conjunto de todos los vectores en $\{0, 1\}^n$ que pueden ser obtenidos de u bajo cierto error e . El error e puede ser por ejemplo: (i) el *intercambio de un 0 por un 1* y viceversa, (ii) el *borrado de un bit*, (iii) la *transposición de dos bits adyacentes*, etc. El caso particular de error que analizaremos en este trabajo es el (iii). Debido a esto, de aquí en adelante cuando hablemos del error e , asumiremos que e intercambió a un par de bits adyacentes.

Un código $C \subseteq \{0, 1\}_k^n$ será un *código e -corrector*, si $B_e(u) \cap B_e(v) = \emptyset$ para $u, v \in C$ con $u \neq v$.

De la definición anterior y del hecho de que el error e es una transposición de bits adyacentes, se sigue que C puede corregir una única transposición

adyacente. Un problema clásico en teoría de códigos es encontrar el tamaño máximo de un código e -corrector.

Se define $\Gamma_{n,k}$ como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los vectores de $\{0,1\}_k^n$, y dos vértices en $\Gamma_{n,k}$ son adyacentes si y solo si uno se puede obtener a partir del otro mediante la transposición de dos bits adyacentes. En la figura 1.2, se muestra la gráfica $\Gamma_{4,2}$.

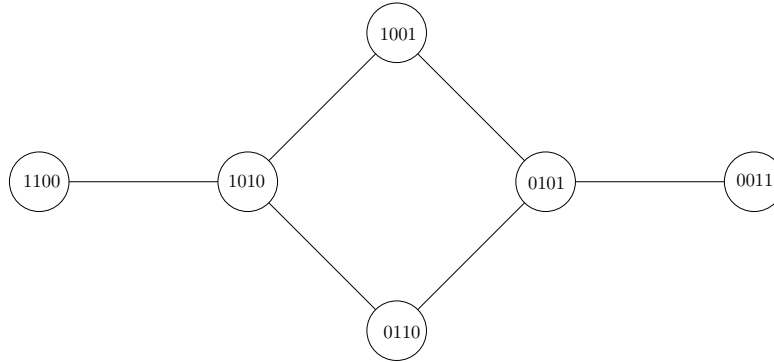


Figura 1.2: Gráfica $\Gamma_{4,2}$. Cada par de vértices adyacentes se obtienen mediante una transposición de bits adyacentes.

Note que, de las definiciones de $\Gamma_{n,k}$ y código e -corrector, se sigue que cualquier código en $\{0,1\}_k^n$ que puede corregir una única transposición adyacente corresponde a un conjunto de empaquetamiento para $\Gamma_{n,k}$, y recíprocamente. En seguida establecemos este hecho formalmente.

Proposición 1.28. *Un subconjunto de vértices $S \subseteq V(\Gamma_{n,k})$ será un empaquetamiento de $\Gamma_{n,k}$ si y solo si S es un código e -corrector de $\{0,1\}_k^n$ que puede corregir una transposición adyacente.*

Demostración. (\Rightarrow) Sea S un conjunto de empaquetamiento de $\Gamma_{n,k}$. Supongamos que S no es un código e -corrector. Entonces $B_e(u) \cap B_e(v) \neq \emptyset$ para algún par $u, v \in S$ con $u \neq v$. Luego $\{0,1\}_k^n$ contiene un x tal que $x \in B_e(u)$, $x \in B_e(v)$, y $x \notin \{u, v\}$. Entonces x está a distancia 1 de u , y a distancia 1 de v . Esto implica $d_{\Gamma_{n,k}}(u, v) \leq 2$, una contradicción.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que S es un código e -corrector, y que S no es conjunto de empaquetamiento en $\Gamma_{n,k}$. Entonces existen $u, v \in S$ con $u \neq v$ tales que $d_{\Gamma_{n,k}}(u, v) \leq 2$. Esto implica que $B_e(u) \cap B_e(v) \neq \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis de que S es un código e -corrector. \square

Proposición 1.29. *Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Las gráficas $\Gamma_{n,k}$ y $F_k(P_n)$ son isomorfas.*

Demostración. Sea $V(P_n) = \{1, \dots, n\}$ y supongamos que j y $j + 1$ son adyacentes en P_n siempre que $j \in \{1, \dots, n - 1\}$. Considere $f: V(F_k(P_n)) \rightarrow V(\Gamma_{n,k})$ definida como sigue: para $X \in V(F_k(P_n))$, sea $f(X) := (a_1, \dots, a_n)$, donde $a_i = 1$ si $i \in X$ y $a_i = 0$, en otro caso. Demostraremos que f es una biyección.

1. Inyectividad. Sean $f(X) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $f(Y) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ elementos de $\{0, 1\}_k^n$. Supongamos que $f(X) = f(Y)$. Entonces $a_i = b_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Dado que $a_i = 1$ siempre que $i \in X$, y $a_i = 0$ en otro caso, entonces $b_i = a_i = 1$ si $i \in Y$, y $b_i = 0$ en otro caso. Esto implica $X = Y$, como se requiere.
2. Sobreyectividad. Sea $A \in V(\Gamma_{n,k})$. Entonces $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ con $a_i \in \{0, 1\}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Más aún, existe $I := \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a_i = 1$ si $i \in I$, y $a_i = 0$ si $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$. Por lo tanto, el k -conjunto en $V(F_k(P_n))$ definido por $X = \{i_1, \dots, i_k\}$ satisface $f(X) = A$, como se requiere.

Ahora demostraremos que f preserva incidencias. Sean X y Y dos k -conjuntos distintos de $V(P_n) = \{1, \dots, n\}$. Supongamos que X y Y son vértices adyacentes en $F_k(P_n)$. Entonces existe $j \in \{1, \dots, n - 1\}$ tal que $X \Delta Y = \{j, j + 1\}$. De esto último y de la definición de f se sigue que los vectores $f(X)$ y $f(Y)$ difieren exactamente en la j -ésima y $(j + 1)$ -ésima coordenada. Esto implica que $f(X)$ puede obtenerse de $f(Y)$ al intercambiar los dígitos (el 0 por el 1, y el 1 por el 0) de $f(Y)$ que ocupan la j -ésima y $(j + 1)$ -ésima coordenada. Dado que dichos dígitos ocupan posiciones contiguas, entonces $f(X)$ y $f(Y)$ son adyacentes en $\Gamma_{n,k}$, y así f preserva incidencias. \square

En la figura 1.3 se muestran $F_2(P_5)$ y $\Gamma_{5,2}$.

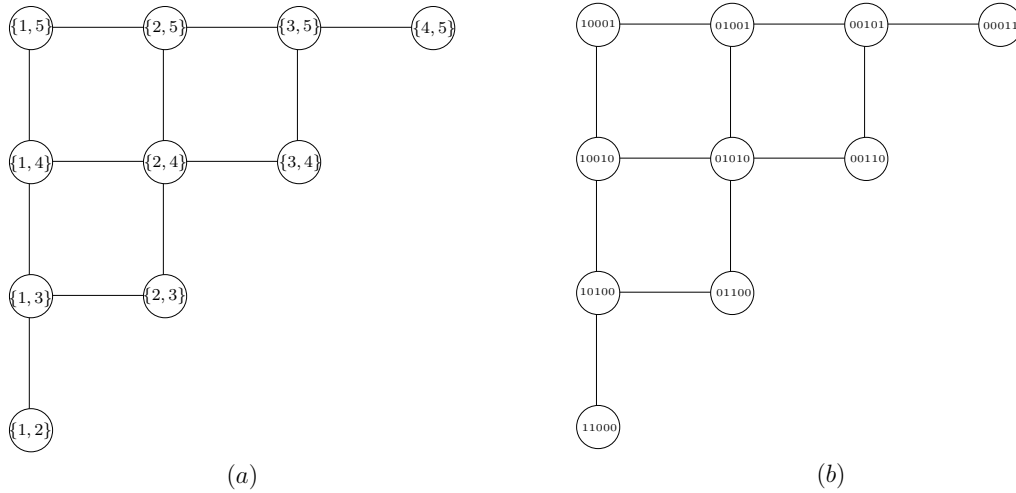


Figura 1.3: A la izquierda tenemos a $F_2(P_5)$, y a la derecha está $\Gamma_{5,2}$.

Proposición 1.30. *Determinar el número de empaquetamiento de $F_k(P_n)$ es equivalente a determinar el tamaño máximo de un código e-corrector de longitud n y peso constante k en $\{0, 1\}_k^n$ que puede corregir una única transposición adyacente.*

Demostración. Se deduce inmediatamente de las proposiciones 1.28 y 1.29. \square

Como ya se ha mencionado en las secciones previas, en este trabajo sólo estudiaremos la gráfica $\Gamma_{n,2}$. Por brevedad, escribiremos Γ_n en lugar de $\Gamma_{n,2}$.

Corolario 1.31. $\rho(\Gamma_n) = \rho(F_2(P_n))$.

Demostración. Se sigue de las proposiciones 1.29 y 1.30. \square

1.5. Organización de esta tesis

La contribución de esta tesis a la teoría de gráficas consiste de algunos resultados sobre la estimación de los números de dominación y empaquetamiento de las gráficas $F_2(P_n)$ y $F_3(P_n)$. Dichos resultados serán presentados como se describe a continuación.

- En el capítulo 3 se establece una cota superior para $\gamma(F_2(P_n))$ mediante la construcción de cierta familia de conjuntos dominantes, y se presentan los valores exactos para $\gamma(F_2(P_n))$ cuando $n \leq 15$. Puesto que la naturaleza de los conjuntos de dominación y empaquetamiento para $F_2(P_n)$ es muy similar, algunas de las técnicas, conceptos, e ideas usadas en el capítulo 3 serán retomadas en el capítulo 5.
- En el capítulo 4 se establece una cota superior para $\rho(F_3(P_n))$. Igual que en el capítulo 3, tal cota se obtiene de la construcción de cierta familia de conjuntos de empaquetamiento de $F_3(P_n)$. Dichas construcciones surgieron a partir del hecho de que $F_3(P_n)$ y $F_2(P_m)$ son isomorfas para ciertos valores de m y n .
- En el capítulo 5 se encuentra el resultado principal de esta tesis, a saber, la determinación del valor exacto de $\rho(F_2(P_n))$. Como ya se ha mencionado, la determinación de tal parámetro para $F_2(P_n)$ derivó en la confirmación una conjetura en teoría de códigos planteada por R. Pratt [60]. Cabe mencionar que parte de nuestra argumentación en el capítulo 5 se sustenta en los resultados de R. Pratt [59] para $\rho(F_2(P_n))$ cuando $n \leq 27$, y en el trabajo de D. C. Fisher [16] sobre $\rho(F_2(P_n \square P_m))$.

Capítulo 2

Cota superior para $\gamma(F_2(P_n))$

En este capítulo damos una cota superior para el número de dominación de la gráfica de 2-fichas del camino P_n , es decir, una cota superior para $\gamma(F_2(P_n))$. Las razones que sustentan este resultado son las construcciones de ciertos conjuntos dominantes para $F_2(P_n)$.

Consideremos la sucesión $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$, definida como sigue:

$$b(n) := \begin{cases} \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 20) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{5}, \\ \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 26) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{5} \text{ o } n \equiv 4 \pmod{5}, \\ \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 24) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{5} \text{ o } n \equiv 3 \pmod{5}. \end{cases}$$

El resultado principal que se demostrará en este capítulo es el siguiente:

Teorema 2.1. *Para cada número entero $n \geq 7$ se cumple que*

$$\gamma(F_2(P_n)) \leq b(n).$$

En el cuadro 2.1 se exhiben los valores exactos para $\gamma(F_2(P_n))$ cuando $n \leq 15$. Dichos resultados fueron obtenidos por medio de la computadora.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma(F_2(P_n))$	1	1	2	3	5	6	8	10	12	15	18	21	23	27
$b(n)$	-1	0	1	3	4	6	8	10	13	15	18	21	24	28

Cuadro 2.1: Primeros 14 valores de $\gamma(F_2(P_n))$ y $b(n)$

Denotaremos por H a la *gráfica de malla infinita* que tiene como conjunto de vértices a $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y dos vértices $(i, i'), (j, j')$ son adyacentes en H si y solo si $|i - j| + |i' - j'| = 1$

En este capítulo, $H(n)$ será la subgráfica de H inducida por el conjunto de vértices, $\{(i, j) : 0 \leq i, j \leq n \text{ y } i - j \leq 1\}$. Similarmente $I(n)$ será la subgráfica de $H(n)$ inducida por el conjunto de vértices

$$W(n) = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n - 1 \text{ e } i - j \leq 0\}.$$

En la figura 2.1 se muestran las gráficas $H(7)$ e $I(7)$. Consideremos el conjunto de vértices $V(F_2(P_{n+1})) := \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n + 1\}$. Mediante la función,

$$g : W(n) \rightarrow V(F_2(P_{n+1})),$$

definida como $g((i, j)) = \{i, j + 1\}$, es fácil ver que $I(n) \simeq F_2(P_{n+1})$.

Consideremos la función $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ definida por $f(x, y) = (x + 2y)$, donde $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ es el conjunto de clases residuales módulo 5. Tal función nos será de utilidad para construir conjuntos de vértices dominantes de la gráfica $F_2(P_n)$. Por ejemplo, en la figura 2.1, se muestra el conjunto $V(H(7)) \cap f^{-1}(2)$.

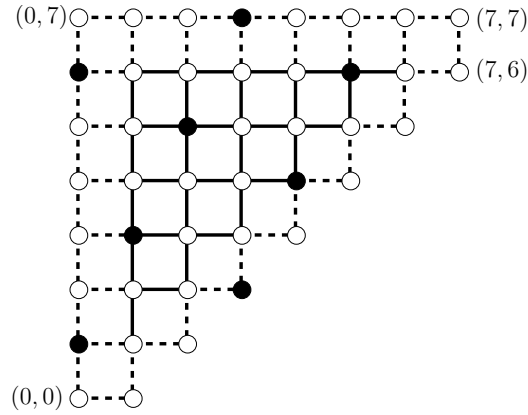


Figura 2.1: $I(7)$ es la gráfica inducida por las aristas continuas. $H(7)$ es la gráfica inducida por las aristas continuas y punteadas. El conjunto de vértices negros es $V(H(7)) \cap f^{-1}(2)$.

Para $t \in \mathbb{Z}^+$ e $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, sea $f_t : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ como sigue: $f_t(i, j) = f(i - t, j)$. Llamaremos a f_t la t -*translación* de f . Recordemos que una *5-coloración propia por vértices* de H es una función $c : V(H) \rightarrow \mathbb{Z}_5$ tal que si u y v son vértices adyacentes en H , entonces $c(v) \neq c(u)$. Nos referiremos a los elementos de \mathbb{Z}_5 como los colores de f y para $\ell \in \mathbb{Z}_5$, nos referiremos a

$f^{-1}(\ell)$ como la ℓ clase cromática de H bajo f . En la siguiente proposición estableceremos algunos hechos que involucran a la gráfica de malla H , a f y a f_t . La prueba de cada punto es directa de las definiciones o de las observaciones anteriores.

Proposición 2.2. *Sean $\ell \in \mathbb{Z}_5$, $i, i', j, j' \in \mathbb{Z}$, y sean H y f como arriba.*

- (i) f es una 5-coloración propia por vértices de H .
- (ii) $f^{-1}(\ell)$ es un conjunto dominante de H .
- (iii) $f(i, j) = f(i, j')$ si y solo si $j - j'$ es un múltiplo de 5.
- (iv) $f(i, j) = f(i', j)$ si y solo si $i - i'$ es un múltiplo de 5.
- (v) $f(i + 1, i) = f(j + 1, j)$ si y solo si $i - j$ es un múltiplo de 5.
- (vi) Si $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $f^{-1}(f(i, j)) = f_t^{-1}(f(i - t, j))$.

Para $i, j, k, r \in \{0, \dots, n\}$, con $i \leq j$ y $k < r$, la subgráfica $H_{i,j}^{k,r}(n) \subseteq H(n)$ es la inducida por el conjunto de vértices:

$$\{(x, y) : i \leq x \leq j, k \leq y \leq r\}.$$

Por brevedad, si ℓ es un entero tal que $n - \ell \geq 0$, escribiremos $H_{i,j}^\ell(n)$ y $H_i^\ell(n)$ en lugar de $H_{i,j}^{n-\ell+1,n}(n)$ y $H_{i,i}^{n-\ell+1,n}(n)$, respectivamente. Además, si $i = 1$ y $j = n$ usaremos $H^\ell(n)$ y $H^{k,r}(n)$ en lugar de $H_{1,n}^\ell(n)$ y $H_{1,n}^{k,r}(n)$, respectivamente. En la figura 2.2, se muestra $H(16)$ y algunas de tales gráficas.

Observación 2.3. *Sea $\ell \in \mathbb{Z}_5$. Si v es un vértice de $I(n) \setminus (f^{-1}(\ell) \cap V(H(n)))$, entonces $H(n)$ tiene una arista entre v y algún vértice de $f^{-1}(\ell) \cap V(H(n))$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de las definiciones de $I(n)$, $H(n)$ y $f^{-1}(\ell)$. \square

Recordemos que f es una coloración propia por vértices para H . La siguiente proposición afirma que si $i \geq 4$, entonces cada una de las cinco clases cromáticas definidas por f sobre $H^{i-4,i}(n)$ tienen la misma cardinalidad.

