



Universidad Autónoma de Zacatecas
"Francisco García Salinas"
Unidad Académica de Física



Ondas gravitacionales en la teoría de la gravitación de Jefimenko

TESIS

Que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS BÁSICAS
(Orientación en Física)

PRESENTA

M. en C. David Antonio Pérez Carlos

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Amado Augusto Espinoza Garrido

Dr. Alejandro Birgilio Gutiérrez Rodríguez

Dr. Andrew Chubykalo

Zacatecas, México

Diciembre de 2020.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Autónoma de Zacatecas y a la Unidad Académica de Física por haberme dado la oportunidad de realizar estos estudios de Doctorado. Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el soporte económico recibido a través de su Programa Nacional de Posgrados de Calidad, al programa de Doctorado en Ciencias Básicas con número PNPC 3911, mediante la beca nacional con No. de apoyo 467311. También quiero agradecer a la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme aceptado para realizar mi estancia de investigación. Quiero además agradecer por los apoyos económicos otorgados por CONACyT mediante la beca mixta para movilidad, por el Consejo Zacatecano de Ciencia y Tecnología (COZyT) y por la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Ondas gravitacionales en la teoría de la gravitación de Jefimenko

Resumen

El propósito principal de esta tesis es presentar el trabajo de investigación hecho en el Doctorado en Ciencias Básicas con orientación en Física, programa ofrecido por la Universidad Autónoma de Zacatecas a través de la Unidad Académica de Física.

Hicimos una breve exposición de la teoría generalizada de la gravitación de Jefimenko. Hemos descrito su contenido conceptual, explicando el aparato matemático utilizado para la formulación de la teoría y hemos presentado sus ecuaciones fundamentales. Hemos aclarado la diferencia principal entre la teoría de la gravitación original de Newton y la teoría generalizada de la gravitación [1].

Hemos introducido un nuevo sistema de unidades llamado Sistema Gaussiano Gravitacional (SGG). Este sistema nos ha permitido escribir las ecuaciones de la gravitación en una forma simple de resolverlas. Usando las ecuaciones de la gravitación de Jefimenko, obtuvimos las ecuaciones de onda para los campos gravitacional ordinario y de Heaviside¹ y hemos encontrado soluciones de onda. Hemos demostrado que hay configuraciones del campo gravitodinámico (esto es, el conjunto de campos gravitacionales Newtoniano y de Heaviside) en forma de esferas de campo de Heaviside y anillos de campo gravitacional. Hemos analizado como esta configuración actúa sobre las partículas dentro de las esferas y hemos investigado como se comporta la densidad de energía y el vector de Poynting de esas soluciones [2].

Hemos obtenido las ecuaciones de la gravitación de Jefimenko covariantes, esto es, ecuaciones de la gravitación invariantes ante las transformaciones de Lorentz. Una vez obtenidas esas ecuaciones, las hemos usado para obtener el tensor del campo gravitodinámico. Hemos deducido el tensor energía-momento gravitacional y dimos una interpretación física de sus componentes.

Hemos calculado ecuaciones gravitacionales de segundo orden, una corrección hecha a las

¹Hemos llamado campo de Heaviside al campo generado por masas en movimiento (llamado por Jefimenko campo cogravitacional) y el campo gravitacional ordinario es también llamado campo Newtoniano.

ecuaciones gravitacionales lineales de Jefimenko. Estas ecuaciones lineales fueron propuestas por primera vez por Oliver Heaviside en [3], haciendo una analogía entre las leyes del electromagnetismo y la gravitación. Para lograr nuestro objetivo hemos usado métodos perturbativos sobre las ecuaciones de campo de Einstein. Deberíamos enfatizar que el sistema de ecuaciones resultante también puede ser deducido de las ecuaciones gravitacionales no lineales de Logunov, pero con diferente interpretación física, pues mientras en la primera la gravitación es considerada como una deformación del espacio-tiempo [4–7], en la última la gravitación es considerada como un campo tensorial físico en el espacio-tiempo de Minkowski [8, 9, 18]. En la teoría de la gravitación de Jefimenko, expuesta en [10, 11], hay dos tipos de campos gravitacionales, el campo gravitacional ordinario, debido a la presencia de masas, en reposo o en movimiento y otro campo llamado campo de Heaviside que es debido a masas en movimiento y actúa sólo sobre masas en movimiento. El campo de Heaviside es conocido en relatividad general como efecto Lense-Thirring o gravitomagnetismo², interpretada como una distorsión del espacio-tiempo debido al movimiento de distribuciones de masas [14, 15].

Hemos desarrollado la teoría gravitacional usando el álgebra geométrica del espacio-tiempo. Hemos mostrado los principios de este lenguaje matemático que nos ha permitido unificar los diferentes sistemas matemáticos usados en diferentes ramas de la física, tales como el análisis vectorial, cálculo de variable compleja, tensores, cuaterniones, álgebra de matrices, etc., en un enfoque geométrico. Los objetos utilizados en esta teoría son llamados multivectores. Hemos generalizado los resultados obtenidos en el análisis matemático en el llamado cálculo geométrico. Hemos mostrado como las ecuaciones gravitacionales obtenidas de distintos enfoques, a saber, las ecuaciones linealizadas de campo de Einstein [16] (del análisis tensorial), las ecuaciones gravitacionales de Heaviside [3] (del cálculo vectorial de Gibbs), las ecuaciones obtenidas usando cuaterniones por Arbab [17], las ecuaciones lineales de la teoría relativista de la gravitación de Logunov [18], pueden ser resumidas en una simple ecuación, en vez de cuatro.

²El campo de Heaviside es el análogo gravitacional del campo magnético en la teoría electromagnética, su existencia fue probada empleando la sonda *Gravity Probe B* lanzada por la NASA [12, 13]. Este es un tipo de inducción gravitacional.

Otra ventaja de utilizar el álgebra geométrica es que las ecuaciones son libres de bases, lo cual significa que las ecuaciones gravitacionales y sus soluciones son independientes de sistemas de referencia.

Gravitational Waves in the Jefimenko Gravitational Theory

Abstract

The main aim of this thesis is to present the research work made in the Doctorate in Basic Sciences with Physics orientation, program offered by the Universidad Autónoma de Zacatecas through the Unidad Académica de Física.

We made a brief exposition of the Jefimenko's generalized theory of gravitation. We have described its conceptual content, explaining the mathematical apparatus used for the formulation of the theory and we have presented its fundamental equations. We have elucidated the main difference between Newton's original theory of gravitation and the generalized theory of gravitation [1].

We introduced a new system of units called Gravitational Gaussian System (GGS). This system has allowed us write the equations of gravitation in a simple form to solve them. Using the Jefimenko's equations of gravitation, we obtained the wave equations for ordinary gravitational and the Heaviside gravitational fields³ and we found wave solutions. We have demonstrated there are configurations of the gravitodynamical field (that is, the set of Newtonian gravitational and Heaviside fields) in form of Heaviside field spheres and Newtonian gravitational field rings. We have analysed how this configuration acts on the particles inside the spheres, and we have investigated how behaves the density of energy and the Poynting vector of these solutions [2].

We got the covariant Jefimenko equations of gravitation, that is, equations for gravitation invariant under Lorentz transformations. Once obtained these equations, we have to use them to obtain the gravitodynamical field tensor. We studied the flux and the energy density of the

³It was called Heaviside field to the field generated by moving masses (called by Jefimenko cogravitational field) and the ordinary gravitational field is also called Newtonian field.

gravitodynamical field. We derived the gravitational energy-momentum tensor and we gave a physical interpretation of its components.

We have calculated second-order gravitational equations, a correction made to Jefimenko's linear gravitational equations. These linear equations were first obtained by Oliver Heaviside [3], making an analogy between the laws of electromagnetism and gravitation. To achieve our goal, we have used perturbation methods on Einstein field equations. It should be emphasized that the resulting system of equations can also be derived from Logunov's non-linear gravitational equations, but with different physical interpretation, for while in the former gravitation is considered as a deformation of space-time [4-7], in the latter gravitation is considered as a physical tensor field in the Minkowski space-time [8, 9, 18]. In Jefimenko's theory of gravitation [10, 11], there are two kinds of gravitational fields, the ordinary gravitational field, due to the presence of masses, at rest or in motion and other field called Heaviside field due to moving masses and acting only over moving masses. The Heaviside field is known in general relativity as Lense-Thirring effect or gravitomagnetism⁴, interpreted as a distortion of space-time due to the motion of mass distributions [14, 15].

We developed the gravitational theory using the space-time geometric algebra. We showed the principles of this mathematical language that has allowed us to unite different mathematical systems used in different branches of physics, such as the vector analysis, complex calculus, tensors, quaternions, matrix algebra, etc., in a geometric approach. The objects used in this theory are called multivectors. We generalized the results obtained in the mathematical analysis in the so called geometric calculus. We showed how the linear gravitational equations obtained from different approaches, namely, linearized Einstein's field equations [16] (from tensor analysis), the Heaviside gravitational equations [3] (from Gibbs's vector calculus), the gravitational equations obtained using quaternions by Arbab [17], the linear equations from Logunov's relativistic theory of gravitation [18], can be summarized into a single equation, ins-

⁴The Heaviside field is the gravitational analogous of the magnetic field in the electromagnetic theory, its existence was proved employing the *Gravity Probe B* launched by NASA [12, 13]. It is a type of gravitational induction.

x

stead of four. Another advantage of using geometric algebra is that all equations are basis free, which means that the system of gravitational equations and its solutions are independent of reference frames.

Índice general

Agradecimientos	IV
Resumen	VI
Índice	x
1. Introducción	1
1.1. Contenido conceptual de la teoría gravitodinámica	2
1.2. Ecuaciones fundamentales de la teoría gravitodinámica	4
1.3. Fuerzas gravitacionales en la teoría gravitodinámica	7
1.4. Relación entre la gravitodinámica y la relatividad especial	11
1.4.1. Ecuaciones de transformación que correlacionan cantidades medidas en Σ con cantidades medidas en Σ'	13
1.4.2. Ecuaciones de transformación que correlacionan cantidades medidas en Σ' con cantidades medidas en Σ	14
1.5. Formulación covariante de la teoría gravitodinámica	17
1.6. El campo gravicinético	19
1.7. Inducción gravitacional	23
1.8. Más sobre la teoría gravitodinámica	26
2. Configuraciones inusuales del campo gravitodinámico	33

2.1. Ecuaciones gravitacionales de Jefimenko	35
2.2. Ondas gravitacionales	37
2.3. Una solución de ondas gravitacionales con simetría axial	40
2.4. Análisis de la energía del campo gravitodinámico	48
2.5. Convergencia de la soluciones \mathbf{G} y \mathbf{K}	58
3. Ecuaciones gravitodinámicas covariantes	61
3.1. Las transformaciones de Lorentz	61
3.2. Ecuaciones covariantes de la gravitación	68
3.3. Flujo y densidad de energía del campo gravitodinámico	73
3.4. Principio de mínima acción	75
3.5. Teorema de Noether	76
3.6. La acción del campo gravitodinámico	81
3.7. Ecuación de movimiento de una partícula	83
3.8. El tensor energía-momento gravitodinámico	85
4. Límite Post-Newtoniano	91
4.1. Ecuaciones de Jefimenko a segundo orden	92
5. Teoría gravitodinámica en términos del álgebra geométrica	107
5.1. Dicotomía entre los conceptos absoluto y relativo	108
5.2. Dimensión del universo	109
5.3. Álgebra geométrica	110
5.3.1. Álgebra geométrica en dos dimensiones	113
5.3.2. Álgebra geométrica en tres dimensiones	115
5.3.3. Álgebra geométrica del espacio-tiempo	119
5.4. Cálculo geométrico	122
5.4.1. Derivadas vectoriales	123

5.4.2. Teoría de la integración direccionada	126
5.5. Ecuaciones gravitacionales con el cálculo geométrico	130
5.5.1. Soluciones a las ecuaciones gravitodinámicas en ausencia de fuentes	132
5.5.2. Soluciones a las ecuaciones gravitodinámicas con fuentes	136
5.5.3. Potenciales gravitodinámicos	137
5.5.4. El campo gravitacional en función de la intensidad de campo gravitodinámico H	139
6. Conclusiones	141
Bibliografía	148
7. Publicaciones	155
7.1. Artículo publicado en Journal of Modern Physics	155
7.2. Artículo publicado en Open Access Journal of Physics	166
7.3. Artículo publicado en Journal of Modern Physics	179
7.4. Artículo publicado en The European Physical Journal C	203

Capítulo 1

Introducción

La teoría generalizada de la gravitación de Jefimenko está basada en la analogía entre las leyes de la gravitación y de la electrodinámica sintetizada por J. C. Maxwell. Fue propuesta originalmente por Heaviside y desarrollada un siglo después por O. Jefimenko [10, 11], habiendo llevado el trabajo de Heaviside al lenguaje del cálculo vectorial actual. Para establecer dicha analogía, se supuso la existencia de un campo adicional al campo gravitacional ordinario, llamado por Jefimenko, campo cogravitacional, pero nosotros lo hemos llamado campo de Heaviside, que únicamente surge de masas en movimiento y actúa sobre masas en movimiento. Es interesante destacar que cuatro años antes de publicar su teoría de la relatividad general, Einstein publicó el artículo: *Is there a gravitational effect which is analogous to electrodynamic induction?* [19] donde menciona la posibilidad de un análogo gravitacional de la inducción electromagnética. Este artículo fue prácticamente desconocido, posiblemente debido a que fue publicado en una revista inapropiada cuyo título traducido del alemán es: *Revista trimestral de medicina forense y salud pública*.

1.1. Contenido conceptual de la teoría gravitodinámica

La interacción gravitacional de los cuerpos celestes puede parecer un “fenómeno muy misterioso”. Tradicionalmente es atribuido (sin ninguna explicación) a la acción de fuerzas de la “gravitación universal”. Pero, ¿dónde están los hilos, las cuerdas, las cadenas o los resortes que jalan los cuerpos celestes unos a otros? ¿Cómo “sabe” la Tierra que necesita girar alrededor del Sol? ¿Cómo “siente” dónde está ubicado el Sol? Hasta donde sabemos, no existe una conexión material entre los cuerpos celestes. Pero si no hay una conexión material, ¿no significa que las interacciones gravitacionales no son una manifestación de la acción de las fuerzas, sino la manifestación de la existencia de algún agente o mecanismo? La teoría generalizada de la gravitación de Jefimenko¹ responde a esta pregunta suponiendo que las interacciones gravitacionales están mediadas por los campos de fuerza gravitacional y de Heaviside.

Un campo gravitacional es una región del espacio donde una masa experimenta una fuerza gravitacional. Cuantitativamente, un campo gravitacional se define en términos del campo vectorial gravitacional \mathbf{g} por la misma ecuación por la cual se define en la teoría de Newton:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m}, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{F}_g es la fuerza ejercida por el campo gravitacional sobre una masa estacionaria de prueba m .

Un campo de Heaviside es una región de espacio donde una masa experimenta una fuerza de Heaviside. Cuantitativamente, un campo de Heaviside está definido en términos del campo vectorial de Heaviside \mathbf{k} por la ecuación

$$\mathbf{F}_k = m(\mathbf{v} \times \mathbf{k}), \quad (1.2)$$

donde \mathbf{F}_k es la fuerza ejercida por el campo de Heaviside sobre una masa de prueba en movi-

¹Llamada por nosotros en el artículo [20] teoría gravitodinámica.

miento y \mathbf{v} es la velocidad relativa de la masa de prueba moviéndose dentro de \mathbf{k} .

Se supone que ambos campos gravitacional y de Heaviside se propagan en el espacio con velocidad finita. Esta velocidad aún no es conocida, pero se cree que es igual a la velocidad de la luz. Sin embargo, la teoría gravitodinámica es compatible con una velocidad de propagación de la gravitación diferente de la velocidad de la luz y no se ve afectada por la velocidad a la cual los campos gravitacionales se propagan. Aunque decimos que los campos gravitacional y de Heaviside se “propagan”, no es del todo claro que entidad física se propaga, ya que por definición dichos campos son “regiones de espacio”. Es concebible que lo que realmente se propaga son algunas partículas que de alguna manera crean campos gravitacionales y de Heaviside. Es posible que estas partículas ya hayan sido descritas [21], y es posible que algunos de sus efectos ya hayan sido observados [22]. Sin embargo, no hay suficiente información sobre estas partículas para hacer una declaración definitiva sobre su existencia, naturaleza o propiedades.

La teoría gravitodinámica está de acuerdo con el principio de causalidad porque, como veremos más adelante, en esta teoría los campos gravitacionales y de Heaviside se expresan en términos de integrales retardadas cuyos integrandos son las fuentes causales de los campos.

La teoría gravitodinámica también concuerda con la ley de conservación del momento porque, según esta teoría, los campos gravitodinámicos son repositorios del momento del campo gravitodinámico, y porque el momento mecánico de un cuerpo que se mueve en un campo gravitodinámico puede convertirse en el impulso de campo y el impulso de campo se puede convertir en el impulso mecánico del cuerpo. Como resultado de esta conversión, la suma del ímpetu mecánico y de campo del sistema combinado de campo-cuerpo es siempre la misma, y el ímpetu total del sistema se conserva [11].

De acuerdo con la teoría gravitodinámica, los campos gravitodinámicos también son repositorios de energía de campo. La energía cinética de un cuerpo que se mueve en un campo gravitodinámico se puede convertir en la energía del campo, y la energía del campo se puede convertir en energía cinética del cuerpo. Como resultado de esta conversión, la suma de las energías mecánica y de campo del sistema combinado cuerpo-campo es siempre la misma, y así

la energía total del sistema se conserva [11].

Obviamente, no hay deducciones de las fórmulas presentadas en esta introducción, porque este capítulo está basado en la revisión hecha sobre el trabajo realizado por Jefimenko [1]. También es importante tener en cuenta que podemos obtener todos los resultados al reemplazar todas las variables y constantes presentadas en el Cuadro 1.1 en las ecuaciones de Maxwell. Además, es importante tener en cuenta que esta teoría se desarrolla desde dos puntos de vista, uno de ellos es postular las soluciones retardadas y hacer uso de las identidades del cálculo vectorial para obtener las ecuaciones de Jefimenko, y de manera equivalente, podemos postular el sistema de ecuaciones de Jefimenko y obtener las soluciones retardadas.

Electromagnetismo	Gravitación
q carga	m masa
ρ densidad de carga	ρ densidad de masa
ϕ potencial escalar eléctrico	φ potencial escalar gravitacional
\mathbf{A} vector potencial magnético	$\mathbf{\Gamma}$ vector potencial de Heaviside
\mathbf{J}_e densidad de corriente eléctrica	\mathbf{J} densidad de corriente de masa
I_e corriente eléctrica	I corriente de masa
\mathbf{E} campo eléctrico	\mathbf{g} campo gravitacional
\mathbf{B} campo magnético	\mathbf{k} campo de Heaviside
ϵ_0 permitividad del vacío	$-1/4\pi G$
μ_0 permeabilidad del vacío	$-4\pi G/c^2$
$-1/4\pi\epsilon_0 = \mu c^2/4\pi$	G constante gravitacional

Cuadro 1.1: Analogía entre cantidades electromagnéticas y gravitacionales.

1.2. Ecuaciones fundamentales de la teoría gravitodinámica

Las dos ecuaciones principales de la teoría gravitodinámica son las ecuaciones para el campo gravitacional \mathbf{g} y el campo de Heaviside \mathbf{k} :

$$\mathbf{g} = -G \int \left\{ \frac{[\rho]}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \right\} \mathbf{r} d^3 x' + \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \right] d^3 x' \quad (1.3)$$

y

$$\mathbf{k} = -\frac{G}{c^2} \int \left\{ \frac{[\rho\mathbf{v}]}{r^3} + \frac{1}{r^2c} \left[\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} \right] \right\} \times \mathbf{r} d^3x', \quad (1.4)$$

donde \mathbf{g} es el campo gravitacional creado por la masa m distribuida en el espacio con densidad ρ , $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ es la distancia desde el punto fuente (x', y', z') , donde se encuentra el elemento de volumen de integración d^3x' , hasta el punto de campo (x, y, z) , donde se ha observado o calculado \mathbf{g} , \mathbf{r} es el radio vector dirigido desde d^3x' al punto de campo, \mathbf{k} es el campo de Heaviside creado por la densidad de corriente de masa $\rho\mathbf{v}$ y su derivada temporal, \mathbf{v} es la velocidad con la que se mueve la distribución de masa ρ y c es la velocidad de propagación de la gravitación (generalmente se supone igual a la velocidad de la luz). Los corchetes en estas ecuaciones son símbolos de retardo que indica que las cantidades entre los corchetes deben evaluarse para el tiempo “retardado”, $t' = t - r/c$, donde t es el tiempo durante el cual se evalúan \mathbf{g} y \mathbf{k} . La integración de las integrales de las ecuaciones (1.3) y (1.4) se realizan sobre todo el espacio.

De acuerdo a la ecuaciones (1.3) y (1.4) el campo gravitacional \mathbf{g} tiene tres fuentes causales: la densidad de masa ρ , la derivada temporal de ρ y la derivada temporal de la corriente de masa $\rho\mathbf{v}$; el campo de Heaviside \mathbf{k} tiene dos fuentes causales: la densidad de corriente de masa $\rho\mathbf{v}$ y la derivada temporal de $\rho\mathbf{v}$.

Adicionalmente a las ecuaciones (1.3) y (1.4) para los campos gravitacional y de Heaviside, las siguientes ecuaciones constituyen el fundamento matemático de la teoría gravitodinámica:

1) La ecuación de la conservación de la masa (“la ecuación de continuidad”)

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (1.5)$$

o en forma integral

$$\oint \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d^3x. \quad (1.6)$$

De acuerdo a estas ecuaciones, siempre que una masa contenida en una región de espacio dis-

minuye o crece, hay un flujo saliente o entrante de masa desde o hacia esta región.

2) Fuerza que actúa sobre una distribución de masa de densidad ρ

$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{g} + \mathbf{v} \times \mathbf{k}) d^3x, \quad (1.7)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del elemento de masa ρd^3x y la integral se extiende sobre la región de espacio que contiene la masa en consideración.

3) La densidad de energía de campo contenida en el campo gravitodinámico

$$w = -\frac{1}{8\pi G}(\mathbf{g}^2 + c^2\mathbf{k}^2), \quad (1.8)$$

es importante notar que la energía del campo gravitodinámico es negativa. Esto significa que *ninguna energía puede ser extraída del campo gravitodinámico para destruir el campo. Por el contrario, la energía debe ser entregada para destruirlo.*

4) Energía de campo contenida en una región de campo gravitodinámico

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{8\pi G} \int (\mathbf{g}^2 + c^2\mathbf{k}^2) d^3x, \quad (1.9)$$

donde la integración se extiende sobre la región considerada.

5) Flujo de energía del campo gravitodinámico (“vector de Poynting gravitacional”)

$$\mathbf{S} = \frac{c^2}{4\pi G}(\mathbf{k} \times \mathbf{g}). \quad (1.10)$$

Este vector representa la dirección y el índice de flujo de energía gravitodinámica por unidad de área en un punto del espacio en consideración. La ecuación (1.10) junto con las ecuaciones (1.3)-(1.5) y (1.8) aseguran la conservación de la energía en las interacciones gravitodinámicas.

6) Densidad de momento del campo contenida en el campo gravitodinámico

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi G} \mathbf{k} \times \mathbf{g}. \quad (1.11)$$

7) Momento del campo contenido en el campo gravitodinámico

$$\mathbf{P}_f = \frac{1}{4\pi G} \int \mathbf{k} \times \mathbf{g}, \quad (1.12)$$

donde la integración se extiende sobre la región considerada.

8) Correlaciones entre el momento mecánico \mathbf{P}_M y el momento de campo gravitodinámico

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = -\frac{1}{4\pi G} \int \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{k} \times \mathbf{g}) d^3x + \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{1}{2} \oint (\mathbf{g}^2 + c^2 \mathbf{k}^2) d\mathbf{S} - \oint \mathbf{g}(\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}) - c^2 \oint \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}) \right\}, \quad (1.13)$$

donde \mathbf{g} y \mathbf{k} son los campos Newtoniano y de Heaviside en el sistema en consideración. En esta ecuación, la derivada de la izquierda representa el índice de variación del momento de un cuerpo localizado en un campo gravitodinámico, la integral de volumen representa el índice de variación del momento del campo en la región del campo donde el cuerpo se localiza, y las integrales de superficie representan el flujo del momento de campo a través de la superficie que encierra la región considerada. Junto con las ecuaciones (1.3)-(1.5), (1.7) y (1.11), esta ecuación asegura la conservación del momento en las interacciones gravitodinámicas.

1.3. Fuerzas gravitacionales en la teoría gravitodinámica

Una de las más importantes diferencias entre la teoría de la gravitación de Newton y la teoría gravitodinámica reside en la interpretación del mecanismo de las interacciones gravitacionales. Mientras en la teoría original de Newton la interacción gravitacional entre dos cuerpos involucra sólo una fuerza gravitacional de atracción, en la teoría gravitodinámica la interacción gravitacional entre dos cuerpos involucra una juxtaposición intrincada de varias fuerzas dife-

rentes. Matemáticamente, esas fuerzas resultan de las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.7). Cuando las ecuaciones (1.3) y (1.4) son escritas como cinco integrales separadas, usando \mathbf{J} por $\rho\mathbf{v}$, estas se convierten en

$$\mathbf{g} = -G \int \frac{[\rho]}{r^3} \mathbf{r} d^3x' - G \int \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \mathbf{r} d^3x' + \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right] d^3x' \quad (1.14)$$

y

$$\mathbf{k} = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\mathbf{J}]}{r^3} \times \mathbf{r} d^3x' - \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right] \times \mathbf{r} d^3x' \quad (1.15)$$

Cada una de esas integrales representa un campo de fuerza. Por lo tanto, de acuerdo a la teoría gravitodinámica, la interacción gravitacional entre dos cuerpos involucra al menos cinco fuerzas diferentes. Consideremos las fuentes físicas de esas fuerzas.

Primero analizemos la ecuación (1.14). El campo representado por la primera integral de esta ecuación es el campo gravitacional Newtoniano ordinario creado por la distribución de masa ρ corregido por la velocidad finita de propagación del campo, como está indicado por los corchetes cuadrados (el símbolo de retardo). El campo representado por la segunda integral es creado por la masa cuya densidad varía con el tiempo. Al igual que el campo gravitacional ordinario, este campo también está dirigido hacia la masa, la cual crea ambos campos. El campo representado por la última integral en la ecuación (1.14) es creado por una corriente de masa cuya magnitud y/o dirección varía con el tiempo. La dirección de este campo es paralela a la dirección a lo largo de la cual la corriente de masa incrementa. Todos estos tres campos en la ecuación (1.14) actúan tanto sobre masas estacionarias como sobre masas en movimiento.

Consideremos ahora la ecuación (1.15). La primera integral en esta ecuación representa el campo de Heaviside creado por la corriente de masa. La dirección de este campo es normal al plano generado por el vector densidad corriente de masa \mathbf{J} y el radiovector \mathbf{r} . La segunda integral representa el campo creado por una corriente de masa variable con el tiempo. La dirección de este campo es normal a la dirección a lo largo de la cual la corriente de masa incrementa. Por la ecuación (1.7), ambos campos en la ecuación (1.15) actúan sólo sobre masas en movimiento.

Si la masa en consideración no se mueve y no cambia con el tiempo, entonces no hay re-

tardo, ni corriente de masa. En este caso, ambas integrales en la ecuación (1.15) se anulan y sólo permanece la primera integral en la ecuación (1.14). Como resultado simplemente obtenemos la integral que representa el campo gravitacional Newtoniano ordinario. Así, la teoría gravitacional Newtoniana ordinaria es un caso especial de la teoría generalizada, como debería ser.

En lo que a la interacción gravitacional entre dos masas concierne, el significado de las cinco integrales discutidas arriba pueden ser explicadas con la ayuda de la Figura 1.1. La parte superior de la Figura 1.1 muestra la fuerza que la masa m_1 experimenta bajo la acción de la masa m_2 de acuerdo a la teoría Newtoniana ordinaria. La parte inferior de la Figura 1.1 muestra cinco fuerzas las cuales la misma masa m_1 experimenta de acuerdo a la teoría gravitodinámica. El tiempo para el cual la posición de las dos masas y la fuerza experimentada por m_1 son observadas están indicadas con la letra t . Antes que nada, de acuerdo con la teoría Newtoniana ordinaria, la masa m_1 está sujeta a una sola fuerza dirigida a la masa m_2 en su ubicación actual, es decir, a su ubicación en el momento t . Sin embargo, de acuerdo a la teoría gravitodinámica, todas las fuerzas que actúan sobre la masa m_1 están asociadas, no con la posición de la masa m_2 al tiempo de observación, sino con la posición de m_2 en el tiempo anterior $t' < t$. Por ende, la magnitud de la masa m_2 , su posición y su estado de movimiento en el tiempo presente no tiene efecto del todo sobre la masa m_1 .

Los subíndices identifican las cinco fuerzas mostradas en la parte inferior de la Figura 1.1 que corresponden a las cinco integrales de las ecuaciones (1.14) y (1.15). La fuerza F_1 se asocia simplemente con la masa m_2 y difiere de la fuerza gravitacional Newtoniana ordinaria sólo en que se dirige, no a la masa m_2 en su posición actual, sino al lugar donde se encontraba en el tiempo pasado t' . La fuerza F_2 está asociada con la variación de la densidad de la masa m_2 con respecto al tiempo; la dirección de esta fuerza es la misma como la de F_1 . La fuerza F_3 está asociada con la variación temporal de la corriente de masa producida por m_2 ; esta fuerza está dirigida a lo largo del vector aceleración \mathbf{a} (o a lo largo del vector velocidad \mathbf{v}_2) el cual la masa m_2 tenía en el tiempo t' . Las tres fuerzas son producidas por el campo gravitacional \mathbf{g} (si m_2

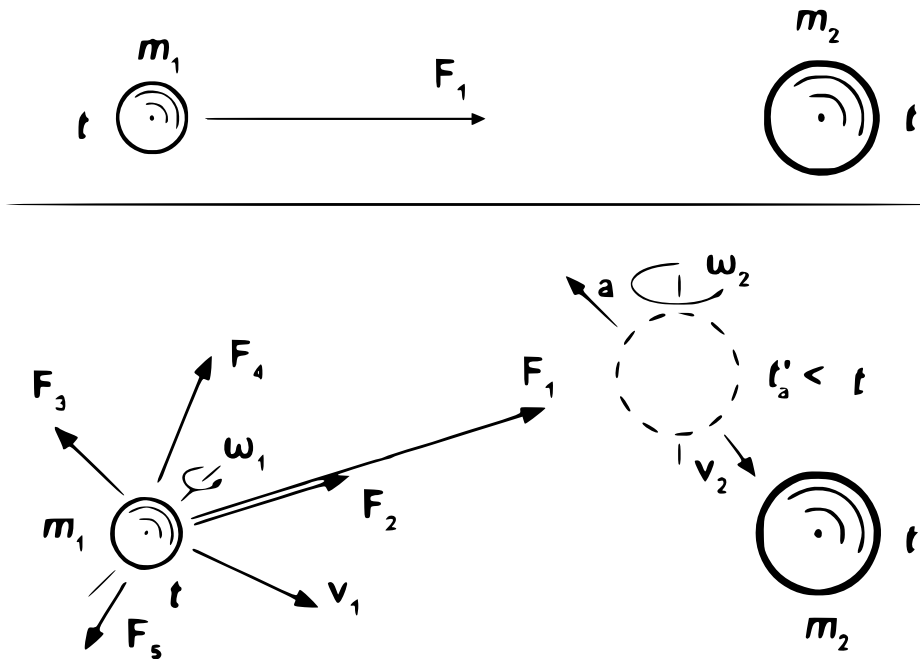


Figura 1.1: La parte superior de esta figura muestra la fuerza que experimenta la masa m_1 bajo la acción de la masa m_2 de acuerdo con la teoría Newtoniana ordinaria. La parte inferior muestra cinco fuerzas, que la misma masa m_1 experimenta bajo la acción de la masa m_2 de acuerdo con la teoría gravitodinámica.

es una masa puntual moviéndose con velocidad constante, \mathbf{g} y el vector resultante de las tres fuerzas está dirigido hacia la posición presente de m_2) [11].

Las fuerzas F_4 y F_5 son debidas al campo de Heaviside \mathbf{k} . La fuerza F_4 está asociada con la corriente de masa creada por la masa m_2 y con la velocidad de la masa m_1 . Su dirección es normal al vector velocidad \mathbf{v}_2 el cual la masa m_2 tenía en el tiempo t' y normal al vector velocidad \mathbf{v}_1 el cual la masa m_1 tiene al tiempo presente t . La fuerza F_5 está asociada con la velocidad de la masa m_1 y con la variación de la corriente de masa de la masa m_2 con respecto al tiempo; la dirección de esta fuerza es normal al vector aceleración (o al vector velocidad) que la masa m_2 tenía en el tiempo t' y normal al vector velocidad que la masa m_1 tiene en el tiempo presente t . Aunque no están mostradas en la Figura 1.1, están involucradas las fuerzas adicionales asociadas con las rotaciones de m_1 y m_2 (velocidades angulares ω_1 y ω_2) en la interacción entre las dos masas [11].

Las fuerzas \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 , \mathbf{F}_4 y \mathbf{F}_5 son comunmente más débiles que la fuerza \mathbf{F}_1 debido a la presencia de la velocidad de la interacción gravitacional c en los denominadores de las integrales que representan los campos responsables de esas cuatro fuerzas. Esto significa que sólo cuando la velocidad traslacional o rotacional de m_1 ó m_2 se acercan a c , las fuerzas \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 , \mathbf{F}_4 y \mathbf{F}_5 son preponderantes. Por supuesto, el efecto acumulativo de estas fuerzas en sistemas gravitacionales de larga duración (como el sistema solar, por ejemplo) puede ser significativo independientemente de las velocidades de las masas que interactúan.

1.4. Relación entre la gravitodinámica y la relatividad especial

Hasta hace poco, se creía que la analogía entre las ecuaciones electromagnéticas y gravitacionales no podía aplicarse a los sistemas a altas velocidades, porque la carga eléctrica no se ve afectada por la velocidad, pero se pensaba que la masa de un cuerpo en movimiento sí. Ahora se acepta generalmente que la masa -al igual que la carga eléctrica-, no depende de la velocidad. En este punto conviene explicar detalladamente porque apoyamos esta postura. La fórmula comunmente usada para definir la masa relativista es

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.16)$$

donde M es llamada masa relativista, m es la masa del cuerpo en reposo, v es la velocidad del cuerpo, y c es la velocidad de la luz en el vacío. La ecuación (1.16) fue introducida por Tolman en su artículo *Non-Newtonian mechanics, the mass of a moving body* [23], aparentemente apoyado por los experimentos de Kaufmann, Bucherer y Neumann realizados a inicios del siglo XX, pero tal concepto ha llevado a confusiones y errores de manera que desde la mitad del siglo XX se ha preferido explicar los experimentos de Kaufmann de manera diferente, sobre la base de los

conceptos de energía y momento relativistas, dados por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ y } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.17)$$

las cuales obviamente implican que para altas velocidades lo que depende de la velocidad del cuerpo es la energía y el momento del cuerpo y no su masa. Si consideramos el cuádrimomento de un cuerpo, podemos determinar la masa de un objeto por medio de

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4, \quad (1.18)$$

donde E y \mathbf{p} , dados por (1.17), están relacionados por las transformaciones de Lorentz. Aquí podemos citar la carta de Einstein a Barnet en 1948:

“No es correcto introducir el concepto de la masa $M = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ de un cuerpo en movimiento, para el cual no se puede dar una definición clara. Es mejor no introducir ningún otro concepto de masa más que la masa en reposo m . En lugar de introducir M es mejor mencionar la expresión para el momento y la energía de un objeto en movimiento”.

Para una discusión más detallada sobre la historia y el uso del concepto de masa relativista, ver C. Adler, *Does mass really depend on velocity, dad?* [24], también L. Okun, *The concept of mass* [25] y la carta en respuesta a estos artículos de T. Sandin, *In defense of relativistic mass* [26]. Esto también significa que las ecuaciones de transformación de la teoría de la relatividad especial desarrollada para sistemas electromagnéticos [27] tienen sus contrapartes gravitodinámicas.

Por lo tanto, no es necesario *deducir* ecuaciones de transformación gravitodinámicas relativistas, porque podemos obtenerlas fácilmente reemplazando símbolos y constantes que aparecen en ecuaciones electromagnéticas relativistas por los símbolos y constantes gravitodinámicas correspondientes con la ayuda del Cuadro 1.1.

Las ecuaciones básicas de transformación gravitodinámicas relativistas obtenidas de esta manera se enumeran a continuación. Es importante tener en cuenta que estas ecuaciones

se pueden deducir directamente, sin utilizar la analogía entre los sistemas electromagnéticos y gravitodinámicos (ver O. Jefimenko, *Derivation of relativistic transformation for gravitational fields from retarded field integrals* [28]). En estas ecuaciones, las cantidades no primadas son las medidas en el sistema de referencia estacionario Σ (“laboratorio”), y las cantidades primadas son las medidas en el marco de referencia móvil Σ' .

1.4.1. Ecuaciones de transformación que correlacionan cantidades medidas en Σ con cantidades medidas en Σ'

a) Ecuaciones para las coordenadas del espacio y tiempo

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (1.19)$$

$$y = y', \quad (1.20)$$

$$z = z', \quad (1.21)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right), \quad (1.22)$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

b) Ecuaciones para el campo gravitacional

$$g_x = g'_x, \quad (1.23)$$

$$g_y = \gamma(g'_y + vk'_z), \quad (1.24)$$

$$g_z = \gamma(g'_z + vk'_y). \quad (1.25)$$

c) Ecuaciones para el campo de Heaviside

$$k_x = k'_x, \quad (1.26)$$

$$k_y = \gamma \left(k'_y - \frac{v g'_z}{c^2} \right), \quad (1.27)$$

$$k_z = \gamma \left(k'_z - \frac{v g'_y}{c^2} \right). \quad (1.28)$$

d) Ecuaciones para las densidades de masa y corriente de masa

$$\rho = \gamma \left(\rho' + \frac{v J'_x}{c^2} \right), \quad (1.29)$$

$$J_x = \gamma (J'_x + v \rho'), \quad (1.30)$$

$$J_y = J'_y, \quad (1.31)$$

$$J_z = J'_z. \quad (1.32)$$

e) Ecuaciones para los potenciales gravitacional y de Heaviside

$$\varphi = \gamma (\varphi' + v \Gamma'_x), \quad (1.33)$$

$$\Gamma_x = \gamma \left(\Gamma'_x + \frac{v \varphi'}{c^2} \right), \quad (1.34)$$

$$\Gamma_y = \Gamma'_y, \quad (1.35)$$

$$\Gamma_z = \Gamma'_z. \quad (1.36)$$

1.4.2. Ecuaciones de transformación que correlacionan cantidades medidas en Σ' con cantidades medidas en Σ

a) Ecuaciones para las coordenadas del espacio y tiempo

$$x' = \gamma (x - vt), \quad (1.37)$$

$$y' = y, \quad (1.38)$$

$$z' = z, \quad (1.39)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad (1.40)$$

b) Ecuaciones para el campo gravitacional

$$g'_x = g_x, \quad (1.41)$$

$$g'_y = \gamma(g_y - vk_z), \quad (1.42)$$

$$g'_z = \gamma(g_z - vk_y). \quad (1.43)$$

c) Ecuaciones para el campo de Heaviside

$$k'_x = k_x, \quad (1.44)$$

$$k'_y = \gamma \left(k_y + \frac{vg_z}{c^2} \right), \quad (1.45)$$

$$k'_z = \gamma \left(k_z + \frac{vg_y}{c^2} \right). \quad (1.46)$$

d) Ecuaciones para las densidades de masa y corriente de masa

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{vJ_x}{c^2} \right), \quad (1.47)$$

$$J'_x = \gamma(J_x - v\rho), \quad (1.48)$$

$$J'_y = J_y, \quad (1.49)$$

$$J'_z = J_z. \quad (1.50)$$

e) Ecuaciones para los potenciales gravitacional y de Heaviside

$$\varphi' = \gamma(\varphi - v\Gamma_x), \quad (1.51)$$

$$\Gamma_x' = \gamma\left(\Gamma_x - \frac{v\varphi}{c^2}\right), \quad (1.52)$$

$$\Gamma_y' = \Gamma_y, \quad (1.53)$$

$$\Gamma_z' = \Gamma_z. \quad (1.54)$$

Claramente, las ecuaciones de transformación para cantidades físicas que no involucran campos eléctricos y magnéticos (como velocidad, aceleración, fuerza, etc.) también son válidas para sistemas gravitodinámicos. Sin embargo, la constante c que aparece en las ecuaciones de transformación relativistas convencionales representa la velocidad de propagación de los campos electromagnéticos en el vacío, que es la misma que la velocidad de la luz. Se desconoce la velocidad de propagación de los campos gravitodinámicos, aunque generalmente se cree que es igual a la velocidad de la luz (Hay mediciones indirectas que muestran que ambas coinciden [29]). Si la velocidad de propagación de los campos gravitacionales no es la misma que la velocidad de la luz, nuestras ecuaciones de transformación relativista para la gravitación seguirían siendo correctas, pero la constante c que aparece en ellas sería diferente de la c que aparece en las ecuaciones electromagnéticas correspondientes. Por lo tanto, el comportamiento de los cuerpos que se mueven rápidamente implicados en las interacciones gravitacionales sería diferente del comportamiento de los cuerpos moviéndose rápidamente involucrados en las interacciones electromagnéticas. En efecto, habría dos mecánicas diferentes: la “mecánica gravitoadinámica” y la “mecánica electromagnética” involucrando diferentes masas efectivas, diferentes momentos efectivos y diferentes energías de reposo.

Según la ecuación de masa-energía de Einstein, cualquier energía tiene cierta masa. Pero una masa es una fuente de gravitación. Por lo tanto, el campo gravitacional de una distribución de masa puede ser causado no solo por la distribución de masa como tal, sino también por la

energía gravitacional de esta distribución (para una discusión detallada de este efecto, incluida la posibilidad de distribuciones de masa antigravitacionales derivadas de esta [11]). Si se tiene en cuenta este efecto, la ecuación para la divergencia del campo gravitacional (véase la ecuación (7-1.1) en [11])

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \quad (1.55)$$

se vuelve aproximadamente correcta, y todas las ecuaciones derivadas con la ayuda de la ecuación (1.55) también se vuelven aproximadamente correctas. Sin embargo, es importante tener en cuenta que este efecto energético, si existe, es extremadamente pequeño². En relación con lo anterior, véase el trabajo *Binormal Motion of Curves of Constant Curvature and Torsion. Generation of Soliton Surfaces* [30].

1.5. Formulación covariante de la teoría gravitodinámica

Algunos autores consideran que la formulación covariante de fórmulas y ecuaciones físicas es la formulación más apropiada para expresar las leyes de la física en una forma independiente del sistema de referencia. Algunos autores también creen que es más conciso y ocasionalmente más informativo que la formulación convencional. Dado que cualquier ecuación invariante bajo transformaciones relativistas debe ser expresable en forma covariante, y dado que el principio de relatividad se considera una ley fundamental de la naturaleza, algunos autores consideran que las leyes de la física que no pueden expresarse en forma covariante son “incompletas” o “incorrectas”. Este punto de vista es indudablemente incorrecto, ya que de acuerdo con él, incluso las ecuaciones de Maxwell en su forma vectorial deben clasificarse como “incompletas” o “incorrectas”. Tenga en cuenta también que la formulación covariante cambia la forma de las ecuaciones pero no crea nuevas leyes físicas y, por lo tanto, es de utilidad muy limitada.

²Contrariamente a la creencia predominante, las ecuaciones de la electrodinámica relativista y toda la teoría de la relatividad especial también son aproximadamente correctas, ya que sólo son válidas para sistemas inerciales (“marcos de referencia inerciales”). En realidad, tales sistemas no existen, porque en todas partes del Universo hay un campo de fuerza gravitacional, lo que hace que todos los sistemas y ubicaciones en el Universo no sean inerciales.

La ley gravitacional de Newton es un ejemplo de una ley física que *no puede expresarse en forma covariante*. El problema de encontrar una forma invariante de la ley de la gravitación lo consideró primero Poincaré, pero sin éxito (ver su artículo *Sur la dynamique de L'Électron* [31]). Es interesante observar que Poincaré intentó resolver el problema basándose en solo un campo gravitacional (el análogo gravitacional del campo electrostático). Pero incluso si la teoría de la gravitación se basa en dos campos, una teoría covariante de la gravitación no es posible a menos que la masa gravitacional, al igual que la carga eléctrica, no dependa de la velocidad con la que se mueve la masa.

Como ya mencionamos, ahora es más aceptado que la masa no depende de la velocidad [24–26]. Por lo tanto, una formulación covariante de la teoría de la gravitación basada en campos gravitodinámicos no sólo es posible, sino que se puede construir directamente desde la teoría covariante del electromagnetismo mediante una mera sustitución de símbolos y constantes de acuerdo con la lista anterior.

En particular, a partir de ecuaciones electromagnéticas [27], podemos obtener directamente el “cuadrivector posición covariante”

$$r = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict). \quad (1.56)$$

A partir del cuadrivector corriente eléctrica [27] obtenemos por sustituciones la expresión covariante para el cuadrivector corriente de masa

$$J = (J_1, J_2, J_3, J_4) = (J_x, J_y, J_z, ic\rho), \quad (1.57)$$

donde J_x , J_y y J_z son las componentes x , y y z de la densidad de corriente de masa. Del tensor de campo electromagnético [27] obtenemos el tensor de campo gravitodinámico reemplazando las componentes x , y y z de \mathbf{E} por las componentes correspondientes de \mathbf{g} y las componentes x ,

y y z de \mathbf{B} por las componentes correspondientes de \mathbf{k}

$$H_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & k_z & -k_y & -ig_x/c \\ -k_z & 0 & k_x & -ig_y/c \\ k_y & -k_x & 0 & -ig_z/c \\ ig_x/c & ig_y/c & ig_z/c & 0 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

ó

$$H^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & k_z & -k_y & ig_x/c \\ -k_z & 0 & k_x & ig_y/c \\ k_y & -k_x & 0 & ig_z/c \\ -ig_x/c & -ig_y/c & -ig_z/c & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

donde el subíndice μ indica la fila (1, 2, 3, 4 de arriba a abajo) y el subíndice ν indica la columna (1, 2, 3, 4 de izquierda a derecha). Finalmente, de la misma manera, obtenemos expresiones covariantes de las ecuaciones diferenciales para el tiempo presente para campos gravitodinámicos:

$$\sum_1^4 \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -\frac{4\pi G}{c^2} J_\mu \quad (1.60)$$

y

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (1.61)$$

Debemos recalcar que c es la velocidad de propagación del campo gravitodinámico.

1.6. El campo gravicinético

Como ya hemos mostrado, una de las principales diferencias entre la teoría gravitodinámica y la teoría gravitacional de Newton es que en la teoría gravitodinámica hay un campo de fuerza especial: el campo de Heaviside. El campo de Heaviside es producido por todas las masas en movimiento, y actúa en todas las masas en movimiento. En esta sección explicaremos que en la

teoría gravitodinámica hay otro campo de fuerza más producido por las masas en movimiento. Sin embargo, en contraste con el campo de Heaviside, este campo es producido solamente por masas cuya velocidad cambia en el tiempo y, de nuevo en contraste con el campo de Heaviside, actúa sobre todas las masas, tanto en movimiento como estacionarias.

Como ya sabemos, la principal ecuación del campo gravitacional de la teoría gravitodinámica es

$$\mathbf{g} = -G \int \left\{ \frac{[\rho]}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \right\} \mathbf{r} d^3 x' + \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right] d^3 x', \quad (1.62)$$

donde $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ es la densidad de corriente de masa producida por una distribución de masa ρ en movimiento. El primer término de la derecha de la ecuación (1.62) representa el campo gravitacional Newtoniano retardado. Al igual que el campo Newtoniano ordinario, este campo se origina en cualquier distribución de masa ρ y es responsable de la atracción gravitacional. El segundo término que depende de la variación de la densidad de la masa (podría ser un transbordador que abandona la tierra o una estrella que van agotando su combustible), está también en la dirección radial pero su contribución es pequeña comparada con el término Newtoniano, pues depende del inverso de c . El último término a la derecha de la ecuación (1.62) representa un campo gravitacional muy diferente del campo Newtoniano. Como se puede ver en la ecuación (1.62), este nuevo campo es producido por una corriente de masa variable en el tiempo $\partial \mathbf{J} / \partial t$ y difiere en dos aspectos importantes del campo gravitacional Newtoniano: se dirige a lo largo de la corriente de masa (más exactamente, a lo largo de su derivada parcial temporal) en lugar de a lo largo de un radiovector, y existe sólo mientras la corriente de masa esté cambiando en el tiempo. Por lo tanto, la fuerza gravitacional causada por este campo también es diferente de la fuerza Newtoniana ordinaria. Esta fuerza (designada como \mathbf{F}_3 en la Figura 1.1) se dirige a lo largo de $\partial \mathbf{J} / \partial t$ y dura sólo mientras la corriente de masa esté cambiando. A diferencia de la fuerza gravitacional Newtoniana, que siempre es una interacción de atracción entre masas gravitacionales, la fuerza debida a la \mathbf{J} variable en el tiempo es básicamente una fuerza de arrastre. Si sólo cambia la magnitud, pero no la dirección \mathbf{J} , esta fuerza se dirige paralela o antiparalela

(si $\partial\mathbf{J}/\partial t$ es negativa) a \mathbf{J} , lo que hace que una masa sometida a esta fuerza se mueva paralela o antiparalela (en lugar de hacia) la distribución de masa que forma la corriente de masa. Sin embargo, como la fuerza Newtoniana, la fuerza debida a la \mathbf{J} variable en el tiempo actúa sobre todas las masas. Es importante tener en cuenta que, a diferencia del campo de Heaviside, el campo producido por $\partial\mathbf{J}/\partial t$ generalmente no es creado por masas que se mueven con velocidad constante \mathbf{v} .

Como el campo gravitacional creado por las corrientes de masa variables en el tiempo es muy diferente del campo Newtoniano y del campo de Heaviside, se le debe dar un nombre especial. Teniendo en cuenta que la causa de este campo es un movimiento de masas, podemos llamarlo *campo gravicinético*, y podemos llamar a la fuerza que este campo ejerce sobre otras masas la *fuerza gravicinética*. Designaremos el campo gravicinético por el vector \mathbf{g}_k . De la ecuación (1.62) tenemos

$$\mathbf{g}_k = \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} \right] d^3x'. \quad (1.63)$$

Debido a la presencia de c^2 en el denominador de la ecuación (1.63), el campo gravicinético no puede ser particularmente fuerte, excepto cuando la corriente de masa responsable sea muy rápida. Por otro lado, teniendo en cuenta que la escala de tiempo en las interacciones gravitacionales que tienen lugar en el universo puede ser muy grande, el efecto final del campo gravicinético en tales interacciones puede ser muy considerable, independientemente de la velocidad a la que cambie la corriente de masa.

Mostremos ahora la correlación entre el campo gravicinético y el campo gravitacional. Si comparamos la ecuación (1.63) con la expresión para el vector potencial de Heaviside retardado Γ_{ret} producido por una corriente de masa \mathbf{J} (ver Sección 3-3, ecuación (3-3.2) en [11]),

$$\Gamma_{ret} = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\mathbf{J}]}{r} d^3x', \quad (1.64)$$

reconocemos que el campo gravicinético es igual a la derivada con respecto del tiempo de Γ_{ret} :

$$\mathbf{g}_k = -\frac{\partial \Gamma_{ret}}{\partial t}. \quad (1.65)$$

Observe que la ecuación (1.65) señala la posibilidad de una nueva definición e interpretación del vector potencial de Heaviside. Integremos la ecuación (1.65), obtenemos

$$\Gamma_{ret} = -\int \mathbf{g}_k dt + \text{const.} \quad (1.66)$$

Definimos la integral temporal de \mathbf{g}_k como el *impulso gravicinético*. Entonces, podemos decir que el vector potencial de Heaviside creado por una corriente de masa en un punto en el espacio es igual al negativo del impulso gravicinético producido por esta corriente en ese punto durante la acción de la corriente de masa. Dado que el impulso gravicinético es, en principio, una cantidad medible, tenemos una definición operativa y una interpretación física del vector potencial de Heaviside.

