UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE

MATEMÁTICAS

Maestría en Matemática Educativa

SECUENCIA DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA EN EL NIVEL BACHILLERATO

Proyecto de Desarrollo Profesional

para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con

Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

Angel Fuentes Martínez

Asesoras:

M. en M. Elvira Borjón Robles

MATI. Mónica del Rocío Torres Ibarra

M en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Zacatecas, Zac., diciembre de 2020

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

AGRADEZCO AL CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CONACYT) POR SU APOYO Y PATROCINIO EN LA REALIZACIÓN DE ESTE PROYECTO DE DESARROLLO PROFESIONAL.

BECARIO Nº 757014

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, 7 de diciembre de 2020, el (la) que suscribe C. Angel Fuentes Martínez, alumno del Programa de *Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato* con número de matrícula 23404313; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado intitulado SECUENCIA DE ENSEÑANZA–APRENDIZAJE DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA EN EL NIVEL BACHILLERATO bajo la dirección de la M.M. Elvira Borjón Robles, M.T.I. Mónica del Rocío Torres Ibarra y M en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Angel Fuentes Mtz.

Angel Fuentes Martínez

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "SECUENCIA DE ENSEÑANZA–APRENDIZAJE DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA EN EL NIVEL BACHILLERATO" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. Angel Fuentes Martínez, egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; cumple con los requisitos de calidad académica para ser sometido a su revisión. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 27 de octubre de 2020

M. en M. Elvira Borjón Robles

M.T.I. Mónica del Rocío Torres Ibarra

Nancy Janeth Calvo Gu:

M en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Resumen

Un porcentaje considerable de los alumnos de bachillerato suelen presentar problemas notables cuando se les pide que resuelvan ecuaciones de primer grado. Algunos problemas más comunes son: se les dificulta el proceso de aislar la incógnita en una ecuación (De Moreno y de Castellanes (1997); no saben cuál es el orden que se debe seguir a la hora de transponer los términos (Rojano 2010), operan de manera incorrecta, desconocen las propiedades de la igualdad y de los números reales, no usan correctamente los paréntesis e ignoran los significados del signo igual (Ruano, Socas y Palarea, 2008).

Generalmente, las estrategias de solución que utilizan los aprendices provienen de un razonamiento mecánico y repetitivo que consiste en mencionar frases como: "lo que está sumando pasa restando" o "lo que está dividiendo pasa multiplicando", derivadas principalmente del discurso empleado por el profesor, pero sin llegar a comprender la fundamentación de estas técnicas.

El objetivo de esta investigación es diseñar y validar una secuencia didáctica que atienda el proceso de comprensión del tema "ecuaciones lineales con una incógnita". Para lograr este objetivo se utilizó como referente teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como metodología. A partir de estas, se realizó un análisis preliminar con 4 enfoques, mismo que dio como resultado la necesidad de diseñar una secuencia de enseñanza conformada por 3 actividades que se llevaron al aula, para posteriormente analizar las producciones de los estudiantes.

Derivado de la aplicación de la secuencia, se logró que los alumnos comprendieran el proceso de resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita; se utilizó simultáneamente el material didáctico y el lenguaje simbólico para evitar que el alumno se quedara anclado en la analogía de la balanza; se obtuvo un importante avance en el aprendizaje de los alumnos, debido a que 17 respondieron correctamente la ecuación en la evaluación final, contrastando con los dos alumnos que pudieron resolver la ecuación planteada durante la prueba diagnóstica.

Esta investigación favorece la mejora el desempeño docente y contribuye con la labor de la Matemática Educativa.

Abstract

A significant percentage of high school students tend to have notable problems when asked to solve first grade equations. Some more common problems are: they find it difficult to isolate the unknown in an equation (De Moreno and de Castellanes (1997); they do not know what is the order to be followed when transposing the terms (Rojano 2010), They operate incorrectly, do not know the properties of equality and real numbers, do not use parentheses correctly and ignore the meanings of the equal sign (Ruano, Socas and Palarea, 2008).

Generally, the solution strategies used by learners come from a mechanical and repetitive reasoning that consists of mentioning phrases such as: “what is adding happens subtracting” or “what is dividing happens multiplying”, derived mainly from the speech used by the teacher, but without understanding the foundation of these techniques.

The objective of this research is to design and validate a didactic sequence that addresses the process of understanding the topic "linear equations with one unknown." To achieve this objective, the Theory of Didactic Situations (Brousseau, 1986) and Didactic Engineering (Artigue, 1995) were used as a methodology. From these, a preliminary analysis was carried out with 4 approaches, which resulted in the need to design a teaching sequence made up of 3 activities that were taken to the classroom, to later analyze the students' productions.

Derived from the application of the sequence, it was possible for the students to understand the process of solving a first degree equation with one unknown; didactic material and symbolic language were used simultaneously to prevent the student from remaining anchored in the analogy of the balance; An important advance was obtained in the students' learning, because 17 answered the equation correctly in the final evaluation, contrasting with the two students who were able to solve the equation proposed during the diagnostic test.

This research favors the improvement of teaching performance and contributes to the work of Educational Mathematics.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 MOTIVACIÓN

La inquietud de mi investigación surge de una reflexión que hice de mi práctica como docente. Durante más de cuatro años he estado impartiendo clases de Física para alumnos de tercero y cuarto semestre del nivel bachillerato. Durante este tiempo he podido observar que ellos tienen dificultades para despejar fórmulas, inclusive los más destacados tienen deficiencias en este tipo de procesos. Pude darme cuenta de esto debido a que entrené a los alumnos que estaban seleccionados para un concurso de conocimientos académicos (a nivel estatal) organizado por mi subsistema, el Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ).

En el ciclo escolar 2018-2019 tuve la oportunidad de impartir la asignatura de Matemáticas I. Advertí que los alumnos tenían dificultades con el manejo del Álgebra Elemental, en específico, con la solución de ecuaciones lineales. Les resulta complejo, por ejemplo, el entendimiento del método de transposición de términos para aislar la incógnita y encontrar la solución de una ecuación lineal. Generalmente, las estrategias de solución que utilizan mis alumnos provienen de un razonamiento mecánico y repetitivo que consiste en mencionar frases como: “lo que está sumando pasa restando” o “lo que está dividiendo pasa multiplicando”, derivadas principalmente del discurso empleado por el profesor, pero sin llegar a comprender estas técnicas. En ese sentido, los alumnos carecen de fundamentos para responder por qué se llevan a cabo estos tratamientos sobre las ecuaciones. Los educandos desconocen las propiedades que se involucran en la solución de una ecuación lineal.

De tal modo que, si atiendo este problema con mis alumnos desde primer semestre, se favorecerá que ellos lleguen con mejores prerrequisitos para afrontar los dos cursos de Física que corresponden a su segundo año como alumnos de nivel medio superior. Éste es solamente un ejemplo, pero, es bien sabido que la resolución de ecuaciones constituye una base imprescindible para el aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos.

Por otra parte, el álgebra tiene diversas aplicaciones en otros contextos. En muchas áreas del conocimiento se presentan problemas tanto académicos como de la vida cotidiana que requieren plantear y resolver una ecuación. Éste es otro motivo para llevar a cabo este proyecto de Desarrollo Profesional. Cuando mis alumnos comprendan el tema de las ecuaciones lineales, ellos podrán aplicarlo a otras áreas del conocimiento para resolver problemas de forma creativa en su vida cotidiana.

Así también, llevando a cabo este trabajo, conseguiré incrementar mi conocimiento de la práctica. Lo cual representa una gran oportunidad para mejorar mi desempeño como docente; y contribuir de manera positiva en la educación que oferta el plantel en el que estoy laborando. Si yo logro mejorar mis lecciones, las generaciones de jóvenes que eduque de aquí en adelante se verán beneficiadas.

Creo que es una obligación para mí, como docente, implementar estrategias nuevas que permitan a mis alumnos alcanzar aprendizajes significativos. Es importante intentar, aventurarme, correr riesgos, sabiendo que estos son bien intencionados. Pienso que es pertinente involucrarse en las problemáticas que enfrentan los jóvenes al estudiar álgebra, es decir, no solo identificar el problema sino ser parte de la solución. Quiero quedarme con la satisfacción de que intenté hacer algo valioso por mis alumnos.

1.2 ANTECEDENTES

En este apartado describo analíticamente las contribuciones científicas relacionadas con mi investigación. Esto con la finalidad de dar una perspectiva más amplia acerca de mi objeto de estudio. Los documentos propuestos por De Moreno y De Castellanos (1997), Hernández y Andonegui (2003), Martínez, Rincón y Domínguez (2011), Rojano (2010), López, Illanes y Domínguez (2013), Correa y Pulido (2013), López (2015) y Paz (2017) sirven de precedente para mi trabajo.

1.2.1 Propuestas curriculares para la enseñanza de las ecuaciones lineales

En este apartado describo las secuencias didácticas encontradas en la literatura existente relativas al estudio de las ecuaciones lineales. Se toman en cuenta los intentos de algunos investigadores por hacer más comprensible el tema de las ecuaciones lineales. Aquí se detallan las actividades que han propuesto los autores para favorecer el aprendizaje del tópico. Estos referentes servirán de base para tomar el estado del arte con relación a mi proyecto.

De Moreno y De Castellanos (1997) detectaron que los aprendices del álgebra presentan problemas al despejar las incógnitas en ecuaciones lineales. Por esta razón, se plantearon como objetivo presentar el tema “Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita” a través de una secuencia de enseñanza. La secuencia consiste en:

a) Partir del concepto de igualdad valiéndose de balanzas en equilibrio.

b) Luego se usan representaciones como $3(\ )+6=12$ para incorporar la incógnita. El valor a descubrir se calcula primero por ensayo y error y luego por transposición de términos.

c) Después, se pasa al manejo simbólico, presentándose la necesidad de identificar las operaciones que intervienen en el despeje y su orden de ejecución.

Los resultados de esta investigación muestran que en general, se consiguió desarrollar la habilidad para despejar la incógnita en las ecuaciones. No obstante, vale la pena comentar que los alumnos incurrieron en los siguientes errores:

- *Errores que se originan en la transición conceptual de la aritmética al álgebra:* cambio del signo de un miembro de la ecuación sin tener en cuenta el otro, cambio del signo a términos que no se transponen, asignación del mismo valor a la incógnita que a su opuesto, cambio del signo al transponer un factor, transposición y conservación de factor.
- *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de conceptos previos:* hallan en forma incorrecta el resultado de sumas y restas o restas de enteros, hallan en forma incorrecta el signo del resultado de la división de dos enteros cuando éstos son de diferente signo, asignan como resultado de una división el mismo resultado que para su inverso multiplicativo, cuando el divisor es múltiplo del dividendo.

Por su parte, Hernández y Andonegui (2003) se ocuparon de la problemática que experimentan los estudiantes (6° grado de Educación Básica en Barquisimeto, Venezuela) en su tránsito de la aritmética al álgebra. Ellos diseñaron y aplicaron una estrategia instruccional para insertar el tema "ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita, en N". En esta estrategia se aprovecharon las potencialidades del conocimiento aritmético ya dominado por los alumnos.

La instrucción se impartió a 25 participantes de entre 11 y 12 años de edad y consistió de lo siguiente:

a) Construir identidades aritméticas.

b) Dar el concepto de incógnita y resolver ecuaciones mediante tanteo sistemático.

c) Resolver ecuaciones del tipo $Ax + C = Bx + D$ usando el método de la balanza.

d) Mostrar el procedimiento de despeje usando representaciones simbólicas.

e) Establecer el algoritmo para el despeje de la incógnita.

f) Consolidar el algoritmo para el despeje de la incógnita.

Emanado de la aplicación de la secuencia, los autores reportaron los siguientes hallazgos:

- La estrategia implementada resultó exitosa, ya que los jóvenes: reconocieron el carácter bidireccional del signo igual; comprenden la equivalencia de los miembros de una igualdad; identifican la incógnita en una ecuación; eligen correctamente las operaciones y sus inversas al operar; presentaron una transferencia del método de la balanza al método simbólico; superaron el obstáculo cognitivo del manejo del signo negativo en las ecuaciones.

- En algunos ejercicios propuestos (y sin ejercitación previa), se incluyó el signo "–", con la finalidad de crear premeditadamente un desequilibrio cognitivo; asombrosamente, el 48% de los escolares resolvieron correctamente las ecuaciones.
- Analizando la evaluación final, se concluyó que el porcentaje de respuestas correctas es más elevado si las ecuaciones solo presentan signos de adición. El 63.6% de los alumnos resolvieron la ecuación que contenía signos negativos.
- Las ecuaciones con cantidades relativamente grandes implicaron mayor dificultad para los participantes.

En la investigación realizada por Martínez, Rincón y Domínguez (2011) se atiende la problemática que presenta la comprensión del algoritmo de la solución de ecuaciones de primer grado y más aún para resolver problemas contextuales que implican el uso de las mismas. Esto aunado a la enseñanza tradicional centrada en el docente, en la que rara vez se utilizan recursos distintos al libro de texto. El propósito de este trabajo consiste en indagar de qué manera las estrategias constructivas como el juego y el aprendizaje cooperativo favorecen tanto al proceso de enseñanza aprendizaje como la motivación de los alumnos para aprender métodos de solución de ecuaciones lineales.

De acuerdo con lo anterior, se sometió a 27 estudiantes al siguiente tratamiento:

a) Primeramente, se aplicó un pre – test con la finalidad de examinar los conocimientos previos de los alumnos y homogenizar el grupo.

b) Después, se formaron equipos de dos o tres integrantes para desarrollar dos actividades lúdicas que son: la Balanza y el Memorama.

c) El juego de la Balanza se utilizó para revelar las propiedades de la igualdad para luego resolver ecuaciones de primer grado hasta lograr dominar el algoritmo.

d) Se recurrió al Memorama para reforzar la destreza de alumno al usar el algoritmo para resolver ecuaciones lineales.

e) Por último, se aplicó un post – test para medir los logros obtenidos gracias a la secuencia. Cabe mencionar que este examen se dividió en dos partes: una que se resolvió de manera individual y otra de manera colaborativa (por congruencia con la instrucción).

Los hallazgos derivados de la secuencia muestran que, con la ayuda del juego de la Balanza, los alumnos fueron entendiendo el concepto de igualdad y sus propiedades. Esto los condujo a resolver correctamente las ecuaciones, ya que su rapidez, destreza y asertividad aumentó. El Memorama reafirmó efectivamente los conocimientos que se habían abordado con anterioridad. Concerniente al trabajo colaborativo, los alumnos desarrollaron valores como el respeto, la solidaridad y la responsabilidad. Ellos argumentaron que los juegos de la Balanza y el Memorama les habían agradado. Así también, el pos – test reveló una mejora en la aplicación del algoritmo de resolución de ecuaciones de grado uno, pero una notable deficiencia a la hora de plantear la ecuación que modela un problema contextualizado.

Por otro lado, Rojano (2010) encontró que existen dificultades al usar el modelo de la balanza para la enseñanza de la resolución de ecuaciones lineales, en particular al usar números negativos. Con base en estas dificultades, ella investigó en qué medida el trabajo con un modelo virtual de la balanza ayuda a abstraer las acciones realizadas en la balanza al nivel de la sintaxis algebraica asociada a la resolución de ecuaciones de primer grado. Así también, estudió si los sujetos son capaces de generalizar el método de "hacer lo mismo en ambos lados de la igualdad" a modalidades de ecuación cada vez más complejas. El modelo virtual de la balanza basado en applets "difiere del modelo convencional (concreto o diagramático) en que es dinámico e interactivo y en que en su versión ampliada (balanza con poleas) incluye la representación y resolución de ecuaciones con sustracción de términos" (p. 7).

La secuencia fue ejecutada en un laboratorio de cómputo con ocho alumnos de secundaria (de entre 12 a 14 años de edad). El trabajo con la balanza virtual consistió en lo siguiente:

a) Familiarizarse con la balanza (pesar objetos).
b) Representación de ecuaciones en la balanza.
c) Resolución de ecuaciones eliminando objetos de los platillos. Se aplican los principios de manipulación que mantienen el equilibrio.
d) Resolución de ecuaciones eligiendo la operación inversa pertinente.
e) Resolución de ecuaciones sin la balanza, pero haciendo transformaciones algebraicas.

Esta investigación reporta que:

> Con el uso de la balanza virtual, los estudiantes logran extender el método de resolución, en el nivel sintáctico, a distintos tipos de ecuaciones, los cuales rebasan por su estructura más compleja a los tipos desplegados por el modelo. Lo anterior puede atribuírsele, por un lado, a la condición de sistema de signos dinámico, manipulable e interactivo en el modelo, en el cual el usuario aprecia visualmente el equilibrio o pérdida del mismo como resultado de sus acciones y de manera simultánea aprecia el efecto de las mismas en los elementos de la ecuación. Esto […] favorece la construcción de significado alrededor de la noción de igualdad algebraica y de las propiedades de las transformaciones que la preservan, así como la recuperación de dichos significados en el SMS [sistema matemático de signos] del álgebra. Por otro

> lado, tal extensión del método puede estar favorecida también por el hecho de que el circuito didáctico completo es recorrido en las dos versiones de la balanza virtual (simple y con poleas); es decir, el alumno regresa a la modelación concreta y vuelve a hacer el recorrido hacia el SMS algebraico cuando aborda el caso de ecuaciones con términos que se sustraen. La emergencia espontánea en algunos alumnos del método de transposición de términos, en este caso se explica como consecuencia del trabajo con el modelo con poleas, el cual funciona por medio de "arrastre" de pesos de un lado al otro y de los platillos superiores a los inferiores y viceversa (Rojano, 2010, p. 17-18).

Así también López, Illanes y Domínguez (2013) llevaron a cabo una investigación destinada a comprobar que es posible obtener mejoras en el aprendizaje de la solución de ecuaciones de primer grado de una variable mediante algoritmos, usando imágenes de una balanza, mediante el uso de software matemático. Este estudio se realizó en una escuela de nivel Medio Superior con un grupo experimental y otro de control. El grupo experimental utilizó una balanza virtual (software matemático), mientras que el otro grupo usó papel y lápiz para resolver ecuaciones de primer grado de una variable. Se aplicó a ambos grupos un cuestionario y se llevó un diario de campo para recolectar muestras cualitativas acerca de aspectos actitudinales. Asimismo, López, *et al.* (2013) hicieron un análisis estadístico cuantitativo a partir de la aplicación de un pre – test y un post – test. Derivado del análisis de los resultados se concluyó que los estudiantes que usaron el software matemático, lograron mejores aprendizajes de los algoritmos necesarios para dar solución a las ecuaciones lineales univariadas que los que no hicieron uso de él. En este sentido, las investigadoras responsables de este trabajo recomiendan que las escuelas que cuenten con salas de cómputo e internet, hagan uso del *applet* de la Balanza para abordar la solución de ecuaciones de grado uno con una variable.

En 2013, Correa y Pulido publicaron el artículo *Adaptación e implementación de recursos didácticos para la enseñanza de ecuaciones de primer y segundo grado a niños con discapacidad visual en un aula inclusiva.* Estas dos investigadoras atendieron la problemática relacionada con la falta de materiales didácticos adaptados para mejorar los aprendizajes en personas con discapacidad visual. Ellas decidieron construir una secuencia didáctica para la enseñanza–aprendizaje de las ecuaciones de primer y segundo grado. En dicha secuencia se destaca el uso de recursos didácticos manipulativos tangibles y gráfico textuales adaptados para niños videntes e invidentes.

Los profesores encargados de poner en práctica la secuencia mencionada en el párrafo anterior trabajaron dentro de un aula inclusiva que tenía a una estudiante con limitación visual. Durante la aplicación fue necesario dejar de lado las explicaciones en el tablero y reemplazarlas con diversos recursos didácticos como: *La Ficha tapada* y *La Balanza* para abordar el tema de las ecuaciones de primer grado. El material didáctico denominado *La Ficha tapada* "define una ecuación como una identidad aritmética que tiene un número oculto que puede ser expresado por letras o espacios en blanco" (Correa y Pulido, 2013, p.

570). Este material permite un acercamiento al concepto intuitivo de ecuación (de primer grado). En adición a esto, *La Balanza* admite el trabajo de una ecuación "como una situación de equilibrio en ecuaciones generales y tiene el propósito de autocorrección ya que, mediante su construcción física, el concepto de igualdad está en relación con el equilibrio de las masas en ambos lados de la expresión" (Correa y Pulido, 2013, p. 570).

Como resultado de la aplicación de la secuencia didáctica los alumnos lograron una correcta transposición, simplificación y despeje de ecuaciones gracias al material didáctico de *La Ficha tapada*. Además, con el recurso de *La Balanza* se observó que los estudiantes identificaron el significado de la igualdad como una manifestación de equilibrio; y que para resolver la igualdad era necesario hacer uso de propiedades. Cabe mencionar que fue un reto acomodar el lenguaje del docente a una forma de comunicación muy cuidadosa, clara y precisa para transmitir los conocimientos matemáticos a estudiantes tanto videntes como invidentes.

En otro tenor, el uso de la tecnología vuelve a aparecer en el trabajo de postgrado planteado por López (2015). Ella observó ciertas dificultades que existen en la enseñanza y comprensión de las ecuaciones lineales y su aplicabilidad en la resolución de problemas sencillos. Por este motivo, ella se dedicó a diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de las ecuaciones lineales a partir de procesos mediados por ambientes virtuales que contribuyan de manera significativa en el aprendizaje de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Ana de Castrillón.

Para el diseño, se utilizó como metodología el modelo de investigación – acción – educativa (I. A. E.). Con esta metodología se construyó la propuesta didáctica para generar la interacción del estudiantado con las ecuaciones lineales a partir de **situaciones contextuales mediadas por ambientes virtuales**. Luego de la aplicación de la secuencia, la autora comparó niveles de aprendizaje con los del ciclo anterior, los cuales arrojaron un aumento del 30%. Este porcentaje muestra que la propuesta desarrollada fue un verdadero acierto. Además de que la gran mayoría de los estudiantes manifestaron que las clases mediadas virtualmente eran mejores que las tradicionales.

Por su parte, Andrea Paz Soto presenta su investigación para obtener el grado de Magíster en Didáctica de la Matemática titulado: *Propuesta Didáctica para el trabajo de ecuaciones de primer grado en N, por estudiantes de entre 10 y 11 años* (Paz, 2017). La problemática que presenta la investigadora tiene relación con las dificultades y/o errores que exhiben algunos estudiantes cuando resuelven ecuaciones de primer grado. Ella comenta que los alumnos ocupan estrategias mecánicas desprovistas de sentido para determinar el valor de la incógnita. Para atender este dilema, Paz Soto pretende poner a disposición de docentes e investigadores una monografía. En dicha monografía se ha de presentar una propuesta didáctica para el trabajo de ecuaciones de Primer Grado en N. La propuesta debe componerse de tres planes de clase y el análisis a priori de cada uno de ellos.

Para cumplir con el objetivo se lleva a cabo un Análisis Didáctico como Metodología (Rico 2013, citado por Paz, 2017). Este análisis se articula en cuatro tipos:

- Análisis conceptual
- Análisis de contenido
- Análisis cognitivo
- Análisis de instrucción y de evaluación

Como resultado del trabajo, se cumple con la meta de presentar una monografía que se constituye como una innovación en Didáctica de la Matemática. Esto debido a que la secuencia didáctica contenida en la monografía surge a partir de la reflexión acerca de la acción docente y el comportamiento de los estudiantes.

1.2.2 Reflexión

La revisión de la literatura mencionada, sin duda, otorga un panorama acerca del tema de investigación. Dicha revisión abarca desde los métodos tradicionales con ilustraciones en papel, pasando por los juegos y la utilización de material didáctico, otras valiéndose de la tecnología, hasta la loable enseñanza en un aula inclusiva. Sin duda los aportes de los investigadores citados representan una luz para mi investigación. Es necesaria una delicada consideración de estos aportes.

Me parece pertinente la manera en que los investigadores utilizan diversas formas de mediar el aprendizaje de sus alumnos. Todas las secuencias coinciden en la utilización de la analogía de la balanza para enseñar a los alumnos a resolver ecuaciones lineales. Así también, concuerdan en la dificultad que representa para los alumnos trabajar con coeficientes negativos. Sin embargo, aunque la analogía de la balanza se usa en todas las propuestas, los casos en los que se pueden aplicar las secuencias didácticas y los procesos cognitivos que involucran son diferentes. Así también, cabe mencionar que en ocasiones el alumno tiene dificultad con el desapego del modelo de la balanza, lo que le impide pasar a un nivel simbólico. En adición a esto, dos de las investigaciones le dan mucho valor a la apropiación de un algoritmo, es decir, al conocimiento procedimental. En mi opinión, se debe priorizar lo conceptual sobre lo procedimental. De igual modo, esta información figura como un punto de partida para mi investigación.

Por lo ya mencionado en los párrafos anteriores, es necesario diseñar una secuencia de enseñanza que tome en cuenta el razonamiento de mis alumnos y los posibles errores y dificultades que ellos enfrentan. Es necesario que el discurso matemático y las actividades sean las adecuadas. De conformidad con esto, el enfoque de las estrategias debe ser la construcción del conocimiento de principios matemáticos, dejando de lado la mecanización de los procedimientos algorítmicos. Así pues, se espera que el alumno sea capaz de resolver los problemas de forma creativa y eficaz.

1.3 PROBLEMÁTICA

1.3.1 Planteamiento del problema

El álgebra es una de las ramas más importantes para desarrollar en el alumno el tan deseado pensamiento matemático. La relevancia de esta rama hace necesario investigar acerca de las dificultades que representa su aprendizaje. Kieran y Filloy (1989, p. 229) señalan: "el álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones". Es precisamente este cambio de pensamiento que va a generar bastantes dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Mi problema de investigación se desprende del tema de las ecuaciones lineales. Los jóvenes que he atendido durante mi práctica exhiben problemas notables cuando se les pide que resuelvan ecuaciones de primer grado. Se les dificulta el proceso que consiste en aislar la incógnita en una ecuación; ellos generalmente no saben cuál es el orden que se debe seguir a la hora de hacer el despeje, operan de manera incorrecta, desconocen las propiedades de la igualdad e ignoran los significados del signo igual.

Es necesario que mis educandos aprendan a desarrollar procedimientos adecuados para obtener ecuaciones equivalentes a la propuesta con el fin de despejar la incógnita. Esto se logra aplicando las propiedades de los números reales y las propiedades de la igualdad de manera adecuada. Los alumnos deben identificar "las operaciones propuestas y el orden en que se deberían transponer los términos para despejar la incógnita" (De Moreno y De Castellanos, 1997, p. 248). Despejar la incógnita les permitirá encontrar la solución de la ecuación lineal.

1.3.2 Problema

Considerando la problemática planteada, la matemática educativa debe ser práctica para ajustarse a situaciones reales que se presentan en contextos reales y debe aportar elementos para mejorar la práctica docente. En este tenor el problema de mi trabajo es el siguiente:

¿Qué elementos debe contener una secuencia de enseñanza para generar aprendizaje por adaptación en la enseñanza del tema ecuaciones lineales con una incógnita?

1.3.3 Objetivos

Objetivo General:

- Proponer una secuencia de enseñanza, validada en un escenario real de clase, que atienda el proceso de comprensión del tema "ecuaciones lineales con una incógnita".

Objetivos específicos:

- Analizar algunos trabajos de investigación, relacionados con el tema “ecuaciones lineales con una incógnita” para tomar el estado del arte como un punto de partida en el diseño de una secuencia de enseñanza.
- Diseñar una secuencia de enseñanza que recoja los resultados del análisis preliminar y los combine en actividades que involucren el proceso de solución en diferentes escenarios.
- Realizar una prueba diagnóstica para averiguar los conocimientos de un grupo de alumnos de primer semestre de Bachillerato.
- Aplicar la secuencia de enseñanza a alumnos de primer semestre de Bachillerato, para validar si ésta genera en ellos aprendizaje por adaptación del tema “ecuaciones lineales con una incógnita”.

1.3.4 Hipótesis

Los elementos que debe contener una secuencia de enseñanza para generar aprendizaje por adaptación en el tema ecuaciones lineales con una incógnita son:

- La fase de apertura considerando los conocimientos previos.
- La fase de desarrollo fomentando la aplicación del algoritmo para resolver ecuaciones lineales.
- La fase de cierre evaluando ejercicios que impliquen la resolución de ecuaciones lineales.

1.3.5 Justificación

Según Zapatera (2006), “el álgebra es el corazón de las matemáticas”. De acuerdo con la idea desarrollada por Radford (2006, citado por Vergel, 2013) el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos. La naturaleza del pensamiento algebraico emergente en los alumnos, es una forma específica en la cual ellos actúan conceptualmente con el propósito de llevar a cabo acciones requeridas para la generalización de tareas. Son tres las características que hacen distintivo al pensamiento algebraico. La primera se refiere a un sentido de indeterminación, la segunda es la analiticidad y la tercera es el modo simbólico en la cual se designa a los objetos en el álgebra (Radford, 2006, citado por Vergel, 2013). Para los alumnos comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico representa muchas dificultades, particularmente en la problemática relacionada con la resolución de ecuaciones de primer grado. Así pues, cumplir con el objetivo de la investigación es pertinente por varios motivos que se señalan este apartado.

Uno de los motivos, es el énfasis que se otorga a las ecuaciones en los documentos curriculares de la matemática escolar. El diario oficial de la federación expresó en 1982 que la finalidad esencial del Bachillerato es:

> generar en el estudiantado el desarrollo de una primera síntesis personal y social que le permita su acceso a la educación superior, a la vez que le dé una comprensión de su sociedad y de su tiempo y lo prepare para su posible incorporación al trabajo productivo" (Diario Oficial de la Federación, 1982, citado en DGB, 2006, p. 3).

De conformidad con esto, la Dirección General de Bachillerato actualizó, en el año 2017, los programas de estudio integrando elementos tales como los aprendizajes claves, contenidos específicos y aprendizajes esperados, que atienden al Nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria. Para el nivel Bachillerato, la disciplina de Matemáticas tiene como eje principal desarrollar el pensamiento algebraico para interpretar situaciones reales e hipotéticas. El desarrollo de este pensamiento, le permite al estudiantado, proponer alternativas de solución desde diversos enfoques, priorizando las habilidades del pensamiento tales como:

- Búsqueda de patrones.
- Resolución de problemas.
- Análisis de tablas, gráficas, diagramas y textos.
- Interpretación y tratamiento de la información.

Por su parte, el programa de la asignatura de Matemáticas I incluye el Bloque V, titulado Ecuaciones lineales. El propósito del Bloque es conseguir que el alumno adquiera las competencias necesarias para resolver problemas de la vida cotidiana en forma colaborativa. Esto mediante el uso de métodos gráficos y analíticos asociados a las ecuaciones lineales. Para lograr lo anterior, es necesario que el alumno sea competente al resolver ecuaciones lineales con una incógnita.