Proposición 2.4. *Sea $i \in \{4, \dots, n\}$. Si $m \in \mathbb{Z}_5$, entonces $|V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(m)| = i$.*

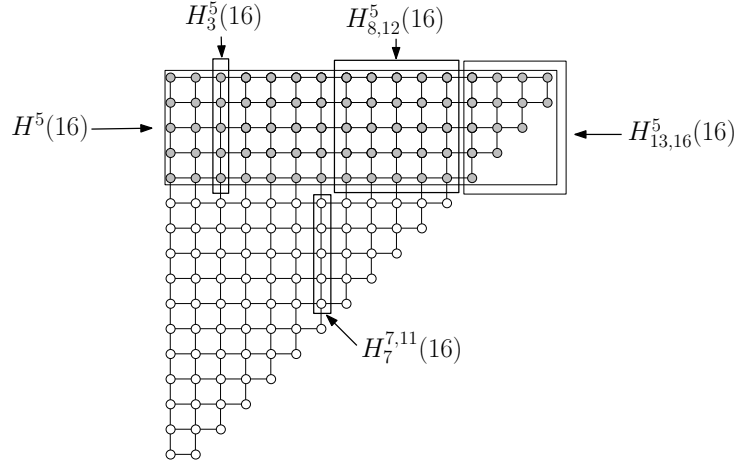


Figura 2.2: Gráfica $H(16)$. La subgráfica de $H(16)$ inducida por el conjunto de vértices grises es $H^5(16)$, también se muestran las subgráficas $H_3^5(16)$, $H_{8,12}^5(16)$, $H_7^{8,12}(16)$ y $H_{13,16}^5(16)$.

Demostración. Para dar una idea de la demostración, lo que haremos es determinar para cada entero $m \in \mathbb{Z}^+$ e $i \geq 4$ la cardinalidad del conjunto $V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(m)$ empleando la función traslación f_t definida anteriormente, demostraremos que tal cardinalidad es invariante independientemente del valor t , es decir que no depende de la traslación que hagamos.

Primero demostraremos que

$$|V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(\ell)| = |V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(\ell')|$$

para cualquier $\ell, \ell' \in [0, 4]$. De la proposición 2.2 (iii) sabemos que los colores $c_0 := f(0, r)$, $c_1 := f(1, r)$, \dots , $c_4 := f(4, r)$ son distintos. Entonces, es suficiente demostrar que $|V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(c_t)| = |V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(c_{t+i})|$ para cualquier $t \in [0, 3]$. Podemos suponer que $t \in [0, 3]$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que c_t es de color azul y que c_{t+1} es de color rojo. Sea b el número de vértices de $|H^{i-4,i}(n)|$ los cuales están coloreados por f . Formalmente, $b := |H^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(c_t)|$. Note que el número b_1 de vértices de $H^{i-4,i}(n)$ que son coloreados por f_1 son $b + p - q$ donde p denota el número de vértices en $\{(-1, i-4), (-1, i-3), (-1, i-2), (-1, i-1), (-1, i)\}$ que son coloreados de azul por f , y q denota el número de vértices en $\{(i-3, i-4), (i-2, i-3), (i-1, i-2), (i, i-1), (i+1, i)\}$ que son coloreados de azul

por f . De la proposición 2.2 (iv) y (vi) sabemos, respectivamente, que $p = 1$ y $q = 1$. Por lo tanto $b = b_1$. Pero por la proposición 2.2 (vi) sabemos que el conjunto de vértices de $H_n^{i-4,i}(n)$ coloreados de rojo por f es igual al conjunto de vértices de $H_n^{i-4,i}(n)$ que son coloreados por f_1 . Esto y $b = b_1$ implican que $|V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(c_t)| = |V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(c_{t+1})|$.

Como $H^{i-4,i}(n)$ tiene $(i+2)+(i+1)+i+(i-1)+(i-2) = 5i$ vértices, y como $|V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(\ell)| = |V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(\ell')|$ para cualquier $\ell, \ell' \in [0, 4]$, entonces $|V(H^{i-4,i}(n)) \cap f^{-1}(\ell)| = i$ para cualquier $\ell \in [0, 4]$. \square

2.1. Demostración del teorema 2.1

A continuación el teorema 2.1.

Teorema 2.5. *Para cada numero entero $n \geq 7$ se cumple que*

$$\gamma(F_2(P_n)) \leq b(n).$$

Dependiendo del valor de $t := n \pmod{5}$, exhibiremos un conjunto dominante $B_{n,t}$ de $I(n)$ tal que $|B_{n,t}| = b(n)$.

Para cada entero n con $7 \leq n \leq 9$ se obtuvo por computadora que $\gamma(F_2(P_n)) = b(n)$. Entonces supondremos que $n \geq 10$, sea $C_{n,4} := (V(I(n)) \cap f^{-1}(4)) \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$, donde

$$\begin{aligned} X_1 &:= \{(1, i) : 0 < i < n \text{ y } (0, i) \in H(n) \cap f^{-1}(4)\}, \\ X_2 &:= \{(i, n-1) : 0 < i < n \text{ y } (i, n) \in H(n) \cap f^{-1}(4)\}, \\ X_3 &:= \{(i-1, i) : 2 < i < n \text{ y } (i, i-1) \in H(n) \cap f^{-1}(4)\}, \\ X_4 &:= \{(n-1, n-1) : (n, n-1) \in H(n) \cap f^{-1}(4)\}. \end{aligned}$$

Observe que estos cuatro conjuntos son disjuntos a pares. De la definición de $C_{n,4}$, la proposición 2.2 (ii) y la observación 2.4 se sigue que $C_{n,4}$ es un conjunto dominante para $I(n)$. Además, note que $|H(n) \cap f^{-1}(4)| = |C_{n,4}| + |Z_{n,4}|$, donde $Z_{n,4} = H(n) \cap f^{-1}(4) \cap \{(0, 0), (0, n), (n, n), (1, 0), (2, 1)\}$. Ya que ni $(0, 0)$ ni $(1, 0)$ pertenecen a $H(n) \cap f^{-1}(4)$, entonces $Z_{n,4} = H(n) \cap f^{-1}(4) \cap \{(0, n), (2, 1), (n, n)\}$. Por brevedad sea $Z := Z_{n,4}$.

Ahora, dependiendo del valor de $t := n \pmod{5}$ eliminaremos ciertos vértices de $C_{n,4}$ y agregaremos otros para obtener un conjunto dominante de tamaño menor que $C_{n,4}$, a saber $B_{n,t}$.

- Para $n \equiv 0 \pmod{5}$, definimos

$$B_{n,0} := (C_{n,4} \setminus \{(1, n-3), (1, n-1), (4, n-1)\}) \cup \{(1, n-2), (3, n-1)\}.$$

- Para $n \equiv 1 \pmod{5}$, definimos

$$B_{n,1} := (C_{n,4} \setminus \{(1, n-4), (1, n-2)\}) \cup \{(1, n-3)\}.$$

- Para $n \equiv 2 \pmod{5}$, definimos

$$B_{n,2} := C_{n,4} \cup \{(n-1, n-1)\}.$$

- Para $n \equiv 3 \pmod{5}$, definimos

$$B_{n,3} := (C_{n,4} \setminus \{(1, n-1), (3, n-1)\}) \cup \{(1, n-1)\}.$$

- Para $n \equiv 4 \pmod{5}$, definimos

$$B_{n,4} := (C_{n,4} \setminus \{(1, n-2), (n-3, n-1), (n-1, n-1)\}) \cup \{(n-2, n-1)\}.$$

No es difícil ver, que $B_{n,t}$ es un conjunto dominante de $I(n)$ siempre que $t = n \pmod{5}$. De las definiciones de $B_{n,t}$ y la proposición 2.4, se sigue que:

- Si $n \equiv 0 \pmod{5}$, entonces $Z = \{(2, 1)\}$ y

$$\begin{aligned} |B_{n,0}| &= |C_{n,4}| - 1 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - |Z| - 1 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - 2 \\ &= -2 + \sum_{i=1}^{(n-1)/5} |H^{(5i+1)-4, 5i+1}(n) \cap f^{-1}(4)| \\ &= -2 + \sum_{i=1}^{(n-1)/5} (5i+1) = \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 20). \end{aligned}$$

- Si $n \equiv 1 \pmod{5}$, entonces $Z = \{(2, 1)\}$ y

$$\begin{aligned} |B_{n,1}| &= |C_{n,4}| - 1 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - |Z| - 1 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - 2 \\ &= \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 26). \end{aligned}$$

- Si $n \equiv 2 \pmod{5}$, entonces $Z = \{(2, 1), (0, n)\}$ y

$$\begin{aligned} |B_{n,2}| &= |C_{n,4}| - 1 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - |Z| - 1 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - 3 \\ &= \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 24). \end{aligned}$$

- Si $n \equiv 3 \pmod{5}$, entonces $Z = \{(2, 1), (n, n)\}$ y

$$\begin{aligned} |B_{n,3}| &= |C_{n,4}| - 1 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - |Z| - 1 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - 3 \\ &= \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 24). \end{aligned}$$

- Si $n \equiv 4 \pmod{5}$, entonces $Z = \{(2, 1)\}$ y

$$\begin{aligned} |B_{n,3}| &= |C_{n,4}| - 2 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - |Z| - 2 = |H(n) \cap f^{-1}(4)| - 3 \\ &= \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 26). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Cota inferior para $\rho(F_3(P_n))$

En este capítulo damos una cota superior para $\rho(F_3(P_n))$. Considere la sucesión $\{c(n)\}_{n=1}^{\infty}$ definida como sigue:

$$c(n) = \begin{cases} \frac{1}{54}(n^3 + 3n^2) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{54}(n^3 + 3n^2 - 4) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{54}(n^3 + 3n^2 - 6n - 8) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Para cada número entero $n \geq 3$ se cumple que $\rho(F_3(P_n)) \geq c(n)$.*

Notemos que $F_3(P_n)$ es una sub-gráfica propia conexa de la gráfica malla 3-dimensional. Ver figura 3.1. En particular, observe que la restricción de $F_3(P_n)$ en el nivel $z = i$, donde $i \in \{0, \dots, n-1\}$, es isomorfa a $F_2(P_{n-i})$. Usando ideas similares a las del capítulo previo pudimos construir un conjunto de empaquetamiento S_0 para la subgráfica de $F_3(P_n)$ inducida por los vértices con coordenada $z = 0$. Después simplemente se hicieron ciertas traslaciones de S_0 a niveles superiores de $F_3(P_n)$, y de esta manera se construyó el conjunto de empaquetamiento de cardinalidad $c(n)$. El conjunto de empaquetamiento obtenido tiene un orden aproximado de $\binom{n}{3}/9 \approx \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-i}{2}/5$.

3.1. Notación y resultados auxiliares

A lo largo de esta sección, asumiremos que n es un entero mayor que 2, que $\{1, \dots, n\}$ es el conjunto de vértices de P_n , y que $\{j, j+1\}$ es una

arista de P_n siempre y cuando $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Similarmente, sin pérdida de generalidad, escribiremos a los elementos de cada vértice $\{i_1, i_2, i_3\} \in V(F_3(P_n))$ de manera ascendente. Es decir, siempre asumiremos que $i_1 < i_2 < i_3$. En lo que resta del capítulo abreviaremos a $F_3(P_n)$ por E_n .

Proposición 3.2. *Si $\{i_1, i_2, i_3\}$ y $\{j_1, j_2, j_3\}$ son vértices de E_n , entonces*

$$d_{E_n}(\{i_1, i_2, i_3\}, \{j_1, j_2, j_3\}) = |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| + |i_3 - j_3|.$$

Demostración. Sean P_n y E_n como arriba, y sean $X = \{i_1, i_2, i_3\}$ y $Y = \{j_1, j_2, j_3\}$ dos 3-conjuntos de $V(P_n)$. Recordemos que $i_1 < i_2 < i_3$ y $j_1 < j_2 < j_3$.

Primero demostraremos que

$$d_{E_n}(\{i_1, i_2, i_3\}, \{j_1, j_2, j_3\}) \leq |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| + |i_3 - j_3|. \quad (3.1)$$

Consideremos la función $sgn : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ definida como sigue:

$$sgn(i, j) := \begin{cases} 1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i < j \end{cases}$$

Sean $s_1 := sgn(i_1, j_1)$, $s_2 = sgn(i_2, j_2)$, $s_3 = sgn(i_3, j_3)$, $d_1 := |i_1 - j_1|$, $d_2 := |i_2 - j_2|$, y $d_3 := |i_3 - j_3|$. Entonces $j_1 = i_1 + d_1 s_1$, $j_2 = i_2 + d_2 s_2$ y $j_3 = i_3 + d_3 s_3$.

Puesto que la siguiente secuencia de vértices de E_n ,

$$\begin{aligned} & \{i_1, i_2, i_3\}, \{i_1 + s_1, i_2, i_3\}, \{i_1 + 2s_1, i_2, i_3\} \cdots \{i_1 + (d_1 - 1)s_1, i_2, i_3\}, \{j_1, i_2, i_3\}, \\ & \{j_1, i_2 + s_2, i_3\}, \{j_1, i_2 + 2s_2, i_3\} \cdots \{j_1, i_2 + (d_2 - 1)s_2, i_3\}, \{j_1, j_2, i_3\}, \\ & \{j_1, j_2, i_3 + s_3\}, \{j_1, j_2, i_3 + 2s_3\} \cdots \{j_1, j_2, i_3 + (d_3 - 1)s_3\}, \{j_1, j_2, j_3\}, \end{aligned}$$

corresponde a un camino en E_n de longitud $d_1 + d_2 + d_3$ entre X y Y , entonces la desigualdad 3.1 se cumple.

Ahora demostraremos la otra desigualdad. Procederemos por inducción sobre $\ell = d_{E_n}(X, Y)$. Los casos $\ell = 0, 1$ son fáciles de verificar. Supongamos que la afirmación se cumple para cada $t \leq \ell - 1$ con $\ell \geq 2$. Sea \mathcal{P} un camino más corta de E_n entre X y Y . Entonces \mathcal{P} debe tener longitud ℓ . Supongamos que $\mathcal{P} = XX_1X_2 \dots X_{\ell-1}Y$.

De la definición de \mathcal{P} tenemos que $d_{E_n}(X, Y) = d_{E_n}(X, X_1) + d_{E_n}(X_1, Y)$. Por otro lado, de la hipótesis de inducción tenemos que las siguientes dos igualdades se cumplen:

- $d_{E_n}(X, X_1) = |i_1 - r_1| + |i_2 - r_2| + |i_3 - r_3|$;
- $d_{E_n}(X_1, Y) = |r_1 - j_1| + |r_2 - j_2| + |r_3 - j_3|$,

donde $X_1 = \{r_1, r_2, r_3\}$ con $r_1 < r_2 < r_3$.

Finalmente, usando la desigualdad del triángulo obtenemos el resultado deseado:

$$d_{E_n}(X, Y) = d_{E_n}(X, X_1) + d_{E_n}(X_1, Y) = |i_1 - r_1| + |r_1 - j_1| + |i_2 - r_2| + |r_2 - j_2| + |i_3 - r_3| + |r_3 - j_3| \geq |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| + |i_3 - j_3|.$$

□

En el interés de dar mayor claridad a nuestras construcciones, nos apoyaremos en las siguientes subgráficas $\{G_i\}_{i=0}^{n-3}$ de E_n : para $i \in \{0, \dots, n-3\}$, sea G_i la subgráfica de E_n inducida por el siguiente conjunto de vértices:

$$\begin{aligned} & \{\{i+1, i+2, i+3\}, \{i+1, i+2, i+4\}, \{i+1, i+2, i+5\}, \dots, \{i+1, i+2, n\}, \\ & \quad \{i+1, i+3, i+4\}, \{i+1, i+3, i+5\}, \dots, \{i+1, i+3, n\}, \\ & \quad \vdots \\ & \quad \{i+1, n-1, n\}\} \end{aligned}$$

Observe que G_i se puede definir como $G_i = \{\{a, b, c\} : \min\{a, b, c\} = i+1\}$ y que $\{V(G_0), \dots, V(G_{n-3})\}$ es una partición de $V(E_n)$. En la figura 3.1 se muestra E_6 y sus correspondientes subgráficas G_0, G_1, G_2 , y G_3 . Note que el conjunto de vértices representados por cuadrados forman un conjunto de empaquetamiento de 6 vértices.

Sea $B(n)$ el subconjunto de vértices de E_n definido como sigue:

$$B(n) := \{\{1, 3i+2, 3j\} : i \in \{0, \dots, \lfloor (n-3)/3 \rfloor\} \text{ y } j \in \{i+1, \dots, n\}\}.$$

Note que $B(n) \subset V(G_0)$. Por ejemplo, en la figura 3.1 se observa que $B(6) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}\}$.