Una relación más directa entre el campo gravicinético y el campo de Heaviside puede obtenerse de la siguiente forma. Supongamos que una corriente de masa inicialmente estacionaria $\mathbf{J}(x'y',z')$, (por ejemplo, una masa esférica rotando inicialmente en reposo) se mueve como un todo con una velocidad \mathbf{v} constante hacia un observador en reposo localizado en el origen de coordenadas. La corriente de masa es entonces función de $x = x' - v_x t$, $y = y' - v_y t$ y $z = z' - v_z t$, ó

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(x = x' - v_x t, y = y' - v_y t, z = z' - v_z t). \quad (1.67)$$

La derivada temporal de la corriente de masa es

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x'} v_x - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y'} v_y - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z'} v_z = -(\mathbf{v} \cdot \nabla') \mathbf{J}. \quad (1.68)$$

El campo gravicinético causado por una corriente de masa en movimiento es, entonces, por las

ecuaciones (1.63) y (1.68),

$$\mathbf{g}_k = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[(\mathbf{v} \cdot \nabla')\mathbf{J}]}{r} d^3x'. \quad (1.69)$$

La derivada espacial que aparece en la ecuación (1.69) se puede eliminar utilizando la identidad vectorial (V-6) de la referencia [11], obteniendo lo siguiente

$$\nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla')\mathbf{J} + \mathbf{v} \times (\nabla' \times \mathbf{J}) + (\mathbf{J} \cdot \nabla')\mathbf{v} + \mathbf{J} \times (\nabla' \times \mathbf{v}). \quad (1.70)$$

Tomando en cuenta que \mathbf{v} es un vector constante, obtenemos

$$\mathbf{g}_k = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J})]}{r} d^3x' + \frac{G}{c^2} \int \frac{[\mathbf{v} \times (\nabla' \times \mathbf{J})]}{r} d^3x'. \quad (1.71)$$

Si comparamos la ecuación (1.71) con la ecuación (3-1.2) de [11] para el campo de Heaviside

$$\mathbf{k} = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\nabla' \times \mathbf{J}]}{r} d^3x' \quad (1.72)$$

hallamos que la ecuación (1.71) puede escribirse como

$$\mathbf{g}_k = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J})]}{r} d^3x' - \mathbf{v} \times \mathbf{k}, \quad (1.73)$$

donde \mathbf{k} es el campo de Heaviside creado por la corriente de masa en movimiento \mathbf{J} .

1.7. Inducción gravitacional

Ahora presentamos un ejemplo (para más ejemplos, ver la Sección 2-2 en [11]) para demostrar los efectos de la fuerza del campo gravicinético. Por simplicidad hemos usado los campos gravicinéticos calculados en la Sección 12-2 de [11].

Los efectos de la fuerza que mostramos constituye el análogo de la inducción electromagnética y la ley de Lenz electromagnética. Como sabemos, la inducción gravitodinámica es causada

por el campo gravicínético [11]. El campo gravicínético es la contraparte del campo electrocínético, y sus efectos dinámicos son similares, excepto que la fuerza gravicínética ejercida sobre una masa por un campo gravicínético creciente/ decreciente es paralela/antiparalela al campo, mientras la fuerza electrocínética ejercida sobre una carga positiva por un campo electrocínético creciente/decreciente es antiparalela/paralela al campo.

Ejemplo: Un cilindro de pared delgada de grosor t , radio R_0 , longitud $2L$, tiene una densidad de masa distribuida uniformemente ρ y está inicialmente en reposo. Un anillo de masa m_r y radio R es colocado alrededor del cilindro coaxialmente a él. El cilindro es puesto repentinamente en movimiento a lo largo de su eje y llega a una velocidad v_c (corriente de masa J_c). La fuerza gravicínética causa que el anillo se mueva a lo largo del cilindro, esto es, sigue al cilindro (ver Figura 1.2). Suponiendo que no actúan otras fuerzas sobre el anillo, y suponiendo que el anillo permanece cerca de la mitad del cilindro durante el tiempo que la velocidad del anillo cambia, hay que encontrar la velocidad final v_f del anillo. De acuerdo a nuestras suposiciones,

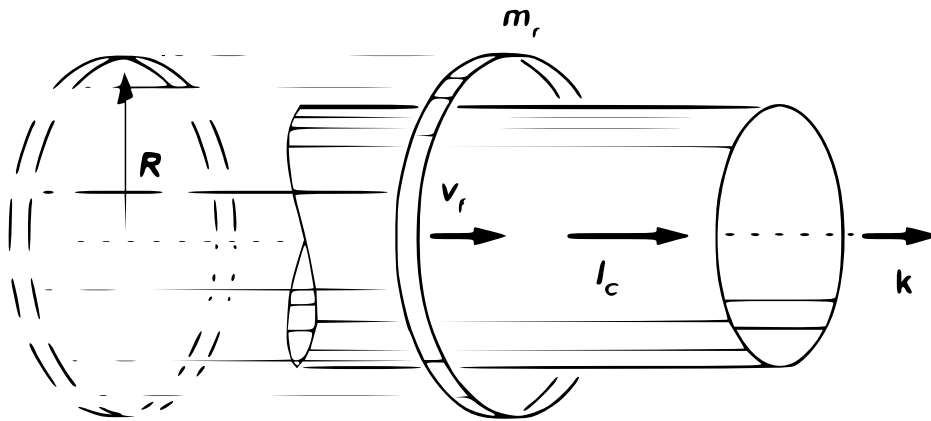


Figura 1.2: El cilindro acelerando arrastra al anillo consigo mismo.

el campo gravicínético a través del cual el anillo se mueve es solamente una función del tiempo. Por lo tanto podemos usar la Ecuación (12.5-5) de [11] para hallar el momento final y la velocidad del anillo. Cuando la fuerza gravicínética actúa sobre la distribución de masa ρ , esta cambia el momento mecánico \mathbf{P}_M de la distribución de masa ρ y si \mathbf{g}_k es una función sólo del

tiempo, el cambio de momento es

$$\Delta \mathbf{P}_M = m \int \mathbf{g}_k dt - m \Delta \Gamma, \quad (1.74)$$

donde m es la masa total de la distribución, y $\Delta \Gamma$ es el cambio en el vector potencial de Heaviside durante el intervalo de tiempo en consideración. De la ecuación (1.74) y la ecuación (12-2.3) de [11]

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial I}{\partial t} \frac{G}{c^2} \ln \frac{2L}{R} \hat{k}, \quad (1.75)$$

donde \hat{k} es un vector unitario en la dirección de la corriente de masa, tenemos

$$\Delta \mathbf{P}_M = m_r \mathbf{v}_f = m_r I_c \frac{G}{c^2} \ln \frac{2L}{R} \hat{k}, \quad (1.76)$$

así que la velocidad final del anillo es

$$\mathbf{v}_f = I_c \frac{G}{c^2} \ln \frac{2L}{R} \hat{k}. \quad (1.77)$$

Sustituyendo $2\pi\rho v_c R_0 t$ por I_c , donde ρ es la densidad de masa del cilindro, R_0 es su radio y t su grosor, obtenemos

$$\mathbf{v}_f = \frac{4\pi G \rho v_c R_0 t}{c^2} \ln \frac{2L}{R} \hat{k}. \quad (1.78)$$

El cilindro arrastra al anillo de tal forma que el anillo se mueve en la dirección del cilindro en movimiento. Es interesante notar que la velocidad final del anillo no depende de su masa.

Este ejemplo (junto con otros ejemplos de la Sección 2-2 de [11]) ilustra el fenómeno de la inducción gravitacional, por lo cual una corriente de masa induce una corriente de masa secundaria en los cuerpos vecinos. El efecto es similar a la inducción electromagnética (para un análisis detallado y novedosa interpretación del fenómeno de inducción electromagnética ver O. Jefimenko *Presenting electromagnetic theory in accordance with the principle of causality* [32]), excepto que en contraste con el último, la dirección de la corriente inducida es la misma que

la corriente original si la corriente original incrementa, y es opuesta a la corriente original si la corriente original decrece. Así, el signo de la ley de Lenz gravitacional es opuesto al signo de la ley de Lenz electromagnética.

1.8. Más sobre la teoría gravitodinámica

La comparación entre la teoría gravitodinámica y la teoría de la relatividad general surge involuntariamente.

La confirmación experimental de la relatividad general se basa solamente en el hecho de que supuestamente explicó la discrepancia previamente inexplicada entre el desplazamiento teórico (calculado) y observado del perihelio del planeta Mercurio.

Hablando sobre el problema de Mercurio, debe señalarse que la llamada discrepancia en el desplazamiento de su perihelio es la diferencia entre el valor observado y el calculado, sobre la base de la teoría de Newton habitual.

Esta diferencia, que es aproximadamente 575 segundos de arco por siglo, atrajo la atención de Urban Le Verrier, quien predijo la existencia del planeta Neptuno y calculó con precisión sus coordenadas. Le Verrier explicó la diferencia en la precesión de Mercurio por la influencia de los planetas cercanos y, habiendo calculado su efecto sobre Mercurio, descubrió que estos planetas causan una precesión de 532 segundos de arco por siglo. Los 43" por siglo restantes no pudo explicarlos. Estos 43" fueron, como ahora se cree, explicados por la teoría general de la relatividad de Einstein. Pero entonces una cierta discrepancia es inmediatamente evidente. Después de todo, la precesión principal en 532" se calculó de acuerdo con la teoría de Newton, y el restante 43" se calculó de acuerdo con la teoría general de la relatividad. Sería mucho más convincente si toda la discrepancia de 575" por siglo fuera calculada sobre la base de la misma teoría. En este caso, J. Synge comentó [33]: "Tal mezcla de las teorías Newtoniana y de Einstein es psicológicamente desagradable, ya que estas teorías se basan en conceptos iniciales demasiado diferentes". Hasta que se calcule la discrepancia completa utilizando la

teoría general de la relatividad, sin recurrir a la teoría de Newton, la verificación experimental de la relatividad general no puede considerarse válida.

Pero volvamos a la teoría gravitodinámica. Observamos que, como se muestra en [11], dentro del marco de la teoría gravitodinámica, se pueden obtener fórmulas según las cuales la precesión del perihelio para todos los planetas es una consecuencia necesaria de esta teoría. Sin embargo, estas fórmulas difícilmente pueden probar algo. El hecho es que de acuerdo con la teoría gravitodinámica, toda la mecánica celeste y sus resultados deberían ser revisados. Como se mostró anteriormente (ver la Figura 1.1), la acción del Sol en los planetas no se expresa por una fuerza, sino por cinco fuerzas, y la acción de cada planeta en otro planeta no se expresa por una fuerza, sino por cinco. Por lo tanto, de hecho, toda la información sobre nuestro sistema solar, obtenida sobre la base de la teoría convencional de Newton, debe considerarse sólo aproximadamente correcta. Entonces, desde el punto de vista de la teoría gravitodinámica, no tiene sentido tratar de explicar los 43" por siglo residuales en la precesión del perihelio de Mercurio. Después de todo, si tenemos en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre Mercurio, incluidas las fuerzas asociadas con el movimiento del Sol en relación con la Galaxia, la rotación del Sol alrededor de su eje, la dependencia de las fuerzas que actúan sobre Mercurio en la velocidad y la aceleración de los planetas, en la velocidad del propio Mercurio, y, finalmente, el retraso en la acción de las fuerzas gravitatorias y de Heaviside, ¿obtendremos esta discrepancia en el desplazamiento del perihelio de Mercurio, especialmente la discrepancia exactamente en 43 segundos de arco por siglo? Está claro que hasta que se realicen todos estos cálculos, hasta que se hagan las correcciones necesarias en la mecánica celeste, no tiene sentido hablar de probar la teoría gravitodinámica analizando el movimiento de Mercurio.

Por lo tanto, ni la teoría gravitodinámica, ni la teoría general de la relatividad de Einstein se pueden verificar de esta manera.

Sin embargo, todavía se puede citar un testimonio muy fuerte de la verdad de la teoría gravitodinámica (aunque no es tan sensacionalista como la explicación de la discrepancia en el

corrimiento del perihelio de Mercurio). El discurso abordará un “punto blanco”³ asociado con el fenómeno de la gravitación. Como se sabe, el movimiento de los cuerpos estelares y la caída de los cuerpos bajo la acción del campo gravitacional asociado con la conversión de energía potencial en energía cinética y viceversa. En particular, cuando un cuerpo cae bajo la acción de la gravedad de la Tierra, su energía potencial disminuye y su energía cinética aumenta. Pero, ¿cómo, exactamente, se produce esto? ¿Cómo se logra realmente este intercambio de energía? En el pasado, este fenómeno simplemente se interpretaba como resultado de la conservación de la energía, pero el proceso o los mecanismos del intercambio de energía seguían siendo desconocidos. Como veremos ahora, la teoría gravitodinámica explica este proceso hasta ahora oculto con perfecta claridad. Consideremos que un cuerpo de masa m caiga bajo la acción del campo gravitacional \mathbf{g} de la Tierra (Figura 1.3). Tengamos en cuenta que la magnitud de \mathbf{g} es igual a la aceleración de la gravedad g . Sea la velocidad del cuerpo en el momento de la observación \mathbf{v} . Como todas las masas en movimiento, la caída crea a su alrededor un campo de Heaviside \mathbf{k} levógiro en relación con el vector de velocidad del cuerpo. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (1.10) (ecuación vectorial de Poynting gravitacional)

$$\mathbf{S} = \frac{c^2}{4\pi G} \mathbf{k} \times \mathbf{g}, \quad (1.79)$$

hay un flujo de energía gravitacional U_{gr} en la superficie del cuerpo en caída libre dirigido hacia el cuerpo. La velocidad a la que la energía gravitacional ingresa al cuerpo es

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \frac{c^2}{4\pi G} \oint (\mathbf{k} \times \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{S}_{in} = \frac{c^2}{4\pi G} \oint (\mathbf{g} \times \mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.80)$$

donde $d\mathbf{S}_{in}$ es un elemento vectorial de superficie del cuerpo en caída dirigido hacia el cuerpo, y $d\mathbf{S}$ es un elemento vectorial de superficie dirigido, como generalmente se acepta en el análisis

³Un punto blanco es una frase que surgió del alemán en la cartografía del Siglo XIX, cuando en un mapa se desconocía que había en algún lugar se dejaba una “mancha blanca”, dicha mancha indicaba la falta de conocimiento respecto al lugar, de ahí la expresión *weißer Fleck auf der Landkarte*, esto es, “una mancha blanca en el mapa”.

vectorial, desde el cuerpo hacia el espacio circundante; La integración es sobre toda la superficie del cuerpo que cae. Trasponiendo en el integrando el producto cruz y el producto punto y

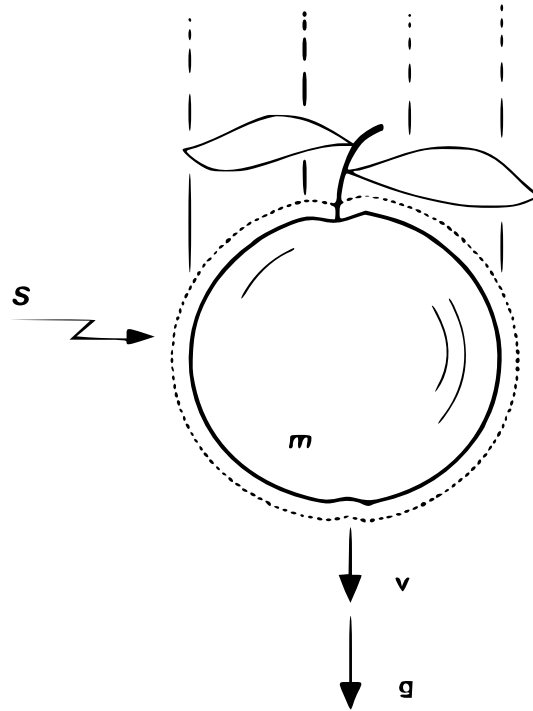


Figura 1.3: La teoría gravitodinámica proporciona una explicación clara del mecanismo de intercambio de energía involucrado en las interacciones gravitacionales: el aumento de la energía cinética de un cuerpo que se mueve bajo la acción de un campo gravitacional ocurre como consecuencia de la entrada de energía del campo gravitacional en el cuerpo a través del vector de Poynting gravitacional.

factorizando el vector constante \mathbf{g} junto con el punto del signo integral, tenemos

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \frac{c^2}{4\pi G} \oint \mathbf{g} \cdot (\mathbf{k} \times d\mathbf{S}) = \frac{c^2}{4\pi G} \mathbf{g} \cdot \oint \mathbf{k} \times d\mathbf{S} \quad (1.81)$$

Convirtiendo ahora la última integral de superficie en una integral de volumen, obtenemos

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \frac{c^2}{4\pi G} \mathbf{g} \cdot \int \nabla \times \mathbf{k} d^3x. \quad (1.82)$$

De la ecuación (7-1.4) de la referencia [11]

$$\nabla \times \mathbf{k} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, \quad (1.83)$$

y como \mathbf{g} no es función del tiempo se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{k} = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho \mathbf{v}. \quad (1.84)$$

Por lo tanto, la ecuación (1.82) se reduce a

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \mathbf{g} \cdot \int \rho \mathbf{v} d^3x'. \quad (1.85)$$

Factorizando el vector constante \mathbf{v} del signo integral, obtenemos

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \int \rho d^3x' \quad (1.86)$$

Por lo tanto, dado que \mathbf{g} y \mathbf{v} son paralelos, y dado que la última integral en la ecuación (1.86) representa la masa del cuerpo en caída, encontramos que cuando el cuerpo está cayendo, hay un influjo de la energía del campo gravitacional (energía potencial) en el cuerpo a la razón

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} m = mvg. \quad (1.87)$$

Consideremos ahora la energía cinética. La energía cinética de un cuerpo que cae aumenta a la razón

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = mv \frac{dv}{dt} = mvg, \quad (1.88)$$

donde g es la aceleración del cuerpo en caída. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, g en la ecuación (1.87) es la misma aceleración y, por lo tanto, la razón a la que aumenta la energía cinética del cuerpo en caída es igual a la razón de influjo de la energía del campo

gravitacional en el cuerpo. Tengamos en cuenta que un caso menos general del intercambio de energía cinética y gravitatoria fue considerado previamente por D. Bedford y P. Krumm en *The gravitational Poynting vector and energy transfer* [34].

Por lo tanto, la teoría gravitodinámica proporciona una explicación clara del mecanismo del intercambio de energía involucrado en las interacciones gravitacionales: el aumento de la energía cinética del cuerpo que se mueve bajo la acción de un campo gravitacional ocurre como consecuencia de la entrada de energía del campo gravitacional en el cuerpo a través del vector de Poynting gravitacional. Esencialmente, las mismas consideraciones se aplican al caso cuando un cuerpo se mueve contra el campo gravitacional, en cuyo caso su energía cinética disminuye debido al flujo de energía del cuerpo hacia el espacio circundante nuevamente a través del vector de Poynting gravitacional.

La simplicidad del cálculo anterior tiende a ocultar la mayor importancia de los resultados obtenidos. El hecho es que ninguna teoría gravitacional puede considerarse definitiva si no puede proporcionar una explicación clara del mecanismo de conversión de la energía potencial gravitacional en la energía cinética de los cuerpos que caen. Por lo tanto, a pesar de su simplicidad, los cálculos anteriores constituyen una prueba excepcionalmente importante de la validez de la teoría gravitodinámica y, al mismo tiempo, revelan la verdadera naturaleza de la energía potencial gravitacional.

Capítulo 2

Configuraciones inusuales del campo gravitodinámico

En este capítulo, comenzamos escribiendo las ecuaciones de Jefimenko que fueron obtenidas a partir de las soluciones retardadas que fueron postuladas por Jefimenko [11], aunque ya hemos mencionado en el resumen que estas ecuaciones pueden ser obtenidas por distintos métodos: fueron obtenidas por primera vez en 1893 por Heaviside utilizando la analogía entre las leyes de la gravitación y el electromagnetismo y usando el cálculo vectorial [3]; la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein [5, 16, 35] (obtenidas explícitamente en la referencia [35]); por medio del uso de los cuaterniones de Hamilton [17]; también pueden ser obtenidas de la teoría relativista de la gravitación de Logunov por linealización de sus ecuaciones (ver el capítulo 17 de la referencia [8], donde se obtienen dichas ecuaciones en función de los potenciales, gravitacional y de Heaviside, denotadas sus componentes en ese libro como V^β , $\beta = 1, 2, 3$).

Cabe destacar aquí que aunque las ecuaciones que describen los fenómenos gravitacionales no son lineales, la linealización de dichas ecuaciones nos sirve para describir campo gravitacionales débiles, que tienen aplicación, por ejemplo en nuestro sistema solar. Ya vimos en el Capítulo 1 que la teoría gravitodinámica describe sistemas gravitacionales dependientes del

tiempo que la teoría Newtoniana no considera, pues en esta última las interacciones no consideran el retardo en la propagación de los campos, por lo cual, la teoría gravitodinámica cumple con el principio de causalidad.

Una vez establecidas las ecuaciones de Jefimenko, hemos introducido el sistema de unidades llamado Sistema Gaussiano Gravitacional (SGG) donde hemos obtenido cantidades racionalizadas para los campos gravitacional y de Heaviside. Estas cantidades nos han permitido escribir las ecuaciones de la gravitodinámica de una forma que es más fácil obtener soluciones para ellas. Hemos supuesto que existe una configuración del campo gravitodinámico en una forma similar a aquellas encontradas en los trabajos realizados por Chubykalo y Espinoza [36,37], donde los autores han obtenido los fundamentos matemáticos sobre la hipótesis de Kapitsa [38] acerca del origen de las bolas de fuego relacionadas con los procesos de interferencia. La configuración del campo gravitodinámico en nuestro trabajo se ha basado en el hecho experimental de que las ondas gravitacionales existen, como ha sido confirmado por los experimentos realizados por los Observatorios de Ondas Gravitacionales por Interferometría Láser (LIGO, por sus siglas en inglés) y Virgo, resultados publicados en la referencia [39]. Hicimos un desarrollo formal acerca de este problema basados en los resultados teóricos obtenidos por Jefimenko. Hicimos uso de las ecuaciones gravitodinámicas libres, esto es, las ecuaciones básicas para el vacío.

Es importante enfatizar que las ondas gravitacionales fueron predichas en la teoría general de la relatividad linealizando las ecuaciones de campo de Einstein y como ya mencionamos esta aproximación es válida para campos gravitacionales débiles, también, que una teoría completa de la gravedad no es lineal, pero esta aproximación lineal nos permite estudiar una gran variedad de fenómenos gravitacionales donde se considera la inducción gravitacional. De la misma manera que la teoría electromagnética no es lineal, las ecuaciones de Maxwell son aplicables a una amplia gama de fenómenos electromagnéticos.

Nuestros resultados presentados aquí no intentan reemplazar las teorías no lineales de la gravitación, como la teoría de la relatividad general de Einstein [40] o la teoría relativista de la

gravitación de Logunov [41], pero queremos mostrar la importancia de una teoría gravitacional lineal, no sólo histórica sino también metodológica, porque mostraremos que existen propiedades de los campos débiles que no se entienden porque no tuvieron la oportunidad de aparecer en una teoría lineal de la gravitación.

2.1. Ecuaciones gravitacionales de Jefimenko

La teoría gravitodinámica es una generalización de la teoría de la gravitación de Newton, ya que la teoría Newtoniana de la gravitación describe perfectamente fenómenos de una amplia gama de masas, pero no considera el comportamiento de los campos de las distribuciones de masas en movimiento. Esta es la razón por la cual es necesario hacer una extensión de la teoría clásica de la gravitación de Newton.

Podemos escribir la teoría gravitacional de Newton en forma de una teoría de campos de fuerzas en términos del campo gravitacional \mathbf{g} como

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \quad (2.1)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0, \quad (2.2)$$

donde G es la constante de la gravitación, ρ es la densidad de masa dada por $\rho = dm/d^3x$ y dm es el elemento de masa contenido en el elemento de volumen d^3x . La ecuación (2.1) claramente nos indica que la densidad de masa ρ es la fuente del campo gravitacional \mathbf{g} , mientras que la ecuación (2.2) nos muestra que el campo gravitacional \mathbf{g} es conservativo.

Jefimenko comenzó a deducir sus ecuaciones a partir de postular sus soluciones retardadas (1.3) y (1.4) y haciendo uso del cálculo vectorial y algunas identidades vectoriales. Las ecuaciones de Jefimenko en el SI de unidades (llamadas por nosotros ecuaciones de la gravitodinámica)

son:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{k} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J}, \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ es la densidad de corriente de masa. De este sistema de ecuaciones (2.3)-(2.6) es de donde se hace evidente que la analogía entre las ecuaciones de Maxwell y las de Jefimenko no es perfecta: aunque sólo tenemos un tipo de masa, tenemos dos tipos de carga eléctrica. Mientras que el campo eléctrico surge desde las cargas positivas que lo generan y se dirige hacia cargas negativas, el campo gravitacional siempre se dirige hacia las masas por las cuales se crea. Otra diferencia es que el campo magnético es dextrorrotatorio (mano derecha) con respecto a la corriente eléctrica a través de la cual se genera, mientras que el campo de Heaviside siempre es levorotatorio (mano izquierda) con respecto a la corriente de masa a través de la cual se genera, como se puede ver del signo que antecede a la densidad de corriente de masa \mathbf{J} en la ecuación (2.6). A pesar de estas diferencias, el sistema de ecuaciones obtenido por Jefimenko describe correctamente el comportamiento de los campos gravitacionales débiles, que como ya hemos visto se deducen de diferentes formulaciones.

Definimos un sistema Gaussiano de unidades para el campo gravitodinámico, con el fin de simplificar nuestros cálculos. Hemos llamado a éste Sistema Gaussiano Gravitacional (SGG). Para hacer esto necesitamos introducir las cantidades racionalizadas \mathbf{G} y \mathbf{K} ¹. Si introducimos tales cantidades racionalizadas \mathbf{G} y \mathbf{K} en el sistema de ecuaciones (2.3)-(2.6) obtenemos el si-

¹Para evitar confusiones, en el Cuadro 2.1 la G cursiva es la constante de la gravitación, al igual que antes, mientras \mathbf{G} es el campo gravitacional ordinario, las magnitudes de \mathbf{G} y \mathbf{K} las denotamos por $\|\mathbf{G}\|$ y $\|\mathbf{K}\|$ respectivamente. La racionalización de las unidades de \mathbf{G} y \mathbf{K} nos permite que ambos campos posean las mismas unidades, ambos campos se miden en masa por unidad de área, a las cuales hemos llamado $Jef = g/cm^2$, en honor a Jefimenko.

	Campo gravitacional	Campo de Heaviside
Fórmula	$\mathbf{G} = G^{-1}\mathbf{g}$	$\mathbf{K} = G^{-1}c\mathbf{k}$
Unidades	$[\ \mathbf{G}\] = ML^{-2} = Jef$	$[\ \mathbf{K}\] = ML^{-2} = Jef$

Cuadro 2.1: Cantidades racionalizadas del Sistema Gaussiano Gravitacional SGG.

guiente sistema de ecuaciones en el SGG.

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = -4\pi\rho, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{G} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{K} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ es como antes, la densidad de corriente de masa y \mathbf{v} es la velocidad de la distribución de masa ρ que genera los campos \mathbf{G} y \mathbf{K} .

2.2. Ondas gravitacionales

La teoría gravitodinámica predice también la existencia de ondas gravitacionales. Hemos estudiado las propiedades de tales ondas, en esta y otras secciones (especialmente en la sección 2.4) donde hemos estudiado la energía y el vector de Poynting de tales ondas). En esta sección obtuvimos la ecuación de onda para los campos gravitacional y de Heaviside, haciendo cálculos directos sobre el sistema de ecuaciones (2.7)-(2.10), hemos visto que esas ecuaciones nos conducen a la ecuación de onda. Comenzamos calculando el rotacional de (2.9)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{G} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{K}, \quad (2.11)$$

sustituyendo la ecuación (2.10) en (2.9) y usando la identidad para el Laplaciano de un vector

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}, \quad (2.12)$$

para cualquier campo vectorial arbitrario \mathbf{V} y donde $\Delta = \nabla^2$ es el operador Laplaciano, obtenemos

$$\Delta \mathbf{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = -4\pi \left(\nabla \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right), \quad (2.13)$$

que es la ecuación inhomogénea de onda del campo gravitacional \mathbf{G} , donde además, se ha sustituido la ecuación (2.7).

De forma similar, tomando el rotacional de (2.10), sustituyendo (2.9), aplicando la identidad (2.12) y sustituyendo también (2.8) queda

$$\Delta \mathbf{K} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J}, \quad (2.14)$$

que es la ecuación inhomogénea de onda del campo de Heaviside.

Ambas expresiones (2.13) y (2.14) son ondas de campo propagándose en el espacio con velocidad c .

Si consideramos regiones sin distribuciones, ni corrientes de masa, tendremos las ecuaciones de onda homogéneas, esto es,

$$\Delta \mathbf{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

y

$$\Delta \mathbf{K} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones obtenidas (2.15) y (2.16) pueden resolverse por una suma de dos funciones vectoriales φ_1 y φ_2 ,

$$\varphi_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + \varphi_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) \quad (2.17)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el vector de onda². φ_1 y φ_2 son expresiones generales que representan ondas planas propagándose con velocidad c en direcciones opuestas. Entonces la solución (2.17) para la ecuación de onda puede deducirse por el método de separación de variables. Si introducimos la dependencia armónica por

$$\mathbf{G} = \|\mathbf{G}_0\| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} \hat{n}_{\mathbf{G}} \quad (2.18)$$

y

$$\mathbf{K} = \|\mathbf{K}_0\| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} \hat{n}_{\mathbf{K}}, \quad (2.19)$$

donde $\hat{n}_{\mathbf{G}}$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{G} y $\hat{n}_{\mathbf{K}}$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{K} , la ecuación de onda resulta en la relación de dispersión

$$\omega^2 - k^2 c^2 = 0. \quad (2.20)$$

Para la elección del signo $k = +\omega c$, obtenemos de las ecuaciones de la gravitodinámica

$$\mathbf{K} \cdot \hat{n}_{\mathbf{G}} = 0 \text{ y } \mathbf{G} \cdot \hat{n}_{\mathbf{K}} = 0 \quad (2.21)$$

y

$$\mathbf{K} \times \hat{n}_{\mathbf{G}} \|\mathbf{G}_0\| = \frac{\omega}{c} \|\mathbf{K}_0\| \hat{n}_{\mathbf{K}} \text{ y } \mathbf{G} \times \hat{n}_{\mathbf{K}} \|\mathbf{K}_0\| = \frac{\omega}{c} \|\mathbf{G}_0\| \hat{n}_{\mathbf{G}}. \quad (2.22)$$

De las ecuaciones (2.21) y (2.22) podemos ver que \mathbf{G} y \mathbf{K} son vectores mutuamente perpendiculares a la dirección de propagación y las amplitudes de \mathbf{G} y \mathbf{K} son iguales, esto es, $\|\mathbf{G}_0\| = \|\mathbf{K}_0\|$.

²Para evitar confusiones, hemos usado \mathbf{k} cursiva y negrita para representar el vector de onda, y negrita normal \mathbf{k} para representar el campo de Heaviside en el sistema SI de unidades.

2.3. Una solución de ondas gravitacionales con simetría axial

La predicción de ondas gravitacionales por medio de la teoría gravitodinámica nos permite buscar varios tipos de soluciones para el campo gravitodinámico en el vacío. Por ejemplo, como mostraremos en esta sección, existen soluciones que tienen propiedades interesantes. Esas soluciones tienen la forma de esferas de campo de Heaviside y anillos de campo gravitacional, de forma tal que la configuración total del campo gravitodinámico oscila. En tales esferas el campo de Heaviside es tangente en todos los puntos sobre la superficie de esta esfera, y el campo gravitacional es tangente en todos los puntos del anillo. Comenzamos esta sección escribiendo las ecuaciones de la gravitodinámica para el vacío, esto es, para regiones donde $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$.

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0, \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = 0, \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{G} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}, \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{K} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}. \quad (2.26)$$

En la electrodinámica es común referirse a la polaridad estándar en las soluciones de las ecuaciones de Maxwell cuando el campo eléctrico \mathbf{E} es un vector polar y la inducción magnética \mathbf{B} es uno axial o pseudovector. Esto significa que después de una transformación de inversión de los ejes coordenados, \mathbf{E} cambia su signo, mientras que \mathbf{B} lo mantiene. Siguiendo la analogía entre ambas teorías hemos buscado soluciones a esas ecuaciones con polaridad estándar, esto es, cuando el vector \mathbf{G} es polar y \mathbf{K} es axial. Hemos propuesto resolver el sistema de las ecuaciones de la gravitodinámica por el método de separación de variables, escribiendo \mathbf{G} y \mathbf{K} como sigue:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})\mu(t) \quad (2.27)$$

y

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r})\nu(t), \quad (2.28)$$

donde $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})$ es un vector polar y $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r})$ es uno axial, además $\mu(t)$ y $\nu(t)$ son funciones del tiempo. Sustituyendo (2.27) y (2.28) en el sistema (2.23)-(2.26)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c\mu(t)} \frac{\partial \nu(t)}{\partial t} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}), \quad (2.31)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c\nu(t)} \frac{\partial \mu(t)}{\partial t} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}). \quad (2.32)$$

Podemos igualar las partes temporales de ambas ecuaciones a ciertas constantes para obtener un sistema consistente,

$$-\frac{1}{\mu(t)} \frac{\partial \nu(t)}{\partial t} = \omega_1 \quad (2.33)$$

y

$$\frac{1}{\nu(t)} \frac{\partial \mu(t)}{\partial t} = \omega_2. \quad (2.34)$$

Igualando ambas ecuaciones a ω , para obtener soluciones sinusoidales y obtener sólo tres constantes en nuestro sistema (2.29)-(2.32)

$$\nu(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (2.35)$$

y

$$\mu(t) = A \sin(\omega t - \delta), \quad (2.36)$$

donde A y δ son constantes arbitrarias.

Así, de esta manera las ecuaciones para $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\kappa}$ se convierten en

$$\nabla \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) \quad (2.37)$$

y

$$\nabla \times \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}). \quad (2.38)$$

Debido a la linealidad de las componentes espaciales de los campos, podemos sumar (2.37) y (2.38), entonces, podemos definir el vector

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}), \quad (2.39)$$

tal que, obtenemos

$$\nabla \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{r} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}). \quad (2.40)$$

Antes que nada, resolvemos (2.40), luego, una vez obtenido $\boldsymbol{\sigma}$, podemos calcular $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\kappa}$. Notemos que el vector $\boldsymbol{\sigma}$ no tiene polaridad, pero podemos expresar sus partes polar y axial como

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \} \quad (2.41)$$

y

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \}. \quad (2.42)$$

Tomando el rotacional de (2.41) y (2.42) e invirtiendo las coordenadas de la ecuación (2.40), tenemos

$$\nabla \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \{ \nabla \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) - \nabla \times \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) + \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \right\} = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

y

$$\nabla \times \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \{ \nabla \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) + \nabla \times \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) - \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \right\} = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}), \quad (2.44)$$

podemos estar seguros que el sistema se satisface. Lo único que necesitamos hacer es hallar la solución de (2.40), para hallar la solución del sistema (2.37)-(2.38). Para obtener tal solución consideramos el vector σ en coordenadas esféricas y suponemos que la solución tiene simetría axial

$$\sigma = \sigma_r(\mathbf{r}, \theta)\hat{r} + \sigma_\theta(\mathbf{r}, \theta)\hat{\theta} + \sigma_\phi(\mathbf{r}, \theta)\hat{\phi}. \quad (2.45)$$

El rotacional de σ en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned} \nabla \times \sigma &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r\sigma_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r\sigma_\theta)}{\partial \phi} \right\} \hat{r} \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial \phi} - \frac{\partial(r\sigma_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right\} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r\sigma_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial \theta} \right\} \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones tomando en cuenta la ecuación (2.40) y comparándola con (2.45) y (2.46)

$$\frac{\partial(\sigma_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} = \frac{\omega r \sigma_r \sin \theta}{c}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial(r\sigma_\phi)}{\partial r} = -\frac{\omega r \sigma_\theta}{c}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial(r\sigma_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial \theta} = \frac{\omega r \sigma_\phi}{c}. \quad (2.49)$$

Expresando las variables σ_r y σ_θ de las ecuaciones (2.47) y (2.48) y reemplazándolas en (2.49), obtenemos la siguiente ecuación diferencial parcial para σ_ϕ , a saber,

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\sigma_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_\phi \sin \theta) \right\} + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \sigma_\phi = 0. \quad (2.50)$$

Si proponemos $\sigma_\phi = R(r)\Theta(\theta)$ como una solución para (2.50), hallamos que R y Θ satisfacen

$$r^2 \frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \lambda \right) rR = 0 \quad (2.51)$$

y

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta \sin\theta) \right\} - \lambda\Theta = 0, \quad (2.52)$$

donde λ es una constante arbitraria. Si $\lambda = 0$, entonces la solución para rR en la ecuación (2.51) debe ser $A \cos \omega r/c + B \sin \omega r/c$, donde A y B son constantes, pero, en general, A y B dependen de r , así que

$$rR = A(r) \cos \frac{\omega r}{c} + B(r) \sin \frac{\omega r}{c}. \quad (2.53)$$

Sustituyendo (2.53) en (2.51) obtenemos las siguiente dos ecuaciones

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{\lambda}{r^2} A + \frac{2\omega}{c} \frac{dB}{dr} = 0 \quad (2.54)$$

y

$$\frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{\lambda}{r^2} B - \frac{2\omega}{c} \frac{dA}{dr} = 0. \quad (2.55)$$

Considerando el hecho de que los coeficientes de seno y coseno deben ser cero por separado, debido a que estas funciones tienen el mismo argumento.

Para resolver (2.54) y (2.55) proponemos $A(r) = ar^m$ y $B(r) = br^n$, donde los coeficientes a y b son constantes y $n, m \in \mathbb{N}$ también son constantes. Luego, obtenemos las siguientes ecuaciones características, sustituyendo las soluciones propuestas en las ecuaciones (2.54) y (2.55),

$$am(m-1) + \lambda a + \frac{2\omega}{c} bnr^{n-m+1} = 0 \quad (2.56)$$

y

$$bn(n-1) + \lambda b - \frac{2\omega}{c} amr^{m-n+1} = 0. \quad (2.57)$$

Ambas ecuaciones (2.56) y (2.57) se satisfacen para los siguientes dos casos:

Caso 1) $m = 0$, $n = -1$, $\lambda = -2$ y $a = -\omega b/c$, y considerando la ecuación (2.53) para $b = 1$,

obtenemos

$$R = \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\omega r}{c} \cos \frac{\omega r}{c} + \sin \frac{\omega r}{c} \right). \quad (2.58)$$

Caso 2) $m = -1$, $n = 0$, $\lambda = -2$ y $b = -\omega a/c$ y considerando la ecuación (2.53) para $a = 1$, obtenemos

$$R = \frac{1}{r^2} \left(\cos \frac{\omega r}{c} + \frac{\omega r}{c} \sin \frac{\omega r}{c} \right). \quad (2.59)$$

Entonces, de las soluciones (2.58) y (2.59) tenemos la solución general para la ecuación (2.51)

$$R(r) = \frac{C_1}{r^2} \left(-\frac{\omega r}{c} \cos \frac{\omega r}{c} + \sin \frac{\omega r}{c} \right) + \frac{C_2}{r^2} \left(\cos \frac{\omega r}{c} + \frac{\omega r}{c} \sin \frac{\omega r}{c} \right), \quad (2.60)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Esta solución general puede ser expresada como

$$R(r) = \frac{C}{r^2} \left\{ \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) \right\}, \quad (2.61)$$

donde C y α son constantes arbitrarias.

Ahora consideremos la ecuación (2.52), la cual para $\lambda = -2$ se convierte en

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta \sin \theta) \right\} + 2\Theta = 0. \quad (2.62)$$

Esta ecuación tiene la solución general:

$$\Theta(\theta) = C_3 \sin \theta + C_4 (\cot \theta - \sin \theta \ln |\csc \theta - \cot \theta|), \quad (2.63)$$

donde C_3 y C_4 también son constantes arbitrarias.

Debido a que en $\theta = (2n + 1)\pi$, la solución correspondiente tiene una singularidad, por lo que podemos hacer $C_4 = 0$. También, debido a la homogeneidad de la ecuación para el vector σ , podemos hacer $C_3 = 1$. De esta manera, podemos escribir la solución de la ecuación (2.50)

como sigue,

$$\sigma_{\hat{\phi}}(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \left\{ \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) \right\} \sin \theta. \quad (2.64)$$

Podemos usar el sistema (2.47)-(2.49) para hallar $\sigma_r(r, \theta)$ y $\sigma_\theta(r, \theta)$, i. e.

$$\sigma_r(r, \theta) = \frac{2c}{\omega r^3} \left\{ \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) \right\} \cos \theta \quad (2.65)$$

y

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{c}{\omega r^3} \left\{ \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) \right\} \sin \theta. \quad (2.66)$$

Para escribir las soluciones de una forma abreviada definimos

$$\zeta = \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right) \quad (2.67)$$

y

$$\eta = \zeta - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \alpha\right), \quad (2.68)$$

tal que podemos escribir la solución de la ecuación (2.40) en coordenadas esféricas como

$$\sigma = \xi \left(\frac{2\zeta}{r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \xi \left(\frac{\eta}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta} + \xi \left(\frac{\omega \zeta}{c r^2} \sin \theta \right) \hat{\phi}, \quad (2.69)$$

donde hemos multiplicado por $\xi \omega/c$ por conveniencia y ξ tiene dimensiones $[\xi] = ML$. De esta manera, podemos ver que la componente en la dirección de $\hat{\phi}$ corresponde al vector γ y las componentes en las direcciones \hat{r} y $\hat{\theta}$ corresponde al vector κ , esto es,

$$\gamma = \xi \left(\frac{\omega \zeta}{c r^2} \sin \theta \right) \hat{\phi} \quad (2.70)$$

y

$$\kappa = \xi \left(\frac{2\zeta}{r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \xi \left(\frac{\eta}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta}. \quad (2.71)$$

Finalmente, escribimos la solución para los campos gravitacional y de Heaviside de la siguiente forma

$$\mathbf{G} = \left\{ \xi \left(\frac{\omega \zeta}{cr^2} \sin \theta \right) \hat{\phi} \right\} \sin(\omega t - \delta) \quad (2.72)$$

y

$$\mathbf{K} = \left\{ \xi \left(\frac{2\zeta}{r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \xi \left(\frac{\eta}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta} \right\} \cos(\omega t - \delta), \quad (2.73)$$

donde hemos considerado las soluciones temporales (2.35)-(2.36) y las soluciones espaciales (2.70)-(2.71).

La condición necesaria y suficiente para que las soluciones (2.72) y (2.73) no diverjan en $r = 0$ es,

$$\zeta(0) = \left\{ \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) + \frac{\omega r}{c} \sin \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) \right\} \Big|_{r=0} = 0 \quad (2.74)$$

para que tal condición sea satisfecha necesitamos $\cos \alpha = 0$, esto implica que $\alpha = (n + 1/2)\pi$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Ahora, calculamos los siguientes límites para asegurar la convergencia de las soluciones,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\zeta}{r^2} = 0; \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\zeta}{r^3} = \frac{\omega^3}{3c^3} \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\eta}{r^3} = -\frac{2\omega^3}{2c^3}.$$

Estos límites están evaluados para $\alpha = \pi/2$, además ζ y η han sido expandidos en series de potencias de r .

Tenemos la densidad de energía³ definida como

$$w = -\frac{1}{8\pi} (\|\mathbf{G}\|^2 + \|\mathbf{K}\|^2). \quad (2.75)$$

Así, hemos obtenido los límites

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{G} = 0; \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{2\xi\omega^3}{3c^3} \cos \omega t \hat{k} \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow 0} w = \frac{\xi^2\omega^6}{18\pi c^6} \cos^2 \omega t, \quad (2.76)$$

³Ver página 303 de Gravitation and cogravitation [11]. pero en nuestro caso hemos usado unidades SGG.

\hat{k} es el vector unitario en la dirección $z+$ del sistema Cartesiano de coordenadas.

Proponemos $\alpha = \pi/2$ y $\delta = 0$, δ define la fase inicial de la onda de los campos \mathbf{G} y \mathbf{K} . Así podemos escribir las soluciones convergentes para esos campos:

$$\mathbf{G} = \left\{ \xi \left(\frac{\omega \zeta}{c r^2} \sin \theta \right) \hat{\phi} \right\} \sin \omega t \quad (2.77)$$

y

$$\mathbf{K} = \left\{ \xi \left(\frac{2\zeta}{r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \xi \left(\frac{\eta}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta} \right\} \cos \omega t, \quad (2.78)$$

donde

$$\zeta = -\frac{\omega r}{c} \cos \frac{\omega r}{c} + \sin \frac{\omega r}{c} \quad \text{y} \quad \eta = \zeta - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \sin \frac{\omega r}{c}.$$

Concluimos que las soluciones (2.77) y (2.78) para las ecuaciones de la gravitodinámica en el vacío involucran la existencia novedosa de formaciones esféricas y anulares del campo gravitodinámico.

2.4. Análisis de la energía del campo gravitodinámico

La expresión para la densidad de energía dada por la ecuación (2.75) puede ser cambiada después de alguna manipulación algebraica en otra que contenga una parte dependiente del tiempo y otra independiente, esto es:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\xi^2}{16\pi} \left\{ \frac{\omega^2 \zeta^2}{c^2 r^4} \sin^2 \theta + \left[\frac{4\zeta^2}{r^6} \cos^2 \theta + \frac{\eta}{r^6} \sin^2 \theta \right] \right\} \\ &\quad - \frac{\xi^2}{16\pi} \left\{ \left[\frac{4\zeta^2}{r^6} \cos^2 \theta + \frac{\eta}{r^6} \sin^2 \theta \right] - \frac{\omega^2 \zeta^2}{c^2 r^4} \sin^2 \theta \right\} \cos(2\omega t). \end{aligned} \quad (2.79)$$

De esta expresión hallamos los lugares geométricos donde la densidad de energía no depende del tiempo t . Esos lugares geométricos son:

Los puntos sobre el eje z donde se satisface lo siguiente:

$$\tan \frac{\omega z}{c} = \frac{\omega z}{c},$$

con $\theta = 0, \pi$ y $\zeta = 0$.

Las superficies donde r satisface

$$\eta^2 = \zeta^2 \left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - 4 \cot^2 \theta \right).$$

La sección transversal de tales superficies está dibujada como curvas discontinuas en la Figura 2.1, mientras las líneas continuas representan las esferas de campo de Heaviside \mathbf{K} , llamadas esferas-K y las esferas de campo gravitacional \mathbf{G} , llamadas esferas-G⁴.

Vemos en esta gráfica la sección transversal en el plano $x = 0$ de las superficies donde la densidad de energía es constante. Notemos que esas superficies no cambian en el tiempo en el vacío, lo que significa que estas curvas no se deforman ni se desplazan cuando transcurre el tiempo. La energía gravitodinámica total E_{TG} dentro de una esfera de radio R centrada en el origen viene dada por

$$E_{TG} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w(r, \theta, \phi, t) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = E_G(R) + E_G(R, t), \quad (2.80)$$

donde

$$E_G(R) = -\frac{\xi^2}{6R^3} \left\{ \frac{\omega^4 R^4}{c^4} - \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \sin^2 \left(\frac{\omega r}{c} \right) - \zeta^2 \right\} \quad (2.81)$$

y

$$E_G(R, t) = \frac{\xi^2}{6R^3} \zeta \eta \cos(2\omega t). \quad (2.82)$$

⁴Llamadas esferas-K porque el campo de Heaviside \mathbf{K} es tangente a todos los puntos de la esfera y esferas-G porque el ecuador de dichas esferas posee un campo gravitacional \mathbf{G} tangente en todos los puntos del anillo.

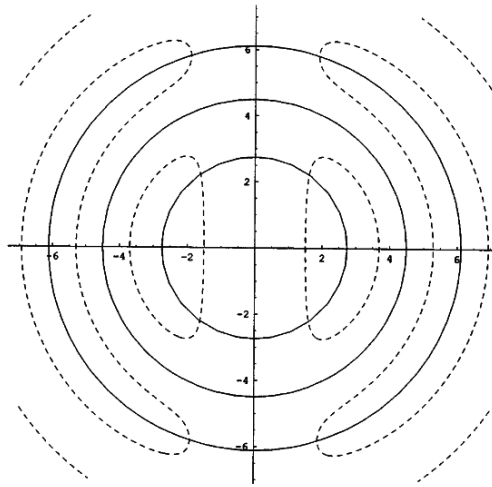


Figura 2.1: Sección transversal de las superficies donde la densidad de energía es constante (líneas punteadas). Las líneas continuas representan las esferas-K y las esferas-G. Las figuras de esta sección fueron hechas con el programa Mathematica™. El eje z es la ordenada y el eje y es la abscisa, además hemos puesto en el programa $c = 1$ y $\omega = 1$, por simplicidad.

En este caso

$$\zeta = -\frac{\omega R}{c} \cos \frac{\omega R}{c} + \sin \frac{\omega R}{c} \quad \text{y} \quad \eta = \zeta - \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \sin \frac{\omega R}{c}.$$

Podemos ver de la ecuación (2.82) que la energía gravitodinámica no cambia con el tiempo dentro de las esferas de radios R , las cuales son soluciones de las siguientes ecuaciones obtenidas al considerar $\zeta = 0$ y $\eta = 0$,

$$\tan \frac{\omega R}{c} = \frac{\omega R}{c} \tag{2.83}$$

y

$$\tan \frac{\omega R}{c} = \frac{\frac{\omega R}{c}}{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}. \tag{2.84}$$

Las superficies cuyos radios satisfacen ecuación (2.83) contienen solamente el campo de Heaviside, no hay campo gravitacional sobre esas superficies, como podemos verificar de las ecuaciones (2.77) y (2.78) tomando $\zeta = 0$.

Ahora, analizamos el flujo de energía contenida en la onda de campo dada por las ecuaciones (2.77) y (2.78). Como primer paso calculamos el vector de Poynting gravitacional en unidades

SGG,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{K} \times \mathbf{G} = \frac{\xi^2}{8\pi} \left\{ \frac{\omega \zeta \eta \sin^2 \theta}{r^5} \hat{r} - \frac{\omega \zeta^2 \sin(2\theta)}{r^5} \hat{\theta} \right\} \sin 2\omega t. \quad (2.85)$$

Ahora, calculamos el momento total del campo gravitodinámico dentro de una esfera de radio r centrado en el origen. Hicimos esto haciendo uso del hecho de que el vector de Poynting gravitacional es proporcional al vector de la densidad de momento, así que podemos calcular la integral del vector de Poynting sobre el volumen de la esfera de radio r . Para facilitar esto, hemos expresado los vectores unitarios de las coordenadas esféricas en cartesianas, a saber,

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \text{ y } \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k},$$

entonces,

$$\int \int \int \mathbf{S} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{\xi^2 \omega \sin(2\omega t)}{8} \int \frac{\zeta^2}{r^3} \sin^4 \theta \Big|_0^\pi dr \hat{k} = 0. \quad (2.86)$$

Podemos interpretar este resultado como sigue. El momento total del campo gravitodinámico (2.77) y (2.78) en un volumen acotado por una esfera arbitraria centrada en el origen es *nulo* a cualquier tiempo dado. Hemos obtenido los lugares geométricos donde el vector de Poynting gravitacional es cero a cualquier instante, Para hacer esto, necesitamos la condición cuando el vector de Poynting gravitacional es cero. Por medio de la ecuación (2.85),

$$\zeta^2 \sin(2\theta) = 0 \text{ y } \zeta \eta \sin^2 \theta = 0. \quad (2.87)$$

De la primera ecuación de (2.87) tenemos:

(1) $\zeta = 0$. Esta condición satiface ambas ecuaciones (2.88). De esta condición hemos obtenido la ecuación

$$\tan \frac{\omega r}{c} = \frac{\omega r}{c}, \quad (2.88)$$

en consecuencia, los lugares geométricos para el caso (1) son esferas cuyos radios satisfacen (2.88).