Así también, las ecuaciones son un tema transversal que puede ayudar al alumno a alcanzar las metas de otras asignaturas escolares. En el caso de asignaturas como física y química, muchos de los contenidos están relacionados con la solución de ecuaciones. Una ecuación puede ser capaz de modelar un fenómeno natural y ayudar a comprenderlo. Entonces, las matemáticas auxilian a otras ciencias en el logro de sus propósitos. Por lo tanto, es indispensable que los alumnos comprendan la parte matemática que aprovechan otras ciencias.

Las ecuaciones han cambiado el mundo. Éstas contribuyen de manera trascendental al avance de la ciencia. Los científicos han encontrado ecuaciones que modelan fenómenos como la gravedad, el sonido, el campo eléctrico, el movimiento, etc. Las ecuaciones albergan las respuestas que la humanidad ha estado buscando desde tiempos remotos. Es así, que los jóvenes necesitan entender y aplicar los conocimientos concernientes a la resolución de ecuaciones lineales para entender el universo en que habitamos.

Otro motivo que justifica el proyecto es que las ecuaciones lineales dan al alumno a desarrollar el pensamiento lógico. Este tipo de pensamiento le servirá para afrontar situaciones en su vida cotidiana. Las ecuaciones representan una herramienta potente en tanto que permiten la modelación de diversos fenómenos. La solución de la ecuación representa información que puede ser usada en la toma de decisiones de una persona en un determinado contexto.

CAPÍTULO II: FUNDAMENTO TEÓRICO

Como Marco Teórico se utilizará la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau; la cual surgió en la década de los setenta, en Francia. Esta teoría se presenta actualmente como un instrumento científico. El foco consiste en "comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden" (Brousseau, 2007, p. 7-8).

Brousseau (2007) fundamenta su teoría en una concepción constructivista del aprendizaje y la caracteriza de la siguiente manera:

> el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje (p. 30).

Parafraseando a Brousseau, Nieto, Viramontes y López (2009) señalan que

> el estudiante aprende matemáticas mediante la conducción de actividades diseñadas en un medio en el que se propone resolver una situación problemática para la que de inicio se tiene una estrategia base de solución que generalmente falla y de preferencia se pretende que el mismo medio comunique al estudiante que es necesario cambiarla lo que genera en él una nueva estrategia que lo adapta al medio (p. 18).

Conviene subrayar que para Brousseau (2007) la **comprensión**

> es la movilización concomitante de saberes y conocimientos y la evocación de situaciones, no directamente necesarias para la decisión en la acción en curso, pero que se suponen útiles para el control de los conocimientos que regulan esa decisión. El equilibrio general de los diferentes repertorios a través de los cuales un sujeto regula sus relaciones con un medio obedece a principios de ergonomía (p. 52).

2.1 SITUACIONES

Se le llama *situación* a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio (ábaco, contador, lápiz, papel, etc.). El *medio* es un sistema autónomo, antagonista del sujeto. En una **situación didáctica** intervienen el profesor, el alumno y un saber matemático. La situación didáctica es el "entorno del alumno que incluye todo lo que coopera específicamente en la componente matemática de su formación" (Brousseau, 2007, p. 49). En la situación didáctica se pone de manifiesto una interacción en la cual el docente exhibe la intención de modificar el sistema de conocimientos del alumno. El profesor debe usar una estrategia para trasmitir un saber al educando preparando el medio. (Brousseau, 2007).

Por otro lado, una **situación adidáctica** es denotada por una actividad que produce un aprendizaje por adaptación. El profesor debe preparar un problema y el medio partiendo del saber que desea enseñar. Dicho problema debe ser lo suficientemente claro para que el alumno sepa lo que debe hacer y pueda validar si lo que hizo está bien o está mal. En la situación adidáctica no hay una intención de enseñarle algo a alguien y sin embargo se produce un conocimiento. Dicho conocimiento no será adquirido por el alumno hasta que éste no sea capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza. En adición a esto, cada conocimiento matemático tiene al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás. Al conjunto de situaciones que caracterizan una misma noción se les llama **fundamentales** (Brousseau, 2007).

Así también, para comprender mejor la Teoría de Situaciones Didácticas es necesario agregar los siguientes dos conceptos: el contrato didáctico y la devolución. **El contrato didáctico** se refiere al reparto de responsabilidades entre el profesor, encargado de difundir un conocimiento y el alumno, quien lo recibe y aprende. Las "responsabilidades abarcan, ante todo la emisión de conocimientos –su comunicación, validez, novedad, valor, interés o estado cultural– y las condiciones en las que éstos podrán manifestarse, ser recibidos, aprendidos, reproducidos" (Brousseau, 2007, p. 56). En el contrato didáctico se instaura lo que espera el alumno del profesor y éste a su vez lo que él espera del alumno. Ahora bien, Brousseau (2007) indica que **la devolución** "es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia" (p. 87). Así pues, el rol del docente debe ser el de *devolver* al alumno la responsabilidad de hacerse cargo del problema que le propone.

Derivado de las relaciones y obligación en el contrato didáctico se pueden producir diversos efectos, que en ocasiones son escasamente favorables para el alumno (Ávila, 2001). Dichos efectos se describen enseguida:

- **Efecto Jourdain**: sucede cuando se sobrevaloran las acciones intelectuales de los alumnos. Cuando un joven da una respuesta incorrecta, sin embargo, el profesor le dice que está bien, para no desilusionarlo. "El *efecto Jourdain* describe la creencia de que porque las ideas y los conocimientos están en la cabeza del profesor éstos estarán también en las de los alumnos" (Ávila, 2001, p. 12).
- **Deslizamiento metacognitivo**: se "refiere al hecho de que, en ciertas circunstancias, el profesor puede realizar la enseñanza tomando las explicaciones y medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático" (Ávila, 2001, p. 12).

- **Efecto Topaze**: evento en la cual el alumno resuelve el problema, pero no por méritos propios, sino porque el profesor le indica cual es el procedimiento que debe seguir, evitando la construcción del conocimiento por parte del educando. "Es una muestra de impotencia del profesor quien, aun estableciendo las reglas de la interacción y mostrando en ello la condición asimétrica en su relación con los alumnos no puede hacer nada si el alumno no aprende, pues el aprendizaje es un acto personal que deriva de acomodaciones y nuevos equilibrios frente a un objeto de saber" (Ávila, 2001, p. 12).
- **Abuso de la analogía**: al resolver un problema es importante el uso de las analogías, pero no funciona reemplazar el estudio de una noción compleja por un caso análogo. "Si fracasan en su aprendizaje, hay que darles una nueva oportunidad […]. Aunque el profesor disimule el hecho de que el nuevo problema se parece al anterior, los alumnos van a buscar […] la solución que ya les dieron", ellos encuentran la solución gracias a las indicaciones, y no gracias a su compromiso con el problema (Brousseau, 2007, p. 81).
- **El envejecimiento de las situaciones de enseñanza**: "la reproducción exacta de lo que dijo o hizo con anterioridad no tiene el mismo efecto y a menudo los resultados son algo peores" (Brousseau, 2007, p. 81).

2.2 TIPOLOGÍA DE LAS SITUACIONES EN DIDÁCTICA

Brousseau (2007) propone una tipología de situaciones didácticas tomando en cuenta que no todas las acciones del sujeto revelan sus conocimientos de la misma manera. La tipología de Brousseau (2007) contiene tres grandes categorías, que son:

1) Situación acción
2) Situación de formulación
3) Situación de validación

1) Situación acción

Cuando el alumno "actúa" en una situación, éste elige directamente los estados del medio en función de sus propias motivaciones. El alumno interactúa con un problema en cuestión y puede llegar a relacionar y tomar en cuenta las reacciones del medio para resolverlo. Además, es necesario que el alumno haga suyo el problema trabajando con él y aplicando sus conocimientos (Brousseau, 2007).

2) Situación de formulación

La “formulación” de un conocimiento es la capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). “El *medio* que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto a quien el primero deberá comunicar una información” (Brousseau, 2007, p 25). La formulación “pone en juego repertorios lingüísticos diversos (sintaxis y vocabulario). La adquisición de tales repertorios acompaña a la de los conocimientos que enuncian, pero ambos son procesos distintos” (Brousseau, 2007, p 26). Para que se dé la formulación es necesario que los alumnos se comuniquen y compartan sus ideas y experiencias.

3) Situación de validación

Luego de que los alumnos han interactuado con el medio y se han comunicado entre sí, entonces viene la “validación”. Los alumnos discuten con el docente acerca del trabajo que han realizado al interactuar con el medio. En este sentido, Brousseau comunica: “los esquemas de la acción y de la formulación conllevan procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales, para asegurar la pertinencia, adecuación, adaptación o conveniencia de los conocimientos movilizados” (Brousseau, 2007, p 26). En esta parte, el profesor no es un informante, sino un proponente, y el receptor un oponente.

En las tres situaciones anteriores (acción, formulación y validación) “el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de **oferente** de los conocimientos que quiere ver aparecer” (Brousseau, 2007, p. 31). Entonces las tres situaciones anteriores son adidácticas. En este marco, Brousseau (2007, p. 28) identificó que los maestros necesitaban “dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión”. Por este motivo, Brousseau (2007) propuso una cuarta categoría, la situación de *institucionalización*.

4) Situación de institucionalización

Esta situación surge principalmente de la necesidad del profesor de presentar los resultados de las situaciones anteriores en orden, es decir, dar un sentido a los conocimientos. El docente debe verificar lo que los alumnos deben hacer, o no, lo que aprendieron o deben aprender. Retomar y formalizar "el objeto de conocimiento por parte del alumno y el aprendizaje del alumno por parte del docente es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble conocimiento es el objeto de la institucionalización" (Brousseau, 2007, p 98).

2.3 REFLEXIÓN

¿Por qué utilizar la teoría de situaciones didácticas?

La Teoría de Situaciones Didácticas es pertinente porque sostiene que el alumno aprende algo nuevo tal y como se observa en la sociedad, es decir, adaptándose a su medio. El hecho de que el alumno aprenda de manera natural permitirá que este deje de rechazar las matemáticas y las deje de concebir como algo que tiene que estudiar obligadamente. Así, el estudio será algo normal para el alumno, parte de su vida y no algo que sucede solamente en la escuela.

Dentro del análisis de los antecedentes se encuentra que pocos autores utilizaban la representación gráfica de la ecuación lineal como estrategia de aprendizaje. Por este motivo creía que tal vez la Teoría de Representaciones Semióticas podría ser conveniente. Sin embargo, me decanté por la TSD debido a los objetivos de mi proyecto de Desarrollo Profesional. En ellos plasmo la intención de que mis alumnos logren resolver una ecuación lineal de manera adecuada. En este sentido, me interesa el tratamiento dentro del registro analítico (expresándome en términos de Duval). Dicho tratamiento corresponde al procedimiento que quiero que el alumno comprenda y aplique al despejar la incógnita.

Otra razón se relaciona con mi Desarrollo Profesional. Deseo convertirme en un mejor profesor de matemáticas y creo que la teoría que elegí se acopla mejor a mis aspiraciones. En mi rol de maestro, debo:

- Construir un contrato didáctico apropiado.
- Preparar cuidadosamente el medio y los problemas de las situaciones adidácticas.
- Gestionar mis intervenciones para asegurarme de que el alumno aprenda por adaptación al medio.
- Institucionalizar los saberes puestos en juego durante la situación.

2.4 MARCO MATEMÁTICO

En esta parte del proyecto abordo los conceptos esenciales que involucran el tema esencial de mi situación didáctica, “las ecuaciones lineales con una incógnita”. Aquí se toma en cuenta que las propiedades de los números reales y los postulados de la igualdad figuran como una parte importante al resolver las ecuaciones. Así también se agrega la definición, los métodos de resolución entre otras particularidades. Esto con la finalidad de establecer el tema de manera formal.

2.4.1 Propiedades de los números reales

“Es útil clasificar los distintos tipos de números con los que trabajamos como conjuntos” (Sullivan, 2013, p. 4). Las antiguas civilizaciones tuvieron la necesidad de contar. Para poder llevarlo a cabo se han utilizado los **números naturales** (que son los números del conjunto $\{1,2,3,4,\ldots\}$). Por su parte, “los números **enteros** son el conjunto de números $\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$” (Sullivan, 2013, p. 4). Los enteros vinieron a resolver problemas más complejos, por ejemplo, de ganancias y pérdidas o sobre y bajo el nivel del mar. Adicionalmente, “los números **racionales** son los números del conjunto $\{x|x = \frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0\}$” (Sullivan, 2013, p. 4). En cambio, existen números que no se pueden representar de la forma $\frac{a}{b}$; a estos se les llama números **irracionales**. En conclusión, “El conjunto de números **reales** ($\mathbb{R}$) es la unión del conjunto de números racionales con el conjunto de números irracionales” (Sullivan, 2013, p. 5). Las propiedades del conjunto de los números reales se muestran en la siguiente tabla:

Propiedad	Suma	Multiplicación	Ejemplos
Cerradura	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$	$3 + 5 = 8 \in \mathbb{R}$ $(2)(-3) = -6 \in \mathbb{R}$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$ $(2)\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)(2)$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$\sqrt{5} + (3 + 4) = (\sqrt{5} + 3 + 4$ $3 \cdot (2 \cdot 5) = (3 \cdot 2) \cdot 5$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	$5 + 0 = 5$ $7 \cdot 1 = 7$

Inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	$2 + (-2) = 0$ $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$
Distributiva	$a(b + c) = ab + ac$		$2(7 + 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$ $5 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 5(4 + 8)$

Tabla 1: Propiedades del conjunto de los números reales (Colegio Nacional de Matemáticas, 2015, p. 4)

Con la finalidad de fortalecer el conocimiento sobre el conjunto de los números reales a continuación se muestra la demostración de varios teoremas fundamentales en el proceso de solución de una ecuación de primer grado con una incógnita.

Teorema: *La identidad aditiva* 0 *es única (*Lovaglia, Elmore y Conway*,* 1972*)*

Demostración: Supóngase que hay otra identidad aditiva b. Entonces,

$0 + b = 0$

Pero, según el postulado de la identidad aditiva,

$0 + b = b$

Por tanto, por sustitución

$b = 0$

lo que significa que 0 es el único elemento idéntico aditivo.

"La demostración del [teorema anterior] puede usarse como modelo para la del teorema [*El idéntico multiplicativo* 1 *es único*]" (Lovaglia *et al., 1972,* p. 53).

Teorema: *El inverso aditivo de un número real es único (*Lovaglia *et al.,* 1972*)*

$x \in \mathbb{R}, x + b = 0 \rightarrow b = {}^{-}x$

$x \in \mathbb{R}, b + x = 0 \rightarrow b = {}^{-}x$

Demostración: De acuerdo con el postulado del inverso aditivo, para cada número real x existe un número ${}^{-}x$, tal que $x + {}^{-}x = 0$ y ${}^{-}x + x = 0$. Supóngase que ${}^{-}x$ no es único. Entonces x tiene otro inverso, b, tal que $x + b = 0$ y $b + x = 0$. Esto implica que ${}^{-}x + (x + b) = {}^{-}x + 0$ y $(b + x) + {}^{-}x = {}^{-}x + 0$ (Hemos usado la propiedad aditiva de la igualdad.) Entonces, en uno y otro caso, por los postulados asociativo del inverso y de identidad, $b = {}^{-}x$. Por tanto, el inverso aditivo de un número real es único.

De este modo vemos que cuando la suma de dos números reales es 0, cada uno de ellos es el inverso aditivo del otro. $a + b = 0 \rightarrow a = {}^{-}b$ y $b = {}^{-}a$ (Lovaglia *et al., 1972,* p. 54).

Teorema: *El inverso multiplicativo de un número real es único (*Lovaglia *et al.,* 1972*)*

*"$xy = 1 \rightarrow x = y'$ y $y = x'$ $(x, y \neq 0)$" (*Lovaglia *et al.,* 1972, p. 55*)*

2.4.2 Definición de ecuación lineal con una incógnita

En una ecuación se igualan dos expresiones algebraicas. La ecuación ha de contener por lo menos una incógnita (cantidad desconocida que es necesario determinar, se representa a través de letras). En las ecuaciones lineales el exponente de la incógnita debe ser uno y su forma general es:

$$mx + b = 0, \text{ donde } m \neq 0 \; y \; a, \; b \in \mathbb{R}$$

(Garrido, Llamas y Sánchez, 2015)

La **ecuación lineal con una incógnita** es el objeto matemático a considerar en este trabajo.

2.4.3 Propiedades de la Igualdad

Las propiedades que se expresan a continuación son ciertas suposiciones de la relación de igualdad respecto al conjunto de los números reales (Lovaglia *et al.*, 1972). Dichas suposiciones son extremadamente importantes en el desarrollo lógico de la resolución de una ecuación lineal. Lovaglia *et al.* (1972, p. 44) las señala de la siguiente manera:

- **Propiedad reflexiva**

$$Para\ cada\ a \in \mathbb{R}, a = a$$

- **Propiedad de simetría**

$$Si\ a, b \in \mathbb{R}\ y\ si\ a = b, entonces\ b = a$$

- **Propiedad transitiva**

$$Si\ a, b, c \in \mathbb{R}\ y\ si\ a = b\ y\ b = c, entonces\ a = c$$

- **Propiedad de sustitución de la igualdad**

"Si $a, b \in \mathbb{R}$ y si $a = b$, entonces a puede ser sustituida por b en cualquier expresión, enunciado específico o proposición abierta. Tal sustitución no cambia el valor de la expresión ni altera la veracidad del enunciado específico ni el conjunto de verdad de la proposición abierta"

*(*Lovaglia *et al.,* 1972, p. 44*).*

- **Propiedad aditiva de la igualdad**

"$Para\ todo\ número\ real\ a, b, c\ y\ d, si\ a = b\ y\ c = d, entonces\ a + c = b + d$"

*(*Lovaglia *et. al.,* 1972, p. 46*)*

La anterior propiedad se demuestra de la siguiente manera:

Demostración:

Proposición	*Justificación*
1. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$	1. Dado
2. $a + c \in \mathbb{R}$	2. Postulado de cerradura de la suma
3. $a + c = a + c$	3. Propiedad reflexiva de la igualdad
4. $a = b$	4. Dado
5. $a + c = b + c$	5. Propiedad de sustitución de la igualdad (a se sustituye por b en el lado derecho de la ecuación del paso 3)
6. $c = d$	6. Dado
7. Por tanto, $a + c = b + d$	7. Propiedad de sustitución de la igualdad (c se sustituye por d en el lado derecho de la ecuación del paso 5)
	(Lovaglia *et al.,1972,* p. 46)

- **Propiedad multiplicativa de la igualdad**

"$Para\ toda\ a, b, c\ y\ d\ \in \mathbb{R}, a = b\ y\ c = d\ \rightarrow\ a \cdot c = b \cdot d$" *(*Lovaglia *et. al., 1972,* p. *46).*

Esta puede demostrarse con el siguiente procedimiento:

Demostración:

Proposición	*Justificación*
1. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$	1. Dado
2. $a \cdot c \in \mathbb{R}$	2. Postulado de cerradura para la multiplicación.
3. $a \cdot c = a \cdot c$	3. Propiedad reflexiva de la igualdad

4. $a = b, c = d$	4. Dado
5. Por tanto, $a \cdot c = b \cdot d$	5. Propiedad de sustitución de la igualdad (a se sustituye por b y c se sustituye por d en el lado derecho de la ecuación del paso 3).
(Lovaglia *et al.,1972,* p. 46)	

Relativo a las dos propiedades anteriores, Lovaglia *et al.* (1972, p. 46) señala lo siguiente:

"Dado que $c = c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$, ambos teoremas demostrados nos permiten escribir:

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a = b$, entonces $a + c = b + c$

y

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$".

2.4.4 Métodos de Resolución

"La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que una igualdad se cumpla" (Colegio Nacional de Matemáticas, 2015, p. 352). Según Kieran y Filloy (1989) los enfoques que se utilizan para resolver ecuaciones se pueden clasificar en los siguientes tres tipos:

a) intuitivo
b) sustitución por tanteo
c) formal

> "Los enfoques de resolución **intuitivos** incluyen el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento, y métodos de recubrimiento. Por ejemplo, resolver $5 + n = 8$ trayendo a colación el hecho numérico aditivo de que $5 + 3$ es 8 sería un uso de hechos numéricos conocidos. Resolver la misma ecuación contando $5, 6, 7, 8$ y dándose cuenta de que se nombraron tres números después del 5 para llegar a 8 sería un ejemplo de resolución por técnicas de recuento" (Kieran y Filloy, 1989, p. 232).

El método de **sustitución por tanteo** "(p. e. resolver $2x + 15 = 13$ probando valores diferentes como 2, 3, 5 y 4) consume mucho tiempo y coloca una carga pesada en la memoria de trabajo, excepto si todos los intentos se anotan de algún modo" (Kieran y Filloy, 1989, p. 232).

El método **formal** de resolución de ecuaciones engloba a

> la transposición de términos (esto es, “cambiar de lado –cambiar de signo”) y ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación. Aunque la transposición esté considerada por muchos profesores de álgebra como una versión abreviada del procedimiento de realizar la misma operación en ambos lados, los alumnos que empiezan con el álgebra parece que perciben de forma bastante diferente esos dos métodos (Kieran y Filloy, 1989, p. 232).

De conformidad con lo anterior, las propiedades de la igualdad juegan un papel importante en la resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Utilizando las propiedades se puede aislar la variable en uno de los dos lados de la ecuación. Lovaglia (1972, p. 129) señala:

> Pueden ser necesarios muchos pasos, cada uno de los cuales produce una ecuación diferente de las previas para el uso de un postulado o un teorema. Si dichos pasos son reversibles, entonces las ecuaciones son equivalentes y, por tanto, sus conjuntos verdad son los mismos.

Lovaglia (1972, p. 129) pone a consideración lo siguiente:

> **Ejemplo** (a) $6x - 7 = 2x + 29 \rightarrow 4x - 7 = 29$ (se sumó $-2x$ a ambos lados). Pero también: $4x - 7 = 29 \rightarrow 6x - 7 = 2x + 29$ (se suman $2x$ a ambos lados). Esto significa que $6x - 7 = 2x + 29 \leftrightarrow 4x - 7 = 29$ (¿por qué?). Luego los conjuntos verdad son iguales. Pasos semejantes nos conducen a $6x - 7 = 2x + 29 \leftrightarrow x = 9$. Por tanto, la ecuación original tiene conjunto verdad $= \{9\}$ […].
>
> Generalmente se debe demostrar cada paso en la solución, aunque a medida que se gana destreza se puede omitir alguno de ellos. Cuando se comprenda haber llegado a una solución incorrecta, regresar para demostrar cada paso y eliminar las dificultades.
>
> **Ejemplo**: (b) Hallar el conjunto solución de $6x - 7 = 2x + 29$.
>
> *Solución:*

$$6x - 7 = 2x + 29$$

$$-2x + (6x - 7) = -2x + (2x + 29)$$

$$4x - 7 = 29$$

$$(4x - 7) + 7 = 29 + 7$$

$$4x = 36$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{36}{4}$$

$$x = 9$$

> El conjunto solución es $\{9\}$.
>
> *Comprobación:*

$$6 * 9 - 7 = 2 * 9 + 29$$

$$54 - 7 = 18 + 29$$

$$47 = 47$$

(Lovaglia, 1972, p. 129)

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

La Metodología que este trabajo utiliza es la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue. La cual es producto de la Escuela Francesa de Didáctica de las matemáticas y surgió en los años ochenta. Se denomina con el término de ingeniería didáctica

> a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quién, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (Artigue, Douady y Moreno, 1995, pp. 33-34).

Considerando el desarrollo de la didáctica de la matemática esta visión puede abordar dos cuestiones cruciales: La primera de ellas como metodología de investigación. La segunda como producción de situaciones didácticas para el proceso de enseñanza–aprendizaje (Artigue *et al.,* 1995). En este proyecto se utilizará como metodología de investigación, en donde

> se distinguen por lo general dos niveles: el de la *micro – ingeniería* y el de la *macro – ingeniería*, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. Las investigaciones de micro – ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica. Sin embargo, si bien ellas permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase, no la dejan unir con la complejidad esencial de los fenómenos asociados con la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Tampoco permiten necesariamente distinguir de forma coherente los objetos de conocimiento. Las investigaciones de macro – ingeniería, a pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales que imponen, se hacen indispensables (Artigue *et al.*, 1995, p. 35-36).

Este trabajo es del tipo **cualitativo** y se ha decidido utilizar la **ingeniería didáctica** como metodología de investigación debido a que permite investigar el sistema didáctico de una manera racional utilizando los **conocimientos didácticos preestablecidos**. Además, esta metodología permite abordar con un **rigor científico** todo el proceso encaminado a cumplir los objetivos y contestar la pregunta de investigación. La ingeniería didáctica permitirá controlar la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue *et al.*, 1995). Por lo tanto, esta metodología proporciona una mayor riqueza interpretativa del fenómeno que a estudiar.

Según Artigue *et al.* (1995) la metodología de la ingeniería didáctica es diferente de otras metodologías debido al registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada.

> Las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación

> estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (p. 37).

De conformidad con lo anterior, la ingeniería didáctica considera cuatro fases, las cuales se mencionan a continuación.

3.1 FASE I: ANÁLISIS PRELIMINAR.

Para poder iniciar con la ingeniería didáctica son necesarios análisis preliminares respecto al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema. Los análisis preliminares más frecuentes son (Artigue et al., 1995, p. 38):

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los alumnos, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

Al hacer un análisis de restricciones se pueden distinguir tres dimensiones:

- La dimensión **epistemológica** asociada a las características del saber en juego.
- La dimensión **cognitiva** asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
- La dimensión **didáctica** asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Obviamente lo antes mencionado se realiza teniendo en cuenta los objetivos de investigación. Según Artigue et al. (1995): pese a que esta serie de análisis no se evidencia en las publicaciones, los trabajos que el investigador ha realizado como bases de su ingeniería se retoman y profundizan en el desarrollo de las diferentes fases de la misma, según lo requiera. Es por ello que los estudios preliminares se mantienen como preliminares en un primer nivel de elaboración.

3.2 FASE II: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI.

En esta segunda fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado.

Artigue distingue dos tipos de variables de comando:

- Las variables macro-didácticas o, concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Variables micro-didácticas globales o, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase (Artigue *et al., 1995,* p. 42).

Los dos tipos de variables pueden ser generales o dependientes del contenido didáctico en el que enfoca la enseñanza.

Característica particular de la metodología de la ingeniería didáctica, es el método de **validación** que es en esencia **interna**. Desde la misma fase de concepción se empieza el proceso de validación, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería. Dicho análisis se debe pensar como un análisis de significado de acuerdo a:

> Si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción de un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones (Artigue *et al.*,1995, p. 44-45).

Por lo tanto, el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los alumnos y sus significados. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de **hipótesis**. La validación de estas está indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la fase número cuatro, entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Artigue *et al.* (1995) mencionan que de manera habitual el análisis a priori tiene dos partes: una descriptiva y una predictiva, además se focaliza en las características de una situación a-didáctica que se pretende diseñar para llevar al aula. En el análisis se debe:

- Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un alumno en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Prever los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los

comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje, (p. 45).

3.3 FASE III: EXPERIMENTACIÓN

Es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de alumnos. Esta etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los alumnos objeto de la investigación. La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los alumnos que participarán de la experimentación;
- El establecimiento del contrato didáctico;
- La aplicación de los instrumentos de investigación;
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

3.4 FASE IV: ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

Tiene como pilar el conjunto de datos recolectados a largo y ancho de toda la experimentación con las observaciones realizadas en las secuencias de enseñanza y las evidencias que los alumnos generaron dentro y fuera de la clase. Para enriquecer los datos, se puede emplear otros como complemento obtenidos mediante otros instrumentos como cuestionarios, entrevistas individuales o grupales, realizadas en los diferentes momentos de la enseñanza. En esta fase, como ya se había señalado, "en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación" (Artigue *et al.*, 1995, p. 48).

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS PRELIMINAR

4.1 DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA

Este apartado da a conocer una perspectiva histórica de las ecuaciones lineales. La finalidad es indagar sobre el objeto matemático que se pretende enseñar comenzando desde su génesis. Aquí se caracterizan aspectos importantes encontrados en el surgimiento de las ecuaciones lineales, tales como el tipo de problemas que se resolvían, los métodos de resolución, etc. El pasado de las Matemáticas actúa como un "elemento motivador y pone a disposición del alumnado y el profesorado los procesos históricos de formación y adquisición de conceptos, así como los obstáculos que a lo largo de la historia se han tenido que ir superando" (Gavilán, 2010, p. 96). Así pues, según Gavilán (2010), el álgebra presenta tres etapas desde su surgimiento, que son:

a) Etapa primitiva o retórica, que abarca desde los Babilonios (1700 a. C.) hasta los aportes de Diofanto (250 d. C.). En este periodo todo se escribía en lenguaje ordinario.

b) Etapa intermedia o sincopada, que se extiende hasta los inicios del siglo XVI. En esta etapa se comienzan a escribir algunas abreviaturas como las que desarrolló Diofanto.

c) Etapa simbólica o actual. Aparece el álgebra con todo su simbolismo, rigor y lenguaje formal.

Situándonos en la etapa primitiva o retórica, encontramos que aún no se utilizaba ningún símbolo, todo se escribía en leguaje común (Gavilán, 2010). Dalcín y Olave (2007) apuntan que los babilonios plasmaron problemas aritméticos o algebraicos en tablillas de arcilla. Las soluciones de estos problemas conducen bastantes veces a la utilización de lo que hoy conocemos como ecuaciones. Las mencionadas tablillas muestran la solución del problema, pero no explican cómo se llegó a ella.

> El objetivo de los problemas es descubrir el peso original de una piedra dando origen a una ecuación de primer grado. [Uno de los problemas dice lo siguiente:] encontré una piedra, pero no la pesé; después pesé seis veces (su peso) y sumé 2 gin, después sumé la tercera parte de la séptima parte de esta cantidad por 24. Todo pesa un maná. ¿Cuál es el peso original de la piedra? Solución: $4\ \frac{1}{3}$ gin (1 mana = 60 gin). En el lenguaje actual este problema se resolvería mediante la ecuación:
>
> $$6x + 2 + \frac{1}{3} * \frac{1}{7}(6x + 2) * 24 = 60$$
>
> cuya solución es efectivamente $4\ \frac{1}{3}$ (Dalcín y Olave, 2007, pp. 157-158).