Proposición 3.3. *El conjunto de vértices $B(n)$ es un conjunto de empaquetamiento para G_0 .*

Demostración. Sean $\{1, i_1, i_2\}$ y $\{1, j_1, j_2\}$ dos vértices distintos de $B(n)$. Entonces al menos una de las siguientes dos desigualdades es cierta: $i_1 \neq j_1$ o $i_2 \neq j_2$. Por otro lado, de la proposición 3.2 sabemos que

$$d_{G_0}(\{1, i_1, i_2\}, \{1, j_1, j_2\}) = |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2|.$$

Si $i_1 \neq j_1$, entonces $|i_1 - j_1| \geq 3$ ya que de la definición de $B(n)$, sabemos que tanto i_1 como j_1 son congruentes con 2 módulo 3. Análogamente, podemos concluir que si $i_2 \neq j_2$, entonces $|i_2 - j_2| \geq 3$. Entonces $d_{G_0}(\{1, i_1, i_2\}, \{1, j_1, j_2\}) \geq 3$, y como consecuencia tenemos que $B(n)$ es un conjunto de empaquetamiento para G_0 . \square

Para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, definimos la función $f_i : B(n) \rightarrow V(E_n) \cup \{\emptyset\}$ como sigue:

$$f_i(\{i_1, i_2, i_3\}) := \begin{cases} \{i_1 + i, i_2 + i, i_3 + i\} & \text{si } i_3 + i \leq n, \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El siguiente resultado se sigue de la proposición 3.3 y la definición de f_i .

Corolario 3.4. *Si $i, j \in \{0, \dots, n-3\}$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- *El conjunto $f_i(B(n)) - \{\emptyset\}$ es un conjunto de empaquetamiento para G_i .*
- *Si $i \neq j$, entonces $f_i(B(n)) \cap f_j(B(n)) = \emptyset$.*

Lema 3.5. *Sea $n \geq 3$ un entero y sea $i \in \{0, \dots, n-3\}$. Entonces*

$$\mathcal{B}(n) := \bigcup_{i=0}^{n-3} f_i(B(n)) - \{\emptyset\},$$

es un conjunto de empaquetamiento para E_n .

Demostración. Sean i y n como en el lema. Sean $X := \{i, i_1, i_2\}$ y $Y := \{j, j_1, j_2\}$, vértices distintos en \mathcal{B}_n . Entonces,

$$\begin{aligned} d_{E_n}(f_i(X), f_j(Y)) &= d_{E_n}(\{1 + i, i_1 + i, i_2 + i\}, \{1 + j, j_1 + j, j_2 + j\}) \\ &= |j - i| + |j_1 - i_1 + j - i| + |j_2 - i_2 + j - i|. \end{aligned}$$

Claramente, basta demostrar que $d_{E_n}(f_i(X), f_j(Y)) \geq 3$. Del corolario 3.4 y nuestra suposición podemos asumir que $j > i$, y así tenemos que $j - i \geq 1$. Por otro lado, puesto que $j - i \geq 3$ implica la desigualdad requerida, entonces podemos asumir que $j - i \in \{1, 2\}$.

Como X y Y están en $\mathcal{B}(n)$, entonces $i_1, j_1 \equiv 2 \pmod{3}$, y por tanto, $j_1 - i_1 = 3k$ para algún entero k . Entonces $|j_1 - i_1 + j - i| = |3k + (j - i)| \geq 1$. De manera análoga, del hecho de que $i_2, j_2 \equiv 0 \pmod{3}$ implica $j_2 - i_2 = 3k$ para algún entero k , y así $|j_2 - i_2 + j - i| = |3k + (j - i)| \geq 1$. \square

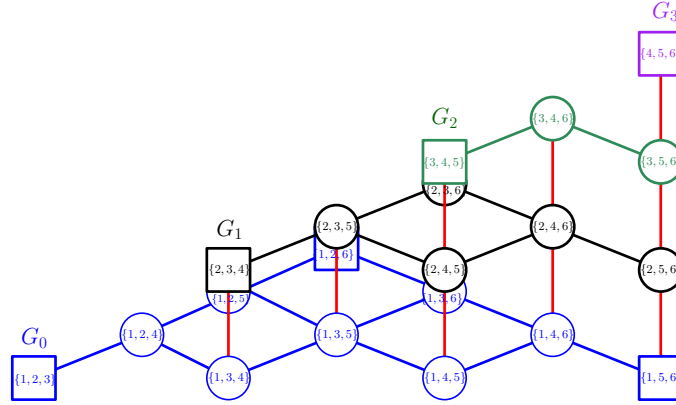


Figura 3.1: Esta gráfica es E_6 . El conjunto de vértices cuadrados forman un empaquetamiento de orden 6, y las subgráficas G_0, G_1, G_2 y G_3 corresponden, respectivamente, a las subgráficas azul, negra, verde y morada.

Dedicaremos el resto de la sección a demostrar que el conjunto $\mathcal{B}(n)$ definido en el lema 3.5 tiene $c(n)$ vértices, tal y como lo afirma el Teorema 3.1. Nuestro primer paso en esta dirección es analizar la forma que tienen los elementos de $\mathcal{B}(n)$.

Lema 3.6. *Para cada entero $n \geq 3$ se cumple lo siguiente:*

$$B(n) = \begin{cases} \bigcup_{j=0}^{(n-3)/3} (\bigcup_{k=j+1}^{n/3} \{\{1, 3j+2, 3k\}\}) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \bigcup_{j=0}^{(n-4)/3} (\bigcup_{k=j+1}^{(n-1)/3} \{\{1, 3j+2, 3k\}\}) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \bigcup_{j=0}^{(n-5)/3} (\bigcup_{k=j+1}^{(n-2)/3} \{\{1, 3j+2, 3k\}\}) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Demostración. Sólo demostraremos que $B(n) = \bigcup_{j=0}^{(n-3)/3} (\bigcup_{k=j+1}^{n/3} \{\{1, 2+3j, 3k\}\})$ si $n \equiv 0 \pmod{3}$, ya que las demostraciones de los casos $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ son totalmente análogas.

Sea $n \equiv 0 \pmod{3}$. Entonces existe $\ell \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n = 3\ell$. Ahora supongamos que $\{i_1, i_2, i_3\} \in B(n)$. De la definición de $B(n)$ se sigue que $i_1 = 1, i_2 = 3j+2$ y $i_3 = 3k$ para $k \in \{j+1, \dots, \ell\}$ y $j \in \{0, \dots, \ell-1\}$. Esto demuestra que $B(n)$ está contenido en $\bigcup_{j=0}^{\ell-1} (\bigcup_{k=j+1}^{\ell} \{1, 3j+2, 3k\})$.

Por el otro lado, de la definición de $B(n)$ también se sigue que $\{1, 3j+2, 3k\}$ es un elemento de $B(n)$ para $j = 0, \dots, \ell-1$, y $k = j+1, \dots, \ell$, y por tanto $\bigcup_{j=0}^{\ell-1} (\bigcup_{k=j+1}^{\ell} \{1, 3j+2, 3k\})$ es un subconjunto de $B(n)$. \square

En el siguiente lemma determinaremos la cardinalidad de $B(n)$ de acuerdo a la forma de n .

Lema 3.7. *Para cada entero $n \geq 3$ se cumple lo siguiente:*

$$|B(n)| = \begin{cases} \frac{1}{18}(n^2 + 3n) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{18}(n^2 + n - 2) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{18}(n^2 - n - 2) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Demostración. Igual que en la demostración del lemma 3.6, sólo analizaremos el caso en el que $n \equiv 0 \pmod{3}$, debido a que los casos $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ se pueden deducir de manera totalmente análoga.

Dado que $n \equiv 0 \pmod{3}$, entonces existe $\ell \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n = 3\ell$. Sea $j \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ y sea $k \in \{j + 1, \dots, \ell\}$. Sea $v_{j,k} := \{1, 3j + 2, 3k\}$.

Note que si $j_1, j_2 \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ y $k_1, k_2 \in \{j + 1, \dots, \ell\}$, entonces $v_{j_1, k_1} \neq v_{j_2, k_2}$ si y solo si $(j_1, k_1) \neq (j_2, k_2)$. Esto último y el lemma 3.6 implican que

$$|B(n)| = \sum_{j=0}^{\ell-1} \left(\sum_{k=j+1}^{\ell} 1 \right) = \sum_{j=0}^{\ell-1} (\ell - j) = \ell^2 - \frac{\ell(\ell - 1)}{2} = \frac{1}{18}(n^2 + 3n).$$

□

Proposición 3.8. *Para cada entero $n \geq 3$ y $j \in \{0, \dots, n - 1\}$, se cumple la siguiente igualdad:*

$$|f_j(B(n))| = |B(n - j)|.$$

Demostración. Sean j y n como en el enunciado de la proposición. Recuerde que $f_0(B(n)) = B(n)$. Basta demostrar que existe una biyección g_j entre los conjuntos $f_j(B(n))$ y $f_0(B(n - j))$.

Considere $g_j : f_j(B(n)) - \{\emptyset\} \longrightarrow B(n - j)$ definida por

$$g_j(\{i_1, i_2, i_3\}) := \{i_1 - j, i_2 - j, i_3 - j\}.$$

Primero demostraremos que si $\{i_1, i_2, i_3\} \in f_j(B(n))$, entonces

$$g_j(\{i_1, i_2, i_3\}) \in B(n - j).$$

De las definiciones de $B(n)$ y f_j tenemos que $\{i_1, i_2, i_3\} \in f_j(B(n))$ implica lo siguiente: $i_1 = 1 + j$, $i_2 = 3i + 2 + j$, y $i_3 = 3k + j$, donde i, j y k son enteros

no negativos tales que $1 + j < 3i + 2 + j < 3k + j \leq n$. Estas desigualdades implican que $1 < 3i + 2 < 3k \leq n - j$, y así $\{1, 3i + 2, 3k\}$ está en $B(n - j)$. Como $g_j(\{i_1, i_2, i_3\}) = \{1, 3i + 2, 3k\}$, tenemos $g_j(\{i_1, i_2, i_3\}) \in f_0(B(n - j))$, como se requiere.

De la definición de g_j es claro que g_j es inyectiva. Ahora, suponga que $\{i_1, i_2, i_3\} \in f_0(B(n - j))$. Entonces $\{i_1, i_2, i_3\} \in B(n - j)$, y por tanto $i_1 = 1, i_2 = 3i + 2$, y $i_3 = 3k$, donde i, j son enteros no negativos tales que $1 < 3i + 2 < 3k \leq n - j$. Estas desigualdades implican que $1 + j < 3i + 2 + j < 3k + j \leq n$, y así $\{1 + j, 3i + 2 + j, 3k + j\}$ está en $f_j(B(n - j))$. Como $g_j(\{1 + j, 3i + 2 + j, 3k + j\}) = \{1, 3i + 2, 3k\} = \{i_1, i_2, i_3\}$, podemos concluir que g_j es sobreyectiva. \square

3.2. Demostración del teorema 3.1

Sea $n \geq 3$ un entero. Por el lema 3.5 sabemos que

$$\mathcal{B}(n) = \bigcup_{i=0}^{n-3} f_i(B(n)) - \{\emptyset\},$$

es un conjunto de empaquetamiento para E_n . Luego, para demostrar el teorema 3.1, es suficiente demostrar que $|\mathcal{B}(n)| = c(n)$. Dicho de otro modo, basta verificar la siguiente igualdad:

$$|\mathcal{B}(n)| = \begin{cases} \frac{1}{54}(n^3 + 3n^2) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{54}(n^3 + 3n^2 - 4) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{54}(n^3 + 3n^2 - 6n - 8) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Del corolario 3.4, sabemos que los conjuntos $f_0(B(n)), \dots, f_{n-3}(B(n))$ son ajenos por pares. Este hecho y la proposición 3.8 implican que

$$|\mathcal{B}(n)| = \sum_{i=0}^{n-3} |B(n - i)| = \sum_{j=3}^n |B(j)|$$

Sea n_i el único elemento de $\{n - 2, n - 1, n\}$ tal que $n_i \equiv i \pmod{3}$, para $i \in \{0, 1, 2\}$. Entonces los conjuntos $\{n_0, n_1, n_2\}$ y $\{n - 2, n - 1, n\}$ son el mismo. En particular, para $\ell \geq 3$ tenemos que,

$$|\mathcal{B}(n)| = \sum_{\ell \equiv n_0 \pmod{3}}^{n_0} |B(\ell)| + \sum_{\ell \equiv n_1 \pmod{3}}^{n_1} |B(\ell)| + \sum_{\ell \equiv n_2 \pmod{3}}^{n_2} |B(\ell)|. \quad (3.2)$$

Afirmación 1. Sean i y n_i como arriba. Entonces

$$\sum_{\ell \equiv n_i \pmod{3}}^{n_i} |B(\ell)| = \begin{cases} \frac{1}{162}n_0(n_0^2 + 9n_0 + 18) & \text{si } i = 0, \\ \frac{1}{162}(n_1^3 + 6n_1^2 + 3n_1 - 10) & \text{si } i = 1, \\ \frac{1}{162}(n_2^3 + 3n_2^2 - 6n_2 - 8) & \text{si } i = 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Demostración de la Afirmación 1. Analizaremos los tres casos separadamente, dependiendo del valor de i .

- Supongamos que $i = 0$. Entonces 3 divide a n_0 , y $k := n_0/3 \in \mathbb{Z}^+$. Esto y el lema 3.7 implican lo siguiente,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \equiv n_0 \pmod{3}}^{n_0} |B(\ell)| &= \frac{1}{18} \sum_{i=1}^k ((3i)^2 + 3(3i)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k i \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{6} k(k^2 + 3k + 2) \\ &= \frac{1}{162} n_0(n_0^2 + 9n_0 + 18). \end{aligned}$$

- Supongamos que $i = 1$. Entonces 3 divide a $n_1 - 1$, y $k := (n_1 - 1)/3 \in \mathbb{Z}^+$. Esto y el lema 3.7 implican lo siguiente,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \equiv n_1 \pmod{3}}^{n_1} |B(\ell)| &= \frac{1}{18} \sum_{i=1}^k ((3i+1)^2 + (3i+1) - 2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k i \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{6} k(k^2 + 3k + 2). \\ &= \frac{1}{162} (n_1^3 + 6n_1^2 + 3n_1 - 10). \end{aligned}$$

- Supongamos que $i = 2$. Entonces 3 divide a $n_2 - 2$, y $k := (n_2 - 2)/3 \in \mathbb{Z}^+$. Esto y el lema 3.7 implican lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell \equiv n_2 \pmod{3}}^{n_2} |B(\ell)| &= \frac{1}{18} \sum_{i=1}^k ((3i+2)^2 - (3i+2) - 2) \\
 &= \frac{9}{18} \sum_{i=1}^k i^2 + \frac{9}{18} \sum_{i=1}^k i \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{6} k(k^2 + 3k + 2) \\
 &= \frac{1}{162} (n_2^3 + 3n_2^2 - 6n_2 - 8).
 \end{aligned}$$

Ahora usaremos la forma de n y las ecuaciones 3.2 y 3.3 para concluir con la demostración del teorema 3.1.

CASO 1. Supongamos que $n \equiv 0 \pmod{3}$. Entonces $n_0 = n$, $n_1 = n - 2$ y $n_2 = n - 1$. De estas tres igualdades y las ecuaciones 3.2 y 3.3 tenemos que,

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{B}(n)| &= \frac{1}{162} [(n(n^2 + 9n + 18)] \\
 &\quad + \frac{1}{162} [(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 3(n-2) - 10] \\
 &\quad + \frac{1}{162} [(n-1)^3 + 3(n-1)^2 - 6(n-1) - 8] \\
 &= \frac{1}{54} (n^3 + 3n^2).
 \end{aligned}$$

CASO 2. Supongamos que $n \equiv 1 \pmod{3}$. Entonces $n_0 = n - 1$, $n_1 = n$ y $n_2 = n - 2$. De estas tres igualdades y las ecuaciones 3.2 y 3.3 tenemos que,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}(n)| &= \frac{1}{162} [(n-1)((n-1)^2 + 9(n-1) + 18)] \\
&\quad + \frac{1}{162} [(n^3 + 6n^2 + 3n - 10)] \\
&\quad + \frac{1}{162} [(n-2)^3 + 3(n-2)^2 - 6(n-2) - 8)] \\
&= \frac{1}{54}(n^3 + 3n^2 - 4).
\end{aligned}$$

CASO 3. Supongamos que $n \equiv 2 \pmod{3}$. Entonces $n_0 = n-2$, $n_1 = n-1$ y $n_2 = n$. De estas tres igualdades y las ecuaciones 3.2 y 3.3 tenemos que,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}(n)| &= \frac{1}{162} [(n-2)((n-2)^2 + 9(n-2) + 18)] \\
&\quad + \frac{1}{162} [(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 3(n-1) - 10] \\
&\quad + \frac{1}{162} [n^3 + 3n^2 - 6n - 8] \\
&= \frac{1}{54}(n^3 + 3n^2 - 6n - 8).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Valor exacto de $\rho(F_2(P_n))$

En este capítulo estudiaremos el problema de encontrar el número de empaquetamiento de la gráfica de doble vértice $F_2(P_n)$ de la gráfica camino P_n . Neil Sloane mostró que el problema de determinar el tamaño máximo del código binario de longitud n y peso constante 2 que puede corregir una única transposición adyacente es equivalente a encontrar el número de empaquetamiento de la gráfica de doble vértice del camino [59]. Nuestra solución sobre la determinación de $\rho(F_2(P_n))$ confirma una conjetura de Rob Pratt sobre la función generadora ordinaria de la sucesión A085680 en [59].