(2) $\sin(2\theta) = 0$. Lo que significa que θ puede ser 0 , $\pi/2$ ó π .

(2a) $\theta = 0, \pi$. En este caso ambas ecuaciones satisfacen las condiciones (2.87). Por lo tanto, el lugar geométrico es el eje z .

(2b) $\theta = \pi/2$. Tenemos dos posibilidades para que las condiciones (2.87) se satisfagan, a saber: $\zeta = 0$, como en el caso (1) ó $\eta = 0$. De esta condición tenemos

$$\tan \frac{\omega r}{c} = \frac{\frac{\omega r}{c}}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \quad (2.89)$$

Así, tenemos que los lugares geométricos son anillos en el plano $z = 0$ cuyos radios satisfacen la ecuación (2.89), esos anillos corresponden al caso $\theta = \pi/2$ y $\eta = 0$. En todos los puntos sobre esos anillos el campo de Heaviside es *cero*.

El vector de Poynting gravitacional es tangente en todos los puntos sobre esas superficies. Esto puede verse de la ecuación (2.79). Este hecho aclara la conservación de energía dentro de las esferas de radios r .

Los lugares geométricos donde el vector de Poynting para el campo gravitodinámico dado por (2.77) y (2.78) es nulo a cualquier instante son:

Lugar geométrico 1. El eje z , llamado *eje de Heaviside* porque el campo gravitacional \mathbf{g} no existe ahí.

Lugar geométrico 2. Anillos en el plano $z = 0$ cuyos radios satisfacen la ecuación (2.89), llamados *anillos gravitacionales* porque existe campo gravitacional sobre ellos.

Lugar geométrico 3. Esferas centradas en el origen cuyos radios satisfacen (2.88), llamadas *esferas de Heaviside* porque no hay campo gravitacional sobre ellas.

Veamos las gráficas donde se muestra la distribución del campo vectorial de Poynting gravitacional para aclarar los resultados obtenidos en esta sección. Debido a la simetría axial de la densidad de energía y la densidad de flujo de energía, podemos considerar sólo la distribución en el plano $x = 0$.

En la Figura 2.2 podemos ver el eje de Heaviside vertical que coincide con el eje z , y podemos

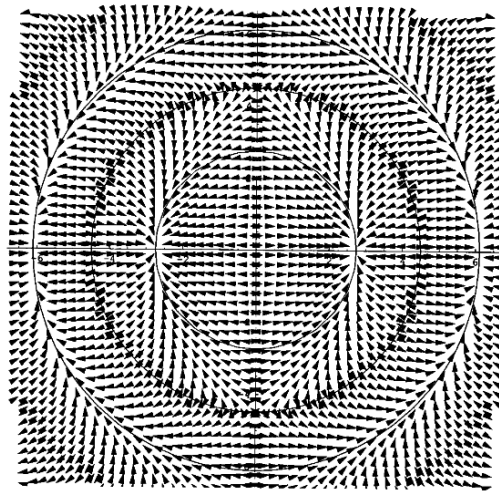


Figura 2.2: Distribución del campo vectorial de Poynting gravitacional en el plano $x = 0$, para un instante dado de tiempo t . El eje z es la ordenada y el eje y es la abscisa.

ver la sección transversal de tres esferas, a la primera llamaremos esfera-G, a la segunda esfera-K y esfera-G a la última, en un instante arbitrario. La energía gravitodinámica total se conserva dentro de las esferas-G debido a que el vector de flujo de energía en la superficie de esta esfera solo tiene componentes tangenciales. Podemos ver también que la energía se transfiere de esas esferas-G hacia el anillo gravitacional (el ecuador de tales esferas) y después de un período definido por la función $\sin(2\omega t)$ en la ecuación (2.80) el movimiento se invierte. Dentro de la primera esfera-G la energía se transfiere desde el eje de Heaviside al anillo gravitacional y habiendo pasado algún tiempo vuelve. La energía dentro de la esfera-K también se conserva, podemos ver esto porque el vector de Poynting gravitacional es cero en cada punto de la esfera-K graficada. La energía se transfiere desde la superficie a la esfera-K a los anillos gravitacionales de las esferas-G. Un intercambio análogo de energía ocurre entre las siguientes esferas-G y esferas-K.

Queremos enfatizar el hecho de que el campo vectorial de Poynting gravitacional invierte su dirección después de un tiempo debido a la función $\sin(2\omega t)$ presente en la ecuación (2.80).

En la Figura 2.3, podemos ver la sección transversal del campo vectorial de Poynting gravitacional en el plano $z = 0$. En la Figura 2.4 hemos obtenido la energía decreciente en el intervalo

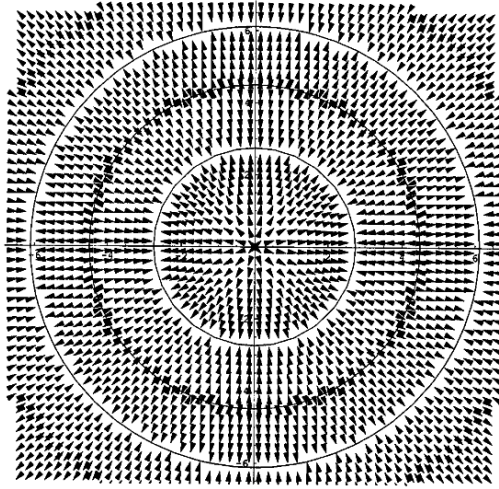


Figura 2.3: Distribución del campo vectorial de Poynting gravitacional en el plano $z = 0$, para un instante dado de tiempo t . El eje x es la ordenada y el eje y es la abscisa.

$R \in [0, 7]$, donde hemos trazado las gráficas de la energía gravitodinámica total E_{TG} para cuatro diferentes valores de tiempo, esto es, $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/4$. Hemos escogido esos valores debido a la periodicidad de la función $\cos(2\omega t)$ en el término dependiente del tiempo de esta energía. Aquí podemos ver como la energía está cambiando para diferentes valores del tiempo. Por ejemplo, podemos ver que en el punto $(2,75, 3,8)$ todas las curvas se intersectan, esto significa que a $R = 2,74 \text{ cm}$ obtenemos la energía gravitodinámica total $E_{TG} = 3,8 \times 10^{-3} \text{ erg}$ ⁵. Ahora, mostramos ambas dependencias en gráficas tridimensionales y las analizamos. Debido a la periodicidad del término dependiente del tiempo las hemos fijado para $t \in [0, 2\pi]$. Primero, tenemos en la Figura 2.5 el intervalo $R \in [0, 1]$. En la Figura 2.6 mostramos la energía gravitodinámica en el intervalo $R \in [0, 10]$.

También mostramos la gráfica de contorno de dicha energía gravitodinámica total en la Figura 2.7.

Por último, mostramos las gráficas de las secciones transversales de ambos campos. En la Figura 2.8 tenemos el campo gravitacional en el plano $z = 0$. En la Figura 2.9 hemos dibujado

⁵Esos valores de la distancia y la energía son sólo de referencia, porque tenemos que recordar que hemos escogido los valores $\omega = 1$ y $c = 1$.

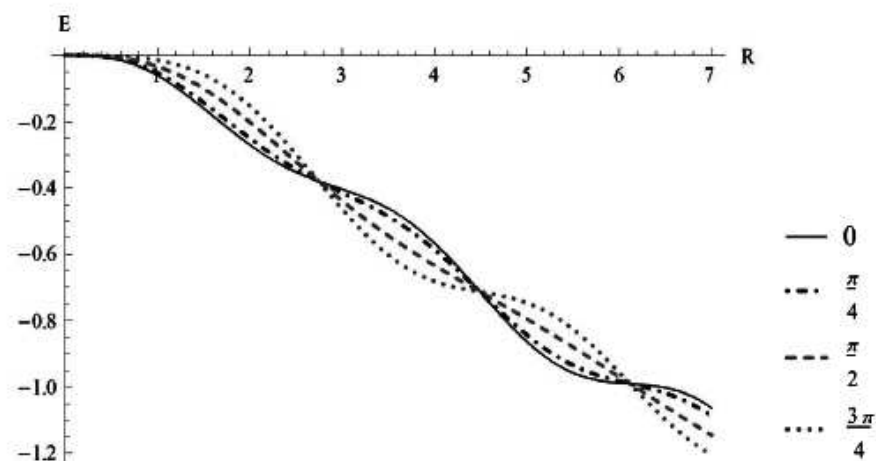


Figura 2.4: Esta gráfica muestra como la energía gravitodinámica total E_{TG} se alterna cuando la distancia varía para diferentes valores del tiempo $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/4$ y para $R \in [0, 7]$.

la sección transversal del campo de Heaviside en los planos $x = 0$ y $y = 0$.

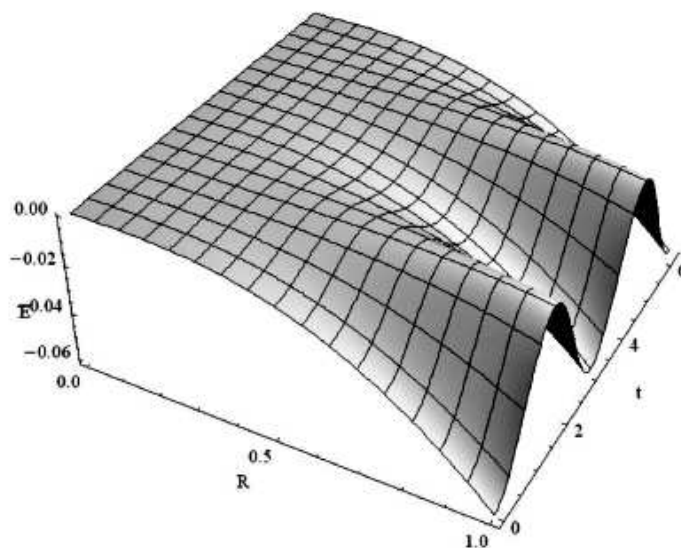


Figura 2.5: Gráfica de la energía gravitodinámica total contenida en las esferas-G y las esferas-K para los intervalos $R \in [0, 1]$ y $t \in [0, 2\pi]$.

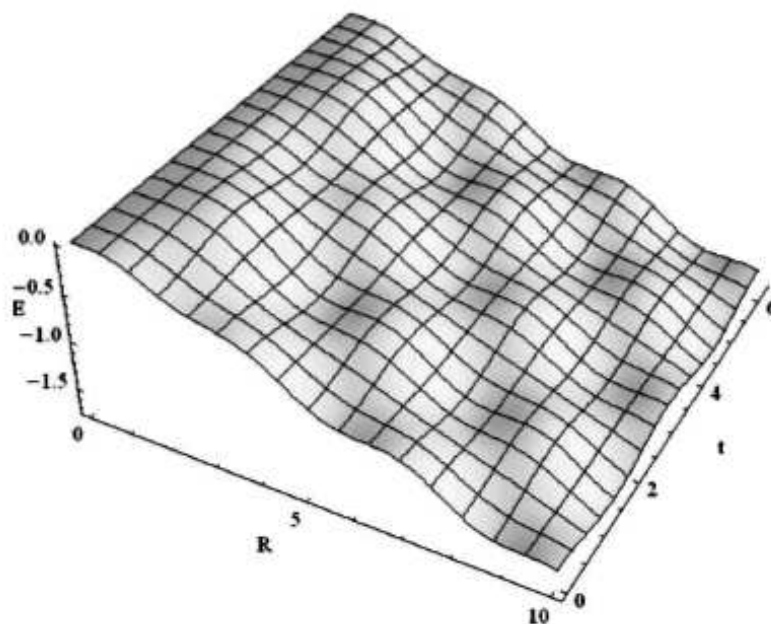


Figura 2.6: Energía gravitodinámica total en los intervalos $R \in [0, 10]$ y $t \in [0, 2\pi]$.

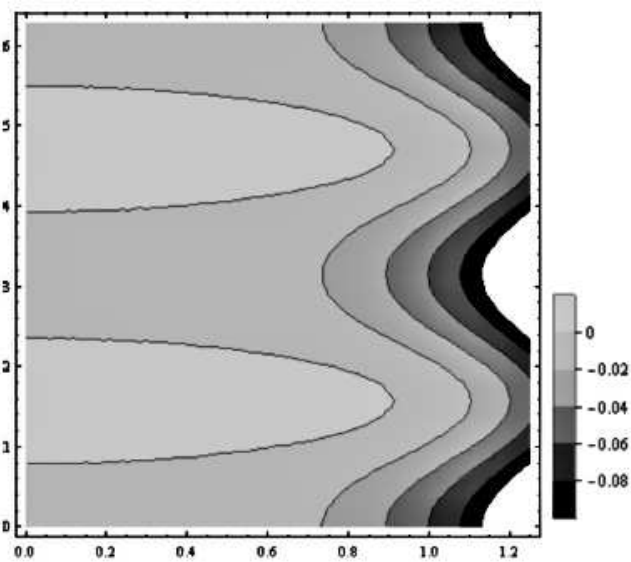


Figura 2.7: Gráfica de contorno de la energía gravitodinámica total en los intervalos $R \in [0, 10]$ y $t \in [0, 2\pi]$. La sección transversal donde la energía gravitodinámica total es nula forma semi-ovoides.

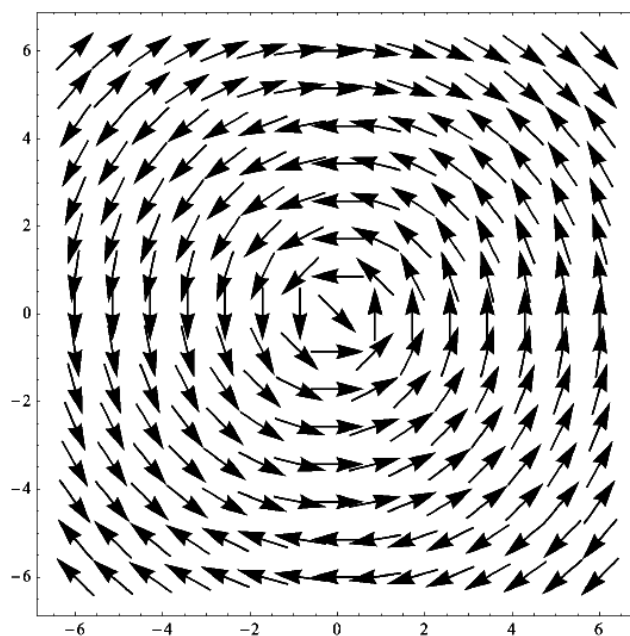


Figura 2.8: Formación anular del campo gravitacional en el plano $z = 0$.

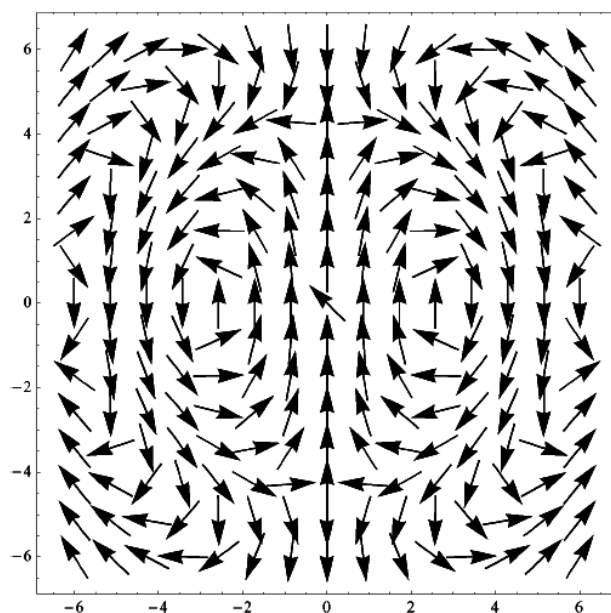


Figura 2.9: Sección transversal del campo de Heaviside en los planos $x = 0$ y $y = 0$. Este campo no tiene componentes en el plano $z = 0$.

2.5. Convergencia de la soluciones \mathbf{G} y \mathbf{K}

Podemos representar las soluciones (2.77) y (2.78) como la superposición de dos ondas propagándose en direcciones opuestas en cada punto, de la misma forma que la ecuación (2.17). Para lograr esto necesitamos hacer una transformación algebraica.

Denotemos por

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{G}_{(\rightarrow)} + \mathbf{G}_{(\leftarrow)}, \quad (2.90)$$

a la solución del campo gravitacional convergente. Esta \mathbf{G}_c es la superposición de dos ondas $\mathbf{G}_{(\rightarrow)}$ y $\mathbf{G}_{(\leftarrow)}$ propagándose en direcciones opuestas en cada punto.

De manera similar, denotemos

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{(\rightarrow)} + \mathbf{K}_{(\leftarrow)}, \quad (2.91)$$

a la solución del campo de Heaviside convergente. Estas soluciones convergen en

$$r = 0 \Leftrightarrow \delta = (n + 1/2)\pi,$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, donde en ambos caso tenemos

$$\mathbf{G}_{(\rightarrow)} = \frac{\xi \omega \sin \theta}{2cr^2} \left\{ \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) \right\} \hat{\phi}, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{G}_{(\leftarrow)} = -\frac{\xi \omega \sin \theta}{2cr^2} \left\{ \cos\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) \right\} \hat{\phi}, \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(\rightarrow)} &= \frac{\xi \cos \theta}{r^3} \left\{ \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) - \frac{\omega r}{c} \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) \right\} \hat{r} \\ &+ \frac{\xi \sin \theta}{2r^3} \left\{ -\frac{\omega r}{c} \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) + \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) \right\} \hat{\theta}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(\rightarrow)} &= \frac{\xi \cos \theta}{r^3} \left\{ \sin\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) - \frac{\omega r}{c} \cos\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) \right\} \hat{r} \\ &+ \frac{\xi \sin \theta}{2r^3} \left\{ -\frac{\omega r}{c} \cos\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) + \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \sin\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) \right\} \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Las soluciones (2.92)-(2.95) son soluciones de las ecuaciones de la gravitodinámica para el vacío. También es posible demostrar las siguientes ecuaciones.

$$\mathbf{G}_{(\rightarrow)} = \frac{1}{2}(-\mathbf{G}_d + \mathbf{G}_c) \text{ y } \mathbf{G}_{(\leftarrow)} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_d + \mathbf{G}_c) \quad (2.96)$$

y

$$\mathbf{K}_{(\rightarrow)} = \frac{1}{2}(-\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_c) \text{ y } \mathbf{K}_{(\leftarrow)} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_c), \quad (2.97)$$

donde \mathbf{G}_d y \mathbf{K}_d son soluciones divergentes del sistema (2.7)-(2.11):

$$\mathbf{G}_d = \left\{ \xi \left(\frac{\omega \zeta_d}{cr^2} \sin \theta \right) \hat{\phi} \right\} \sin \omega t \quad (2.98)$$

y

$$\mathbf{k}_d = \left\{ \xi \left(\frac{2\zeta_d}{r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \xi \left(\frac{\eta_d}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta} \right\} \cos \omega t, \quad (2.99)$$

donde

$$\zeta_d = \cos \frac{\omega r}{c} + \frac{\omega r}{c} \sin \frac{\omega r}{c} \text{ y } \eta_d = \zeta_d - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \sin \frac{\omega r}{c}.$$

Como dijimos antes \mathbf{G}_{\rightarrow} , \mathbf{G}_{\leftarrow} , \mathbf{K}_{\rightarrow} y \mathbf{K}_{\leftarrow} son soluciones de las ecuaciones de la gravitodinámica para el vacío y son divergentes en $r = 0$. Podemos concluir esta sección enfatizando el hecho de que este tipo de soluciones permite el fenómeno de interferencia como una superposición de ondas gravitacionales propagándose en direcciones opuestas.

Capítulo 3

Ecuaciones gravitodinámicas covariantes

Una ventaja de trabajar con una teoría lineal de la gravitación, es que nos permite obtener un tensor de energía-momento del campo gravitacional, aunque las cantidades obtenidas son sólo una primera aproximación, este tensor describe la conservación del cuádrimomento. es decir, la conservación de la energía y el momento de los campos y la materia, a diferencia de la teoría de la relatividad general, donde la cantidad considerada como tensor energía-momento no es invariante ante la transformación general de coordenadas, esto significa que no es un tensor, sino un pseudo-tensor. Como Schrödinger demostró que siempre es posible elegir un sistema de referencia adecuado donde todas las componentes de dicho pseudotensor sean nulas [42]. Aún así, nuestro tensor obtenido explica la transferencia de energía y el momento de cualquier distribución de masas y campo gravitodinámico, pero válido únicamente para campos gravitacionales débiles.

3.1. Las transformaciones de Lorentz

Ahora, presentamos la terminología utilizada en la formulación covariante para la teoría gravitodinámica, o en otras palabras, en la teoría relativista de la gravitación invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

En el dominio de la relatividad especial, definimos un *marco de referencia* como un conjunto de cuatro coordenadas ortogonales, una de ellas es temporal y las otras tres son espaciales, por lo que podemos fijar la posición de las partículas o la distribución continua de masas en el espacio y un sistema de relojes fijos en ellos, para medir el tiempo. Un marco de referencia puede estar en reposo o en movimiento. Un caso especial de marco de referencia es el *marco de referencia inercial* en el que las partículas o cuerpos pueden moverse libremente. Todos los marcos de referencia inerciales se mueven unos con respecto a los otros con velocidad constante.

En los marcos de referencia inerciales, todas las leyes de la naturaleza son iguales. Esto significa que las ecuaciones que describen como se comporta la naturaleza son invariantes bajo las transformaciones de coordenadas y tiempo que pasan de un sistema de referencia inercial a otro. Este es el *principio de relatividad*.

Las transformaciones de coordenadas entre dos sistemas de coordenadas que se mueven a una velocidad constante entre sí se denominan *transformaciones de Lorentz*. Aunque la mayoría de los libros de texto deducen las transformaciones de Lorentz de los dos postulados de la teoría de la relatividad especial, a saber, el principio de la relatividad y la constancia de la velocidad de la luz para diferentes observadores inerciales, podemos deducirlos reemplazando el segundo postulado utilizando las simetrías del espacio y el tiempo.

Definimos un *evento* como un punto en el espacio-tiempo de Minkowski, éste se denota por

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \quad (3.1)$$

Este cuadvectores es la especificación de la posición de una partícula dada en un instante de tiempo. Podemos escribir este vector x en la base e_μ del espacio de Minkowski de la siguiente manera

$$\mathbf{x} = x^\mu e_\mu. \quad (3.2)$$

Definimos el *intervalo* como

$$\mathbf{x}^2 = x^\mu x^\nu e_\mu e_\nu = x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \quad (3.3)$$

donde el tensor métrico $\eta_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu$ es definido como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu = 0; \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3; \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (3.4)$$

De (3.4) podemos ver que e_μ es una base pseudo ortogonal.

La *línea del universo* de una partícula es una secuencia causal de eventos dados en el espacio cuadrimensional, es decir, es la trayectoria de la partícula en el espacio-tiempo.

Sean O y O' dos sistemas de referencia inerciales, y supongamos que O' se mueve con velocidad constante v con respecto a O en el eje x . Los ejes y' y z' permanecen paralelos con respecto a y y z . Este supuesto nos da la oportunidad de considerar transformaciones para x y t del sistema de referencia O a $x' = f(x, t)$ y $t' = g(x, t)$ en el sistema de referencia O' .

Debido a la simetría traslacional del espacio y el tiempo, la forma funcional de la transformación $x' \rightarrow x$ y $t' \rightarrow t$. debe ser lineal. Esta condición puede expresarse por medio de

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (3.5)$$

donde Λ^μ_ν son elementos de la matriz de orden cuatro

$$\|\Lambda^\mu_\nu\| = \begin{bmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) nos da la transformación de las componentes del cuadrivector x .

Ahora, encontramos la forma de los elementos Λ^μ_ν , para esto, debemos considerar que las distancias relativas entre dos eventos en un sistema de referencia deben depender sólo de las distancias relativas en otro sistema, es decir,

$$x'_2 - x'_1 = f(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \text{ y } t'_2 - t'_1 = g(x_2 - x_1, t_2 - t_1). \quad (3.7)$$

El hecho de que la ecuación (3.7) sea válida para cualesquier dos eventos, implica que f y g son funciones lineales

$$t' = \Lambda^0_0 t + \Lambda^0_1 x, \quad (3.8)$$

$$x' = \Lambda^1_0 t + \Lambda^1_1 x, \quad (3.9)$$

$$y' = y, \quad (3.10)$$

$$z' = z. \quad (3.11)$$

En forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

donde $\Lambda^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu(v)$.

El origen de O tiene la componente $x = 0$ y se mueve con velocidad $-v$ con respecto a O' , esto implica $x' = -vt$. Sustituyendo en las ecuaciones (3.8) y (3.9), encontramos $\Lambda^0_1 = \Lambda^1_1$, luego, la ecuación (3.8) se convierte en

$$t' = \Lambda^0_1(t + \alpha x), \quad (3.13)$$

donde $\alpha = \frac{\Lambda^1_1}{\Lambda^0_1}$.

Por otro lado, O' tiene la coordenada $x' = 0$ y se mueve con velocidad v con respecto a O ,

entonces $x = vt$. Sustituyendo en la ecuación (2.9), obtenemos $\Lambda_0^0 = -v\Lambda_1^0$, por lo tanto

$$x' = \Lambda_1^0(-vt + x). \quad (3.14)$$

Expresando los resultados obtenidos en forma matricial, tenemos

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \Lambda_1^0 \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

donde Λ_1^0 y α son funciones de v . Ahora, consideremos un sistema de referencia O' moviéndose con velocidad v_1 con respecto al sistema O , y un sistema O'' moviéndose con velocidad v_2 con respecto a O' .

$$t'' = \Lambda_1^0(v_2)(t' + \alpha(v_2)x') \quad \text{y} \quad x'' = \Lambda_1^0(v_2)(-v_2t' + x') \quad (3.16)$$

y

$$t' = \Lambda_1^0(v_1)(t + \alpha(v_1)x) \quad \text{y} \quad x' = \Lambda_1^0(v_1)(-v_1t + x). \quad (3.17)$$

Sustituyendo el sistema de ecuaciones (3.17) en el sistema (3.16), obtenemos

$$t'' = \Lambda_1^0(v_1)\Lambda_1^0(v_2)\{[1 - \alpha(v_2)v_1]t + [\alpha(v_1) + \alpha(v_2)]x\} \quad (3.18)$$

y

$$x'' = \Lambda_1^0(v_1)\Lambda_1^0(v_2)\{-(v_1 + v_2)t + [1 - \alpha(v_1)v_2]x\}. \quad (3.19)$$

Para simplificar la notación matricial, reducimos el orden de las matrices de 4×4 a 2×2 , así

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t'' \\ x'' \end{bmatrix} &= \Lambda^0_1(v_1)\Lambda^0_1(v_2) \begin{bmatrix} 1 & \alpha(v_2) \\ -v_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha(v_1) \\ -v_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \\ &= \Lambda^0_1(v_1)\Lambda^0_1(v_2) \begin{bmatrix} 1 - \alpha(v_2)v_1 & \alpha(v_1) + \alpha(v_2) \\ -(v_1 + v_2) & 1 - \alpha(v_1)v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para una transformación de Lorentz general debe satisfacerse que los elementos diagonales de la matriz sean iguales, y esta condición también debe satisfacerse por la ecuación (3.20), esto es

$$\frac{v_2}{\alpha(v_2)} = \frac{v_1}{\alpha(v_1)}. \quad (3.21)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.21) depende sólo de v_2 y el derecho de v_1 , entonces esta ecuación sólo puede satisfacerse si $\frac{v}{\alpha} = a = \text{const.}$ Por lo tanto,

$$\alpha(v) = \frac{v}{a}. \quad (3.22)$$

Ahora, aplicamos la transformación de Lorentz de O a O' y luego de O' a O , sustituyendo la ecuación (3.22) en las ecuaciones (3.13)-(3.15). La primera se realiza con velocidad v , mientras la segunda con velocidad $-v$.

$$t' = \Lambda^0_1(v) \left(t + \frac{v}{a} x \right), \quad (3.23)$$

$$x' = \Lambda^0_1(v) (-vt + x), \quad (3.24)$$

$$t = \Lambda^0_1(-v) \left(t' - \frac{v}{a} x' \right), \quad (3.25)$$

$$x = \Lambda^0_1(-v) (vt + x'). \quad (3.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.23) y (3.24) en las ecuaciones (3.25) y (3.26), tenemos

$$t = \Lambda^0_1(-v)\Lambda^0_1(v)\left(1 + \frac{v^2}{a}\right)t \quad (3.27)$$

y

$$x = \Lambda^0_1(-v)\Lambda^0_1(v)\left(1 + \frac{v^2}{a}\right)x. \quad (3.28)$$

Debido a que las ecuaciones (3.27) y (3.28) son válidas para todo t y x , tenemos

$$\Lambda^0_1(-v)\Lambda^0_1(v) = \left(1 + \frac{v^2}{a}\right)^{-1}. \quad (3.29)$$

Debido a la simetría del espacio Λ^0_1 no depende de la dirección de v sólo depende de su módulo, por lo tanto

$$\Lambda^0_1 = \left(1 + \frac{v^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.30)$$

donde a tiene dimensiones L^2T^{-2} . Si $a < 0$, entonces $a = -c^2$. Sustituyendo este valor en la ecuación (3.30), obtenemos

$$\Lambda^0_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.31)$$

Sustituyendo la ecuación (3.31) y $a = -c^2$ en las ecuaciones (3.23) y (3.24), obtenemos

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.32)$$

y

$$x' = \frac{x - vt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.33)$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Así, la forma explícita de la matriz (3.6) es

$$\|\Lambda^\mu{}_\nu\| = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

La cantidad c corresponde a la velocidad de propagación del campo gravitodinámico, que como mencionamos antes, puede o no coincidir con la velocidad de la luz.

Si diferenciamos las ecuaciones (3.32) y (3.33), tenemos

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.36)$$

y

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.37)$$

Dividiendo la ecuación (3.37) por la ecuación (3.36) y usando

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{y} \quad \frac{dx'}{dt'} = v',$$

obtenemos finalmente la ley de composición de velocidades

$$v' = \frac{v - v}{1 + \frac{vv}{c^2}}. \quad (3.38)$$

3.2. Ecuaciones covariantes de la gravitación

Para obtener las ecuaciones de la gravitodinámica en el SGG (2.7)-(2.10) en forma Lorentz invariante, es necesario primero definir la densidad de masa ρ y la densidad de corriente de

masa \mathbf{J} por medio de la función delta de Dirac de la siguiente forma

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \quad (3.39)$$

y

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_n m_n \mathbf{v}_n(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)), \quad (3.40)$$

donde hemos considerado un sistema de partículas de masas m_n , cuyas posiciones en el instante t están dadas por los vectores de posición \mathbf{r}_n .

Si el campo de Heaviside \mathbf{K} satisface la ecuación (2.8), entonces podemos escribirlo como el rotacional de alguna cantidad vectorial $\mathbf{\Gamma}$

$$\mathbf{K} = \nabla \times \mathbf{\Gamma}, \quad (3.41)$$

donde $\mathbf{\Gamma}$ es llamado vector potencial de Heaviside. Si sustituimos la ecuación (3.41) en la ecuación (2.9) obtenemos

$$\nabla \times \left(\mathbf{G} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} \right) = 0.$$

como la cantidad dentro de los paréntesis puede escribirse como el gradiente de una función escalar φ , podemos expresar el campo gravitacional \mathbf{G} como

$$\mathbf{G} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t}, \quad (3.42)$$

donde φ es el potencial escalar gravitacional Newtoniano. Sustituyendo la ecuación (3.42) en la ecuación (2.7) nos queda

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{\Gamma}) = 4\pi\rho, \quad (3.43)$$

donde $\Delta = \nabla^2$ es el operador Laplaciano.

Sustituyendo los campos \mathbf{G} y \mathbf{K} en función de los potenciales, dados por las ecuaciones

(3.41) y (3.42) en la ecuación (2.10), y usando el hecho de que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}$ es válida para cualquier función vectorial arbitraria \mathbf{V} tenemos

$$\Delta \Gamma - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \Gamma + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (3.44)$$

Podemos imponer una condición adicional sobre Γ y φ en una forma similar a la norma de Lorentz en el campo electromagnético, esto es,

$$\nabla \cdot \Gamma = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.45)$$

Utilizando la condición dada por (3.45) en las ecuaciones (3.43) y (3.44), obtenemos las ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales φ y Γ

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4\pi \rho \quad (3.46)$$

y

$$\Delta \Gamma - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (3.47)$$

Definimos la densidad de corriente de masa cuadriddimensional como

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (3.48)$$

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$. Entonces, la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.49)$$

toma la forma

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (3.50)$$

También definimos el potencial gravitodinámico cuadrimensional como sigue

$$\Gamma^\mu = (c\varphi, \mathbf{\Gamma}). \quad (3.51)$$

Entonces, las ecuaciones (3.46) y (3.47) pueden escribirse en forma covariante

$$\square \Gamma^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad (3.52)$$

donde $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ es el operador D' Alembertiano y la condición (3.45) puede expresarse como

$$\partial_\mu \Gamma^\mu = 0. \quad (3.53)$$

Considerando los campos \mathbf{G} y \mathbf{K} en términos de los potenciales φ y $\mathbf{\Gamma}$ (3.41) y (3.42), puede ser demostrado que las componentes de ambos campos pueden juntarse en un tensor antisimétrico de segundo rango, llamado tensor gravitodinámico antisimétrico de segundo rango, el cual hemos denotado por $H^{\mu\nu}$ ¹,

$$H^{\mu\nu} = \partial^\mu \Gamma^\nu - \partial^\nu \Gamma^\mu. \quad (3.54)$$

De la ecuación (3.54) podemos identificar las componentes de este tensor como las componentes de los campos gravitacional y de Heaviside

$$H^{0\nu} = -G^\nu \quad (3.55)$$

y

$$H^{\mu\nu} = -\epsilon^{\mu\nu\xi} K_\xi, \quad (3.56)$$

¹Definimos el tensor gravitodinámico por $H^{\mu\nu}$ en honor de Oliver Heaviside.

donde $\epsilon^{\mu\nu\xi}$ es el símbolo de Levi-Civita tridimensional definido por

$$\epsilon^{\mu\nu\xi} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu, \nu, \xi) \text{ es } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ó } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{si } (\mu, \nu, \xi) \text{ es } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ó } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } \mu = \nu, \text{ ó } \mu = \xi \text{ ó } \nu = \xi. \end{cases} \quad (3.57)$$

Expresando el tensor (3.54) en componentes tenemos

$$H^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -G_x & -G_y & -G_z \\ G_x & 0 & -K_z & K_y \\ G_y & K_z & 0 & -K_x \\ G_z & -K_y & K_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

ó

$$H_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & G_x & G_y & G_z \\ -G_x & 0 & -K_z & K_y \\ -G_y & K_z & 0 & -K_x \\ -G_z & -K_y & K_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.7) y (2.10) pueden escribirse como

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (3.60)$$

y las ecuaciones (2.8) y (2.9) se convierten en

$$\partial_\mu H_{\nu\xi} + \partial_\nu H_{\xi\mu} + \partial_\xi H_{\mu\nu} = 0. \quad (3.61)$$

Definimos el tensor gravitodinámico dual como sigue

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} H_{\alpha\beta}, \quad (3.62)$$

donde $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el símbolo de Levi-Civita cuatridimensional, definido como

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu, \nu, \alpha, \beta) \text{ es una permutación par de } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } (\mu, \nu, \alpha, \beta) \text{ es una permutación impar de } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (3.63)$$

Podemos usar el símbolo dado por (3.63) para expresar la ecuación (3.61) (o ecuaciones (2.8) y (2.9)) como la siguiente ecuación

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} H_{\alpha\beta,\nu} = 0. \quad (3.64)$$

Ahora, mostramos el tensor dual del campo gravitodinámico en componentes

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -K_x & -K_y & -K_z \\ K_x & 0 & G_z & -G_y \\ K_y & -G_z & 0 & G_x \\ K_z & G_y & -G_x & 0. \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

ó

$$\mathcal{H}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & K_x & K_y & K_z \\ -K_x & 0 & G_z & -G_y \\ -K_y & -G_z & 0 & G_x \\ -K_z & G_y & -G_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

3.3. Flujo y densidad de energía del campo gravitodinámico

Podemos multiplicar con el producto punto la ecuación (2.9) por \mathbf{K} y la ecuación (2.10) por $-\mathbf{G}$ y sumarlas y considerando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ para cualesquier dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , tenemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \times \mathbf{G}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{G} + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\|\mathbf{G}\|^2 + \|\mathbf{K}\|^2) \quad (3.67)$$

ó

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{G} = -\nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (3.68)$$

donde

$$w = -\frac{\|\mathbf{G}\|^2 + \|\mathbf{K}\|^2}{8\pi} \quad (3.69)$$

y

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{K} \times \mathbf{G}, \quad (3.70)$$

donde w es la densidad de energía gravitodinámica y \mathbf{S} es el vector de Poynting gravitacional. La ecuación (3.68) es el *teorema de Umov-Poynting gravitacional en forma diferencial*, y expresa la conservación de la energía para un sistema formado por masas y campo gravitacional. Si integramos sobre un volumen tridimensional y usamos el teorema de Gauss en el segundo miembro, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_V w d^3x + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{G} d^3x = -\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.71)$$

Usando la expresión de la densidad de corriente de masa introducida al inicio de esta sección (3.40), podemos calcular la segunda integral del primer miembro, esto es

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{G} d^3x = \sum_n m_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}_n) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (3.72)$$

donde \mathcal{E} es la suma de las energías cinéticas de las partículas dentro del volumen V . Aquí hemos supuesto que no hay partículas en la frontera del volumen. Considerando la ecuación (3.72), la ecuación (3.71) se convierte en

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V w d^3x + \mathcal{E} \right) = -\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.73)$$

Este es el *teorema Umov-Poynting gravitacional en forma integral*. El significado físico de este resultado es interpretado de la siguiente manera: la variación temporal de la energía total de las partículas y el campo gravitodinámico dentro del volumen, es igual al flujo tomado con signo

opuesto del vector de Poynting a través de la superficie que encierra el volumen. Si integramos sobre todo el espacio tridimensional, entonces la integral de superficie en la ecuación (3.73) se anula, debido a que el campo gravitacional es cero en el infinito. Este resultado está dado por

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V w d^3x + \mathcal{E} \right) = 0, \quad (3.74)$$

este resultado expresa la ley de la conservación de la energía en un sistema cerrado constituido por masas y campo. Se obtendrá el mismo resultado expresado en la ecuación (3.73) del tensor energía-momento.

3.4. Principio de mínima acción

Podemos obtener las ecuaciones de movimiento, no sólo para las partículas, sino también para los campos, de las condiciones extremales de la funcional llamada *acción*.

En nuestro caso, como podemos ver en la referencia [43], el principio de mínima acción puede ser generalizado para campos, notando que hay una similitud entre los medios continuos y los campos, así, consideramos como una magnitud básica para la descripción de los campos, una densidad lagrangiana \mathcal{L} definida por

$$L = \int \mathcal{L} d^3x, \quad (3.75)$$

entonces el principio de mínima acción nos dice que la acción dada por

$$S = \int \mathcal{L} \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^\mu} \right) d^3x dt = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^\mu} \right) d^4x, \quad (3.76)$$

donde $d^4x = c dt dx dy dz$, S debe ser un extremal y q son cantidades que describen el estado del sistema y estas corresponden a las componentes del cuadripotencial (3.51) del campo gravitodinámico.

Abreviando $\frac{\partial q}{\partial x^\mu} = q_{,\mu}$, variamos S de acuerdo con el principio de mínima acción para obtener las ecuaciones de campo, esto es

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right) d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right] d^4x = 0.\end{aligned}\quad (3.77)$$

Si integramos sobre todo el espacio y usamos el teorema de Gauss, el segundo término de la integral es nulo y obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} = 0, \quad (3.78)$$

es la ecuación variacional de Euler-Lagrange. Notemos que el Lagrangiano no está definido unívocamente, si \mathcal{L} nos da las ecuaciones (3.78), entonces

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} r^\mu(q), \quad (3.79)$$

reproduce las mismas ecuaciones, como podemos ver si aplicamos (3.78) a (3.79).

3.5. Teorema de Noether

Enunciamos el teorema de Noether para hallar la corriente de Noether, cantidad que usaremos en la sección 3.8 para deducir el tensor energía-momento gravitodinámico.

Teorema 1 (Teorema de Noether). *Para cualquier transformación continua de las coordenadas y los campos que dejen invariante la acción en un volumen cuadridimensional corresponde una corriente conservada J^μ en la evolución, la cual satisface $\partial_\mu j^\mu = 0$.*

Demostración. Suponemos que las funciones del campo y cuadvectores se transforman como

un resultado de alguna transformación continua que pertenece al grupo de Lie²:

$$x \rightarrow x' \text{ y } u(x) \rightarrow u'(x'). \quad (3.80)$$

Ahora, consideramos la acción funcional

$$S[u(x)] = \int_{\Omega} \mathcal{L}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, x\right) d^4x, \quad (3.81)$$

donde Ω es una región de integración arbitraria.

Consideramos la transformación

$$u(x) \rightarrow u'(x) = u(x) + \tilde{\delta}u(x), \quad (3.82)$$

donde $\tilde{\delta}u(x)$ es la *variación local* de $u(x)$.

Puesto que

$$u'(x') = u'(x) + \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \delta x^\mu, \quad (3.83)$$

la *variación total* está dada por $\delta u(x) = u'(x') - u(x)$, de modo que

$$\delta u(x) = \tilde{\delta}u(x) + \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \delta x^\mu. \quad (3.84)$$

Ahora, suponemos que la acción es invariante respecto a las transformaciones (3.80), esto significa

$$S[u'(x')] = S[u(x)] = \text{inv}, \quad (3.85)$$

entonces, $\delta S = 0$.

²Informalmente, un grupo de Lie es un grupo de simetrías donde las simetrías son continuas.

Queremos determinar la forma explícita de la variación de la acción δS ,

$$\delta S = \int_{\Omega} [\mathcal{L}(\delta d^4x) + d^4x \delta \mathcal{L}], \quad (3.86)$$

donde $\delta d^4x = d^4x' - d^4x$, con $d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x$.

El Jacobiano es

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \det \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) = \det \left(\delta_{\nu}^{\mu} + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (3.87)$$

Podemos escribir el Jacobiano de otra forma si usamos la identidad matricial

$$\ln(\det A) = \text{tr}(\ln A)$$

sobre la ecuación (3.87),

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| &= \exp \left\{ \ln \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right\} = \exp \left\{ \text{tr} \ln \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right\} \\ &\approx \exp \left\{ \text{tr} \left(\frac{\partial \delta x'}{\partial x} \right) \right\} \approx 1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

por lo tanto,

$$\delta d^4x = \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} d^4x. \quad (3.89)$$

Ahora, calculamos la variación de la densidad Lagrangiana $\delta \mathcal{L}$

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L} \left(u'(x'), \frac{\partial u'}{\partial x'}, x' \right) - \mathcal{L} \left(u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, x \right) = \tilde{\delta} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu}, \quad (3.90)$$

donde la variación local de la densidad Lagrangiana $\tilde{\delta} \mathcal{L}$ es

$$\tilde{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \tilde{\delta} u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,v}} \tilde{\delta} u_{,v} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) \tilde{\delta} u + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,v}} \tilde{\delta} u \right).$$

Si el campo satisface las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\delta S}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} = 0,$$

entonces

$$\tilde{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} \tilde{\delta} u \right). \quad (3.91)$$

Sustituimos las ecuaciones (3.89) y (3.91) en la ecuación (3.86) para obtener la variación de la acción

$$\delta S = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} (\delta u - u_{,\nu} \delta x^\nu) \right] d^4 x. \quad (3.92)$$

Si el volumen Ω es arbitrario y $\delta S = 0$, entonces la divergencia es nula,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\left(\mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} u_{,\nu} \right) \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \delta u \right] = 0. \quad (3.93)$$

Las transformaciones forman un grupo de Lie con parámetros κ^l donde $l = 1, 2, \dots, p$; por lo tanto

$$\delta x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \kappa^l} \delta \kappa^l \quad \text{y} \quad \delta u = \frac{\partial u}{\partial \kappa^l} \delta \kappa^l,$$

donde

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial \kappa^l} = (X_l)^\nu_\mu x^\mu \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \kappa^l} = X_l u,$$

X_l son los generadores del grupo. Definimos la *corriente de Noether* por medio de

$$J_l^\mu = \left(-\mathcal{L} \delta^\mu_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} u_{,\nu} \right) \frac{\delta x^\nu}{\delta \kappa^l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \frac{\delta u}{\delta \kappa^l}. \quad (3.94)$$

Por consiguiente, en virtud de la ecuación (3.93), debido a la independencia de los parámetros uno con respecto a otro, obtenemos

$$\frac{\partial J_l^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.95)$$

A primer orden, el teorema de Noether puede ser expresado como

$$\delta S = \int_{\Omega} \partial_{\mu} J^{\mu}_{\ l} d^4x = \int_s J^{\mu}_{\ l} ds_{\mu} = 0, \quad (3.96)$$

donde hemos aplicado el teorema de Gauss para campos que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange. También podemos escribir este resultado en forma diferencial

$$\partial_{\mu} J^{\mu}_{\ l} = 0. \quad (3.97)$$

■

La corriente $J^{\mu}_{\ l}$ no está determinada unívocamente, podemos sumar siempre cualquier corriente conservativa trivial C^{μ} tal que $\partial_{\mu} C^{\mu} = 0$.

Es posible definir el tensor energía-momento del teorema de Noether, y para hacer esto, consideramos la transformación del grupo de Poincaré. Para traslaciones $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + a^{\mu}$, en la corriente de Noether dada por la ecuación (3.94), tenemos

$$\kappa^l \rightarrow a^{\mu}, \quad \frac{\delta x^{\nu}}{\delta a^{\mu}} = \delta^{\nu}_{\ \mu}; \quad \frac{\delta u}{\delta a^{\mu}} = 0, \quad (3.98)$$

donde la última ecuación en (3.98) está condicionada por la homogeneidad del espacio, esto es, invarianza de los campos con respecto a traslaciones: $u'(x') = u(x)$.

Por lo tanto, la corriente de Noether (3.94) toma la forma

$$T^{\mu}_{\ \nu} = -\mathcal{L} \delta^{\mu}_{\ \nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^A_{,\mu}} u^A_{,\nu}. \quad (3.99)$$

La ecuación (3.99) corresponde a la definición del tensor energía-momento, esta es aplicable a cualquier campo.

3.6. La acción del campo gravitodinámico

Siguiendo la analogía entre la teoría electrodinámica y la gravitación, y en base a los resultados obtenidos por Landau y Lifshitz [44], la acción para un sistema constituido por el campo gravitodinámico y las partículas ubicadas allí, tienen la forma de la siguiente suma

$$S = S_p + S_f + S_{pf}, \quad (3.100)$$

donde el subíndice p denota las “partículas”, f denota el “campo” y pf denota “partícula-campo”.

S_p es la parte de la acción que depende sólo de las partículas, esta es la acción para las partículas libres. Es bien sabido que la acción para una partícula libre está dada por

$$S_1 = -mc \int ds,$$

y el Lagrangiano es

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Por lo tanto, la acción para un sistema formado por muchas partículas está dado por la suma

$$S_p = - \sum mc \int ds. \quad (3.101)$$

S_f es la parte de la acción que corresponde a un campo en ausencia de masas, esto es, depende sólo de las propiedades del campo gravitodinámico.

Para obtener esta parte de la acción debemos considerar el siguiente argumento, tomando como punto de partida el principio de superposición. Debido a que cualquier solución de las ecuaciones de campo representa un campo existente en la naturaleza, la suma de cualquier número de tales campos debe ser un campo existente en la naturaleza y debe satisfacer las ecuaciones de campo.

Las ecuaciones de campo deben ser ecuaciones diferenciales lineales homogéneas porque ellas satisfacen el principio de superposición. Obtenemos las ecuaciones de campo variando la acción, y tal variación reduce el grado del integrando una unidad, por esto, la acción debe ser una expresión cuadrática de las componentes de tal campo y debe ser un escalar invariante. La cantidad que satisface esas condiciones es el producto $H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$, por lo tanto, S_f debe ser

$$S_f = a \int H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} d^4x, \quad (3.102)$$

donde la integral se extiende sobre todo el espacio y todo el tiempo entre dos instantes dados, a es una constante que en el sistema Gaussiano es $a = \frac{1}{16\pi}$, por lo tanto

$$S_f = \frac{1}{16\pi c} \int H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} d^4x, \quad d^4x = c dt dx dy dz. \quad (3.103)$$

Ahora, obtenemos la parte de la acción que corresponde a la interacción entre el campo y las partículas, esto es, S_{fp} . Esta parte de la acción debe contener cantidades que caracterizan las partículas y el campo. Por un lado, la masa m de una partícula determina sus propiedades con respecto a la interacción con el campo. Por otro lado, las propiedades del campo están caracterizadas por el cuadripotencial Γ_μ (3.51). De esta forma, la acción para una partícula es

$$-\frac{m}{c} \int \Gamma_\mu dx^\mu,$$

donde hemos introducido el factor $\frac{1}{c}$ por conveniencia y Γ_μ es tomado en puntos de la línea de universo de la partícula. Por lo tanto, para un sistema de partículas tenemos

$$S_{pf} = - \sum \frac{m}{c} \int \Gamma_\mu dx^\mu. \quad (3.104)$$

En cada término de la suma, Γ_μ es el potencial del campo en aquel punto del espacio-tiempo en el cual está la partícula.

Enseguida expresamos la suma dada por (3.100) en una forma explícita considerando las ecuaciones (3.101), (3.103) y (3.104), obteniendo lo siguiente

$$S = - \sum mc \int ds + \frac{1}{16\pi c} \int H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} d^4x - \sum \frac{m}{c} \int \Gamma_{\mu} dx^{\mu}, \quad (3.105)$$

esta ecuación corresponde a la acción total del sistema formado por partículas y campo gravitodinámico.

3.7. Ecuación de movimiento de una partícula

Tomando la variación de la ecuación (3.105) y siguiendo los resultados obtenidos en la referencia [44], pero en nuestro caso para el campo gravitodinámico, para obtener la ecuación de movimiento de una partícula dentro de un campo gravitodinámico. Podemos despreciar la parte de la acción correspondiente al campo gravitacional libre S_f .

Así, la acción se convierte en

$$S = - \sum_n \int \left(m_n c ds_n + \frac{m_n}{c} \Gamma_{\mu} dx_n^{\mu} \right). \quad (3.106)$$

Esta integral es tomada a lo largo de la línea de universo de la n -ésima partícula, entre dos puntos fijos del universo.

La variación δS de la ecuación (3.106) es

$$\delta S = - \sum_n \int \left(m_n c \delta ds_n + \frac{m_n}{c} \Gamma_{\mu} \delta dx_n^{\mu} + \frac{m_n}{c} \delta \Gamma_{\mu} dx_n^{\mu} \right). \quad (3.107)$$

Puesto que $ds = \sqrt{dx_{\mu} dx^{\mu}}$,

$$\delta ds = \frac{dx_{\mu} \delta dx^{\mu}}{ds} = u_{\mu} \delta dx^{\mu},$$

donde u_{μ} es la cuadrivelocidad.