Por su parte, los egipcios reportaron algunos de sus razonamientos matemáticos en el Papiro de Rhind (tiene este nombre debido a que Henry Rhind lo compró en 1858). Ellos resolvieron problemas relacionados con las ecuaciones lineales por el *"método de la falsa posición"* o *"regula falsa"* (Dalcín y Olave, 2007). El *método de la falsa posición* "parte de un valor cualquiera (método simple) o de dos valores (doble falsa posición). A partir de estas falsas posiciones se obtiene la solución de la ecuación por proporcionalidad" (Orts, 2007, p. 56). Guelli (1989, citado por Dalcín y Olave, 2007) aporta el siguiente ejemplo tomado del Papiro Rhind:

> Un montón, sus dos tercios, su mitad, todo junto es trece. ¿Cuál es la cantidad? El problema, en el lenguaje del álgebra actual, se reduce a resolver la ecuación:
>
> $$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13 \Rightarrow \frac{13}{6}x = \frac{78}{6} \Rightarrow x = 6$$
>
> Pero los egipcios no podían resolver la ecuación de esta forma. Para hacerlo atribuían un valor falso al montón, por ejemplo 12:
>
> $$12 + \frac{2}{3} * 12 + \frac{1}{2} * 12 = 12 + 8 + 6 = 26$$
>
> Por medio de una regla de tres simple obtenían el valor verdadero del montón:
>
> 12 es a 26 como el valor verdadero del montón es a 13, por lo que el montón es 6 (Dalcín y Olave, 2007, p.158)

Además de este método, los egipcios también utilizaron la factorización y el método que se conoce como *desandar lo andado.* Este procedimiento consiste en invertir "el proceso de manera que, mediante la aplicación a la solución de las operaciones aritméticas inversas y en sentido contrario, se consiga llegar a la cantidad inicial" (Dalcín y Olave, 2007, p. 159). Estos autores presentan en su investigación el siguiente ejemplo, tomado del Papiro de Moscú que se encuentra en el museo de Bellas Artes, en Moscú:

> *Calcular un montón tomándolo* 1 *y ½ y añadiendo 4 para dar 10. ¿Cuál es la cantidad que hace esto?*
>
> El procedimiento detallado por el escriba sigue los siguientes pasos:
>
> Si al final se ha añadido 4 para obtener el resultado 10 lo primero que se hace para llegar a la cantidad inicial es sustraer 4 del resultado ($10 - 4 = 6$). El problema entonces se puede reformular como: "Calcular la cantidad tomándola 1 ½ veces para dar 6".
>
> $$\left(1 + \frac{1}{2}\right)x + 4 = 10$$
>
> $$\left(1 + \frac{1}{2}\right)x + 4 - 4 = 10 - 4$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x = 6$$

Si la cantidad se ha repetido 1 y $\frac{1}{2}$ veces quiere decir que se ha multiplicado por $1\ \frac{1}{2}$. Por ello se invierte de nuevo el proceso a partir del 6 multiplicando esta cantidad por el inverso de $1\frac{1}{2}$, [...] obteniéndose así la solución (4).

$$\frac{3}{2}x = 6$$

$$\frac{\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{\frac{3}{2}}$$

$$x = 6 * \frac{2}{3}$$

$$x = 4$$ (Dalcín y Olave, 2007, p.159)

Así también, los griegos abordaron las ecuaciones lineales por medio de la geometría Euclidiana en el año 300 a. C. (Dalcín y Olave, 2007). Ríbnikov (1987) explica el método de anexión de áreas utilizado en Grecia para resolver problemas que conducían a ecuaciones lineales de la siguiente manera:

> anexar al segmento c un rectángulo equivalente al dado (*ab*). La resolución del problema como se ve en la figura 1 consiste en la adjunción uno a otros de los rectángulos *ab* y *bc* en la construcción de un nuevo rectángulo, la diagonal del cual es la diagonal del rectángulo *bc* prolongada hasta la intersección con la prolongación del lado b. Entonces los rectángulos *ab* = *cx* resultan equivalentes y el problema está resuelto (p. 54).

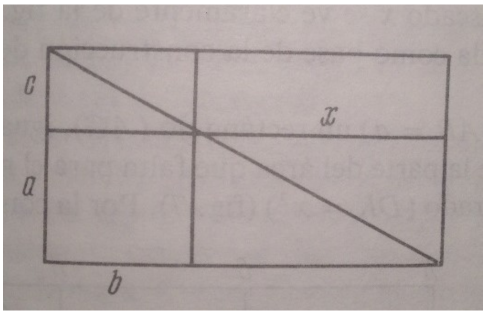


Figura 1: Método de anexión de áreas (Ríbnikov, 1987, p. 55)

Es pertinente mencionar que históricamente, aceptar un número negativo como la solución de una ecuación representó gran dificultad. Gavilán (2011) destaca que en el siglo XV aparece por primera vez un número negativo aislado en una ecuación en el libro escrito por el francés Nicolás Chuquet (1445-1488) bajo el título “Triparty en la science des nombres”. Más tarde Stifel (1487-1567) presenta un tratamiento de los números negativos en su obra “Arithmetica integra”. Sin embargo, no admite los números negativos como solución de ecuaciones, llamándoles “numeri absurdi”. Hasta el año 1545, cuando Cardano (1501-1576) dio a conocer la solución general de la ecuación cúbica y la cuartica cambió la situación. Invariablemente, cuando “las tres raíces de una ecuación cúbica sean reales y no nulas, la fórmula de Cardano–Tartaglia conduce a raíces cuadradas de números negativos” (p. 97).

La reseña histórica nos ayuda a darnos cuenta de las dificultades que tuvieron nuestros antepasados para resolver los problemas matemáticos. Derivado de la historia, podemos comprender que el conocimiento matemático no se da de manera ordenada o secuencial como aparece en los libros de texto. Comprender las antiguas formas de resolver un problema ayuda a lograr un empoderamiento como profesor de matemáticas. Gavilán (2011, p. 97) manifiesta que los contenidos presentados en el álgebra escolar se centran en la resolución de ecuaciones, tal y como lo hizo el álgebra durante muchos siglos. Aunado a esto, es relevante mencionar que el álgebra fue evolucionando desde lo concreto para llegar a lo simbólico.

4.2 DIMENSIÓN COGNITIVA

Se considera que para que una buena enseñanza se dé, se requiere analizar la forma en que los alumnos aprenden los contenidos matemáticos. A continuación, se analizan los errores más comunes que cometen alumnos de diferentes niveles educativos cuando trabajan con ecuaciones lineales con una incógnita y que reportan algunos investigadores. Muchos de los errores que cometen los alumnos se dan en el transito del pensamiento aritmético al algebraico.

Durante la década de los ochenta, los investigadores de Matemática Educativa se dieron cuenta de que incurrir en algún error es normal en el proceso de enseñanza – aprendizaje. En Brousseau, Davis y Werner (1986, citado en Socas 2011, p. 11), se señala que

> los errores que cometen los alumnos muestran, en algunos casos, un patrón consistente; los alumnos tienen con frecuencia concepciones inadecuadas (“misconceptions”) sobre los objetos matemáticos; a veces, estas concepciones inadecuadas los conducen a usar procedimientos equivocados que no son reconocidos como tales por sus profesores; llegan a utilizar, en algunos casos, métodos propios ignorando el método propuesto por el profesor. Esto les lleva a señalar posibles caminos en los que el error puede presentarse: los errores como consecuencia de conceptos inadecuados, los errores como la aplicación correcta de un procedimiento sistematizado que es inapropiado, los errores como consecuencia del uso de métodos propios del estudiante, en general informales, entre otros.

Asimismo, Matz (1980, citado en Ruano, Socas y Palarea, 2008, p. 312) manifiesta que "los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación". Es virtud de ello, Fuentes (2016, p. 44) apunta que, al comprender los errores, "la estrategia estará enfocada en incidir sobre el proceso de pensamiento, lo que supone elaborar unos materiales adecuados y definir una metodología enfocada a subsanar dichos errores".

Aunado a lo anterior, Kieran y Filloy son considerados pioneros en cuanto a las investigaciones acerca de la transición del pensamiento aritmético al algebraico. En su investigación, titulada *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica* (1989), se plantean como objetivo describir los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra de secundaria. Para lograr este objetivo, se analizan las principales investigaciones alusivas al tema para desarrollar una perspectiva teórica que permita proponer nuevos diseños experimentales.

Específicamente en los aspectos que influyen en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado, este trabajo expone lo siguiente:

- Los alumnos tienen dificultad con la concatenación de símbolos. En aritmética poner un signo junto a otro significa sumar ($2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ o $35 = tres\ decenas + 5\ unidades$) y en álgebra el significado corresponde a multiplicar ($2a = 2 * a$).
- Los alumnos que inician sus estudios en álgebra no consideran que sea necesario el uso del paréntesis para ordenar las operaciones. Ellos realizan las operaciones de izquierda a derecha, tal y como están escritos los términos.
- Los educandos no utilizan las reglas de jerarquización de las operaciones. Suelen dar como resultado 25 a la expresión $3 + 2 \cdot 5$.
- En aritmética, el signo igual se utiliza generalmente para dar el resultado de una operación, pero en álgebra tiene un carácter bidireccional, para representar equivalencia o equilibrio. La comprensión de estos dos significados del signo igual representa un reto para los educandos.
- A los alumnos se les complica resolver ecuaciones que tienen muchos términos, por ejemplo $2(5a + 1) + 2 = 44$. Ellos no perciben que la ecuación anterior es equivalente a $10a + 4 = 44$.
- A los jóvenes se les dificulta comprender la relación que existe entre las operaciones y sus inversas.
- Entender el concepto de equivalencia es otro reto para los jóvenes. Ellos no conocen las restricciones que determinan si las transformaciones están permitidas.

Dentro de este mismo artículo se menciona que en la primaria los niños resuelven ecuaciones sencillas como $3 + \square = 8$ (llamada proposición de "sumando faltante"). Sin embargo, estas ecuaciones no se presentan contextualizadas, por lo cual, los niños carecen de apoyo para interpretarlas en su vida cotidiana. Por otro lado, estos autores clasifican los enfoques de resolución aplicados por los alumnos para las ecuaciones en tres tipos: a) intuitivo, b) substitución por tanteo y c) formal.

a) El enfoque **intuitivo** involucra la utilización de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento (Kieran y Filloy, 1989).
b) La **sustitución por tanteo**, consiste en resolver las ecuaciones substituyendo valores diferentes. El hecho de sustituir repetidamente "consume mucho tiempo y coloca una carga pesada en la memoria de trabajo, excepto si todos los intentos se anotan de algún modo" (Kieran y Filloy, 1989, p. 232).
c) Los métodos de resolución formal engloban a "la transposición de términos (esto es "cambiar de lado –cambiar de signo") y ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación" (Kieran y Filloy, 1989, p. 232).

Toma importancia destacar que los alumnos perciben de manera diferente el procedimiento que consiste en hacer la misma operación en ambos lados de la ecuación y la táctica que se basa en la transposición de términos ("cambiar de lado – cambiar de signo"). Sin embargo, muchos profesores creen que la transposición de términos es una versión abreviada del otro método.

Además, en algunos experimentos de enseñanza en lo que se usaron modelos concretos se encontró que

> muchos estudiantes tendían a anclarse en los modelos y parecían incapaces de ver los lazos entre las operaciones que ejecutaban en el modelo y las operaciones algebraicas correspondientes. Como resultado de ello, los estudiantes permanecían dependientes del modelo incluso cuando éste ya no era útil. De hecho los estudiantes intentaban usar el modelo para ecuaciones sencillas que podían haber sido resueltas, más fácilmente, mediante los métodos intuitivos de resolución de ecuaciones que habían usado antes de que se les enseñara el nuevo método. Estaban hasta tal punto anclados en los procesos desarrollados en el modelo concreto que se les había enseñado, que parecían olvidar los métodos que usaban previamente (Kieran y Filloy, 1989, p. 232).

En esta misma investigación se expone que los alumnos que se acercan por primera vez al álgebra, carecen de un conocimiento de carácter estructural en el momento de interactuar con las ecuaciones de primer grado con una variable.

> [Los alumnos] no saben cómo mostrar que una solución incorrecta está mal obtenida, excepto volviendo a resolver la ecuación dada. No parecen ser conscientes de que una solución incorrecta está mal obtenida, excepto volviendo a resolver la ecuación dada. No parecen ser conscientes de que una solución incorrecta, si se substituye en la ecuación inicial, da origen a valores diferentes para el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación. Ni tampoco se dan cuenta de que solo la solución correcta da origen a

> valores equivalentes para las dos expresiones en cualquiera de las ecuaciones de la cadena que resuelve la ecuación (Kieran y Filloy, 1989, p. 233).

En la obra **Ecuaciones lineales con una incógnita** (Cifuentes, Dimaté, Rincón, Villegas, Serrano, Santoyo, Moreno, Flores y Lupiánez, 2016) se muestra la siguiente tabla; en la cual dan a conocer los posibles errores en los que pueden incurrir los alumnos:

Tabla 1. Posibles errores en los que pueden incurrir los alumnos

Error	Descripción
D1 Dificultad para dar uso y significado algebraico a la letra	
E1	No identificar una variable a menos que se represente por x
E2	Utilizar la misma letra para representar varias cantidades
E3	Confundir la variable x con la notación del producto
D2 Dificultad para pasar del lenguaje verbal al algebraico o viceversa	
E4	Representar en forma incorrecta la traducción de una expresión verbal al lenguaje simbólico
E5	No reconocer las palabras del lenguaje cotidiano que se relacionan con las operaciones
E6	Hacer uso inadecuado del paréntesis, para expresar cantidades
E7	Falta de comprensión en el enunciado de un problema debido a dificultades de lenguaje
D3 Obstáculos ocasionados por falta de aprendizaje de conceptos básicos del tema	
E8	Confundir un polinomio con una ecuación
E9	Confundir una ecuación con una identidad
D4 Dificultad para realizar operaciones con números reales y/o aplicar las propiedades que se utilizan en la solución de ecuaciones	
E10	Reducir inadecuadamente términos semejantes
E11	Efectuar únicamente el primer producto al aplicar la propiedad distributiva

E12	Reconocer e interpretar de manera incorrecta el valor semántico del igual
E13	Confundir las reglas de la adición y la sustracción al sustituir los signos de agrupación
E14	Aplicar de manera incorrecta la ley de los signos
D5 Dificultad para transformar ecuaciones equivalentes	
E15	Igualar dos expresiones que no representan la misma cantidad
E16	Transponer en forma inadecuada los términos al aplicar el algoritmo de la solución de una ecuación
E17	Confundir la reducción de términos semejantes de las expresiones algebraicas con la aplicación de las propiedades de la potenciación
E18	Asignar datos a variables que no corresponden
E19	Realizar la sustitución numérica en forma incorrecta al probar los resultados obtenidos
D6 Dificultad al remplazar un valor en una fórmula	
E20	Asignar un valor dado a una variable que no corresponde en una fórmula
D7 Dificultad para interpretar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y establecer relaciones entre las cantidades	
E21	No relacionar los resultados obtenidos con el enunciado durante el proceso de solución de una tarea

Así también, Hernández, Rodríguez y Romero (2012) detectaron que a pesar de que el concepto de ecuación se aborda desde la Primaria, presenta inconsistencias en su aprendizaje por parte de los alumnos aún en niveles avanzados. Esta investigación tiene el objetivo de llevar a cabo un tratamiento didáctico del concepto de ecuación en Primaria y Secundaria para estar al tanto del Discurso Matemático Escolar relacionado con este concepto. Se utilizan los libros de texto como unidad de análisis debido a que los profesores se apoyan en ellos para dar sus clases.

Los resultados del estudio reflejan que el concepto de Ecuación es abordado con problemas fuera del contexto de las matemáticas de manera casi nula. Se observa que el enfoque es puramente algorítmico ya que no se hace uso de representaciones gráficas para explicar el concepto. Al analizar algunos libros de secundaria se observa que sólo algunos definen el concepto de Ecuación; éstos inician haciendo la comparación con el equilibrio de una balanza y finalizan proponiendo ejercicios que se resuelven de manera mecánica.

En particular, resulta interesante que sólo algunos libros de secundaria definen el concepto de Ecuación; éstos inician comparando una ecuación con el equilibrio de una balanza y finalizan proponiendo ejercicios que se resuelven mecánicamente.

Por su parte, Gavilán (2011) señala que los alumnos son capaces de resolver problemas de forma verbal, pero no saben traducir al lenguaje algebraico. Ellos no saben plantear las ecuaciones representativas de los datos. Así también, esta investigadora señala que las dificultades en cuanto a la resolución de ecuaciones aparecen cuando el alumno

> se enfrenta en primer lugar con un nuevo significado del signo igual, que coexiste con el significado puramente aritmético; en segundo, con la relación entre una operación y su inversa a la hora de transponer términos; y en tercero, con los obstáculos provenientes del manejo del signo menos y sus diferentes significados: como indicativo del signo de una cantidad o como operación indicada, ante la cual muchas veces no ven la necesidad de emplear paréntesis por atribuirle las mismas propiedades que al signo más. Además, continúan las dificultades aritméticas relacionadas con el uso de los paréntesis y la jerarquía de las operaciones (p. 66).

En este mismo artículo se exponen las dificultades que se generan en el alumno con el discurso del docente, en particular lo relativo a la aplicación de las propiedades tanto de campo como de igualdad. Las explicaciones suelen contener frases como: “lo que está sumando pasa restando”.

> Damos a entender que efectivamente desaparece de un miembro de la ecuación y sin saber cómo ni por qué, aparece en el otro. De manera que es muy posible que incluso alumnos que son capaces de resolver adecuadamente complicadas ecuaciones matemáticas, no sepan a qué se deben los pasos que dan cuando van buscando la solución y más bien piensan que solo se trata de aplicar las reglas que tantas veces han oído en clase. Prueba de ello es la dificultad que tienen en general para mostrar que una solución es incorrecta. El camino preferido consiste en volver a resolver la ecuación dada, sin darse cuenta que basta con sustituir la solución en la ecuación para que, si es incorrecta, dé lugar a valores diferentes en la derecha y en la izquierda (p. 100-101).

Los errores cometidos por los alumnos durante el aprendizaje de las ecuaciones lineales pueden servir para prever errores potenciales en los alumnos. Además, con este análisis se puede comprender el razonamiento de los alumnos, la manera de interactuar con el contenido matemático y las dificultades que enfrentan. Para corregir los errores es necesario influir en el proceso de pensamiento (Fuentes, 2016) y enfrentar al alumno con sus obstáculos para que él mismo los supere. Los errores son parte del aprendizaje; es muy raro que un alumno aprenda sin equivocarse nunca. Quien no intenta aprender, jamás tendrá desaciertos.

Por otro lado, con la finalidad de verificar los conocimientos previos de los alumnos correspondientes al grupo experimental (del cual se hablará más a detalle en el CAPÍTULO VI) y corroborar los errores en los que incurren, se les aplicó una **prueba diagnóstica**. Dicha prueba se realizó el día 25 de noviembre del 2019 y consta de cuatro reactivos inmersos en dos preguntas abiertas (Figura 2).

Nombre del alumno: ______________________________ Edad: _____

Grupo: __________________ Fecha: ______________

Instrucciones: Contesta lo que se te pide.

1. ¿Qué entiendes por ecuación?

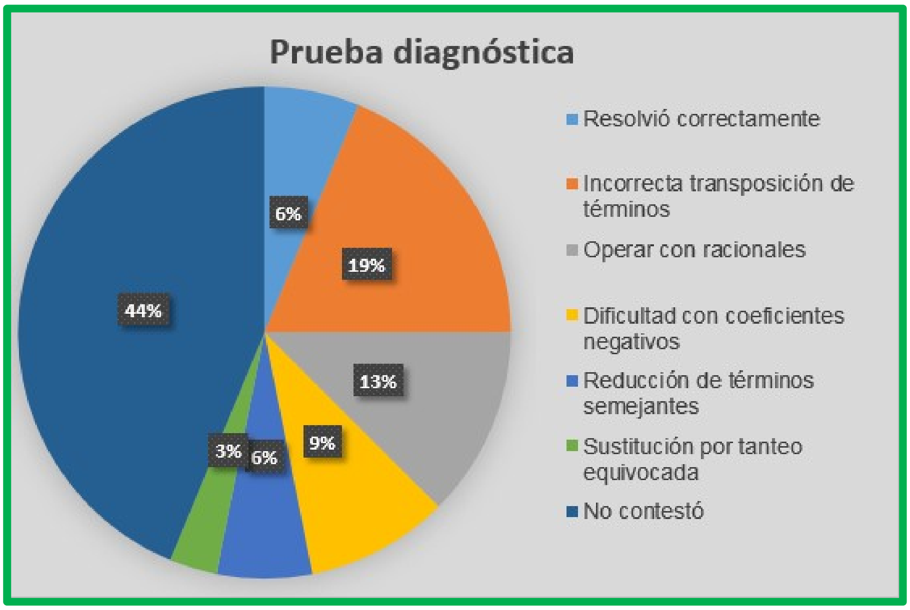
2. De la siguiente ecuación: $18000 - x = \frac{1}{2}x$

   a) Indica cual es la incógnita.

   b) Resuelve la ecuación y anota el procedimiento al reverso.

Figura 2: Prueba diagnóstica

En la prueba diagnóstica se registraron 32 participantes; de los cuales únicamente 2 contestaron de forma correcta la ecuación: $1800 - x = \frac{1}{2}x$. Los 30 alumnos restantes exhiben diferentes errores (Gráfica 2).



Gráfica 1: Resultados de la prueba diagnóstica

Adicionalmente, se detectó que 17 alumnos tienen nociones del concepto *ecuación de primer grado con una incógnita* y 22 jóvenes pudieron identificar correctamente la incógnita en la ecuación antes mencionada.

4.3 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

En esta dimensión se hace un análisis de documentos en los que aparece el tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita y que son utilizados para su enseñanza. En concreto, se analizan el programa de la materia de Matemáticas I del Nivel Medio Superior y dos libros sugeridos en el mismo.

4.3.1 Análisis del programa de estudio para el nivel Medio Superior

El programa en cuestión corresponde al que proporciona la Dirección General de Bachillerato del año 2017. El tema de ecuaciones lineales debe abordarse en el primer semestre del nivel Bachillerato. Dicho programa señala que la disciplina de Matemáticas tiene como eje principal desarrollar el pensamiento algebraico para interpretar situaciones reales e hipotéticas. El desarrollo de este pensamiento le permite al alumnado proponer alternativas de solución desde diversos enfoques, priorizando habilidades del pensamiento tales como:

- Búsqueda de patrones.

- Resolución de problemas.
- Análisis de tablas, gráficas, diagramas y textos.
- Interpretación y tratamiento de la información.

Específicamente, en la asignatura de Matemáticas I, el programa (en la Figura 3 se muestra la carátula) dedica el Bloque VI (Figura 4) al estudio de las Ecuaciones Lineales (DGB, 2017). El aprendizaje que se espera desarrollar en el bloque en cuestión, consiste en conseguir que los alumnos adquieran las competencias necesarias para resolver problemas de la vida cotidiana en forma colaborativa. Esto mediante el uso de métodos gráficos y analíticos asociados a las ecuaciones lineales (Figura 5). De conformidad con esto, para estudiar el Bloque, el programa señala que se le deben asignar 14 horas de la totalidad del semestre (Figura 4). En estas 14 horas se pretenden abordar los siguientes objetos de aprendizaje:

- Ecuaciones lineales.
    - ✓ Una variable.
    - ✓ Dos variables.
    - ✓ Tres variables.

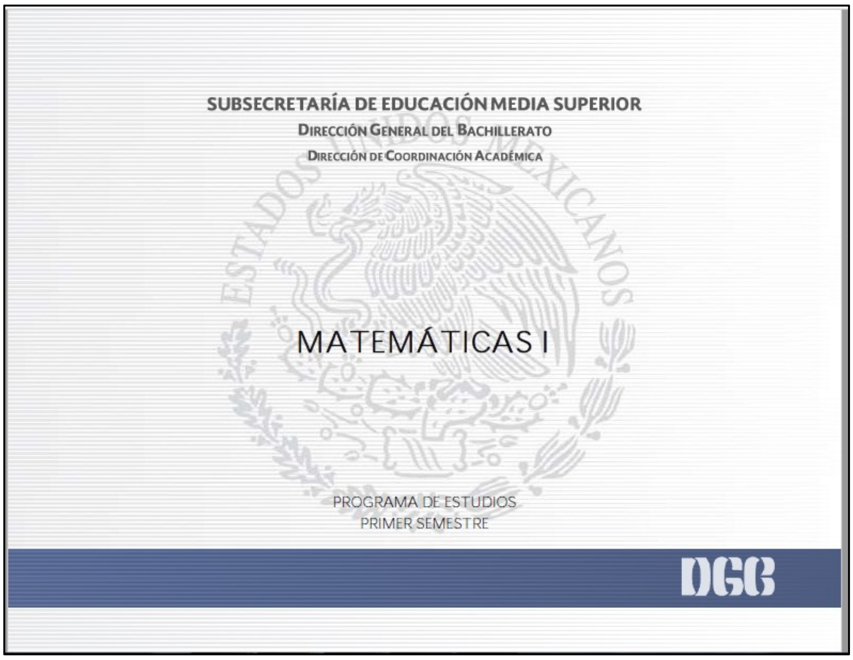


Figura 3: Carátula del programa de Matemáticas I

23

DGB

Bloque VI

Nombre del Bloque	Horas Asignadas
Ecuaciones lineales.	14

Propósito del Bloque
Resuelve modelos lineales que representan fenómenos de la vida cotidiana.

Interdisciplinariedad	Ejes Transversales
Química I. Taller de Lectura y Redacción I. Informática I. Ética I.	Eje transversal Social. Eje transversal Ambiental. Eje transversal de Salud. Eje transversal de Habilidades Lectoras.

DGB/DCA/06-2017

Figura 4: Página correspondiente al Bloque VI

24

DGB

CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes Esperados
CG 1.1 CG 4.1 CG 5.1 CG 5.6 CG 6.4	CDBM 1 CDBM 2 CDBM 4 CDBM 5	Ecuaciones lineales. • Una variable. • Dos variables. • Tres variables.	Representa las variables de un problema en su contexto. Deduce alternativas de solución a problemas reales. Propone problemas a resolver con ecuaciones lineales. Describe modelos de solución de sistemas de ecuaciones lineales (analíticos y gráficos).	Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.	Resuelve problemas de forma colaborativa, mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución. Desarrolla estrategias de manera crítica para el planteamiento y la solución de problemas de su contexto.

DGB/DCA/06-2017

Figura 5: Tabla correspondiente al Bloque VI

Derivado de lo anterior, se observa que el programa le da mucha importancia a la solución de problemas aplicados. Esto con el propósito de que el alumnado aplique lo aprendido en su contexto. Así también, el programa fomenta el uso de métodos analíticos para resolver los problemas. Esta es la parte que interesa retomar en este trabajo, es decir, favorecer en el alumno la resolución analítica de ecuaciones. Por otro lado, relativo al tiempo asignado, se considera que es necesario dividir las 14 horas en tres temas; de los cuales, únicamente se abordarán las ecuaciones lineales de una variable para los objetivos de este proyecto.

Adicionalmente, el rol del docente (el cual tiene un papel fundamental en el proceso de enseñanza- aprendizaje), según el mencionado programa (DGB, 2017) es el siguiente:

- ✓ Facilita el proceso educativo diseñando actividades significativas que promueven el desarrollo de las competencias (conocimientos, habilidades y actitudes).
- ✓ Propicia un ambiente de aprendizaje que favorece el desarrollo de habilidades socioemocionales del alumnado, tales como la confianza, seguridad, autoestima, entre otras.
- ✓ Propone estrategias disciplinares y transversales favoreciendo el uso de herramientas tecnológicas de la información y la comunicación.
- ✓ Diseña instrumentos de evaluación que atienden el enfoque por competencias.

4.3.2 Análisis de los libros de texto

En esta parte, se examinan dos libros de texto que vienen especificados en el programa de estudio como fuentes de consulta básica (Figura 6). Estos dos libros se titulan:

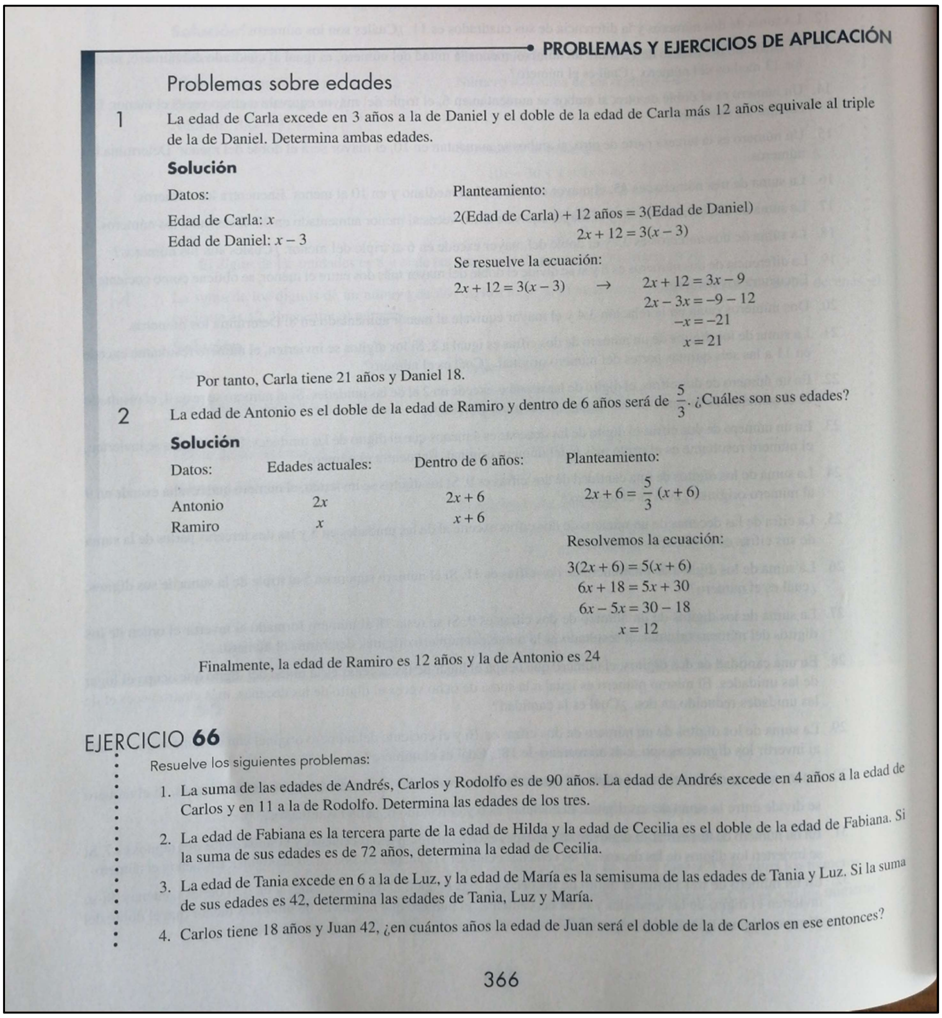
1) Matemáticas simplificadas (Colegio Nacional de Matemáticas, 2015).
2) Álgebra y trigonometría (Sullivan, 2013).