Dado que A085680 es una sucesión de enteros positivos, la denotaremos por $A085680(n)$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$. En marzo del 2017 Rob Pratt reportó en [59] los valores exactos para $A085680(n)$ cuando $26 \leq n \leq 50$, y propuso la siguiente conjetura sobre la función generadora ordinaria de tal sucesión.

Conjetura 4.1. $\sum_{n \geq 0} A085680(n+2)x^n = \frac{1-x+x^2-x^{10}+x^{11}}{(1-x)^2(1-x^5)}$.

Nuestro objetivo en este capítulo es demostrar que $\rho(F_2(P_n)) = a(n)$ dado por $A085680(n+1)$, lo cual implica la Conjetura 4.1, en donde $a(n)$ está dado por la fórmula (4.1).

El contenido de este capítulo fue publicado en [30].

4.1. Resultados auxiliares

Considere la siguiente sucesión:

$$a(n) := \begin{cases} \frac{1}{10}(n^2 + n + 20) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{5} \text{ or } n \equiv 4 \pmod{5}, \\ \frac{1}{10}(n^2 + n + 18) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{5} \text{ or } n \equiv 3 \pmod{5}, \\ \frac{1}{10}(n^2 + n + 14) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{5}. \end{cases} \quad (4.1)$$

A menos que se afirme lo contrario, en el resto del capítulo, $a(n)$ es como arriba. La siguiente observación es una consecuencia inmediata de la definición de $a(n)$.

Observación 4.2. *Para cualquier entero $n \geq 6$*

$$a(n) = a(n - 5) + n - 2,$$

donde los primeros cinco valores son $a(1) = 2, a(2) = 2, a(3) = 3, a(4) = 4$ y $a(5) = 5$.

En el Cuadro 4.1.1 mostramos los primeros dieciocho valores de

$$A085680(n + 1)$$

y $a(n)$. Los valores para $A085680(n + 1)$ fueron tomados de la OEIS [59].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$A085680(n + 1)$	1	1	2	3	4	6	7	9	11	13	15	17	20	23	26	29	32	36
$a(n)$	2	2	3	4	5	6	7	9	11	13	15	17	20	23	26	29	32	36

Cuadro 4.1: Primeros dieciocho valores de $A085680(n + 1)$ y $a(n)$.

Note que los valores en las dos columnas del Cuadro 4.1.1 son iguales para $n \in \{6, \dots, 18\}$. En virtud de esto, a lo largo de este capítulo asumiremos que $n > 11$.

El resultado principal de este trabajo es el siguiente.

Teorema 4.3. *Sea $n \geq 6$ un entero. Entonces $A085680(n + 1) = a(n)$.*

En el interés de la claridad, dividiremos la demostración del teorema 4.3 en los siguientes dos lemas.

Lema 4.4. *Sea $n > 10$ un entero. Entonces $A085680(n + 1) \geq a(n)$.*

Lema 4.5. *Sea $n > 10$ un entero. Entonces $A085680(n + 1) \leq a(n)$.*

Recordemos que en el capítulo 2 definimos la gráfica $T(n) := I(n)$, la cual es isomorfa a $F_2(P_{n+1})$. Por brevedad, en este capítulo, usaremos $T(n)$ en lugar de $F_2(P_{n+1})$. Ahora introduciremos cierta notación, relacionada con $T(n)$, que usaremos en las demostraciones de los lemas 4.4 y 4.5.

Para $i, j, k, r \in \{1, \dots, n\}$, con $i \leq j$ y $k < r$. La subgráfica $T_{i,j}^{k,r}(n) \subseteq T(n)$ es la gráfica inducida por el conjunto de vértices:

$$\{(x, y) : i \leq x \leq j, k \leq y \leq r\}.$$

Por brevedad, si ℓ es un entero tal que $n - \ell \geq 0$, escribiremos $T_{i,j}^\ell(n)$ y $T_i^\ell(n)$ en lugar de $T_{i,j}^{n-\ell+1,n}(n)$ y $T_{i,i}^{n-\ell+1,n}(n)$, respectivamente. Además, si $i = 1$ y $j = n$ usaremos $T^\ell(n)$ y $T^{k,r}(n)$ en lugar de $T_{1,n}^\ell(n)$ y $T_{1,n}^{k,r}(n)$, respectivamente.

Sea S un conjunto de empaquetamiento de $T_{i,j}^{k,r}(n)$, definimos $S_{i,j}^{k,r}(n) = T_{i,j}^{k,r}(n) \cap S$.

En figura 4.1 se muestra $T(17)$ y varias de las subgráficas mencionadas anteriormente.

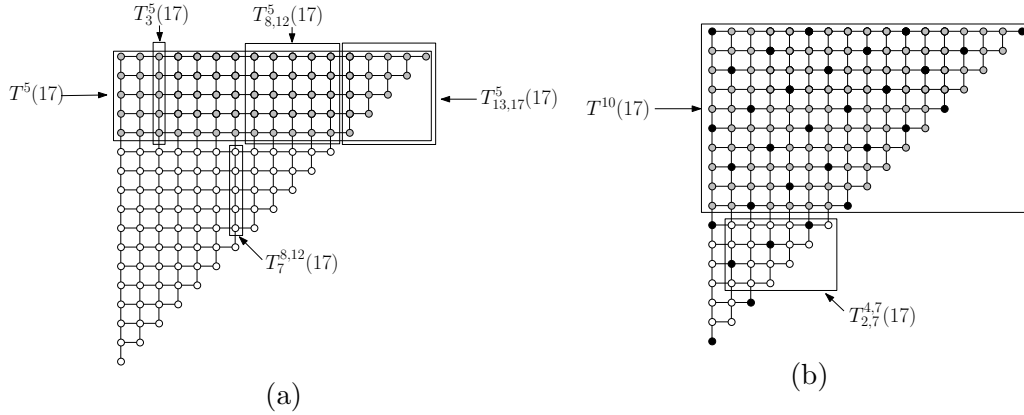


Figura 4.1: Dos copias de $T(17)$. (a) La subgráfica de $T(17)$ inducida por el conjunto de vértices grises es $T^5(17)$. (b) El conjunto de vértices negros S es un conjunto de empaquetamiento de $T(17)$, y aquellos en $T^{10}(17)$ es el conjunto de empaquetamiento $S^{10}(17)$.

4.2. Cota inferior para $\rho(T(n))$

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar el lema 4.4. Para ello daremos algunas construcciones de conjuntos de empaquetamiento de $T(n)$. Como ya veremos más adelante, dichas construcciones son refinamientos de las preimágenes de la función $f(x, y) = (x+2y)5$. Decimos que dichas preimágenes de tal función obedecen el “patrón del caballo”, debido a que todos los vértices de cada preimagen pueden generarse mediante los movimientos de la pieza *caballo*, en el juego de ajedrez. Ver figura 4.2 (izquierda).

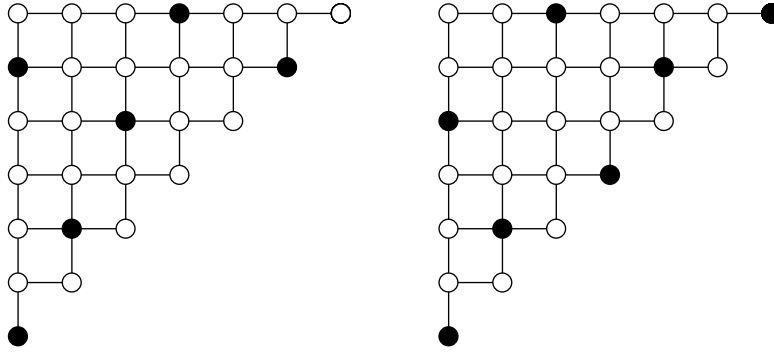


Figura 4.2: Dos copias de $T(7)$. Los dos conjuntos de vértices negros son conjuntos de empaquetamiento de $T(7)$. El conjunto de empaquetamiento de la izquierda es $T(7) \cap f^{-1}(3)$.

El primer paso para lograr nuestro objetivo consiste en determinar el tamaño de tales preimágenes, y luego, mediante algunas ligeras modificaciones generamos un nuevo conjunto de empaquetamiento para $T(n)$ con el tamaño requerido, a saber $a(n)$.

Recuerde también que para $t \in \mathbb{Z}^+$ y $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $f_t: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ definida como $f_t(i, j) = f(i - t, j)$ es la t -*translación* de f .

La mayoría de las afirmaciones en la siguiente proposición son similares a las de la proposición 2.2. La diferencia principal en esta versión es que ahora están enfocadas a conjuntos de empaquetamiento.

Proposición 4.6. Sean $\ell \in \mathbb{Z}_5$, $i, i', j, j' \in \mathbb{Z}$, y sea H y f como arriba. Entonces

- (i) f es una 5-coloración propia por vértices de H .

- (ii) $f^{-1}(\ell)$ es un conjunto de empaquetamiento de H .
- (iii) Si G es una subgráfica de H , entonces $G \cap f^{-1}(\ell)$ es un conjunto de empaquetamiento de G .
- (iv) $f(i, j) = f(i, j')$ si y solo si $j - j'$ es un múltiplo de 5.
- (v) $f(i, j) = f(i', j)$ si y solo si $i - i'$ es un múltiplo de 5.
- (vi) $f(i + 1, i) = f(j + 1, j)$ si y solo si $i - j$ es un múltiplo de 5.
- (vii) Si $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $f^{-1}(f(i, j)) = f_t^{-1}(f(i - t, j))$.

La siguiente proposición también es una ligera variación de la proposición 2.4.

Proposición 4.7. *Sea $i \in \{5, \dots, n\}$. Si $m \in \mathbb{Z}_5$, entonces*

$$|T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(m)| = i - 2.$$

Demostración. Primero demostraremos que

$$|T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(m)| = |T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(m')|$$

para cualquier $m, m' \in \mathbb{Z}_5$. De la proposición 4.6 (v) sabemos que los colores $c_1 := f(1, i)$, $c_2 := f(2, i)$, \dots , $c_5 := f(5, i)$ son distintos. Entonces, es suficiente demostrar que $|T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(c_t)| = |T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(c_{t+1})|$ para cualquier $t \in \{1, \dots, 4\}$. Sea $t \in \{1, \dots, 4\}$. Para ayudar a la comprensión, sin pérdida de generalidad, sea c_t el color azul y sea c_{t+1} el color rojo. Sea b el número de vértices de $T^{i-4,i}(n)$ los cuales son coloreados de azul por f . Formalmente, $b := |T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(c_t)|$. Note que el número b_1 de vértices de $T^{i-4,i}(n)$ los cuales son coloreados azules por f_1 es $b + p - q$, donde p denota el número de vértices en $\{(0, i - 4), (0, i - 3), (0, i - 2), (0, i - 1), (0, i)\}$ que son coloreados azules por f , y q denota el número de vértices en $\{(i - 4, i - 4), (i - 3, i - 3), (i - 2, i - 2), (i - 1, i - 1), (i, i)\}$ que son coloreados azules por f . De la proposición 4.6 (iv) y (vi) sabemos, respectivamente, que $p = 1$ and $q = 1$. Por lo tanto $b = b_1$. Pero por la proposición 4.6 (vii) sabemos que el conjunto de vértices de $T^{i-4,i}(n)$ que son coloreados rojos por f , es igual al conjunto de vértices de $T^{i-4,i}(n)$ que son coloreados azules por f_1 . Por esto y del hecho de que $b = b_1$ se deduce que $|T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(c_t)| = |T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(c_{t+1})|$, como se deseaba.

Como $T^{i-4,i}(n)$ tiene $(i-4)+(i-3)+(i-2)+(i-1)+i = 5(i-2)$ vértices, y $|T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(m)| = |T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(m')|$ para cualquier $m, m' \in \mathbb{Z}_5$, entonces $|T^{i-4,i}(n) \cap f^{-1}(m)| = i-2$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}_5$. \square

Sea $n \geq 10$ un número entero y $t := n \pmod{5}$. Dependiendo del valor de t , ahora construiremos conjuntos de empaquetamiento $A_{n,t}$ de $T(n)$ tales que $|A_{n,t}| = a(n)$.

Considere los siguientes subconjuntos de vértices de $T(n)$ (ver figura 4.3).

- Para $n \equiv 1 \pmod{5}$, definimos

$$A_{n,1} = (T(n) \cap f^{-1}(4)) \cup \{(1, 1), (n, n)\}.$$

- Para $n \equiv 2 \pmod{5}$, definimos

$$A_{n,2} = ((T(n) \cap f^{-1}(0)) \setminus \{(1, 2), (2, 4)\}) \cup \{(1, 1), (1, 4), (3, 3)\}.$$

- Para $n \equiv 3 \pmod{5}$, definimos

$$A_{n,3} = ((T(n) \cap f^{-1}(0)) \setminus \{(1, 2), (2, 4)\}) \cup \{(1, 1), (1, 4), (3, 3), (n, n)\}.$$

- Para $n \equiv 4 \pmod{5}$, definimos

$$A_{n,4} = ((T(n) \cap f^{-1}(0)) \setminus \{(1, 2), (2, 4), (n-2, n), (n-3, n-2)\}) \cup \{(1, 1), (1, 4), (3, 3), (n-3, n), (n-2, n-2), (n, n)\}.$$

- Para $n \equiv 0 \pmod{5}$, definimos

$$A_{n,0} = ((T(n) \cap f^{-1}(1)) \setminus \{(1, 5), (2, 2), (2, 7), (3, 4), (4, 6)\}) \cup \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (3, 3), (3, 6), (5, 5), (n, n)\}.$$

Lema 4.8. *El conjunto $A_{n,t}$ es un conjunto de empaquetamiento para $T(n)$ siempre que $t = n \pmod{5}$.*

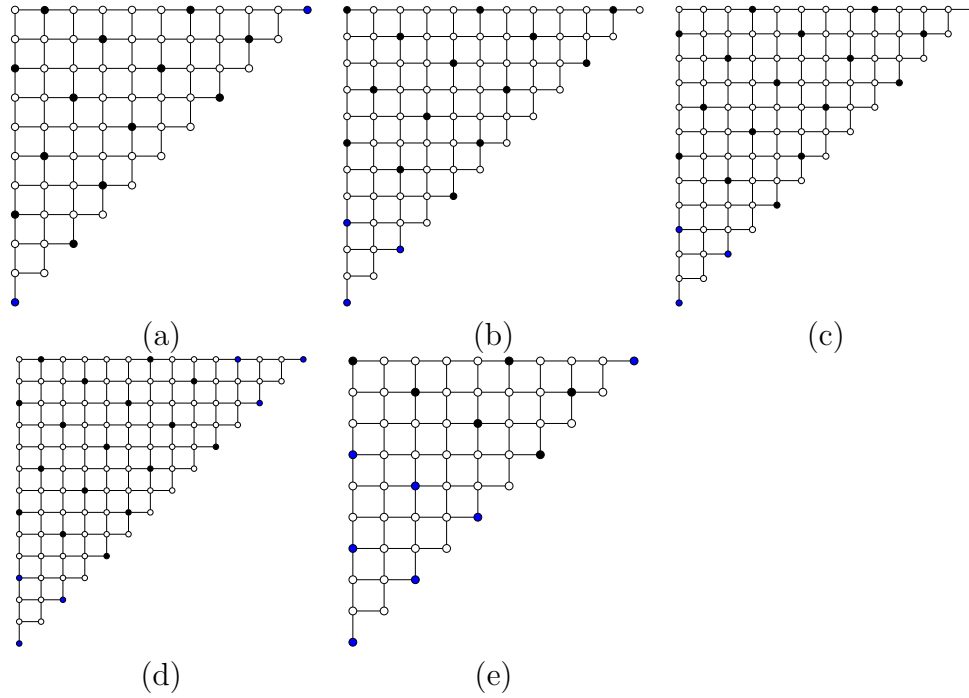


Figura 4.3: El conjunto de empaquetamiento $A_{n,t}$, donde $n = 11, 12, 13, 14, 10$, es exhibido en (a), (b), (c), (d), (e), respectivamente.

Demostración. Demostraremos únicamente que $A_{n,4}$ es un conjunto de empaquetamiento de $T(n)$. El resto de los casos se pueden demostrar de manera similar. Sean $B_\ell := \{(1, 1), (1, 4), (3, 3)\}$, $B_u := \{(n-3, n), (n-2, n-2), (n, n)\}$ y

$$A_4 := (T(n) \cap f^{-1}(0)) \setminus \{(1, 2), (2, 4), (n-2, n), (n-3, n-2)\}.$$

Entonces $\{B_\ell, B_u, A_4\}$ es una partición de $A_{n,4}$. Por la proposición 4.6, (ii)-(iii), tenemos que $T(n) \cap f^{-1}(0)$ es un conjunto de empaquetamiento de $T(n)$. Claramente, B_ℓ, B_u y A_4 son conjuntos de empaquetamiento de $T(n)$. Por otro lado, note que $C := \{(1, 6), (2, 5), (3, 5), (4, 4)\}$ satisface las siguientes condiciones:

- C es disjunto de $B_\ell \cup A_4$,
- C es un vértice de corte de $T(n)$ el cual separa B_ℓ de A_4 , y

- la distancia en $T(n)$ de cualquier vértice de B_ℓ a cualquier vértice de C es al menos 2.