Conmutando los operadores de variación δ y de diferenciación d e integrando por partes el primer término de (3.107), obtenemos

$$\delta S = - \sum_n \left(m_n c u_{\mu}^n + \frac{m_n}{c} \Gamma_{\mu} \right) \delta x_{\mu}^n \Big| + \sum_n \int (m_n du_{\mu}^n \delta x_{\mu}^n + m_n d\Gamma_{\mu} \delta x_{\mu}^n - m_n \delta \Gamma_{\nu} dx_{\nu}^n). \quad (3.108)$$

Debido a que $\delta x_{\mu}^n = 0$ en la región de integración, la primer suma en la ecuación (3.108) es nula. Por lo tanto, la ecuación (3.108) se transforma como

$$\delta S = \sum_n \int \left(m_n \frac{du_{\mu}^n}{ds} - m_n H_{\mu\nu} u_{\nu}^n \right) \delta x_{\mu}^n ds_n, \quad (3.109)$$

donde hemos usado las siguientes relaciones

$$du_{\mu} = \frac{du_{\mu}}{ds} ds,$$

$$d\Gamma_{\mu} = u^{\nu} \partial_{\nu} \Gamma_{\mu} ds,$$

y

$$\delta \Gamma_{\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu} \delta x^{\mu}.$$

En virtud de la arbitrariedad de δx_{μ}^n y puesto que $\delta S = 0$, por el principio de mínima acción, tenemos

$$\frac{du_{\mu}}{ds} = \frac{1}{c^2} H_{\mu\nu} u^{\nu}, \quad (3.110)$$

donde hemos despreciado el índice n . Las ecuaciones (3.110) son las cuatro ecuaciones de movimiento relativistas invariantes de una partícula.

Podemos escribir las ecuaciones (3.110) como las siguientes ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m(\mathbf{G} + \mathbf{v} \times \mathbf{K}) \quad (3.111)$$

y

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}, \quad (3.112)$$

donde hemos usado el momento relativista y la energía dados por

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y

$$ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

La ecuación (3.111) es la ecuación de movimiento correspondiente a la fuerza que actúa sobre una partícula con masa m dentro de un campo gravitodinámico. Esta ecuación es el análogo de la Fuerza de Lorentz dada en la teoría electromagnética. Por otro lado, la ecuación (3.112) nos da la variación temporal de la energía cinética de la partícula, y está determinada por el trabajo realizado por el campo gravitacional.

Las ecuaciones (3.111) y (3.112) no son independientes la una de la otra, de hecho, usando

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

y multiplicando escalarmente la ecuación (3.111) por \mathbf{v} , podemos ver que la ecuación (3.112) es consecuencia de la ecuación (3.111).

3.8. El tensor energía-momento gravitodinámico

En esta sección hemos obtenido el tensor energía-momento gravitodinámico. Primero hemos considerado que no hay presencia de masas, para simplificar nuestros cálculos.

Cuando tratamos con el principio de Hamilton para campos, debemos considerar como una magnitud básica para su descripción una densidad Lagrangiana \mathcal{L} , debido a que hay una simi-

litud entre los medios continuos y los campos, y en este caso no existen partículas discretas, por lo tanto, descomponemos el medio continuo en volúmenes infinitesimales. Puesto que las energías cinética y potencial son funciones de la masa, tomamos en cuenta sus densidades volumétricas.

Entonces, la densidad Lagrangiana \mathcal{L} está dada por

$$L = \int \mathcal{L} d^3x, \quad (3.113)$$

donde $\mathcal{L}(q, q_{,v})$.

La densidad Lagrangiana que corresponde a la acción del campo gravitodinámico libre (3.103) está dado por

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \quad (3.114)$$

En la sección 3.5 definimos el tensor energía momento como la corriente de Noether dada por la ecuación (3.99), cuya conservación está condicionada por la invarianza de la acción del sistema con respecto a la transformación del grupo de traslaciones espacio-temporales. Aquí, consideramos que las magnitudes q corresponden al cuadripotencial gravitodinámico Γ^μ , así que

$$T^{\nu}_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\Gamma^{\alpha}_{,\nu})} - \delta^{\nu}_{\mu} \mathcal{L}_f. \quad (3.115)$$

Para calcular la derivada presente en la ecuación (3.115), calculamos la variación de la densidad Lagrangiana $\delta \mathcal{L}_f$

$$\delta \mathcal{L}_f = \frac{1}{8\pi} H^{\mu\nu} \delta H_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} H^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu,\mu}, \quad (3.116)$$

donde hemos usado la forma covariante del tensor del campo gravitodinámico en términos del cuadripotencial Γ_μ

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu.$$

y la propiedad de antisimetría de $H_{\mu\nu}$. Por lo tanto, de la ecuación (3.116) se dedujo

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial(\Gamma_{\alpha,\nu})} = \frac{1}{4\pi} H^{\nu\alpha}. \quad (3.117)$$

Por último, usando la ecuación (3.117) se obtiene el tensor energía-momento canónico del campo gravitodinámico

$$T^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \Gamma_{\alpha,\mu} H^{\nu\alpha} - \frac{1}{16\pi} \delta^{\nu}_{\mu} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}. \quad (3.118)$$

Expresado en componentes contravariantes, tenemos

$$T^{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi} \Gamma_{\alpha,\mu} H^{\nu\alpha} - \frac{1}{16\pi} \eta^{\nu\mu} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}. \quad (3.119)$$

Aunque esta expresión no es invariante de norma, podemos obtener una expresión invariante de norma, si sumamos a la ecuación (3.119) una divergencia dada por

$$-\frac{1}{4\pi} (\Gamma^{\mu} H^{\nu}_{\alpha})^{\alpha} = -\frac{1}{4\pi} \Gamma^{\mu,\alpha} H^{\nu}_{\alpha}, \quad (3.120)$$

donde hemos considerado que en ausencia de masas la ecuación de campo es $H^{\nu\alpha}_{,\alpha} = 0$.

Por lo tanto, el tensor energía-momento del campo gravitodinámico se expresa en una forma simétrica como sigue

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} H^{\mu\alpha} H^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}. \quad (3.121)$$

Ahora analizamos la componente T^{00} . Si escribimos esta componente en una forma explícita, tenemos

$$T^{00} = -\frac{1}{8\pi} (\|K\|^2 + \|G\|^2). \quad (3.122)$$

Si integramos T^{00} sobre un volumen V obtenemos la *energía del campo gravitodinámico* \mathcal{E} y es la

energía contenida en el campo gravitodinámico

$$\mathfrak{E} = \int_V T^{00} d^3x. \quad (3.123)$$

Las componentes T^{0i} , donde $i = 1, 2, 3$ son iguales a las componentes S^i de la densidad de flujo de energía dado por \mathbf{S} (ver, la ecuación (3.70)) dividida por la velocidad de propagación de los campos c , esto es

$$T^{0i} = \frac{S^i}{c} = \frac{1}{4\pi} \epsilon_{ijk} K^j G^k, \quad (3.124)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. También, $T^{i0} = T^{0i}$ y S^i son las componentes del vector de Poynting.

Definimos el *tensor de tensiones gravitodinámico* como el tensor tridimensional $\omega_{jk} = -T^{jk}$ cuyas componentes están dadas por

$$\omega_{jk} = \frac{1}{4\pi} \left\{ G_j G_k + K_j K_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} (\|G\|^2 + \|K\|^2) \right\}. \quad (3.125)$$

Una vez obtenidas las componentes del tensor energía-momento gravitodinámico, podemos escribirlo en componentes como sigue

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} w & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & \omega_{xx} & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & \omega_{yx} & \omega_{yy} & \omega_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & \omega_{zx} & \omega_{zy} & \omega_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.126)$$

Enseguida damos una interpretación física de las componentes del tensor de tensiones (3.125).

Para este objetivo, tomamos la cuádrivergencia del tensor energía-momento gravitodinámico (3.121), tenemos

$$T^{\mu\nu}{}_{, \nu} = \frac{1}{4\pi} \left(H^\nu{}_\alpha H^{\mu\alpha}{}_{, \nu} + H^{\mu\alpha} H^\nu{}_{\alpha, \nu} - \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta, \mu} \right). \quad (3.127)$$

Este tensor se reduce a la siguiente expresión

$$T^{\mu\nu}_{, \nu} = -H^{\mu\nu} J_{\nu}, \quad (3.128)$$

haciendo uso de las ecuaciones (3.60) y (3.64).

Demostramos que la ecuación (3.128) es la ley de conservación para el cuádrimomento total del sistema. Sustituyendo la corriente dada por la ecuación (3.40) en la ecuación (3.128), obtenemos

$$T^{\mu 0}_{, 0} + T^{\mu i}_{, i} = - \sum_n m_n H^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)). \quad (3.129)$$

Haciendo uso de la ecuación de movimiento de una masa puntual (3.110) e integrando la ecuación (3.129) en un volumen V , tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(P^\mu + \sum_n p^\mu_n \right) = - \oint_s T^{\mu k} ds_k. \quad (3.130)$$

P^μ es el cuádrimomento total del campo gravitodinámico en el volumen considerado. La suma es tomada sólo con respecto a las partículas dentro del volumen.

Para $\mu = 0$, la ecuación (3.130) coincide con el teorema Umov-Poynting gravitacional dado por la ecuación (3.71). Para $\mu = 1, 2, 3$ obtenemos la ley de variación del momento tridimensional total del sistema en el volumen dado, esto es,

$$\frac{d}{dt} \left(P^i + \sum_n p^i_n \right) = - \oint_s T^{ik} ds_k. \quad (3.131)$$

La cantidad de momento que sale del volumen por unidad de tiempo está dado por el segundo miembro de la ecuación (3.131). En consecuencia, las magnitudes T^{ik} son las componentes del tensor densidad de flujo de momento tridimensional.

Si el campo gravitodinámico es independiente del tiempo, entonces $\frac{dP^i}{dt} = 0$, y considerando

$\omega_{ik} = -T^{ik}$, la ecuación (3.131) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \sum_n p_n^i = \oint_s \omega^{ik} ds_k. \quad (3.132)$$

Podemos usar la ecuación (3.111) para transformar el primer miembro de la ecuación (3.130), por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \sum_n \mathbf{p}_n = \sum_n m_n [\mathbf{G}(\mathbf{r}_n) + \mathbf{v} \times \mathbf{K}(\mathbf{r}_n)] = \int (\rho \mathbf{G} + \mathbf{J} \times \mathbf{K}) d^3x. \quad (3.133)$$

Concluimos que en un campo estático el flujo del tensor de tensiones a través de una superficie que limita al volumen, nos da la fuerza total que actúa sobre las partículas dentro del volumen.

Capítulo 4

Límite Post-Newtoniano

En la relatividad general la interacción gravitacional es interpretada como una deformación del espacio-tiempo debida a la presencia y movimiento de las masas. Podemos leer en casi todos los libros acerca de la relación que existe entre la materia y el espacio-tiempo: “El espacio-tiempo le dice a la materia como moverse y la materia le dice al espacio-tiempo como curvarse” [45]. Esta idea surgió de la conclusión de Einstein de que la variable de campo para el campo gravitacional debe ser el tensor métrico del espacio-tiempo de Riemann $g_{\mu\nu}$ y que esta cantidad está determinada por la distribución y movimiento de la materia, este es el enlace entre materia y geometría. La relatividad general es mencionada frecuentemente por varios autores como una de las teorías más importantes desarrolladas en el siglo pasado. En palabras del premio Nobel R. Feynmann: “La teoría gravitacional de Einstein, que se dice que es el mayor logro de la física teórica, dio lugar a hermosas relaciones que conectan los fenómenos gravitacionales con la geometría del espacio; esta es una idea emocionante” [46]. Aunque esta relación entre la materia y la geometría del espacio-tiempo ha sido ampliamente difundida entre la mayoría de los científicos, este no fue el resultado central que Einstein quiso destacar, esta idea nunca fue aceptada por Einstein, en lugar de esto, fue la unificación de la inercia y la gravedad. De hecho, la idea de la geometrización de la gravedad comenzó con el trabajo de Weyl. Para una discusión detallada, ver el documento, *Why Einstein did not believe that general relativity geometrizes gravity*

[47].

Para obtener las ecuaciones de Jefimenko de segundo orden, usaremos la aproximación Post-Newtoniana en las ecuaciones de campo de Einstein. El mismo sistema de ecuaciones no lineales se puede obtener a partir de otras aproximaciones, como el sistema de ecuaciones obtenido por Logunov.

Las ecuaciones de Jefimenko para la gravitación fueron obtenidas por primera vez por Heaviside [12], haciendo uso del análisis vectorial de Gibbs, suponiendo la existencia de un segundo campo gravitatorio que surge como una especie de inducción gravitatoria, esto lo logró Heaviside años antes de que Einstein escribiera sobre la posibilidad de la existencia de la inducción gravitacional en su no tan conocido trabajo *Gibt es eine gravitationwirkung die der elektromagnetischen induktionswirkung analog ist?* [19]. Pero también pueden obtenerse del enfoque desarrollado por Arbab [17] haciendo uso de los cuaterniones de Hamilton, a partir de las ecuaciones de campo lineales como las obtenidas por González Segura [35]. Jefimenko ha obtenido este conjunto de ecuaciones postulando una analogía entre sus soluciones retardadas para el campo electromagnético y las soluciones para el campo gravitacional.

Compararemos el sistema de ecuaciones resultante con las cantidades obtenidas por Jefimenko y estableceremos sus respectivas soluciones como límite. Además, veremos que las ecuaciones de Jefimenko nos dan la teoría Newtoniana para el límite $v/c \rightarrow 0$, donde c es la velocidad de propagación de las soluciones de ondas planas del campo gravitacional en el vacío.

4.1. Ecuaciones de Jefimenko a segundo orden

Las ecuaciones de Jefimenko para la gravitación [10, 11] están dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{k} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

donde \mathbf{g} es el campo gravitacional ordinario debido a la presencia de masas y actúa sobre masas, ya sea que estén en movimiento o no, \mathbf{k} es el campo de Heaviside (el campo que es generado por el movimiento de las masas y actúa sólo sobre masas en movimiento), ρ es la densidad de masa, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$ es la densidad de corriente de masa con \mathbf{u} la velocidad de la masa, G es la constante universal de la gravitación y c es la velocidad de propagación de los campos¹.

La analogía no es perfecta, debido a que en la teoría electromagnética hay dos tipos de carga eléctrica, en la teoría de la gravitación de Jefimenko, sólo hay un tipo de masa. Mientras en la primera el campo magnético es dextrógiro, en la teoría gravitacional el campo de Heaviside es levógiro. En la primera hay un flujo de electrones dentro de un conductor, mientras en la gravitación la corriente de masa es el movimiento de la materia como un todo.

Hemos deducido expresiones no lineales para las ecuaciones de Jefimenko a partir las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein, el cual determina la geometría del espacio-tiempo debido a la presencia de la fuente, G es la constante gravitacional, $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de la materia. Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (4.6)$$

donde $T = T^\mu{}_\mu$ es la traza del tensor $T_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci obtenido de la contracción del tensor de Riemann $R^\rho{}_{\mu\sigma\nu}$ para $\rho = \sigma$, esto es,

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (4.7)$$

¹Esta velocidad se considera igual a la velocidad de propagación de la luz. Hay mediciones indirectas en [29].

y $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ son los símbolos de Christoffel, dados en términos del tensor métrico del espacio-tiempo de Riemann $g_{\mu\nu}$ como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\epsilon}(g_{\epsilon\mu,\nu} + g_{\epsilon\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\epsilon}). \quad (4.8)$$

Usaremos las condiciones de De Donder

$$\partial_{\mu}g^{\mu\nu} = 0, \quad (4.9)$$

las cuales fueron introducidas por primera vez por Fock [48] y fueron consideradas por él como un sistema de referencia privilegiado. Él introdujo estas condiciones cuando estuvo considerando problemas del tipo isla (también llamados sistemas aislados). Aunque no hay coordenadas Cartesianas globales en el espacio-tiempo de Riemann, las condiciones de norma armónicas son válidas en trozos.

Para resolver las ecuaciones (4.6) y (4.9), es necesario construir la variedad Riemanniana, lo cual significa encontrar el tensor métrico del espacio-tiempo de Riemann $g_{\mu\nu}(x)$.

La aproximación Post-Newtoniana se utiliza en campos gravitacionales relativamente débiles y en procesos en los que las velocidades son pequeñas comparadas con c , la velocidad de propagación del campo gravitacional. Por estas razones, la formulación Post-Newtoniana es suficiente para describir los fenómenos dentro de nuestro sistema solar y las pruebas experimentales realizadas en él.

El parámetro necesario para construir las series de perturbaciones es la cantidad $\epsilon = v/c$, y como consideraremos $c = 1$ para simplificar los cálculos (al final, reintroduciremos los factores con esta cantidad), podemos ver que las velocidades de los cuerpos en nuestro sistema solar v no son mayores que ϵ . Esto significa que las derivadas temporales y espaciales están vinculados mediante la siguiente relación:

$$\partial_t \sim \epsilon \partial_i, \quad (4.10)$$

donde $i = 1, 2, 3$. Esta relación implica que todas las variaciones temporales están asociadas al

movimiento de la materia.

Como primer paso, expandiremos el tensor métrico $g^{mu\nu}$,

$$g^{00} = 1 + g^{(2)00} + g^{(4)00} + \dots, \quad (4.11)$$

$$g^{0j} = g^{(3)0j} + g^{(5)0j} + \dots, \quad (4.12)$$

$$g^{ij} = \eta^{ij} + g^{(2)ij} + g^{(4)ij} + \dots. \quad (4.13)$$

donde η^{ij} es la parte espacial de la métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$, y $g^{(l)\mu\nu}$ con $l = 2, 3, 4, \dots$ son términos del orden ϵ^l . Si consideramos la transformación $t \rightarrow -t$, el signo de ϵ debe cambiar también, y por esta razón las ecuaciones (4.11) y (4.13) contienen sólo potencias pares de ϵ , y (4.12) sólo potencias impares. La ecuación (4.12) no contiene $g^{(1)0j}$ porque en la aproximación Newtoniana g^{0j} no puede ser menor que el segundo orden en ϵ .

Podemos usar las ecuaciones (4.11)-(4.13) para calcular $g_{\mu\nu}$ y su determinante $g = \det g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = 1 + g_{(2)00} + g_{(4)00} + \dots, \quad (4.14)$$

$$g_{0j} = g_{(3)0j} + g_{(5)0j} + \dots, \quad (4.15)$$

$$g_{ij} = \eta_{ij} + g_{(2)ij} + g_{(4)ij} + \dots, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} g = & -1 - g_{(2)00} + g_{(2)11} + g_{(2)22} + g_{(2)33} - g_{(4)00} + g_{(4)11} + g_{(4)22} + g_{(4)33} \\ & + g_{(2)00}(g_{(2)11} + g_{(2)22} + g_{(2)33}) - g_{(2)11}g_{(2)22} - g_{(2)11}g_{(2)33} - g_{(2)22}g_{(2)33} + g_{(2)12}^2 + g_{(2)13}^2 + g_{(2)23}^2 + \dots. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si introducimos las cantidades

$$z = g_{(2)00} - g_{(2)11} - g_{(2)22} - g_{(2)33}$$

y

$$z^{(4)} = g_{00}^{(4)} - g_{11}^{(4)} - g_{22}^{(4)} - g_{33}^{(4)} - g_{00}^{(2)} \left(g_{11}^{(2)} + g_{22}^{(2)} + g_{33}^{(2)} \right) + g_{11}^{(2)} g_{22}^{(2)} + g_{11}^{(2)} g_{33}^{(2)} + g_{22}^{(2)} g_{33}^{(2)} - g_{12}^{(2)} - g_{13}^{(2)} - g_{23}^{(2)},$$

entonces $g = \det g_{\mu\nu}$ es

$$g = -1 - \frac{(2)}{z} - \frac{(4)}{z}. \quad (4.18)$$

Las ecuaciones (4.9) en coordenadas Galileanas son

$$\frac{1}{2} g_{00,0}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta^{ij} g_{ij,0}^{(2)} = -\eta^{ij} g_{0j,i}^{(3)}, \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{2} g_{00,i}^{(2)} + \frac{1}{2} \eta^{kl} g_{kl,i}^{(2)} = \eta^{kl} g_{ik,l}^{(3)}, \quad (4.20)$$

$$\left[g_{00}^{(2)} - g_{00}^{(4)} - \frac{1}{2} g_{00}^{(2)} z + \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{4} z^2 \right) \right]_{,0} = \left[g^{0i} + \frac{1}{2} g^{0i(2)} z \right]_{,i} \quad (4.21)$$

$$\left[g^{ij} + \frac{1}{2} g^{ij(2)} z + \frac{1}{2} \eta^{ij} \left(z - \frac{1}{4} z^2 \right) \right]_{,j} = \eta^{ij} g_{0j,0}^{(3)}. \quad (4.22)$$

La expansión del tensor de Ricci de segundo rango escrito en coordenadas cartesianas es

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{ij} g_{00,ij}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta^{ij} g_{00,ij}^{(4)} - \frac{1}{2} g_{00,00}^{(2)} + \frac{1}{2} \eta^{ki} \eta^{lj} g_{kl} g_{00,ij}^{(2)} + \frac{1}{2} \eta^{ij} g_{00,i}^{(2)} g_{00,j}^{(2)} + \dots, \quad (4.23)$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2} \eta^{ik} g_{0j,ik}^{(3)} + \dots, \quad (4.24)$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \eta^{kl} g_{ij,kl}^{(2)} + \dots, \quad (4.25)$$

donde hemos usado las condiciones de norma armónicas (4.9) para ignorar los siguientes términos de las ecuaciones (4.24) y (4.25).

También expandiremos el tensor energía-momento de la materia, considerándola como un

fluido perfecto, a saber,

$$T^{\mu\nu} = [p + \rho(1 + \Pi)]v^\nu v^\mu - pg^{\mu\nu}, \quad (4.26)$$

donde p es la presión isotrópica específica, ρ es la densidad del líquido ideal, Π es la energía específica propia, también llamada energía interna por partícula y es el nombre general para todas las energías con la excepción de la masa en reposo, y v^μ es la cuadrivelocidad. La definición de Π se da en *A first course of general relativity* de B. Schutz [49],

$$\Pi = \frac{\rho}{n} - m, \Rightarrow \rho = n(m + \Pi),$$

donde n es el número de densidad, el número de partículas por unidad de volumen en un sistema de referencia en co-movimiento.

El tensor (4.26) debe satisfacer la ley de conservación covariante dada por

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\lambda\mu} = 0. \quad (4.27)$$

La densidad del fluido perfecto es invariante y debe satisfacer la ecuación de continuidad covariante, esto es,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\rho v^\nu)_{,\nu} = 0. \quad (4.28)$$

En seguida se hace una expansión de $T^{\mu\nu}$ en el parámetro pequeño ϵ

$$T^{00} = T^{(0)00} + T^{(2)00} + T^{(4)00} + \dots, \quad (4.29)$$

$$T^{0j} = T^{(3)0j} + T^{(5)0j} + \dots, \quad (4.30)$$

$$T^{ij} = \eta^{ij} + T^{(2)ij} + T^{(4)ij} + \dots. \quad (4.31)$$

Si son ignoradas las fuerzas gravitacionales, esto es, en la aproximación Newtoniana, las com-

ponentes temporal y espacial de v^μ son

$$v^0 = 1 + O(\epsilon^2) \text{ and } v^i = v^i(1 + O(\epsilon^2)). \quad (4.32)$$

Si sustituimos las ecuaciones. (4.29)-(4.32) en la ecuación. (4.26), encontramos

$$T^{00} = \rho, \quad (4.33)$$

$$T^{0j} = \rho v^j, \quad (4.34)$$

$$T^{ij} = 0. \quad (4.35)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein expandidas (4.6) son

$$\eta^{ij} g_{00,ij}^{(2)} = -8\pi G T^{00}, \quad (4.36)$$

$$\eta^{ij} g_{00,ij}^{(4)} + g_{00,00}^{(2)} - \eta^{ki} \eta^{lj} g_{kl}^{(2)} g_{00,ij}^{(2)} - \eta^{ij} g_{00,i}^{(2)} g_{00,j}^{(2)} = -8\pi G (T^{00} + 2g_{00}^{(2)} T^{00} - \eta_{ij} T^{ij}), \quad (4.37)$$

$$\eta^{jl} g_{0i,jl}^{(3)} = -16\pi G \eta_{ij} T^{0j}, \quad (4.38)$$

$$\eta^{kl} g_{ij,kl}^{(2)} = 8\pi G \eta_{ij} T^{00}. \quad (4.39)$$

Este conjunto de ecuaciones nos permite escribir el tensor métrico del espacio-tiempo de Riemann en las aproximaciones Newtoniana y Post-Newtoniana. Si denotamos ϕ como el potencial Newtoniano, podemos suponer que

$$g_{00}^{(2)} = -2\phi, \quad (4.40)$$

entonces la ecuación (4.36) puede escribirse como

$$\Delta\phi = -4\pi G T^{00}. \quad (4.41)$$

la cual es la ecuación de Poisson y $\Delta = \nabla^2$ es el operador Laplaciano. Consideramos ϕ nulo en el infinito, por lo tanto, nuestra solución es,

$$\phi = G \int \frac{T^{00}(\mathbf{x}', t)}{r} d^3 x', \quad (4.42)$$

donde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ es la distancia entre el punto fuente y el punto de observación (punto de campo).

De las ecuaciones (4.38) y (4.39), obtenemos

$$g_{0i}^{(3)} = -4G\eta_{ij} \int \frac{T^{0j}(\mathbf{x}', t)}{r} d^3 x', \quad (4.43)$$

$$g_{ij}^{(2)} = 2G\eta_{ij} \int \frac{T^{00}(\mathbf{x}', t)}{r} d^3 x' = 2\eta_{ij}\phi. \quad (4.44)$$

Si sustituimos las ecuaciones. (4.40), (4.41) y (4.44) en la ecuación (4.37), tenemos

$$\Delta \left(g_{00}^{(4)} - 2\phi^2 \right) = -2\phi_{,00} + 8\pi G \left(T^{00} - \eta_{ij} T^{ij} \right). \quad (4.45)$$

También, $g_{00}^{(4)}$ debe tender a cero en el infinito, por lo tanto, de la Ec. (4.45) obtenemos

$$g_{00}^{(4)} = 2\phi^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\phi(\mathbf{x}', t)}{r} d^3 x' - 2G \int \frac{(T^{00} - \eta_{ij} T^{ij})}{r} d^3 x'. \quad (4.46)$$

Las ecuaciones (4.19) y (4.43) pueden relacionarse por

$$\phi_{,0} = \frac{1}{4} \eta^{ij} g_{0j,i}^{(3)}. \quad (4.47)$$

Sustituyendo las componentes expandidas del tensor energía-momento de la materia dado por

las ecuaciones. (4.33) y (4.34) en las ecuaciones. (4.42) y (4.43), obtenemos

$$g_{00}^{(2)} = -2\phi, \quad g_{0j}^{(3)} = 4\eta_{ij}q^i, \quad g_{ij}^{(2)} = 2\eta_{ij}\phi, \quad (4.48)$$

donde

$$\phi = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' \quad (4.49)$$

y

$$q^i = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)v^i}{r} d^3x'. \quad (4.50)$$

En el orden de aproximación más bajo, los coeficientes del tensor métrico del espacio de Riemann son

$$g_{00} = 1 - 2\phi, \quad g_{0j} = 4\eta_{ij}q^i, \quad g_{ij} = \eta_{ij}(1 + 2\phi). \quad (4.51)$$

Podemos usar nuestros últimos resultados en la ley de conservación de covariante (4.27) y la ecuación de continuidad de covariante (4.28) para encontrar la siguiente aproximación para las componentes del tensor de energía-momento de la materia. Necesitamos para esto los símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, $\sqrt{-g}$ y v^0 en la aproximación de orden cero,

$$\sqrt{-g} = 1 + 2\phi, \quad (4.52)$$

$$v^0 = 1 + \phi - \frac{1}{2}v_j v^j, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= -\phi_{,0}, \quad \Gamma^0_{0i} = -\phi_{,i}, \quad \Gamma^i_{00} = \eta^{ij}\phi_{,j}, \\ \Gamma^0_{ij} &= -\eta_{ij}\phi_{,0} + 2(\eta_{jk}q^k_{,i} + \eta_{ik}q^k_{,j}), \\ \Gamma^i_{0j} &= 2q^i_{,j} + \delta^i_j\phi_{,0} - 2\eta^{ik}\eta_{jl}q^l_{,k}, \\ \Gamma^i_{jk} &= \delta^i_k\phi_{,j} + \delta^i_j\phi_{,k} - \eta^{il}\eta_{jk}\phi_{,l}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Así, la ley de conservación covariante queda como

$$T^{00}_{,0} + T^{0i}_{,i} - \rho\phi_{,0} - 2\rho v^i\phi_{,i} = O(\epsilon^5), \quad (4.55)$$

$$T^{ij}_{,j} + (\rho v^i)_{,0} + \eta^{ij}\rho\phi_{,j} = O(\epsilon^4), \quad (4.56)$$

la ecuación de continuidad covariante es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\rho + 3\phi\rho - \frac{1}{2}\rho v_i v^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho v^i + 3\phi\rho v^i + \frac{1}{2}\rho v^i v^2 \right) \right\} = O(\epsilon^4) \quad (4.57)$$

y la ecuación de movimiento de un líquido ideal está dada por

$$\hat{\rho}(v^i_{,0} + v^j v^i_{,j}) = \eta^{ij}(-\hat{\rho}\phi_{,j} + p_{,j}), \quad (4.58)$$

$$\hat{\rho}(\Pi_{,0} + v^j \Pi_{,j}) = -p v^i_{,i}, \quad (4.59)$$

donde $\hat{\rho} = \sqrt{-g}\rho u^0$, es la densidad de masa conservada, la cual puede ser escrita de la siguiente forma en nuestra aproximación

$$\hat{\rho} = \rho \left(1 + 3\phi - \frac{1}{2}v_i v^i \right), \quad (4.60)$$

por lo tanto podemos reemplazar $\hat{\rho}$ por ρ la cual es la densidad invariante.

Después de realizar este desarrollo matemático tenemos las soluciones para el tensor energía-momento de la materia en la expansión requerida, es decir:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho(2\phi + \Pi - v_i v^i), \\ T^{0j} &= \rho v^j(2\phi + \Pi - v_i v^i) + p v^j, \\ T^{ij} &= \rho v^i v^j - \eta^{ij} p. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ahora, podemos obtener $g_{00}^{(4)}$, dado por la ecuación (4.46)

$$\begin{aligned}
g_{00}^{(4)} &= 2\phi^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\phi(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' - 2G \int \frac{\rho(2\phi + \Pi - 2v_i v^i) + 3p}{r} d^3x' \\
&= 2\phi^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\phi(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' - 4G \int \frac{\rho\phi}{r} d^3x' - 2G \int \frac{\rho\Pi}{r} d^3x' + 4G \int \frac{\rho v_i v^i}{r} d^3x' - 6G \int \frac{p}{r} d^3x' \\
&= 2\phi^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\phi(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' - 4\Phi_1 - 2\Phi_2 - 4\Phi_3 - 6\Phi_4,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

donde

$$\Phi_1 = G \int \frac{\rho\phi}{r} d^3x', \quad \Phi_2 = G \int \frac{\rho\Pi}{r} d^3x', \quad \Phi_3 = -G \int \frac{\rho v_i v^i}{r} d^3x', \quad \Phi_4 = G \int \frac{p}{r} d^3x',$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 y Φ_4 son los potenciales gravitacionales generalizados.

Ahora hemos obtenido los coeficientes métricos de $g_{\mu\nu}$ de la métrica del espacio-tiempo de Riemann, esto es

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - 2\phi + 2\phi^2 - G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\mathbf{x}', t) r d^3x' - 4\Phi_1 - 2\Phi_2 - 4\Phi_3 - 6\Phi_4 + O(\epsilon^6), \\
g_{0j} &= 4\eta_{ij} q^i + O(\epsilon^5), \\
g_{ij} &= \eta_{ij}(1 + 2\phi) + O(\epsilon^4),
\end{aligned} \tag{4.63}$$

donde hemos usado la identidad

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\phi}{r} d^3x' = -G \int \rho(\mathbf{x}', t) r d^3x' \tag{4.64}$$

demostrada por Vladimirov [50].

Podemos escribir nuestro sistema de ecuaciones (4.36)-(4.39) de la siguiente forma

$$\Delta\phi = -4\pi G\rho, \tag{4.65}$$

$$\Delta \mathbf{q} = -4\pi G \rho \mathbf{v}, \quad (4.66)$$

$$\Delta \Psi = -2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 8\pi G \rho \left(2\phi + \Pi + 2v^2 + 3 \frac{p}{\rho} \right), \quad (4.67)$$

donde $\Psi = \psi - 2\phi^2$ y $\psi = g_{00}^{(4)}$, y

$$\eta_{ij} \Delta \phi = -4\eta_{ij} \pi G \rho. \quad (4.68)$$

La condición (4.47) está escrita como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + 3\mathbf{q} = 0. \quad (4.69)$$

Del sistema (4.65)-(4.69), tenemos una solución para ϕ , el potencial escalar Newtoniano ordinario dado por la ecuación. (4.49)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{r} d^3 x'.$$

El vector potencial de Heaviside cuyas componentes están dados por la ecuación. (4.50), es escrito en forma vectorial como sigue

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}}{r} d^3 x'. \quad (4.70)$$

Definimos los potenciales Ξ y χ para escribir una solución simplificada a la ecuación (4.67)

$$\Xi = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t) \left(2\phi + \Pi + 2v^2 + \frac{3p}{\rho} \right)}{r} d^3 x' \quad (4.71)$$

y

$$\chi = G \int \rho(\mathbf{x}', t) r d^3 x', \quad (4.72)$$

por lo tanto, la solución a la ecuación (4.67) es

$$\Psi = -2\Xi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (4.73)$$

Definimos la contribución total de los potenciales escalar y vectorial ϕ_t y \mathbf{q}_t como

$$\phi_t = -\frac{1}{2}(-1 + g_{00}) = \overset{(0)}{\phi} + \left(\overset{(2)}{\phi^2} - \overset{(2)}{\Theta} \right) + O(\epsilon^4), \quad (4.74)$$

donde, por conveniencia, hemos introducido $\Theta = \frac{1}{2}\Psi$ y

$$\mathbf{q}_t = \frac{1}{4} \overset{(2)}{g}_{0j} + O(\epsilon^4) = \overset{(2)}{q}_j + O(\epsilon^4). \quad (4.75)$$

En ambas ecuaciones, hemos reducido el orden de los potenciales debido a que en las definiciones dadas hemos multiplicado la ecuación (4.74) por c^2 y la ecuación (4.75) por c .

Entonces, podemos definir el vector del campo gravitacional ordinario \mathbf{g} y el vector del campo de Heaviside \mathbf{k} como funciones de los potenciales escalar y vectorial ϕ_t \mathbf{q}_t

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi_t - \frac{\partial \mathbf{q}_t}{\partial t} = -\nabla \overset{(0)}{\phi} + \nabla \overset{(2)}{\Theta} - \nabla \left(\overset{(2)}{\phi^2} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \overset{(2)}{\phi} \quad (4.76)$$

y

$$\mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{q}_t. \quad (4.77)$$

De esta forma, podemos obtener la formulación tipo-Maxwell de segundo orden de las ecuaciones del campo gravitacional, una vez que se reintroducen los factores c^{-2} ,

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho \left\{ 1 - \frac{2}{c^2} \left(2\phi + \Pi + 2v^2 + 3\frac{p}{\rho} \right) \right\} - \frac{4\pi G}{3c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + O(\epsilon^4), \quad (4.78)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{k} = O(\epsilon^4), \quad (4.79)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}, \quad (4.80)$$

$$\nabla \times \mathbf{k} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + O(\epsilon^4). \quad (4.81)$$

El sistema de ecuaciones (4.78)-(4.81) son nuestras ecuaciones de Jefimeko de segundo orden para la gravitación. Debemos notar que aunque el vector potencial de Heaviside en la ecuación (4.75) es del orden de ϵ^2 , este factor desaparece en la ecuación (4.80) porque cuando calculamos el rotacional de \mathbf{g} y la derivada temporal de \mathbf{k} e igualamos ambas cantidades, después de usar identidades vectoriales de la referencia [11], hallamos que la ecuación (4.80) no contiene términos mayores o iguales que ϵ^2 .

El análogo de la fuerza de Lorentz está dado si utilizamos $\kappa = 1 + 2\phi$, el coeficiente de la parte espacial de la métrica Post-Newtoniana y v^0 de la ecuación (4.53) en la ecuación de la geodésica,

$$\frac{d}{dt}(\kappa v^0 \mathbf{v}) = v^0(\mathbf{g} + \mathbf{v} \times \mathbf{k} + u^2 \nabla \kappa) + O(\epsilon^4). \quad (4.82)$$

Después de sustituir κ y u^0 , tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(1 + 3\phi - \frac{1}{2}u^2\right) \mathbf{u} = \left(1 + \phi - \frac{1}{2}u^2\right) (\mathbf{g} + \mathbf{u} \times \mathbf{k}) + O(\epsilon^4). \quad (4.83)$$

También, podemos establecer el orden cero de aproximación, el cuál nos da la teoría Newtoniana, formulada como una teoría de campos de fuerzas de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \quad (4.84)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0. \quad (4.85)$$

La ecuación (4.84) nos lleva a la ecuación de Laplace para el potencial escalar ϕ y la ecuación (4.85) nos indica que el campo gravitacional ordinario es conservativo.

Capítulo 5

Teoría gravitodinámica en términos del álgebra geométrica

Formularemos la teoría gravitacional utilizando el álgebra geométrica, creada por Hermann Grassmann en su libro publicado en 1844 llamado Teoría de la extensión, en alemán, *Ausdehnungslehre* [51], una herramienta matemática desarrollada en la década de 1870 por William Clifford, donde sintetizó el trabajo de Grassmann y el trabajo de Sir Rowan Hamilton sobre cuaterniones [52] en un nuevo tipo de producto llamado producto geométrico, denotado por ab , mezclando el producto interior y exterior en una sola ecuación. Después de un siglo, David Hestenes desarrolló el cálculo geométrico en sus obras publicadas en 1966 *Space-Time Algebra* [53] y en *Clifford Algebra to Geometric Calculus* publicado en 1984 [54].

El objetivo del uso del álgebra geométrica para expresar las leyes de la naturaleza, es porque esta herramienta proporciona un lenguaje matemático unificado para incorporar diferentes sistemas matemáticos que incluyen algunos aspectos de la geometría, algunos de estos sistemas simbólicos son: variable compleja, análisis vectorial, álgebra tensorial, formas diferenciales (entre otros), y estos diversos sistemas simbólicos derivan la interpretación geométrica que puede obtenerse de un núcleo único de conceptos geométricos (ver, por ejemplo [55], para ver las ventajas de usar varios sistemas simbólicos y ver las ventajas de usar un lenguaje matemático

5.1. Dicotomía entre los conceptos absoluto y relativo

Se define un *sistema de referencia* como un cuerpo material con masa positiva que se supone que está en reposo, es decir, es un objeto que posee el *vector de velocidad cero*. No podemos referirnos a un movimiento en los cuerpos si no elegimos un sistema de referencia.

Está claro que todo en la naturaleza está en movimiento, por lo tanto, no hay cuerpos en reposo, más bien los cuerpos en reposo son una abstracción utilizada por los científicos que sirve para describir los fenómenos que ocurren en el universo.

En la naturaleza hay una *dicotomía* sobre el cual se pueden estudiar varios fenómenos, esta dicotomía trata sobre los conceptos *absoluto* y *relativo* [56]. Si un fenómeno observado se considera dependiente del sistema de referencia, se dice que es relativo. Por otro lado, si el fenómeno es independiente del sistema de referencia, se dice que es absoluto. Por ejemplo, las ondas gravitacionales existen independientemente del sistema de referencia elegido, las ondas gravitacionales son un fenómeno absoluto, no importa si se miden o no, existen viajando en nuestro universo, por lo tanto, son absolutas. mientras que la energía y la frecuencia que podemos medir son conceptos relativos porque dependen del sistema de referencia elegido para medir estas cantidades y de la velocidad relativa de la fuente. La frecuencia y la energía están relacionadas por la relación $E = h\nu$, donde h es la constante de Planck, y ambas cantidades son diferentes no solo por la velocidad relativa de la fuente, sino que tendrán valores diferentes si hay varios observadores moviéndose unos a otros.

Podemos afirmar que el campo gravitodinámico es un concepto absoluto, mientras que los campos \mathbf{G} y \mathbf{K} son conceptos relativos. El campo gravitodinámico es el análogo del campo electromagnético (un concepto absoluto), mientras que el campo eléctrico \mathbf{E} y la inducción magnética \mathbf{B} son conceptos relativos. Estos campos dependen no solo de las fuentes que los generan, sino que dependen de la elección del sistema de referencia. Es por esta razón que

estos campos **G**, **K**, **E** y **B** no son conceptos absolutos, sino que son relativos.

Podemos decir lo mismo sobre los cuerpos y todas las partículas elementales con o sin masa, i. e., gravitones, fotones, electrones, neutrones, protones, moléculas, células, planetas, estrellas, galaxias, etc., todos ellos están libres de referencias, por lo tanto, son absolutos. Sus medidas físicas dependen del sistema de referencia elegido, i. e. sus velocidades, energías, campo gravitacional, campo magnético, etc., son conceptos relativos.

5.2. Dimensión del universo

Desde los antiguos griegos, se cree que la dimensión de nuestro Universo es tres, y la mayoría piensa que el espacio tridimensional es el contenedor del mundo físico (como las pasas o las chispas de chocolate dentro de un panqué). Esta idea, apoyada por René Descartes, afirma que el espacio tridimensional es absoluto, un medio (éter) que existe independientemente de la materia y la energía contenida en él. En lugar de estas ideas, Galileo Galilei enseñó que el espacio es un concepto relativo, depende de sistemas de referencia en reposo (interpretados por Galileo como cuerpos masivos con velocidad nula), esto significa que estar en el mismo lugar depende de la elección de un cuerpo de referencia.

Creemos que la dimensión del universo es cuatro en lugar de tres, aunque la mayoría piensa que el espacio-tiempo de cuatro dimensiones es una fantasía de los matemáticos. En nuestra opinión, la dimensión de nuestro universo es cuatro en lugar de tres, se conoce como espacio de cuatro dimensiones o espacio-tiempo, y es absoluto ¹. El universo es un proceso que viaja dentro de este espacio de cuatro dimensiones desde el pasado hasta el futuro.

¹Dr. Oziewicz piensa que un mejor nombre para el espacio-tiempo debe ser eventópolis, en lugar de espacio-tiempo, debido al hecho de que el espacio-tiempo es un concepto absoluto, mientras que el espacio y el tiempo son conceptos relativos.

5.3. Álgebra geométrica

Los elementos en álgebra geométrica se denominan *multivectores* y forman un espacio lineal. El álgebra geométrica es un álgebra graduada, lo que significa que los multivectores se pueden separar en términos de diferente grado.

Se define un *multivector genérico de grado-n* como la suma

$$M = \sum_{i=0}^n \langle M \rangle_i, \quad (5.1)$$

donde cualquier elemento $\langle M \rangle_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$ es un *multivector puro de grado-i* y el operador $\langle \ \rangle_i$ se proyecta en los términos de grado i en el argumento.

Por ejemplo, los escalares son de grado 0, los vectores son de grado 1, los bivectores son de grado 2, los trivectores son de grado 3, etc. Si a, b, c, \dots son vectores, entonces un bivector es generado por el producto exterior entre dos vectores, es decir, $a \wedge b$, un trivector, por el producto exterior entre un vector y un bivector $a \wedge b \wedge c$, etc. Podemos ver el grado del elemento como la dimensión del hiperplano que especifica, el grado del multivector no es el tamaño del espacio lineal, conocido como dimensión.

El producto geométrico de dos vectores se define por

$$ab = a \cdot b + a \wedge b, \quad (5.2)$$

formado por el escalar (producto interior) y el bivector $a \wedge b$ (producto exterior). A primera vista, no podemos sumar dos cantidades de diferente naturaleza, pero este caso es análogo a los números complejos donde está formado por la suma de dos cantidades múltiples de la unidad real 1 y la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$.

Debido a que el producto interno entre vectores nos da un escalar, es obvio que el producto interior es simétrico, pero el producto exterior entre ellos es antisimétrico. De esta considera-

ción tenemos

$$ba = b \cdot a - b \wedge a. \quad (5.3)$$

Por lo tanto, podemos definir los productos interior y exterior en términos del producto geométrico

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) \quad (5.4)$$

y

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba). \quad (5.5)$$

Si $a \wedge b = 0$ el producto geométrico es conmutativo, esto es $ab = ba$. Pero si $a \cdot b = 0$, el producto geométrico es anticonmutativo $ab = -ba$.

Resumimos las propiedades que satisface el producto interior:

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (5.6)$$

$$w \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b), \quad (5.7)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (5.8)$$

$$a \cdot a > 0 \text{ excepto cuando } a = 0. \quad (5.9)$$

Mientras el producto exterior satisface las siguientes propiedades:

$$a \wedge b = -b \wedge a, \quad (5.10)$$

$$a \wedge a = 0 \forall a, \quad (5.11)$$

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c. \quad (5.12)$$

El producto exterior $a \wedge b$ forma un espacio lineal en el mismo sentido que los vectores.

El producto geométrico satisface:

$$(ab)c = a(bc), \quad (5.13)$$

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (5.14)$$

$$(b + c)a = ba + ca. \quad (5.15)$$

Puede ser mostrado fácilmente que el producto de un vector a y un bivector $A = b \wedge c$ es simétrico

$$a \wedge A = A \wedge a. \quad (5.16)$$

Si usamos la regla asociativa (5.13), podemos demostrar que el producto interior entre el vector a y el bivector $A = b \wedge c$ es antisimétrico

$$a \cdot A = -A \cdot a. \quad (5.17)$$

Se ha demostrado en [57] que usando la simetría del producto exterior (5.16) y el producto exterior en términos del producto geométrico (5.5), se satisface la propiedad asociativa del producto exterior de vectores, esto significa que,

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c. \quad (5.18)$$

La simetría de los productos interior y exterior puede generalizarse como sigue

$$a \cdot M = -(-1)^n M \cdot a \quad (5.19)$$

y

$$a \wedge M = (-1)^n M \wedge a, \quad (5.20)$$

donde n es el grado del multivector M .

5.3.1. Álgebra geométrica en dos dimensiones

El álgebra geométrica del espacio de dos dimensiones se denota por \mathcal{G}_2 .

El espacio de dos dimensiones es generado por dos vectores ortonormales \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 . Esos vectores satisfacen

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (5.21)$$

donde $i, j = 1, 2$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

El álgebra completa de \mathcal{G}_2 es generada por los elementos del Cuadro 5.1.

Cuadro 5.1: Conjunto base para \mathcal{G}_2 .

1	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$
1 escalar	2 vectores	1 bivector

Esto significa que cualquier multivector de \mathcal{G}_2 contiene cuatro elementos, i. e., un escalar dos vectores y un bivector. Entonces, dos multivectores pueden ser escritos como

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

y

$$B = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2.$$

La suma está dada por

$$A + B = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \mathbf{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \quad (5.22)$$

Podemos ver que debido a la ortogonalidad de \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 , el producto geométrico entre ellos es

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \quad (5.23)$$

y

$$\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2. \quad (5.24)$$

Multiplicando $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ desde la izquierda

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1 = -(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \quad (5.25)$$

y

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \quad (5.26)$$

vemos que la multiplicación desde la izquierda por el bivector rota 90° en sentido horario si \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 forman un par dextrógiro.

Multiplicando desde la derecha

$$\mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \quad (5.27)$$

y

$$\mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1, \quad (5.28)$$

la multiplicación desde la derecha rota 90° en sentido antihorario. En el álgebra geométrica del plano, el último producto a considerar es el cuadrado del bivector $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, el cual nos provee una conexión con el plano de Argand de los números complejos

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = -1, \quad (5.29)$$

lo cual significa que dos multiplicaciones sucesivas desde la izquierda o desde la derecha de un

vector por $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ rota un vector 180° .

En la conexión con los números complejos, se introduce

$$I = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, I^2 = -1, \quad (5.30)$$

el cual es un pseudoescalar².

El producto geométrico en dos dimensiones puede verse como un número complejo

$$Z = x + y\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = x + Iy. \quad (5.31)$$

Los números complejos son usados para representar vectores en el plano de Argand, en el álgebra geométrica \mathcal{G}_2 los números complejos son reemplazados por la suma de un escalar más un bivector, mientras los vectores son de grado-1.

5.3.2. Álgebra geométrica en tres dimensiones

Un multivector genérico en el espacio tridimensional contiene las siguientes elementos puros de grado- i , $i = 0, 1, 2, 3$:

Multivectores de grado-0: son los números reales los cuales caracterizan cantidades físicas (sin sus unidades), tales como, distancia, rapidez, energía, número de moles, etc. No tienen extensión espacial. Esas cantidades están representadas por caracteres griegos, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc.

Multivectores de grado-1: son representados por vectores (representados por segmentos de línea orientados), pero no son vistos como un conjunto de coordenadas (no están restringidos por sus posiciones), son elementos abstractos de un espacio lineal. Ejemplos de tales objetos en el mundo físico son: desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, etc. Tienen magnitud y dirección y son representados por caracteres latinos a, b, c, d , etc. (sin barras, ni flechas, ni en negritas).

² I no necesariamente conmuta con otros multivectores. En el caso de la unidad imaginaria i , este nunca es combinado con otros objetos, tales como vectores, por esta razón su utiliza letra mayúscula.

Multivectores de grado-2: son llamados bivectores y son vistos como áreas orientadas, formadas por el paralelogramo generado por los dos vectores a y b , con la punta de a en el origen de b , tienen magnitud y orientación, y están definidos por el producto exterior $a \wedge b$. Los bivectores no están restringidos por la forma del plano.

Multivectores de grado 3: son llamados trivectores definidos por el producto exterior de un vector con un bivector $a \wedge b \wedge c$, donde la punta de a está fijada en el origen de b y la punta de b al origen de c . Están representados por paralelepípedos orientados con el uso de las manos, la cual determina la orientación y signo del paralelepípedo. El trivector no está restringido a la forma del volumen.

Se define un *multivector genérico tridimensional*³ M como una suma de multivectores linealmente independientes de diferentes grados como sigue,

$$M = \sum_{k=0}^3 M_k. \quad (5.32)$$

El espacio tridimensional es generado por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Esos vectores son ortogonales y ellos anti-conmutan. Cada uno de esos vectores son generados por un conjunto de bivectores $\{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$, los cuales son planos independientes en el espacio. el producto de los tres vectores es

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad (5.33)$$

el cual es un trivector de grado-3. Éste es el barrido de $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ a lo largo de \mathbf{e}_3 .

El álgebra del espacio tridimensional \mathcal{G}_3 es generado por los elementos dados en el cuadro 5.2.

³Usamos el término *multivector genérico de grado-3* en el espacio tridimensional al multivector que consiste de cuatro partes, a saber, un escalar, un vector, un bivector y un trivector, mientras usamos simplemente *multivector* para referirnos a un multivector arbitrario de cualquier grado.

Cuadro 5.2: Conjunto base para \mathcal{G}_3 .

1	$\{\mathbf{e}_i\}$	$\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j\}$	$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$
1 escalar	3 vectores	3 bivectores	1 trivector

Si multiplicamos dos bivectores los cuales son planos ortogonales, podemos ver que este es un tercer bivector

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3. \quad (5.34)$$

También, el producto de bivectores ortogonales es antisimétrico

$$(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3. \quad (5.35)$$

Se introduce la siguiente notación para los bivectores base

$$B_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, B_2 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, B_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \quad (5.36)$$

cuyo producto satisface

$$B_i B_j = -\delta_{ij} - \epsilon_{ijk} B_k. \quad (5.37)$$

Los bivectores (5.36) también satisfacen

$$B_1^2 = B_2^2 = B_3^2 = -1 \quad (5.38)$$

y

$$B_1 B_2 = -B_2 B_1, \text{ etc.} \quad (5.39)$$

Por último, vemos que

$$B_1 B_2 B_3 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = +1. \quad (5.40)$$

Es importante notar que Hamilton intentó identificar los cuaterniones puros con los vectores,

pero podemos ver que ellos son bivectores. Hamilton impuso la condición $ijk = -1$ sobre las unidades de los cuaterniones, pero en el álgebra geométrica tenemos la condición (5.40).