Figura 6: Fuentes de consulta recomendadas por el programa de estudio

En la primera obra (Colegio Nacional de Matemáticas, 2015) se pone a consideración del alumno una reseña histórica de las ecuaciones lineales enfatizando en la figura de Evariste Galois como fundador el Álgebra Moderna. Luego de esto, se dan a conocer los conceptos generales del tema, tales como igualdad, ecuación, solución de una ecuación y grado de una ecuación. Enseguida se especifica lo que es una ecuación lineal, y de manera breve, se menciona cómo se resuelve. Después, se muestran tres ejemplos y la demostración del teorema "$si\ a \neq 0, x = \frac{b}{a}\ es\ solución\ única$", para la ecuación lineal $ax = b$. A continuación, se muestran más ejemplos y se le solicita al alumno que resuelva ejercicios similares. Este libro da mucha importancia a los tipos de ecuaciones (con signos de agrupación y productos indicados, fraccionarias, con valor absoluto y con literales), es decir, a las formas en que se puede presentar una ecuación lineal. Por último, el libro muestra, a manera de ejemplos, varios ejercicios de aplicación (sobre edades, mezclas, costos, el tiempo requerido para realizar un trabajo, comparación de distancias y tiempos y aplicación a la geometría plana) para luego proponerle al alumno que resuelva otros tantos.

Tomando en cuenta lo anterior, el libro maneja una estructura tradicional, en la cual se presenta la teoría, luego algunos ejemplos y por último ejercicios propuestos a los alumnos. Se considera que hace falta recuperar los conocimientos previos de los alumnos para dar un primer acercamiento. Además, no se identifica un tratamiento didáctico para introducir el concepto de **incógnita**. Por otro lado, sorpresivamente este libro no utiliza la analogía de la balanza para abordar la noción de **igualdad**. Tampoco se aprecia una transición del pensamiento aritmético al algebraico. Además, en ningún momento se menciona la aplicación de las **propiedades** de la **igualdad** para resolver ecuaciones lineales. Cabe mencionar que esta obra propicia la mecanización de los procedimientos. Se manejan muchos tipos de ecuaciones, mas no se argumenta el porqué de cada paso que se realiza para solucionarlas.

Entre las cosas positivas que se hallan en este libro están el manejo de **conceptos** y algunas **demostraciones**. Adicionalmente, este libro muestra una gran variedad de ejercicios y problemas resueltos (Figura 7). Lo cual representa otra fortaleza de esta obra. Es de suma importancia analizar tanto los ejemplos como los problemas para considerar agregarlos a la situación didáctica que se pretende diseñar.



PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre edades

1 La edad de Carla excede en 3 años a la de Daniel y el doble de la edad de Carla más 12 años equivale al triple de la de Daniel. Determina ambas edades.

Solución

Datos:

Edad de Carla: x

Edad de Daniel: $x - 3$

Planteamiento:

2(Edad de Carla) + 12 años = 3(Edad de Daniel)

$$2x + 12 = 3(x - 3)$$

Se resuelve la ecuación:

$$2x + 12 = 3(x - 3) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 12 &= 3x - 9 \\ 2x - 3x &= -9 - 12 \\ -x &= -21 \\ x &= 21 \end{aligned}$$

Por tanto, Carla tiene 21 años y Daniel 18.

2 La edad de Antonio es el doble de la edad de Ramiro y dentro de 6 años será de $\frac{5}{3}$. ¿Cuáles son sus edades?

Solución

Datos:	Edades actuales:	Dentro de 6 años:
Antonio	$2x$	$2x + 6$
Ramiro	x	$x + 6$

Planteamiento:

$$2x + 6 = \frac{5}{3}(x + 6)$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 3(2x + 6) &= 5(x + 6) \\ 6x + 18 &= 5x + 30 \\ 6x - 5x &= 30 - 18 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Finalmente, la edad de Ramiro es 12 años y la de Antonio es 24

EJERCICIO **66**

Resuelve los siguientes problemas:

1. La suma de las edades de Andrés, Carlos y Rodolfo es de 90 años. La edad de Andrés excede en 4 años a la edad de Carlos y en 11 a la de Rodolfo. Determina las edades de los tres.
2. La edad de Fabiana es la tercera parte de la edad de Hilda y la edad de Cecilia es el doble de la edad de Fabiana. Si la suma de sus edades es de 72 años, determina la edad de Cecilia.
3. La edad de Tania excede en 6 a la de Luz, y la edad de María es la semisuma de las edades de Tania y Luz. Si la suma de sus edades es 42, determina las edades de Tania, Luz y María.
4. Carlos tiene 18 años y Juan 42, ¿en cuántos años la edad de Juan será el doble de la de Carlos en ese entonces?

366

Figura 7: Ejercicios y problemas resueltos (Colegio Nacional de Matemática, 2015)

En cuanto al segundo libro de texto (Sullivan, 2013), se encuentra que es mucho más amigable para el alumno didácticamente hablando. Se sugiere al alumno que antes de empezar con el tema haga un repaso de las propiedades de los números reales y del dominio de una variable; y también, que resuelva ciertos problemas donde pondrá en juego los prerrequisitos para abordar el tema de las ecuaciones lineales. Entrando ya en la temática de las ecuaciones, el libro texto da a conocer la parte teórica de las ecuaciones, muestra un procedimiento para obtener ecuaciones equivalentes, la **definición formal** de ecuación lineal de una variable, los pasos para resolver una ecuación lineal y pasos para resolver problemas aplicados.

A pesar de que este libro es mejor didácticamente hablando, no proporciona al alumno ningún tratamiento para introducir el concepto de incógnita. Además, se observa que, aunque se proporciona al alumno los pasos para resolver una ecuación lineal, en estos pasos no se mencionan las propiedades de la igualdad. Este aspecto es importante en el sentido de que no se está propiciando en el alumno un entendimiento de los conceptos.

Como conclusión del análisis didáctico se encuentra que el rol del docente solicitado en el programa se apega muy bien al fundamento teórico que se pretende usar en el diseño de la situación didáctica. Se menciona esto porque el programa señala que el docente debe diseñar actividades significativas y transversales. Además, el alumno debe resolver problemas relacionados con su contexto. De conformidad con esto, la teoría requiere que se proponga al alumno un problema en la **situación adidáctica**, la cual será diseñada por el docente. Esta es una razón que fortalece la validez de la elección de la Teoría de Situaciones Didáctica en mi trabajo.

En cuanto a los libros de texto es preciso resaltar que en los procedimientos mostrados para resolver una ecuación lineal no se mencionan las propiedades de la igualdad. Creo que involucrar dichas propiedades es imperativo si se quiere favorecer en el alumno la comprensión de los conceptos matemáticos. Por el contrario, me parece atinado que en los ejemplos se promueve la comprobación de la solución de las ecuaciones. Dicha comprobación es un aspecto que me interesa retomar en el diseño de la secuencia de enseñanza.

CAPÍTULO V: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

En este apartado se presenta la situación didáctica que se construyó tomando en cuenta el análisis preliminar que se detalla en el capítulo anterior.

El contenido se estructura de la siguiente manera:

1. Descripción de las actividades: se presentan en una tabla que incluye el objetivo que se tiene, una justificación respecto a qué análisis la desencadena, así como la estrategia llevada a cabo para su implementación y una predicción de los resultados esperados, es decir, el **análisis a priori**.
2. Descripción de las **variables didácticas** a utilizar en cada una de las actividades.

5.1 DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	JUSTIFICACIÓN
ACTIVIDAD 1 El propósito de la primera actividad es que el alumno comprenda los conceptos de incógnita, igualdad y ecuación de primer grado con una incógnita.		
1. Lee el siguiente enunciado y contesta lo que se te pide: *El peso de una piedra más 8 kilogramos es igual a 33 kg.* La siguiente expresión representa la traducción del enunciado. $\_\_\_\_ + 8 = 33$ a) Determina el peso de la piedra encontrando el elemento faltante en la igualdad anterior. b) Describe la estrategia que utilizaste para encontrar el elemento faltante. c) Escribe paso a paso las operaciones que utilizaste para	Esta es una actividad correspondiente a la situación de **acción**, el alumno, de manera individual, interactúa con el medio basándose en sus propias motivaciones y razonamientos. Se da un primer acercamiento con el concepto de **incógnita** en una ecuación.	Esta actividad involucra una proposición de **sumando faltante** mencionada en el **análisis cognitivo**. Además, ésta se **contextualiza** tomando en cuenta el análisis epistemológico. Se pide calcular el **peso** de una **piedra** considerando que los **Babilonios** planteaban ecuaciones que también lo solicitaban. También se retoma el

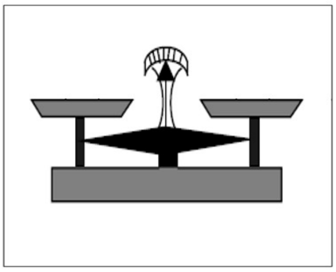
<table>
<tr>
<td>encontrar el elemento faltante.

2. Considera el siguiente enunciado:
Se obtienen 23 kg si se multiplica por tres el peso de una roca y se le suman 2 kg.
$23 = \_\_\_\_ * 3 + 2$ (esta expresión no se muestra en las hojas para el alumno)
a) ¿Cómo quedaría la expresión con el elemento faltante?
b) Escribe paso a paso las operaciones que utilizaste para encontrar el elemento faltante.
c) ¿Cuál es el peso de la piedra?</td>
<td></td>
<td>análisis epistemológico tomando en cuenta que en sus inicios el álgebra no utilizaba el simbolismo. Así también, en este ejercicio se inicia la enseñanza del tema utilizando elementos concretos.
Además, se favorece el enfoque de resolución intuitivo mencionado en el análisis cognitivo.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Se espera que:
- Para el punto 1, el alumno determine el elemento faltante por medio de la operación inversa $33 - 8 = 25$.
- En el punto 2, el alumno llegue a la respuesta correcta utilizando el tanteo intuitivo.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>3. Reúnete en equipo y considera lo siguiente:

En la imagen aparecen tres balanzas que están en equilibrio; si disponemos de tantos objetos como sea necesario y de iguales características a los propuestos, dibujar otra balanza diferente que esté en equilibrio.

Balanza diferente



a) Explica por qué decidieron dibujar esa balanza.</td>
<td>Esta parte se aprovecha como situación de validación, pues una vez presentado el problema como una ecuación se hará su similitud y validación con el uso de la balanza.

En esta parte se pretende que el alumno establezca una correspondencia entre el equilibrio de la balanza y el concepto de igualdad.</td>
<td>En esta actividad se pone de manifiesto el equilibrio de las balanzas pictóricas para hacer evidente el carácter bidireccional del signo igual (=), para representar equivalencia y equilibrio; tal y como se presentó en la dimensión cognitiva del análisis preliminar.

En ninguno de los dos libros de texto mencionados en la dimensión didáctica se proporciona un tratamiento didáctico para abordar la noción de igualdad. Por este motivo, mostrar la noción de igualdad es otra razón que justifica esta actividad.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Se espera que:
- Se pueden presentar errores debido a la mala elección de los pesos a colocar, lo que daría evidencia de una comprensión deficiente del concepto de igualdad.
- Al ver que existen diferentes propuestas, se entienda que el conjunto solución puede no ser el mismo en todos los casos. Además, el equilibrio en la balanza tiene correspondencia con la “equivalencia”.</td>
</tr>
</table>

4. Representen la ecuación en la balanza y manifiesten ante el grupo si la respuesta es correcta o incorrecta y por qué.	En esta parte se aprovecha como situación de **validación**. Los alumnos discutirán con el docente acerca de lo que sucede con la balanza al colocar los pesos propuestos. En esta situación se harán las correcciones necesarias y los mismos alumnos se asegurarán de la pertinencia de sus respuestas. En esta parte se pretende que el alumno verifique la correspondencia entre el equilibrio de la balanza y el concepto de igualdad.	En esta actividad se le pide a cada equipo que pase a colocar los pesos que propuso en la actividad anterior. Esto con el objeto de verificar que la balanza se equilibre con los pesos propuestos. De acuerdo con la dimensión cognitiva, se pretende que los alumnos expongan su enfoque de resolución y que validen sus propuestas empleando los conceptos de equivalencia y equilibrio.

Se espera que:

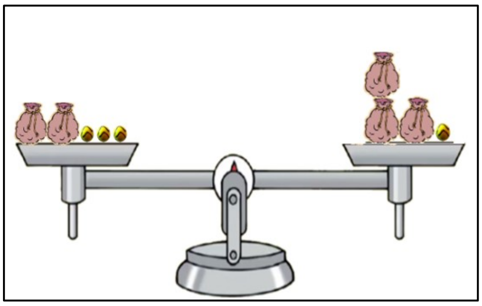
- Los alumnos se den cuenta de que el equilibrio que se produce en la balanza tiene correspondencia con la equivalencia y con el concepto de **igualdad**.
- Si una respuesta es incorrecta el alumno visualizará un desequilibrio en la balanza.

5. Escucha y participa en la plenaria dirigida por el profesor. **6. De acuerdo a lo que se presentó en las cinco actividades anteriores, escribe con tus propias palabras el significado de los siguientes conceptos:** a) igualdad b) incógnita c) ecuación de primer grado con una incógnita.	Esta actividad está pensada para la situación de **institucionalización**. En esta parte se retoman y formalizan los hallazgos producidos en las situaciones anteriores. Los alumnos escuchan y participan en la plenaria dirigida por el profesor. Se espera que los alumnos definan los conceptos de: igualdad, incógnita, ecuación, ecuación de primer grado con una incógnita.	Atendiendo al análisis cognitivo, esta actividad se utiliza para resaltar los conceptos y su significado. Esto favorecerá la comprensión de los alumnos para evitar que resuelvan las ecuaciones de manera mecánica.

Institucionalización:

- Jóvenes: Las actividades que llevamos a cabo hasta el momento nos servirán para establecer la definición de **ecuación de primer grado con una incógnita.**
- Lo primero que hicimos fue encontrar el valor faltante de la operación ____ $+ 8 = 33$, a la cual podemos llamar **igualdad,** ya que en ambos lados del símbolo igual se obtiene el mismo valor.
- Así pues, una **ecuación** es una igualdad de expresiones algebraicas que contienen por lo menos una incógnita (Garrido *et al.*, 2015).
- Esta parte nos sirve para entender lo que es la **incógnita.** La incógnita una

cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación, se representa a través de letras. Entonces, en lugar de poner ____ se pudo haber colocado la x, o cualquier otra letra. - Resolver una ecuación implica hallar el valor de la incógnita. Este valor hace que la igualdad se cumpla. - De manera similar, la expresión que ustedes encontraron $47 = \_\_\_\_ * 3 + 2$. Es una igualdad, y si en lugar de ______ le pongo $47 = a * 3 + 2$. Entonces sería una **ecuación lineal con una incógnita**, ya que la variable tiene exponente uno y solo existe una variable "a". - Lo que se llevó a cabo con las balanzas se hizo para evidenciar que a pesar de ser propuestas diferentes de cada equipo la balanza se equilibró. Al equilibrarse la balanza se mantiene la equivalencia en la ecuación. Lo que hace alusión a la definición de **igualdad**. Para encontrar la balanza diferente los equipos tuvieron que proponer acomodos de las figuras de tal manera que se mantuviera el equilibrio. Trasladando este hecho a las ecuaciones, se debe mantener la equivalencia en la igualdad. - En resumen, cada equipo propuso su propia igualdad y la comprobó. - Ustedes vieron como el primer equipo si se equilibró, pero con el equipo tres no sucedió porque no se mantiene la equivalencia. - Si todos los equipos lo hacen bien, yo propondré una balanza que esté mal.
ACTIVIDAD 2 La intención de esta parte es que los alumnos aprendan a resolver una ecuación de primer grado con una incógnita utilizando las propiedades de la igualdad.

<table>
<tr>
<td>1. En la siguiente balanza en equilibrio queremos determinar cuántas canicas hay en una bolsa. Todas las bolsas contienen el mismo número de canicas.

¿Cuál de las siguientes expresiones crees que represente mejor el problema? Subráyala.
a) $2 + 3x = 3 + x$
b) $2 + 3x = 3x + 1$
c) $2x + 3 = 3x + 1$
d) $2x + 3 = 3 + x$

a) De acuerdo con la ecuación que elegiste, ¿cuántas canicas le caben a cada bolsa?
b) Explica qué estrategia utilizaste para encontrar el número de canicas que hay en cada bolsa.
c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar el número de canicas.</td>
<td>Esta parte se utiliza para la situación de acción.
Se pretende que el alumno elija una opción basándose en sus conocimientos y su propio raciocinio.
Además, se pretende que resuelva la ecuación por sus propios medios.
El alumno utilizará su razonamiento para representar lo que sucede en la balanza mediante el lenguaje simbólico</td>
<td>En esta actividad se utilizan elementos del análisis didáctico, ya que se pretende representar con una ecuación una situación de la vida cotidiana del alumno como lo es la balanza.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Se espera que:
- Los alumnos que comprendieron los conceptos de incógnita, ecuación e igualdad elijan la opción correcta.
- Algunos alumnos se equivoquen debido a problemas para traducir al lenguaje</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">algebraico lo presentado en la imagen de la balanza.
- Algunos jóvenes resuelvan la ecuación intuitivamente y otros usando el método de transposición de términos.
- Los alumnos que usen el método de transposición de términos presenten respuestas incorrectas debido a errores a la hora de reducir términos semejantes, utilizar de manera incorrecta la ley de los signos o aplicar de manera errónea el inverso multiplicativo o el inverso aditivo.</td></tr>
<tr><td>2. Reúnete en equipo y compara tu respuesta con la de tus compañeros.
a) ¿Encuentran alguna diferencia en los pasos que realizaron? Entre todos, determinen cual es la respuesta correcta y anótenla.
b) Escriban por qué decidieron elegir esa respuesta.</td><td>Esta actividad se usa como situación de formulación.
Se le pedirá al alumno que comparta el método de resolución. Las hojas de trabajo deben contener las preguntas pertinentes para averiguar los razonamientos de los alumnos.
El alumno utilizará repertorios lingüísticos que le ayudarán a comprender los conocimientos movilizados.</td><td>En esta parte ya se les solicita que simbolicen la variable tal y como se desarrolló históricamente en el álgebra. Esto, tomando en cuenta la dimensión epistemológica.
Así también, acorde con la dimensión epistemológica se pide calcular las unidades que contiene un montón, en este caso la bolsa. Se les comenta:
“dentro de la bolsa hay un montón de canicas. ¿Cuántas canicas constituyen el montón?”
Además, se toma en cuenta la dimensión cognitiva por el hecho de que los alumnos van a poner en juego sus métodos de resolución.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se espera que:
- Los alumnos cotejen sus respuestas y se desplieguen varias formas de encontrar el</td></tr>
</table>

resultado. - Los alumnos corrijan errores en sus procedimientos como resultado del diálogo con sus compañeros de equipo.		
3. Representen la ecuación en la balanza y manifiesten ante el grupo si la respuesta es correcta o incorrecta y por qué. a) Explica a qué conclusión llegaste luego de haber manifestado tu respuesta.	Esta actividad es propicia para la situación de **validación.** En esta parte los alumnos colocan los pesos en la balanza. Dentro de una bolsa (colocada en los platos de la balanza) colocan el número de canicas que corresponden al valor de la incógnita. Los alumnos representan la ecuación en la balanza física llenando la bolsa con el número de canicas que obtuvieron. Se discuten los resultados en plenaria. El profesor hará preguntas como ¿Por qué la balanza (no) se equilibró? Si estaba mal, ¿en qué te equivocaste? Deben contestar la respuesta a esta pregunta en a). El profesor, en calidad de oponente, hará preguntas a los alumnos para que éstos validen sus estrategias y comprendan la transcendencia de sus	Se toman de la dimensión cognitiva el siguiente aspecto: - Se ponen de manifiesto los enfoques de resolución. Se toma de la dimensión didáctica el siguiente aspecto: - El alumno argumenta sus métodos de resolución para evitar la mecanización en los procedimientos.

<table>
<tr><td></td><td>propuestas.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Se espera que los alumnos:
- Presenten errores al no poder encontrar el valor de la incógnita por tanteo.
- Al usar el método de resolución formal, cometan algunos errores al momento de aislar la incógnita.</td></tr>
<tr><td>Se resuelve en plenaria y con ayuda del profesor la ecuación aplicando el enfoque de resolución formal.

4. Escucha la explicación y participa en ella. Manifiesta tus dudas e inquietudes.
a) Anota lo que te parezca más importante de la explicación.</td><td>Situación de institucionalización.
En esta parte se pretenden el papel de las propiedades de la igualdad en la creación de ecuaciones equivalentes.
Se pretende resolver otro ejemplo a manera de explicación y aprovechando la situación de institucionalización.
El alumno habrá de comprender el papel que juegan las propiedades de la igualdad en la creación de ecuaciones equivalentes.</td><td>Se mencionan las propiedades de la igualdad. Esto, atendiendo lo que se encontró en la dimensión didáctica.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Institucionalización:
- Se anotan las opciones en el pintarrón. Se le dice al alumno ¿Qué pesos hay del lado izquierdo? Una bolsa más otra bolsa. El valor de la bolsa es lo que queremos determinar. Entonces queda $x + x + 3 \to 2x + 3$. ¿Y del otro lado? Ellos contestan $3x + 1$. Luego de lo anterior encontramos que la ecuación que representa la imagen de la balanza es: $c)\ 2x + 3 = 3x + 1$. Tal como lo propuso el equipo _______ . Esto debido a que del lado izquierdo existen tres bolsas, pero no sabemos cuántas canicas tienen, por lo tanto, decimos que son 2 por x. Donde x representa el número de canicas que hay en cada bolsa. En adición a esto, en el lado izquierdo de la balanza hay tres canicas sueltas. De manera análoga en el</td></tr>
</table>

lado derecho existen tres bolsas y una canica suelta. Entonces, para que se mantenga el equilibrio, es decir, la **igualdad**, es necesario que haya el mismo número de canicas en ambos lados de la balanza. De acuerdo con esto, ¿cuántas canicas debe haber en cada bolsa? Considerando que todas las bolsas tienen el mismo número de canicas.

- Luego de colocar los pesos en la balanza encontramos que la solución de la ecuación es 2, es decir, en cada bolsa hay dos canicas.
- Se toman en cuenta los distintos enfoques de resolución y se hace evidente que el método formal podrá servir para cualquier ecuación. Se puede anotar una ecuación difícil de resolver por intuición y por tanteo sistemático.

Enseguida voy a proponerles una forma de resolver la ecuación que planteamos:

$$2x + 3 = 3x + 1$$

1. Se restan una unidad en ambos lados de la ecuación. Se hace lo mismo con la balanza.

   $$2x + 3 - \mathbf{1} = 3x + 1 - \mathbf{1}$$

   Esto sucede debido a la ***propiedad aditiva de la igualdad***, la cual menciona que, al sumar una determinada cantidad en ambos miembros, la igualdad se mantendrá.
2. De lo anterior se obtiene la siguiente ecuación equivalente:

   $$2x + 2 = 3x$$

   Esto también se hace evidente con los nuevos pesos que quedaron en la balanza y se dice que esta ecuación y la original son **equivalentes**.
3. Utilizando la misma propiedad, se restan dos equis en ambos lados de la ecuación.

   $$2x + 2 - \boldsymbol{2x} = 3x - \boldsymbol{2x}$$

   Esto se hace evidente en la balanza.
4. Tomando en cuenta el paso anterior, se obtiene:

   $$2 = x$$

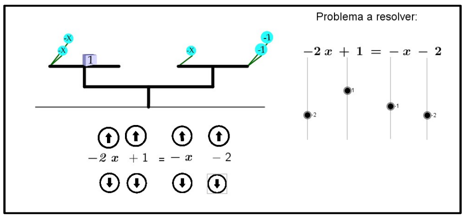
   Se representa esta ecuación en la balanza y se hace énfasis en que esta nueva ecuación y las anteriores son equivalentes.
5. Así, se obtiene la siguiente ecuación que también es equivalente a las anteriores. Debido a la **propiedad simétrica** de la igualdad.

   $$x = 2$$

   Esta es la solución de la ecuación, es decir, el valor de la incógnita es 2.
6. Se hace visible que la bolsa también puede aparecer en el lado derecho, lo importante es aislarla en uno de los dos lados para hacer evidente los dos

<table>
<tr><td colspan="3">significados del símbolo igual (análisis cognitivo).
7. La estrategia es sumar, restar o dividir el mismo número en ambos lados de la ecuación para crear ecuaciones equivalentes. De esta manera se pretende aislar en uno de los dos lados de la ecuación la incógnita hasta que el valor de la misma sea obvio.
8. Poner a consideración la siguiente ecuación:
$\mathbf{3x+1=5}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ACTIVIDAD 3
El propósito en esta última actividad es que el alumno refuerce el método de resolución formal y que aprenda a comprobar sus resultados.</td></tr>
<tr><td>1. Lee detenidamente el siguiente problema:
<i>Rubén tiene $9 y Aldo tiene $8. Cada uno compra un lápiz idéntico. Después de la compra, a Aldo le quedan dos terceras partes del dinero que le queda a Rubén. Calcula el precio del lápiz.</i>
La ecuación que representa este problema es:
$$\mathbf{8-x=\frac{2}{3}(9-x)}$$
a) Resuelve la ecuación y encuentra el precio del lápiz.
b) Explica qué estrategia utilizaste para encontrar la solución del problema.
c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar el precio del lápiz.</td><td>Situación de acción.
En esta parte se le solicita al alumno que resuelva la ecuación por sus propios medios.
El alumno aplicará los conocimientos adquiridos durante la actividad anterior.</td><td>Se le pedirá al alumno que utilice las propiedades de la igualdad para despejar la incógnita. El uso de las propiedades es uno de los aspectos que se pusieron de manifiesto en la dimensión didáctica.
Derivado del análisis cognitivo se encuentra que los alumnos tienen problemas para resolver ecuaciones con coeficientes negativos. Por este motivo se eligió esta ecuación.</td></tr>
</table>

Se espera que: - Los alumnos resuelvan la ecuación utilizando el método formal. - Los alumnos apliquen de manera correcta las propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad. - Existan errores debido a: la mala identificación de las operaciones inversas, transponer en forma inadecuada los términos, el mal uso de la propiedad distributiva, la forma incorrecta de operar con coeficientes negativos o racionales o al desconocimiento del papel que juegan los paréntesis en las ecuaciones. - Los alumnos sientan la necesidad de aislar la incógnita en el lado izquierdo de la ecuación.		
2. Reúnete en equipo y compara tu solución con la de tus compañeros. a) Determinen cuál es la respuesta correcta y anótenla. b) Escriban por qué decidieron elegir esa respuesta. c) Entre todos contesten lo siguiente: Sin utilizar la balanza, ¿cómo pueden comprobar que su respuesta es correcta? Expliquen y comprueben su respuesta.	Situación de **formulación.** En esta parte los alumnos discuten su respuesta e inclusive tratan de comprobarla. Los alumnos comprobarán sus resultados trabajando de forma colaborativa.	Se pretende averiguar de qué manera los alumnos justifican sus respuestas y comprueban sus resultados. Pretendo retomar el aspecto de la **comprobación** de una ecuación mencionado en la dimensión cognitiva.
Se espera que: - Se espera que los equipos comprueben basándose en el contexto del problema, solicitando una balanza para validar o sustituyendo el valor de la incógnita en la ecuación original. - Los equipos que comprueben sustituyendo en la ecuación presenten errores de tipo aritmético, es decir, debido al mal uso del paréntesis, aplicar de forma incorrecta las leyes de los signos, desconocimiento de la jerarquía de las operaciones, empleo erróneo de la propiedad distributiva, etc.		

<table>
<tr>
<td>3. Observen los pasos que siguieron sus compañeros que pasaron al frente. Elaboren una conclusión acerca de lo que se presentó.

</td>
<td>Situación de validación.

Se pedirá a los alumnos que pasen al frente a anotar sus procedimientos para validar sus respuestas.

Los alumnos validarán con la ayuda del profesor utilizando una balanza virtual aprovechando que existen los coeficientes negativos.</td>
<td>Se pretende validar el aspecto de la comprobación preguntándoles la forma en que llegaron a ese resultado y cómo lo comprobaron.

Además, se les preguntará se existe otra manera de comprobar la solución de la ecuación.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Se espera que:

- Los alumnos observen lo que sucede con la balanza virtual y además que refuercen su comprobación basándose en el contexto del problema.
- Se espera que los alumnos tengan dificultad para comprender cómo se representan los pesos negativos en la balanza.</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Escucha la explicación y participa en ella. Manifiesta tus dudas e inquietudes.

a) Anota lo que te parezca más sobresaliente de la explicación.</td>
<td>Situación de institucionalización.

Se resuelve la ecuación utilizando las propiedades y se comprueba la solución.

Se les pedirá que expliquen cómo trabajaron con los coeficientes negativos.

El alumno comprenderá y aplicará el proceso de resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita y comprobará sus</td>
<td>Se resuelve la ecuación teniendo cuidado de explicar con claridad el proceso a seguir con coeficientes negativos y retomando las opiniones y dudas de los alumnos.

Lo anterior tomando en cuenta lo investigado en el análisis cognitivo.</td>
</tr>
</table>

	resultados.	

Institucionalización:

- Se resuelve la ecuación haciendo evidentes las propiedades.
- Se comprueba el problema sustituyendo el valor de la incógnita en la ecuación y haciendo énfasis en que solamente ese valor cumple con la igualdad.
- Así también se comprueba la ecuación utilizando el contexto del problema.
- Se hace notar que una ecuación se puede comprobar sin utilizar el contexto del problema.

Cabe mencionar que las hojas de trabajo destinadas al desarrollo de las actividades de la secuencia se muestran en el anexo 1.

5.2 VARIABLES DIDÁCTICAS

5.2.1 Variables didácticas en la actividad 1

Inicialmente se utilizará una *proposición de sumando faltante* para ir introduciendo poco a poco en el alumno el concepto de incógnita y el método intuitivo de resolución de ecuaciones. El alumno tendrá que encontrar el elemento faltante en la igualdad. Para lograr esto, él tendrá que utilizar los conocimientos prerrequisitos sobre igualdad, operaciones aritméticas y conteo. En este tenor, el alumno habrá de dar una respuesta que puede ser verificada cuando el alumno advierta que se cumple, o no la igualdad.