De estas tres condiciones, se sigue que la distancia en $T(n)$ de cualquier vértice de B_ℓ a cualquier vértice de A_4 es al menos 3, entonces $A_4 \cup B_\ell$ es un conjunto de empaquetamiento de $T(n)$.

Como $D := \{(n-5, n), (n-4, n-1), (n-4, n-2), (n-3, n-3)\}$ satisface propiedades análogas a C , pero con respecto a B_u y a $A_4 \cup B_\ell$. De manera similar podemos concluir que $A_{n,4} = B_\ell \cup A_4 \cup B_u$ es un conjunto de empaquetamiento de $T(n)$. \square

Sea $j \in \{5, \dots, n\}$. De las definiciones de $A_{n,t}$, $T^{j-4,j}(n)$ y la proposición 4.6, se sigue que:

$$\begin{aligned} |A_{n,1}| &= 2 + \sum_{i=1}^{(n-1)/5} |T^{(5i+1)-4,5i+1}(n) \cap f^{-1}(4)| = 2 + \sum_{i=1}^{(n-1)/5} (5i-1) \\ &= \frac{1}{10}(n^2 + n + 18). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{n,2}| &= 2 + \sum_{i=1}^{(n-2)/5} |T^{(5i+2)-4,5i+2}(n) \cap f^{-1}(0)| = 2 + \sum_{i=1}^{(n-2)/5} 5i \\ &= \frac{1}{10}(n^2 + n + 14). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{n,3}| &= 3 + \sum_{i=1}^{(n-3)/5} |T^{(5i+3)-4,5i+3}(n) \cap f^{-1}(0)| = 3 + \sum_{i=1}^{(n-3)/5} (5i+1) \\ &= \frac{1}{10}(n^2 + n + 18). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{n,4}| &= 4 + \sum_{i=1}^{(n-4)/5} |T^{(5i+4)-4,5i+4}(n) \cap f^{-1}(0)| = 4 + \sum_{i=1}^{(n-4)/5} (5i+2) \\ &= \frac{1}{10}(n^2 + n + 20). \end{aligned}$$

$$|A_{n,0}| = 5 + \sum_{i=2}^{n/5} |T^{5i-4,5i}(n) \cap f^{-1}(1)| = 5 + \sum_{i=2}^{n/5} (5i-2) = \frac{1}{10}(n^2 + n + 20).$$

4.3. Cota superior para $\rho(T(n))$

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar el lema 4.5. Es decir, demostrar que $\rho(T(n))$ está acotado superiormente por $a(n)$. De esto y del lema 4.4, se sigue que la función generadora de $A085680(n+1)$ propuesta por Rob Pratt [59] es correcta.

En esta subsección, recordaremos algunos resultados conocidos sobre el número de empaquetamiento en gráficas y demostraremos varios lemas. Tales resultados se usarán en la demostración del lema 4.5.

Sean p y q números enteros positivos, emplearemos $G_{p,q}$ para denotar la *gráfica de malla* de tamaño $p \times q$, con $p \leq q$. Los valores exactos de $\rho(G_{p,q})$ fueron determinados por D. C. Fisher [16] y son como sigue:

$$\rho(G_{p,q}) = \begin{cases} \lceil \frac{(p+1)q}{6} \rceil & \text{si } p \in \{1, 2, 3\}, \\ \lceil \frac{6q}{7} \rceil & \text{si } p = 4 \text{ y } q \not\equiv 1 \pmod{7}, \\ \lceil \frac{6q}{7} \rceil + 1 & \text{si } p = 4 \text{ y } q \equiv 1 \pmod{7}, \\ 10 & \text{si } (p, q) = (7, 7), \\ \lceil \frac{pq+2}{5} \rceil & \text{si } p \in \{5, 6, 7\} \text{ y } (p, q) \neq (7, 7), \\ 17 & \text{si } (p, q) = (8, 10), \\ \lceil \frac{pq}{5} \rceil & \text{si } p \geq 8 \text{ y } (p, q) \neq (8, 10). \end{cases} \quad (4.2)$$

Como veremos, el resultado $\rho(G_{p,q})$ será usado en muchas de las demostraciones en el resto de la sección.

Una estrategia usada en muchas demostraciones de esta sección es como sigue: particionar en dos o mas subconjuntos el conjunto de vértices de la gráfica G en consideración y obtener cotas superiores para el número de empaquetamiento de G , dando límites superiores para los números de empaquetamiento de las subgráficas inducidas por tales subconjuntos de $V(G)$. Usaremos tal estrategia sin mención explícita. Nuestra siguiente observación se sigue directamente de la definición de número de empaquetamiento de una gráfica y es una de nuestras principales herramientas en esta sección.

Observación 4.9. Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$. Si G_1 y G_2 son subgráficas de G inducidas por V_1 y V_2 , respectivamente, entonces

$$\rho(G) \leq \rho(G_1) + \rho(G_2).$$

El siguiente corolario es una consecuencia de la observación 4.9 y del hecho de que $\{V(T(n-5)), V(T^5(n))\}$ y $\{V(T(n-10)), V(T^{10}(n))\}$ son particiones de $V(T(n))$ para $n > 10$.

Corolario 4.10. Sea $n > 10$ un entero. Entonces $\rho(T(n)) \leq \rho(T(n-5)) + \rho(T^5(n))$ y $\rho(T(n)) \leq \rho(T(n-10)) + \rho(T^{10}(n))$.

Lema 4.11. Sean m y n enteros. Entonces,

- (i) $\rho(T^5(m)) = m - 1$, para $m \geq 5$;
- (ii) $\rho(T^{10}(n)) = 2n - 8$, para $n \geq 12$.

Demostración. Sean m y n como se afirma en el lema. **(A)** Primero demostraremos que $\rho(T^5(m)) \geq m - 1$ y que $\rho(T^{10}(n)) \geq 2n - 8$. Sea $r \in \{m, n\}$. Si $r = m$ hacemos $\ell = 5$, y si $r = n$ entonces hacemos $\ell = 10$. Es suficiente exhibir un conjunto de empaquetamiento para $T^\ell(r)$ con el tamaño requerido. Considere la función $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ definida por $f(x, y) = (x + 2y) \pmod{5}$. Sea $c = (3r - 4) \pmod{5}$. Sean $S_r := T^\ell(r) \cap f^{-1}(c)$. De la proposición 4.6 (iii), sabemos que S_r es un conjunto de empaquetamiento de $T^\ell(r)$. Además, como $(r, r) \in T^\ell(r) \setminus f^{-1}(c)$ y ningún elemento en $\{(r-1, r), (r-2, r), (r-1, r-1)\}$ pertenece a S_r , entonces $S_r \cup \{(r, r)\}$ es un conjunto de empaquetamiento para $T^\ell(r)$. Como $S_m = T^5(m) \cap f^{-1}(c)$ y $S_n = (T^5(n) \cap f^{-1}(c)) \cup (T_{1, n-5}^{n-9, n-5}(n) \cap f^{-1}(c))$, por la proposición 4.7 tenemos que $|S_m| = m - 2$ y $|S_n| = (n - 2) + ((n - 5) - 2)$. Entonces $S_r \cup \{(r, r)\}$ es el conjunto de empaquetamiento requerido.

(B) Ahora demostraremos que $\rho(T^5(m)) = m - 1$. En vista de (A), es suficiente demostrar que $\rho(T^5(m)) \leq m - 1$. Procederemos por inducción sobre m . Los casos $m = 5, 6, 7$ son fáciles de verificar. Ahora supongamos que la afirmación se cumple para cualquier $k \in \{5, 6, \dots, m-1\}$ y mostraremos que se cumple para $m \geq 8$. Como $T_{i, m}^5(m) \simeq T^5(m-i+1)$ para $i = 2, 3, \dots, m-4$, por inducción tenemos que $\rho(T_{i, m}^5(m)) = m - i$. Sea S un conjunto de empaquetamiento máximo de $T^5(m)$ y sea $S' := S_{2, m}^5(m)$. Como S' es un conjunto de empaquetamiento para $T_{2, m}^5(m)$ y $\rho(T_{2, m}^5(m)) = m - 2$, entonces $|S'| \leq m - 2$. Ya que los conjuntos de vértices $V(T_1^5(m))$ y $V(T_{2, m}^5(m))$ forman una partición del conjunto de vértices de $T^5(m)$ y $T_1^5(m) \simeq P_5$, entonces

$|S| \leq |S'| + \rho(P_5) = |S'| + 2$. Entonces podemos asumir que $|S'| = m - 2$ ya que en otro caso terminaríamos. Para $j \in \{1, 2, 3\}$, sea s_j el número de vértices en $S_j^5(m)$. Claramente, $s_j \in \{0, 1, 2\}$.

1. Si $s_2 = 0$, entonces la hipótesis $|S'| = m - 2$ implica que $|S_{3,m}^5(m)| = m - 2$, contradiciendo que $\rho(T_{3,m}^5(m)) = m - 3$.
2. Si $s_2 = 1$ tenemos dos casos.
 - 2.1 Si $s_3 \geq 1$, es fácil ver que s_1 debe ser a lo más 1, y por lo tanto $|S| = s_1 + |S'| \leq m - 1$.
 - 2.2 Si $s_3 = 0$, entonces $|S_{4,m}^5(m)| = |S'| - s_2 - s_3 = m - 3$, contradiciendo que $\rho(T_{4,m}^5(m)) = m - 4$.
3. Si $s_2 = 2$, entonces $s_1 \leq 1$, y por lo tanto $|S| = s_1 + |S'| \leq m - 1$.

(C) Ahora demostraremos que $\rho(T^{10}(n)) = 2n - 8$. Otra vez, en vista de (A), es suficiente demostrar que $\rho(T^{10}(n)) \leq 2n - 8$. Verificamos por computadora que $\rho(T^{10}(n)) \leq 2n - 8$ se cumple para $n \in \{12, \dots, 18\}$. Entonces asumiremos que $n \geq 19$.

Sea S un conjunto de empaquetamiento máximo de $T^{10}(n)$. Como

$$T_{n-9,n}^{10} \simeq T(10),$$

entonces $|S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq \rho(T(10)) = 13$ por A085680 en [59]. Similarmente, como $T_{1,n-10}^{10} \simeq G_{10,n-10}$, entonces $|S_{1,n-10}^{10}(n)| \leq 2(n - 10)$ por ecuación (4.2). Note que si $|S_{1,n-10}^{10}(n)| \leq 2(n - 10) - 1$ y $|S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 13 - 1$, entonces la observación 4.9 implica la desigualdad requerida, esto es

$$|S| = |S_{1,n-10}^{10}(n)| + |S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 2(n - 10) + 13 - 1 = 2n - 8.$$

Ahora, si $|S_{1,n-10}^{10}(n)| \leq 2(n - 10) - 1$ y $|S_{n-9,n}^{10}(n)| = 13$, entonces

$$|S| = |S_{1,n-10}^{10}(n)| + |S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 2(n - 10) - 1 + 13 = 2n - 8.$$

Si $|S_{1,n-10}^{10}(n)| = 2(n - 10)$ y $|S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 13 - 1$, entonces

$$|S| = |S_{1,n-10}^{10}(n)| + |S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 2(n - 10) + 13 - 1 = 2n - 8.$$

Por lo tanto, podemos asumir que $|S_{1,n-10}^{10}(n)| \geq 2(n - 10)$ y $|S_{n-9,n}^{10}(n)| \geq 13$, esto es, $|S_{1,n-10}^{10}(n)| = 2(n - 10)$ y $|S_{n-9,n}^{10}(n)| = 13$.

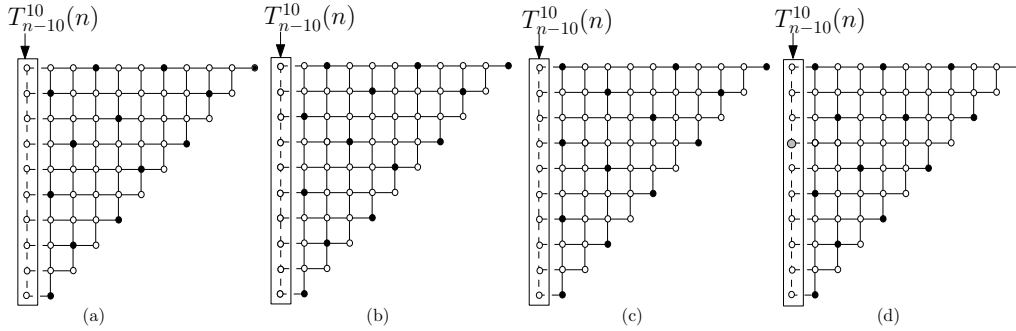


Figura 4.4: Únicos (salvo isomorfismo) conjuntos de empaquetamiento de T_{10} con 13 vértices.

Por computadora verificamos que los cuatro conjuntos de empaquetamiento de $T_{n-9,n}^{10}$ mostrados en la figura 4.4 son los únicos (salvo isomorfismo) de tamaño máximo, a saber 13.

Observe que los conjuntos de empaquetamiento mostrados en las figuras 4.4 (a), (b) and (c) no permiten vértices de S en $T_{n-10}^{10}(n)$ (i.e., en la línea de puntos verticales). Similarmente, note que el conjunto de empaquetamiento en la figura 4.4 (d) permite a lo más 1 vértice de S en $T_{n-10}^{10}(n)$, a saber, el vértice gris cuyas coordenadas son $(n-10, n-3)$. Por lo tanto tenemos que $|S_{n-10}^{10}(n)| \leq 1$.

Primero, supongamos que $n = 19$. De nuestra suposición, sabemos que $|S_{1,9}^{10}(19)| = 18$. Si $|S_9^{10}(19)| = 0$, entonces $|S_{1,8}^{10}(19)| = 18$ el cual contradice que $\rho(T_{1,8}^{10}(19)) = 17$ (ecuación (4.2)). Ahora, supongamos que $|S_9^{10}(19)| = 1$. Entonces $|S_{1,8}^{10}(19)| = 17$ y S es como en la figura 4.4 (d). La última afirmación implica que $|S_8^{10}(19)| \leq 2$. Por otro lado, también verificamos por computadora que $|S_{1,8}^{10}(19)| = 17$ implica $|S_8^{10}(19)| \geq 3$, una contradicción.

Ahora supongamos que $n \geq 20$. Entonces $|S_{1,n-10}^{10}(n)| = 2(n-10)$. Como $|S_{n-10}^{10}(n)| \leq 1$, entonces $|S_{1,n-11}^{10}(n)| \geq 2(n-10) - 1$, lo cual contradice que $\rho(T_{1,n-11}^{10}(n)) = 2(n-10) - 2$ cuando $n-11 \geq 9$ (ecuación (4.2)). \square

El valor $\rho(T^{10}(11)) = 15$ fue determinado por computadora y no satisface el lema 4.11 (ii).

Corolario 4.12. *Sea $n \geq 5$ un entero y sea S un conjunto de empaquetamiento de $T^5(n)$. Si $|S_{1,i}^5(n)| \leq i-1$ para algún $i \in \{1, \dots, n-4\}$, entonces $|S| < n-1$.*

Demostración. Note que $|S| = |S_{1,i}^5(n)| + |S_{i+1,n}^5(n)|$ y que $T_{i+1,n}^5(n) \simeq T^5(n-i)$. Entonces, del lema 4.11 (i) tenemos que $|S_{i+1,n}^5(n)| \leq (n-i) - 1$, y así $|S| \leq i - 1 + (n-i) - 1 = n - 2 < n - 1$. \square

Corolario 4.13. *Sean $n \geq 27$ un entero y S un conjunto de empaquetamiento de $T^{10}(n)$. Sea $i \in \{0, 1, 2\}$ y $j+i \in \{12, \dots, n-12\}$. Si $|S_{j,j+i}^{10}(n)| \leq 2i+1$, entonces $|S| < 2n - 8$.*

Demostración. Claramente, $|S| = |S_{1,j-1}^{10}(n)| + |S_{j,j+i}^{10}(n)| + |S_{j+i+1,n}^{10}(n)|$. De la ecuación (4.2) sabemos que $|S_{1,j-1}^{10}(n)| \leq 2(j-1)$, y por el lema 4.11 (ii) tenemos que $|S_{j+i+1,n}^{10}(n)| \leq 2(n-(j+i)) - 8$. Por lo tanto, $|S| \leq 2(j-1) + (2i+1) + 2(n-(j+i)) - 8 = 2n - 9 < 2n - 8$. \square

La demostración de la siguiente proposición es un ejercicio de rutina.