Existe un isomorfismo entre i, j, k y B_1, B_2, B_3 , cambiando un signo en una componente, por ejemplo, en la componente y ,

$$i \leftrightarrow B_1, j \leftrightarrow -B_2, k \leftrightarrow B_3. \quad (5.41)$$

Hamilton vio a i, j, k como un conjunto dextrógiro de vectores, pero podemos ver que ellos de hecho son un conjunto levógiro de bivectores.

Hemos visto ya que el producto exterior entre vectores es asociativo, ver ecuación (5.18). Un trivector $a \wedge b \wedge c$ está formado de barrer $a \wedge b$ a lo largo de c , y se obtiene el mismo volumen orientado de barrer $c \wedge a$ a lo largo de b o de barrer $b \wedge c$ a lo largo de a . Esta condición está dada por

$$a \wedge b \wedge c = c \wedge a \wedge b = b \wedge c \wedge a. \quad (5.42)$$

Esto geoméricamente significa que cualquier trivector no contiene información acerca de la forma del volumen, el trivector nos da sólomente un volumen y una orientación.

Se define la unidad pseudoescalar dextrógira para el espacio por medio de

$$I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \quad (5.43)$$

donde el conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es un sistema dextrógiro de vectores ortogonales. Por lo tanto, podemos escribir

$$a \wedge b \wedge c = \lambda I, \quad (5.44)$$

donde λ es un escalar.

Puede demostrarse que el producto de un vector tridimensional y un pseudoescalar conmuta, i. e.

$$\mathbf{e}_1 I = I \mathbf{e}_1. \quad (5.45)$$

Hay otra propiedad que fue introducida por Grassmann llamada la *transformación de dualidad*, obtenida de expresar cada uno de los bivectores base como la multiplicación del pseudoescalar y un vector dual como sigue:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = I\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = I\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = I\mathbf{e}_2. \quad (5.46)$$

El cuadrado del pseudoescalar está dado por

$$I^2 = -1. \quad (5.47)$$

Podemos mostrar también que el producto exterior puede ser expresado como

$$a \wedge b = I a \times b, \quad (5.48)$$

el producto cruz se define como el dual del producto exterior.

5.3.3. Álgebra geométrica del espacio-tiempo

Para construir el álgebra geométrica para el espacio-tiempo de Minkowski, necesitamos cuatro vectores ortogonales $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$.

Estos deben satisfacer

$$\gamma_0^2 = 1, \gamma_0 \cdot \gamma_i = 0, \gamma_i \cdot \gamma_j = -\delta_{ij}, \quad (5.49)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$, ó

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (5.50)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Los vectores del sistema $\{\gamma^\mu\}$ recíproco están relacionados con los vectores del sistema $\{\gamma_\mu\}$ por $\gamma^0 = \gamma_0$ y $\gamma^i = -\gamma_i$.

El álgebra geométrica para el espacio-tiempo satisface no sólo (5.13)-(5.15), sino

$$a^2 = \epsilon_a |a|^2, \quad (5.51)$$

donde ϵ_a es la signatura de a dada por

$$\epsilon_a = \begin{cases} 1 & \text{vector temporal} \\ -1 & \text{vector espacial} \\ 0 & \text{vector de luz.} \end{cases} \quad (5.52)$$

y $|a| > 0$ es la magnitud de a .

Un vector x con componentes x^μ en el sistema $\{\gamma_\mu\}$ representa un evento en el espacio-tiempo y se escribe como

$$x = x^\mu \gamma_\mu = ct\gamma_0 + x^i \gamma_i. \quad (5.53)$$

Si consideramos dos vectores ortogonales arbitrarios, tenemos para el cuadrado del producto exterior

$$(a \wedge b)^2 = abab = -abba = -a^2 b^2. \quad (5.54)$$

Para el conjunto $\{\gamma_\mu\}$ aplicamos (5.54),

$$(\gamma_i \wedge \gamma_j)^2 = -\gamma_i^2 \gamma_j^2 = -1, \quad (5.55)$$

para vectores espaciales.

Si los bivectores contienen una componente temporal, obtenemos

$$(\gamma_i \wedge \gamma_0)^2 = -\gamma_i^2 \gamma_0^2 = +1. \quad (5.56)$$

Tenemos 6 bivectores en nuestra álgebra del espacio-tiempo.

Para los bivectores con cuadrado positivo, podemos ver que tenemos la geometría Bolyai-Lobachevskiana (geometría hiperbólica),

$$\exp(\alpha\gamma_1\gamma_0) = 1 + \alpha\gamma_1\gamma_0 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!}\gamma_1\gamma_0 + \dots = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)\gamma_1\gamma_0. \quad (5.57)$$

Definimos el pseudoescalar grado-4 I por medio de

$$I = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad (5.58)$$

el cual define una orientación para el espacio-tiempo. I no conmuta con los vectores. Debido al hecho de que I es de grado-4, denotamos \tilde{I} como su inverso, tenemos

$$\tilde{I} = \gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0 = I. \quad (5.59)$$

El cuadrado del pseudoescalar puede escribirse como

$$I^2 = I\tilde{I} = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)(\gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0) = -1. \quad (5.60)$$

Definiendo $A_i = \gamma_i\gamma_0$, entonces podemos resumir el álgebra del bivector del espacio-tiempo como

$$\begin{aligned} A_i \times A_j &= \epsilon_{ijk} I A_k \\ (I A_i \times (I A_j)) &= -\epsilon_{ijk} I A_k \\ (I A_i) \times A_j &= -\epsilon_{ijk} A_k. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Para el conjunto de bivectores, el pseudoescalar I provee una estructura compleja que surge naturalmente.

Tenemos también cuatro trivectores en nuestro álgebra del espacio-tiempo. Los vectores y

trivectores son intercambiados por una transformación de dualidad

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_0 I = -I\gamma_0. \quad (5.62)$$

El álgebra del espacio-tiempo $\mathcal{G}(1, 3)$ es generada por los elementos del cuadro 5.3.

Cuadro 5.3: Conjunto base para $\mathcal{G}(1, 3)$.

1	$\{\gamma_\mu\}$	$\{\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu\}$	$I\gamma_\mu$	I
1 escalar	4 vectores	6 bivectores	4 trivectores	1 pseudoescalar

Tenemos un álgebra de 16 términos. Un elemento general de $\mathcal{G}(1, 3)$ es

$$M = \alpha + a + A + Ib + I\beta, \quad (5.63)$$

donde α, β son escalares, a, b son vectores y A es un bivector. tenemos como el elemento inverso de (5.63)

$$\tilde{M} = \alpha + a - A - Ib + I\beta. \quad (5.64)$$

Los vectores $\{\gamma_\mu\}$ satisfacen

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (5.65)$$

Hemos obtenido las relaciones que definen el álgebra matricial de Dirac, pero no tenemos una matriz identidad en el lado derecho. Aquí $\{\gamma_\mu\}$ son vectores base, no matrices en el isoespacio.

5.4. Cálculo geométrico

Podemos sintetizar la diferenciación vectorial y el álgebra geométrica en el llamado *cálculo geométrico*. Podemos usar el operador vectorial ∇ para formar el producto geométrico con otros multivectores, debido a que este operador tiene las propiedades de un vector (multivector de grado-1). El *operador derivada vectorial*, el cual denotamos como ∇ para dos y tres dimensiones,

mientras ∇ para dimensiones mayores, operando sobre un vector y unirá la divergencia y la derivada exterior⁴ en una simple fórmula, que nos da un escalar y un bivector. Una síntesis de las derivadas vectoriales será mostrada en la subsección 5.4.1, mientras en la subsección 5.4.2, veremos el poder del cálculo geométrico en la teoría de la integración dirigida. La integración dirigida sirve para formular y probar teoremas integrales útiles.

5.4.1. Derivadas vectoriales

Si definimos un sistema de coordenadas constante $\{\mathbf{e}_k\}$ con un sistema recíproco $\{\mathbf{e}^k\}$, la derivada vectorial es

$$\nabla = \mathbf{e}^k \partial_k. \quad (5.66)$$

La derivada vectorial mezcla las propiedades algebraicas de los vectores con las propiedades del operador de las derivadas parciales.

La derivada vectorial sobre un campo escalar $\phi(x)$ nos da $\nabla\phi$, el gradiente del campo escalar. Si consideramos $\phi(x) = a \cdot x = a_j x^j$, donde a es un vector constante, entonces el gradiente

$$\nabla(a \cdot x) = \mathbf{e}^i \partial_i (a_j x^j) = \mathbf{e}^i a_i = a, \quad (5.67)$$

es el vector a en el sistema $\{\mathbf{e}^k\}$, pero expresado como un resultado libre del sistema de referencia en el lado derecho.

La aplicación de este resultado a las coordenadas generaliza a sistemas de coordenadas curvilíneas como sigue

$$\nabla x^k = \nabla(x \cdot \mathbf{e}^k) = \mathbf{e}^k. \quad (5.68)$$

Ahora, consideramos un campo vectorial $R(x)$, la derivada vectorial es

$$\nabla R = \nabla \cdot R + \nabla \wedge R = \partial_i R^i + \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \partial_i R_j, \quad (5.69)$$

⁴La derivada exterior está relacionada al rotacional de un vector sólo en el espacio tridimensional, por una fórmula dada abajo en (5.70).

el término escalar es la divergencia de R y la derivada exterior de R es un bivector.

En el caso de tres dimensiones, $\nabla \times R$ requiere una operación de dualidad, esto es,

$$\nabla \times R = -I\nabla \wedge R. \quad (5.70)$$

El rotacional es generalizado a dimensiones arbitrarias por medio de la derivada exterior.

Se define la regla de Leibniz entre dos multivectores R y S como

$$\nabla(RS) = \nabla RS + \dot{\nabla}R\dot{S} = \mathbf{e}^i(\partial_i R)S + \mathbf{e}^i R(\partial_i S), \quad (5.71)$$

donde hemos usado la notación *punto*

$$\dot{\nabla}R\dot{S} = \mathbf{e}^i R(\partial_i S)$$

porque en general el producto geométrico es no conmutativo. Adoptamos esta notación en la cual la derivada geométrica con un punto encima es una función multivectorial-valuada que comparte el mismo punto.

Ahora, si tenemos un campo vectorial $T(x)$, la divergencia puede ser expresada como

$$\nabla \cdot T = \frac{1}{2}(\nabla T + \dot{T}\dot{\nabla}) \quad (5.72)$$

y la derivada exterior es

$$\nabla \wedge T = \frac{1}{2}(\nabla T - \dot{T}\dot{\nabla}). \quad (5.73)$$

Explícitamente, en términos del sistema vectorial constante $\{\mathbf{e}_k\}$

$$\nabla \cdot T = \partial_k \mathbf{e}^k \cdot T = \partial_i T^i \quad (5.74)$$

y

$$\nabla \wedge T = \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \partial_i T_j. \quad (5.75)$$

Podemos generalizar los últimos resultados para cualquier campo multivectorial F . En este caso, la derivada vectorial es

$$\nabla F = \mathbf{e}^k \partial_k F \quad (5.76)$$

y para un campo multivectorial grado- i tenemos

$$\nabla \cdot F_i = \langle \nabla F_i \rangle_{i-1} \quad (5.77)$$

y

$$\nabla \wedge F_i = \langle \nabla F_i \rangle_{i+1}. \quad (5.78)$$

Las ecuaciones (5.77) y (5.78) definen las derivadas interior y exterior de un campo multivectorial respectivamente.

En el espacio-tiempo, podemos definir el operador derivada vectorial usando el sistema ortogonal $\{\gamma_\mu\}$ con coordenadas asociadas x^μ de la siguiente manera

$$\nabla = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma_0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i. \quad (5.79)$$

En todas las teorías de campos relativistas esta derivada es el operador clave⁵, la cual incorporamos en nuestro enfoque del campo gravitacional.

Si aplicamos (5.79) a γ_0 obtenemos

$$\nabla \gamma_0 = \partial_t + \gamma^i \gamma_0 \partial_i = \partial_t - \mathbf{\nabla}, \quad (5.80)$$

donde $\mathbf{\nabla} = \sigma_i \partial_i$ es la derivada vectorial en el espacio relativo definido por γ_0 y $\sigma_i = \gamma_i \gamma_0$, son

⁵Incluida en la teoría de Dirac y la electrodinámica.

un conjunto de bivectores que representan planos temporales.

El conjunto $\{\sigma_i\}$ satisface

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \delta_{ij}. \quad (5.81)$$

Como en el caso de la ecuación (5.80), aplicamos γ_0 al operador derivada vectorial (5.79), esto es,

$$\gamma_0 \nabla = \partial_t + \nabla. \quad (5.82)$$

Podemos multiplicar (5.80) y (5.82), tal producto nos da el operador D' Alembertiano

$$\square = \nabla^2 = \partial_t^2 - \nabla^2, \quad (5.83)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano.

5.4.2. Teoría de la integración direccionada

Una integral direccionada de una función multivectorial-valuada $W(x)$ sobre una región n -dimensional suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se define como la suma Riemanniana

$$\int_{x \in \Omega} W(x) dv(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s W(x_k) \Delta v(x_i). \quad (5.84)$$

La definición (5.84) difiere de la integral Riemanniana ordinaria en el hecho de que $dv(x)$ y $\Delta v(x_i)$ son hipervolúmenes direccionados, dados por

$$\Delta v(x_i) = |\Delta v(x_i)| v(x_i) \quad (5.85)$$

y

$$dv(x) = |dv(x)| v(x), \quad (5.86)$$

donde $|\Delta v(x_i)|$ y $|dv(x)|$ son las medidas del hipervolumen de Riemann ordinarios. La dirección de un elemento de volumen es x en las ecuaciones (5.85) y (5.86), y están caracterizados por el n -vector simple unitario $v(x)$ tangente a Ω en el punto x .

Integrales de línea

La integral de línea de un campo multivectorial $W(x)$ a lo largo de una línea parametrizada $x(\alpha)$, es el caso más simple que tenemos en la teoría de la integración direccionada, esta integral se define por

$$\int W(x) \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = \int W(x) dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s \overline{W}^k \Delta x^k, \quad (5.87)$$

donde $\Delta x^k = x_k - x_{k-1}$ y $\overline{W}^k = \frac{1}{2}(W(x_{k-1}) - W(x_k))$.

El resultado de la integral de línea es independiente de la forma escogida para parametrizar la curva, siempre que la parametrización respete al orden de los puntos a lo largo de tal curva. En la definición (5.87), dx es una medida vector-valuada, por lo tanto, el producto $W(x)dx$ es un producto geométrico entre multivectores. Puesto que dx no es un escalar en (5.87), esta definición no es la integral de línea más general que podemos formar, pero podemos generalizar esta integral de línea como

$$\int L(\partial_\alpha x; x) d\alpha = \int L(dx) \quad (5.88)$$

donde $L(a) = L(a; x)$ es una función lineal multivectorial-valuada de a .

Si integramos una función vector-valuada $u(x)$, obtenemos

$$\int u dx = \int u \cdot dx + \int u \wedge dx, \quad (5.89)$$

la integral direccionada está formada por un escalar y un bivector.

Integrales de superficie

Suponemos que un campo multivectorial-valuado F definido sobre una superficie bidimensional inmersa en un espacio mayor. La superficie está parametrizada por dos coordenadas $x(x^1, x^2)$, entonces definimos la medición dirigida por

$$dX = \partial_1 x \wedge \partial_2 x dx^1 dx^2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 dx^1 dx^2, \quad (5.90)$$

donde $\mathbf{e}_i = \partial_i x$.

La medición es independiente del camino elegido para parametrizar la superficie, siempre que las coordenadas del vector estén orientadas en el orden deseado. La integral de superficie dirigida es, por lo tanto

$$\int W dX = \int W \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 dx^1 dx^2. \quad (5.91)$$

La medición puede ser multiplicada desde la izquierda o desde la derecha por el integrando, dándonos diferentes integrales, como en el caso de la integral de línea.

Superficies n -dimensionales

Para generalizar la integral dirigida a superficies n -dimensionales, definimos un *simplex* como la combinación del conjunto de puntos y conjunto adyacente de puntos en superficies discretas orientadas.

Considere una superficie n -dimensional y que un simplex para superficies discretas tiene vértices x_0, x_1, \dots, x_n con el orden que especifica la orientación elegida. Definimos los vectores

$$e_i = x_i - x_0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.92)$$

para este simplex. El elemento de volumen dirigido está dado como

$$\Delta X = \frac{1}{n!} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n. \quad (5.93)$$

Podemos escribir cierto punto en el simplex en términos de coordenadas $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$, por medio de

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^n \alpha^k e_k, \quad (5.94)$$

donde α^k está acotada en el rango entre 0 y 1, esto es, $0 \leq \alpha^k \leq 1$, además, satisface

$$\sum_{k=1}^n \alpha^k \leq 1. \quad (5.95)$$

$W(x)$ es un campo multivectorial arbitrario. Si denotamos por $W_k = W(x_k)$ el valor de cada vértice, podemos interpolar el W_k sobre el simplex introduciendo otra función $w(x)$ como sigue

$$w(x) = W_0 + \sum_{k=1}^n \alpha^k (W_k - W_0). \quad (5.96)$$

Ahora, si hacemos tender el número de puntos al infinito los símplexes se vuelven más pequeños, $w(x) \rightarrow W(x)$, y las superficies trianguladas tienden a convertirse en la superficie verdadera.

La integral dirigida de $W(x)$ se aproxima por la integral de $w(x)$ sobre cada simplex en la superficie. Para evaluar la integral sobre cada simplex, usamos las coordenadas α^k , donde $k = 1, \dots, n$. Así, tenemos

$$dX = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n d\alpha^1 d\alpha^2 \dots d\alpha^n. \quad (5.97)$$

Puede demostrarse que la integral de $w(x)$ sobre un simplex es

$$\int w dX = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n W_k \right) \Delta X, \quad (5.98)$$

donde ΔX está dado por la ecuación (5.93). Podemos notar que la función es reemplazada por su valor promedio sobre el simplex.

Si sumamos sobre todos los símlices que componen la superficie, entonces podemos definir

$$\int W dX = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \bar{W}^j \Delta X^j, \quad (5.99)$$

donde k corre sobre todos los símlices en la superficie.

Este resultado puede generalizarse por medio de $L(A_n)$, una función lineal dependiente de la posición del multivector grado- n A_n , esto es

$$\int L(dX) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \bar{L}^j(\Delta X^j), \quad (5.100)$$

donde $\bar{L}^j(\Delta X^j)$ es el valor promedio de $L(\Delta X^j)$ sobre los vértices de cada simplex.

5.5. Ecuaciones gravitacionales con el cálculo geométrico

En esta sección, escribiremos las ecuaciones gravitodinámicas usando el álgebra geométrica del espacio-tiempo, haciendo uso de los resultados de las secciones anteriores. Usaremos la velocidad de propagación del campo gravitodinámico en unidades donde es igual a la unidad, $c = 1$. Debido a que en el análisis vectorial de Gibbs \mathbf{K} es un pseudo-vector, es útil introducir el campo bivectorial de Heaviside asociado $\tilde{\mathbf{K}}$ como

$$\tilde{\mathbf{K}} = I\mathbf{K}, \quad (5.101)$$

que es una mejor representación que el campo vectorial \mathbf{K} debido al hecho de que $\tilde{\mathbf{K}}$ tiene la simetría correcta bajo la inversión de coordenadas en el espacio. $\tilde{\mathbf{K}}$ representa un plano orientado perpendicular a \mathbf{K} .

Usando el álgebra geométrica, el sistema de ecuaciones gravitodinámicas (2.3)-(2.6) son

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = -4\pi\rho, \quad (5.102)$$

$$\nabla \wedge \tilde{K} + \partial_t \mathbf{G} = 4\pi \mathbf{J}, \quad (5.103)$$

$$\nabla \cdot \tilde{K} = 0, \quad (5.104)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{G} + \partial_t \tilde{K} = 0. \quad (5.105)$$

Usando la derivada vectorial dada por la ecuación (5.69), podemos unir las ecuaciones precedentes de la siguiente forma

$$\nabla \mathbf{G} = -4\pi \rho - \partial_t \tilde{K} \quad (5.106)$$

y

$$\nabla \tilde{K} = 4\pi \mathbf{J} - \partial_t \mathbf{G}. \quad (5.107)$$

Combinando las ecuaciones (5.106) y (5.107), tenemos la ecuación multivectorial

$$\partial_t (\mathbf{G} + \tilde{K}) + \nabla (\mathbf{G} + \tilde{K}) = -4\pi (\rho - \mathbf{J}). \quad (5.108)$$

Definimos el *bivector de Heaviside genérico* H , que consiste en una parte vectorial \mathbf{G} y un bivector puro \tilde{K} , que representa la *tensión del campo gravitodinámico* de la siguiente forma,

$$H = \mathbf{G} + I\mathbf{K} = \mathbf{G} + \tilde{K}, \quad (5.109)$$

H es la forma covariante del campo gravitodinámico y une el campo gravitacional Newtoniano ordinario \mathbf{G} y el campo de Heaviside \mathbf{K} en una simple estructura espacio-temporal, esto es, un bivector espacio-temporal covariante. Sustituimos el bivector de Heaviside genérico en la ecuación (5.108) para obtener

$$(\partial_t + \nabla)H = -4\pi(\rho - \mathbf{J}). \quad (5.110)$$

Ahora, introducimos la densidad de corriente de masa espacio-temporal J , la cual satisface

$$\rho = J \cdot \gamma_0 \text{ y } \mathbf{J} = J \wedge \gamma_0, \quad (5.111)$$

por lo tanto, podemos reescribir la cantidad dentro del paréntesis de la ecuación (5.109) como

$$\rho - \mathbf{J} = \gamma_0 \cdot J + \gamma_0 \wedge J = \gamma_0 J. \quad (5.112)$$

Haciendo uso de $\gamma_0 \nabla = \partial_t + \nabla$, dado por la ecuación (5.82), y el lado derecho de la ecuación (5.112) en (5.110), obtenemos

$$\nabla H = -4\pi J, \quad (5.113)$$

la cual es una ecuación espacio-temporal simple para el campo gravitodinámico.

5.5.1. Soluciones a las ecuaciones gravitodinámicas en ausencia de fuentes

En regiones donde ρ y \mathbf{J} son nulas, la ecuación gravitodinámica espacio-temporal es

$$\nabla H = 0, \quad (5.114)$$

la cual admite la solución de onda plana trivial

$$H = H_0 e^{I(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (5.115)$$

donde H_0 es un multivector constante, ω es una frecuencia angular constante, \mathbf{k} es un vector de onda constante. Definimos la *fórmula de Euler generalizada*

$$e^{I\theta} = \cos \theta + I \sin \theta \quad (5.116)$$

que consiste en una parte escalar y una vectorial⁶. Sustituyendo la solución (5.115) en la ecuación (5.114) nos lleva a

$$(\omega - \mathbf{k})H_0 = 0. \quad (5.117)$$

⁶Ya hemos visto que el pseudoescalar nos provee de una estructura compleja, en este caso I es de grado-4.

Podemos escribir H_0 como la suma de un vector arbitrario \mathbf{X} más un bivector arbitrario $\tilde{Y} = I\mathbf{Y}$,

$$H_0 = \mathbf{X} + I\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \tilde{Y}. \quad (5.118)$$

Si sustituimos la forma expandida de H_0 dada por (5.118) en la ecuación (5.117), y aplicando el producto geométrico, tenemos

$$(\omega - \mathbf{k})(\mathbf{X} + \tilde{Y}) = \underbrace{-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X})}_{\text{escalar}} + \underbrace{(\omega\mathbf{X} - \mathbf{k} \cdot \tilde{Y})}_{\text{vector}} + \underbrace{(\omega\tilde{Y} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{X})}_{\text{bivector}} - \underbrace{(\mathbf{k} \wedge \tilde{Y})}_{\text{trivector}} = 0. \quad (5.119)$$

Cada una de esas cantidades puede ser igualada a cero separadamente,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} = 0, \quad (5.120)$$

$$\omega\mathbf{X} - \mathbf{k} \cdot \tilde{Y} = 0, \quad (5.121)$$

$$\omega\tilde{Y} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{X} = 0, \quad (5.122)$$

$$\mathbf{k} \wedge \tilde{Y} = 0. \quad (5.123)$$

Podemos ver, de la ecuación (5.120) que \mathbf{k} es un vector perpendicular a \mathbf{X} . La ecuación (5.121) implica que

$$\mathbf{X} = \omega^{-1}\mathbf{k} \cdot \tilde{Y}, \quad (5.124)$$

lo cual significa que \mathbf{X} se obtiene de la proyección de \mathbf{k} sobre el plano definido por el bivector \tilde{Y} y el resultado es rotado por $\pi/2$. Tenemos de la ecuación (5.122) que el bivector \tilde{Y} es generado por el producto exterior entre \mathbf{k} y \mathbf{X} , a saber,

$$\tilde{Y} = \omega^{-1}\mathbf{k} \wedge \mathbf{X}. \quad (5.125)$$

Por último, de la ecuación (5.123), podemos observar que \mathbf{k} es tangencial al plano \tilde{Y} . Este resultado también significa que \mathbf{k} está en el plano de \tilde{Y} y por lo tanto la proyección de \mathbf{k} sobre este plano es innecesaria. \mathbf{k} y \mathbf{X} están ambos en este plano y ellos son perpendiculares.

Considerando el hecho de que \mathbf{k} y \mathbf{X} pertenecen al plano \tilde{Y} , de la ecuación (5.125), $\mathbf{k} \wedge \mathbf{X}$ es un múltiplo de \tilde{Y} , y puesto que \mathbf{k} y \mathbf{X} son perpendiculares, el resultado obtenido de la ecuación (5.122), tenemos $|\mathbf{k} \wedge \mathbf{X}| = |\mathbf{k}||\mathbf{X}|$. Obtenemos después de mezclar las ecuaciones (5.121) y (5.122),

$$(k^2 - \omega^2)\tilde{Y} = 0, \quad (5.126)$$

con el resultado obvio

$$|\mathbf{k}| = \omega. \quad (5.127)$$

En virtud de (5.124) y (5.127), la amplitud (5.118) queda como

$$H_0 = \mathbf{X} + \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{X}, \quad (5.128)$$

donde $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$.

Ahora, expandemos la solución de prueba (5.115), haciendo uso de la fórmula de Euler generalizada (5.116).

$$H = (\mathbf{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{Y} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + I(\mathbf{X} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{Y} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})). \quad (5.129)$$

que consiste en una parte vectorial, la cual corresponde al campo gravitacional \mathbf{G} y una bivectorial, que corresponde al campo de Heaviside $\tilde{\mathbf{K}}$, esto es,

$$\mathbf{G} = \mathbf{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{Y} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (5.130)$$

y

$$\mathbf{K} = \mathbf{X} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{Y} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (5.131)$$

Estos resultados se interpretan de la siguiente manera: La intensidad del campo gravitodinámico H en el vacío consiste en ondas polarizadas circularmente, donde el campo gravitacional ordinario \mathbf{G} es un campo vectorial que gira desde el vector \mathbf{X} al vector perpendicular \mathbf{Y} a $-\mathbf{X}$, mientras que el bivector de Heaviside está rotando desde $-\tilde{Y}$ al bivector perpendicular \tilde{X} a $-\tilde{Y}$. Debemos tener en cuenta que cuando usamos álgebra geométrica en la fórmula generalizada de Euler, no tenemos los mismos resultados que en la fórmula familiar de análisis complejo de Euler, porque en nuestro enfoque todas las cantidades físicas que conforman H tienen una cantidad visualmente geométrica .

Podemos expresar una onda polarizada circularmente como la suma de ondas polarizadas derechas e izquierdas, i. e.

$$H = \frac{1}{2}H_0 \left(e^{I(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + e^{-I(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right). \quad (5.132)$$

Usando la fórmula generalizada de Euler (5.116) en (5.132), obtenemos

$$H = \mathbf{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (5.133)$$

ó

$$\mathbf{G} = \mathbf{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (5.134)$$

y

$$\tilde{K} = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (5.135)$$

Podemos concluir de las relaciones (5.133)-(5.135), que el campo vectorial \mathbf{G} y el campo bivectorial \tilde{K} no cambian sus direcciones y están en fase.

5.5.2. Soluciones a las ecuaciones gravitodinámicas con fuentes

En esta sección, hallamos la solución para la ecuación gravitodinámica espacio-temporal con fuentes (5.113),

$$\nabla H = -4\pi J.$$

Para obtener las soluciones para esta ecuación, utilizaremos el método de las funciones de Green. Para esto reescribimos (5.113)

$$(\partial_t + \nabla)H = \mathcal{J}, \quad (5.136)$$

donde $\mathcal{J} = -4\pi(\rho - \mathbf{J})$. Como siguiente paso, hallamos la función de Green $G(t, \mathbf{r})$ para la ecuación (5.136),

$$(\partial_t + \nabla)G(t, \mathbf{r}) = 4\pi\delta(t)\delta^3(\mathbf{r}), \quad (5.137)$$

y para obtener $G(t, \mathbf{r})$, necesitamos primero hallar las funciones de Green $g_{1,2}(t, \mathbf{r})$ para la ecuación de onda

$$\square g_{1,2} = 4\pi\delta(t)\delta^3(\mathbf{r}). \quad (5.138)$$

Esas funciones están dadas por

$$g_1(t, \mathbf{r}) = -\frac{\delta(t+r)}{r} \quad \text{and} \quad g_2(t, \mathbf{r}) = -\frac{\delta(t-r)}{r}. \quad (5.139)$$

Renombramos $g_2(t, \mathbf{r}) = g(t, \mathbf{r})$, debido al hecho de que sólo g_2 tiene significado físico. También reescribimos (5.138)

$$(\partial_t - \nabla)(\partial_t + \nabla)g = 4\pi\delta(t)\delta^3(\mathbf{r}), \quad (5.140)$$

y entonces comparamos (5.140) con (5.137), obteniendo

$$G(t, \mathbf{r}) = (\partial_t - \nabla)g(t, \mathbf{r}) = -(\partial_t - \nabla)\frac{\delta(t-r)}{r}. \quad (5.141)$$

Por lo tanto, la expresión para la intensidad del campo gravitodinámico es

$$H(t, \mathbf{r}) = \int \int G(\tau, \xi) \mathcal{J}(t', \mathbf{r}') dt' d^3 r', \quad (5.142)$$

donde $\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y $\tau = t - t'$. Integrando sobre t' nos da

$$H(t, \mathbf{r}) = -(\partial_t - \nabla_{\mathbf{r}}) \int \frac{\mathcal{J}(\tau - \xi, \mathbf{r}')}{\xi} d^3 r'. \quad (5.143)$$

Si rearrreglamos (5.143), esta queda como

$$H(t, \mathbf{r}) = -\nabla \int \frac{J}{\xi} d^3 r'. \quad (5.144)$$

5.5.3. Potenciales gravitodinámicos

Definimos el potencial gravitodinámico espacio-temporal como la integral

$$\Gamma = - \int \frac{J}{\xi} d^3 r', \quad (5.145)$$

la cual es equivalente a las siguientes dos relaciones

$$\varphi = - \int \frac{\rho}{\xi} d^3 r' \quad (5.146)$$

y

$$\Gamma = - \int \frac{\mathbf{J}}{\xi} d^3 r', \quad (5.147)$$

donde φ es el potencial escalar Newtoniano y Γ es el vector potencial de Heaviside. Este vector potencial de Heaviside fue introducido por primera vez por Jefimenko [11], pero en ese libro es llamado vector potencial cogravitacional⁷.

⁷El nombre ha sido cambiado por sugerencia del Dr. Z. Oziewicz argumentando que el nombre es confuso porque el prefijo *co* es usado en referencia a la dualidad de vectores.

Así, introducimos el potencial gravitodinámico espacio-temporal por

$$\Gamma = \phi + \mathbf{\Gamma}. \quad (5.148)$$

Expresando la intensidad del campo gravitodinámico H en términos de la derivada geométrica del potencial Γ , la obtenemos como el multivector

$$H = \nabla\Gamma = \alpha + \mathbf{G} + \tilde{K}, \quad (5.149)$$

donde $\alpha = \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} + \partial_t \phi$ es un escalar, $\mathbf{G} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{\Gamma}$ es un vector y $\tilde{K} = \nabla \wedge \mathbf{\Gamma}$ es un bivector. Esta expresión, ecuación (5.149) puede ser sustituida en la ecuación (5.113), la cual nos da la ecuación de onda inhomogénea para el potencial gravitodinámico espacio-temporal

$$\square\Gamma = 4\pi J. \quad (5.150)$$

La última ecuación puede ser separada en las siguientes ecuaciones de onda inhomogéneas

$$\square\phi = 4\pi\rho \quad (5.151)$$

y

$$\square\mathbf{\Gamma} = 4\pi\mathbf{J}. \quad (5.152)$$

En ausencia de fuentes $\rho = \mathbf{J} = 0$, cada componente de Γ se satisface por

$$\Gamma_\mu(t, r) = \frac{1}{r} \left(H_\mu(t - r) + H_\mu(t + r) \right), \quad (5.153)$$

donde μ corre de 0 a 3.

5.5.4. El campo gravitacional en función de la intensidad de campo gravitodinámico H

Aplicando la derivada geométrica a la ecuación (5.113), obtenemos

$$\square H = -4\pi \nabla J. \quad (5.154)$$

Debido a que el D' Alembertiano $\square = \nabla^2 = \partial_t^2 - \nabla^2$ es un operador escalar, el lado izquierdo sólo puede contener términos bivectoriales, por lo tanto la densidad de corriente de masa obedece a la ecuación de conservación

$$\nabla \cdot J = \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.155)$$

La intensidad del campo gravitodinámico $H = \mathbf{G} + \tilde{K}$, cuyas componentes en la base $\{\gamma^\mu\}$ son

$$H^{\mu\nu} = \gamma^\nu \cdot (\gamma^\mu \cdot H) = (\gamma^\nu \wedge \gamma^\mu) \cdot H, \quad (5.156)$$

la cual puede usarse para expresar los campos \mathbf{G} y \tilde{K} :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(H - \gamma_0 H \gamma_0) \quad (5.157)$$

y

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}(H + \gamma_0 H \gamma_0). \quad (5.158)$$

La ecuación (5.113) puede separarse como

$$\nabla \cdot H = -4\pi J \text{ y } \nabla \wedge H = 0. \quad (5.159)$$

El álgebra geométrica nos permite describir la teoría gravitacional con una sólo ecuación $\nabla H = -4\pi J$, esto es, la ecuación (5.113).

Capítulo 6

Conclusiones

- Este trabajo de investigación incluye contribuciones novedosas a la investigación científica, pues si bien Jefimenko y otros autores han trabajado con la teoría lineal de la gravitación, aquí se han presentado soluciones de onda con simetría axial. Y aunque ya han sido escritas las ecuaciones de Jefimenko de forma covariante, no se había obtenido un tensor energía-momento del campo gravitodinámico (3.121), el cual obtuvimos a partir del principio de Hamilton. Además, hemos hecho uso del Teorema de Noether para deducir la ley de conservación del cuádrimomento total del sistema (3.128). De dicho resultado obtuvimos otros dos resultados importantes: el teorema de Umov-Poynting gravitacional y la ley de variación del momento tridimensional total del sistema (de este último se deduce el análogo de la fuerza de Lorentz, que Jefimenko postuló), ambos resultados provienen de la ecuación (3.130). Otra importante contribución está dada por las ecuaciones (4.48)-(4.81), que son las ecuaciones de la gravitodinámica a segundo orden. Además, al hacer uso del álgebra geométrica, hemos presentado el sistema de ecuaciones de Jefimenko en una sola ecuación que es independiente de sistemas de referencia (5.113), con soluciones para el vacío tipo ondas gravitacionales polarizadas (5.133) y con soluciones con fuentes (5.149).
- Como hemos visto en la sección 2.2, la ecuación (2.17) representa una función de dos

ondas, propagándose en sentidos opuestos, ambas en la dirección de \hat{k} y con simetría axial. Tales ondas son similares a las ondas electromagnéticas, esto es, \mathbf{G} y \mathbf{K} son ondas transversales, perpendiculares a la dirección de propagación definida por el vector de Poynting gravitacional \mathbf{S} .

La superposición de las ondas mencionadas que se propagan una desde el origen hacia el infinito y la otra desde el infinito hacia el origen produce ondas estacionarias. Así, hemos obtenido un campo gravitacional estacionario *libre*, el cual es consecuencia de procesos de interferencia gravitacional.

En esta configuración gravitodinámica existen superficies (líneas punteadas en la Figura 2.1) y puntos (en el eje z) donde la densidad de energía es constante. Estas superficies y puntos son nodos de densidad de energía de las ondas.

Las esferas del campo de Heaviside obtenidas pueden ser contenedoras de materia, pues si consideramos el análogo gravitacional de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{G} + \mathbf{v} \times \mathbf{K}),$$

cualquier campo de Heaviside ejerce una fuerza perpendicular al plano formado por los campos vectoriales \mathbf{v} y \mathbf{K} sobre cualquier masa, donde \mathbf{v} es la velocidad relativa de la partícula y ya hemos visto que el campo de Heaviside de esas formaciones inusuales del campo gravitodinámico es tangente en cada punto de tales superficies. Esta es la razón por la cuales las partículas contenidas dentro de esas esferas no pueden dejar tales esferas de Heaviside. Los anillos gravitacionales tomarán a las partículas del gas contenido en las esferas y ellas girarán en la dirección de rotación del campo. De la figura 2.4 podemos ver los puntos donde la densidad de energía es constante, tales puntos son puntos donde las diferentes curvas se intersectan y representan los nodos de la energía de las ondas. La teoría de la relatividad general describe los campos gravitacionales débiles como una

primera aproximación, la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser escritas como la forma Maxwelliana de las ecuaciones gravitacionales, esto es, como las ecuaciones de la gravitación de Jefimenko.

- Jefimenko escribió la forma covariante de las ecuaciones gravitodinámicas [11]. Nuestra contribución consiste en extender los resultados obtenidos por Jefimenko. Nosotros definimos la acción de una partícula dentro de un campo gravitodinámico dado por la ecuación (3.105), entonces hemos usado el principio de Hamilton para obtener las ecuaciones de movimiento escritas en forma tensorial como la ecuación (3.110), expresada en forma vectorial nos da el análogo gravitacional de la fuerza de Lorentz (3.111). Mientras que la variación temporal de la energía cinética dada por la ecuación (3.112), fue calculada por medio del trabajo realizado por el campo gravitodinámico.

El tensor de segundo rango del campo gravitodinámico (3.58) y (3.59), o en su forma dual (ecuaciones (3.65) y (3.66)) nos da las componentes del campo gravitodinámico. Tales componentes se obtienen a través de los potenciales φ y Γ por medio de las ecuaciones (3.41) y (3.42). Podemos ver de la ecuación (3.42) que \mathbf{G} depende de ambos potenciales escalar y vectorial, mientras que de la ecuación (3.41) vemos que \mathbf{K} depende sólo del vector potencial Γ . Así, \mathbf{G} es considerado no sólo un campo radial, sino también solenoidal. Si $\Gamma = 0$, entonces obtenemos un campo gravitostático conservativo. Por otro lado, \mathbf{K} es un campo completamente solenoidal, y esto significa que las líneas de campo son cerradas.

Las ecuaciones de Jefimenko en forma covariante (ver las ecuaciones (3.60) y (3.61)), las cuales han sido escritas en forma compacta tienen una interpretación física directa. La ecuación (3.60) relaciona los campos con las fuentes. La ecuación (3.61) es una relación cíclica que nos da las ecuaciones de Jefimenko homogéneas, también expresadas en virtud de (3.64).

Ahora interpretamos las componentes del tensor energía-momento (3.126). Como vimos en la ecuación (3.122), la componente T^{00} es la densidad de energía del campo gravito-

dinámico, físicamente representa la energía dentro de este campo. Si $i = 1, 2, 3$ entonces el tensor simétrico T^{0i} (3.124) es la razón entre el flujo de energía y la velocidad de propagación del campo c . Por último, las componentes de T^{ij} (3.122), donde $i, j = 1, 2, 3$ es el tensor de tensiones de Jefimenko, el cual surge de la fuerza total ejercida por el campo gravitodinámico sobre todas las masas.

Un resultado importante surge de tomar la derivada covariante del tensor energía-momento, esto lleva al teorema de Umov-Poynting en forma integral (3.73) y nos da el análogo gravitacional de la fuerza de Lorentz (3.133).

Las ecuaciones de Jefimenko para la gravitación han sido escritas en una forma simétrica haciendo uso del tensor gravitacional de segundo rango antisimétrico, obviamente una teoría gravitacional invariante bajo las transformaciones de Lorentz es sólo una aproximación, porque esta teoría es válida sólo para sistemas de referencia inerciales y en nuestro universo, donde todo está en movimiento, no existen los sistemas de referencia inerciales.

- Jefimenko obtuvo su análogo de las ecuaciones de Maxwell para la gravitación, postulando una analogía entre sus soluciones retardadas para el campo electromagnético y las soluciones retardadas para el campo gravitacional, y asumiendo la existencia de un segundo campo análogo al campo magnético en la electrodinámica. Este conjunto de soluciones dadas en [10, 11] condujo a las ecuaciones de Jefimenko análogas a las ecuaciones de Maxwell (4.1)-(4.4).

A partir del conjunto de ecuaciones de segundo orden de Jefimenko (4.78)-(4.81), podemos establecer que el sistema obtenido por Jefimenko es correcto porque en el límite, en el primer orden de nuestras ecuaciones gravitacionales no lineales, nos reproduce el sistema obtenido originalmente por Jefimenko para los campos \mathbf{g} y \mathbf{k} . La idea de Jefimenko relacionada con el establecimiento de la analogía electromagnética del campo gravitatorio es correcta, y se aborda por varios autores [?, 23], así como por D. Pérez Carlos *et al.* [1, 2, 58], pero queremos citar de nuevo la primera vez que se postuló esta analogía,

nos referimos al trabajo de Oliver Heaviside publicado hace más de un siglo en [3], trabajo eclipsado por la aparición de la teoría general de la relatividad en 1915 en su trabajo titulado *Feldgleichungen der Gravitation* [7].

El conjunto de ecuaciones gravitacionales de segundo orden (4.78)-(4.81) puede obtenerse también a partir de las ecuaciones de Logunov obtenidas en la teoría relativista de la gravitación, pero en esta teoría la gravitación se considera como un campo tensorial en el espacio-tiempo de Minkowski, lo que significa que Logunov consideró la métrica del espacio-tiempo de Riemann como la contribución de un campo tensorial gravitatorio con un fondo de Minkowski. Mientras que en relatividad general la métrica del espacio-tiempo de Riemann para campos gravitatorios débiles se considera como la suma de la métrica de Minkowski más una perturbación. En la teoría de Logunov se considera el espacio-tiempo efectivo de Riemann como la contribución del tensor de campo gravitatorio $\Phi^{\mu\nu}$ que depende de las coordenadas del espacio-tiempo de Minkowski, mientras que en relatividad general el tensor de la métrica del espacio-tiempo de Riemann $g_{\mu\nu}$ es el campo mismo. Ambas teorías nos dan las mismas predicciones para los campos gravitacionales débiles, lo que significa que utilizando la aproximación Post-Newtoniana obtenemos los mismos resultados experimentales haciendo uso de la primera o de la segunda. Ya hemos visto que, contrariamente a la creencia general, Einstein vio como el logro más importante de su teoría general de la relatividad la unificación de la gravedad y la inercia, en lugar de geometrizar la gravedad. Por otra parte, la teoría de Logunov hace una clara distinción entre la gravedad y la inercia.

Es oportuno mencionar que en el límite de las expresiones no lineales (4.78)-(4.81), llamadas ecuaciones de Jefimenko de segundo orden, se obtienen las ecuaciones de Jefimenko dadas por (4.1)-(4.4) a primer orden de aproximación. Mientras que en las regiones donde la materia puede considerarse en reposo (o en movimiento uniforme) en el respectivo sistema de referencia inercial, este sistema nos lleva al orden cero de aproximación, llamado

teoría Newtoniana y representado por las ecuaciones (4.84)-(4.85).

- El resultado central del Capítulo 5 es la ecuación $\nabla H = -4\pi J$ (5.113). Esta ecuación une las cuatro ecuaciones gravitodinámicas (2.7)-(2.10) en una sólo ecuación. Debe notarse también que usando tensores en las ecuaciones de campo linealizadas de Einstein, estas son dos, es decir:

$$H^{\mu\nu}{}_{,\mu} = -4\pi J^\nu \text{ y } \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} H_{\mu\nu,\sigma} = 0, \quad (6.1)$$

donde ${}_{,\mu} = \partial_\mu$. El conjunto de ecuaciones (6.1) corresponde al conjunto de ecuaciones gravitodinámicas (5.159). Notemos que en vez de dos relaciones, tenemos sólo una, la ecuación (5.113).

El uso del cálculo geométrico utilizado para resolver la ecuación para el vacío (5.114) $\nabla H = 0$ implica la existencia de ondas gravitacionales polarizadas. Esta solución es la ecuación (5.133):

$$H = \mathbf{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$

También mostramos que usando el teorema de Green, la ecuación (5.113) $\nabla H = -4\pi J$, tiene la forma general (5.144), i. e.

$$H(t, \mathbf{r}) = -\nabla \int \frac{J}{\xi} d^3 r'.$$

La solución H para la ecuación (5.113), usando el potencial gravitodinámico espacio-tiempo dado por (5.145), resulta en la expresión multivectorial (5.149)

$$\begin{aligned} H &= \nabla \Gamma = \alpha + \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{K}} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} + \partial_t \phi) + (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{\Gamma}) + (\nabla \wedge \mathbf{\Gamma}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

que consiste en tres partes: un escalar, un vector y un bivector. Cuando la parte escalar $\alpha = 0$, nos da el análogo gravitacional de la condición de Lorentz

La intensidad del campo gravitodinámico o bivector genérico de Heaviside H es la representación compacta del tensor gravitacional obtenido en alguna bibliografía, (la ecuación (80) en [59], o la ecuación. (9-2.3) in [11]), las componentes de este tensor en nuestro sistema de unidades es

$$H^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -G_x & -G_y & -G_z \\ G_x & 0 & -K_z & K_y \\ G_y & K_z & 0 & -K_x \\ G_z & -K_y & K_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

En la dicotomía mencionada al inicio de la sección 5.5 podemos ver que el bivector genérico de Heaviside H es un concepto absoluto, mientras el campo gravitacional \mathbf{G} y el bivector de Heaviside \tilde{K} son conceptos relativos. Podemos concluir lo mismo en lo que concierne a la densidad de corriente de masa espacio-tiempo J , mientras que la densidad de masa ρ y el vector densidad de corriente de masa \mathbf{J} son conceptos relativos. Obviamente este no es el caso para la masa $dm = \rho d^3x$, la cual es un concepto absoluto.

Bibliografía

- [1] A. Chubykalo, A. Espinoza, and D. Pérez Carlos. Conceptual Content of the Generalized Theory of Gravitation of Jefimenko. *J. Mod. Phys.*, **9**:1522–1544, 2018.
- [2] D. Pérez Carlos, A. Espinoza, and A. Chubykalo. Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field. *Op. Acc. J. Phys.*, **2**:1–12, 2018.
- [3] O. Heaviside. A Gravitational and Electromagnetic Analogy. *The Electrician*, **31**:281–282, 1893.
- [4] W. Pauli. *Theory of Relativity*. Dover publications Inc., reprint of the pergamon press ltd., 1958 edition, 1981.
- [5] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley and sons Inc., first edition, 1972.
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorn, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, revised from the first edition, 2017.
- [7] A. Einstein. *Feldgleichungen der Gravitation*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), first edition, 1915.
- [8] A. A. Logunov and M. A. Mestvirishvili. *The Relativistic Theory of Gravitation*. Mir Publishers Moscow, revised from the 1986 russian edition, 1989.

- [9] A. A. Logunov and M. A. Mestvirishvili. Relativistic theory of gravitation. *Found. Phys.*, **16**:1–26, 1986.
- [10] O. Jefimenko. *Causality, Electromagnetic Induction and Gravitation: A Different Approach to the Theory of Electromagnetic and Gravitational Fields*. Princeton University Press, second edition, 2000.
- [11] O. Jefimenko. *Gravitation and Cogravitation: Developing Newton's Theory of Gravitation to Its Physical and Mathematical Conclusion*. Electret Scientific, Star City, first edition, 2006.
- [12] B. Vetö. Gravity probe B experiment and gravitomagnetism. *Eur. J. Phys.*, **31**:1323, 2010.
- [13] B. Vetö. Gravitomagnetic Field of the Universe and Coriolis Force on the Rotating Earth. *Eur. J. Phys.*, **32**:11323, 2011.
- [14] I. Ciufolini. A Confirmation of the General Relativistic Prediction of the Lense–Thirring Effect. *Nature*, **431**:958–960, 2004.
- [15] L. Iorio. Earth tides and Lense–Thirring effect. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, **79**:201–230, 2001.
- [16] A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffmann. The Gravitational Equations and the Problem of Motion. *Ann. of Maths.*, **39**:65–100, 1938.
- [17] A. I. Arbab. The gravitomagnetism: a novel explanation of the precession of planets and binary pulsars. *Astrophys. Space Sci.*, **330**:61–68, 2010.
- [18] A. A. Logunov, Yu. M. Loskutov, and Mestvirishvili M. A. The Relativistic Theory of Gravitation and its Consequences. *Prog. of Theor. Phys.*, **80**:1005–1021, 1988.
- [19] A. Einstein. Gibt es eine gravitationswirkung die der elektromagnetischen induktionswirkung analog ist? *Viert. ger. Med. ffent. Sanit.*, **44**:37–40, 1912.

- [20] A. Espinoza, A. Chubykalo, and D. Pérez Carlos. Gauge invariance of gravitodynamical potentials in the Jefimenko's generalized theory of gravitation. *J. Mod. Phys.*, **7**:1617–1626, 2016.
- [21] E. Edwards. *Pushing Gravity: New Perspectives on Le Sage's Theory of Gravitation*. Apeiron, first edition, 2003.
- [22] I. Eganova. *Nature of Space-Time*. Publishing House of SB RAS, first edition, 2005.
- [23] D. H. Sattinger. Gravitation and Special Relativity. *J. Dyn. Diff. Equat.*, **27**:1007–1025, 2015.
- [24] G. Adler. Does mass really depend on velocity, dad? *Am. J. Phys.*, **55**:739–743, 1987.
- [25] L. Okun. The concept of mass? *Phys. Today*, **42**:31–36, 1989.
- [26] T. Sandin. In defense of relativistic mass. *Am. J. Phys.*, **59**:1032–1036, 1991.
- [27] O. Jefimenko. *Electromagnetic Retardation and Theory of Relativity*. Electret Scientific, Star City, second edition, 2004.
- [28] O. Jefimenko. Derivation of relativistic transformation for gravitational fields from retarded field integrals. *Gal. Electr.*, **6**:23–30, 1995.
- [29] B. Fomalont E and S. M. Kopeikin. The measurement of the light deflection from jupiter. *Astrophys. J.*, **598**:704–711, 2003.
- [30] W. K. Schief and C. Rogers. Binormal motion of curves of constant curvature and torsion. generation of soliton surfaces. *Proc: Math., Phys. and Eng. Scis.*, **455**:3163–3188, 1999.
- [31] H. Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **21**:129–175, 1906.