Enseguida, se pretende **modificar la ubicación de la incógnita** (variable micro-didáctica) dentro de la proposición de un ejercicio a otro. El alumno utilizará sus conocimientos previos para resolver los dos problemas que implican encontrar el elemento faltante. Así pues, en la primera proposición de sumando faltante la incógnita aparecerá en el primer miembro de la ecuación. La segunda proposición será construida por el alumno y se pretende que la incógnita aparezca en el segundo miembro de la igualdad. De esta manera iremos introduciendo poco a poco el concepto de **incógnita**, es decir, el número que se tiene que encontrar para que la **igualdad** se cumpla.

Para el punto 3 se decide emplear una balanza (variable micro-didáctica) como material didáctico (Figura 8). Dicha balanza es sensible a la colocación de pesos. El alumno elegirá el acomodo de los cuerpos geométricos en los platos para que la balanza se equilibre. Se pretende que el alumno inicie la comprensión del concepto de ecuación como una equivalencia de las expresiones algebraicas que se encuentran a ambos lados del signo igual, a partir de la analogía de la balanza. De igual modo el alumno entenderá la noción del concepto de **igualdad**. También se decide incorporar en el punto 4 una balanza con la finalidad de que los mismos alumnos validen sus propias conjeturas.

Para lograr equilibrar la balanza, el alumno utilizará conocimientos relativos a la igualdad de pesos y el funcionamiento de una balanza mecánica. El alumno colocará los pesos en la balanza y podrá darse cuenta si se equilibra, o no. Con esto, el alumno comprenderá que el equilibrio en la balanza tiene correspondencia con la equivalencia de los pesos colocados.

Figura 8: Balanza a utilizar durante la aplicación de la secuencia de enseñanza

5.2.2 Variables didácticas en la actividad 2

En el punto 1 se presenta la figura de una balanza en equilibrio. Luego, se le dan al alumno varias **opciones** para elegir la ecuación que mejor la representa. Para elegir la ecuación, el alumno usará lo aprendido en la actividad 1. De este modo, el alumno aplicará los conceptos de ecuación, incógnita y ecuación de primer grado con una incógnita. También, se beneficia la apropiación gradual del lenguaje simbólico. Además, el alumno tendrá que utilizar sus conocimientos sobre operadores aritméticos y tomar en cuenta que el equilibrio en la balanza será consecuencia de las decisiones tomadas.

Otra variable didáctica que se presenta durante la actividad 2 es que el alumno puede decidir cuál método utilizará para resolver la ecuación. El alumno podrá utilizar el método intuitivo, el de sustitución por tanteo o el método formal. Con alguno de los métodos se encontrará el valor de la incógnita susceptible de ser validado con la balanza.

Ahora bien, en el punto 3 se usa nuevamente la balanza para validar las respuestas de los alumnos. Los alumnos tendrán que saber que deben colocar tantas canicas en la bolsita como se los indique el valor de la incógnita encontrado anteriormente.

5.2.3 Variables didácticas de la actividad 3

En la primera parte de la actividad 3 se optó por elegir una ecuación que contenga paréntesis y coeficientes racionales; además de la incógnita en ambos lados del símbolo igual. Esto constituye otra variable didáctica. El alumno tendrá que aplicar los prerrequisitos necesarios para abordar el tema de las ecuaciones lineales con una incógnita, es decir, reducción de términos semejantes, aplicación de la propiedad distributiva, operaciones combinadas, entre otros.

Luego de esto, el alumno empleará el método de resolución formal tomando en cuenta el papel de las propiedades de la igualdad para lograr resolver la ecuación planteada en la hoja de trabajo. Se pretende que los alumnos tomen en cuenta lo comprendido durante las actividades 1 y 2. Los alumnos habrán de reforzar y afianzar el método de resolución formal compartiendo sus resultados y razonamientos.

Más adelante, se solicita al alumno comprobar su respuesta. En este caso la variable didáctica está conformada por la forma de comprobar; ya sea sustituyendo el valor en la ecuación, tomando en cuenta las condiciones iniciales del problema o cualquier otra forma que formule el alumnado. El alumno tendrá que poner en juego la propiedad de sustitución de la igualdad, la propiedad distributiva, la reducción de paréntesis y las operaciones combinadas.

CAPÍTULO VI: EXPERIMENTACIÓN

En este apartado se explica la implementación de la secuencia que fue diseñada durante la fase anterior, y los resultados que se obtienen. En este, se especifican las particularidades de la población investigada, se detallan los instrumentos usados para recopilar datos y se describe a detalle la implementación de la secuencia.

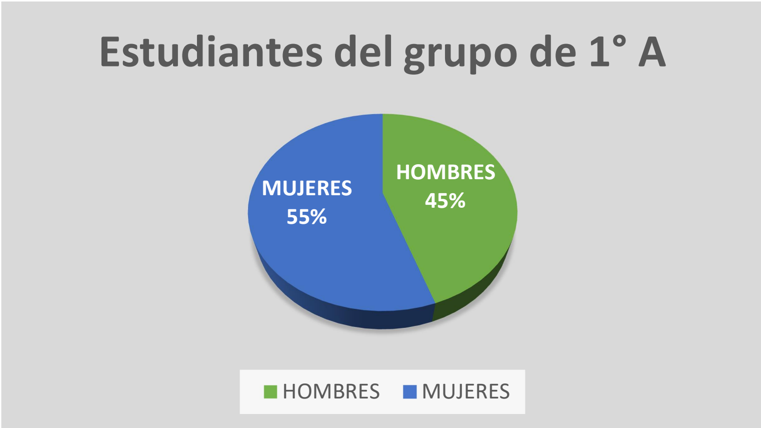
La Institución Educativa en la cual se llevó a cabo la investigación es el Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, Plantel Saín Alto (figura 9); con domicilio en el Boulevard Salvador Ríos Cordero S/N, Colonia Centro en la Cabecera Municipal de Saín Alto, perteneciente al Estado de Zacatecas. El plantel cuenta con los servicios básicos como son agua potable, drenaje, energía eléctrica, recolección de basura, comedor escolar, telefonía fija y móvil e internet.

Figura 9: Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, Plantel Saín Alto

En esta escuela únicamente hay turno matutino con un horario de 7:30 am a 3:00 pm. Se tiene organización completa para atender a 571 alumnos repartidos en quince grupos (cinco grupos en primer semestre, cinco en tercero y cinco en quinto). Dichos alumnos provienen de la cabecera municipal de Saín Alto y de localidades como Atotonilco, Cañas, Emiliano Zapata, Mina Mercurio, Nicolás Bravo, Río de Medina, Santa Eduviges, Barrancas, Cantuna, El Cazadero, Santa Mónica, La Laborsita, Las Cuevas, Saín Bajo, entre otros.

La modalidad de estudio es presencial y el mapa curricular abarca cuatro áreas de formación: Básica, Propedéutica, de Formación para el Trabajo y Actividades Paraescolares. Al concluir su Bachillerato (tres años), el alumno estará listo para continuar sus estudios superiores; además contará con la formación y las habilidades para integrarse al mundo laboral.

El grupo experimental es el de 1° A y está conformado por 38 alumnos (17 hombres y 21 mujeres, ver gráfica 1) cuyas edades oscilan alrededor de los 15 años. Al momento de la aplicación el grupo no había recibido instrucción sobre el tema de ecuaciones lineales. Se habló con la profesora titular para que permitiera aplicar la secuencia en el tiempo que le correspondiera al grupo abordar ese tema. Esto teniendo en cuenta la cronodosificación de la docente titular. De esta manera el grupo abordaría los temas del programa de estudio de manera natural, sin necesidad de adelantar ningún tópico.



Gráfica 2: Distribución de género en el grupo de 1° A

El diseño se aplicó durante **cuatro módulos de 50 min**. Esto de conformidad con el objetivo general de investigación; el cual dictamina que la secuencia sea validada en un **escenario real** de clase. Las sesiones se efectuaron en el periodo comprendido entre el lunes 25 de noviembre y el martes 3 de diciembre, del año 2019 dentro del aula correspondiente al grupo. La referida aula está equipada con computadora, proyector y pintarrón.

6.1 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

De conformidad con la Ingeniería Didáctica, los datos recogidos provienen de las observaciones realizadas durante la aplicación de la secuencia de enseñanza, al igual que las producciones de los alumnos durante las sesiones (Artigue et al., 1995). Para recopilar los datos durante esta etapa de la experimentación se utilizaron instrumentos como:

- Hojas de trabajo (material para el alumno)
- Evaluación final

Las **hojas de trabajo** contienen cuestionarios diseñados en la etapa anterior, destinados a rescatar los razonamientos de los alumnos. En estas hojas los alumnos plasmarán sus estrategias de resolución y sus procedimientos.

Por último, en la **evaluación final** (figura 10) los alumnos deberán plasmar lo que aprendieron durante la secuencia. Este instrumento es otra medida de análisis que dará cuenta de los nuevos conocimientos adquiridos por el alumno. Estos conocimientos permitirán saber si se logró en el alumno un aprendizaje por adaptación.

Nombre del alumno: ____ Edad: _____

Grupo: ______________________ Fecha: _________________

Instrucciones: Contesta lo que se te pide.

3. ¿Qué entiendes por ecuación lineal con una incógnita?

4. De la siguiente ecuación: $\frac{3}{5}(x+8) = 23 - 2x$

   c) Indica cual es la incógnita.

   d) Resuelve la ecuación y anota el procedimiento al reverso. Realiza la comprobación para verificar tus resultados.

Figura 10: Evaluación final

Aunado a las hojas de trabajo y la evaluación final, se utilizan **videograbaciones** como un apoyo adicional para observar las interacciones que se dan entre el alumno y el medio durante el desarrollo de las clases. Mediante el análisis de estos videos se podrán rescatar momentos importantes para la complementación de evidencias en el análisis a posteriori. De acuerdo con la Ingeniería Didáctica los

> datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Y, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación (Artigue *et al*., 1995, p. 48).

6.2 EXPERIMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

6.2.1 Actividad 1

La aplicación de la secuencia de enseñanza inició el lunes 25 de noviembre del 2019 a las 9:10 am. Primero se estableció el **Contrato Didáctico** (ver figura 11), donde el profesor acordó con el grupo las reglas de trabajo (los alumnos deberán estar en el aula correspondiente, en su horario asignado y participar con dinamismo durante las clases; mientras que el profesor se compromete a proporcionar el material de trabajo preparado para cada actividad). Los alumnos aceptaron su responsabilidad y se inició la sesión.

Figura 11: Establecimiento del Contrato Didáctico

Como primera actividad se solicitó a los alumnos que respondieran el examen diagnóstico. Se entregaron a los alumnos las hojas correspondientes para que ellos contestaran. Esta actividad consumió quince minutos del total de la clase. Al terminar el diagnóstico el profesor recoge las hojas de trabajo diseñadas con ese propósito y procede a iniciar la secuencia de enseñanza.

El principio de la secuencia planteó dos proposiciones de sumando faltante que realizaron los alumnos. Éstos fueron leídos por el docente (esto para asegurarse de que los alumnos entendieran bien las instrucciones y supieran que hacer) y corresponden a la situación de **acción** que marca la Teoría de Situaciones Didácticas. Los alumnos empezaron a contestar las hojas de trabajo, mientras el docente se acercó a los lugares para verificar que atendieran las instrucciones; esta parte duró 12 minutos (figura 12).

Figura 12: Situación de acción

En la situación de **formulación** (número tres de las hojas de trabajo), los alumnos deben proponer una balanza a partir de otras tres que aparecen en las hojas de trabajo. Para esto, se organiza a los alumnos en equipos de seis integrantes conformados al azar. Esta actividad se llevó a cabo en 10 min (figura 13). Cabe mencionar que estos equipos se mantuvieron durante todas las demás clases en las que se requirió trabajar de forma colaborativa.

Figura 13: Situación de formulación

Luego de esto, el docente monta una balanza y muestra a sus alumnos que, efectivamente, ésta es sensible a los pesos que se colocan. Al mostrar la sensibilidad se pretende que los alumnos **validen** (figura 14) las respuestas que fueron propuestas durante la situación anterior. Con este marco, cada equipo elige a dos integrantes para que pasen a colocar los pesos y expongan sus resultados ante el grupo (situación de validación).

Es relevante precisar que, al validar su resultado, los alumnos ejercen una **acción** sobre el medio al colocar los pesos en la balanza. El medio, a su vez, les devuelve una retroacción cuando ocurre el equilibrio o desequilibrio. De igual modo, al explicar sus razonamientos están emitiendo mensajes para convencer al resto del grupo, lo que representa a la situación de formulación. La mayoría de los equipos validaron sus propuestas; esto consumió lo que restaba del módulo, quedando un equipo pendiente para exponer en la próxima clase.

Figura 14: Situación de validación

El día 26 no se pudo continuar con el desarrollo de la secuencia. Esto debido a que el plantel tuvo una interrupción ocasionada por la entrega de tabletas electrónicas para los alumnos de tercer semestre. Así pues, la secuencia pudo continuarse hasta el día siguiente.

La sesión del día 27 inició con la validación del equipo que faltaba, retomando con ello el tema que quedó inconcluso. El último grupo tardó tres minutos en validar su respuesta para así terminar con esta situación. La institucionalización (figura 15) se llevó a cabo con la dirección del profesor organizando los aportes de los alumnos. Esta situación duró 12 minutos y se abordaron los conceptos de **igualdad**, **incógnita**, **equivalencia**, **resolución de una ecuación** y **ecuación de primer grado con una incógnita**. Con el conocimiento de los conceptos matemáticos que intervinieron, se les pidió a los educandos que plasmaran sus conclusiones en la hoja de trabajo. Mientras tanto, el profesor relataba al grupo un poco de la historia de las ecuaciones lineales. Para esta redacción, los alumnos utilizaron cinco minutos.

Figura 15: Situación de institucionalización

6.2.2 Actividad 2

Ese mismo día, aún restaban 13 minutos para que concluyera la clase de matemáticas. Por este motivo, se inició con la actividad dos de la secuencia didáctica. Para comenzarla, el grupo recibió otras hojas de trabajo de parte del profesor y la indicación de contestar el punto número uno para la situación de **acción** (figura 16). El punto demanda que el alumnado elija, de un grupo de opciones, la ecuación que traduce al lenguaje algebraico lo que muestra la balanza que fue plasmada en la hoja de trabajo. En adición a esto, el joven debe resolver la ecuación que eligió para encontrar la respuesta a la situación problémica. En esta situación, el alumnado demoró siete minutos.

Figura 16: Situación de acción

Para continuar con la situación de **formulación** (figura 17), se solicita al grupo que se vuelva a reunir en equipos. En esta parte se tiene la expectativa de que los alumnos comuniquen a sus pares sus estrategias, discutan sus respuestas y consensen la solución del problema. La discusión ha de generar nuevas acciones del alumno hacia el medio; esto significa que el alumno, mediante la discusión, decida si debe cambiar la estrategia de resolución. La situación de formulación es suficiente para terminar con los minutos de la clase que quedaban.

Figura 17: Situación de formulación

El jueves 28, siguiendo con la secuencia se procedió a desarrollar la situación de **validación**. Los alumnos colocaron los pesos en la balanza para verificar si el valor de la incógnita que encontraron es el correcto. Primeramente, dos alumnos (representando al equipo 4) pasaron al frente a colocar los pesos en la balanza (**acción sobre el medio**) de acuerdo a la opción que eligieron durante la actividad 2 (situación de formulación). Dichos alumnos validaron que, efectivamente la balanza se equilibra, reforzando el concepto de **igualdad** (figura 18). Además, expusieron sus ideas tanto al profesor como al grupo. Luego de esto, se invitó a un representante de otro equipo para pasar a resolver la ecuación. La representante del equipo 5 (Figura 19) plasmó en el tablero la ecuación, el procedimiento de resolución y por último explicó al grupo la forma de encontrar la solución del problema. Para validar la resolución de la ecuación se colocan dos canicas en cada bolsita, tal y como lo dictamina la respuesta que encontraron los equipos ($x = 2$). Se observa que la balanza se equilibra bajo estas condiciones y queda verificada la respuesta que se había encontrado. De este modo concluye la situación de validación empleando 14 minutos de la clase.

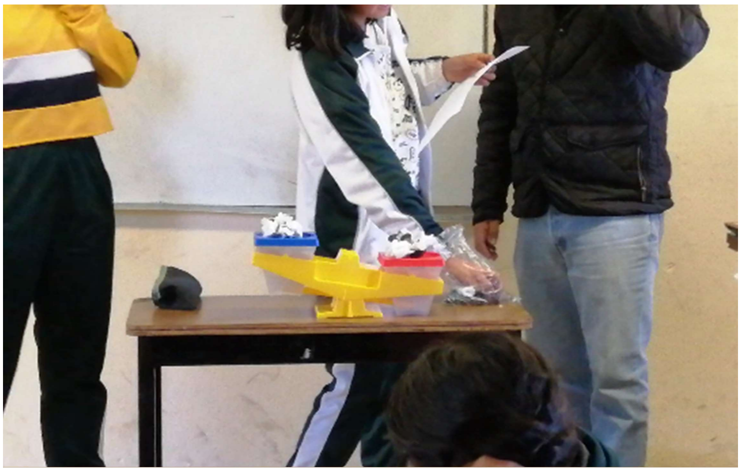


Figura 18: Situación de validación

Figura 19: Alumna resolviendo la ecuación durante la fase de validación

Posteriormente se inicia con la situación de **institucionalización**. El maestro retoma las estrategias y respuestas encontradas por los equipos. Dichas estrategias fueron utilizadas en la explicación del profesor. La explicación consistió en aclarar a los alumnos la forma de aislar la incógnita en una ecuación utilizando las propiedades de la igualdad (Figura 20). Para reforzar el empleo de las propiedades, se resuelve otra ecuación tomando en cuenta las participaciones de los alumnos.

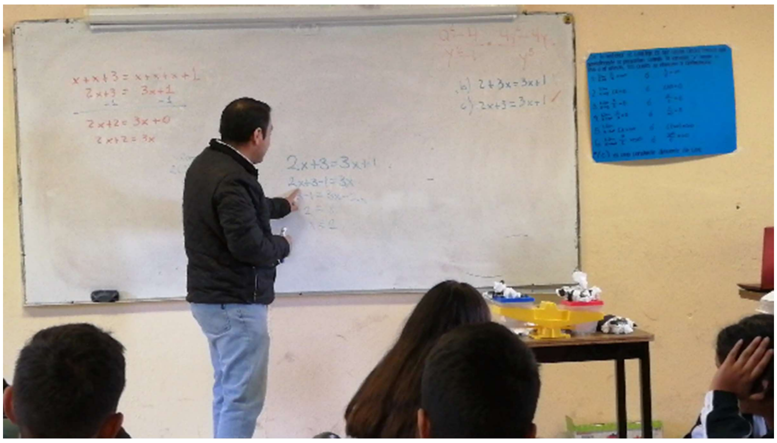


Figura 20: Situación de institucionalización

6.2.3 Actividad 3

Aprovechando que el mismo día aún restaban 18 minutos de clase, se procede a iniciar con la situación de **acción** de la Actividad 3. Se empieza repartiendo nuevamente las hojas de trabajo a los alumnos para que trabajen con el punto 1. El mencionado punto presenta un problema y la ecuación que traduce el problema al lenguaje algebraico. La ecuación debe ser resuelta individualmente por los alumnos, mismos que deben buscar la forma de comprobar sus resultados (Figura 21). Esta situación (acción) agota todo el tiempo que quedaba del módulo de clase.

Figura 21: Situación de acción

En la siguiente sesión, el 3 de diciembre, los alumnos conforman sus equipos para trabajar en la situación de **formulación**. Cada equipo discute sus respuestas y sus estrategias para llegar a un acuerdo como equipo (Figura 22). La formulación se lleva a cabo en 18 minutos.

Figura 22: Situación de formulación

Se inicia con la situación de **validación**. Para guiar esta situación, el docente se dispuso a leer el problema y a plantearlo apoyándose en las participaciones de los educandos. Posteriormente, el docente focaliza la atención del grupo hacia la resolución de la ecuación que representa las condiciones del problema. Enseguida invita a los alumnos para que pasen al frente a resolver el problema y verificar sus respuestas.

La alumna 3.4 acepta pasar y anota su procedimiento y resultado en el pintarrón. Ella misma se da cuenta que tiene un error gracias a los cuestionamientos del grupo (formulación) y el profesor. Gracias a su **interacción** con el **medio**, la alumna se da cuenta de su error y decide cambiar su estrategia de solución. Mientras la mencionada alumna continúa, la estudiante 1.1 solicita pasar a resolver el problema en la otra mitad del pintarrón. El docente accede a la petición de la joven y ella se acerca a anotar su procedimiento en el pintarrón. Al final, las dos alumnas llegan al mismo resultado, pero una eligió utilizar la propiedad distributiva y la otra decidió transponer los términos para operar con el coeficiente racional que contenía la ecuación (Figura 23).

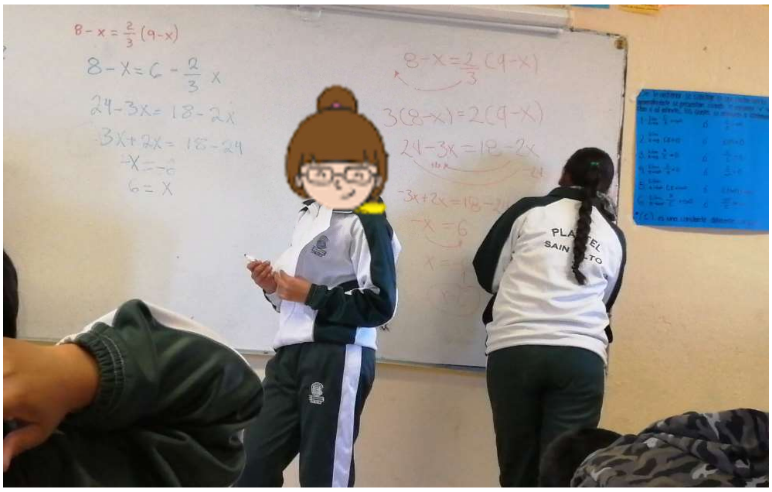


Figura 23: Situación de validación

Tomando como fundamento las respuestas de los equipos, el maestro inicia la situación de **institucionalización** 8 minutos antes de concluir el módulo de clase (figura 24). Éste solicita a los alumnos que, en plenaria, le compartan sus estrategias para comprobar su respuesta. La plenaria contribuye al análisis de los métodos de resolución que propusieron las dos alumnas que pasaron al frente a resolverlo y se hace énfasis en el uso de las propiedades de la igualdad y las propiedades de los números reales (en específico, la propiedad distributiva). Así pues, la situación concluye con la redacción de las conclusiones de los alumnos; mismas que son anotadas en las hojas de trabajo.

Figura 24: Situación de institucionalización

Es necesario mencionar que se pretendía darle un plus a la situación de institucionalización para la actividad 3. El plus consistía en usar el software GeoGebra. El software proyecta una imagen interactiva de la balanza que simula el trabajo con coeficientes negativos. Esta parte no se pudo llevar a cabo debido a que se tuvieron problemas técnicos con el proyector y no se lograron mostrar las imágenes de manera adecuada.

Cabe mencionar que hubo personas que llegaron tarde a las sesiones. Además, durante las clases en las que se desarrolló la secuencia de enseñanza, diferentes factores propiciaron que el grupo estuviera incompleto. Este ausentismo sucedió a causa de diferentes factores, entre los que figuran:

- Cuestiones de salud de los alumnos.
- Trámite de la beca.
- Asistencia de alumnos a la jornada académica regional (organizada por las autoridades del COBAEZ).

A pesar de los contratiempos, durante la experimentación se lograron desarrollar todas las situaciones que se habían previsto en la concepción de la secuencia de enseñanza. El grupo mostró gran disposición al aprendizaje, lo que ayudó a llevar la **fase de experimentación** a buen puerto.

6.3 ANÁLISIS DE LOS DATOS

En este apartado se resaltan datos relevantes que constituyen el resultado de aplicar la secuencia de enseñanza. Se explora cada una de las actividades, se hace énfasis en los aprendizajes de los alumnos y sus interacciones con el medio, las intervenciones docentes y los aspectos relevantes de las clases relacionados con la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Cabe mencionar que de esta parte en adelante se consideran varias abreviaturas para identificar las intervenciones de los estudiantes y del docente. Se utiliza la letra “A” y enseguida un número racional para referirse a un alumno en específico; por ejemplo, el “A2.1”. Se refiere a un alumno que quedó integrado en el equipo 2.

6.3.1 Análisis de la actividad 1

El propósito de la actividad 1 es que el alumno se apropie de los conceptos de **incógnita**, **igualdad**, **equivalencia** y **ecuación de primer grado con una incógnita**. Esto con la finalidad de que el alumno comprenda los principios matemáticos. La comprensión evitará que las ecuaciones lineales con una incógnita sean resueltas utilizando el algoritmo de manera repetitiva y mecánica.

a) Situación de acción

Para iniciar, se entregaron a los alumnos las hojas de trabajo. Los alumnos iniciaron respondiendo los dos problemas correspondientes a la *proposición de sumando faltante.* En estos dos problemas se pretendió que los alumnos partieran de algo concreto (el peso de una piedra) para introducir los conceptos de **igualdad** e **incógnita**. Los alumnos comenzaron a resolver el problema de manera individual. Así pues, es preciso mencionar que, de conformidad con la Teoría de las Situaciones Didácticas, los **alumnos no recibieron instrucción previa acerca** de este **tema**. Los alumnos se involucraron con los problemas y trataron de resolverlos según sus conocimientos previos y su propio juicio.

La mayoría de los alumnos respondieron correctamente las proposiciones de sumando faltante. En la primera proposición ($\_\_\_\_ + 8 = 33$) se cumplió la predicción que se hizo acerca de que los jóvenes resolverían haciendo la resta $33 - 8 = 25$ (Figura 25). Asimismo, otro de los métodos utilizados para dar respuesta a las proposiciones fue la *sustitución por tanteo*.

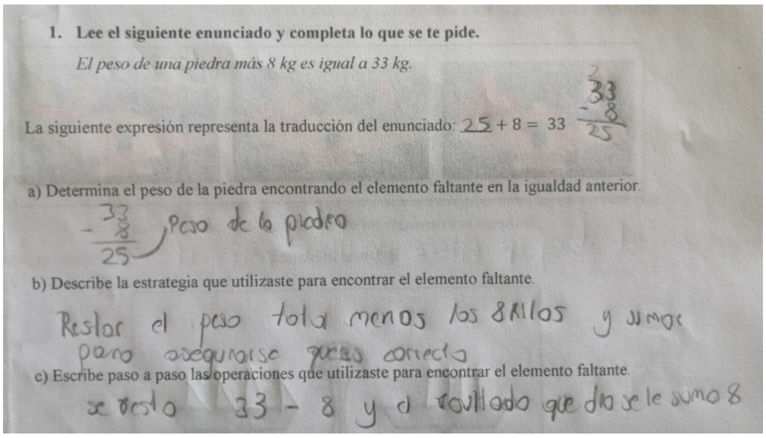
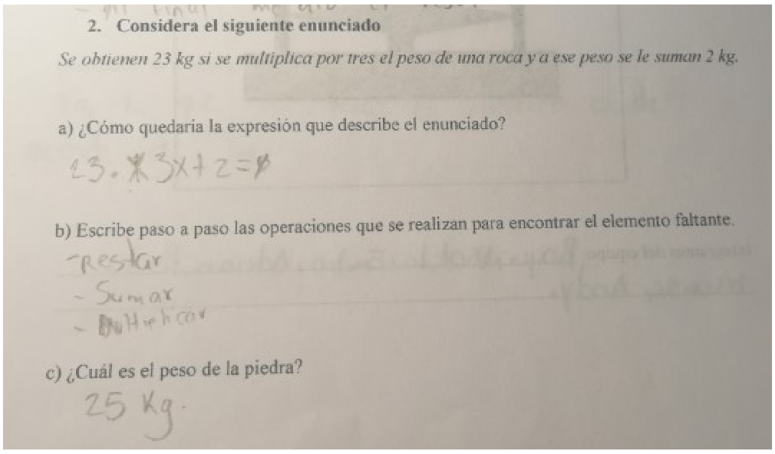


Figura 25: Resolución haciendo la resta $33 - 8$

En el segundo ejercicio se observan errores que llamaremos "de traducción lineal" (figura 26), esto es, dar una propuesta en la que la expresión anotada no es la que representa al problema, sin embargo, si da luces de cierta lógica. Cabe mencionar que algunos alumnos plantearon una ecuación en la cual "x" representaba el elemento faltante; lo que da indicios de que algunos alumnos dan una representación algebraica a la incógnita. (Figura 27). Además, en esta parte también se transitó por la situación de validación, ya que los alumnos verificaban el número propuesto haciendo las operaciones correspondientes.


2. Considera el siguiente enunciado

Se obtienen 23 kg si se multiplica por tres el peso de una roca y a ese peso se le suman 2 kg.

a) ¿Cómo quedaría la expresión que describe el enunciado?

$23 \cdot 3x + 2 =$

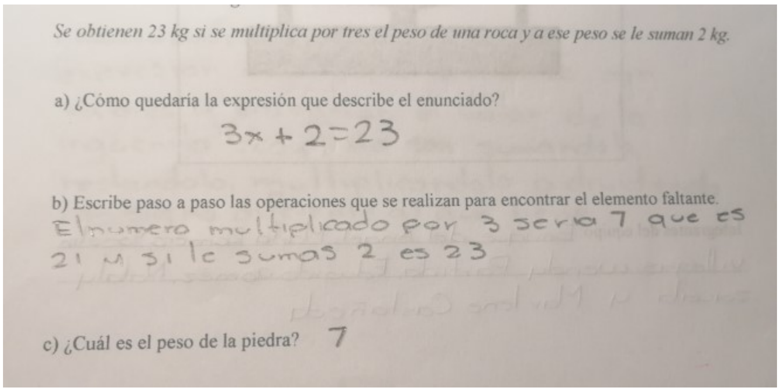
b) Escribe paso a paso las operaciones que se realizan para encontrar el elemento faltante.

- restar
- Sumar
- Multiplicar

c) ¿Cuál es el peso de la piedra?

25 Kg.

Figura 26: Error "de traducción lineal"


Se obtienen 23 kg si se multiplica por tres el peso de una roca y a ese peso se le suman 2 kg.

a) ¿Cómo quedaría la expresión que describe el enunciado?

$3x + 2 = 23$

b) Escribe paso a paso las operaciones que se realizan para encontrar el elemento faltante.

El numero multiplicado por 3 seria 7 que es 21 y si le sumas 2 es 23

c) ¿Cuál es el peso de la piedra? 7

Figura 27: Representación algebraica de la incógnita

Lo mencionado en este apartado da evidencia de que los alumnos comprenden el **concepto** de **incógnita**; el cual será retomado en la situación de institucionalización para darle la debida formalización.

b) Situación de formulación

Para entrar en la situación de formulación los alumnos se reunieron en **cinco equipos** de seis integrantes cada uno. Dichos equipos fueron conformados al azar. En esta situación los alumnos comunicaron sus argumentos y compartieron conocimientos con sus pares (Figura 28).