Proposición 4.14. *Sea $n \geq 27$, $j \in \{1, \dots, n-12\}$ y $k \in \{1, 2\}$. Si S es un conjunto de empaquetamiento de $T^{5k}(n)$ y dos de $|S_j^{5k}(n)|, |S_{j+1}^{5k}(n)|, |S_{j+2}^{5k}(n)|$ son iguales a k , entonces el otro es a lo más k .*

Lema 4.15. *Sea $n \geq 27$ un entero. Sea S un máximo conjunto de empaquetamiento de $T^{10}(n)$. Entonces $12 \leq |S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 13$.*

Demostración. Del lema 4.11 (ii) sabemos que $|S| = 2n - 8$. Como

$$T_{n-9,n}^{10}(n) \simeq T(10)$$

y $\rho(T(10)) = 13$, por A085680 en [59], entonces $|S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 13$. Supongamos ahora que $|S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 11$. Como $|S| = |S_{1,n-10}^{10}(n)| + |S_{n-9,n}^{10}(n)|$, por Ecuación (4.2) tenemos que $|S| \leq 2(n-10) + 11 < 2n - 8$, una contradicción. \square

Proposición 4.16. *Sea $n \geq 27$ y $j \in \{10, \dots, n-12\}$. Si S es un conjunto de empaquetamiento máximo de $T^{10}(n)$, entonces $|S_j^{10}(n)| = 2$, $|S_j^5(n)| = 1$ y $|S_j^{n-9,n-5}(n)| = 1$.*

Demostración. Sean j, n y S como afirma la proposición. Entonces $|S| = 2n - 8$ por el lema 4.11 (ii). Note que $|S_j^5(n)| \in \{0, 1, 2\}$ y que $|S_j^{10}(n)| \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Procederemos, demostrando cada una de las conclusiones de la proposición separadamente.

afirmación A $|S_j^{10}(n)| = 2$.

Demostración de afirmación A. Dividiremos la demostración de esta afirmación en dos casos, dependiendo de los valores de j .

- 1) $j \in \{12, 13, \dots, n-14\}$. En cada uno de estos subcasos llegaremos a una contradicción por asumir que $|S_j^{10}(n)| \neq 2$.
- 1.1) $|S_j^{10}(n)| \leq 1$. Entonces el corolario 4.13 (con $i = 0$) implica $|S| < 2n - 8 = \rho(T^{10}(n))$, una contradicción.
- 1.2) $|S_j^{10}(n)| = 3$. Analizaremos tres subcasos separadamente.
- 1.2.1) Ninguno de (j, n) o $(j, n-9)$ pertenece a S . En este caso, es fácil ver que $|S_{j-1}^{10}(n) \cup S_{j+1}^{10}(n)| \leq 1$. Por lo tanto, $|S_{j-1, j+1}^{10}(n)| \leq 4$. Por corolario 4.13, con $i = 2$, tenemos que $|S| < 2n - 8$, una contradicción.
- 1.2.2) Exactamente uno de (j, n) o $(j, n-9)$ pertenece a S . Otra vez, no es difícil ver que las suposiciones actuales sobre S implican que $|S_{j-1}^{10}(n) \cup S_{j+1}^{10}(n)| \leq 2$, y por lo tanto $|S_{j-1, j+1}^{10}(n)| \leq 5$. Por el corolario 4.13, con $i = 2$, tenemos que $|S| < 2n - 8$, una contradicción.
- 1.2.3) Ambos vértices (j, n) y $(j, n-9)$ están en S . Similarmente, las suposiciones actuales sobre S implican $|S_{j-1}^{10}(n) \cup S_{j+1}^{10}(n)| \leq 3$. Si $|S_{j-1}^{10}(n) \cup S_{j+1}^{10}(n)| \leq 2$, entonces $|S_{j-1, j+1}^{10}(n)| \leq 5$ y procedemos como en el subcaso 1.2.2. Entonces supongamos que $|S_{j-1}^{10}(n) \cup S_{j+1}^{10}(n)| = 3$. De $(j, n), (j, n-9) \in S_j^{10}(n)$ se sigue que $S_{j-1}^{10}(n) \subset T_{j-1}^{n-7, n-2}(n)$ y que $S_{j+1}^{10}(n) \subset T_{j+1}^{n-7, n-2}(n)$. Como $T_{j-1}^{n-7, n-2}(n) \simeq T_{j+1}^{n-7, n-2}(n) \simeq P_6$ y $\rho(P_6) = 2$, entonces tenemos que exactamente uno de $|S_{j-1}^{10}(n)|$ o $|S_{j+1}^{10}(n)|$ es igual a 2. Solo analizaremos el caso $|S_{j-1}^{10}(n)| = 2$, ya que los otros casos son totalmente análogos. Si $|S_{j-1}^{10}(n)| = 2$, entonces $|S_{j+1}^{10}(n)| = 1$ y solo tenemos cuatro posibles configuraciones para $S_{j-1, j+1}^{10}(n)$, ver figura 4.5 (a). Observamos que cualquiera de estas cuatro configuraciones implica $|S_{j-2}^{10}(n)| \leq 1$. La última igualdad y el corolario 4.13 (con $i = 0$) implican $|S| < 2n - 8$, una contradicción.
- 1.3) $|S_j^{10}(n)| = 4$. Entonces $S_j^{10}(n)$ mdebe ser como la mostrada en la figura 4.5 (b). Esto implica que $|S_{j-1}^{10}(n) \cup S_{j+1}^{10}(n)| = 0$, y así $|S_{j-1, j+1}^{10}(n)| = 4$. Por corolario 4.13, con $i = 2$, tenemos $|S| < 2n - 8$, una contradicción.
- 2) $j \in \{10, 11, n-13, n-12\}$. Debemos demostrar que $|S_j^{10}(n)| = 2$.

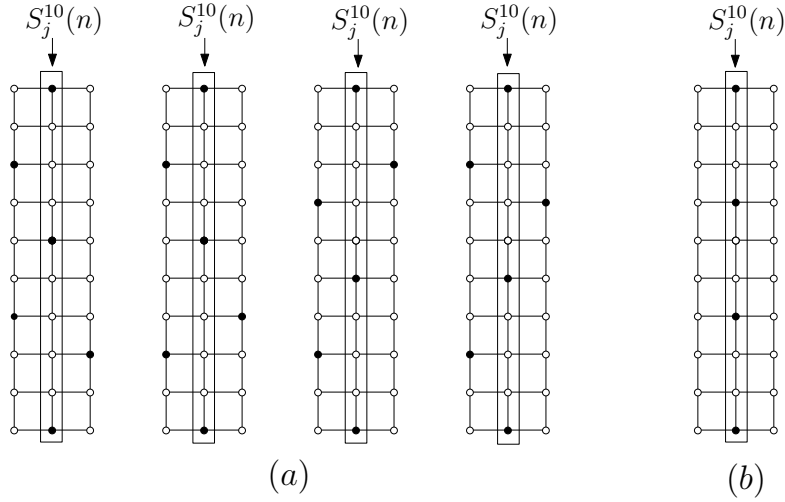


Figura 4.5: (a) Únicas cuatro configuraciones que satisfacen $|S_{j-1}^{10}(n)| = 2$, $|S_j^{10}(n)| = 3$ y $|S_{j+1}^{10}(n)| = 1$. (b) Esta es la única configuración que satisface $|S_j^{10}(n)| = 4$.

- 2.1) $j = 11$. Por caso 1) sabemos que $|S_{12}^{10}(n)| = |S_{13}^{10}(n)| = 2$. Estas igualdades y la proposición 4.14 implican $|S_{11}^{10}(n)| \leq 2$. Por otro lado, del lema 4.11 (ii) y ecuación (4.2) sabemos que $|S_{12,n}^{10}(n)| \leq 2(n-11) - 8$ y $|S_{1,10}^{10}(n)| \leq 20$, respectivamente. Si $|S_{11}^{10}(n)| < 2$, entonces tenemos

$$|S| = |S_{1,10}^{10}(n)| + |S_{11}^{10}(n)| + |S_{12,n}^{10}(n)| < 20 + 2 + 2(n-11) - 8 = 2n - 8,$$

una contradicción. Entonces $|S_{11}^{10}(n)| = 2$.

- 2.2) $j = 10$. Por el caso 1 y el subcaso 2.1 sabemos que $|S_{11}^{10}(n)| = |S_{12}^{10}(n)| = 2$. Estas desigualdades y proposición 4.14 implican $|S_{10}^{10}(n)| \leq 2$. Si $|S_{10}^{10}(n)| < 2$, entonces del lema 4.11 (ii) y ecuación (4.2) se sigue que

$$|S| = |S_{1,9}^{10}(n)| + |S_{10}^{10}(n)| + |S_{11,n}^{10}(n)| < 18 + 2 + 2(n-10) - 8 = 2n - 8,$$

una contradicción. Entonces $|S_{10}^{10}(n)| = 2$.

- 2.3) $j = n - 13$. Por el caso 1 sabemos que $|S_{n-15}^{10}(n)| = |S_{n-14}^{10}(n)| = 2$. Estas desigualdades y la proposición 4.14 implican $|S_{n-13}^{10}(n)| \leq 2$.

Si $|S_{n-13}^{10}(n)| < 2$, entonces del lema 4.11 (ii) y la ecuación (4.2) se sigue que

$$\begin{aligned} |S| &= |S_{1,n-14}^{10}(n)| + |S_{n-13}^{10}(n)| + |S_{n-12,n}^{10}(n)| < 2(n-14) + 2 + 2(13) - 8 \\ &= 2n - 8, \end{aligned}$$

una contradicción. Entonces $|S_{n-13}^{10}(n)| = 2$.

2.4) $j = n - 12$. Por caso 1 y subcaso 2.3 sabemos que $|S_{n-14}^{10}(n)| = |S_{n-13}^{10}(n)| = 2$. Estas desigualdades y la proposición 4.14 implican $|S_{n-12}^{10}(n)| \leq 2$. Si $|S_{n-12}^{10}(n)| < 2$, entonces del lema 4.11 (ii) y la ecuación (4.2) se sigue que

$$\begin{aligned} |S| &= |S_{1,n-13}^{10}(n)| + |S_{n-12}^{10}(n)| + |S_{n-11,n}^{10}(n)| < 2(n-13) + 2 + 2(12) - 8 \\ &= 2n - 8, \end{aligned}$$

una contradicción. Entonces $|S_{n-12}^{10}(n)| = 2$. \triangle

afirmación B $|S_j^5(n)| = 1$ y $|S_j^{n-9,n-5}(n)| = 1$.

Demostración de afirmación B. Analizaremos tres casos por separado, dependiendo del valor de j .

- 1) $j \in \{12, \dots, n - 14\}$. Sea $G_{10,5}$ la gráfica malla de 10×5 con conjunto de vértices $\{\{1, \dots, 10\} \times \{1, \dots, 5\}\}$. La afirmación de este caso se verificó de la siguiente manera: encontramos por computadora todos los conjuntos de empaquetamiento de $G_{10,5}$ que tienen exactamente dos vértices de empaque en cada una de sus 5 columnas, y luego verificamos que en todos estos conjuntos (a saber, 54), la coordenada y de exactamente uno de los dos vértices de empaquetamiento en la columna central de $G_{10,5}$ está en $\{1, \dots, 5\}$ y la y -coordenada del otro está en $\{6, \dots, 10\}$. Esto implica el resultado deseado para $j \in \{12, \dots, n - 14\}$ porque de afirmación A sabemos que S tiene exactamente dos vertices de empaque en cada columna de $T_{10,n-12}^{10}(n)$.
- 2) $j \in \{11, n - 13\}$. Si $j = 11$ sea $r := 1$, y si $j = n - 13$ sea $r := -1$. Del caso 1 sabemos que $|S_{j+r}^5(n)| = |S_{j+2r}^5(n)| = 1$ y $|S_{j+r}^{n-9,n-5}(n)| = |S_{j+2r}^{n-9,n-5}(n)| = 1$. Estas igualdades y la proposición 4.14 implican $|S_j^5(n)| \leq 1$ y $|S_j^{n-9,n-5}(n)| \leq 1$, respectivamente. Las últimas desigualdades y la afirmación A implican $|S_j^5(n)| = |S_j^{n-9,n-5}(n)| = 1$, como se deseaba.

3) $j \in \{10, n-12\}$. Similarmente, si $j = 10$ sea $r := 1$, y si $j = n-12$ sea $r := -1$. De los casos 1 y 2 sabemos que $|S_{j+r}^5(n)| = |S_{j+2r}^5(n)| = 1$ y $|S_{j+r}^{n-9, n-5}(n)| = |S_{j+2r}^{n-9, n-5}(n)| = 1$. Esto y la proposición 4.14 implican que $|S_j^5(n)| \leq 1$ y $|S_j^{n-9, n-5}(n)| \leq 1$, respectivamente. Las últimas desigualdades y la afirmación A implican $|S_j^5(n)| = 1$ y $|S_j^{n-9, n-5}(n)| = 1$, como se deseaba. \triangle

□

Lema 4.17. *Sea $n \geq 27$ un entero y sea S un conjunto de empaquetamiento de $T^{10}(n)$ tal que $|S| = 2n - 8$ y $|S^5(n)| = n - 1$. Entonces*

(i) $|S_{1,9}^5(n)| = 9$.

(ii) $|S_i^5(n)| = 1$, para $i \in \{10, \dots, n-4\}$.

(iii) $|S_{1,i}^5(n)| = i$, para $i \in \{9, \dots, n-4\}$.

Demostración. Demostraremos cada una de estas tres conclusiones separadamente.

Primero demostraremos (i). De la ecuación (4.2) sabemos que $\rho(T_{1,i}^5(n)) = i + 1$, para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, n-4\}$. Entonces $|S_{1,9}^5(n)| \leq 10$. Si $|S_{1,9}^5(n)| \leq 8$, entonces corolario 4.12 implica $|S^5(n)| < n - 1$, una contradicción. Por lo tanto $9 \leq |S_{1,9}^5(n)| \leq 10$. Llegaremos a una contradicción por asumir que $|S_{1,9}^5(n)| = 10$.

De la proposición 4.16 sabemos que $|S_{10}^5(n)| = |S_{11}^5(n)| = 1$. Estas desigualdades y la proposición 4.14 implican $|S_9^5(n)| \leq 1$. Por otro lado, como $10 = |S_{1,9}^5(n)| = |S_{1,8}^5(n)| + |S_9^5(n)|$ y $|S_{1,8}^5(n)| \leq 9$ por la ecuación (4.2), entonces tenemos que $|S_{1,8}^5(n)| = 9$ y $|S_9^5(n)| = 1$.

Note que, aplicando repetidas veces el razonamiento del párrafo anterior podemos concluir que $|S_j^5(n)| = 1$ para $j = 8, 7, \dots, 1$, y así $\sum_{j=1}^9 |S_j^5(n)| = 9$. Como $|S_{1,9}^5(n)| = \sum_{j=1}^9 |S_j^5(n)|$, entonces $10 = 9$, una contradicción.

Ahora demostraremos (ii). En vista de proposición 4.16, solo necesitamos demostrar que $|S_i^5(n)| = 1$ para cada $i \in \{n-11, n-10, \dots, n-4\}$. De la proposición 4.16 sabemos que $|S_{10, n-12}^5(n)| = \sum_{j=10}^{n-12} |S_j^5(n)| = n - 21$. Esta desigualdad y el lema 4.17 (i) implican que

$$|S_{1, n-12}^5(n)| = |S_{1,9}^5(n)| + |S_{10, n-12}^5(n)| = 9 + (n - 21) = n - 12.$$

De la proposición 4.16 $|S_{n-13}^5(n)| = |S_{n-12}^5(n)| = 1$, entonces $|S_{n-11}^5(n)| \leq 1$ por la proposición 4.14. Si $|S_{n-11}^5(n)| = 0$, entonces el lema 4.17 (i) y el lema 4.11 (i) implican $|S^5(n)| = |S_{1,n-12}^5(n)| + |S_{n-11}^5(n)| + |S_{n-10,n}^5(n)| \leq (n-12) + 0 + 10 = n-2$, lo cual contradice la hipótesis de que $|S^5(n)| = n-1$. Por lo tanto $|S_{n-11}^5(n)| = 1$. Así, tenemos que $|S_{n-12}^5(n)| = |S_{n-11}^5(n)| = 1$, y por la proposición 4.14 tenemos que $|S_{n-10}^5(n)| \leq 1$. Como antes, por la aplicación repetida del razonamiento de este párrafo podemos deducir que $|S_j^5(n)| = 1$ for $j = n-10, n-9, \dots, n-4$, como se requería.

Finalmente, notamos que la afirmación (iii) se sigue directamente de (i) y (ii). \square

4.3.1. Demostración del lema 4.5

Procederemos por inducción sobre n . Como

$$a(n) = \rho(T(n)) = A085680(n+1)$$

para cada $n \in \{1, \dots, 49\}$, podemos asumir que $n \geq 50$ y que la afirmación del lema 4.5 se cumple para cada $k < n$. Por la recursión dada en la observación 4.2, es suficiente demostrar que $\rho(T(n)) \leq a(n-5) + n - 2$.