- [32] O. Jefimenko. Presenting electromagnetic theory in accordance with the principle of causality. *Eur. J. Phys.*, **25**:287–296, 2004.
- [33] J. Synge. *Relativity: the General Theory*. North Holland, first edition, 1960.
- [34] D. Bedford and P. Krumm. The gravitational poynting vector and energy transfer. *Am. J. Phys.*, **55**:362–363, 1987.
- [35] W. S. González. *Gravitoelectromagnetismo y principio de Mach*. eWT Ediciones, first edition, 2013.
- [36] A. Chubykalo and A. Espinoza. Unusual formations of the free electromagnetic field in vacuum. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, **35**:8043–8056, 2002.
- [37] A. Espinoza and A. Chubykalo. Mathematical foundation of kapitsa’s hypothesis about the origin and structure of ball lightning. *Founds. of Phys.*, **33**:863–873, 2003.
- [38] P. L. Kapitsa. On the nature of ball lightning. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, **101**:245–246, 1955.
- [39] B. P. Abbott *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, **116**:0611021–06110216, 2016.
- [40] A. Eistein. *Relativity: the General Theory*. Methuen and Co. Ltd., first edition, 1916.
- [41] A. A. Logunov. *The Theory of Gravity*. Nauka, first edition, 2001.
- [42] E. Scrödinger. The energy components of the gravitational field. *Phys. Z.*, **19**:4, 1918.
- [43] W. S. González. *Teoría del campo relativista*. eWT ediciones, first edition, 2014.
- [44] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Classical Field Theory*. Pergamon press LTD, first edition, 1971.
- [45] J. A. Wheeler and K. Ford. Geons, Black Holes and Quantum Foam: A Life in Physics. *Am. J. Phys.*, **68**:584–585, 2000.

- [46] R. P. Feynman, F. Moringo, and W. G. Wagner. *Feynman Lectures on Gravitation*. Addison-Wesley Publishing Company, London, 1995, first edition, 1995.
- [47] A. Einstein. Gibt es eine gravitationswirkung die der elektromagnetischen induktionswirkung analog ist? *Viert. ger. Med. ffent. Sanit.*, 44:37–40, 1912.
- [48] B. A. Fock. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Pergamon press LTD, second edition, 1964.
- [49] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press., Cambridge, first edition, 2009.
- [50] V. S. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics*. MIR publishers, first edition, 1984.
- [51] H. Grassmann. *Die lineale Ausdehnungslehre*. Verlag von Otto Wigand, first edition, 1844.
- [52] W. R. Hamilton. On Quaternions or on a New System of Imaginaries in Algebra. *Phyl. Mag.*, 25:350–358, 1844.
- [53] D. Hestenes. *Space-time Algebra*. Birkhäuser, second edition, 1966.
- [54] D. Hestenes and G. Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: a Unified Language for Mathematics and Physics*. Springer, first edition, 1984.
- [55] D. Hestenes. Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. *Am. J. Phys.*, 71:104–147, 2003.
- [56] Z. Oziewicz. Relative Velocity: a Dichotomy. *Proc. N. P. A.*, 7:353–360, 2010.
- [57] V. de Sabbata and B. K. Datta. *Geometric Algebra and Applications to Physics*. Taylor and Francis group, first edition, 2007.
- [58] A. Espinoza, A. Chubykalo, and D. Pérez Carlos. Gauge Invariance of Gravitodynamical Potentials in the Jefimenko's Generalized Theory of Gravitation. *J. Mod. Phys.*, 7:1617–1626, 2016.

- [59] H. Behera. Comments on Gravitoelectromagnetism of Ummarino and Gallerati in “Superconductor in a Weak Static Gravitational Field” vs Other Versions. *Eur. Phys. J. C*, 77:822, 2017.

Capítulo 7

Publicaciones

7.1. Artículo publicado en Journal of Modern Physics



Journal of Modern Physics, 2016, 7, 1617-1626

<http://www.scirp.org/journal/imp>

ISSN Online: 2153-120X

ISSN Print: 2153-1196

Gauge Invariance of Gravitodynamical Potentials in the Jefimenko's Generalized Theory of Gravitation

Augusto Espinoza, Andrew Chubykalo, David Perez Carlos

Unidad Académica de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México

Email: achubykalo@yahoo.com.mx

How to cite this paper: Espinoza, A., Chubykalo, A. and Carlos, D.P. (2016) Gauge Invariance of Gravitodynamical Potentials in the Jefimenko's Generalized Theory of Gravitation. *Journal of Modern Physics*, 7, 1617-1626.

<http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.713146>

Received: July 5, 2016

Accepted: September 3, 2016

Published: September 6, 2016

Copyright © 2016 by authors and Scientific Research Publishing Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In the Jefimenko's generalized theory of gravitation, it is proposed the existence of certain potentials to help us to calculate the gravitational and cogravitational fields, such potentials are also presumed non-invariant under certain gauge transformations. In return, we propose that there is a way to perform the calculation of certain potentials that can be derived without using some kind of gauge transformation, and to achieve this we apply the Helmholtz's theorem. This procedure leads to the conclusion that both gravitational and cogravitational fields propagate simultaneously in a delayed and in an instant manner. On the other hand, it is also concluded that these potentials thus obtained can be real physical quantities, unlike potentials obtained by Jefimenko, which are only used as a mathematical tool for calculating gravitational and cogravitational fields.

Keywords

Gravitational Potentials, Cogravitational, Helmholtz's Theorem

1. Introduction

Jefimenko's generalization of Newton's gravitational theory [1] [2] is based to a large extent on the assumption that there exists a *second* gravitational field (which he has named the cogravitational, or Heaviside's, field). Note that there are several publications in which it is suggested that a second field can be involved in gravitational interactions (see [3] and, e.g., [4] and references there). The *first* such publication was by Oliver Heaviside [3], unfortunately his article appears to have been generally ignored (see, e.g. [4] pp. 103-104). The overriding reason why Heaviside's work did not attract the attention was that his single article on gravitation was eventually completely eclipsed

by Einstein's brilliant and spectacularly successful general relativity theory. It is noteworthy, however, that Newton's gravitational theory generalized to time-dependent systems yields several results which heretofore are believed the exclusive consequence of the general relativity theory. Jefimenko discusses this very important circumstance in [1] [2]. It is interesting to note that Einstein, four years before he published his general relativity theory, published an article on the possibility of a gravitational analogue of electromagnetic induction. Also this article was practically unknown, possibly because it was published in a rather inappropriate journal whose title (translated from the German) was: "Quarterly Journal for Forensic Medicine and Public Sanitation;" (see [5]).

Newton's theory does not include inductive phenomena, but a relativistic theory of gravitation should include them. Indeed, under the relativistic mass-energy equivalence, not only the mass is a source of gravitational field but any kind of energy also is. Therefore, a body creates gravitational field not only by mass but also by their kinetic energy, *i.e.* by their movement. And this, ultimately, is what it means induction: the production of forces by moving bodies [6].

In the general relativity theory, Einstein predicted the existence of gravitational induction phenomena, such phenomena are appointed by Einstein as gravitomagnetism. It can be showed that Jefimenko equations are also derived from linearized Einstein equations (see, for example, pp 47 and 48 in [6]).

Since in 2004, NASA has orbited the "Gravity Probe B", whose purpose was to prove the existence of gravitomagnetism, (see [7] [8]).

In order to describe the time-dependent gravitational systems, the Jefimenko's generalized theory of gravitation is based on postulating of retarded expressions for the accustomed gravitational field \mathbf{g} and the Heaviside's or cogravitational field \mathbf{K} (Heaviside [3] was the first who supposed the existence of this field making an analogy between gravitational and electromagnetic fields), where the field \mathbf{g} acts to and arises from motionless as well as moving masses, and the field \mathbf{K} acts to and arises from exclusively moving masses. Let us from this point call this theory "gravitodynamics", and the complex of the fields \mathbf{g} and \mathbf{K} call the "gravitodynamical field". Jefimenko taking into account mentioned retarded expressions for \mathbf{g} and \mathbf{K} , obtains the system of equations for which these expressions are solutions. These equations are analogous to Maxwell's equations. In principle, this method was proposed to eliminate the possibility of instantaneous solutions from the discussion. There against in this work we are going to postulate the system of differential equations rather than solutions for the gravitational dynamics, and we will obtain both retarded and instantaneous solutions for the fields \mathbf{g} and \mathbf{K} . The gravitational field \mathbf{g} behaves analogously to the electric field in the Maxwell's electromagnetic theory, and cogravitational field \mathbf{K} analogously to the magnetic field.

First of all, we write the equations describing time-dependent gravitational systems [1] (see p. 120) and [2]

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{K} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J}, \quad (4)$$

where c is the velocity of propagation of the fields, which is supposed equal to the velocity of light for the retarded component, G is the constant of gravitation, ϱ is the density of mass and $\mathbf{J} = \varrho \mathbf{v}$ is the density of mass current.

There are some differences between Maxwell's equations of electrodynamics and the Jefimenko's equations of gravitation, *i.e.* the analogy is not perfect. For example, we have two kinds of electric charges, positives and negatives, which repel each other if the charges are equal and attract each other if they are different, whereas while we have only one type of mass, and if we have a system of two masses in repose, they always attract each other. While the electric field is directed from positive charges generating this field and is directed to the negative charges, the gravitational field is always directed to the masses by which is created. Another difference is that the magnetic field is always right-handed relative to the electric current by which is created, while the cogravitational field is always left-handed relative to the mass current by which is created.

In the analogy between electrodynamics and the so-called gravitodynamics, following the Jefimenko's book [1] we can resume the correspondence between electromagnetic and gravitodynamic symbols and constants in the following **Table 1**.

2. The Gravitodynamical Potentials

Here, we introduce as is made in electrodynamics, the gravitodynamical potentials. If

Table 1. Corresponding electromagnetic and gravitodynamic symbols and constants.

Electromagnetic	Gravitational
q (charge)	m (mass)
ϱ (volume charge density)	ϱ (volume mass density)
σ (surface charge density)	σ (surface mass density)
λ_c (line charge density)	λ_m (line mass density)
φ (electric's scalar potential)	τ (mass's scalar potential)
A (magnetic vector potential)	$\mathbf{\Gamma}$ (cogravitational vector potential)
\mathbf{J}_c (convection current density)	\mathbf{J} (mass-current density)
I_c (electric current)	I (mass current)
\mathbf{m} (magnetic dipole moment)	\mathbf{d} (cogravitational moment)
\mathbf{E} (electric field)	\mathbf{g} (gravitational field)
\mathbf{B} (magnetic field)	\mathbf{K} (cogravitational field)
ϵ_0 (permittivity of space)	$-1/4\pi G$
μ_0 (permeability of space)	$-4\pi G/c^2$
$-1/4\pi\epsilon_0 = -\mu_0 c^2/4\pi$	G (gravitational constant)

the cogravitational field \mathbf{K} satisfies Equation (2), we can always write it as the curl of some other vector quantity $\mathbf{\Gamma}$,

$$\mathbf{K} = \nabla \times \mathbf{\Gamma}, \quad (5)$$

where $\mathbf{\Gamma}$ is the gravitodynamical vector potential. Substituting Equation (5) in (3), we obtain

$$\nabla \times \left(\mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6)$$

The quantity within the parentheses can be written as the gradient of a gravitodynamical scalar potential τ :

$$\mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} = -\nabla \tau, \quad (7)$$

therefore,

$$\mathbf{g} = -\nabla \tau - \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t}. \quad (8)$$

Substituting the expressions (5) and (8) for the fields \mathbf{g} and \mathbf{K} , in the inhomogeneous Equations (1) and (4), we obtain

$$\nabla^2 \tau + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{\Gamma}) = 4\pi G \rho, \quad (9)$$

and

$$\nabla^2 \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = \frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J}. \quad (10)$$

Equations (9) and (10) can be decoupled choosing the appropriate form of the potentials $\mathbf{\Gamma}$ and τ . Moreover, if we simultaneously make the transformations

$$\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{\Gamma}' = \mathbf{\Gamma} + \nabla \Lambda, \quad (11)$$

and

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad (12)$$

in (5) and (8), we get the same original fields \mathbf{g} and \mathbf{K} . Here, $\Lambda = \Lambda(x, y, z, t)$ is an arbitrary scalar function. We can choose this function in order to impose an additional condition over $\mathbf{\Gamma}$ and τ , in a similar way like the Lorentz or Coulomb gauge in the electromagnetic field, namely,

$$\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (13)$$

which allows us to separate Equations (9) and (10) for the potentials τ and $\mathbf{\Gamma}$. These potentials depend on the gauge condition we chose.

3. Jefimenko's Equations for the Solenoidal and Irrotational Components

Following the ideas of the work of Chubykalo *et al.* [9]-[11] and using the analogy be-

tween the Maxwell's equations and the Jefimenko's ones [1] [2], we will apply the Helmholtz's theorem to define potentials that are independent of gauge transformations.

The Helmholtz's theorem claims that under certain conditions all vector fields can be represented as the sum of an irrotational and a solenoidal components. We will use this theorem to separate the fields \mathbf{g} and \mathbf{K} .

Therefore, here we state the Helmholtz's theorem as [12]:

If the divergence $D(\mathbf{r})$ and a curl $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ of a vector function $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ are specified, and if they both go to zero faster than $1/r^2$ as $r \rightarrow \infty$, and if $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ itself tends to zero as $r \rightarrow \infty$, then $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ is uniquely given by

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W}, \quad (14)$$

where

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\text{All space}} \frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (15)$$

and

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\text{All space}} \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (16)$$

We are going to suppose that all conditions of this theorem are satisfied by the fields \mathbf{g} and \mathbf{K} defined by Equations (1) to (4)¹, and then, we apply Helmholtz's theorem to these quantities, including \mathbf{J} . Thus, we obtain

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_s, \quad (17)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_i + \mathbf{K}_s, \quad (18)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s, \quad (19)$$

where the indices "i" and "s" mean irrotational and solenoidal components of the vectors, respectively.

For example:

$$\mathbf{J}_i = -\frac{1}{4\pi} \nabla \iiint_{\text{All space}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (20)$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \iiint_{\text{All space}} \frac{\nabla' \times \mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (21)$$

We are going to substitute \mathbf{g} , \mathbf{K} and \mathbf{J} given by the Equations (17)-(19) into the Jefimenko's Equations (1)-(4) and then, we obtain for the irrotational part:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_i = -4\pi G \rho, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t} = 4\pi G \mathbf{J}_i, \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{K}_i = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial t} = 0, \quad (25)$$

¹For systems localized in a finite region of space, it is evident that the fields \mathbf{g} y \mathbf{K} depend on r as $1/r^2$.

and the next equations for the solenoidal part:

$$\nabla \times \mathbf{g}_s = -\frac{\partial \mathbf{K}_s}{\partial t}, \quad (26)$$

$$\nabla \times \mathbf{K}_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial t} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J}_s. \quad (27)$$

4. The Gravitodynamical Potentials from Helmholtz's Theorem

By definition, for the irrotational component of the gravitational field \mathbf{g}_i we can define the scalar potential Γ as

$$\nabla \Gamma = -\mathbf{g}_i \quad (28)$$

and if we substitute this relation into Equation (22), we obtain the Poisson's equation

$$\nabla^2 \Gamma = 4\pi G \rho. \quad (29)$$

Apparently, we need to take into account that Γ is not completely defined only by the Poisson's Equation (29), because we have another differential equation for Γ , which can be obtained by substituting (28) into Equation (23)

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \Gamma = -4\pi G \mathbf{J}_i. \quad (30)$$

We show now that Equation (30) is equivalent to the law of conservation of mass. Indeed, let us take the divergence of the Equation (23), then we obtain as the result

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{g}_i) = 4\pi G \nabla \cdot \mathbf{J}_i. \quad (31)$$

But from Equation (22) and because $\nabla \cdot \mathbf{J}_i = \nabla \cdot (\mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s) = \nabla \cdot \mathbf{J}$, Equation (31) becomes the conservation mass law or the continuity equation

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (32)$$

Now, we will demonstrate that the solution of Equation (30), indeed, is the same solution of the Poisson's Equation (29). To do this, we note that the irrotational component of \mathbf{J} can be written as

$$\mathbf{J}_i = -\nabla \phi_J, \quad (33)$$

where the potential ϕ_J is defined as

$$\phi_J(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\text{All space}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (34)$$

or

$$\phi_J(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\text{All space}} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \quad (35)$$

and where, if we relate Equations (32), (23), (28) y (33) and the fact that $\nabla \cdot \mathbf{J}_i = \nabla \cdot \mathbf{J}$, we have

$$\frac{\partial(-\nabla T)}{\partial t} = 4\pi G(-\nabla \phi_j) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi G \phi_j. \quad (36)$$

And from (36) and (34), we obtain

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -G \iiint_{\text{All space}} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (37)$$

or

$$T = -G \iiint_{\text{All space}} \frac{\varrho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \quad (38)$$

which is the solution of the Poisson's Equation (29). So we have found that the Poisson's equation given by Equation (29), completely defines the potential T , together with its boundary conditions.

Since by definition $\mathbf{K} = \mathbf{K}_s$, then Equations (24) and (25) have the trivial solution $\mathbf{K}_i = 0$.

Let us now apply the Helmholtz's theorem to the vector potential $\mathbf{\Gamma}$. The Helmholtz theorem it is also known as the fundamental theorem of vector calculus (see Section III), and allows us to decompose every vectorial field in two components, an irrotational and a solenoidal one. Intuitively, it says that every vector function can be written as the sum of a divergence-free function (like $\mathbf{\Gamma}_s$) and a curl-free function (like $\mathbf{\Gamma}_i$), so that there exist scalar and vector potentials. So that $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_i + \mathbf{\Gamma}_s$, because this is the form in which we can easily solve the system formed by Equations (26) and (27). Supposing that

$$\mathbf{K}_s = \nabla \times \mathbf{\Gamma}_s \quad (39)$$

and taking into account (26) we obtain

$$\mathbf{g}_s = -\frac{\partial \mathbf{\Gamma}_s}{\partial t} \quad (40)$$

One can substitute Equations (39) and (40) into (27), and we obtain

$$\nabla^2 \mathbf{\Gamma}_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}_s}{\partial t^2} = \frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J}_s, \quad (41)$$

where we used the vector identity $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$, for any arbitrary vector \mathbf{V} .

We have found that system of Equations (1)-(4) reduces to Equations (29) and (41), applying the Helmholtz's theorem. Therefore, we obtain separated equations for vector and scalar potentials, namely,

$$\nabla^2 T = 4\pi G \varrho \quad (42)$$

and

$$\nabla^2 \mathbf{\Gamma}_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}_s}{\partial t^2} = \frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J}_s. \quad (43)$$

5. Invariance of the Potentials Γ_s and T under Gauge Transformations

Now, we will show that the potentials Γ_s and T (which are gravitodynamical counterparts of the electromagnetic potentials A_s and Φ from [9]) are invariant under gauge transformations (11) and (12), in common with the fields \mathbf{g} and \mathbf{K} . This will be the most prominent property of these potentials.

If we apply the Helmholtz theorem to the gravitational and cogravitational fields in terms of the ordinary potentials given by (5) and (8) without taking into account any gauge condition, we have

$$\mathbf{g}_i = -\nabla\tau - \frac{\partial\Gamma_i}{\partial t}, \quad (44)$$

$$\mathbf{g}_s = -\frac{\partial\Gamma_s}{\partial t}, \quad (45)$$

$$\mathbf{K}_i = 0, \quad (46)$$

$$\mathbf{K}_s = \nabla \times \Gamma_s, \quad (47)$$

then, by definition, Γ_i is given by

$$\Gamma_i = -\nabla\phi_T, \quad (48)$$

where ϕ_T is a scalar function. If we substitute (48) into (44) then

$$\mathbf{g}_i = -\nabla\tau - \frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi_T) = -\nabla\tau + \nabla\frac{\partial\phi_T}{\partial t} = -\nabla\left(\tau - \frac{\partial\phi_T}{\partial t}\right), \quad (49)$$

and from Equations (49) and (22) we have the relation between T and τ .

$$T = \tau - \frac{\partial\phi_T}{\partial t}. \quad (50)$$

Now, we apply the Helmholtz theorem and the gauge transformations (11) and (12) and from

$$\Gamma' = \Gamma'_i + \Gamma'_s = \Gamma_i + \Gamma_s + \nabla\Lambda, \quad (51)$$

comparing the solenoidal parts we obtain

$$\Gamma'_s = \Gamma_s. \quad (52)$$

If we seek the transformation law for ϕ_T , then we can obtain the other transformation law for T.

From Equation (51), we have the irrotational part of Γ'

$$\Gamma'_i = \Gamma_i + \nabla\Lambda, \quad (53)$$

and including Equation (48) in (53) we get

$$-\nabla\phi'_T = -\nabla\phi_T + \nabla\Lambda = -\nabla(\phi_T - \Lambda) \quad (54)$$

or

$$\phi'_T = \phi_T - \Lambda. \quad (55)$$

At last, we can use Equation (50) for T and, if we consider Equations (11), (12) and

(55), we obtain

$$T' = \tau' - \frac{\partial \phi'_t}{\partial t} = \left(\tau - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\phi_t - \Lambda) = \tau - \frac{\partial \phi_t}{\partial t} = T. \quad (56)$$

Hence, we have checked that Γ_s and T are invariants under gauge transformation and we can see that any gauge transformation is irrelevant if we use the Helmholtz's theorem.

It is convenient to remark that the fields \mathbf{g} and \mathbf{K} are generated only by Γ_s and T given by (28), (39) and (40), so we can consider Γ_s and T as the potentials generating the gravitodynamical field \mathbf{g} and \mathbf{K} .

6. Conclusions

And so, we have shown that it is possible to define vector as well as scalar gravitodynamical potentials, which are invariant under gauge transformation. These potentials are defined uniquely from their differential Equations (42) and (43). For this reason, we have arguments for supposing the physical reality of these potentials, similarly to the fields \mathbf{g} and \mathbf{K} and unlike the gravitational potentials introduced by Jefimenko in [1], which are only used as a mathematical tool for calculating gravitational and cogravitational fields.

Our scalar potential T is a generator of the so-called instantaneous action at a distance in gravitation, and the vector potential Γ_s can propagate with the velocity of light and it is responsible for the retarded action of the gravitodynamical field. So, one can conclude that retarded interaction in gravitodynamics takes place *not instead* but *together with* instantaneous action at a distance.

References

- [1] Jefimenko, O.D. (2006) Gravitation and Cogravitation. Electret Scientific Company, Star City.
- [2] Jefimenko, O.D. (2000) Causality Electromagnetic Induction and Gravitation: A Different Approach to the Theory of Electromagnetic and Gravitational Fields. 2nd Edition, Electret Scientific Company, Star City.
- [3] Heaviside, O. (1893) *The Electrician*, **31** 281-282.
- [4] Brillouin, L. (1970) Relativity Reexamined. Academic Press, New York.
- [5] Einstein, A. (1912) *Vierteljahrsschrift für gerichtliche Medizin und öffentliches Sanitätswesen*, **44**, 1-4.
- [6] González, W.S. (2013) Gravitoelectromagnetismo y principio de Mach, eWT Ediciones.
- [7] Vetö, B. (2010) *European Journal of Physics*, **31**, 5.
- [8] Vetö, B. (2011) *European Journal of Physics*, **32**, 5.
- [9] Chubykalo, A., Espinoza, A. and Alvarado Flores, R. (2011) *Physica Scripta*, **84**, 015009-1-6. <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/84/01/015009>
- [10] Chubykalo, A., Espinoza, A. and Alvarado Flores, R. (2012) *Physica Scripta*, **85**, 047002. <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/84/6/069502>
- [11] Chubykalo, A., Espinoza, A., Alvarado Flores, R. and Gutiérrez Rodríguez, A. (2006)

A. Espinoza et al.

Foundations of Physics Letteres, **19**, 37-49.

<http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/85/04/047002>

- [12] Arfken, G.B. and Weber, H.J. (1995) *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, New York.



Scientific Research Publishing

Submit or recommend next manuscript to SCIRP and we will provide best service for you:

Accepting pre-submission inquiries through Email, Facebook, LinkedIn, Twitter, etc.

A wide selection of journals (inclusive of 9 subjects, more than 200 journals)

Providing 24-hour high-quality service

User-friendly online submission system

Fair and swift peer-review system

Efficient typesetting and proofreading procedure

Display of the result of downloads and visits, as well as the number of cited articles

Maximum dissemination of your research work

Submit your manuscript at: <http://papersubmission.scirp.org/>



7.2. Artículo publicado en Open Access Journal of Physics

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

David Perez-Carlos, Augusto Espinoza and Andrew Chubykalo

Academic Unit of Physics. Autonomous University of Zacatecas, Zacatecas, Mexico

*Corresponding Author: David Perez-Carlos, Academic Unit of Physics. Autonomous University of Zacatecas, Zacatecas, Mexico.

ABSTRACT

In the present work, we write a brief exposition of the Jefimenko's theory of gravitation. This theory arose from the analogy between the laws of gravitation and electromagnetism, that is, exist a second gravitational field called cogravitational field, analogous to the magnetic field. We introduce a new system of units called Gravitational Gaussian System (GGS). This system allows us write the equations of gravitation in a simple form to solve them. Using the Jefimenko's equations of gravitation, we obtain the wave equations for gravitational and cogravitational fields and we find wave solutions. We demonstrate there are configurations of the gravitodynamical field (that is, the set of gravitational and cogravitational fields) in form of cogravitational field spheres and gravitational field rings. This phenomenon must be an analogue of the ball lightning in the electromagnetic field, but in this case the cogravitational field spheres serves as containers of matter (it could be a gas). We analyze how this configuration acts on the particles inside the spheres, and we investigate the physical properties of such configurations, namely, how behaves the density of energy and the Poincaré vector of this solution.

Keywords: Cogravitation; Gravitational waves; Gravitodynamical field.

PACS: 04.50.Kd; 04.30.-w

INTRODUCTION

The Jefimenko's equations arise from an analogy between the laws that rules the electrodynamics and the laws of gravitation. Such analogy was proposed for the first time by Heaviside in a paper published [1] more than a century ago, where he supposed there must exist a second field due to moving masses and acting over moving masses only, called by Jefimenko, cogravitational field (sometimes this field is called Heaviside's field). The Heaviside paper was forgotten for a long time until Jefimenko returned his work and made improvement to the Heaviside's work in two books published and reissued since the 90's decade [2], [3].

To start we need to write about the analogy made by Jefimenko between the laws of electromagnetism and the laws of gravitation. Oliver Heaviside proposed a system of equations with the same structure as the Maxwell's equations, assuming the existence of a second field due and acting over moving masses only, called Heaviside's field or cogravitational field and it is denoted by \mathbf{k} , unlike the ordinary gravitational field \mathbf{g} which is due

and acts not only on stationary masses but in movement. Although there are detractors of the Jefimenko's theory of gravitation¹ (see for example [5]), there exist books written by Wenceslao Segura [6] and Jolien E. D. Creighton [7] where they derived the Jefimenko's equations from the linearized Einstein's equations. Jefimenko derived the equations of gravitodynamics in a different way, starting from make an analogy of his retarded solutions of the electromagnetic field to the gravitodynamical field to finally get the analogous equations to the Maxwell's equations for the gravitational and cogravitational fields.

Next, we assume there is a configuration of the gravitodynamical field in an analogue way to those found in other works realized by Chubykalo and Espinoza [8], [9], where the authors have obtained the mathematical foundations on the Kapitza's hypothesis [10] about the origin of ball lightning related with interference processes. The configuration of the gravitodynamical field in our work begins with

¹Called by us in a previous work *gravitodynamical theory* [4].

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

the hypothesis that the gravitational waves exist. We are going to do a formal development about this issue based in the theoretical results obtained by Jefimenko. We will use the free gravitodynamical equations, that is, the equations valid for vacuum.

It is important to emphasize that gravitational waves were predicted in the general theory of relativity by linearizing Einstein's field equations and this approximation is valid for weak fields. It is obvious that a complete theory of gravity is not linear but this linear approximation allows us to study a great variety of gravitational phenomena where gravitational induction is considered. In the same way that electromagnetic theory is not linear but Maxwell equations are applicable to a wide range of electromagnetic phenomena.

Our results presented here do not try to replace the non-linear theories of gravitation, such as Einstein's theory of general relativity [11] or Logunov's relativistic theory of gravitation [12], but we want to show the importance of a linear gravitational theory, not only historical but methodological too, because we will show that exist properties of the weak fields that are not understood because they were not have the opportunity to appear in a linear theory of gravitation.

THE JEFIMENKO'S EQUATIONS FOR GRAVITATION

The gravitodynamical theory is a generalization of the Newton's gravitation theory, since the Newtonian theory of gravitation describes perfectly phenomena of a wide range of masses, but it does not consider the behavior of the fields of moving mass distributions. This is the reason why it is necessary to make an extension of the classical Newton's theory of gravitation.

We can write the Newton's theory in a way as a force field theory in terms of the gravitational field \mathbf{g} as

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi\gamma\rho \quad (1)$$

and

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0, \quad (2)$$

where γ is the gravitational constant, ρ is the mass density given by $\rho = dm/dV$ and dm is the element of mass contained in the volume element dV .

As we know, the gravitational field \mathbf{g} is defined by means of the force exerted by the mass distribution ρ over a mass test

$$\mathbf{F}_g = m_t \mathbf{g}. \quad (3)$$

In other words, the gravitational field is the perturbation of the space due to distribution of mass in some region which interact on a test mass m_t . Both masses (the mass creating the field and the test mass) can be moving or at rest.

If we consider that the cogravitational field \mathbf{k} exists, we need to define it in terms of the cogravitational force

$$\mathbf{F}_k = m_t (\mathbf{v} \times \mathbf{k}), \quad (4)$$

Where \mathbf{F}_k is the force exerted by the cogravitational field over a test mass m_t moving with velocity \mathbf{v} .

So, we can define the cogravitational field \mathbf{k} as the perturbation of the space due to a moving mass distribution which interacts on a moving test mass.

Jefimenko started to derive their gravitational equations from the next expressions

$$\mathbf{g} = -\gamma \int \left\{ \frac{[\rho]}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \right\} \mathbf{r} dV' + \frac{\gamma}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \right] dV' \quad (5)$$

and

$$\mathbf{k} = -\frac{\gamma}{c^2} \int \left\{ \frac{[\rho \mathbf{v}]}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \right] \right\} \times \mathbf{r} dV', \quad (6)$$

where γ is the gravitational constant, c is the velocity of propagation of the fields² and \mathbf{r} is the vector directed from the element of volume dV' (the source point) to the point where the gravitodynamical field is measured (the field point) and r is its magnitude, the square brackets designate that the quantities inside them are evaluated in the delayed time $t' = t - r/c$. The integrals are evaluated over all space.

We can see from (5) and (6) that the gravitodynamical fields have four causative sources, namely: the mass density ρ , the temporal derivative of the mass density $\partial_t \rho$, the mass current $\rho \mathbf{v}$ and its time derivative $\partial_t(\rho \mathbf{v})$.

Jefimenko obtained the gravitodynamical equations making use of the vector calculus and some vector identities. The gravitodynamical equations are:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi\gamma\rho, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}, \quad (9)$$

²Jefimenko assumed that the velocity of the propagation of the fields must be c , i.e, the finite speed of light. But we have demonstrated in [4] that this velocity must be finite or instantaneous.

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

where $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ is the mass current density. It is evident the analogy between the Maxwell equations and the Jefimenko's ones is not perfect: while we have only one kind of mass, we have two types of electric charge. While the electric field is directed from the positive charges that generate it and is directed toward negative charges, the gravitational field is always directed to the masses by which it is created. Another difference is that the magnetic field is dextrorotatory (right hand) with respect to the electric current through which it is generated, while the gravitational field is always levorotatory (left hand) with respect to the mass current through which it is generated. In spite of these differences, the system of equations obtained by Jefimenko describe correctly the behavior of the weak gravitational fields, as we have already seen they are deduced from different formulations in [3] and in [6], [7].

We define a Gaussian system of units for the gravitodynamical field, in order to simplify our calculations. We will call this system Gravitational Gaussian System (GGS). To do this we need to introduce the next rationalized quantities:

Table 1. Rationalized quantities in the new gravitational Gaussian system of units³.

	Gravitational field	Co gravitational field
Formula	$\mathbf{G} = \gamma^{-1} \mathbf{g}$	$\mathbf{K} = \gamma^{-1} c \mathbf{k}$
Units	$[\mathbf{G}] = ML^{-2} = Jef$	$[\mathbf{K}] = ML^{-2} = Jef$

If we introduce such quantities in the system of Equations (7)-(10) we obtain the next system of equations in the GGS

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = -4\pi\rho, \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = 0, \quad (12)$$

$$\nabla \times \mathbf{G} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{K} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (14)$$

Where, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ is the mass current density and \mathbf{v} is the velocity of the mass distribution generating the co gravitational field.

GRAVITATIONAL WAVES

The Jefimenko's theory of gravitation predicts also the existence of gravitational waves. We

³We define the unit *Jefimenko* abbreviated *Jef* for the rationalized gravitational and co gravitational fields in honor of Jefimenko.

$$\nabla \times \mathbf{k} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -\frac{4\pi\gamma}{c^2} \mathbf{j}, \quad (10)$$

will study the properties of such waves, in this and in other sections (especially in the section V, where we will study the energy and the Poynting vector of such waves).

We will obtain in this section the wave equation for both fields, namely, the gravitational field and the cogravitational one, making direct calculations on the system of equations (11)-(14), we will see that these equations lead us to the wave equation. We start calculating the curl on the equation (13)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{G} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{K}, \quad (15)$$

and substituting in equation (14) and using the identity for a Laplacian of a vector,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}, \quad (16)$$

for any arbitrary vector \mathbf{V} , and where $\Delta = \nabla^2$ is the Laplacian operator, we get

$$\Delta \mathbf{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = -4\pi \left(\nabla \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right), \quad (17)$$

the in homogeneous gravitational wave equation.

In a similar way, starting from (14) taking the curl and using the identity (16), we get

$$\Delta \mathbf{K} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{j}, \quad (18)$$

Is the inhomogeneous cogravitational wave equation. Both expressions (17) and (18) are field waves propagating on the space with a velocity c .

If we consider regions without masses distributions and current masses we obtain the homogeneous wave equations, namely,

$$\Delta \mathbf{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

And

$$\Delta \mathbf{K} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial t^2} = 0. \quad (20)$$

The equations obtained (19) and (20) can be solved by a sum of two vector functions, $\boldsymbol{\varphi}_1$ and $\boldsymbol{\varphi}_2$,

$$\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t), \quad (21)$$

Where $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ is the wave vector⁴, $\boldsymbol{\varphi}_1$ and $\boldsymbol{\varphi}_2$ are general expressions which represent plane waves propagating with velocity c in

⁴ To avoid confusions, we use italic boldface \mathbf{k} to represent the wave vector and normal boldface \mathbf{k} to represent the cogravitational field.

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

opposite directions. Then the solution (21) for the wave equation can be derived from the method of separation of variables. If we introduce the harmonic dependence given by

$$\mathbf{G} = G_0 e^{i(k\mathbf{r} \pm \omega t)} \mathbf{n}_G \quad (22)$$

and

$$\mathbf{K} = K_0 e^{i(k\mathbf{r} \pm \omega t)} \mathbf{n}_K. \quad (23)$$

Where \mathbf{n}_G is a unitary vector in the direction of propagation of \mathbf{G} and \mathbf{n}_K is in the direction of propagation of \mathbf{K} , the wave's equation results in the dispersion's relation

An Interesting Wave Solution of the Jefimenko's Equations for the Free Space

The prediction of gravitational waves by means of the Jefimenko's gravitodynamical theory let us search a various types of solutions for the gravitodynamical field in vacuum. For example, as we will show in this section, solutions exist that have a set of interesting properties. These solutions have the form of spheres of co gravitational field and ring-like gravitational field, in such way the total configuration of the gravitodynamical field oscillates. In such spheres the Heaviside's field is tangent in all points over the surface of this sphere, and the

In Electrodynamics is usual to refer to standard polarity in the solutions of the Maxwell equations when the electric field \mathbf{E} is a polar vector and the magnetic induction \mathbf{B} is an axial vector, or pseudo-vector. This means that after a transformation of inversion of axis coordinates, \mathbf{E} changes its signs, while \mathbf{B} maintains its signs. Following the analogy between both theories we are going to look for solutions to these equations with standard polarity, to wit, when the vector \mathbf{G} is polar and \mathbf{K} is axial. We propose to solve the system of free Jefimenko's equations by the method of separation of variables, we can write \mathbf{G} and \mathbf{K} as follows:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})\mu(t) \quad (31)$$

and

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r})v(t), \quad (32)$$

where $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})$ is a polar vector and $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r})$ is an axial one, also $\mu(t)$ and $v(t)$ are functions of time.

Substituting (31) and (32) in the system (27)-(30)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = 0, \quad (33)$$

$$\omega^2 - k^2 c^2 = 0. \quad (24)$$

For the election of sign $k = +\omega/c$, we obtain from the Jefimenko's equations for gravitodynamical fields

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_G = 0 \text{ and } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_K = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \times \mathbf{n}_G)G_0 &= \frac{\omega}{c} K_0 \mathbf{n}_K \text{ and } (\mathbf{k} \times \mathbf{n}_K)K_0 \\ &= \frac{\omega}{c} G_0 \mathbf{n}_G. \end{aligned} \quad (26)$$

From Eq s. (25) And (26) we can see that \mathbf{G} and \mathbf{K} are vector mutually perpendicular to the direction of propagation and $|G_0| = |K_0|$.

same for the ring-like configuration of the gravitational field.

We will begin this section rewriting the Jefimenko's equations for the gravitation, assuming there are regions of free space or vacuum, this means, $\rho = 0$ and $\mathbf{j} = 0$. We get

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = 0, \quad (28)$$

$$\nabla \times \mathbf{G} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}, \quad (29)$$

$$\nabla \times \mathbf{K} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}. \quad (30)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = 0, \quad (34)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu(t)} \frac{\partial v(t)}{\partial t} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}), \quad (35)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{1}{v(t)} \frac{\partial \mu(t)}{\partial t} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}). \quad (36)$$

We can equate the temporal parts of both equations to certain constants to obtain a consistent system,

$$-\frac{1}{\mu(t)} \frac{\partial v(t)}{\partial t} = \omega_1 \quad (37)$$

And

$$\frac{1}{v(t)} \frac{\partial \mu(t)}{\partial t} = \omega_2. \quad (38)$$

We are going to equating both equations to ω , in order to obtain sinusoidal solutions and get only three constants in our system (37)-(38)

$$v(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (39)$$

and

$$\mu(t) = A \sin(\omega t - \delta), \quad (40)$$

where, A and δ are arbitrary constants.

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

Thus, in this way, the equations for $\boldsymbol{\gamma}$ and $\boldsymbol{\kappa}$ become

$$\nabla \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}), \tag{41}$$

and

$$\nabla \times \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}). \tag{42}$$

Due to the linearity of the spatial components of the fields, we can add (41) and (42), then, we can define the vector

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}), \tag{43}$$

Such as, we obtain

$$\nabla \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}). \tag{44}$$

First of all, we are going to solve (44), then, once we have obtained $\boldsymbol{\sigma}$, we can calculate $\boldsymbol{\gamma}$ and $\boldsymbol{\kappa}$. We need to note that vector $\boldsymbol{\sigma}$ has not polarity, but we can express its polar and axial parts as

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \} \tag{45}$$

And

$$\nabla \times \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r\sigma_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r\sigma_\theta)}{\partial \phi} \right\} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial \phi} - \frac{\partial(r\sigma_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right\} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r\sigma_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial \theta} \right\} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{50}$$

We can obtain the next system of equations taking into account Eq. (44) and comparing it with (49) and (50)

$$\frac{\partial(\sigma_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} = \frac{\omega r \sigma_r \sin \theta}{c}, \tag{51}$$

$$\frac{\partial(r\sigma_\phi)}{\partial r} = -\frac{\omega r \sigma_\theta}{c} \tag{52}$$

and

$$\frac{\partial(r\sigma_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial \theta} = \frac{\omega r \sigma_\phi}{c}. \tag{53}$$

Expressing the variables σ_r, σ_θ from (51) y (52) and replacing them in (53), we obtain the next partial differential equation for σ_ϕ , namely,

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\sigma_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_\phi \sin \theta) \right\} + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \sigma_\phi = 0. \tag{54}$$

If we propose $\sigma_\phi = R(r)\Theta(\theta)$ as a solution for (54) we find that R and Θ have to satisfy

$$r^2 \frac{d^2 (rR)}{dr^2} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \lambda \right) rR = 0 \tag{55}$$

And

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta \sin \theta) \right\} - \lambda \Theta = 0, \tag{56}$$

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \}. \tag{46}$$

Taking the curl of (45) and (46), and inverting the coordinates of equation (44), we have

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \{ \nabla \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) - \nabla \times \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) + \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \right\} \\ &= \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{47}$$

And

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \{ \nabla \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) + \nabla \times \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) - \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{r}) \right\} = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{48}$$

we can be sure that the system is satisfied. The only thing we need to do is to find the solution of (44), in order to find the solution of the system (41)-(42). To get such solution we will consider the vector $\boldsymbol{\sigma}$ in spherical coordinates and we suppose that the solution has axial symmetry

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + \sigma_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_\phi(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{49}$$

The curl of $\boldsymbol{\sigma}$ in spherical coordinates is

where λ is an arbitrary constant? If $\lambda = 0$, then the solution for rR in Equation (55) must be $A \cos \frac{\omega r}{c} + B \sin \frac{\omega r}{c}$, where A and B are constants, but, in general, A and B depend on r , so

$$rR = A(r) \cos \frac{\omega r}{c} + B(r) \sin \frac{\omega r}{c}. \tag{57}$$

Now, we are going to substitute (57) in (55) and we obtain the next two equations

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{\lambda}{r^2} A + \frac{2\omega}{c} \frac{dB}{dr} = 0 \tag{58}$$

And

$$\frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{\lambda}{r^2} B - \frac{2\omega}{c} \frac{dA}{dr} = 0, \tag{59}$$

Considering the fact that the coefficients of sine and cosine must be zero separately, due these functions has the same argument.

To solve (58) and (59) we propose $A(r) = ar^m$ and $B(r) = br^n$, where the coefficients a and b are constants and $n, m \in \mathbb{N}$ are constants, too. Then, we obtain the following characteristic equations, substituting the solutions proposed in Eqs. (58) and (59)

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

$$am(m-1) + \lambda a + \frac{2\omega}{c} bnr^{n-m+1} = 0 \tag{60}$$

and

$$bn(n-1) + \lambda b - \frac{2\omega}{c} amr^{m-n+1} = 0. \tag{61}$$

Both equations can be satisfied for the next two cases:

Case1) $m = 0, n = -1, \lambda = -2$ and $a = -\omega b/c$, and regarding Eq. (57) for $b = 1$, we obtain

$$R = \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\omega r}{c} \cos \frac{\omega r}{c} + \sin \frac{\omega r}{c} \right); \tag{62}$$

Case2) $m = -1, n = 0, \lambda = -2$ and $b = -\omega a/c$, and regarding Eq. (57) for $a = 1$, we obtain,

$$R = \frac{1}{r^2} \left(\cos \frac{\omega r}{c} + \frac{\omega r}{c} \sin \frac{\omega r}{c} \right). \tag{63}$$

Then, from the solutions (62) and (63) we have the general solution for Eq. (55)

$$R(r) = \frac{C_1}{r^2} \left(-\frac{\omega r}{c} \cos \frac{\omega r}{c} + \sin \frac{\omega r}{c} \right) + \frac{C_2}{r^2} \left(\cos \frac{\omega r}{c} + \frac{\omega r}{c} \sin \frac{\omega r}{c} \right), \tag{64}$$

Where C_1 and C_2 are arbitrary constants. This general solution can be expressed as

and

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{c}{\omega r^3} \left\{ \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) + \frac{\omega r}{c} \sin \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) \right\} \sin \theta. \tag{70}$$

In order to write the solutions in a short way, we define

$$\zeta = \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) + \frac{\omega r}{c} \sin \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right)$$

and

$$\eta = \zeta - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right),$$

such as we can write the solution of Eq. (44) in spherical coordinates as

$$\sigma = \xi \left(\frac{2\zeta}{r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \xi \left(\frac{\eta}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta} + \xi \left(\frac{\omega \zeta}{cr^2} \sin \theta \right) \hat{\phi}. \tag{71}$$

Where we have multiplied by $\xi \omega/c$ for convenience, and ξ has dimensions $[\xi] = g \text{ cm}$.

In this way, we can see that the component in $\hat{\phi}$ direction corresponds to the vector \mathbf{Y} and the components in \hat{r} and $\hat{\theta}$ directions correspond to the vector \mathbf{K} . That is,

$$\mathbf{Y} = \xi \left(\frac{\omega \zeta}{cr^2} \sin \theta \right) \hat{\phi} \tag{72}$$

and

6

$$R(r) = \frac{C}{r^2} \left\{ \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) \right\}, \tag{65}$$

Where C and α are arbitrary constants.

Now, we considering the Eq. (56), which for $\lambda = -2$ become:

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta \sin \theta) \right\} + 2\Theta = 0. \tag{66}$$

This equation has the general solution:

$$\Theta(\theta) = C_3 \sin \theta + C_4 (\cot \theta - \sin \theta \ln |\csc \theta - \cot \theta|) \tag{67}$$

Where C_3 and C_4 are arbitrary constants too.

Due to in $\theta = (2n + 1)\pi$ the corresponding solution has a singularity, we can make $C_4 = 0$. Also, due to the homogeneity of the equation for the vector σ , we can make $C_3 = 1$.

In this way, we can write the solution of the Eq. (54) as follows

$$\sigma_\phi(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \left\{ \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) + \frac{\omega r}{c} \sin \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) \right\} \sin \theta. \tag{68}$$

We can use the system (51)-(53) to find $\sigma_r(r, \theta)$ and $\sigma_\theta(r, \theta)$, namely

$$\sigma_r(r, \theta) = \frac{2c}{\omega r^3} \left\{ \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) + \frac{\omega r}{c} \sin \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) \right\} \cos \theta \tag{69}$$

$$\mathbf{K} = \xi \left(\frac{2\zeta}{r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \xi \left(\frac{\eta}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta}. \tag{73}$$

Finally, we write the solution for the gravitational and co gravitational fields as follows

$$\mathbf{G} = \xi \left\{ \left(\frac{\omega \zeta}{cr^2} \sin \theta \right) \hat{\phi} \right\} \sin(\omega t - \delta) \tag{74}$$

and

$$\mathbf{K} = \left\{ \xi \left(\frac{2\zeta}{r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \xi \left(\frac{\eta}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta} \right\} \cos(\omega t - \delta), \tag{75}$$

where we have bear in mind temporal solutions (39), (40) and the spatial solutions (72), (73).

The necessary condition so that solutions (74) and (75) do not diverge in $r = 0$ is,

$$\zeta(0) = \left\{ \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) + \frac{\omega r}{c} \sin \left(\frac{\omega r}{c} - \alpha \right) \right\} \Big|_{r=0} = 0,$$

to fulfill such condition we need $\cos \alpha = 0$, this implies $\alpha = (n + 1/2)\pi$, where $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Now, we calculate the next limits to ensure that the solutions converge,

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\zeta}{r^2} = 0; \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\zeta}{r^3} = \frac{\omega^3}{3c^3} \text{ and } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\eta}{r^3} = -\frac{2\omega^3}{3c^3},$$

these limits are evaluated for $\alpha = \pi/2$, also ζ and η were expanded in power series of r .

we have the energy density defined⁵ as

$$w = -\frac{1}{8\pi}(G^2 + K^2), \tag{76}$$

so, we obtain the limits

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{G} = 0; \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{K} &= \frac{2\xi\omega^3}{3c^3} \cos \omega t \hat{\mathbf{z}}; \quad \lim_{r \rightarrow 0} w \\ &= \frac{\xi^2 \omega^6}{18\pi c^6} \cos^2 \omega t, \end{aligned} \tag{77}$$

$\hat{\mathbf{z}}$ is the unit vector in the direction $Z +$ of the Cartesian system.

We propose $\alpha = \pi/2$ and $\delta = 0$, because δ defines the initial wave phase of the fields \mathbf{G} and \mathbf{K} , we can write convergent solutions for these fields:

$$\mathbf{G} = \left\{ \xi \left(\frac{\omega\zeta}{cr^2} \sin \theta \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \sin \omega t \tag{78}$$

and

$$\mathbf{K} = \left\{ \xi \left(\frac{2\zeta}{r^3} \cos \theta \right) \hat{\mathbf{r}} + \xi \left(\frac{\eta}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \cos \omega t, \tag{79}$$

where

$$\zeta = -\frac{\omega r}{c} \cos \left(\frac{\omega r}{c} \right) + \sin \left(\frac{\omega r}{c} \right) \text{ and } \eta = \zeta - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \sin \left(\frac{\omega r}{c} \right).$$

We can conclude that the solutions (78) and (79) for the Jefimenko's gravitational equations for the free space involve the novel existence of spherical formations of the gravitodynamical field.

Analysis of the Energy and the Energy Flow of the Gravitodynamical Field

The expression of energy density given by Eq. (76) can be changed after some algebraic manipulations in another that contains a part time-dependent and an independent one, namely:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\xi^2}{16\pi} \left\{ \frac{\omega^2 \zeta^2}{c^2 r^4} \sin^2 \theta + \left[\frac{4\zeta^2}{r^6} \cos^2 \theta + \frac{\eta^2}{r^6} \sin^2 \theta \right] \right\} \\ &- \frac{\xi^2}{16\pi} \left\{ \left[\frac{4\zeta^2}{r^6} \cos^2 \theta + \frac{\eta^2}{r^6} \sin^2 \theta \right] \right. \\ &\left. - \frac{\omega^2 \zeta^2}{c^2 r^4} \sin^2 \theta \right\} \cos(2\omega t). \end{aligned} \tag{80}$$

From this expression we find the geometric places where the energy density do not depend on time t . Those geometric places are

The points along the Z axis where is satisfied

$$\tan \left(\frac{\omega Z}{c} \right) = \frac{\omega Z}{c},$$

where $\theta = 0, \pi$ and $\zeta = 0$.

The surfaces where r satisfies

$$\eta^2 = \zeta^2 \left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - 4 \cot^2 \theta \right).$$

The cross-section of such surfaces is drawn as discontinuous curves in the Fig. 3.

Now, we are going to obtain the gravitodynamical energy E_G inside a sphere of radius R centered at the origin, by means of

$$E_{TG} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w(r, \theta, \phi, t) r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi = E_G(R) + E_G(R, t), \tag{81}$$

where

$$E_G(R) = -\frac{\xi^2}{6R^3} \left[\frac{\omega^4 R^4}{c^4} - \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \sin^2 \left(\frac{\omega R}{c} \right) - \zeta^2 \right], \tag{82}$$

and

$$E_G(R, t) = \frac{\xi^2}{6R^3} \zeta \eta \cos 2\omega t. \tag{83}$$

In this case,

$$\zeta = -\frac{\omega R}{c} \cos \left(\frac{\omega R}{c} \right) + \sin \left(\frac{\omega R}{c} \right) \text{ and } \eta = \zeta - \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \sin \left(\frac{\omega R}{c} \right).$$

We can see from Eq. (83) that gravitodynamical energy does not change in time within spheres of radiuses R which are solutions of the next equations obtained respectively making $\zeta = 0$ and $\eta = 0$

$$\tan \left(\frac{\omega R}{c} \right) = \frac{\omega R}{c} \tag{84}$$

and

$$\tan \left(\frac{\omega R}{c} \right) = \frac{\frac{\omega R}{c}}{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}. \tag{85}$$

The surfaces whose radii satisfy Eq. (84) contains only co gravitational field, there is not gravitational field over those surfaces, as we can verify from Eqs. (78) And (79) taking $\zeta = 0$.

Now, we analyze the energy flow contained in the wave field given by (78) and (79).

As a first step we are going to calculate the Poynting's vector in GGSunits

⁵See, page 303 of Gravitation and Co gravitation [3] by Jefimenko. But in our case we use GGS units.