Figura 28: Situación de formulación

Se procedió a tratar en equipo el punto 3 de las hojas de trabajo (*dibujar una balanza que esté en equilibrio*); después de las discusiones que se hicieron, se encontró lo siguiente:

- Tanto el equipo 1 como el 2 argumentaron cosas similares. Ellos escogieron la configuración de la balanza basándose en los ejemplos que mostraban las hojas de trabajo (figura 29).

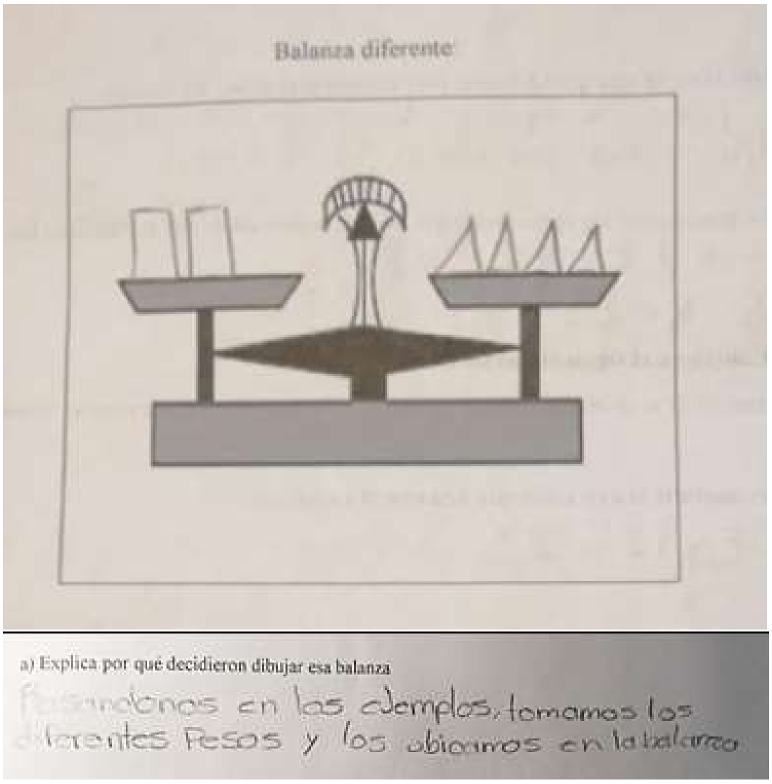


Figura 29: Argumento de los equipos 1 y 2 derivados de la formulación

- Los equipos 3 y 5 también generaron razonamientos similares. El razonamiento hace alusión al equilibrio de la balanza (figura 30).

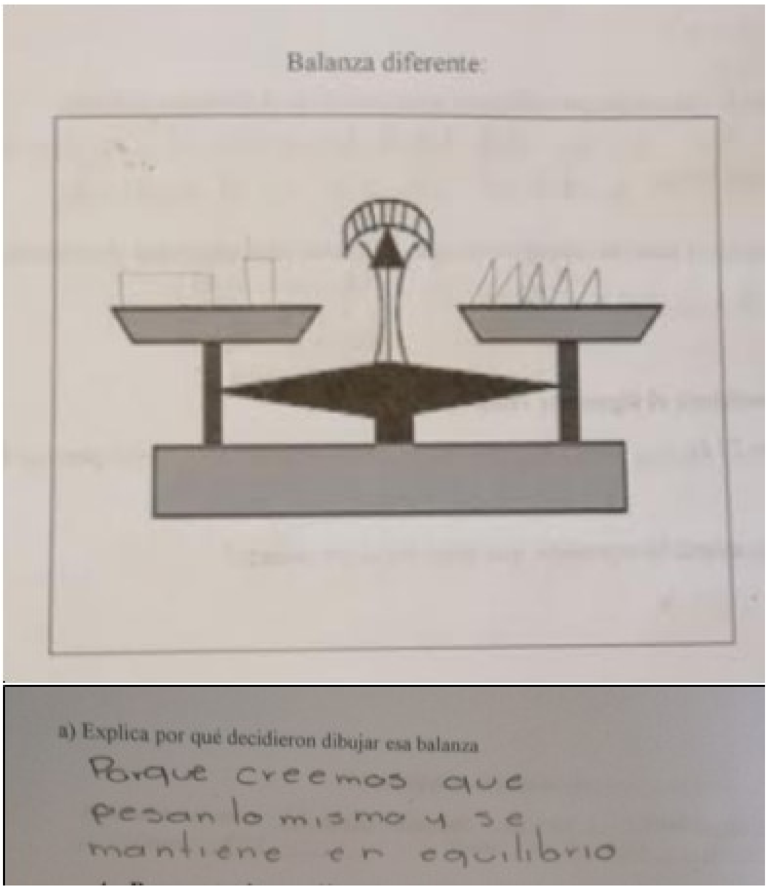


Figura 30: Razonamiento de los equipos 1 y 5 procedente de la formulación

- El equipo 4 comenta que eligió esa configuración porque un prisma de base rectangular puede descomponerse en dos prismas de base triangular. Señalan que dos prismas de base triangular deben pesar lo mismo que uno de base rectangular (figura 31). Este razonamiento es diferente a los demás equipos e indica que para equilibrar la balanza también puede **tomarse** en cuenta el **volumen** que tienen los cuerpos geométricos y no únicamente comparando pesos.

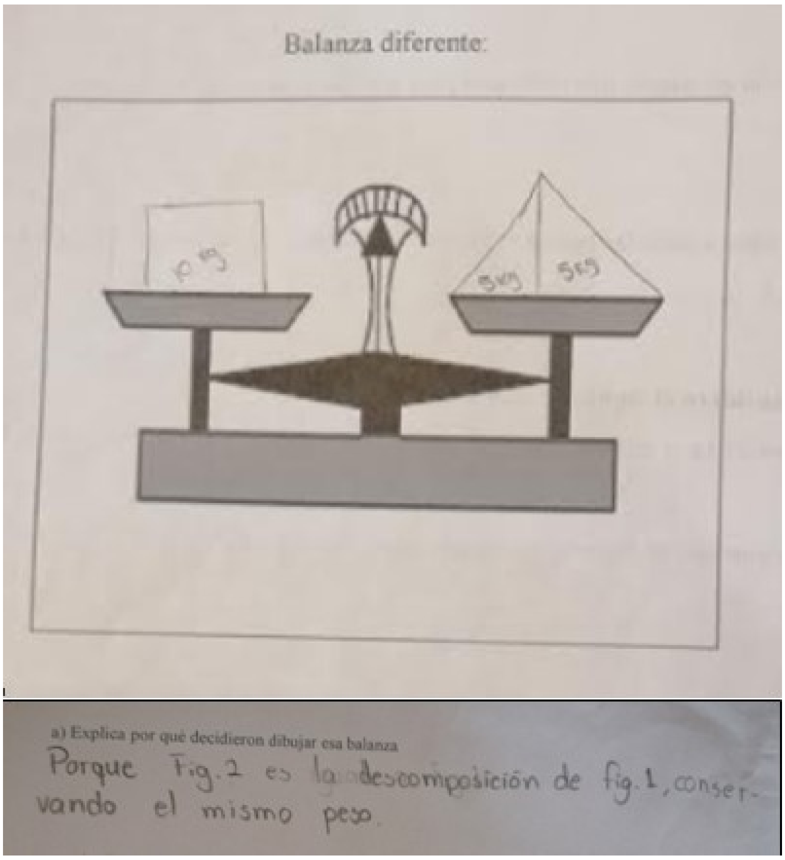


Figura 31: Razonamiento del equipo 4 derivado de la formulación

c) Situación de validación

En la validación se pretende que los alumnos discutan con todos los integrantes de la clase los resultados a los que han llegado. La discusión se realiza después de haber **interactuado** con el **medio** y **acordado** sus **conclusiones** dentro del **equipo**. El hecho de validar favorece la **pertinencia** de los **conocimientos movilizados** por los alumnos durante las dos situaciones anteriores (acción y formulación). En este tenor, para analizar la situación de validación se mostrarán transcripciones de momentos clave del proceso de enseñanza–aprendizaje.

Para comenzar a validar, el maestro da la indicación de que cada equipo elegirá a dos de sus integrantes para que pasen al frente y compartan su respuesta colocando los pesos en los platos de la balanza. Los equipos se darán cuenta que su respuesta es correcta si logran que los platos se equilibren.

El equipo 2 es el primero en pasar a poner sus figuras en la balanza (Figura 32) y sucede lo siguiente:

Maestro: Vean como si se equilibra, ¿Qué significa eso?
A2.3: Pues que tal vez el peso que tienen los dos cubos es equivalente. El que tienen los dos rectángulos juntos equivale al peso que tienen los cuatro triángulos, por eso se balan… se hace una igualdad de pesos y por eso la balanza esta intermedia.

Figura 32: validación del equipo 2

El maestro le pregunta al grupo en general que si están de acuerdo. El grupo asiente y aplaude a los alumnos que pasaron al frente (es necesario señalar que el equipo 1 propuso una configuración similar al 2).

Continuando con la dinámica, el maestro cede el turno al equipo 5. Los dos representantes pasan a poner los pesos en la balanza y sucede lo siguiente:

Maestro: ¿Está bien lo que ustedes plantearon o no? ¿Por qué eligieron esa respuesta?
A5.3: Pues nosotros no dimos cuenta que el rectángulo chico equivale a dos triángulos y…
A5.2: El rectángulo grande equivale a tres triángulos.
A5.3: Y entonces por eso la balanza iba a estar equilibrada.
Maestro: Entonces, les pregunto ¿si se equilibró o no?
A5.3: Si (responde con una pequeña risa)

Enseguida el maestro pregunta al grupo si alguien cree que está incorrecto. Tomando en cuenta que nadie se manifiesta y que el grupo sabe que la respuesta es correcta, el maestro agradece a los alumnos representantes del equipo 5.

Ahora toca el turno al equipo 3 y se les pide que expliquen su respuesta y ellos contestan:

A3.3: Lo vimos más por el peso de los dos cuadrados… y el rectángulo, aunque estuviera muy muy grande, pues tiene un peso.
Maestro: ¿Qué les hizo tomar esa decisión?
A3.2: Pues nos quisimos asegurar y tanteamos los pesos se iban a balancear.

Luego el maestro señala al grupo que un rectángulo chico equivale a dos triángulos. De igual manera que un rectángulo grande equivale a tres triángulos. El docente dibuja una propuesta equivalente a la del equipo 3 usando solo triángulos y pregunta:

Maestro: ¿Qué significa eso?
A1.4: Que hay una igualdad.

Con este razonamiento se verifica la propuesta del equipo 3 y el grupo en general acepta que la propuesta es correcta.

Toca el turno al equipo 4. Cuando tomaron la palabra, ellos mostraron que de un prisma de base rectangular se puede obtener dos prismas de base rectangular (ver figura 33). De conformidad con esto, acomodaron los pesos en la balanza de modo que se notara esta particularidad. La alumna explicó que se podía demostrar que pesaban lo mismo partiendo de la forma de las figuras.

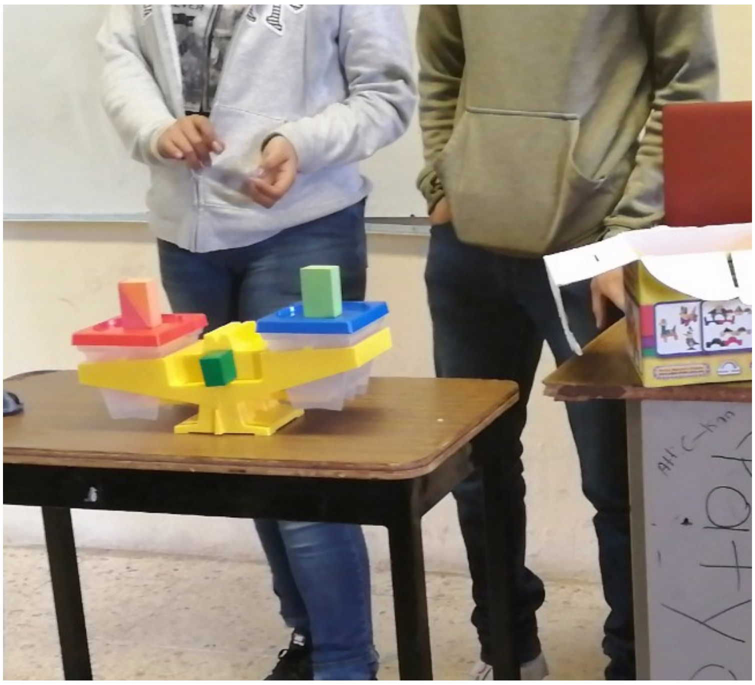


Figura 33: Validación equipo 4

Cada equipo colocó su propuesta en la balanza, misma que se equilibró. Lo que da cuenta de la equivalencia en ambos platos de la balanza. Las afirmaciones de los equipos fueron debatidas y se generaron argumentos para aprobar la validez de las respuestas. Los alumnos comunicaron sus resultados, dando a conocer los conocimientos puestos en juego.

Con la dinámica presentada, los equipos verificaron la validez de sus respuestas usando material concreto. Los alumnos colocaron los pesos en la balanza misma que se equilibró. El equilibrio evidencia que la respuesta es correcta. Los alumnos comenzarán a utilizar la analogía de la balanza para comprender que en una ecuación la igualdad debe cumplirse. Es decir, se logra construir el concepto de igualdad a través de balanzas en equilibrio.

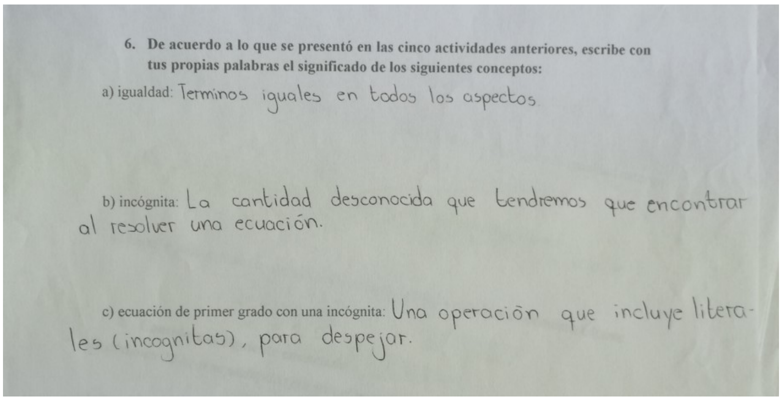
d) Situación de institucionalización

En la situación de institucionalización se dio sentido y formalidad a todo lo abordado en las otras tres situaciones anteriores. En este tenor, se retomaron las aportaciones que habían hecho los alumnos y se les encauzó hacia la comprensión de los conceptos relativos a las ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. Conceptos tales como incógnita, igualdad, equivalencia y ecuación lineal con una incógnita fueron expuestos por el profesor en plenaria (figura 34).

Particularmente, se rescatan las proposiciones de sumando faltante para formalizar el concepto de **incógnita**. Así también, se aprovechan las propuestas de los alumnos durante la validación para darle sentido al concepto de **igualdad** relacionándolo con la equivalencia de las balanzas en equilibrio. Por último, recurriendo a estos conceptos se construye la **definición de ecuación lineal con una incógnita**.

Figura 34: Situación de institucionalización

Luego de llevar a cabo la plenaria, se solicitó al grupo que anotarán el significado de los conceptos principales del tema en su hoja de trabajo. Derivado de esta solicitud se encontró que la mayoría comprendieron el concepto de incógnita e igualdad, pero sólo algunos pudieron dar evidencia de la comprensión del concepto de ecuación de primer grado con una incógnita (Figura 35).



6. De acuerdo a lo que se presentó en las cinco actividades anteriores, escribe con tus propias palabras el significado de los siguientes conceptos:

a) igualdad: Terminos iguales en todos los aspectos

b) incógnita: La cantidad desconocida que tendremos que encontrar al resolver una ecuación.

c) ecuación de primer grado con una incógnita: Una operación que incluye literales (incognitas), para despejar.

Figura 35: Significado de los conceptos principales según el alumno 4.6

6.3.2 Análisis de la actividad 2

Como ya se evidenció en la dimensión cognitiva del análisis preliminar (Capítulo IV, tema 3.2) de este informe académico, los alumnos comúnmente utilizan de manera repetitiva la táctica llamada transposición de términos. Ellos inclusive, resuelven ecuaciones relativamente complicadas sin saber el porqué de cada paso. Es por eso que se decidió implementar esta actividad; en la cual, los alumnos propongan **distintos procedimientos de resolución** a partir de sus conocimientos previos. Además, se favorece el **método de resolución formal utilizando las propiedades de la igualdad** para darle sentido a las estrategias empleadas por los alumnos para despejar la incógnita. Dichas propiedades son la explicación de la creación de ecuaciones equivalentes durante el proceso de despeje.

a) Situación de acción

El primer planteamiento de la actividad demanda que el alumno elija, de entre cuatro opciones, la ecuación que representa la traducción al lenguaje algebraico de la balanza que muestra la figura en la hoja de trabajo (esta elección propició que los alumnos comenzaran con el manejo simbólico de la igualdad y de la incógnita). Habiendo elegido la ecuación, el joven intentará resolverla para encontrar el número de canicas que hay en cada bolsa. El hecho de contestar esta parte de manera individual constituye la situación de **acción** (Figura 36).

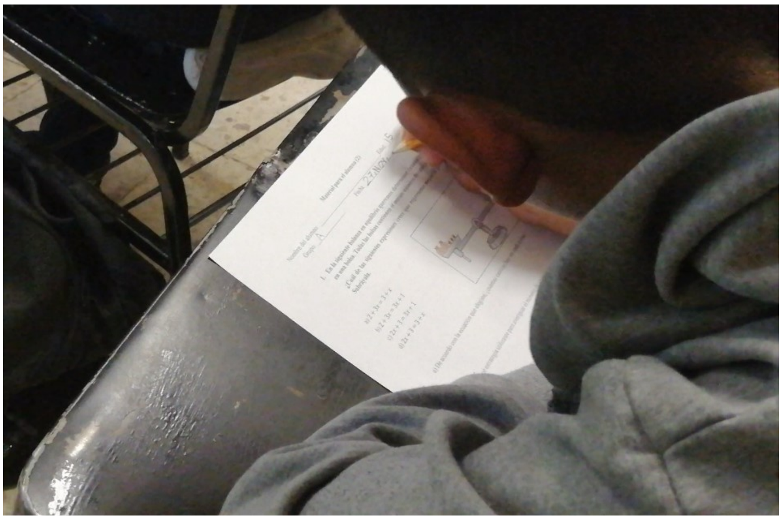
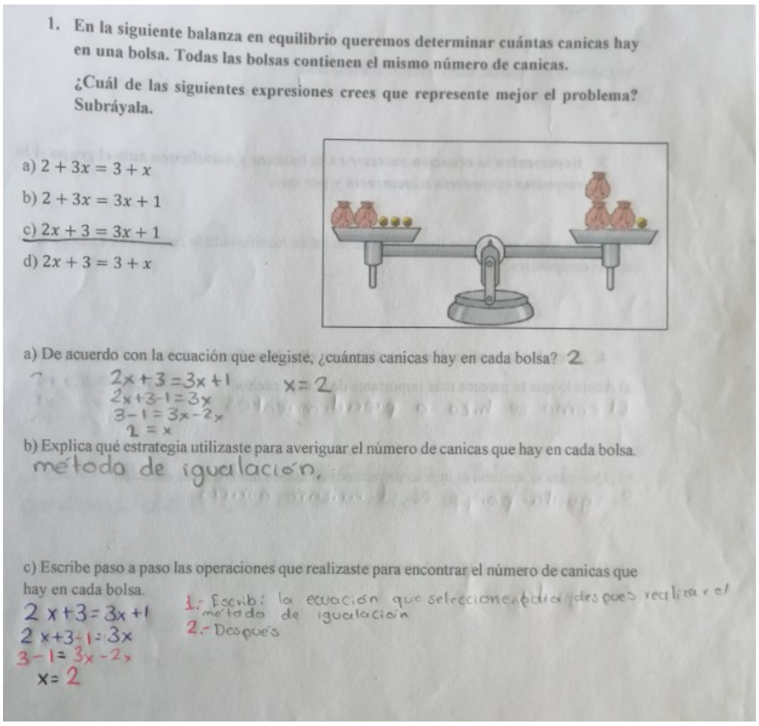


Figura 36: Situación de acción

Del mismo modo como se había considerado en el análisis a priori, se presentaron varios enfoques de resolución de la ecuación. El procedimiento predominante fue el de la **transposición** de **términos** (Figura 37). Pocos alumnos usaron el enfoque **intuitivo** (Figura 38) y sólo un alumno puso en juego la **sustitución por tanteo** (Figura 39). En contraste, los alumnos que tuvieron errores optaron por no anotar ningún tipo de procedimiento (Figura 40).



1. **En la siguiente balanza en equilibrio queremos determinar cuántas canicas hay en una bolsa. Todas las bolsas contienen el mismo número de canicas.**

¿Cuál de las siguientes expresiones crees que represente mejor el problema? Subráyala.

a) $2 + 3x = 3 + x$

b) $2 + 3x = 3x + 1$

c) $2x + 3 = 3x + 1$

d) $2x + 3 = 3 + x$

a) De acuerdo con la ecuación que elegiste, ¿cuántas canicas hay en cada bolsa? 2

$2x+3=3x+1$ $x=2$
$2x+3-1=3x$
$3-1=3x-2x$
$1=x$

b) Explica qué estrategia utilizaste para averiguar el número de canicas que hay en cada bolsa.

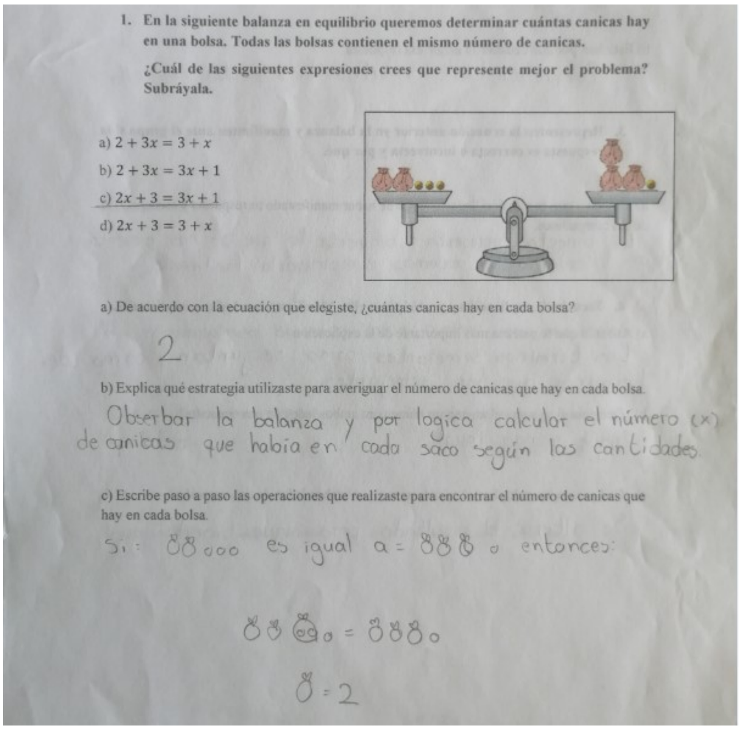
método de igualación.

c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar el número de canicas que hay en cada bolsa.

$2x+3=3x+1$
$2x+3-1=3x$
$3-1=3x-2x$
$x=2$

1.- Escribí la ecuación que seleccione después realizar el método de igualación
2.- Después

Figura 37: Alumno 5.6 utilizando el procedimiento de transposición de términos



1. **En la siguiente balanza en equilibrio queremos determinar cuántas canicas hay en una bolsa. Todas las bolsas contienen el mismo número de canicas.**

¿Cuál de las siguientes expresiones crees que represente mejor el problema? Subráyala.

a) $2 + 3x = 3 + x$

b) $2 + 3x = 3x + 1$

c) $2x + 3 = 3x + 1$

d) $2x + 3 = 3 + x$

a) De acuerdo con la ecuación que elegiste, ¿cuántas canicas hay en cada bolsa?

2

b) Explica qué estrategia utilizaste para averiguar el número de canicas que hay en cada bolsa.

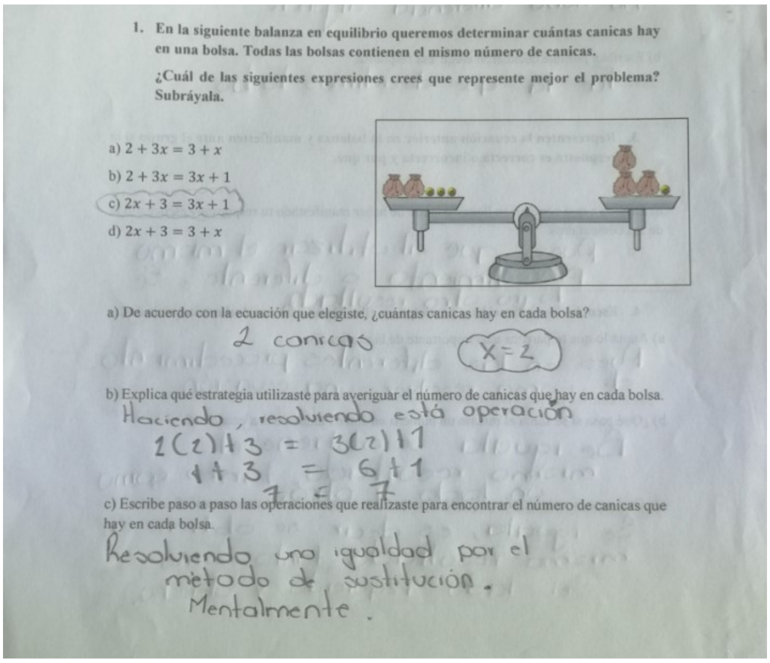
Obserbar la balanza y por logica calcular el número (x) de canicas que habia en cada saco según las cantidades.

c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar el número de canicas que hay en cada bolsa.

Si: es igual a = entonces:

= 2

Figura 38: Enfoque intuitivo (alumno 4.6)



1. **En la siguiente balanza en equilibrio queremos determinar cuántas canicas hay en una bolsa. Todas las bolsas contienen el mismo número de canicas.**

   ¿Cuál de las siguientes expresiones crees que represente mejor el problema? Subráyala.

a) $2 + 3x = 3 + x$
b) $2 + 3x = 3x + 1$
c) $2x + 3 = 3x + 1$
d) $2x + 3 = 3 + x$

a) De acuerdo con la ecuación que elegiste, ¿cuántas canicas hay en cada bolsa?

2 canicas $x = 2$

b) Explica qué estrategia utilizaste para averiguar el número de canicas que hay en cada bolsa.

Haciendo, resolviendo está operación

$2(2)+3 = 3(2)+1$

$4+3 = 6+1$

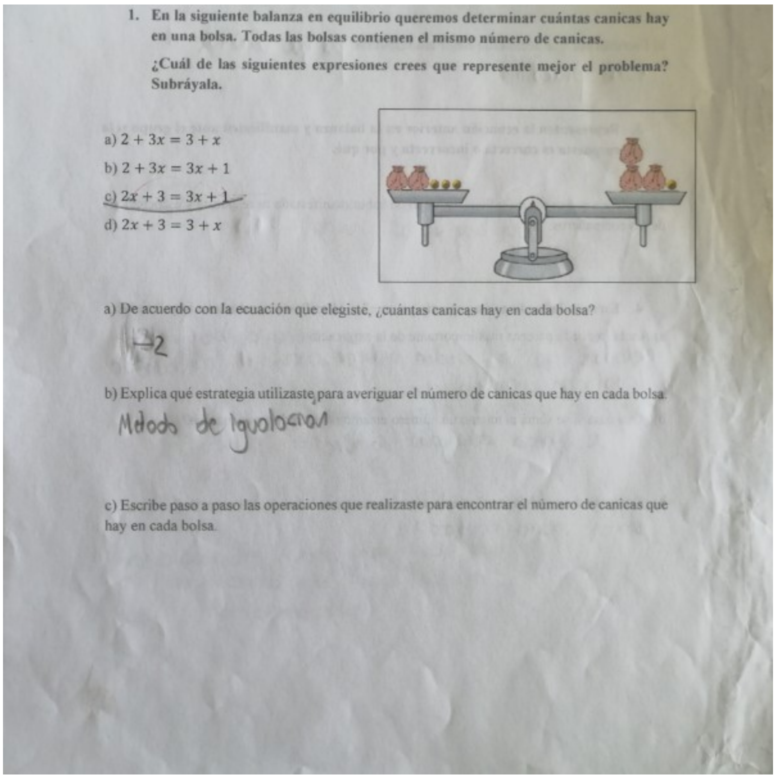
$7 = 7$

c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar el número de canicas que hay en cada bolsa.

Resolviendo una igualdad por el metodo de sustitución.

Mentalmente.

Figura 39: Sustitución por tanteo (alumno 1.1)



1. **En la siguiente balanza en equilibrio queremos determinar cuántas canicas hay en una bolsa. Todas las bolsas contienen el mismo número de canicas.**

   ¿Cuál de las siguientes expresiones crees que represente mejor el problema? Subráyala.

a) $2 + 3x = 3 + x$
b) $2 + 3x = 3x + 1$
c) $2x + 3 = 3x + 1$
d) $2x + 3 = 3 + x$

a) De acuerdo con la ecuación que elegiste, ¿cuántas canicas hay en cada bolsa?

2

b) Explica qué estrategia utilizaste para averiguar el número de canicas que hay en cada bolsa.

Metodo de Igualación

c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar el número de canicas que hay en cada bolsa.

Figura 40: El alumno 1.3 optó por no anotar procedimiento

Las evidencias dan muestra de que la mayoría de los alumnos ya han comprendido conceptos como incógnita, igualdad y ecuación. Dichos conceptos son movilizados para elegir la ecuación que mejor representa la imagen presentada en las hojas de trabajo. Ahora bien, al resolver la ecuación, se utilizan diferentes tácticas predominando la que consiste en transponer los términos. El alumno hace suyo el problema y trata de resolverlo utilizando las herramientas que le fueron proporcionadas durante la actividad 1.

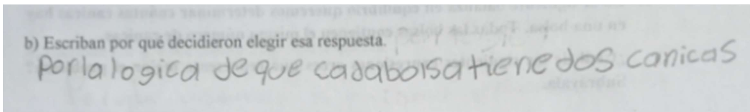
b) Situación de formulación

Para esta situación, los alumnos se reunieron en equipos de seis integrantes. Esto con el motivo de discutir con sus pares las formas de resolver la ecuación. Para lograr esto, los alumnos emitieron mensajes utilizando vocabulario referente al tópico de las ecuaciones lineales; lo cual da evidencia de la movilización de conocimientos (figura 41).