Por otro lado, recordemos el siguiente isomorfismo entre elementos de $\{T(i)\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ y las subgráficas de $T(n)$: $T(n-5) \simeq T_{1,n-5}^{1,n-5}(n)$, $T(n-10) \simeq T_{1,n-10}^{1,n-10}(n)$, $T(10) \simeq T_{n-9,n}^{10}(n)$ y $T(5) \simeq T_{n-4,n}^5(n)$. En algunos lugares de esta demostración, por brevedad de notación, para $i < n$ usaremos $T(i)$ para denotar su correspondiente T' gráfica isomorfa.

Sea S un conjunto de empaquetamiento máximo de $T(n)$. Entonces $\rho(T(n)) = |S|$. Recordemos que $S^5(n) = T^5(n) \cap S$ y que $S^{10}(n) = T^{10}(n) \cap S$. Si $|T(n-10) \cap S| \leq a(n-10) - 1$ o $|S^{10}(n)| \leq (2n-8) - 1$, entonces la observación 4.2 implica la desigualdad requerida:

$$|S| = |T(n-10) \cap S| + |S^{10}(n)| \leq a(n-10) + (2n-8) - 1 = a(n-5) + n - 2.$$

Similarmente, si $|T(n-5) \cap S| \leq a(n-5) - 1$ o $|S^5(n)| \leq (n-1) - 1$ obtenemos

$$|S| \leq a(n-5) + (n-1) - 1 = a(n-5) + n - 2.$$

Entonces podemos asumir que $|T(n-5) \cap S| \geq a(n-5)$, $|T(n-10) \cap S| \geq a(n-10)$, $|S^5(n)| \geq n-1$ y $|S^{10}(n)| \geq 2n-8$. Además, como $S^5(n)$ y $S^{10}(n)$ son conjuntos de empaquetamiento de $T^5(n)$ y $T^{10}(n)$ respectivamente, entonces del lema 4.11 tenemos que

$$|S^5(n)| = n - 1 \text{ and } |S^{10}(n)| = 2n - 8. \quad (4.3)$$

En otras palabras, $S^5(n)$ y $S^{10}(n)$ deben ser conjuntos de empaquetamiento máximos de $T^5(n)$ and $T^{10}(n)$, respectivamente. Similarmente, como $T(n-5) \cap S$ y $T(n-10) \cap S$ son conjuntos de empaquetamiento de $T(n-5)$ y $T(n-10)$ respectivamente, entonces de la hipótesis de inducción tenemos que

$$|T(n-5) \cap S| = a(n-5) \text{ and } |T(n-10) \cap S| = a(n-10). \quad (4.4)$$

A partir de ahora, derivaremos varias contradicciones de las ecuaciones (4.3) y (4.4).

De la igualdad $|S^{10}(n)| = 2n - 8$ y el lema 4.15 se sigue que $12 \leq |S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 13$. Enseguida demostraremos que $|S_{n-9,n}^{10}(n)| \neq 13$.

Afirmación 1 $|S_{n-9,n}^{10}(n)| \neq 13$.

Demostración de afirmación 1. Buscando una contradicción, supongamos que $|S_{n-9,n}^{10}(n)| = 13$. Como se mencionó en la demostración del lema 4.11, los conjuntos de empaquetamiento de $T_{n-9,n}^{10}(n)$ mostrados en la figura 4.4 son los únicos conjuntos con exactamente 13 vértices.

Además, note que si $S_{n-9,n}^{10}(n)$ es cualquiera de (a), (b) o (c) en la figura 4.4, entonces $|S_{n-10}^5(n)| = 0$, lo cual contradice el lema 4.17 (ii). Por lo tanto asumiremos que $S_{n-9,n}^{10}(n)$ es el conjunto de empaquetamiento mostrado en la figura 4.4 (d).

Ahora considere el conjunto de empaquetamiento Q de $T_{n-13,n-5}^{n-9,n}(n)$ formado por los vértices negros, cafés y azules en la figura 4.6. Note que

$$S_{n-9,n-5}^{10}(n)$$

es precisamente el subconjunto de Q formado por los vértices negros y cafés.

Etiquetaremos los puntos de $Q \cup T_{n-13,n-10}^{n-9,n-5}(n)$ con $p_1, p_2, \dots, p_{20}, q_1, q_2, \dots, q_{12}$ de acuerdo a la figura 4.6. Note que $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{12}\}$.

Del lema 4.17 (ii), sabemos que $|S_{n-12}^5(n)| = |S_{n-11}^5(n)| = |S_{n-10}^5(n)| = 1$. Estas igualdades y las ubicaciones de q_6, q_8 y q_9 implican que la única ubicación disponible para el vértice en $S_{n-10}^5(n)$ es precisamente la ubicación q_{10} , entonces $S_{n-10}^5(n) = \{q_{10}\}$. Similarmente, podemos deducir que

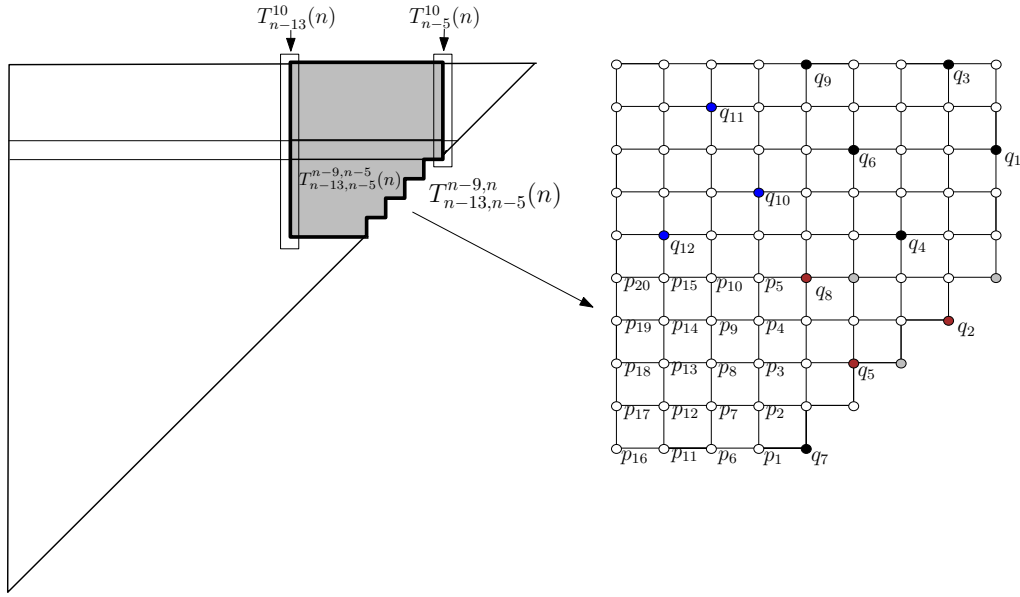


Figura 4.6: Conjunto $T_{n-13, n-5}^{n-9, n}(n)$. El conjunto de vértices negros y cafés es $S_{n-9, n-5}^{10}(n)$.

$S_{n-11}^5(n) = \{q_{11}\}$ y $S_{n-12}^5(n) = \{q_{12}\}$. Como q_5, q_7, q_8 y q_{12} son elementos de S , entonces es fácil verificar que

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_{10}, p_{14}, p_{15}, p_{20}\} \cap S = \emptyset. \quad (4.5)$$

Terminaremos la demostración de la afirmación construyendo un conjunto de empaquetamiento R de $T(n-5)$ de cardinalidad $|T(n-5) \cap S| + 1$. Note que la existencia de tal R contradice la suposición que $\rho(T(n-5)) = |T(n-5) \cap S|$.

Primero consideremos el conjunto $R' := (S \setminus S^5(n)) \cup \{p_{10}\}$ y sea $N := \{u \in S \setminus S^5(n) : d(u, p_{10}) \leq 2\}$. Note que si $N = \emptyset$, entonces R' es el conjunto requerido R .

Demostremos que si $N \neq \emptyset$, entonces siempre podemos modificar ligeramente a R' a fin de conseguir el conjunto de empaquetamiento requerido R . En efecto, si ninguno de p_8 y p_9 pertenece a N , entonces la ecuación 4.5 implica que $N = \{q_8\}$. En este caso simplemente intercambiamos q_2 y q_5 y q_8 por los tres vértices grises en la figura 4.6 y el conjunto resultante es el conjunto R requerido.

Por otro lado, supongamos que al menos uno de p_8 o p_9 pertenece a N .

Como S es un conjunto de empaquetamiento, entonces exactamente uno de p_8 o p_9 pertenece a N . Sea p_r tal vértice. Como $p_r \in S$, entonces ni p_7 ni p_{13} pertenece a R' . De estos hechos y la ecuación 4.5 se sigue que $N = \{p_r, q_8\}$. Como antes, intercambiamos p_r, q_2, q_5 y q_8 por p_3 y los tres vértices grises en figura 4.6. Claramente, el conjunto resultante es el conjunto R requerido.

En vista de la afirmación 1 y del hecho de que $12 \leq |S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 13$, tenemos que $|S_{n-9,n}^{10}(n)| = 12$.

Como $T_{n-4,n}^5(n) \simeq T(5)$ y $\rho(T(5)) = 4$, entonces $|S_{n-4,n}^5(n)| \leq 4$. Si $|S_{n-4,n}^5(n)| < 4$ entonces del lema 4.17 (iii) se sigue que

$$|S^5(n)| = |S_{1,n-5}^5(n)| + |S_{n-4,n}^5(n)| < n - 5 + 4 = n - 1,$$

lo cual contradice $|S^5(n)| = n - 1$. Por lo tanto podemos asumir que

$$|S_{n-4,n}^5(n)| = 4.$$

Del lema 4.17 (ii) sabemos que $|S_{n-9,n-5}^5(n)| = 5$ y por lo tanto

$$|S_{n-9,n-5}^{n-9,n-5}(n)| = |S_{n-9,n}^{10}(n)| - |S_{n-4,n}^5(n)| - |S_{n-9,n-5}^5(n)| = 12 - 4 - 5 = 3.$$

Ahora demostraremos por contradicción que $|S_{n-10}^{10}(n)| = 2$. Tenemos los siguientes casos:

- 1) $|S_{n-10}^{10}(n)| \leq 1$. Del hecho de que $T_{1,n-11}^{10}(n) \simeq G_{10,n-11}$ y la ecuación (4.2) se sigue que

$$|S_{1,n-11}^{10}(n)| \leq \rho(G_{10,n-11}) = 2(n - 11).$$

Esto y $|S_{n-9,n}^{10}(n)| = 12$ implican

$$\begin{aligned} |S^{10}(n)| &= |S_{1,n-11}^{10}(n)| + |S_{n-10}^{10}(n)| + |S_{n-9,n}^{10}(n)| \leq 2(n - 11) + 1 + 12 \\ &= 2n - 9, \end{aligned}$$

una contradicción.

- 2) $|S_{n-10}^{10}(n)| = 3$.

Hemos verificado exhaustivamente por computadora que no existe un conjunto de empaquetamiento de $T_{n-14,n}^{n-9,n}(n)$ satisfaciendo las actuales propiedades de S . Recordemos que tales propiedades son las siguientes:

- (P1) $|S_{n-9,n}^{10}(n)| = 12$,
- (P2) $S_i^5(n) = 1$ para cada $i \in \{n-14, n-13, \dots, n-5\}$, (por el lema 4.17 (ii))
- (P3) $|S_{n-4,n}^5(n)| = 4$,
- (P4) $|S_{n-9,n-5}^{m-9,n-5}(n)| = 3$,
- (P5) $|S_{n-10}^{m-9,n-5}(n)| = 2$, (porque $|S_{n-10}^{10}(n)| = 3$ y $|S_{n-10}^5| = 1$ por el lema 4.17 (ii)),
- (P6) $|S_i^{m-9,n-5}(n)| = 1$, para cada $i \in \{n-14, n-13, n-12\}$ (por proposición 4.16).

Note que (P2), (P3), (P4) y (P6) son consecuencias de (P1) y se cumplen independientemente si $|S_{n-10}^{10}(n)| = 3$ o no.

- 3) $|S_{n-10}^{10}(n)| = 4$. Del lema 4.17 (ii) sabemos que $|S_{n-10}^5(n)| = 1$, y entonces $|S_{n-10}^{m-9,n-5}(n)| = 3$, lo cual es imposible.

Por lo tanto, tenemos que $|S_{n-10}^{10}(n)| = 2$. Esto y el lema 4.17 (ii) implican que $|S_{n-10}^{m-9,n-5}(n)| = 1$. Entonces $|S_{n-10,n}^{10}(n)| = 14$. Ahora demostraremos que $|S_{n-11}^{m-9,n-5}(n)| = 1$. Por la proposición 4.16 sabemos que

$$|S_{n-13}^{m-9,n-5}(n)| = |S_{n-12}^{m-9,n-5}(n)| = 1.$$

Estas igualdades y la proposición 4.14 implican que $|S_{n-11}^{m-9,n-5}(n)| \leq 1$. Si $|S_{n-11}^{m-9,n-5}(n)| = 0$, entonces el lema 4.17 (ii) implica que $|S_{n-11}^{10}(n)| = |S_{n-11}^5(n)| + |S_{n-11}^{m-9,n-5}(n)| = 1$. De esto y la ecuación (1) tenemos que

$$|S^{10}(n)| = |S_{1,n-12}^{10}(n)| + |S_{n-11}^{10}(n)| + |S_{n-10,n}^{10}(n)| = 2(n-12) + 1 + 14 = 2n-9,$$

lo cual contradice que $|S^{10}(n)| = 2n-8$. Por lo tanto $|S_{n-11}^{m-9,n-5}(n)| = 1$.

Hemos calculado exhaustivamente por computadora que $S_{n-14,n}^{10}(n)$ los cuales satisfacen (P1), (P2), (P3), (P4), (P6) y adicionalmente que

$$|S_{n-11}^{m-9,n-5}(n)| = 1 \text{ y } |S_{n-10}^{m-9,n-5}(n)| = 1.$$

Estas posibilidades restringidas a $S_{n-14,n-5}^{m-9,n-5}(n)$ son exactamente 26 y son mostradas en la figura 4.7.

Los puntos de $S_{n-14, n-5}^{n-9, n-5}(n)$ son coloreados negros en la figura 4.7. Para cada una de estas 26 posibilidades, procedemos similarmente como en la demostración de la afirmación 1 para exhibir un conjunto de empaquetamiento R de $T(n-5)$ con cardinalidad $|T(n-5) \cap S| + 1$. Otra vez, esto contradice $\rho(T(n-5)) = |T(n-5) \cap S|$ y nos permitirá concluir que $|S_{n-9, n}^{10}(n)| \neq 12$, y por lo tanto la demostración del lema 4.5 queda finalizada.

Ahora demostraremos que para cada una de estas 26 posibilidades, tal conjunto de empaquetamiento R existe. En efecto, en cada uno de estos casos elegimos a R como la unión de $S \setminus S^5(n)$ con los vértices rojos, negros y amarillos. En cada caso es fácil verificar que tal conjunto R es el empaquetamiento requerido de $T(n-5)$. \square

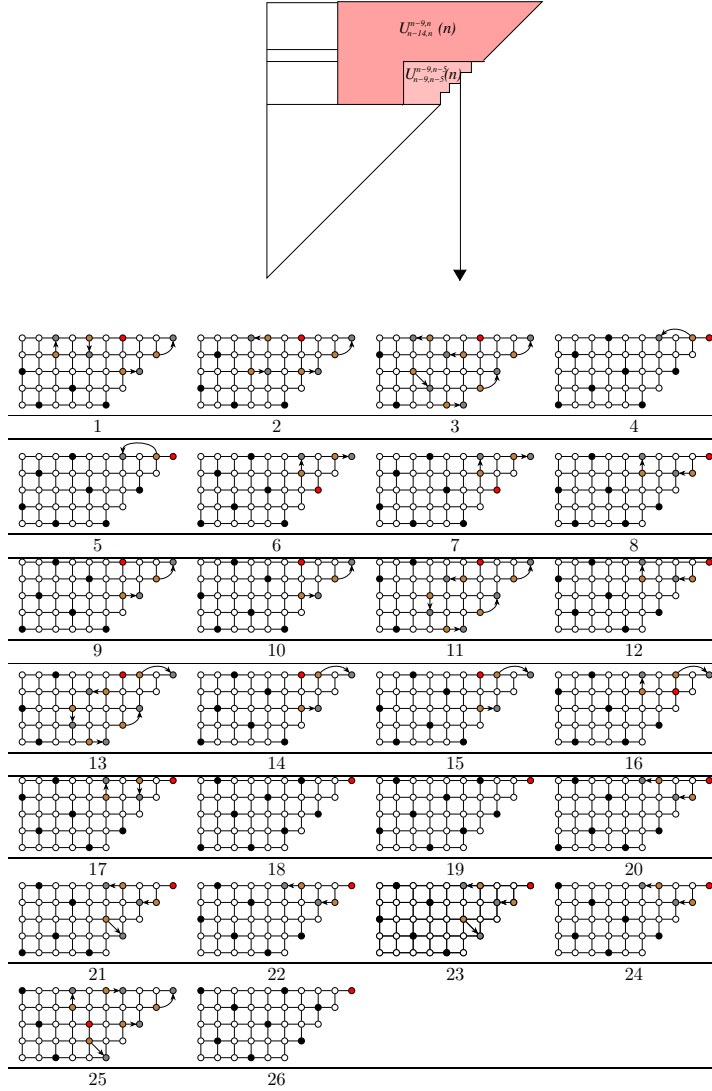


Figura 4.7: En cada uno de estos 26 casos, la unión de los vértices negros y cafés es un conjunto de empaquetamiento de $T_{n-14,n-5}^{m-9,n-5}(n)$ el cual satisface (P1), (P2), (P3), (P4), (P6) y $|S_{n-11}^{m-9,n-5}(n)| = 1$ y $|S_{n-10}^{m-9,n-5}(n)| = 1$. Además, estos 26 conjuntos de empaquetamientos son los únicos que satisfacen estas condiciones. Finalmente, note que en cada caso, el conjunto R que resulta de intercambiar los vértices cafés por los vertices rojos y grises en $S \setminus S^5(n)$ es un conjunto de empaquetamiento de $T(n-5)$ con cardinalidad $|S \setminus S^5(n)| + 1$.