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{K} \times \mathbf{G} \\
 &= \frac{\xi^2}{8\pi} \left\{ \frac{\omega\zeta\eta \sin^2\theta}{r^5} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\omega\zeta^2 \sin(2\theta)}{r^5} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \sin(2\omega t).
 \end{aligned}
 \tag{86}$$

Now, we will calculate the total momentum of the gravitodynamical field within a sphere of radius r centered at the origin. We will do this making use of the fact that the Poynting vector is proportional to the vector of the density of momentum, so that we can calculate the integral of the Poynting vector over the volume of the sphere of radius r . To make this easier we will express the unit vectors in spherical coordinates system in a Cartesian one, namely

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\phi \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}} \text{ And } \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta \sin\phi \hat{\mathbf{y}} - \sin\theta \hat{\mathbf{z}}$$

Integrating Eq. (81) over the given volume we obtain:

$$\begin{aligned}
 &\iiint \mathbf{S} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi \\
 &= \frac{\xi^2 \omega \sin(2\omega t)}{8} \int \frac{\zeta^2}{r^3} \sin^4\theta \Big|_0^\pi \, dr \hat{\mathbf{z}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{87}$$

We can interpret this result as follows. The total momentum of the gravitodynamical field (78)-(79) in a volume bounded by an arbitrary sphere centered at the origin is *null* at any time given.

We will obtain the geometric places where the Poynting vector is zero at any instant. To do this, we need the conditions when the Poynting vector is zero and this is obtained by means of Eq. (76),

$$\zeta^2 \sin 2\theta = 0 \text{ and } \zeta\eta \sin^2\theta = 0.
 \tag{88}$$

From the first equation of (88) we have

$\zeta = 0$, which satisfies both equations (88). We obtain the equation

$$\tan\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \frac{\omega r}{c}.
 \tag{89}$$

Accordingly, the geometric places for the case (1) are spheres whose radiuses satisfy Eq. (89).

$\sin 2\theta = 0$. Which means that θ can be $0, \pi/2$ or π .

- $\theta = 0, \pi$, In this case both equations satisfy the conditions (88). Therefore, the *geometric place* is the Z axis.
- $\theta = \pi/2$, we have two possibilities to satisfy the conditions (88), namely: $\zeta = 0$,

as in case (1) or $\eta = 0$. From this condition we have

$$\tan\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \frac{\frac{\omega r}{c}}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}.
 \tag{90}$$

So, we have the *geometric places* are rings in the plane $z = 0$ whose radiuses satisfying Eq. (90), these rings corresponding to the case $\theta = \pi/2$ and $\eta = 0$. In all points over these rings the cogravitational field is *zero*.

The Poynting vector is tangential in all points over these surfaces. This can be seen from Eq. (81). This fact clarifies the conservation of energy within spheres of radiuses (85).

The geometric places where the Poynting vector for the gravitodynamical field given by (78)-(79) is null at any time are:

- Z axis, called *cogravitational axis* because the ordinary gravitational field does not exist there.
- Rings at the plane $z = 0$ whose radiuses satisfy Eq. (90), called *gravitational rings* because there is not cogravitational field on them.
- Spheres centered at the origin whose radiuses satisfy Eq. (89), called *cogravitational spheres*, because there is not gravitational field on them.

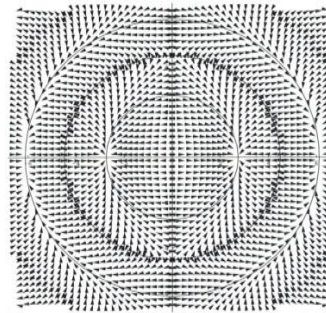


Figure 1. Poynting vector field distribution of the gravitodynamical field at a given time in the plane $x = 0$.⁶

Let's see the graph where is shown the distribution of the Poynting vector field in order to clarify the results obtained in this section. Due to the axial symmetry of the energy density

⁶The graphics were performed in Mathematica™. The z axis is the ordinate and the y axis is the abscissa, and we put in the program $c = 1$ and $\omega = 1$ for simplicity.

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

and the energy-flux density, we can consider only the distribution in the plane $x = 0$.

In Fig. 1 we can see the vertical *cogravitational axis* that matches with the z axis, And we can also see the cross-section of three spheres, which we will call *G-sphere* to the first one, *K-sphere* to the second one, and *G-sphere* to the last one⁷, in an arbitrary instant. The total gravitodynamical energy conserves within *G-spheres* due to the energy-flux vector at the surface of this sphere has tangential component only.

We can see also that energy transfers from these *G-spheres* to the gravitational ring (the equator of such spheres) and after a period defined by the function $\sin(2\omega t)$ in Eq. (81) the movement is reversed. Inside the first *G-sphere* the energy transfers from the *cogravitational axis* to the *gravitational ring* and having spent some time returns. The energy within the *K-sphere* is also conserved, we can see this because the Poynting vector is zero in every point of the *K-sphere* graphed. The energy is transferred from the surface of the *K-sphere* to the gravitational rings of the *G-spheres*. An analogue exchange of energy occurs between next *G-spheres* and *K-spheres*.

We want to emphasize the fact that the Poynting vector field reverses their direction after a time due to the function $\sin(2\omega t)$ present in Eq. (86).

Let us see the cross-section of the Poynting vector field in the plane $z = 0$ in Fig. 2.

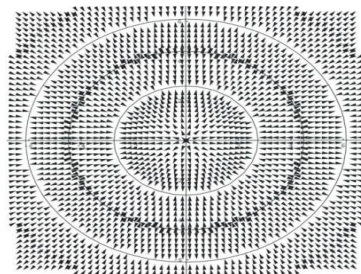


Figure2. Poynting vector field distribution in the plane $z = 0$, for a given instant of time⁸

And at last, we can see the graphic of the cross-section in the plane $x = 0$ of the surfaces where the energy density is constant, the graphic of the

first *K-sphere*; the graphic of the second *G-spheres*.

We need to note that these surfaces do not change in time in vacuum this means they do not deform nor displace when the time goes by.

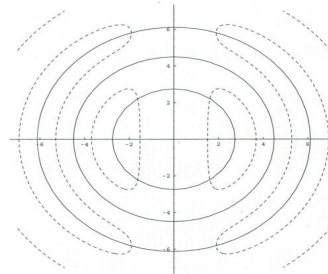


Figure3. Cross-section of the surfaces where the energy density is constant (dashed lines). The continuous lines represent the *K-sphere* and the *G-spheres*.

In Fig. 4 we obtain decreasing energy in the interval $R \in [0, 7]$, where we have plotted the graphics of the total gravitodynamical energy E_{TG} for four different time values, namely, $t = 0, \pi/4, \pi/2$ and $3\pi/4$. We have chosen these values due to the periodicity of the function $\cos 2\omega t$ in the time-dependent term of this energy. Here, we can see how the energy is changing in different the time values given before. There are various points where the gravitodynamical energy is constant for different values of time. For example, we can see that in the point $(2.75, 3.8)$ all the curves intersect, this means, at $R = 2.74 \text{ cm}$ we obtain the total gravitodynamical energy $E_{TG} = -3.8 \times 10^{-3} \text{ erg}$ ⁹.

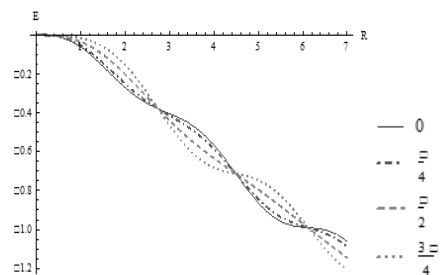


Figure4. This graph shows how the total gravitodynamical energy E_{TG} alternates as the distance varies for the different values of time $t = 0, \pi/4, \pi/2$ and $3\pi/4$ and for $R \in [0, 7]$.

⁷ Called *G-spheres* because they have a gravitational ring in the equator, and *K-spheres* because they are spheres of co gravitational field.

⁸Xaxis is the ordinate and Y axis is the abscissa.

⁹ These values of distance and energy are only for reference, because we have to remind that we have chosen the values $\omega = 1$ and $c = 1$.

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

Now, we want to show both dependences in 3D graphics, and we are going to analyze them. Due to the periodicity of the term time-dependent we will fix them for $t \in [0, 2\pi]$. First, we have Fig. 5(a) the interval $R \in [0, 1]$.

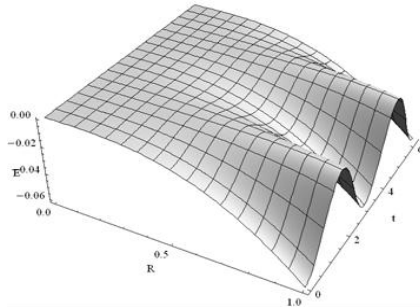


Figure5(a). Graph of the total gravitodynamical energy contained in the G- and K-spheres. E_{TG} for the intervals $R \in [0, 1]$ and $t \in [0, 2\pi]$.

In the Fig. 5 (b) we show the total gravitodynamical energy in the interval $R \in [0, 10]$.

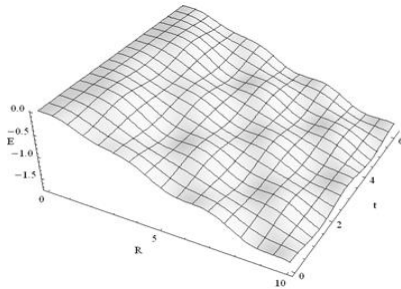


Figure5(b). Total gravitodynamical energy in the interval $R \in [0, 10]$.

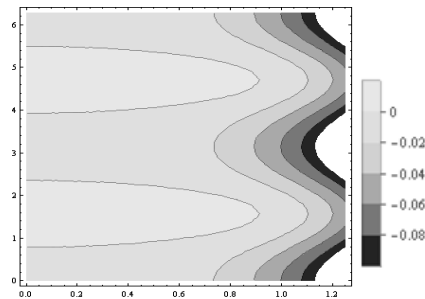


Figure6. Contour plot of the total gravitodynamical energy in the intervals $R \in [0, 1.25]$ and $t \in [0, 2\pi]$. The cross-section where the total gravitodynamical energy is null, forms semi-ovoid.

At last, we want to show the graphics of the cross-sections of both fields, in Fig. 7 we have

the gravitational field in the plane $z = 0$. In Fig. 8 we have drawn cross-sections of the cogravitational field in the planes $y = 0$ and $x = 0$ respectively.

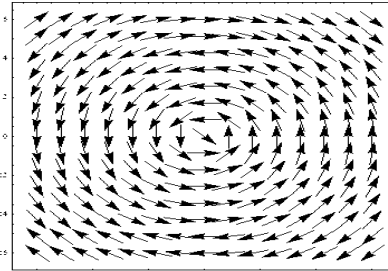


Figure7. Ring-like form of the gravitational field in the plane $z = 0$.

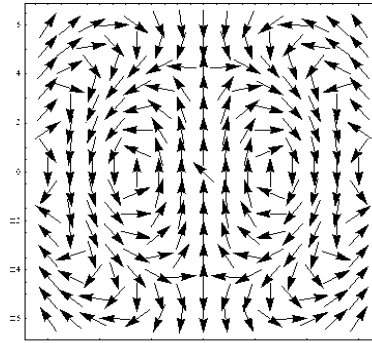


Figure8. Cogravitational field in the planes $y = 0$ and $x = 0$, this field does not have components in the plane $z = 0$.

Convergent Solution (78) and (79) Represented as a Superposition of Two Divergent Solutions

We can represent solutions (78) and (79) as a superposition of two waves spreading in opposite directions in each point, as the same way as Eq. (21). To do that only we need to do an algebraic transformation.

We call

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{G}_{(\rightarrow)} + \mathbf{G}_{(\leftarrow)} \tag{91}$$

Gravitational convergent solution. This \mathbf{G}_c is the superposition of the two waves $\mathbf{G}_{(\rightarrow)}$ and $\mathbf{G}_{(\leftarrow)}$ spreading in opposite directions at every point. In a similar way, we call

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{(\rightarrow)} + \mathbf{K}_{(\leftarrow)} \tag{92}$$

co gravitational convergent solution. These solutions converge in $r = 0 \Leftrightarrow \delta = (n + 1/2)\pi$, where, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

Where in both cases we have

$$\mathbf{G}_{(\rightarrow)} = \frac{\xi \omega \sin \theta}{2cr^2} \left[\cos\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (93)$$

$$\mathbf{G}_{(\leftarrow)} = -\frac{\xi \omega \sin \theta}{2cr^2} \left[\cos\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(\rightarrow)} &= \frac{\xi \cos \theta}{r^3} \left[\sin\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) - \frac{\omega r}{c} \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{\xi \sin \theta}{2r^3} \left[-\frac{\omega r}{c} \cos\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) + \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \sin\left(\frac{\omega r}{c} - \omega t\right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}, \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(\leftarrow)} &= \frac{\xi \cos \theta}{r^3} \left[\sin\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) - \frac{\omega r}{c} \cos\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{\xi \sin \theta}{2r^3} \left[-\frac{\omega r}{c} \cos\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) + \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \sin\left(\frac{\omega r}{c} + \omega t\right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (96)$$

The solutions (93)-(96) are solutions of the free Jefimenko's equations.

It is also possible demonstrate the next equations

$$\mathbf{G}_{(\rightarrow)} = \frac{1}{2}(-\mathbf{G}_d + \mathbf{G}_c) \text{ and } \mathbf{G}_{(\leftarrow)} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_d + \mathbf{G}_c) \quad (97)$$

and

$$\mathbf{K}_{(\rightarrow)} = \frac{1}{2}(-\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_c) \text{ and } \mathbf{K}_{(\leftarrow)} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_c), \quad (98)$$

where \mathbf{G}_d and \mathbf{K}_d are divergent solutions of the system (11)-(14):

$$\mathbf{G}_d = \left\{ \xi \left(\frac{\omega \zeta_d}{cr^2} \sin \theta \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\} \sin \omega t \quad (99)$$

and

$$\mathbf{K}_d = \left\{ \xi \left(\frac{2\zeta_d}{r^3} \cos \theta \right) \hat{\mathbf{r}} + \xi \left(\frac{\eta_d}{r^3} \sin \theta \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \cos \omega t, \quad (100)$$

where

$$\zeta_d = \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) + \frac{\omega r}{c} \sin\left(\frac{\omega r}{c}\right) \text{ and } \eta_d = \zeta_d - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \sin\left(\frac{\omega r}{c}\right).$$

We said before that $\mathbf{G}_{(\rightarrow)}$, $\mathbf{G}_{(\leftarrow)}$, $\mathbf{K}_{(\rightarrow)}$ and $\mathbf{K}_{(\leftarrow)}$ are solutions of the free Jefimenko's equations for gravitation and they are divergent in $r = 0$. And we can conclude this section emphasize the fact that this kind of gravitational waves of Jefimenko's solutions allows interference phenomenon as a superposition of two gravitational waves spreading in opposite directions.

CONCLUSIONS

As we have seen in section II, Eq. (21) represents a function of two waves spreading in opposite direction, both in \mathbf{k} direction. Such waves are similar to electromagnetic waves, that is, \mathbf{G} and \mathbf{K} are transversal waves, perpendicular to the direction of propagation defined by the Pointing vector \mathbf{S} .

The superposition of the mentioned waves spreading one from the origin to infinity and the other one from the infinity to the origin produces stationary waves. Both waves have

axial symmetry. So, we have obtained a *free* stationary gravitodynamical field, it is consequence of gravitational interference processes.

In this gravitodynamical configuration surfaces (the dashed lines in Fig. 3) and points (in the z axis) exist, where the energy density is *constant*. Such surfaces and points are nodes of *energy density* waves.

The cogravitational spheres obtained, can be containers of mass, because if we consider Eq. (4), any cogravitational field exerts a perpendicular force on any mass to the plane formed by the vectors \mathbf{v} and \mathbf{K} , where \mathbf{v} is the velocity of the particle and we have already seen that the cogravitational field in these unusual formations is tangent in every point of such surfaces. That is why the particles contained inside these spheres cannot leave such cogravitational spheres. The gravitational rings will take the particles of the gas contained in it and they will

Spherical and Ring-Like Configurations for the Gravitodynamical Field

turn them in a direction of rotation of such a field.

From figure 4 we can see the points where the energy is constant, such points are those where the different curves are intersected and they represent the nodes of *energy* waves.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thanks to CONACyT, especially to the Master Pablo Rojo Director of National Scholarship Allocation and Gabriela Gomez Deputy Director of National Scholarship Allocation, for the opportunity given to the Master in Physical Sciences David A. Perez Carlos to continue the studies in the doctorate in physical sciences. And in general, to all people working in CONACyT.

REFERENCES

- [1] Heaviside O 1893 A gravitational and electromagnetic Analogies. *The Electrician* **31** 5125-5134.
- [2] Jefimenko O D 2000 Causality, electromagnetic induction and gravitation: A different approach to the theory of electromagnetic and gravitational fields (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- [3] Jefimenko O D 2006 Gravitation and Co gravitation: Developing Newton's Theory of Gravitation to its Physical and Mathematical Conclusion (Waynesburg, PA: Electret Scientific Star City)
- [4] Espinoza A, Chubykalo A and Perez Carlos D 2016 Gauge Invariance of Gravitodynamical Potentials in the Jefimenko's Generalized Theory of Gravitation *Journal of Modern Physics* **7** 1617-1626
- [5] Assis A K T 2007 Gravitation and Cogravitation *Annales de la Fondation Louis de Broglie* **32** 117-120.
- [6] González W S 2013 Gravitoelectromagnetismo y principio de Mach (Cádiz: e WT Ediciones)
- [7] Creighton J D and Anderson W G 2012 Gravitational-wave physics and astronomy: An introduction to theory, experiment and data analysis (Hoboken, NJ: John Wiley & Sons)
- [8] Chubykalo A and Espinoza A 2002 Unusual formations of the free electromagnetic field in vacuum. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35** 8043-8056
- [9] Espinoza A and Chubykalo A 2003 Mathematical Foundation of Kapitsa's Hypothesis about the Origin and Structure of Ball Lightning *Foundations of Physics* **33** 863-873
- [10] Kapitsa P L 1955 On the nature of ball lightning *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **101** 245-246 (in Russian)
- [11] Einstein A 1916 *Relativity: The special and general theory* (London: Methuen & Co Ltd)
- [12] Logunov AA and Mestvirishvili M A 2001 *Relativistic theory of gravitation* (Moscow: Mir publishers)

7.3. Artículo publicado en Journal of Modern Physics



Journal of Modern Physics, 2018, 9, 1522-1544

<http://www.scirp.org/journal/jmp>

ISSN Online: 2153-120X

ISSN Print: 2153-1196

Conceptual Content of the Generalized Theory of Gravitation of Jefimenko

Andrew Chubykalo, Augusto Espinoza, David Pérez Carlos

Unidad Académica de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México
Email: achubykalo@yahoo.com.mx

How to cite this paper: Chubykalo, A., Espinoza, A. and Carlos, D.P. (2018) Conceptual Content of the Generalized Theory of Gravitation of Jefimenko. *Journal of Modern Physics*, 9, 1522-1544.
<https://doi.org/10.4236/jmp.2018.98094>

Received: May 24, 2018

Accepted: July 15, 2018

Published: July 18, 2018

Copyright © 2018 by authors and Scientific Research Publishing Inc. This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In this work, we make a brief exposition of the Jefimenko's generalized theory of gravitation, describe its conceptual content, explain the mathematical apparatus used for the formulations of the theory and present the fundamental equations of the theory. We elucidate the main difference between Newton's original theory of gravitation and the generalized theory of gravitation.

Keywords

Cogravitation, Gravitational Waves, Gravikinetic Field

1. Introduction

It is obvious that the reader will quickly and easily perceive any new scientific theory not from a monograph, but from an article published in a readable scientific journal. Gravitational interaction of celestial bodies is a *very mysterious phenomenon*. It is traditionally attributed (without any further explanation) to the action of forces of "universal gravitation". But where are the threads, the ropes, the chains or the springs that pull celestial bodies one to the other? How does the Earth "know" that it needs to revolve around the Sun? How does it "feel" where the Sun is located? As far as we know there exists no material connection between celestial bodies. But if there is no material connection, does it not mean that gravitational interactions are not a manifestation of the action of forces, but a manifestation of the existence of some heretofore overlooked agent or mechanism? The Jefimenko's generalized theory of gravitation answers this question with perfect clarity.

Therefore, we decided to present the conceptual content of the Jefimenko's generalized theory of gravitation in a possibly short article.

The Jefimenko's generalized theory of gravitation arose from the analogy be-

tween the laws of gravitation and electromagnetism; that is, there existed a second gravitational field called cogravitational field, analogous to the magnetic field. Such analogy was proposed for the first time by Heaviside in a paper “A gravitational and electromagnetic Analogy” [1] published more than a century ago, where he supposed there must exist a second field due to moving masses and acting over moving masses only, called by Jefimenko, cogravitational field (sometimes this field is called Heaviside’s field). The Heaviside paper was forgotten for a long time until Jefimenko returned his work and made improvement to the Heaviside’s work in two books published and reissued since the 90’s decade [2] [3]. Although there are, detractors of the Jefimenko’s theory of gravitation¹ (see for example [5]).

The gravitodynamical theory [4] assumes that gravitational interactions are mediated by gravitational and cogravitational force fields.

A gravitational field is a region of space where a mass experience a gravitational force. Quantitatively, a gravitational field is defined in terms of the gravitational field vector \mathbf{g} by the same equation by which it is defined in Newton’s theory:

$$\mathbf{g} = -\mathbf{F}/m_i, \quad (1)$$

where \mathbf{F} is the force exerted by the gravitational field on a stationary test mass m_i .

A cogravitational field is a region of space where a mass experience a cogravitational force. Quantitatively, a cogravitational field is defined in terms of the cogravitational field vector \mathbf{K} by the equation

$$\mathbf{F} = m_i (\mathbf{v} \times \mathbf{K}), \quad (2)$$

where \mathbf{F} is the force exerted by the cogravitational field on a stationary test mass m_i , moving with velocity \mathbf{v} . As noted in Chapter 1 of [3], cogravitational fields are created by moving masses only and act upon moving masses only. It should be noted that the cogravitational field \mathbf{K} has not yet been actually observed. However, it is very likely that it can be revealed by the *Gravity Probe B* launched in 2004 by NASA in a polar orbit around the Earth. For the various theoretical considerations demanding the existence of the cogravitational field see O. Jefimenko [2] pp. 80-100.

It is assumed that both gravitational and cogravitational fields propagate in space with finite velocity. This velocity is not yet known, but is believed to be equal to the velocity of light. However, the generalized theory of gravitation is compatible with a propagation velocity of gravitation different from the velocity of light and is not affected by the actual speed with which gravitation propagates. Although we say that gravitational and cogravitational fields “propagate,” it is not entirely clear what physical entity actually propagates, since by definition gravitational and cogravitational fields are “region of space”. It is conceivable that what actually propagates is some particles that somehow create gravitational

¹Called by us in a previous work *gravitodynamical theory* [4].

and cogravitational fields. It is possible that these particles have already been described (see [6]), and it is possible that some of their effects have already been observed (see [7] pp. 137-223). Yet, there is not enough information about these particles for making any definite statement about their existence, nature, or properties.

The generalized theory of gravitation agrees with the principle of causality because, as we shall presently see, in this theory the gravitational and cogravitational fields are expressed in terms of retarded integrals whose integrands are the causative sources of the fields.

The generalized theory of gravitation agrees also with the law of conservation of momentum because according to this theory, gravitational-cogravitational fields are repositories of gravitational-cogravitational field momentum, and because mechanical momentum of a body moving in a gravitational-cogravitational field can be converted into the field momentum and the field momentum can be converted into the mechanical momentum of the body. As the result of this conversion, the sum of the mechanical and field momentum of the combined field-body system is always the same, and the total momentum of the system is thus conserved (see Chapter 8 in [3]).

According to the generalized theory of gravitation, gravitational-cogravitational fields are also repositories of field energy. Kinetic energy of a body moving in a gravitational-cogravitational field can be converted into the energy of the field, and the energy of the field can be converted into kinetic energy of the body. As a result of this conversion, the sum of the mechanical and field energy of the combined field-body system is always the same, and the total energy of the system is thus conserved (see Chapter 8 in [3] for a general proof of energy conservation in such systems).

Obviously, there are not derivations of the formulas presented in this text, because this is a review about the work made by Jefimenko. Also it is important to note that we can obtain all the results by replacing all variables and constants presented in **Table 1** in Maxwell equations. Too, it is important to note that this theory is developed from two standpoints, one of them is to postulate the retarded solutions and making use of the identities from vectorial calculus, we get the Jefimenko equations, and equivalently, we can postulate the system of Jefimenko equations and we get the retarded solutions given by (3) and (4).

2. Fundamental Equations of the Generalized Theory of Gravitation

The two principal equations of the generalized theory of gravitation are the equations for the gravitational field and \mathbf{g} the cogravitational field \mathbf{K} :

$$\mathbf{g} = -G \int \left\{ \frac{[\rho]}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \right\} r dV' + \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \right] dV' \quad (3)$$

And

Table 1. Corresponding electromagnetic and gravitational-cogravitational symbols and constants.

Electric	Gravitational
q (charge)	m (mass)
ϱ (volume charge density)	ϱ (volume mass density)
σ (surface charge density)	σ (surface mass density)
λ (line charge density)	λ (line mass density)
φ (scalar potential)	φ (scalar potential)
A (vector potential)	A (vector potential)
J (convection current density)	J (mass-current density)
I (electric current)	I (mass current)
E (electric field)	g (gravitational field)
B (magnetic field)	K (cogravitational field)
ϵ_0 (permittivity of space)	$-1/4\pi G$
μ_0 (permeability of space)	$-4\pi G/c^2$
$-1/4\pi\epsilon_0$ or $-\mu_0 c^2/4\pi$	G (gravitational constant)

$$\mathbf{K} = -\frac{G}{c^2} \int \left\{ \frac{[\varrho\mathbf{v}]}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial[\varrho\mathbf{v}]}{\partial t} \right] \right\} \times \mathbf{r} dV', \quad (4)$$

where g is the gravitational field created by the mass m distributed in space with density ϱ , $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$ is the distance from the *source point* (x', y', z') , where the volume element of integration dV' is located, to the field point (x, y, z) , where g is been observed or computed, r is the radius vector directed from dV' to the field point, v is the velocity with which the mass distribution ϱ moves (the product ϱv constitutes the “mass-current density”), and c is the velocity of the propagation of gravitation (usually assumed to be the same as the velocity of light). The square brackets in these equations are the retardation symbol indicating that the quantities between the brackets are to be evaluated for the “retarded” time, $t' = t - r/c$, where t is the time for which g and K are evaluated. The integration in the integrals of Equations (3) and (4) is over all space.

According to Equations (3) and (4), the gravitational field has three causative sources: the mass density, the time derivative of ϱ , and the time derivative of the mass-current density ϱv ; cogravitational field has two causative sources: the mass-current density ϱv and the time derivative of ϱv .

In addition to Equations (3) and (4) for the gravitational and cogravitational fields, the following equations constitute the mathematical foundation of the generalized theory of gravitation:

- 1) *The mass conservation equation (“continuity equation”)*

$$\nabla \cdot (\varrho v) = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}, \quad (5)$$

or, in the integral form,

$$\oint \varrho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \varrho dV. \quad (6)$$

According to these equations, whenever a mass contained in a region of space diminishes or increases, there is an outflow or inflow of mass from or into this region.

2) *Force acting on the mass distribution of density ϱ*

$$\mathbf{F} = \int \varrho (\mathbf{g} + \mathbf{v} \times \mathbf{K}) dV, \quad (7)$$

where \mathbf{v} is the velocity of ϱ and the integral is extended over the region of space containing the mass under consideration.

3) *Density of the field energy contained in the gravitational-cogravitational field*

$$U_v = -\frac{1}{8\pi G} (\mathbf{g}^2 + c^2 \mathbf{K}^2), \quad (8)$$

it is important to note that the gravitational-cogravitational field energy is negative. This means that *no energy can be extracted from the gravitational-cogravitational field by destroying the field. In the contrary, energy must be delivered to the field in order to destroy the field.*

4) *Field energy contained in a region of the gravitational-cogravitational field*

$$U = -\frac{1}{8\pi G} \int (\mathbf{g}^2 + c^2 \mathbf{K}^2) dV, \quad (9)$$

where the integration is extended over the region under consideration.

5) *Energy flow vector in the gravitational-cogravitational field ("gravitational Poynting vector")*

$$\mathbf{P} = \frac{c^2}{4\pi G} \mathbf{K} \times \mathbf{g}. \quad (10)$$

This vector represents the direction and rate of gravitational-cogravitational energy flow per unit area at a point of space under consideration. Equation (10) together with Equations (3), (4), (5) and (8) ensures the conservation of energy in gravitational-cogravitational interactions.

6) *Density of the field momentum contained in the gravitational-cogravitational field*

$$\mathbf{G}_{vf} = \frac{1}{4\pi G} \mathbf{K} \times \mathbf{g}. \quad (11)$$

7) *Field momentum contained in the gravitational-cogravitational field*

$$\mathbf{G}_f = \frac{1}{4\pi G} \int \mathbf{K} \times \mathbf{g} dV, \quad (12)$$

where the integration is extended over the region under consideration.

8) *Correlations between the mechanical momentum, \mathbf{G}_m , and the gravitational-cogravitational field*

$$\frac{d\mathbf{G}_M}{dt} = -\frac{1}{4\pi G} \int \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} \times \mathbf{g}) dV + \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{1}{2} \oint (\mathbf{g}^2 + c^2 \mathbf{K}^2) dS - \oint \mathbf{g} (\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}) - c^2 \oint \mathbf{K} (\mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}) \right], \quad (13)$$

where \mathbf{g} and \mathbf{K} are the gravitational and cogravitational fields in the system under consideration. In this equation, the derivative on the left represents the rate of change of the momentum of a body located in a gravitational-cogravitational field, the volume integral represents the rate of change of the field momentum in the region of the field where the body is located, and the surface integrals represent the flux of the field momentum through the surface enclosing the region under consideration. Together with Equations (3), (4), (5), (7) and (11) this equation ensures the conservation of momentum in gravitational-cogravitational interactions.

3. Gravitational and Cogravitational Forces According to the Generalized Theory of Gravitation

One of the most important differences between Newton's original theory of gravitation and the generalized theory of gravitation is in the interpretation of the mechanism of gravitational interactions. Whereas in Newton's original theory of gravitation gravitational interaction between two bodies involves one single force of gravitational attraction, in the generalized theory of gravitation gravitational interaction between two bodies involves an intricate juxtaposition of several different forces. Mathematically, these forces result from Equations (3), (4) and (7). When Equations (3) and (4) are written as five separate integrals, they become, using \mathbf{J} for ρv ,

$$\mathbf{g} = -G \int \frac{[\rho]}{r^3} r dV' - G \int \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] r dV' + \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right] dV' \quad (14)$$

and

$$\mathbf{K} = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\mathbf{J}]}{r^3} \times r dV' - \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial [\mathbf{J}]}{\partial t} \right] \times r dV'. \quad (15)$$

Each of these integrals represents a force field. Therefore, according to the generalized theory of gravitation, gravitational interaction between two bodies involve at least five different forces. Let us consider the physical sources of these forces.

First let us consider Equation (14). The field represented by the first integral of this equation is the ordinary Newtonian gravitational field created by the mass distribution ρ corrected for the finite speed of the propagation of the field, as indicated by the square brackets (the retardation symbol) in the numerator. The field represented by the second integral is created by a mass whose density varies with time. Like the ordinary Newtonian gravitational field, these two fields are directed toward the masses, which create them. The field represented by the last integral in Equation (14) is created by a mass current whose magnitude and/or

direction varies with time. The direction of this field is parallel to the direction along which the mass current increases. All three fields in Equation (14) act on stationary as well as on moving masses.

Consider now Equation (15). The first integral in this equation represents the cogravitational field created by the mass current. The direction of this field is normal to the mass current vector. The second integral represents the field created by a time variable mass current. The direction of this field is normal to the direction along which the mass current increases. By Equation (7), both fields in Equation (15) act on moving masses only.

If the mass under consideration does not move and does not change with time, then there is no retardation and no mass current. In this case, both integrals in Equation (15) vanish and only the first integral remains in Equation (14). As a result, one simply obtains the integral representing the ordinary Newtonian gravitational field. Thus, the ordinary Newtonian gravitational theory is a special case of the generalized theory, as it should be.

As far as the gravitational interaction between two masses is concerned, the meaning of the five integrals discussed above can be explained with the help of **Figure 1**. The upper part of **Figure 1** shows the force, which the mass m_1 experiences under the action of the mass m_2 according to the ordinary Newtonian theory. The lower part of **Figure 1** shows five forces which the same mass m_1 experiences under the action of the mass m_2 according to the generalized theory. The time for which the positions of the two masses and the force experienced by m_1 are observed is indicated by the letter t . Let us not first of all that, according to the ordinary Newtonian theory, the mass m_1 is subjected to one single force directed to the mass m_2 at its present location, that is, to its location at the time t . However, according to the generalized theory, all forces acting on the mass m_1 are associated not with the position of the mass m_2 at the time of observation, but with the position of m_2 at an earlier time $t' < t$. Therefore, the magnitude of the mass m_2 , its position and its state of motion at the present time t have no effect at all on the mass m_1 .

The subscripts identifying the five forces shown in the lower part of **Figure 1** correspond to the five integrals in the Equations (14) and (15). The force F_1 is associated simply with the mass m_2 and differs from the ordinary Newtonian gravitational force only insofar as it is directed not to the mass m_2 at its present position, but to the place where m_2 was located at the past time t' . The force F_2 is associated with the variation of the density of the mass m_2 with time; the direction of this force is the same as that of F_1 . The force F_3 is associated with the time variation of the mass current produced by m_2 ; this force is directed along the acceleration vector \mathbf{a} (or along the velocity vector \mathbf{v}_2) which the mass m_2 had at the time t' . The three forces are produced by the gravitational field \mathbf{g} (if m_2 is a point mass moving at constant velocity, \mathbf{g} and the resultant of the three forces are directed toward the *present position* of m_2 ; see Chapter 5 in [3]).

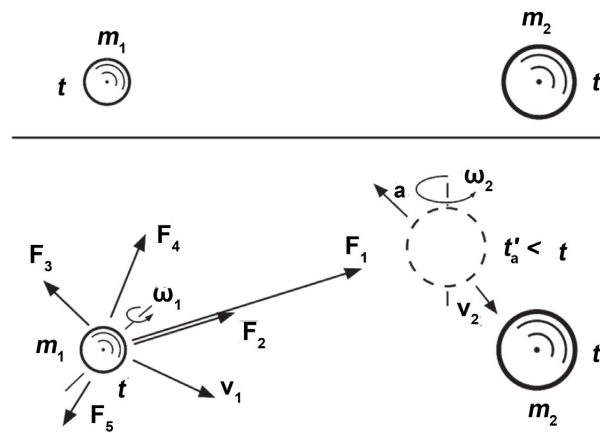


Figure 1. The upper part of this figure shows the force that the mass m_1 experiences under the action of the mass m_2 according to the ordinary Newtonian theory. Lower part shows five forces, which the same mass m_1 experiences under the action of the mass m_2 according to the generalized Newtonian theory.

The forces F_4 and F_5 are due to the cogravitational field K . The force F_4 is associated with the mass current created by the mass m_2 and with the velocity of the mass m_1 . Its direction is normal to the velocity vector v_2 which the mass m_2 had at the time t' and normal to the velocity vector v_1 which the mass m_1 has at the present time t . The force F_5 is associated with the velocity of the mass m_1 and with the variation of the mass current of the mass m_2 with time; the direction of this force is normal to the acceleration vector (or to the velocity vector) that the mass m_2 had at the time t' and normal to the velocity vector that the mass m_1 has at present time t . Although not shown in **Figure 1**, additional forces associated with the rotation of m_1 and m_2 (angular velocities ω_1 and ω_2) are generally involved in the interaction between the two masses (see Chapters 14 and 15 in [3]).

The forces F_2 , F_3 , F_4 and F_5 are usually much weaker than the force F_1 because of the presence of the speed of gravitation c (usually assumed to be the same as the speed of light) in the denominators of the integrals representing the fields responsible for these four forces. This means that only when the translational or rotational velocity of m_1 or m_2 is close to c , are the forces F_2 , F_3 , F_4 and F_5 dominant. Of course, the cumulative effect of these forces in long-lasting gravitational systems (such as Solar system, for example) may be significant regardless of the velocities of the interacting masses.

4. The Relationship between the Generalized Theory of Gravitation and the Special Relativity Theory

Until recently it was believed that the analogy between electromagnetic and gravitational equations could not apply to fast moving systems, because the electric

charge is not affected by velocity, but the mass of a moving body was thought to vary with velocity. It is now generally accepted that mass, just like the electric charge, does not depend on velocity. For a discussion of the history and use of the concept of relativistic mass, see C. Adler, “Does mass really depend on velocity, dad?” [8], also L. Okun, “The concept of mass” [9] and the letter in response to these articles by T. Sandin, “In defense of relativistic mass” [10]. This also means that transformation equations of the special relativity theory developed for electromagnetic systems (see [11] pp. 148-206) have their gravitational and cogravitational counterparts.

Thus there is no need to *derive* relativistic gravitational-cogravitational transformation equations, because we can easily obtain them by replacing symbols and constants appearing in relativistic electromagnetic equations by the corresponding gravitational-cogravitational symbols and constants with the help of the following table [3].

The basic relativistic gravitational-cogravitational transformation equations obtained in this way are listed below. It is important to note that these equations can be derived directly, without using the analogy between electromagnetic and gravitational-cogravitational systems (see O. Jefimenko, “Derivation of Relativistic Transformation for Gravitational Fields from Retarded Field Integrals” [12]). In these equations, the unprimed quantities are those measured in the stationary reference frame Σ (“laboratory”), and the primed quantities are those measured in the moving reference frame Σ' .

Transformation equations correlating quantities measured in Σ with quantities measured in Σ' :

a) *Equations for space and time coordinates*

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (4.1)$$

$$y = y', \quad (4.2)$$

$$z = z', \quad (4.3)$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2). \quad (4.4)$$

b) *Equations for the gravitational field*

$$g_x = g'_x, \quad (4.5)$$

$$g_y = \gamma(g'_y + vK'_z), \quad (4.6)$$

$$g_z = \gamma(g'_z + vK'_y), \quad (4.7)$$

c) *Equations for the cogravitational field*

$$K_x = K'_x, \quad (4.8)$$

$$K_y = \gamma(K'_y - v g'_z/c^2), \quad (4.9)$$

$$K_z = \gamma(K'_z - v g'_y/c^2), \quad (4.10)$$

d) *Equations for the mass and mass-current densities*

$$\varrho = \gamma \left[\varrho' + (v/c^2) J'_x \right], \quad (4.11)$$

$$J_x = \gamma (J'_x + v \varrho'), \quad (4.12)$$

$$J_y = J'_y, \quad (4.13)$$

$$J_z = J'_z. \quad (4.14)$$

e) Equations for gravitational and cogravitational potentials

$$\varphi = \gamma (\varphi' + v A'_x), \quad (4.15)$$

$$A_x = \gamma \left[A'_x + (v/c^2) \varphi' \right], \quad (4.16)$$

$$A_y = A'_y, \quad (4.17)$$

$$A_z = A'_z. \quad (4.18)$$

Transformation equations correlating quantities measured in Σ' with quantities measured in Σ :

a) Equations for space and time coordinates

$$x' = \gamma (x - vt), \quad (4.19)$$

$$y' = y, \quad (4.20)$$

$$z' = z, \quad (4.21)$$

$$t' = \gamma (t - vx/c^2). \quad (4.22)$$

b) Equations for the gravitational field

$$g'_x = g_x, \quad (4.23)$$

$$g'_y = \gamma (g_y - v K_z), \quad (4.24)$$

$$g'_z = \gamma (g_z - v K_y). \quad (4.25)$$

c) Equations for the cogravitational field

$$K'_x = K_x, \quad (4.26)$$

$$K'_y = \gamma (K_y + v g_z / c^2), \quad (4.27)$$

$$K'_z = \gamma (K_z + v g_y / c^2). \quad (4.28)$$

d) Equations for the mass and mass-current densities

$$\varrho' = \gamma \left[\varrho - (v/c^2) J_x \right], \quad (4.29)$$

$$J'_x = \gamma (J_x - v \varrho), \quad (4.30)$$

$$J'_y = J_y, \quad (4.31)$$

$$J'_z = J_z. \quad (4.32)$$

e) Equations for gravitational and cogravitational potentials

$$\varphi' = \gamma (\varphi - v A_x), \quad (4.33)$$

$$A'_x = \gamma \left[A_x - (v/c^2) \varphi \right], \quad (4.34)$$

$$A'_y = A_y, \quad (4.35)$$

$$A'_z = A_z. \quad (4.36)$$

Quite clearly, transformation equations for physical quantities not involving electric and magnetic fields (such as velocity, acceleration, force, etc.) remain valid for gravitational-cogravitational systems as well. However, the constant c appearing in the conventional relativistic transformation equations represents the velocity of propagation of electromagnetic fields in a vacuum, which is the same as the velocity of light. The velocity of propagation of gravitational and cogravitational fields is not known, although it is generally believed to be equal to the velocity of light. If the velocity of propagation of gravitational fields is not the same as the velocity of light, our relativistic transformation equations for gravitation would still remain correct, but the constant c appearing in them would be different from c appearing in the corresponding electromagnetic equations. Therefore, the behavior of rapidly moving bodies involved in gravitational interactions would be different from the behavior of rapidly moving bodies involved in electromagnetic interactions. In effect there would be two different mechanics: the “gravitational-cogravitational mechanics,” and the “electromagnetic mechanics” involving different effective masses, different effective momenta, and different rest energies.

A possibility exists that our gravitational relativistic transformation equations are not entirely correct. According to Einstein’s mass-energy equation, any energy has a certain mass. But a mass is a source of gravitation. Therefore the gravitational field of a mass distribution may be caused not only by the mass of the distribution as such, but also by the gravitational energy of this distribution (for a detail discussion of this effect, including the possibility of antigravitational mass distributions arising from it, see Chapter 19 in [3]). If this effect is taken into account, the equation for the divergence of the gravitational field (see Eq. (7-1.1) in [3])

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho \quad (16)$$

becomes only approximately correct, and all equations derived with the help of Equation. (16) also become only approximately correct. It is important to note, however, that this energy effect, if it exists, is extremely small². In connection with the foregoing, we recommend that the reader become familiar with the work “Binormal Motion of Curves of Constant Curvature and Torsion. Generation of Soliton Surfaces.” [13].

5. Covariant Formulation of the Generalized Theory of Gravitation

Covariant formulation of physical formulas and equations is considered by some authors to be the most appropriate formulation for expressing the laws of phys-

²Contrary to the prevailing belief, equations relativistic electrodynamics and the entire theory of special relativity is also only approximately correct, since it is valid only for inertial systems (“inertial frames of reference”). In reality such systems do not exist, because everywhere in the Universe there is a gravitational force field, making all systems and locations in the Universe non-inertial.

ics in a frame-independent form. It is also believed by some authors to be more concise and occasionally more informative than the conventional formulation. Since any equation invariant under relativistic transformations should be expressible in a covariant form, and since the principle of relativity is considered to be a fundamental law of nature, the laws of physics that cannot be expressed in a covariant form are considered by some authors to be incomplete or incorrect. This view is *unquestionably wrong*, since according to it, even Maxwell's equations in their vector form should be classified as "incomplete" or "incorrect." Note also that covariant formulation changes the form of equations but does not create new physical laws and thus is of very limited utility.

Newton's gravitational law is an example of a physical law that *cannot be expressed in a covariant form*. The problem of finding an invariant form of the law of gravitation was first considered by Poincaré, but without success (see his article "Sur la dynamique de L'Électron" [14]). It is interesting to note that Poincaré attempted to solve the problem on the basis of just one gravitational field (the gravitational analog of the electrostatic field). But even if the theory of gravitation is built upon two fields, a covariant theory of gravitation is not possible unless the gravitational mass, just like the electric charge, does not depend on the velocity with which the mass moves.

However, it is now generally accepted that mass does not depend on the velocity with which a body moves (see C. Adler, "Does mass really depend on velocity, dad?" [8], also L. Okun, "The concept of mass" [9] and the letter in response to these articles by T. Sandin, "In defense of relativistic mass" [10]). Therefore a covariant formulation of the theory of gravitation based on gravitational-cogravitational fields is not only possible but can be constructed straightforwardly from the covariant theory of electromagnetism by a mere substitution of symbols and constants in accordance with the list above.

In particular, from electromagnetic equations (see [11] pp. 284-292). We can directly obtain for the covariant "position 4-vector"

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict). \quad (17)$$

From the 4-vector electric current [11] we obtain by substitutions the covariant expressions for the 4-vector mass current

$$\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3, J_4) = (J_x, J_y, J_z, ic\rho), \quad (18)$$

where J_x, J_y and J_z are x, y and z components of mass current density. From the electromagnetic field tensor [11] we obtain the gravitational-cogravitational field tensor by replacing the x, y and z components of \mathbf{E} by the corresponding components of \mathbf{g} and the x, y and z components of \mathbf{B} by the corresponding components of \mathbf{K}

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & K_z & -K_y & -ig_x/c \\ -K_z & 0 & K_x & -ig_y/c \\ K_y & -K_x & 0 & -ig_z/c \\ ig_x/c & ig_y/c & ig_z/c & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

or

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & K_z & -K_y & ig_x/c \\ -K_z & 0 & K_x & ig_y/c \\ K_y & -K_x & 0 & ig_z/c \\ -ig_x/c & -ig_y/c & -ig_z/c & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

where the subscript μ indicates the row (1, 2, 3, 4 top to bottom) and the subscript ν indicates the column (1, 2, 3, 4 left to right). Finally, in the same manner, we obtain covariant expressions of the present-time differential equations for gravitational-cogravitational fields:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -\frac{4\pi G}{c^2} J_\mu \quad (21)$$

and

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (22)$$

It should be note, however, that c in the gravitational-cogravitational equations stands for the speed of propagation of gravitational-cogravitational fields, which is generally assumed to be the same as the speed of light, but has never been actually measured. In 2002 Fomalont Kopeikin tried indirectly to measure the speed of gravitation and reported in the paper “The measurement of the light deflection from Jupiter: Experimental results” [15] that the velocity of gravitation was found to be equal to the velocity of light.

6. The Gravikinetic Field

As we have already shown, one of the main differences between the generalized theory of gravitation and Newton’s gravitational theory is that in the generalized theory of gravitation there is especial force field – the cogravitational, or Heaviside’s field. The cogravitational field is produced by all moving masses, and it acts ob all moving masses. In this Section we shall learn that in the generalized theory of gravitation there is yet *another* force field produced by moving masses. However, in contrast with the cogravitational field, thid field is produced only by masses whose velocity changes in time and, again in contrast with the cogravitational field, it acts on *all masses*, moving as well as stationary.

As we already know, the principal gravitatonal field equation of the generalized theory of gravitation is

$$\mathbf{g} = -G \int \left\{ \frac{[\rho]}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \right\} r dV' + \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right] dV', \quad (23)$$

where $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ is the mass current density produced by a moving mass distribution ρ . The first term on the right in Equation (23) represents the retarded Newtonian gravitational field. Just like the ordinary Newtonian field, this field originates at any mass distribution ρ and is responsible for the gravitational attraction. However, the last term on the right of Equation (23) represents a gra-

gravitational field very different from the Newtonian field. As can be seen from Equation (23), this new field is produced by a time-variable mass current $\partial\mathbf{J}/\partial t$ and it differs in two important respects from the Newtonian gravitational field: it is directed along the mass-current (more accurately, along its partial time derivative) rather than along a radius vector, and it exists only as long as the current is changing in time. Therefore the gravitational force caused by this field is also different from the ordinary Newtonian force. This force (designated as \mathbf{F}_3 in **Figure 1**) is directed along $\partial\mathbf{J}/\partial t$ and it lasts only as long as the mass current is changing. Unlike the Newtonian gravitational force, which is always an interaction between gravitating masses, the force due to the time-variable \mathbf{J} is basically a *dragging* force. If only the magnitude but not the direction \mathbf{J} changes, this force is directed parallel or antiparallel (if $\partial\mathbf{J}/\partial t$ is negative) to \mathbf{J} , causing a mass subjected to this force to move parallel or antiparallel to (rather than toward) the mass distribution forming the mass current. However, like the Newtonian force, the force due to the time-variable \mathbf{J} acts upon all masses. It is important to note that unlike the cogravitational field, the field produced by $\partial\mathbf{J}/\partial t$ usually is not created by masses moving with constant velocity \mathbf{v} ,

Since the cogravitational field created by time-variable mass currents is very different from the Newtonian field and from the cogravitational field, a special name should be given to it. Taking into account that the cause of this field is a motion of masses, we can call it the *gravikinetic field*, and we may call the force which this field exerts on other masses the *gravikinetic force*. We shall designate the gravikinetic field by the vector \mathbf{g}_k . From Equation (23) we thus have

$$\mathbf{g}_k = \frac{G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} \right] dV'. \quad (24)$$

Because of the c^2 in the denominator in Equation (24) the gravikinetic field cannot be particularly strong except when the mass-current responsible for it changes very fast. On the other hand, taking into account that the time scale in gravitational interactions taking place in the Universe may be very long, ultimate effect of the gravikinetic field in such interactions may be very considerable regardless of the rate at which the mass current changes.

Let us now show the correlation between the gravikinetic field and the cogravitational field. If we compare Equation (24) with the expression for the retarded cogravitational vector potential \mathbf{A}_{ret} produced by a mass current \mathbf{J} (see, Section 3-3 Equation (3-3.2) in [4]),

$$\mathbf{A}_{ret} = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\mathbf{J}]}{r} dV', \quad (25)$$

we recognize that the gravikinetic field is equal to the time derivative of retarded \mathbf{A}_{ret} :

$$\mathbf{g}_k = -\frac{\partial\mathbf{A}_{ret}}{\partial t}. \quad (26)$$

Observe that Equation (26) points out the possibility of a new definition and interpretation of the cogravitational vector potential. Let us integrate Equation (26). We obtain

$$A_{ret} = -\int \mathbf{g}_k dt + \text{const.} \quad (27)$$

Let us call the time integral of \mathbf{g}_k the *gravikinetic impulse*. We then can say that the cogravitational vector potential created by a mass current at a point in space is equal to the negative of the gravikinetic impulse produced by this current at that point during the action of the mass current. Since the gravikinetic impulse is, in principle, a measurable quantity, we thus have an operational definition and a physical interpretation of the cogravitational vector potential (for a related interpretation of the magnetic vector potential see [2] pp. 30, 31).

A more direct relation between the gravikinetic field and the cogravitational field one can obtain as follows. Let us assume that an initially stationary mass current $\mathbf{J}(x', y', z')$ (an initially stationary rotating spherical mass, for example) moves as a whole with a constant velocity \mathbf{v} toward a stationary observer located at the origin of coordinates. The mass current is then a function of $(x' - v_x t)$, $(y' - v_y t)$ and $(z' - v_z t)$, or

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(x' - v_x t, y' - v_y t, z' - v_z t). \quad (28)$$

The time derivative of the current is

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x'} v_x - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y'} v_y - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z'} v_z = -(\mathbf{v} \cdot \nabla') \mathbf{J}. \quad (29)$$

The gravikinetic field caused by the moving mass current is then, by Equations. (24) and (29),

$$\mathbf{g}_k = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[(\mathbf{v} \cdot \nabla') \mathbf{J}]}{r} dV'. \quad (30)$$

The spatial derivative appearing in Equation (30) can be eliminated as follows. Using vector identity (V-6) from [3], which can be written as

$$\nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla') \mathbf{J} + \mathbf{v} \times (\nabla' \times \mathbf{J}) + (\mathbf{J} \cdot \nabla') \mathbf{v} + \mathbf{J} \times (\nabla' \times \mathbf{v}), \quad (31)$$

and taking into account that \mathbf{v} is a constant vector, we obtain

$$\mathbf{g}_k = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J})]}{r} dV' + \frac{G}{c^2} \int \frac{[\mathbf{v} \times (\nabla' \times \mathbf{J})]}{r} dV'. \quad (32)$$

If we compare Equation, (32) with Equation (3-1.2) from [3] for the cogravitational field,

$$\mathbf{K} = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\nabla' \times \mathbf{J}]}{r} dV', \quad (33)$$

we find that Equation, (32) can be written as

$$\mathbf{g}_k = -\frac{G}{c^2} \int \frac{[\nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J})]}{r} dV' - \mathbf{v} \times \mathbf{K}, \quad (34)$$

where \mathbf{K} is the cogravitational field created by the moving mass current \mathbf{J} .