Figura 41: Situación de formulación

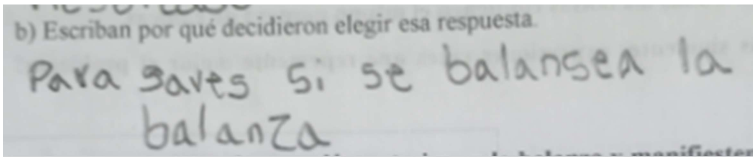
En esta parte la mayoría de los equipos coincidió en que hubo diferencias en los procedimientos, pero que llegaron al mismo resultado. Como estaba previsto, los alumnos se pusieron de acuerdo en la respuesta que debía ser la correcta a la situación adidáctica planteada. Es importante señalar que cada equipo expresó su propia razón por la cual eligieron la respuesta. Las opiniones fueron:

- El equipo 1 comenta que hicieron esa elección porque usaron prácticamente el mismo procedimiento todos sus integrantes.
- El equipo 2 señala que usaron la intuición (Figura 42).
- Los equipos 3 y 4 apuntaron que la razón obedece a la igualdad de los pesos en cada plato de la balanza (Figura 43).
- El equipo 5 da indicios de la presencia del método de resolución formal en su argumento (Figura 44).



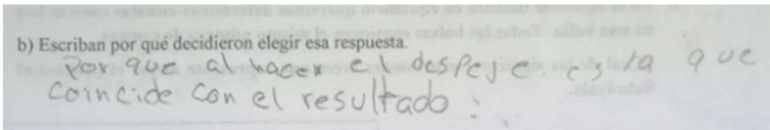
b) Escriban por qué decidieron elegir esa respuesta.
Porlalogica deque cadabolsatienedos canicas

Figura 42: Motivo que justifica la respuesta del equipo 2



b) Escriban por qué decidieron elegir esa respuesta.
Para saves si se balansea la balanza

Figura 43: Razón que manifiesta el equipo 3



b) Escriban por qué decidieron elegir esa respuesta.
Por que al hacer el despeje es la que coincide con el resultado

Figura 44: Argumento del equipo 5

c) Situación de validación

En esta parte, los equipos expusieron ante sus compañeros y ante el profesor los procedimientos y conclusiones que obtuvieron en las dos situaciones anteriores (acción y formulación). Tanto el docente como los demás miembros de la clase cuestionaron a los equipos que expusieron para asegurar la pertinencia de las aseveraciones planteadas.

Se invitó a pasar a validar sus propuestas al equipo 4. Dos representantes del equipo pasaron al frente y el maestro comenzó con los cuestionamientos. Se les preguntó a las alumnas cual opción es la que representa a la balanza de la imagen, a lo que la alumna contesta:

> *A4.6: La C.*
> *Maestro: La C. Entonces, ponga las canicas y los paquetitos en los platos. ¿Cuántos paquetitos tienen que ir?*
> *A4.6: En este tres y en este dos.*
> *Maestro: Ajá, ponga tres paquetitos.*

La alumna 4.4 colocó las bolsas en la balanza y el maestro comentó (Figura 45):

> *Maestro: Aquí tienen uno, dos, tres paquetes y acá dos. ¿cierto?*

Enseguida, la alumna 4.4 colocó tres canicas en el mismo lado de la balanza en que puso las dos bolsas y solo una canica en el otro lado. El docente comentó al grupo:

> *Maestro: ¡Ahí lo que se puede ver es que se equilibra!*

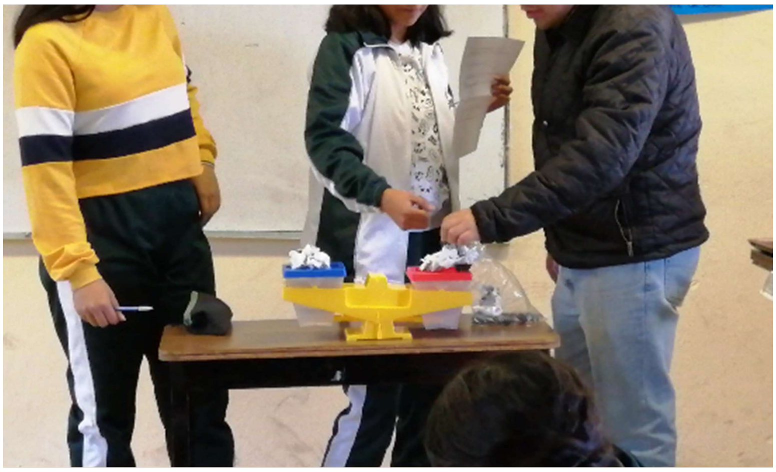


Figura 45: Maestro haciendo cuestionamientos a las alumnas del equipo 4

Así, el profesor pregunta si algún equipo tiene una respuesta diferente en el primer punto de la hoja de trabajo. A lo que el grupo le responde que no, solamente una alumna comenta que otra compañera tiene el inciso B. Luego el docente escribió en el tablero la ecuación que representa al inciso C ($2x + 3 = 3x + 1$) a petición del grupo y la alumna 4.6 participó diciendo:

> *A4.6: Es que es lógicamente lo que dice, pero no sabemos cuántas canicas hay. Esa sería la… no me acuerdo como se llamaba.*
> *Maestro: ¿La incógnita?*
> *A4.6: ¡La incógnita! Eso es lo que no sabemos, porque no sabemos cuántas canicas hay aquí y ¿porque es igual el peso?*

La transcripción anterior da evidencia de que la alumna comprende los conceptos "**incógnita**", "**equivalencia**" e "**igualdad**" vistos en la actividad anterior, tal y como lo especifica el análisis a priori hecho anteriormente. Además, la mayoría del grupo logró traducir correctamente al lenguaje algebraico el problema en cuestión.

Para continuar validando, el docente requirió la participación de otro equipo para resolver la ecuación

$$2x + 3 = 3x + 1,$$

(misma que se ya había sido validada por el equipo 4). La alumna 5.6 accedió al requerimiento y comenzó anotando el procedimiento en el tablero (Figura 46).

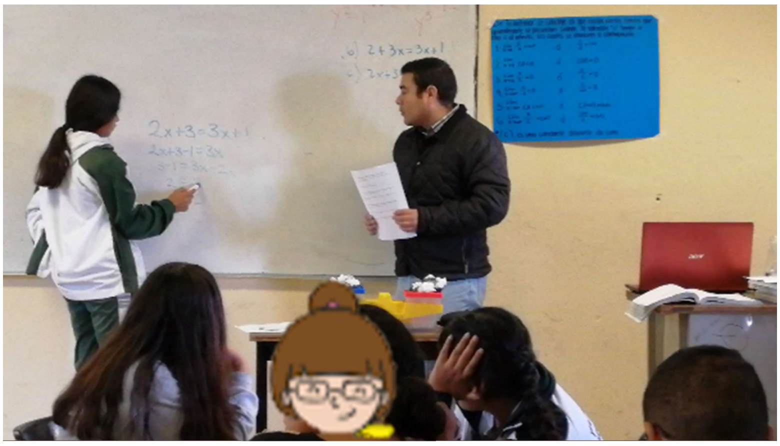


Figura 46: Procedimiento de resolución de ecuación

Luego el maestro le pidió al grupo que aclarara lo que hizo en su procedimiento y la alumna expresó:

> *A5.6: Pues… este… Puse la ecuación que dijimos, después junté* "x" *con* "x" *y números con números... los junté, pero los pasé con el signo negativo.*
> *Maestro: ¡Correcto!*
> *A5.6: Entonces, pues… ya aquí pasé dos* "x" *más tres menos uno porque aquí está positivo y me queda tres* "x"*. Después pasé dos* "x" *con tres* "x" *restándolo y me quedó tres menos uno es igual a tres* "x" *menos dos* "x"*. Es igual a* 2 *igual a* "x"*, entonces* "x" *es igual a* 2.

Este fragmento de la clase exhibe que la alumna aprovechó el método formal de transposición de términos para resolver la ecuación. Lo cual se había previsto en el análisis a priori. Adicionalmente, se puede observar que la joven no tiene errores aritméticos al momento de hacer el despeje, reduce los términos semejantes y aplica de manera adecuada el inverso aditivo atinadamente en su procedimiento.

d) Situación de institucionalización

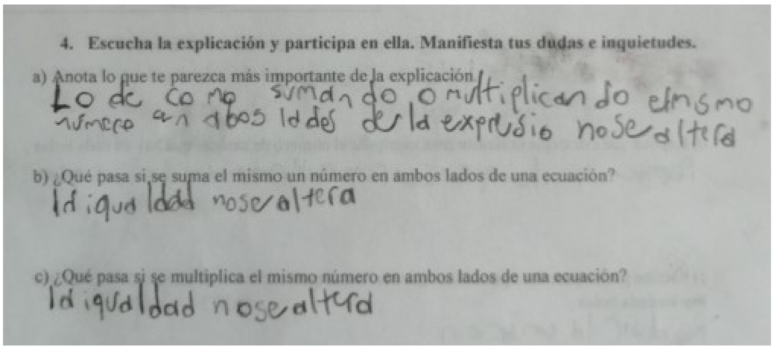
Para terminar esta actividad se consideran las aportaciones que los alumnos hicieron durante las otras tres situaciones. Las aportaciones de los alumnos consistieron en la comprensión y planteamiento del problema, traducción al lenguaje algebraico, resolución de la ecuación (utilizando los distintos enfoques) e interpretación de la solución. Dichas aportaciones fueron consideradas y presentadas en orden por el docente para darle sentido a todos los conocimientos construidos por los alumnos.

El docente explicó a los alumnos que existen distintos métodos de resolución de una ecuación. El método formal fue detallado durante esta situación con la finalidad de precisar el papel que juegan las propiedades de la igualdad en el despeje de la incógnita. Las propiedades fueron nombradas y enfatizadas cada vez que fueron utilizadas. Además, **cada paso que se llevó a cabo durante el despeje fue representado en la balanza de manera concreta para que los alumnos pudieran, a partir de esto, lograr resolver nuevas ecuaciones ya sin el uso de la balanza** (Figura 47). Se explica, por ejemplo, que cuando se dice "pasa restando" (o como dicen ellos "pasa con signo negativo") en realidad se está aplicando la propiedad aditiva de la igualdad y existencia de inversos aditivos para crear una ecuación equivalente a la anterior. Con esto, se elimina la creencia de que los términos desaparecen mágicamente de un lado de la ecuación y aparecen en el otro.

El abandono de la balanza como apoyo tiene relevancia, incluso desde el enfoque de la Teoría de las Situaciones en Didáctica. Esta relevancia implica que el docente cuide no caer en el efecto llamado **abuso de la analogía** (Brousseau, 2007); concepto que ya fue definido en el capítulo II de este proyecto.

Figura 47: Desapego de la analogía de la balanza

Después de la explicación del profesor, se solicitó al grupo que contestaran unas preguntas a modo de conclusión de la actividad. Primero se pidió que anotaran lo que les haya parecido más importante de la explicación; a lo que ellos en general respondieron que les interesaron **los distintos métodos de resolución, que al sumar o multiplicar el mismo número no se altera la ecuación** y la explicación que se dio para encontrar la respuesta. También se les requirió que respondieran a dos preguntas relacionadas con lo que pasaba si se sumaba o se multiplicaba el mismo número en ambos lados de una ecuación. Ante esto, la mayoría de los alumnos respondieron con sus palabras que da el mismo resultado y no se altera la igualdad (Figura 48). Sus respuestas permiten observar que, comprendieron el papel de las **propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad** en la creación de ecuaciones equivalentes. Esta afirmación está justificada con las últimas preguntas; en las cuales la mayoría respondió que al sumar o multiplicar el mismo número en ambos lados de la ecuación, da el mismo resultado al resolverla.



4. Escucha la explicación y participa en ella. Manifiesta tus dudas e inquietudes.

a) Anota lo que te parezca más importante de la explicación

Lo dc como sumando o multiplicando elmismo número an abos lddos de la exprusio nosealtera

b) ¿Qué pasa si se suma el mismo un número en ambos lados de una ecuación?

Idigualdad nosealtera

c) ¿Qué pasa si se multiplica el mismo número en ambos lados de una ecuación?

Idigualdad nosealterd

Figura 48: Preguntas relativas a la institucionalización (alumno 2.2)

6.3.3 Análisis de la actividad 3

El propósito de esta actividad es que los jóvenes refuercen el método formal de resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. Adicionalmente, ellos deben aprender a comprobar sus resultados. Se retoma el aspecto de la comprobación para considerar lo señalado en la dimensión cognitiva del análisis preliminar. En el mencionado análisis se enuncia que el alumno necesita volver a resolver la ecuación para asegurarse de que una solución es incorrecta y se olvida de que puede comprobar sustituyendo en la ecuación inicial.

a) Situación de acción

El inicio de la actividad 3 contiene un problema y la ecuación que lo traduce al lenguaje simbólico. Se le pide al alumno que resuelva la ecuación para hallar el precio de un lápiz. En adición a esto, el alumno debe anotar en la hoja de trabajo las operaciones que utilizó para llegar a la solución.

De conformidad con el párrafo anterior, el alumno hace suyo el problema y trata de resolverlo de manera individual (Figura 49). El problema a resolver implica que el alumno encuentre el valor de la incógnita en la siguiente ecuación:

$$8 - x = \frac{2}{3}(9 - x)$$

Como puede observarse, el alumno debe manejar coeficientes negativos, utilizar paréntesis, operar números racionales y conocer la propiedad distributiva para encontrar la solución de la ecuación (esto implica una mayor demanda cognitiva que en la ecuación propuesta en la actividad 2).

Al tratar de encontrar la solución de la ecuación los alumnos identificaron las **operaciones** y **propiedades** que intervienen en el proceso enfocado en aislar la incógnita.

Dicho proceso fue desarrollado por los alumnos de manera únicamente simbólica; lo cual fue satisfactorio, ya que los **alumnos no tuvieron necesidad de usar la analogía de la balanza para encontrar el valor de la incógnita**. Esto representa un avance en cuanto al aprendizaje debido a que se da evidencia del abandono de la analogía de la balanza para dar paso a la utilización del **manejo** exclusivamente **simbólico** de las ecuaciones lineales de primer grado.

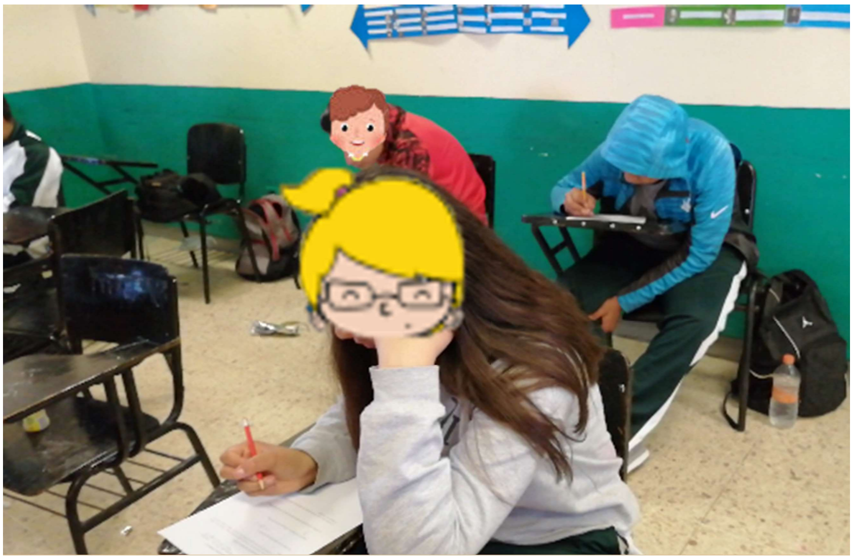


Figura 49: Alumnos resolviendo el problema en la situación de acción

En este marco, el análisis a priori dictaminó que el alumnado emplearía preferentemente el método de resolución formal; lo cual efectivamente ocurrió. Sin embargo, solo la mitad de los alumnos resolvieron la ecuación de manera correcta. La otra mitad que se equivocó tienen errores debidos a:

- el mal manejo de coeficientes negativos,
- transponer en forma inadecuada los términos de la ecuación y
- a la forma incorrecta de operar con números racionales.

En general se utilizaron tres estrategias de resolución, que son:

a) Transponer el denominador 3 usando la propiedad multiplicativa de la igualdad (figura 50)
b) Utilizar la propiedad distributiva para quitar el paréntesis (figura 51)
c) Convertir los coeficientes fraccionarios en números decimales (figura 52)

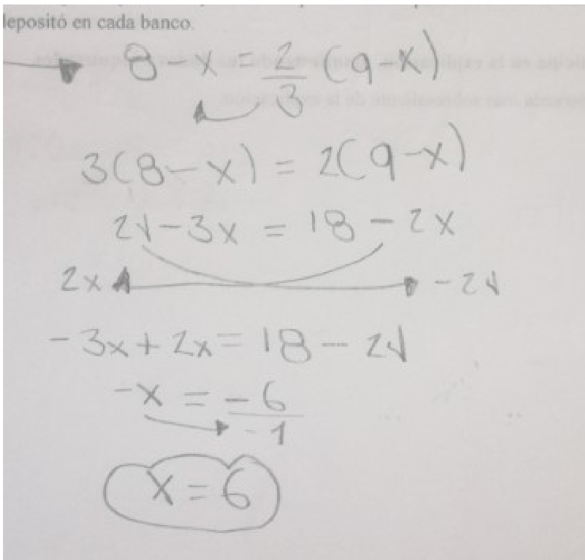


Figura 50: Táctica del alumno 1.1 basada en la transposición del denominador 3

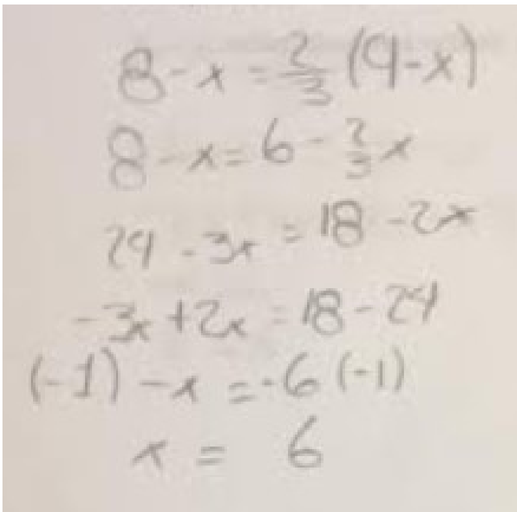


Figura 51: Procedimiento que se basa en la utilización de la propiedad distributiva para desaparecer el paréntesis (alumno 2.1)

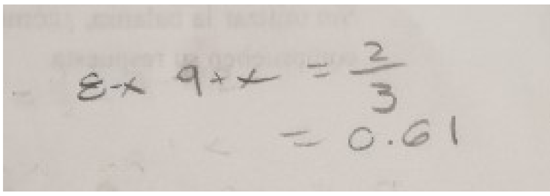


Figura 52: Conversión de fracción a decimal (alumno 3.2)

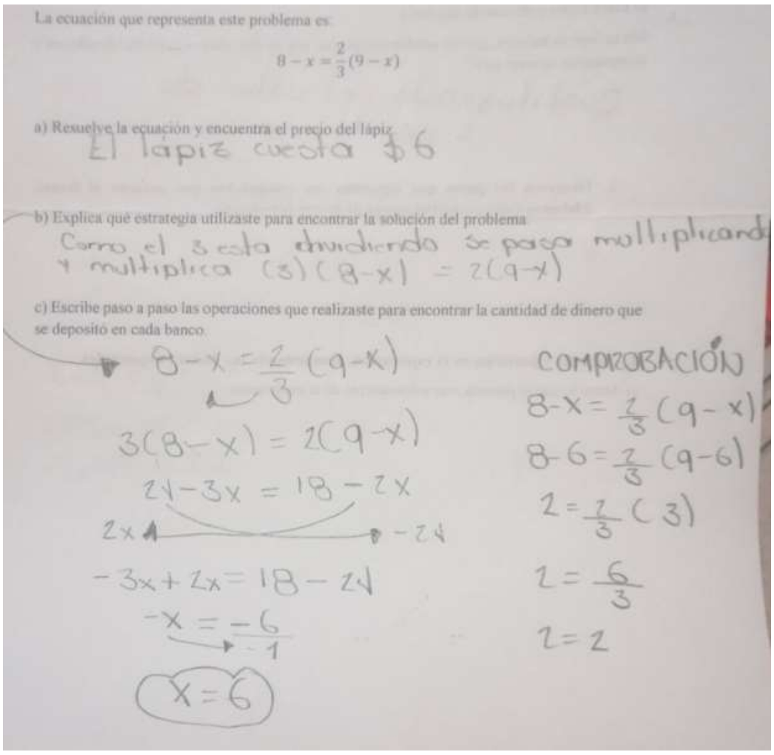
Adicionalmente, en la misma figura 52 el alumno intenta transponer la expresión $9 - x$. Aquí se observa que comete ciertos errores. Los errores suceden al cambiar el signo de la incógnita para hacerla positiva y anotarla en el primer miembro. Así también, se observa que utilizó de manera incorrecta la **propiedad multiplicativa**, ya que el término debió anotarse como $\frac{1}{9-x}$ en el primer miembro de la ecuación para poder igualarlo a $\frac{2}{3}$.

b) Situación de formulación

En el punto dos de esta actividad se les pide a los alumnos que se junten en equipo para que consensen y determinen cual es la respuesta correcta, es decir, cual es el precio del lápiz. De igual modo, se solicita comprobar dicha respuesta, pero ya sin el uso de la balanza. Con esto se pretende indagar los argumentos de los alumnos y la forma de comprobar sus resultados.

Figura 53: Situación de formulación

Luego del debate al interior de cada equipo (Figura 53), se encontró que los alumnos se vieron influenciados por el compañero que tenía el mejor historial académico en cada equipo para determinar su respuesta (esto se había advertido en el análisis a priori). La mayoría de los alumnos señalaron que comprobaron sustituyendo en la ecuación, pero solo el equipo 1 anotó el procedimiento (Figura 54). Por el contrario, ningún equipo comprobó empleando el contexto del problema.



La ecuación que representa este problema es:

$$8 - x = \frac{2}{3}(9 - x)$$

a) Resuelve la ecuación y encuentra el precio del lápiz

El lápiz cuesta $\$6$

b) Explica qué estrategia utilizaste para encontrar la solución del problema

Como el 3 esta dividiendo se pasa multiplicando y multiplica $(3)(8-x) = 2(9-x)$

c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar la cantidad de dinero que se depositó en cada banco

$8-x = \frac{2}{3}(9-x)$

$3(8-x) = 2(9-x)$

$24-3x = 18-2x$

$-3x+2x = 18-24$

$-x = \frac{-6}{-1}$

$x=6$

COMPROBACIÓN

$8-x = \frac{2}{3}(9-x)$

$8-6 = \frac{2}{3}(9-6)$

$2 = \frac{2}{3}(3)$

$2 = \frac{6}{3}$

$2=2$

Figura 54: Procedimiento del equipo 1

Cabe mencionar que en todo momento el profesor cuidó que en las ayudas que proporcionaba no se cometiera el efecto **Topaze** (figura 55). Los alumnos hacían determinadas preguntas y las respuestas del docente estaban dirigidas a:

- Evitar facilitar el problema en cuestión.
- Cuidar que las respuestas generaran razonamientos propios del alumno.
- Mantener intactas las condiciones del medio y del problema.

Figura 55: Acompañamiento del maestro durante la clase

b) Situación de validación

Para empezar a validar las respuestas de los alumnos, se abrió la posibilidad de que pasara al frente algún representante de un equipo a mostrar sus resultados. La representante del equipo 3 (alumna 3.4) decide pasar al frente a resolver el problema. En este sentido, me parece relevante resaltar que esa misma alumna estuvo muy incisiva en su equipo tratando de entender el problema, debido que tenía dudas. La alumna que pasó al frente logró comprender el problema y eso generó confianza en ella; lo cual provocó que se animara a pasar a resolverlo en el tablero (Figura 56).

Figura 56: Representante del equipo 3 compartiendo sus resultados

La alumna 3.4 anota en el tablero su procedimiento; aquí comienza la verificación para el equipo 3. Cuando la joven termina de anotar, el profesor pregunta:

> *Maestro: ¿Eso es lo que vale la "x"? ¿-6? Bueno… Voltee hacia allá. Ella multiplica dos tercios por nueve y sería $2 * 9 = 18$ entre 3 a 6 ¿Verdad? y luego $-\frac{2}{3}$ de x. ¿Y de aquí qué hizo?*
> *A3.4: Multipliqué esta fracción por el $(8 - x)$ y $(9 - x)$*
> *Maestro: ¿Multiplicó por 3?*
> *A3.4: Nueve por dos dieciocho, ocho por tres veinticuatro; y luego es $-3x$ y $9 * 2 = 18$ menos $2x$*
> *Maestro: Ajá… y eso es lo que hace que desaparezca el denominador ¿Cierto? Multiplicó por 3 toda la ecuación ¿Verdad? Entonces aquí 3*8=24, y luego de ahí ¿Qué sigue?*
> *A3.4: Separé lo que son las x y los números con los números.*
> *Maestro: Ajá… entonces está (señalando un término) de este lado ¿Qué signo tenía?*
> *A3.4: Negativo*
> *Maestro: ¿Y si lo puso?*
> *A3.4: No*

Maestro: Entonces… aquí ¿Qué le falta?
A3.4: El signo
Maestro: ¡El signo!... Tenga (el maestro entrega a la alumna el plumón para que corrija). Y ahora, ¿$-3x + 2x$*?*
A3.4: x
Maestro: ¿Positiva o negativa?
A3.4: Negativa
Maestro: Entonces dice usted que $-x = -6$*; pero ahora díganos cuánto vale la* x*, porque su compañero dice que* $18 - 24 = -6$ *¿Usted le cree?*

En la transcripción podemos observar que con los cuestionamientos que hace el profesor, la alumna invalida su respuesta porque se da cuenta del error que tenía. Enseguida, el docente pide el apoyo al grupo en general diciendo:

Maestro: ¡Jóvenes, atención! Aquí le da $-x = -6$ *¡Ojo! ¿Ya encontramos el valor del lápiz? ¿o sea el valor el valor de la* x*?*
Alumnado en general: No, no… es que no debe dar negativo
Maestro: Correcto, entonces, ¿qué hacemos para saber?
Alumnado en general: Sustituyendo x
Maestro: Pero todavía no saca el valor de x*, ¿o sí? Sacó* $-x$ *¿Cómo saca* x*?*
A5.1: Se multiplica por -1
Maestro: Se multiplica por -1*. Es lo que vimos la clase anterior,* ***se pueden multiplicar por la misma cantidad en ambos lados de la ecuación*** *¿Cierto? ¿Si multiplica* $-6 * -1$*? ¿cuánto le da? (el docente escribe en el tablero* $-6(-1)$*).*
A3.4: 6
-Maestro: Y luego, ¿$- x * -1$*?*
A3.4: x
Maestro: Por eso $x = 6$*. (el maestro felicita a la alumna y pide que el grupo le brinde un aplauso)*

Ahora bien, la transcripción anterior da evidencia de que se aplicó la propiedad **multiplicativa** de la **igualdad**. Se hace uso de dicha propiedad al multiplicar por -1 ambos miembros de la ecuación; lo cual coincide con el propósito de la clase: reforzar el **método** de **resolución formal**. Se refuerza el método haciendo hincapié en las propiedades de la igualdad para que el alumno entienda la razón de cada paso en el procedimiento de despeje.

Aunado a lo anterior en la figura 57 podemos observar como la alumna escribe en el último paso $6 = x$. El profesor comienza a hacerle preguntas a la alumna y le comenta que si $6 = x$, entonces $x = 6$. Esto con la finalidad de hacer visible la propiedad **simétrica de la igualdad.**

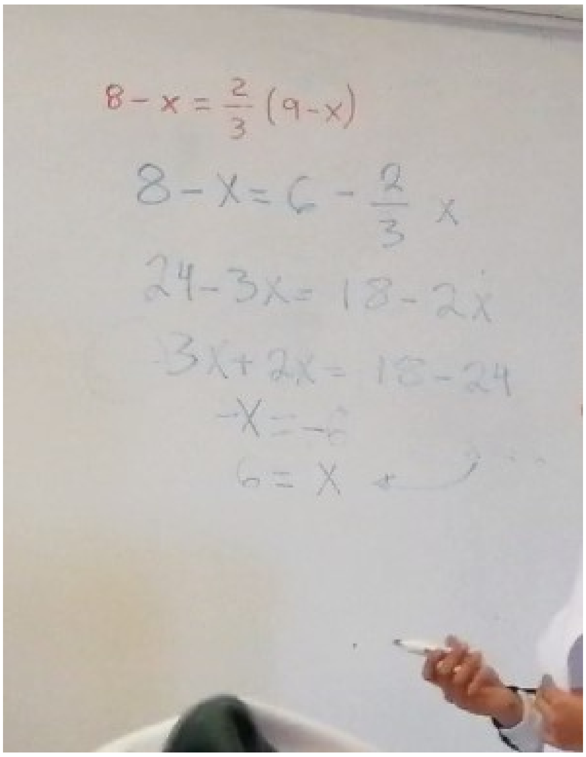


Figura 57: Ocasión para evidenciar la propiedad simétrica

El equipo 1 también pasó a validar su respuesta. La alumna 1.1 pasó a anotar su procedimiento en el tablero. Este equipo no utilizó la propiedad distributiva como el equipo 3. Ellos decidieron transponer el denominador 3 (usando la **propiedad multiplicativa**) para que multiplique a la expresión $8 - x$ (Figura 58). Esto les evitó operar con números racionales.