Capítulo 5

Conclusiones y comentarios finales

El objetivo inicial del presente trabajo era estudiar el comportamiento de diversos parámetros combinatorios sobre $F_2(P_n)$. En el transcurso de nuestra investigación nos dimos cuenta de que la determinación de la secuencia generada por $\rho(F_2(P_n))$ correspondía precisamente a un problema abierto en teoría de códigos correctores [60]. En virtud de esa motivación adicional, nos enfocamos al estudio de $\rho(F_2(P_n))$. Enseguida presentamos una breve descripción de los resultados obtenidos en esta tesis y algunos de sus antecedentes.

- Como ya se ha mencionado, $F_2(P_n)$ es una subgráfica propia del producto cartesiano $P_n \square P_m$ de caminos P_n y P_m . Sin embargo, debido a la mayor complejidad estructural que presenta $F_2(P_n)$ con respecto de $P_n \square P_m$, se tiene que la determinación de casi cualquier parámetro combinatorio es más complicado para $F_2(P_n)$ que para $P_n \square P_m$. Este es precisamente el caso del número de dominación: el problema de determinar $\gamma(P_n \square P_m)$ fue propuesto por Jacobson y Kinch [41] en 1984, y fue resuelto en 2011 por Daniel Gonçalves y otros [31]. A pesar de nuestro esfuerzo durante algunos meses, y de haber asimilado tanto las técnicas como las ideas empleadas por [19, 31, 41] en la determinación de $\gamma(P_n \square P_m)$, no fuimos capaces de determinar el comportamiento exacto de $\gamma(F_2(P_n))$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Sin embargo, si obtuvimos algunos avances no triviales.

Por una parte, pudimos determinar por computadora los primeros 14

valores exactos de $\gamma(F_2(P_n))$. Ver Tabla 2. Puesto que nuestros algoritmos son bastante limitados en términos de eficiencia computacional, decidimos no incluirlos en este trabajo. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ logramos construir un conjunto dominante D_n para $F_2(P_n)$ con cardinalidad $b(n)$. Dichos conjuntos dominantes D_n establecen una cota superior asintótica para $\gamma(F_2(P_n))$.

- Motivados por nuestra modesta aportación para determinar de $\gamma(F_2(P_n))$, y en vista de que la evidencia encontrada en la literatura respecto a la determinación de $\rho(P_n \square P_m)$ fue significativamente más fácil que la determinación de $\gamma(P_n \square P_m)$, decidimos enfocarnos al estudio de $\rho(F_2(P_n))$. Los principales antecedentes de este segundo problema son los trabajos realizados por David C. Fisher [16] y Rob Pratt [60].

- En 1993 David C. Fisher [16] determinó los valores exactos de la secuencia generada por $\rho(P_n \square P_m)$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}^+$.
- En [60] demostraron que la determinación de $\rho(F_k(P_n))$ es equivalente a la siguiente pregunta abierta en teoría de códigos: *¿Cuál es el tamaño máximo del código corrector de longitud n y peso constante 2 que puede corregir una única transposición adyacente?* En otras palabras, demostraron que $\rho(F_2(P_{n-1})) = A085680(n)$.
- En [60] también publicaron los primeros 50 valores de $A085680(n)$, los cuales fueron obtenidos por Rob Pratt en 2017 por medio de programas de computadora.

Apoyados en estos antecedentes, la programación computacional, y el uso de diversas técnicas de optimización combinatoria, se logró la determinación exacta de $A085680(n)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Este resultado a su vez implica la conjetura 4.1 de Rob Pratt sobre la función generatriz correspondiente a la secuencia $\rho(F_k(P_n))$, siendo esta la aportación principal de este trabajo. Dicho resultado fue publicado en [30].

- Un refinamiento de las técnicas e ideas utilizadas en la determinación de $\rho(F_k(P_n))$ nos condujeron a la construcción de conjuntos de empaquetamiento para $F_3(P_n)$, los cuales arrojaron la fórmula $c(n)$ presentada en el capítulo 3, la cual establece una cota inferior para $\rho(F_3(P_n))$.

- Pese a que no lo mencionamos en el contenido de este trabajo, también existe una relación entre la determinación de $\rho(F_k(C_n))$ y ciertos códigos correctores, lo cual motiva al estudio de $\rho(F_2(C_n))$. Esto nos muestra una vez más que existe una cercana relación entre la determinación del número de empaquetamiento de las gráficas de fichas $F_k(P_n)$, $F_k(C_n)$ y ciertas clases de códigos correctores.
- Los primeros avances que obtuvimos sobre la determinación de $\gamma(F_2(P_n))$ y $\rho(F_2(P_n))$ se presentaron en el *XXXII Coloquio Víctor Neumann-Lara de teoría de gráficas, combinatoria y sus aplicaciones* llevado a cabo en San Luis Potosí en marzo de 2017 y en el *III Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones* celebrado en Puebla durante septiembre de 2016.

Bibliografía

- [1] W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen and Spiele* (Leipzig, 1901).
- [2] Yousef Alavi, M. Behzad, and J. E. Simpson, Planarity of double vertex graphs, *Graph theory, combinatorics, algorithms, and applications* (San Francisco, CA, 1989), (1991), pp. 472–485.
- [3] Yousef Alavi, Lick Don R., Liu Jiuqiang, Survey of double vertex graphs, *Graphs and Combinatorics*, **18**, (2002), No. 4, pp. 709–715.
- [4] Yousef Alavi, Behzad Mehdi, Erdős Paul, Lick Don R., Double vertex graphs *J. Combin. Inform. System Sci.*, **16**, (1991), No. 1, pp. 37–50.
- [5] Yousef Alavi, Don R. Lick, Jiuqiang Liu, Hamiltonian cycles in double vertex graphs of bipartite graphs. *In Proceedings of the Twenty-fourth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1993)* **93**, pp. 65–72, (1993).
- [6] Hernán de Alba, Walter Carballosa, Jesús Leños, Luis Manuel Rivera, Independence and matching numbers of some token graphs, *arXiv.org:1606.06370v2*, pp. 1–17, (2016).
- [7] B. Alspach, Johnson graphs are Hamilton-connected, *Ars Math. Contemp*, **6**, pp. 21–23, (2013).
- [8] Alfredo Alzaga, Rodrigo Iglesias, Ricardo Pignol, Spectra of symmetric powers of graphs and the Weisfeiler-Lehman refinements, *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, **100**, No. 6, pp. 671–682, (2010).
- [9] Koenraad Audenaert, Chris Godsil, Gordon Royle, Terry Rudolph, Symmetric squares of graphs, *Journal of Combinatorial Theory*, **97**, pp. 74–90, (2007).

- [10] V. Auletta , A. Monti , M. Parente , P. Persiano , A linear-time algorithm for the feasibility of pebble motion on trees. *Algorithmica* **23**, 223–245, (1999).
- [11] I. Buyukkuscu, A. Kirlangic, The Integrity of Double Vertex Graphs of Binomial Trees, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **36**, pp. 257–266, (2007).
- [12] Fran Berman, David Johnson, Tom Leighton, Peter W. Shor, Larry Snyder, Generalized planar matching, *J. Algorithms*, **11**, No. 2, pp. 153–184, (1990).
- [13] A. M. Barcalkin, L. F. German. The external stability number of the Cartesian product of graphs, *Bul. Akad. Stiince RRS Moldoven*, **94**, pp. 5–8, (1979).
- [14] Berge C., La Théorie Des Graphes et Ses Applications, *Theory of Graphs and Its Applications*, Traslated by Alison Doig. (1962), London; John Wiley & Sons: New York pp. 247.
- [15] David C. Fisher, The Domination number of complete grid graphs, manuscript.
- [16] David C. Fisher, The 2-packing number of complete grid graphs, *Ars Combinatoria*, **36**, pp. 261–270, (1993).
- [17] Walter Carballosa, Ruy Fabila-Monroy, Jesús Leños, Luis Manuel Rivera, Regularity and planarity of token graphs, *Discussiones Mathematicae. Graph Theory*, **37**, pp. 573–586, (2017).
- [18] Gruia Călinescu, Adrian Dumitrescu, János Pach, Reconfigurations in graphs and grids, *SIAM J. Discrete Math.*, **22**, pp. 124–138, (2008).
- [19] T. Y. Chang, W. E. Clark, The domination numbers of the 5 x 5 and 6 x n grid graphs, *J. Graph Theory*, **17**, pp. 81–107, (1993).
- [20] E. J. Cockaine. Domination in undirected graphs - a survey. *Theory and Applications of graphs in America's Bicentennial Year*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 141–147, (1978).
- [21] E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, *Networks* 7, pp. 247–261, (1977).

- [22] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, Optimal domination in graphs, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **22**, pp. 855-857, (1975).
- [23] Rall Douglas F., Bert Hartnell, Domination in Cartesian products: Vizing's conjecture, *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.*, **209**, Dekker, New York, pp. 163–189, (1998).
- [24] P. Dunder, Z. Yorgancioglu, Total Coloring of Certain Double Vertex Graphs, *Applied Mathematical Sciences*, **5**, pp. 2271–2275, (2011).
- [25] M. El-Zahar, C. M. Pareek, Domination number of products of graphs, *Ars Combin.*, **31**, pp. 223–227, (1991).
- [26] Tuvi Etzion, Sara Bitan, On the chromatic number, colorings, and codes of the Johnson *Discrete Applied Mathematics. The Journal of Combinatorial Algorithms, Informatics and Computational Sciences*, **70**, pp. 163–175, (1996).
- [27] Ruy Fabila-Monroy, David Flores-Peñaloza, Clemens Huemer, Ferran Hurtado, Jorge Urrutia, David R. Wood, Token graphs, *Graphs and Combinatorics*, **28**, pp. 365–380, (2012).
- [28] J. Gallian, The Mathematics of Identification Numbers, *The College Mathematics Journal*, **22**, pp. 194–202, (1991).
- [29] W. Goddard, J. Jacob, R. Laskar, Double Vertex Graphs and Complete Double Vertex Graphs, *Congr. Numer.*, **188**, pp. 161–174, (2007).
- [30] J.M. Gómez Soto, J. Leaños, L.M. Ríos-Castro, L.M. Rivera, The packing number of the double vertex graph of the path graph, *Discrete Applied Mathematics*, pp. 327–340, (2018).
- [31] Daniel Gonçalves, Alexandre Pinlou, Michaël Rao, Stéphan Thomassé, The domination number of grids, *SIAM J. Discrete Math.*, **25**, pp. 1443–1453, (2011).
- [32] Jonathan L. Gross, Jay Yellen, Ping Zhang, HANDBOOK OF Graph Theory, Second Edition, CRC Press, (2014).
- [33] David R. Guichard, A lower bound for the domination number of complete grid graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **49**, 215–220, (2004).

- [34] E. O. Hare, Algorithms for grids and grid-like graphs, Thesis (Ph.D.)—Clemson University, *ProQuest LLC, Ann Arbor, MI*, pp. 284, (1989).
- [35] E. O. Hare, W. R. Hare, S. T. Hedetniemi, Algorithms for computing the domination number of $k \times n$ complete grid graphs, *Congr. Numer.*, **55**, pp. 81–92, (1986).
- [36] J. Hagauer, S. Klavžar, On independence numbers of the Cartesian product of graphs, *Ars Combin.*, **43**, pp. 149–157, (1991).
- [37] Jan van den Heuvel, The complexity of change, *Surveys in combinatorics*, **409**, pp. 127–160, (2013).
- [38] W. Imrich, S. Klavzar y D. F. Rall, Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Product, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008.
- [39] Takehiro Ito, Erik D. Demaine, Nicholas J. A. Harvey, H. Papadimitriou Christos, Martha Sideri, Ryuhei Uehara, Yushi Uno, On the complexity of reconfiguration problems, *Theoretical Computer Science*, **412**, pp. 1054–1065, (2011).
- [40] M. S. Jacobson, L. F. Kinch , On the domination number of products of graphs. I, *Ars Combin.*, **18**, pp. 33–44, (1984).
- [41] M. S. Jacobson , L. F. Kinch , On the domination number of products of graphs. I, *Ars Combin.*, **18**, pp. 33–44, (1984).
- [42] M. S. Jacobson, L. F. Kinch , On the domination of products of graphs II, Trees. *J. Graph Theory*, **10**, pp. 97–106, (1986).
- [43] G. L. Johns, Generalized distance in graphs, Ph.D. Dissertation, *Western Michigan University*, (1988).
- [44] David S. Johnson, The NP-completeness column: an ongoing guide, *J. Algorithms*, **6**, pp. 434–451, (1985).
- [45] D. Kornhauser, G. Miller, P. Spirakis, Coordinating pebble motion on graphs, the diameter of per-mutations groups, and applications, Singer Island, FL *25th IEEE symposium on foundations of computer science*, **1**, pp. 241–250, (1984).

- [46] S. Klavžar, Some new bounds and exact results on the independence number of Cartesian product graphs, *Ars Combin.*, **74**, pp. 173–186, (2005).
- [47] D. König, *Theorie der Endlichen and Unendlichen* (Leipzig, 1936).
- [48] Jesús Leañós, Ana Laura Trujillo-Negrete, The connectivity of token graphs, *Graphs and Combinatorics*, pp. 1–8, (2016).
- [49] K. G. Mirajkar, Priyanka Y. B., Traversability and covering invariants of token graphs, *International J. Math. Combin*, **10**, pp. 132–138, (2016).
- [50] Garey M.R., Johnson D.S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, Freeman and Company, San Francisco (1979).
- [51] O. Ore, *Theory of Graphs*, American Mathematical Society Colloquium, Publications 38, Providence, RI, (1962).
- [52] Amir Rahnamai Barghi, Ilya Ponomarenko, Non-isomorphic graphs with cospectral symmetric powers, *Electron. J. Combin.*, **16**, Research Paper pp. 120, (2009).
- [53] Luis Manuel Rivera, Ana Laura Trujillo-Negrete, Hamiltonicity of token graphs of fan graphs, *Art Discr. Appl. Math*, **1**#P07, pp. 1–5, (2018).
- [54] V. D. Samodivkin, Partitioned graphs and domination related parameters, *Ann. Sofia Univ., Fac. Math and Inf.*, **97**, pp. 89–96, (2005).
- [55] Johnson Selmer M., A new upper bound for error-correcting codes, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-8**, pp. 203–207, (1962).
- [56] N. J. A. Sloane, Challenge Problems: Independent Sets in Graphs., (2017), <http://www.research.att.com/?njas/doc/graphs.html>, (2000).
- [57] N. J. A. Sloane, *Personal communication*, (2017).
- [58] N. J. A. Sloane, On single-deletion-correcting codes, *Codes and designs (Columbus, OH, 2000)*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., **10**, pp. 273–291, (2002).

- [59] N. J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org>, (2017).
- [60] N. J. A. Sloane, Sequence A085680, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org>, (2017).
- [61] Al-Tobali, Saad S., Binding Number of Double Vertex Graphs, *Proceeding of The Second Saudi Science Conference*, Computer Science Mathematics and Statistics, pp. 113–118, (2005).
- [62] Rudolph T., Constructing physically intuitive graph invariants, *arXiv:quant-ph/0206068*, pp. 1–3, (2002).
- [63] Paul Terwilliger, The Johnson graph $J(d, r)$ is unique if $(d, r) \neq (2, 8)$, *Discrete Mathematics*, **58**, (1986), No. 2, pp. 175–189.
- [64] V. G. Vizing, The Cartesian product of graphs. *Vychisl. Sistemy*, **9**, 30–43, (1963).
- [65] V. G. Vizing, Some unsolved problems in graph theory. *Uspekhi Mat. Nauk*, **23**, 117–134, (1968).
- [66] Katsuhisa Yamanaka, Erik D. Demaine, Takehiro Ito, Jun Kawahara , Masashi Kiyomi , Yoshio Okamoto, Toshiki Saitoh, Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Takeaki Uno, Swapping labeled tokens on graphs, *Theoretical Computer Science*, **586**, pp. 81–94, (2015).
- [67] Bi Wen Zhu, Liu Jiuqiang, Lick Don R., Alavi Yousef, n -tuple vertex graphs, *Congressus Numerantium*, **89**, pp. 97–106, (1992).