7. Dynamic Effects of Gravikinetic Fields; Gravitational Induction

We shall now present one example (for more examples see the Section 2-2 in [3]) demonstrating force effects of the gravikinetic field. For simplicity we shall use gravikinetic fields calculated in the Section 12-2 of [3].

The force effects that we shall show constitute the gravitational analogue of electromagnetic induction and of electromagnetic Lenz's law. As we now know, electromagnetic induction is caused by the electrokinetic field (see [3]). The gravikinetic field is the gravitational counterpart of the electrokinetic field, and their dynamic effects are similar, except that the gravikinetic force exerted on a mass by an increasing/decreasing gravikinetic field is parallel/antiparallel to the field, whereas the electrokinetic force exerted on a positive charge by an increasing/decreasing electrokinetic field is antiparallel/parallel to the field.

An example: A thin-walled cylinder of radius R_0 , length $2L$ and wall thickness t has a uniformly distributed mass of density ϱ is initially at rest. A ring of mass m_r and radius R is placed around the cylinder coaxially with it. The cylinder is then suddenly set in motion along its axis and attains a velocity v_c (mass current J_c). The gravikinetic force causes the ring to move along (follow) the cylinder (Figure 2). Assuming that no other forces act on the ring, and assuming that the ring stays near the middle of the cylinder during the time that the velocity of the cylinder changes, find the final velocity v_f of the ring.

According to our assumptions, the gravikinetic field through which the ring moves is a function of time only. Therefore we can use Equation (12-1.5) from [3] for finding the final momentum and velocity of the ring. When the gravikinetic force acts on a mass distribution ϱ , it changes the mechanical momentum \mathbf{G}_M of the mass distribution (see [3]), and if \mathbf{g}_k is a function of time only, the momentum change is

$$\Delta \mathbf{G}_M = m \int \mathbf{g}_k dt = -m \Delta \mathcal{A}, \quad (35)$$

where m is the total mass of the distribution, and $\Delta \mathcal{A}$ is the change in the vector potential during the time interval under consideration. From Equation (35) and Equation (12-2.3) (in [3])

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial I}{\partial t} \frac{2G}{c^2} \ln \frac{2L}{R} \mathbf{k}, \quad (36)$$

where \mathbf{k} is a unit vector in the direction of the mass current I , we have

$$\Delta \mathbf{G}_M = m_r v_f = m_r I_c \frac{2G}{c^2} \ln \frac{2L}{R} \mathbf{k}, \quad (37)$$

so that the final velocity of the ring is

$$\mathbf{v}_f = \frac{2G}{c^2} I_c \ln \frac{2L}{R} \mathbf{k}. \quad (38)$$

Substituting $\varrho v_c 2\pi R_0 t$ for I_c , where ϱ is the density of the cylinder, R_0 is its radius, and t is its thickness, we obtain

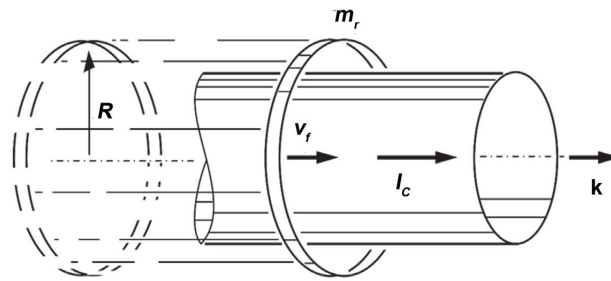


Figure 2. Accelerating cylinder drags the ring with itself.

$$\mathbf{v}_f = \frac{4G\rho v_c \pi R_0 t}{c^2} \ln \frac{2L}{R} \mathbf{k}. \quad (39)$$

The cylinder *drags* the ring so that the ring moves in the direction of the moving cylinder. It is interesting to note that the final velocity of the ring does not depend on its mass.

This example (along with other examples in the Section 2-2 in [3]) illustrates the phenomenon of *gravitational induction*, whereby a changing mass current induces a secondary mass current in neighboring bodies. The effect is similar to electromagnetic induction (for a detailed analysis and novel interpretation of the phenomenon of electromagnetic induction see Oleg D. Jefimenko, “Presenting electromagnetic theory in accordance with the principle of causality”, [16]), except that, in contrast to the latter, the direction of the induced current is the same as that of the original current if the original current increases, and is opposite to the original current if the original current decreases. Thus the sign of the “gravitational Lenz’s law” is opposite to that of the electromagnetic Lenz’s law.

8. Instead of Conclusion: On the Truth of the Generalized Theory of Gravitation

The comparison of the generalized theory of gravitation with the general theory of relativity of Einstein (GR) involuntarily suggests.

As is known, the experimental confirmation of GR generally relies only on the fact that it allegedly explained the previously unexplained discrepancy between the theoretical (calculated) and observed displacement (precession) of the perihelion of the planet Mercury; all other predictions and conclusions of the general theory of relativity can either not be verified with sufficient accuracy, or can be explained without this theory.

Speaking about the problem of Mercury, it should be pointed out that the so-called discrepancy in the displacement of its perihelion is the difference between the observed and calculated, on the basis of the usual Newton theory, perihelion.

This difference, which is approximately 575” per century attracted the attention of Urbain Leverrier, who predicted the existence of the planet Neptune and

accurately calculated its coordinates. Leverrier explained the difference in the precession of Mercury by the influence of near planets and, having calculated their effect on Mercury, found that these planets cause a precession of 532" per century. The remaining 43" he could not explain. These remaining 43" for centuries were, *as it is now believed*, explained by Einstein's general theory of relativity. But then a certain discrepancy is immediately evident. After all, the main divergence in 532" was calculated according to Newton's theory, and the remainder in 43" was calculated according to the general theory of relativity. It would be much more convincing if the entire discrepancy of 575" per century was calculated *on the basis of the same theory*. On this occasion J. Synge remarked [17]: "Such a mixture of Newtonian and Einstein's theories is psychologically unpleasant, since these theories are based on too different initial concepts." Until the *complete discrepancy* is calculated using the general theory of relativity, without invoking Newton's theory, the experimental verification of general relativity can not be considered valid.

But let us go back to the generalized theory of gravitation. We note that, as shown in [3], within the framework of the generalized theory of gravitation, one can obtain formulas according to which the perihelion precession *for all planets* is a necessary consequence of this theory. However, these formulas hardly can prove anything. The fact is that according to the generalized theory of gravitation, all celestial mechanics and its results should be revised. As it was shown above (see **Figure 1**), the action of the Sun on planets is expressed not by one force, but by five forces, and the action of each planet on each other planet is expressed not by one force, but by five forces. Therefore, as a matter of fact, all the information about our solar system, obtained on the basis of Newton's conventional theory, should be considered only approximately correct. So, from the point of view of the generalized theory, there is no point in trying to explain the 43rd residue in the displacement of the perihelion of Mercury. After all, if we take into account all the forces that act on Mercury, including the forces associated with the movement of the Sun in relation to the Galaxy, the rotation of the Sun around its axis, the dependence of the forces acting on Mercury on the speed and acceleration of the planets, on the speed of Mercury itself, and, finally, the retardation in the action of gravitational and cogravitational forces, will we get this discrepancy at all in the displacement of the perihelion of Mercury, especially the discrepancy exactly in 43 seconds? It is clear that until all these calculations are performed, until the necessary corrections in celestial mechanics are amended, it is pointless to speak of testing the generalized theory of gravitation by analyzing the motion of Mercury.

So neither the generalized theory of gravitation of Jefimenko nor the general theory of relativity of Einstein can be verified in this way.

However, one very strong testimony to the truth of the generalized theory of gravitation can still be cited (although it is not as sensational as the explanation of the discrepancy in the displacement of Mercury's perihelion). Speech will go about one "white spot" associated with the phenomenon of gravitation. As is

known, the motion of stellar bodies and the fall of bodies under the action of the gravitational field \mathbf{p} associated with conversion of potential energy unto kinetic energy and vice versa. In particular, when a body is falling under the action of the gravitational of the Earth, its potential energy diminishes and its kinetic energy increases. But how, exactly, does this come about? How is this energy exchange actually accomplished? In the past this phenomenon was simply interpreted as a result of the energy conservation, but the process, or mechanisms, of the energy exchange remained unknown. As we shall now see, the generalized theory of gravitation explains this heretofore hidden process with perfect clarity.

Let a body of mass m fall under the action of Earth's gravitational field \mathbf{g} (Figure 3). Note that the magnitude of \mathbf{g} is equal to the acceleration of gravity g . Let the velocity of the body at the moment of observation be \mathbf{v} . Like all moving masses, the falling creates around itself a cogravitational field \mathbf{K} left-handed relative to the velocity vector of the body. Therefore, according to Equation (10) (gravotational Poynting vector equation)

$$\mathbf{P} = \frac{c^2}{4\pi G} \mathbf{K} \times \mathbf{g}. \quad (40)$$

there is a flow of gravitational energy U_{gr} at the surface of the falling body directed into the body. The rate at which the gravitational energy enters the body is

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \frac{c^2}{4\pi G} \oint (\mathbf{K} \times \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{S}_{in} = \frac{c^2}{4\pi G} \oint (\mathbf{g} \times \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (41)$$

where $d\mathbf{S}_{in}$ is a surface element vector of the falling body directed into the body, and $d\mathbf{S}$ is a surface element vector directed, as usually accepted in vector analysis, from the body into the surrounding space; the integration is over the entire surface of the falling body. Transposing in the integrand the cross and the dot and factoring out the constant vector \mathbf{g} together with the dot from under the integral sign, we have

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \frac{c^2}{4\pi G} \oint \mathbf{g} \cdot (\mathbf{K} \times d\mathbf{S}) = \frac{c^2}{4\pi G} \mathbf{g} \cdot \oint \mathbf{K} \times d\mathbf{S}. \quad (42)$$

Converting now the last surface integral into the volume integral, we obtain

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = -\frac{c^2}{4\pi G} \mathbf{g} \cdot \int \nabla \times \mathbf{K} dV. \quad (43)$$

By Equation (7-1.4) in [3]

$$\nabla \times \mathbf{K} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, \quad (44)$$

since \mathbf{g} is not a function of time,

$$\nabla \times \mathbf{K} = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho \mathbf{v}. \quad (45)$$

Therefore Equation (43) reduces to

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \mathbf{g} \cdot \int \rho \mathbf{v} dV. \quad (46)$$

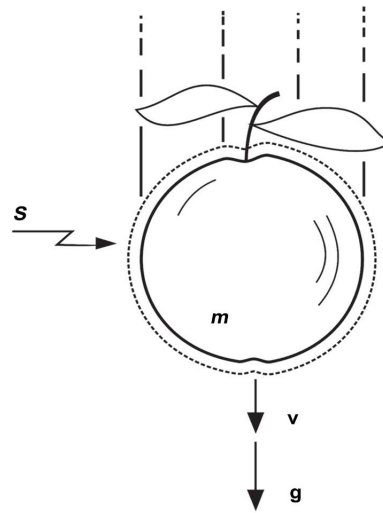


Figure 3. The generalized theory of gravitation provides a clear explanation of the mechanism of energy exchange involved in gravitational interactions: the increase of the kinetic energy of a body moving under the action of a gravitational field occurs as a consequence of the influx of gravitational field energy into the body via the gravitational Poynting vector.

Factoring out constant vector \mathbf{v} from under the integral sign, we obtain

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \int \rho dV. \quad (47)$$

Thus, since \mathbf{g} and \mathbf{v} are parallel, and since the last integral in Equation (47) represents the mass of the falling body, we find that when the body is falling, there is an influx of the gravitational field energy (potential energy) into the body at the rate

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} m = m \mathbf{v} \mathbf{g}. \quad (48)$$

Let us now consider the kinetic energy. The kinetic energy of a falling body increases at the rate

$$\frac{dU_{gr}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = mv \frac{dv}{dt} = m \mathbf{v} \mathbf{g}, \quad (49)$$

where \mathbf{g} is the acceleration of the falling body. However, as was mentioned above, \mathbf{g} in Equation (48) is the same acceleration, and therefore the rate at which the kinetic energy of the falling body increases is equal to the rate of influx of the gravitational field energy into the body. Note that a less general case of the gravitational and kinetic energy exchange was previously considered by D. Bedford and P. Krumm in “The gravitational Poynting vector and energy transfer” [18].

Thus the generalized theory of gravitation provides a clear explanation of the

mechanism of the energy exchange involved in gravitational interactions: the increase of the kinetic energy of the body moving under the action of a gravitational field occurs as a consequence of the gravitational field energy influx into the body via the gravitational Poynting vector. Essentially the same considerations apply to the case when a body moves against the gravitational field, in which case its kinetic energy diminishes due to outflow of energy from the body into surrounding space again via the gravitational Poynting vector.

The simplicity of the above calculation tends to hide the utmost significance of the obtained results. The fact is that no gravitational theory can be considered definitive if it cannot provide a clear explanation of the mechanism of conversion of “gravitational potential energy” into the kinetic energy of falling bodies. Therefore, in spite of their simplicity, the above calculations constitute an exceptionally important proof of the validity of the generalized theory of gravitation and, at the same time, reveal the true nature of the “gravitational potential energy.”

Finally, we will talk about the *existence of gravitational and cogravitational waves*. From the theoretical point of view, it is especially important that the Equations (3) and (4) can be transformed into the following differential equations in the present time:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho, \quad (50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = 0, \quad (51)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} \quad (52)$$

and

$$\nabla \times \mathbf{K} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}. \quad (53)$$

We shall now show by direct calculation how Equations (50)-(53) predict the existence of gravitational and cogravitational waves.

We start with Equation (52). Taking the curl of this equation, we obtain

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{K}. \quad (54)$$

Substituting Equation (53) into Equation (54), we obtain

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{g} = \frac{4\pi G}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2}, \quad (55)$$

Or

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{g} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2} = \frac{4\pi G}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (56)$$

Similarly, taking the curl of Equation (53), we have

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{K} = -\frac{4\pi G}{c^2} \nabla \times \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla \times \mathbf{g}}{\partial t}, \quad (57)$$

and, substituting Equation (52) into Equation (57), we obtain

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{K} = -\frac{4\pi G}{c^2} \nabla \times \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial t^2}, \quad (58)$$

or

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{K} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi G}{c^2} \nabla \times \mathbf{J}. \quad (59)$$

Equations (56) and (59) are mathematical expressions for waves propagating in space with velocity c . In the present case they represent waves carrying with themselves the gravitational field \mathbf{g} and the cogravitational field \mathbf{K} , respectively.

Furthemover, by Equations. (50) and (51), in a region of space where there are no masses and no mass currents, Equations. (56) and (59) become the more familiar “wave equations”

$$\nabla^2 \mathbf{g} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2} = 0 \quad (60)$$

and

$$\nabla^2 \mathbf{K} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial t^2} = 0. \quad (61)$$

Studing in [3] (pp. 303-304) energy relations in gravitational and cogravitational waves O. Jefimenko found that the energy density in these waves is *negative*.

$$U_v = -\frac{1}{8\pi G} \mathbf{g}^2 - \frac{1}{8\pi G} c^2 \mathbf{K}^2. \quad (63)$$

An important consequence of the negative energy density in gravitational-cogravitational waves is that in contrast to the electromagnetic waves, a gravitational-cogravitational wave striking a body pulls toward the wave, that is, exerts a negative rather than a positive pressure on the body. The calculations of the negative pressure by gravitational-cogravitational waves are similar to the corresponding calculations of the positive pressure by electromagnetic waves (see [2] pp. 132-133).

References

- [1] Heaviside, O. (1893) *The Electrician*, **31**, 5125-5134.
- [2] Jefimenko, O. (2000) *Causality, Electromagnetic Induction and Gravitation: A Different Approach to the Theory of Electromagnetic and Gravitational Fields*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [3] Jefimenko, O. (2006) *Gravitation and Cogravitation: Developing Newton's Theory of Gravitation to Its Physical and Mathematical Conclusion*. Electret Scientific, Star City.
- [4] Espinoza, A., Chubykalo, A. and Carlos, D.P. (2016) *Journal of Modern Physics*, **7**, 1617-1626. <https://doi.org/10.4236/jmp.2016.713146>
- [5] Assis, A. (2007) *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **32**, 117-120.
- [6] Edwards, E., Ed. (2003) *Pushing Gravity*. Apeiron, Montreal.

A. Chubykalo et al.

- [7] Eganova, I. (2005) *The Nature of Space-Time*. Publishing House of SB RAS, Novosibirsk.
- [8] Adler, G. (1987) *American Journal of Physics*, **55**, 739-743.
<https://doi.org/10.1119/1.15314>
- [9] Okun, L. (1989) *Physics Today*, **42**, 31-36. <https://doi.org/10.1063/1.881171>
- [10] Sandin, T. (1991) *American Journal of Physics*, **59**, 1032-1036.
<https://doi.org/10.1119/1.16642>
- [11] Jefimenko, O. (2004) *Electromagnetic Retardation and Theory of Relativity*. 2nd Edition, Electret Scientific, Star City.
- [12] Jefimenko, O. (1995) *Galilean Electrodynamics*, **6**, 23-30.
- [13] Schief, W.K. and Rogers, C. (1999) *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **455**, 1988, 3163-3188. www.jstor.org/stable/53475
- [14] Poincaré, H. (1906) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **21**, 129-175.
<https://doi.org/10.1007/BF03013466>
- [15] Fomalont, E. and Kopeikin, S. (2003) *The Astrophysical Journal*, **598**, 704-711.
<https://doi.org/10.1086/378785>
- [16] Jefimenko, O. (2004) *European Journal of Physics*, **25**, 287-296.
<https://doi.org/10.1088/0143-0807/25/2/015>
- [17] Synge, J. (1960) *Relativity: The General Theory*. North Holland, Amsterdam.
- [18] Krumm, P. and Bedford, D. (1987) *American Journal of Physics*, **55**, 362-363.
<https://doi.org/10.1119/1.15172>

7.4. Artículo publicado en The European Physical Journal C



Post-Newtonian limit: second-order Jefimenko equations

David Pérez Carlos^{1,a}, Augusto Espinoza², Andrew Chubykalo²

¹ Unidad Académica de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas, Campus II, Av. Preparatoria s/n, 98068 Zacatecas, Mexico

² Unidad Académica de Ciencia y Tecnología de Luz y Materia, Universidad Autónoma de Zacatecas, Ciudad Universitaria Campus Siglo XXI, 98160 Zacatecas, Mexico

Received: 28 October 2019 / Accepted: 10 July 2020
© The Author(s) 2020

Abstract The purpose of this paper is to get second-order gravitational equations, a correction made to Jefimenko's linear gravitational equations. These linear equations were first proposed by Oliver Heaviside in [1], making an analogy between the laws of electromagnetism and gravitation. To achieve our goal, we will use perturbation methods on Einstein field equations. It should be emphasized that the resulting system of equations can also be derived from Logunov's non-linear gravitational equations, but with different physical interpretation, for while in the former gravitation is considered as a deformation of space-time as we can see in [2–5], in the latter gravitation is considered as a physical tensor field in the Minkowski space-time (as in [6–8]). In Jefimenko's theory of gravitation, exposed in [9, 10], there are two kinds of gravitational fields, the ordinary gravitational field, due to the presence of masses, at rest, or in motion and other field called Heaviside field due to and acts only on moving masses. The Heaviside field is known in general relativity as Lense-Thirring effect or gravitomagnetism (The Heaviside field is the gravitational analogous of the magnetic field in the electromagnetic theory, its existence was proved employing the *Gravity Probe B* launched by NASA (See, for example, [11, 12]). It is a type of gravitational induction), interpreted as a distortion of space-time due to the motion of mass distributions, (see, for example [13, 14]). Here, we will present our second-order Jefimenko equations for gravitation and its solutions.

1 Introduction

In general relativity gravitational interaction is interpreted as deformation of space-time due to the presence and movement of masses. We can read in almost all books related to general relativity about the relationship existing between matter and space-time: "space-time tells matter how to move, matter

tells to space-time how to curve" (see, [15]). This idea arose from the conclusion of Einstein that the field variable for the gravitational field must be the metric tensor of the Riemann space-time $g_{\mu\nu}$, and that this quantity is determined by the distribution and motion of matter, this is the link between matter and geometry. General relativity theory is often mentioned by various authors as one of the most important theories developed in the last century. In words of the Nobel prize R. Feynman: "Einstein's gravitational theory, which is said to be the greatest single achievement of theoretical physics, resulted in beautiful relations connecting gravitational phenomena with the geometry of space; this is an exciting idea." [16]. Although this relationship between matter and geometry of space-time has been widely spread between the most of scientist, this was not the central result that Einstein wanted to highlight, this idea never was accepted by Einstein, instead of this, was the unification of inertia and gravity. In fact, the idea of the geometrization of gravity began with the work of Weyl. For a detailed discussion, see the paper, *Why Einstein did not believe that general relativity geometrizes gravity* [17].

To obtain the second-order Jefimenko equations, we will use Post-Newtonian approximation on the Einstein field equations. The same system of non-linear equations can be obtained from other approaches such as the system of equations obtained by Logunov.

The Jefimenko equations for gravitation were first obtained by Heaviside in [1], making use of Gibbs vector analysis, supposing the existence of a second gravitational field arising as a kind of gravitational induction. Years before Einstein wrote about this possibility in his not-so-well-known work *Gibt es eine gravitationwirkung die der elektromagnetischen induktionswirkung analog ist?* [18]. But also can be obtained from the approach developed by Arbab in [19] making use of Hamilton's quaternions, from the linearised field equations as were obtained by González Segura in [20]. Jefimenko has obtained this set of equations by postulating an analogy

^a e-mail: dperezcarlos@gmail.com (corresponding author)

between his retarded solutions for the electromagnetic field and solutions for the gravitational field.

We will compare the resulting system of equations with those quantities obtained by Jefimenko and we will establish their respective solutions as a limit. Also, we will see that the Jefimenko equations give us the Newtonian theory for the limit $v/c \rightarrow 0$, where c is the speed of propagation of plane wave solutions of the gravitational field in the absence of sources¹.

2 Second-order Jefimenko equations

Jefimenko equations for gravitation are given in [9, 10] by

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{k} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{k} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, \tag{4}$$

where \mathbf{g} is the ordinary gravitational field due to the presence of masses and that acts on masses, whether they are moving or not, \mathbf{k} is the Heaviside field (the field that is generated by the movement of masses and acts only on moving masses), ρ is the mass density, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ is the mass current density with \mathbf{v} the velocity of the mass, G is the universal constant of gravitation.

The analogy is not perfect, owing to that in electromagnetic theory there are two kinds of electric charges, in Jefimenko's theory of gravitation, there is only one kind of mass. Whereas in the first the magnetic field is right-handed, in gravitational theory is left-handed. In the former, there is a flux of electrons inside a conductor, while in the gravitation, the mass current is the movement of the matter as a whole.

We will derive non-linear expressions for the Jefimenko equations from the Einstein field equations:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \tag{5}$$

where $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ is the Einstein tensor which determines the geometry of the space-time, due to the presence of the source, G is the gravitational constant, $T_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor of matter. These equations can be written as

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \tag{6}$$

where $T = T^\mu_\mu$ is the trace of the tensor $T_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ is the Ricci tensor obtained from the contraction of the Riemann

tensor $R^\rho_{\mu\sigma\nu}$ for $\rho = \sigma$, that is,

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \tag{7}$$

and $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ are the Christoffel symbols, given in terms of the metric tensor of the Riemann space-time $g_{\mu\nu}$ as

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\epsilon}(g_{\epsilon\mu,\nu} + g_{\epsilon\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\epsilon}). \tag{8}$$

We will use the De Donder conditions

$$\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0, \tag{9}$$

which were first introduced by Fock in [22] and were considered as a privileged system of reference. He introduced these conditions when he was considering problems of the island type (also called isolated systems). Until there are not global Cartesian coordinates in Riemann space-time, the harmonic gauge conditions are valid on patches.

To solve Eqs. (6) and (9), it is necessary to construct the Riemannian manifold, which means to find the metric tensor of the Riemann space-time $g_{\mu\nu}(x)$.

The Post-Newtonian approximation is used in relatively weak gravitational fields and in processes where the speeds are small compared with c , the speed of propagation of plane wave solutions of the gravitational field in vacuum. For these reasons, Post-Newtonian formulation is enough to describe phenomena within our solar system and the experimental tests performed in it.

The parameter needed to build perturbation series is the quantity $\epsilon = v/c$, and since we will consider $c = 1$ for simplicity in the calculations (at last, we will reintroduce the factors with this quantity), we can see that the speeds of the bodies in our solar system v are no greater than ϵ . This means that temporal and spatial derivatives are related to the next relationship:

$$\partial_t \sim \epsilon \partial_i, \tag{10}$$

where $i = 1, 2, 3$. This relationship implies that all temporal variations are associated with the motion of matter.

As a first step, we will expand the metric tensor $g^{\mu\nu}$,

$$g^{00} = 1 + g^{(2)00} + g^{(4)00} + \dots, \tag{11}$$

$$g^{0j} = g^{(3)0j} + g^{(5)0j} + \dots, \tag{12}$$

$$g^{ij} = \eta^{ij} + g^{(2)ij} + g^{(4)ij} + \dots. \tag{13}$$

where η^{ij} is the spatial part of the Minkowski metric $\eta^{\mu\nu}$, and $g^{(l)\mu\nu}$ with $l = 2, 3, 4, \dots$ are terms of the order ϵ^l . If we consider the transformation $t \rightarrow -t$, the sign of ϵ must be changed, too, and for this reason Eqs. (11) and (13) contain only even powers of ϵ , and (12) only odd powers. Eq. (12)

¹ This speed is considered to be equal to the speed of propagation of light. There are indirect measurements in [21].

does not contain g^{0j} because in the Newtonian approximation g^{0j} cannot be lower than the second order in ϵ .

We can use Eqs. (11)–(13) to calculate $g_{\mu\nu}$ and its determinant $g = \det g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = 1 + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + \dots, \tag{14}$$

$$g_{0j} = g_{0j}^{(3)} + g_{0j}^{(5)} + \dots, \tag{15}$$

$$g_{ij} = \eta_{ij} + g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(4)} + \dots, \tag{16}$$

$$g = -1 - g_{00}^{(2)} - g_{11}^{(2)} - g_{22}^{(2)} - g_{33}^{(2)} - g_{00}^{(4)} - g_{11}^{(4)} - g_{22}^{(4)} - g_{33}^{(4)} + g_{00}^{(2)}(g_{11}^{(2)} + g_{22}^{(2)} + g_{33}^{(2)}) - g_{11}^{(2)}g_{22}^{(2)} - g_{11}^{(2)}g_{33}^{(2)} - g_{22}^{(2)}g_{33}^{(2)} + g_{12}^{(2)} + g_{13}^{(2)} + g_{23}^{(2)} + \dots. \tag{17}$$

If we introduce the quantities

$$z = g_{00}^{(2)} - g_{11}^{(2)} - g_{22}^{(2)} - g_{33}^{(2)}$$

and

$$z = g_{00}^{(4)} - g_{11}^{(4)} - g_{22}^{(4)} - g_{33}^{(4)} - g_{00}^{(2)}(g_{11}^{(2)} + g_{22}^{(2)} + g_{33}^{(2)}) + g_{11}^{(2)}g_{22}^{(2)} + g_{11}^{(2)}g_{33}^{(2)} + g_{22}^{(2)}g_{33}^{(2)} - g_{12}^{(2)} - g_{13}^{(2)} - g_{23}^{(2)},$$

then $g = \det g_{\mu\nu}$ is

$$g = -1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}. \tag{18}$$

Equation (9) in Galilean coordinates are

$$\frac{1}{2}g_{00,0} - \frac{1}{2}\eta^{ij}g_{ij,0} = -\eta^{ij}g_{0j,i}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}g_{00,i} + \frac{1}{2}\eta^{kl}g_{kl,i} = \eta^{kl}g_{ik,l}, \tag{20}$$

$$\left[g_{00}^{(2)} - g_{00}^{(4)} - \frac{1}{2}g_{00}^{(2)}z + \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{4}z^2 \right) \right]_{,0} = \left[g^{0i} + \frac{1}{2}g^{0i}z \right]_{,i} \tag{21}$$

$$\left[g^{ij} + \frac{1}{2}g^{ij}z + \frac{1}{2}\eta^{ij}\left(z - \frac{1}{4}z^2 \right) \right]_{,j} = \eta^{ij}g_{0j,0}. \tag{22}$$

The expansion of the second rank Ricci tensor written in Cartesian coordinates is

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ij}g_{00,ij} - \frac{1}{2}\eta^{ij}g_{00,ij}^{(4)} - \frac{1}{2}g_{00,00}^{(2)} + \frac{1}{2}\eta^{ki}\eta^{lj}g_{kl}g_{00,ij} + \frac{1}{2}\eta^{ij}g_{00,i}g_{00,j} + \dots, \tag{23}$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2}\eta^{ik}g_{0j,ik} + \dots, \tag{24}$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\eta^{kl}g_{ij,kl} + \dots, \tag{25}$$

where we have used the harmonic gauge conditions (9) to ignore the next terms of Eqs. (24) and (25).

Also, we will expand the energy-momentum tensor of matter, considering it as a perfect fluid, namely,

$$T^{\mu\nu} = [p + \rho(1 + \Pi)]v^\nu v^\mu - pg^{\mu\nu}, \tag{26}$$

where p is the specific isotropic pressure, ρ is the ideal liquid's density, Π is the specific self energy, also called internal energy per particle and is the general name for all energies with the except for the rest mass, and v^μ is the four-velocity. The definition of Π is given in *A first course of general relativity* by B. Schutz in [23]

$$\Pi = \frac{\rho}{n} - m, \Rightarrow \rho = n(m + \Pi),$$

where n is the number density, the number of particles per unit volume in a momentarily co-moving reference frame.

Tensor (26) must satisfy covariant conservation law given by

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\lambda\mu} = 0. \tag{27}$$

The density of the perfect fluid is invariant and must satisfy the covariant continuity equation, that is,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\rho v^\nu)_{,\nu} = 0. \tag{28}$$

We will expand $T^{\mu\nu}$ in the small parameter ϵ

$$T^{00} = T^{00(0)} + T^{00(2)} + T^{00(4)} + \dots, \tag{29}$$

$$T^{0j} = T^{0j(3)} + T^{0j(5)} + \dots, \tag{30}$$

$$T^{ij} = \eta^{ij} + T^{ij(2)} + T^{ij(4)} + \dots, \tag{31}$$

If gravitational forces are ignored, that is, in Newtonian approximation, the components temporal and spacial of v^μ are

$$v^0 = 1 + O(\epsilon^2) \text{ and } v^i = v^i(1 + O(\epsilon^2)). \tag{32}$$

If we substitute Eqs. (29)–(32) in Eq. (26), we find

$$T^{00(0)} = \rho, \tag{33}$$

$$T^{0j(1)} = \rho v^j, \tag{34}$$

$$T^{ij(0)} = 0. \tag{35}$$

The expanded Einstein field equations (6) are

$$\eta^{ij}g_{00,ij}^{(2)} = -8\pi GT^{00(0)}, \tag{36}$$

$$\eta^{ij}g_{00,ij}^{(4)} + g_{00,00}^{(2)} - \eta^{ki}\eta^{lj}g_{kl}g_{00,ij}^{(2)} - \eta^{ij}g_{00,i}g_{00,j}^{(2)} = -8\pi G(T^{00(2)} + 2g_{00}^{(2)}T^{00(0)} - \eta_{ij}T^{ij(2)}), \tag{37}$$

$$\eta^{jl} g_{0i,jl}^{(3)} = -16\pi G \eta_{ij} T^{0j}, \tag{38}$$

$$\eta^{kl} g_{ij,kl}^{(2)} = 8\pi G \eta_{ij} T^{00}. \tag{39}$$

This set of equations allows us to write the tensor of the Riemann space-time in Newtonian and post-Newtonian approximations.

If we denote ϕ as the Newtonian potential, we can suppose that

$$g_{00}^{(2)} = -2\phi, \tag{40}$$

then Eq. (36) can be written as

$$\Delta\phi = -4\pi G T^{00}. \tag{41}$$

which is the Poisson equation and $\Delta = \nabla^2$ is the Laplacian operator. We consider ϕ null at infinity, therefore, our solution is,

$$\phi = G \int \frac{T^{00}(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x', \tag{42}$$

where $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ is the distance between the source point and observation point (field point).

From Eqs. (38) and (39), we get

$$g_{0i}^{(3)} = -4G \eta_{ij} \int \frac{T^{0j}(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x', \tag{43}$$

$$g_{ij}^{(2)} = 2G \eta_{ij} \int \frac{T^{00}(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' = 2\eta_{ij}\phi. \tag{44}$$

If we substitute Eqs. (40), (41) and (44) in Eq. (37), we have

$$\Delta \left(g_{00}^{(4)} - 2\phi^2 \right) = -2\phi_{,00} + 8\pi G \left(T^{00} - \eta_{ij} T^{ij} \right). \tag{45}$$

Also, $g_{00}^{(4)}$ must tend to zero at infinity, therefore from Eq. (45) we obtain

$$g_{00}^{(4)} = 2\phi^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\phi(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' - 2G \int \frac{(T^{00} - \eta_{ij} T^{ij})}{r} d^3x'. \tag{46}$$

Eqs. (19) and (44) can be related by

$$\phi_{,0} = \frac{1}{4} \eta^{ij} g_{0j,i}^{(3)}. \tag{47}$$

Substituting the expanded components of the energy-momentum tensor of matter given by Eqs. (33) and (34) in Eqs. (42) and (43), we get

$$g_{00}^{(2)} = -2\phi, \quad g_{0j}^{(3)} = 4\eta_{ij} q^i, \quad g_{ij}^{(2)} = 2\eta_{ij}\phi, \tag{48}$$

where

$$\phi = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' \tag{49}$$

and

$$q^i = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t) v^i}{r} d^3x'. \tag{50}$$

In the lowest order of approximation, the metric coefficients of the Riemann space-time are

$$g_{00} = 1 - 2\phi, \quad g_{0j} = 4\eta_{ij} q^i, \quad g_{ij} = \eta_{ij} (1 + 2\phi). \tag{51}$$

We can use our last results in the covariant conservation law (27) and the covariant continuity equation (28) to find the next approximation for the components of the energy-momentum tensor of matter. We need for this task the Christoffel symbols $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, $\sqrt{-g}$ and u^0 in the zero-order approximation,

$$\sqrt{-g} = 1 + 2\phi, \tag{52}$$

$$v^0 = 1 + \phi - \frac{1}{2} v_j v^j, \tag{53}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= -\phi_{,0}, \quad \Gamma^0_{0i} = -\phi_{,i}, \quad \Gamma^i_{00} = \eta^{ij} \phi_{,j}, \\ \Gamma^0_{ij} &= -\eta_{ij} \phi_{,0} + 2(\eta_{jk} q^k_{,i} + \eta_{ik} q^k_{,j}), \\ \Gamma^i_{0j} &= 2q^i_{,j} + \delta^i_j \phi_{,0} - 2\eta^{ik} \eta_{jl} q^l_{,k}, \\ \Gamma^i_{jk} &= \delta^i_k \phi_{,j} + \delta^i_j \phi_{,k} - \eta^{il} \eta_{jk} \phi_{,l}. \end{aligned} \tag{54}$$

Thus, covariant conservation law stays as

$$T^{00}_{,0} + T^{0i}_{,i} - \rho \phi_{,0} - 2\rho v^i \phi_{,i} = O(\epsilon^5), \tag{55}$$

$$T^{ij}_{,j} + (\rho v^i)_{,0} + \eta^{ij} \rho \phi_{,j} = O(\epsilon^4), \tag{56}$$

the covariant continuity equation will be

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\rho + 3\phi\rho - \frac{1}{2} \rho v_i v^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho v^i + 3\phi\rho v^i + \frac{1}{2} \rho v^i v^2 \right) \right\} = O(\epsilon^4) \tag{57}$$

and the equation of motion of an ideal liquid is given by

$$\hat{\rho} (u^i_{,0} + v^j v^i_{,j}) = \eta^{ij} (-\hat{\rho} \phi_{,j} + p_{,j}), \tag{58}$$

$$\hat{\rho} (\Pi_{,0} + v^j \Pi_{,j}) = -p v^i_{,i}, \tag{59}$$

where $\hat{\rho} = \sqrt{-g} \rho u^0$, which is the conserved mass density, which can be written as follows in our approximation

$$\hat{\rho} = \rho \left(1 + 3\phi - \frac{1}{2} v_i v^i \right), \tag{60}$$

therefore we can replace $\hat{\rho}$ by ρ which is invariant density.

So, we have the solutions for energy-momentum tensor of matter in the required expansion expressed as

$$T^{00} = \rho(2\phi + \Pi - v_i v^i),$$

$$\begin{aligned} T^{0j} &= \rho v^j (2\phi + \Pi - v_i v^i) + p v^j, \\ T^{ij} &= \rho v^i v^j - \eta^{ij} p. \end{aligned} \tag{61}$$

Now, we can obtain $g_{00}^{(4)}$ given by Eq. (46)

$$\begin{aligned} g_{00}^{(4)} &= 2\phi^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\phi(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' \\ &\quad - 2G \int \frac{\rho(2\phi + \Pi - 2v_i v^i) + 3p}{r} d^3x' \\ &= 2\phi^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\phi(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' \\ &\quad - 4G \int \frac{\rho\phi}{r} d^3x' - 2G \int \frac{\rho\Pi}{r} d^3x' \\ &\quad + 4G \int \frac{\rho v_i v^i}{r} d^3x' - 6G \int \frac{p}{r} d^3x' \\ &= 2\phi^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\phi(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x' \\ &\quad - 4\Phi_1 - 2\Phi_2 - 4\Phi_3 - 6\Phi_4, \end{aligned} \tag{62}$$

where

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= G \int \frac{\rho\phi}{r} d^3x', \quad \Phi_2 = G \int \frac{\rho\Pi}{r} d^3x', \\ \Phi_3 &= -G \int \frac{\rho v_i v^i}{r} d^3x', \quad \Phi_4 = G \int \frac{p}{r} d^3x', \end{aligned}$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 and Φ_4 are the generalized gravitational potentials. Now we have obtained the metric coefficients of $g_{\mu\nu}$ of the metric of the Riemann space-time, that is

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2\phi}{c^2} + \frac{1}{c^4} \left\{ \phi^2 - G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\mathbf{x}', t) r d^3x' - 4\Phi_1 \right. \\ &\quad \left. - 2\Phi_2 - 4\Phi_3 - 6\Phi_4 \right\} + O(\epsilon^6), \\ g_{0j} &= \frac{4}{c^3} \eta_{ij} q^i + O(\epsilon^5), \\ g_{ij} &= \frac{1}{c^2} \eta_{ij} (1 + 2\phi) + O(\epsilon^4), \end{aligned} \tag{63}$$

where we have explicitly written the dependence of inverse factors on c , and we have used the identity

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\phi}{r} d^3x' = -G \int \rho(\mathbf{x}', t) r d^3x' \tag{64}$$

demonstrated in [24].

We can write our system of Eqs. (36)–(39) as follows

$$\Delta\phi = -4\pi G\rho, \tag{65}$$

$$\Delta\mathbf{q} = -4\pi G\rho\mathbf{v}, \tag{66}$$

$$\Delta\Psi = -2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 8\pi G\rho \left(2\phi + \Pi + 2v^2 + 3\frac{p}{\rho} \right), \tag{67}$$

where $\Psi = \psi - 2\phi^2$ and $\psi = g_{00}^{(4)}$.

$$\eta_{ij} \Delta\phi = -4\eta_{ij} \pi G\rho. \tag{68}$$

Condition (47) is written as

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + 3\mathbf{q} = 0. \tag{69}$$

From the system (65)–(69), we have a solution for ϕ , the ordinary Newtonian scalar potential given by Eq. (49)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{r} d^3x'.$$

The Heaviside vector potential whose components are given by Eq. (50) is written in vector form as follows

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)\mathbf{v}}{r} d^3x'. \tag{70}$$

We define the potentials Ξ and χ to write a simplified solution to Eq. (67)

$$\Xi = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t) \left(2\phi + \Pi + 2v^2 + \frac{3p}{\rho} \right)}{r} d^3x', \tag{71}$$

and

$$\chi = G \int \rho(\mathbf{x}', t) r d^3x', \tag{72}$$

therefore the solution to Eq. (67) is

$$\Psi = -2\Xi - \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}. \tag{73}$$

We define the total contribution of the scalar and vector potentials ϕ_t and \mathbf{q}_t as

$$\phi_t = -\frac{1}{2}(-1 + g_{00}) = \overset{(0)}{\phi} + \left(\overset{(2)}{\phi^2} - \overset{(2)}{\Theta} \right) + O(\epsilon^4), \tag{74}$$

where, for convenience, we have introduced $\Theta = \frac{1}{2}\Psi$ and

$$\mathbf{q}_t = \frac{1}{4} \overset{(2)}{g}_{0j} + O(\epsilon^4) = \overset{(2)}{q}_j + O(\epsilon^4). \tag{75}$$

In both equations, we have reduced the order of the potentials because we have multiplied Eq. (74) by c^2 and Eq. (75) by c in the given definitions. Then, we can define the ordinary gravitational vector \mathbf{g} and the Heaviside field vector \mathbf{k} as functions of the scalar and vector potentials ϕ_t and \mathbf{q}_t

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi_t - \frac{\partial\mathbf{q}_t}{\partial t} = -\nabla\overset{(0)}{\phi} + \nabla\overset{(2)}{\Theta} - \nabla\left(\overset{(2)}{\phi^2}\right) - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla\overset{(2)}{\phi} \tag{76}$$

and

$$\mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{q}_t. \tag{77}$$

So, in this way, we can obtain the second-order Maxwell-like formulation of the gravitational field equations, once we have reintroduced the factors c^{-2} ,

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \left\{ 1 - \frac{2}{c^2} \left(2\phi + \Pi + 2v^2 + 3\frac{p}{\rho} \right) \right\}$$

$$-\frac{4\pi G}{3c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + O(\epsilon^4), \quad (78)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{k} = O(\epsilon^4), \quad (79)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}, \quad (80)$$

$$\nabla \times \mathbf{k} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + O(\epsilon^4). \quad (81)$$

System of Eqs. (78)–(81) are our second order Jefimenko equations for gravitation. We should note that although the potential Heaviside vector in Eq. (75) is of the order ϵ^2 , this factor disappears in Eq. (80) because when we calculate the curl of \mathbf{g} and the time derivative of \mathbf{k} and equalise both amounts, after using vector identities from [10], we find that Eq. (80) does not contain terms of orders greater or equal than ϵ^2 .

The analogous of the Lorentz force is given if we use $\kappa = 1 + 2\phi$, the coefficient of the spatial part of the post-Newtonian metric and u^0 from Eq. (53) in the geodesic equation,

$$\frac{d}{dt}(\kappa v^0 \mathbf{v}) = v^0(\mathbf{g} + \mathbf{v} \times \mathbf{k} + v^2 \nabla \kappa) + O(\epsilon^4), \quad (82)$$

after substituting κ and u^0 we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(1 + 3\phi - \frac{1}{2}v^2 \right) \mathbf{v} \\ = \left(1 + \phi - \frac{1}{2}v^2 \right) (\mathbf{g} + \mathbf{v} \times \mathbf{k}) + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (83)$$

Also, we can establish the zero-order of approximation, which gives us the Newtonian theory, formulated as a force field theory in the following way

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho \quad (84)$$

and

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0. \quad (85)$$

Equation (84) leads us to the Laplace equation for the scalar potential ϕ and Eq. (85) indicates us that the ordinary gravitational field is conservative.

3 Conclusions

Jefimenko obtained his analogous of the Maxwell equations for gravitation, by postulating an analogy between his retarded solutions for electromagnetic field and retarded solutions for the gravitational field, and assuming the existence of a second field analogous to the magnetic field in electrodynamics. This set of solutions given in [9, 10] led to Jefimenko equations analogous to Maxwell equations (1)–(4).

From the set of second-order Jefimenko equations (78), (79), we can establish that the system obtained by Jefimenko

is correct because the limit in the first order of our non-linear gravitational equations gives us the system obtained originally by Jefimenko for the fields \mathbf{g} and \mathbf{k} . The idea of Jefimenko related to establishing the electromagnetic analogy of the gravitational field is true, and it was worked by various authors [19, 20] and by ourselves, in [25–27], but we want to cite again the first time when this analogy was postulated, we refer to the work of Oliver Heaviside published more than a century ago in [1], work eclipsed by the appearance of the general relativity theory in 1915 in his paper titled *Feldgleichungen der Gravitation* [5].

The set of second-order gravitational equations (78), (79) can be obtained also from the Logunov's equations gotten in the relativistic theory of gravitation, but in this theory gravitation is considered as a tensor field in the Minkowski space-time, which means that Logunov considered the metric of the Riemann space-time as the contribution of a gravitational tensor field with a Minkowski background. Whereas in general relativity the metric of the Riemann space-time for weak gravitational fields is considered as the sum of the Minkowski metric plus a perturbation. In Logunov's theory is considered the effective Riemann space-time as the contribution of the gravitational field tensor $\Phi^{\mu\nu}$ which depends on the coordinates of Minkowski space-time, whereas in general relativity the metric tensor of Riemann space-time $g_{\mu\nu}$ is the field itself. Both theories give us the same predictions for weak gravitational fields, which means that using Post-Newtonian approximation we obtain the same experimental results using the first or the last. We have already seen that contrary to the general belief Einstein saw as the most important achievement of his general relativity theory the unification of gravity and inertia instead of geometrizing gravity. On the other hand, Logunov's theory makes a clear distinction between gravity and inertia.

We have found that the limit of the non-linear expressions (78)–(81) called second-order Jefimenko equations are the Jefimenko equations given by (1)–(4) as a first order of approximation. Whereas in regions where matter can be considered at rest (or in uniform movement) in the respective inertial reference system, this system leads us to the zero-order of approximation, called Newtonian theory and given by Eqs. (84), (85).

Acknowledgements We would like to thanks all people working in CONACyT, for the economical support given to the doctoral student M. D. David A. Pérez Carlos. Also, M. D. David A. Pérez Carlos wants to give acknowledgement to Olga Aleksandrovna Veselkova for her unconditional support, for the advice she has given him to be better academically and as a person.

Data Availability Statement This manuscript has no associated data or the data will not be deposited. [Authors' comment: Data sharing not applicable to this article as no datasets were generated or analysed during the current study.]

Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.
Funded by SCOAP³.

References

- O. Heaviside, *Electr.* **31**, 5125–5134 (1893)
- W. Pauli, *Theory of relativity* (Dover publications Inc, New York, 1981)
- S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity* (Wiley and sons, Inc., London, 1972)
- C.W. Misner, K.S. Thorn, J.A. Wheeler, *Gravitation* (Princeton University Press, Princeton, 2017)
- A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, (1915)
- A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili, *Found. Phys.* **16**, 1 (1986)
- A.A. Logunov, YuM Loskutov, M.A. Mestvirishvili, *Prog. Theor. Phys.* **80**, 6 (1988)
- A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili, *The relativistic theory of gravitation* (Mir publishers, Moscow, 1989)
- O. Jefimenko, *Causality, electromagnetic induction and gravitation: A different approach to the theory of electromagnetic and gravitational fields*, 2nd edn. (Princeton University Press, Princeton, 2000)
- O. Jefimenko, *Gravitation and Cogravitation: Developing Newton's Theory of Gravitation to its Physical and Mathematical Conclusion*, 1st edn. (Electret Scientific Star City, Waynesburg, 2006)
- B. Vető, *Eur. J. Phys.* **31**(5), 1123 (2010)
- B. Vető, *Eur. J. Phys.* **32**(5), 11323 (2011)
- I. Ciufolini, E.C. Pavlis, *Nature* **431**(7011), 958–960 (2004)
- L. Iorio, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **79**(3), 201–230 (2001)
- J. A. Wheeler *Geons, black holes, and quantum foam: a life in physics*, (Norton and Company, 2000)
- R.P. Feynman, F. Moringo, *W* (Addison-Wesley Publishing Company, London, G. Wagner. Feynman lectures on gravitation, 1995)
- D. Lehmkühl, *Stud. Hist. Philos. Mod. Phys.* **46**, 316–326 (2014)
- A. Einstein, *Vierteljahrsschrift für gerichtliche medizin* **44**, 37–40 (1912)
- A.I. Arbab, *Astrophys. Space Sci.* **330**, 61–68 (2010)
- W. S. González, *Gravitoelectromagnetismo y principio de Mach* (eWT Ediciones, Cádiz, 2013)
- E.B. Fomalont, S.M. Kopeikin, *Astrophys. J.* **598**(1), 704–711 (2003)
- V.A. Fock, *The theory of space, time and gravitation*, 2nd edn. (Pergamon press LTD, Oxford, 1964)
- B. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009)
- V.S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics* (MIR publishers, Moscow, 1984)
- D. Pérez Carlos, Augusto Espinoza, Andrew Chubykalo, *O. A. J. Phys.* **2** (1), 1–12, (2018)
- A. Espinoza, A Chubykalo, D. Pérez Carlos, *J. Mod. Phys.*, **7**, 1617–1626, (2016)
- A. Chubykalo, A. Espinoza, D. Pérez Carlos, *Conceptual Content of the Generalized Theory of Gravitation of Jefimenko. J. Mod. Phys.*, **9**, 1522–1544, (2018)



Universidad Autónoma de Zacatecas "Francisco García Salinas"

Calzada Solidaridad Esquina con Paseo la Bufa S/N C.P. 98060,
Zacatecas, Zac. México

Tel y Fax (492)9241314 ó (492)39407 ext 2201 [http //planck.reduaz.mx](http://planck.reduaz.mx)

Dr. Julio Cesar López Domínguez
Coordinador del CADO (Física)
PRESENTE

Estimado Dr. López:

Por este conducto y en mi carácter de asesor de tesis me permito notificarle que luego de revisar exhaustivamente la Tesis de Doctorado titulada "**Ondas Gravitacionales en la Teoría de la Gravitación de Jefimenko**" del

M. en C. David Antonio Pérez Carlos

manifiesto que este trabajo cumple ampliamente con los requisitos de calidad académica establecidos por el Programa de Doctorado en Ciencias Básicas (Física) de la Unidad Académica de Física de la Universidad Autónoma de Zacatecas, para la obtención del grado de Doctor en Ciencias Básicas (Orientación en Física).

Sin más por el momento y esperando que la presente sirva para generar los trámites administrativos conducentes, reciba un cordial y afectuoso saludo.

ATENTAMENTE

Zacatecas, Zac. a 5 de Noviembre de 2020.

Dr. Alejandro Birgilio Gutiérrez Rodríguez
Asesor de Tesis

DR. JULIO CÉSAR LÓPEZ DOMÍNGUEZ
COORDINADOR DEL CADO
UNIDAD ACADÉMICA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

P R E S E N T E

Por este medio, en mi calidad de director de tesis, hago de su conocimiento que he revisado minuciosamente el trabajo de tesis del **M. en C. David Antonio Pérez Carlos** titulado “**Ondas gravitacionales en la teoría de la gravitación de Jefimenko**”.

Estimo que el contenido teórico, diseño metodológico, ortografía, redacción y referencias bibliográficas de esta tesis resultan ser adecuados. Con base a lo cual considero que dicho trabajo satisface los elementos necesarios y suficientes para ser presentado como tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias Básicas.

Esperando que la presente sirva para generar los trámites administrativos conducentes, tengo a bien despedirme de usted, agradeciéndole la atención prestada y reiterándole mis más sinceros parabienes.

Heroica Cd. de Zacatecas, Zac. a 5 de noviembre del 2020

ATENTAMENTE



Dr. Amado Augusto Espinoza Garrido
Unidad Académica de Ciencia y Tecnología de la Luz y la Materia
Universidad Autónoma de Zacatecas.