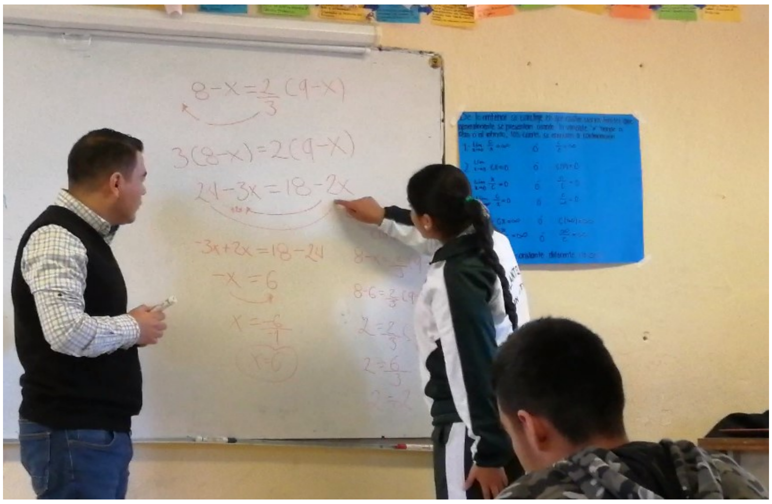


Figura 58: Procedimiento del equipo 1

Los pasos que despliega este equipo fueron los adecuados y encontraron acertadamente el valor de la incógnita. Este equipo agregó su comprobación mencionando lo siguiente:

> *A1.1: Y al comprobarla sustituí esto (la alumna señala el tablero). Quedaría* $8-6=\frac{2}{3}(9-6)$*, que es el valor de* x*. Y* $8-6$ *me da* 2*,* $\frac{2}{3}(3)$*, se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, quedaría* $\frac{6}{3}$ *y al dividirla me da 2, que es igual a* 2.
> *Maestro: ¡Excelente!... vamos a darle un aplauso a su compañera.*

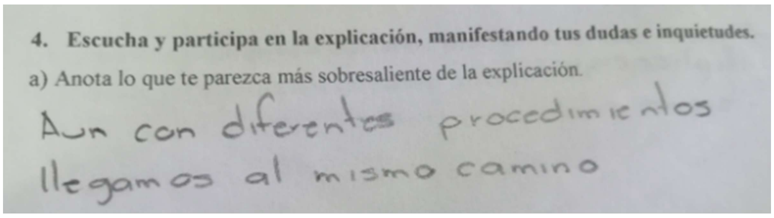
La comprobación del equipo 1 corresponde a la sustitución del valor de la incógnita en la ecuación que representa al problema; lo cual se predijo en el análisis a priori. En este tenor, los alumnos indicaron que la ecuación puede comprobarse porque se tiene que cumplir la **igualdad**. De acuerdo con esto, al sustituir el valor de la incógnita también se está ocupando la **propiedad** de **sustitución** de la **igualdad**. El maestro preguntó al grupo que, si alguien había comprobado de manera distinta, pero nadie se manifestó.

d) Situación de institucionalización

En esta situación se pretenden rescatar las ideas de los alumnos para formalizar el conocimiento (figura 59). El instructor pregunta a sus alumnos si se cumplen las condiciones del problema con la respuesta que dieron las alumnas 3.4 y 1.1. Las condiciones del problema sirven para mostrar al grupo que también basándose en ellas se puede comprobar la solución.

Figura 59: Situación de institucionalización

Del mismo modo se aprovecha para reforzar el método de resolución formal tomando en cuenta las **propiedades** de la **igualdad** y la **propiedad distributiva** para los números reales. Para terminar el refuerzo, se le pide al alumno que escriba en su hoja de trabajo lo que le haya parecido más sobresaliente de la explicación. Sobresaliente fue para los alumnos que, aunque los procedimientos son distintos, se llegó al mismo resultado (Figura 60).



4. Escucha y participa en la explicación, manifestando tus dudas e inquietudes.

a) Anota lo que te parezca más sobresaliente de la explicación.

Aun con diferentes procedimientos llegamos al mismo camino

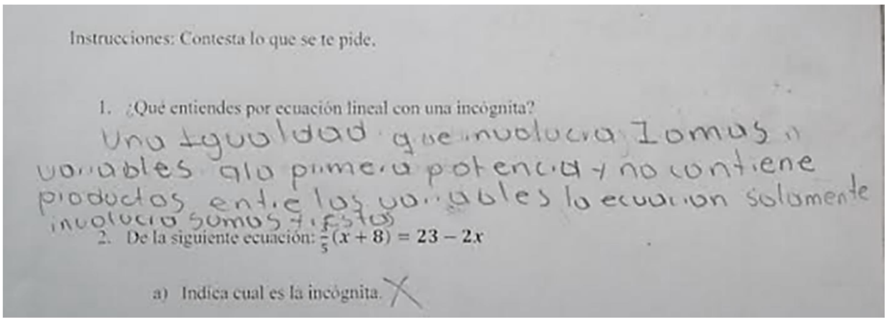
Figura 60: Aspecto sobresaliente de la explicación (alumno 3.2)

6.3.4 Análisis de la evaluación final

Para la evaluación final hubo un total de 29 participantes; de tal forma que 17 contestaron de forma correcta la ecuación: $\frac{3}{5}(x+8)=23-2x$. Los otros 12 alumnos incurren en diferentes errores. La información se resume en la siguiente gráfica:

Gráfica 3: Resultados de la evaluación final

Por otro lado, se obtuvo que 22 alumnos evidenciaron la comprensión del concepto ecuación de primer grado con una incógnita e identificaron correctamente el valor de la incógnita dentro de la ecuación (Figura 61).



Instrucciones: Contesta lo que se te pide.

1. ¿Qué entiendes por ecuación lineal con una incógnita?

Una igualdad que involucra 1 o mas variables a la primera potencia y no contiene productos entre las variables la ecuacion solamente involucra sumas y restas

2. De la siguiente ecuación: $\frac{2}{5}(x+8) = 23 - 2x$

a) Indica cual es la incógnita. X

Figura 61: Concepto de ecuación lineal con una incógnita.

Además, se identificó que cinco alumnos comprobaron la solución sustituyendo el valor de la incógnita en la ecuación original. Lo anterior puede observarse en la figura 62.

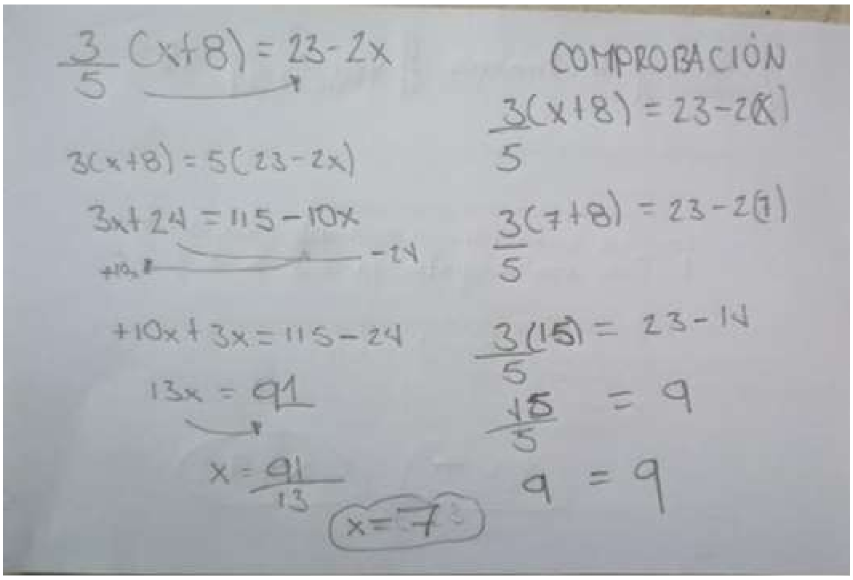


Figura 62: Comprobación de la solución.

De esta manera se observa que los alumnos lograron mejorar su aprendizaje. Si se comparan los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica puede encontrarse que únicamente dos alumnos resolvieron correctamente la ecuación propuesta. En cambio, en la evaluación final, diecisiete alumnos resolvieron correctamente la ecuación correspondiente.

CAPÍTULO VII: ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

En este capítulo se incluye la última fase de la Ingeniería Didáctica. Lo que se hace aquí es confrontar, a partir de los datos que se recabaron durante la implementación de la secuencia de enseñanza, el análisis a priori con el a posteriori. Este contraste es, precisamente, lo que le proporciona la validación interna a la propuesta que se está usando en el proyecto.

Para dar a conocer la validación interna se muestran tres tablas, una para cada actividad de la secuencia de enseñanza. En ellas se describe lo que se esperaba obtener (análisis a priori) comparado con lo que se obtuvo en la experimentación (análisis a posteriori); esto ofrecerá la confrontación y proporcionará la **validación interna**.

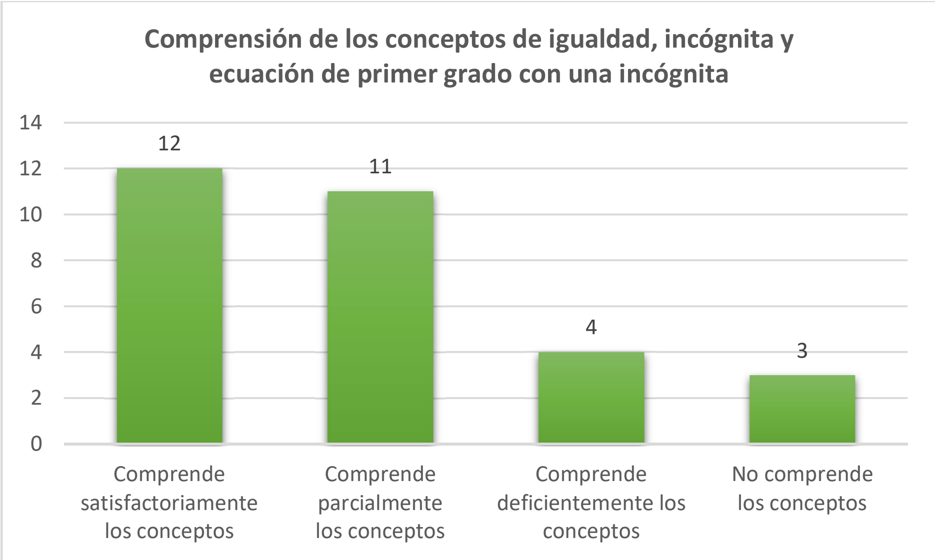
7.1 CONFRONTACIÓN PARA LA ACTIVIDAD 1

Para la actividad 1 se registraron 30 participantes, en la siguiente tabla se muestra la confrontación.

Análisis a priori **Se espera que:**	**Análisis a posteriori** **Se encontró que:**
• Para el punto 1 (primera consigna de la hoja de trabajo correspondiente a la actividad 1) el alumno determine el elemento faltante por medio de la operación inversa $33 - 8 = 25$.	• Se cumplió para **20 alumnos**; de los cuales **9** utilizaron un despeje con lenguaje simbólico para llegar a la ecuación $x = 33 - 8$. • Otros **10 alumnos** buscaron un número que al **sumarlo** diera 33. Argumentaron que se llega a esa respuesta contando (estrategia de conteo).
• En el punto 2, el alumno llegue a la respuesta correcta utilizando el tanteo intuitivo.	• Se cumplió para **24** jóvenes; de los cuales sólo el alumno **1.5** anotó la expresión de sumando faltante como tal. Los otros **23** alumnos decidieron construir la ecuación $3x + 2 = 23$, no obstante, la resolvieron usando el tanteo intuitivo. • El alumno **2.3** dejó el punto 2 en blanco, es decir, no resolvió el problema.
• Se pueden presentar errores en el	• El grupo rebasó las expectativas. Todos

punto 3 debido a la mala elección de los pesos a colocar, lo que dará evidencia de una comprensión deficiente del concepto de **igualdad**.	los equipos eligieron bien los pesos que colocarían en la balanza. Ningún equipo tuvo errores en esta parte de la secuencia de enseñanza.
• Al ver que existen diferentes propuestas, se entienda que el conjunto solución puede no ser el mismo en todos los casos. Además, el equilibrio en la balanza tiene correspondencia con la "**equivalencia**".	• El análisis a priori se cumplió para todos los equipos, presentándose cuatro propuestas de solución diferentes. Esto sucedió porque la propuesta del equipo 1 y el 2 fueron similares.
• Los alumnos se den cuenta de que el equilibrio que se produce en la balanza tiene correspondencia con la equivalencia y con el concepto de **igualdad**.	• Se cumplió para todos los equipos. Los argumentos de los alumnos durante la validación y en las hojas de trabajo demuestran la comprensión de la correspondencia que tiene el equilibrio en la balanza con el concepto de **igualdad**.

Es preciso mencionar que el propósito de la actividad fue que el alumno comprenda los conceptos de incógnita, igualdad y ecuación de primer grado con una incógnita. Por este motivo, en la parte final se indicó al alumno que escribiera con sus propias palabras el significado de los tres conceptos. En la siguiente gráfica se muestran los resultados:



Gráfica 4: Número de alumnos que comprendieron los conceptos de igualdad, incógnita y ecuación de primer grado con una incógnita

7.2 CONFRONTACIÓN PARA LA ACTIVIDAD 2

Para la actividad 2 se registraron 25 participantes, enseguida se muestra la confrontación.

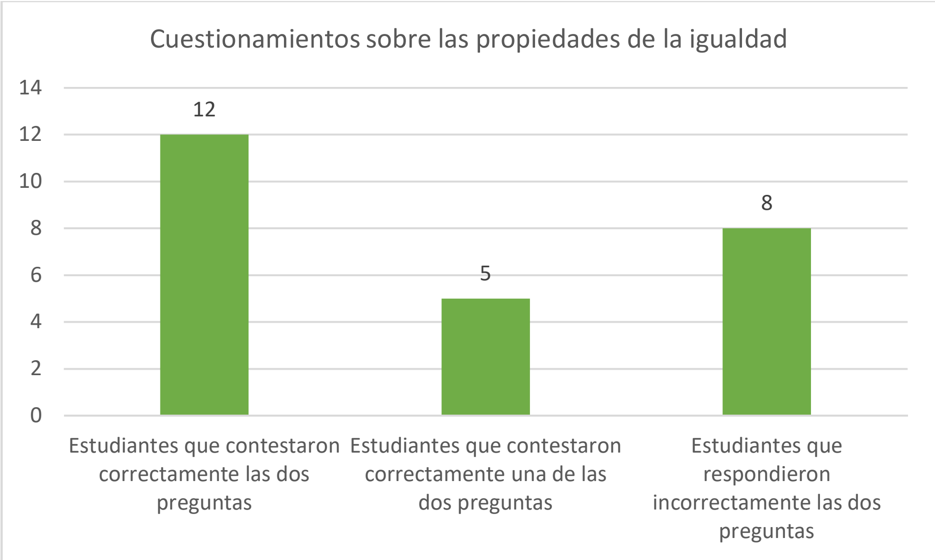
Análisis a priori **Se espera que:**	**Análisis a posteriori** **Se encontró que:**
• Los alumnos que comprendieron los conceptos de incógnita, ecuación e igualdad elijan la opción correcta.	• De los 25 alumnos que participaron en esta actividad, 24 eligieron la opción correcta.
• Algunos alumnos se equivoquen debido a problemas para traducir al lenguaje algebraico lo presentado en la imagen de la balanza.	• Sólo la alumna **3.5** se equivocó al hacer la traducción al lenguaje algebraico.
• Algunos jóvenes resuelvan la ecuación intuitivamente y otros usando el método de transposición de términos.	• **18 alumnos** resolvieron la ecuación utilizando el método de transposición de términos. • **6 jóvenes** resolvieron intuitivamente. • Sólo **el alumno 1.1** resolvió utilizando la sustitución por tanteo.

• Los alumnos que usen el método de transposición de términos presenten respuestas incorrectas debido a errores a la hora de reducir términos semejantes, utilizar de manera incorrecta la ley de los signos o aplicar de manera incorrecta el inverso multiplicativo o el inverso aditivo.	• De los 18 alumnos que usaron el método de transposición de términos, **4** de ellos tienen errores a la hora de reducir términos semejantes y otros **4** no anotaron procedimiento.
• Los alumnos cotejen sus respuestas y se desplieguen varias formas de encontrar el resultado.	• Los integrantes de los equipos cotejaron sus respuestas y concluyeron que llegaron al mismo resultado.
• Los alumnos corrijan errores en sus procedimientos como resultado del diálogo con sus compañeros de equipo.	• A pesar de haber plasmado procedimientos diferentes, los alumnos determinaron de manera consensuada la respuesta que creyeron correcta.

El propósito de la actividad 2 es que los alumnos aprendan a resolver una ecuación de primer grado con una incógnita utilizando las propiedades de la igualdad. Por tal motivo, en la parte final de la hoja de trabajo número 2 se hicieron al alumno las siguientes dos preguntas:

- ¿Qué pasa si se suma el mismo un número en ambos lados de una ecuación?
- ¿Qué pasa si se multiplica el mismo número en ambos lados de una ecuación?

La gráfica 3 muestra la cantidad de alumnos que respondieron adecuadamente las dos preguntas relativas a las propiedades de la igualdad, los que respondieron correctamente una de las preguntas y los que respondieron de manera incorrecta el par de preguntas. Esta gráfica denota que la mayor parte de los alumnos se quedan con una idea clara del papel de las propiedades de la igualdad en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, es decir, 17 alumnos dan evidencia de que movilizaron los conocimientos relativos a las propiedades de la igualdad durante las situaciones correspondientes a la actividad 2.



Gráfica 5: Cantidad de alumnos con respuestas correctas a las dos preguntas que se les hicieron sobre las propiedades de la igualdad

7.3 CONFRONTACIÓN PARA LA ACTIVIDAD 3

En esta última actividad, la numero 3, se registraron únicamente 11 participantes.

Análisis a priori **Se espera que:**	**Análisis a posteriori** **Se encontró que:**
• Los alumnos resuelvan la ecuación utilizando el método formal.	• Todos los alumnos resolvieron la ecuación valiéndose del método de transposición de términos.
• Los alumnos apliquen de manera correcta las propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad.	• 9 alumnos aplicaron de manera correcta las propiedades de la igualdad.
• Existan errores debido a: la mala identificación de las operaciones inversas, transponer en forma inadecuada los términos, el mal uso de la propiedad distributiva, la forma incorrecta de operar con coeficientes negativos o racionales o al desconocimiento del papel que juegan los paréntesis en las ecuaciones.	• 6 alumnos resolvieron la ecuación de manera correcta, anotando paso por paso sus razonamientos en las hojas de trabajo. • 3 alumnos tuvieron errores originados por la forma incorrecta de operar con coeficientes negativos o racionales. • El alumno 3.2 transpuso de forma inadecuada los términos de la ecuación.

	• El alumno 3.1 no anotó procedimiento.
• Los alumnos sientan la necesidad de aislar la incógnita en el lado izquierdo de la ecuación.	• Todos los participantes tratan de aislar la incógnita del lado izquierdo de la ecuación, manifestando una tendencia al pensamiento aritmético. Los alumnos tienden a mostrar los resultados de las operaciones del lado derecho del signo igual.
• Se espera que los equipos comprueben basándose en el contexto del problema, solicitando una balanza para validar o sustituyendo el valor de la incógnita en la ecuación original.	• Ningún equipo trató de comprobar sus resultados basándose en el contexto del problema. • El equipo tres manifestó que necesita una balanza para comprobar. • El equipo 1 comprobó sustituyendo el valor de la incógnita en la ecuación original. • El equipo 4 manifestó que se puede comprobar volviendo a resolver la ecuación. • Los equipos 2 y 5 no comprobaron sus respuestas.
• Los equipos que comprueben sustituyendo en la ecuación presenten errores de tipo aritmético, es decir, debido al mal uso del paréntesis, aplicar de forma incorrecta las leyes de los signos, desconocimiento de la jerarquía de las operaciones, empleo erróneo de la propiedad distributiva, etc.	• El equipo 1 fue el único que comprobó sustituyendo en la ecuación. Este equipo no tuvo errores del tipo aritmético en su comprobación; estuvo conformado por 6 alumnos, peros solo 3 de ellos estuvieron presentes en el salón de clases durante el desarrollo de la actividad 3.
• Los alumnos observen lo que sucede con la balanza y además que refuercen su comprobación basándose en el contexto del problema.	• La **alumna 1.1** pasó al frente a comprobar su respuesta sustituyendo en la ecuación original. Los alumnos reforzaron su método de comprobación, pero nadie utilizó el contexto del problema.
• Se espera que los alumnos tengan	• No se representaron los pesos en la balanza, la alumna que pasó al frente

dificultad para comprender cómo se representan los pesos negativos en la balanza.	decidió comprobar sustituyendo en la ecuación original.

La intencionalidad de la última actividad es que el alumno refuerce el método de resolución formal y aprendiera a comprobar sus resultados. Se logró que los alumnos resolvieran la ecuación ayudándose del **método de resolución formal** y sabiendo el papel que juegan las propiedades de la igualdad. En este sentido, los alumnos no tuvieron que utilizar material concreto, ni hicieron dibujos de la balanza manifestando independencia de la analogía. Adicionalmente, los jóvenes aprendieron a **comprobar** las ecuaciones que resuelven. Ellos abandonaron la idea que tenían acerca de comprobar sus resultados volviendo a resolver la ecuación desde el principio.

Así pues, la situación de acción se concluyó de manera satisfactoria en las tres actividades desarrolladas. El profesor entrega a los educandos la responsabilidad de solucionar el problema. Los alumnos comenzaron a interactuar con el medio tratando de dar respuesta a los problemas, es decir, utilizaron su razonamiento y conocimientos previos para dar respuesta (**devolución**) a la situación adidáctica. El medio proporcionó a los alumnos una retroacción. Dicha retroacción ayudó a justificar, y en su defecto, a corregir la estrategia. Los alumnos se familiarizaron con el problema, lo hicieron suyo y trataron de resolverlo.

Para la situación de **formulación**, los alumnos tuvieron que utilizar un lenguaje relacionado con el tema de las ecuaciones para defender sus ideas. En esta situación se emitieron argumentos para trasmitir diferentes posturas. Se logró un trabajo en equipo para decidir una respuesta de forma colaborativa. Estas colaboraciones ayudaron a generar adaptaciones de los alumnos con el medio didáctico.

La **validación** se consumó de manera adecuada. Se favorecieron las discusiones entre los participantes para dar pertinencia a los conocimientos puestos en juego en esta situación y las anteriores (acción y formulación). Los alumnos manifestaron sus posturas mismas que fueron puestas a juicio. Esto condujo a que los mismos alumnos corrigieran o reforzaran sus pensamientos y produjeran conocimiento.

En cuanto a la situación de **institucionalización**, se puede decir que se realizó de manera adecuada. El profesor tomó en cuenta los resultados obtenidos durante las situaciones anteriores (acción, formulación y validación) para organizar y dar sentido a los conocimientos movilizados por los alumnos. En esta parte se favoreció la comprensión de los conceptos alusivos a las ecuaciones de primer grado con una incógnita. La comprensión conceptual evita que los alumnos aprendan solo a repetir procedimientos de manera mecánica. De esta manera se ha favorecido el conocimiento de los principios matemáticos durante esta primera actividad.

CAPÍTULO VIII: CONCLUSIONES

Para consumar este trabajo es necesario retomar la pregunta de investigación; la cual fue planteada de la siguiente manera: *¿Qué elementos debe contener una secuencia de enseñanza para generar aprendizaje por adaptación en la enseñanza del tema ecuaciones lineales con una incógnita?* Luego del trabajo desarrollado se concluye que los siguientes elementos son imprescindibles:

- La creación de situaciones generadas a partir de un análisis preliminar.
- Análisis y predicción de lo que sucederá en las situaciones diseñadas.
- El medio preparado por el profesor.
- Énfasis en los conceptos matemáticos.
- Devolución y aprendizaje por descubrimiento.
- Formalización de los conocimientos movilizados.

Es pertinente resaltar el aporte del docente; cuando este concibe su clase fundamentada en el análisis preliminar para alcanzar el aprendizaje por adaptación. Por ejemplo, cuando un alumno se equivoca, el medio se lo hará saber enviándole una retroacción al alumno. Esto es importante debido a que no es el profesor quién le dice al alumno que su estrategia está mal y que corrija, sino es el mismo medio preparado por el profesor quién proporciona una señal para que el alumno entienda que debe hacer cambios en su proceso de resolución. Esto dota de sentido al alumno porque él abandona la idea de que está equivocado solo porque lo dijo el profesor. De esta manera, el alumno podrá comprender mejor el problema y corregirlo a partir del análisis de las retroacciones. Esta forma de enseñanza está centrada en el alumno y revoluciona a la enseñanza tradicional; en la cual el maestro es el principal actor.

Relativo a los objetivos específicos, he coincidido con las investigaciones analizadas en la utilización de la analogía de la balanza. Sin embargo, fue necesario considerar lo reportado en el artículo de Kieran y Filloy (1989); en el cual mencionan que los alumnos tienen una tendencia a anclarse en los modelos concretos que se utilizaron en la enseñanza de resolución de ecuaciones. En este tenor, durante la actividad 2, se llevó a cabo la institucionalización utilizando de manera simultánea el material didáctico y el lenguaje simbólico para evitar que los alumnos se quedaran anclados en la analogía de la balanza. De este modo, ningún alumno necesitó utilizar la balanza, ni durante la actividad 3, ni durante la evaluación final.

En cuanto a la secuencia, es relevante mencionar que se propició un aprendizaje conceptual, es decir, se logró que los alumnos comprendieran que las propiedades de la igualdad son las herramientas necesarias para darle sentido a la creación de ecuaciones equivalentes dentro del proceso de resolución formal. La comprensión de los conceptos de igualdad e incógnita dentro del marco de las ecuaciones de primer grado permitió renunciar a una enseñanza enfocada en la repetición mecánica del algoritmo de resolución. Con estas bases, se pudieron abordar de manera sólida las dificultades originadas por el signo igual o por los coeficientes negativos, entre otras.

Las afirmaciones hechas en el párrafo anterior tienen sustento en las argumentaciones, discusiones y respuestas producidas por los alumnos durante el desarrollo de la secuencia. Además, al comparar los resultados de la prueba diagnóstica con la evaluación final se encuentra que el grupo de alumnos ha avanzado considerablemente. En la prueba diagnóstica, solo dos alumnos resolvieron correctamente la ecuación. En contraste, en la evaluación final, el número de alumnos que encuentran correctamente el valor de la incógnita en una ecuación se incrementa a 17 alumnos. De esta manera, los alumnos manifestaron respuestas nuevas que son fruto de su adaptación (Brousseau 2007), es decir, al momento que el alumno transitó por las distintas situaciones, manifestó sus conocimientos de manera satisfactoria (tal y como se mostró en el análisis de los datos).

Cabe mencionar que el proceso de enseñanza pudo haberse mejorado si a cada uno de los equipos conformados durante la experimentación se le dotaba de una balanza. De conformidad con esto, cada equipo hubiera podido interactuar con su propia balanza para fortalecer sus estrategias o intentar nuevas.

Por otro lado, en la prueba diagnóstica se encontró que existe la necesidad de dar un tratamiento a los alumnos, ya que, de 32 participantes, únicamente dos lograron resolver la ecuación. Los resultados revelan que un 13% de los alumnos tiene errores al operar con números racionales y un 6% se equivocó al reducir términos semejantes En este sentido, es imperante fortalecer el nivel de los prerrequisitos relativos a las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Los cuatro objetivos específicos abonaron a la culminación del objetivo general, *proponer una secuencia didáctica, validada en un escenario real de clase, que atienda el proceso de comprensión del tema "ecuaciones lineales con una incógnita"*, puedo señalar que se cumplió; esto tomando en cuenta que la secuencia se validó en el Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, plantel Saín Alto. Los resultados de la aplicación, en general fueron satisfactorios, puesto que la mayoría de los alumnos lograron comprender el tema.

8.1 REFLEXIÓN DE MI PRÁCTICA DOCENTE

El tiempo que he pasado haciendo el Proyecto de Desarrollo Profesional ha sido de gran aprendizaje para mí. Quiero comenzar este apartado remontándome a tres años en el pasado (antes de iniciar mi Maestría). En ese tiempo yo conocía muy poco sobre el impacto del Desarrollo Profesional para mejorar el rendimiento de los estudiantes en cuanto al aprendizaje de las matemáticas. Yo solía creer que lo esencial de la enseñanza era el discurso que yo daba a los estudiantes, para que ellos al escucharme, pudieran aprender y dominar los contenidos. De acuerdo con esta concepción, lo único que yo lograba era que mis alumnos repitieran los procedimientos que anotaba en el pizarrón; lo cual era bastante limitado.

En contraste con lo anterior, luego de haber concluido este trabajo de investigación y la carga de materias de la Maestría en Matemática Educativa, mi sistema de creencias sobre la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas ha cambiado bastante. En este lapso de tiempo, me di cuenta que tenía muchísimo que aprender; tanto que al día de hoy estoy convencido de que debo seguir preparándome, si verdaderamente quiero mejorar mi desempeño como profesor.

Siendo específico, fue algo notable entender que el aprendizaje del álgebra debe darse de lo concreto a lo simbólico. Este hecho es avalado por la historia del álgebra, ya que el conocimiento se construyó de manera similar. En la actualidad sé que los hechos históricos pueden ser de gran ayuda en el proceso de enseñanza – aprendizaje de un concepto matemático.

Aunado a lo anterior, pude comprender que el estudiante no es precisamente un recipiente que debe ser llenado con conocimiento. El alumno que está aprendiendo debe involucrarse en un proceso que le permita movilizar saberes, modificar sus preconcepciones y acomodar nuevos conocimientos producto de la adaptación. En este sentido, haber estudiado y aplicado la Teoría de las Situaciones Didácticas me da una mejor certeza del conocimiento que adquieren los alumnos. Antes de llevar a cabo esta investigación, no utilizaba ninguna teoría que me diera la certeza que mis alumnos verdaderamente estaban aprendiendo.

Mención especial merecen los conocimientos adquiridos acerca de las dificultades, obstáculos y errores. Antes de ingresar al posgrado no sabía que existen tantos artículos que tratan de explicar los orígenes de los errores que cometen los alumnos al interactuar con el contenido matemático. En la actualidad, sé que puedo recurrir a estos conocimientos para aumentar la calidad de mi quehacer docente. Hay artículos de todo tipo y para cualquier tema que quiera enseñar, es decir, todos los tópicos ya están documentados y listos para ser aprovechados.

Durante mi práctica he observado que entre los estudiantes prevalece la repetición de procedimientos y la mecanización. Muchas de las veces cuando yo les respondo alguna pregunta, ellos me contestan "*¿y siempre debe resolverse así?*". En matemáticas es necesario analizar lo que nos plantea cada situación en particular. Es así que, cuando un estudiante repite procedimientos no significa que ha aprendido matemáticos. Aprender significa entender los conceptos y tenerlos disponibles para usarlos en la resolución de problemas de nuestra vida cotidiana. Esto es lo que los maestros debemos tener como meta, ayudar a nuestros estudiantes a tener un pensamiento crítico y reflexivo para aplicarlo en situaciones reales de nuestro entorno.

De conformidad con el párrafo anterior, para mí ha sido de gran valor haber conocido distintos Marcos Teóricos, como por ejemplo, la Teoría de Situaciones Didácticas o la Teoría de Representaciones Semióticas. Menciono esto porque a partir de ellas podemos garantizar que el alumno aprendió, es decir, se adaptó al medio o transita por varios registros de representación. Estas afirmaciones nos ayudan a entender que verdaderamente se está generando aprendizaje y no solo una repetición o mecanización de procedimientos.

Lo precedente, en cuanto al aprendizaje, pero aunado a esto, conocí el Marco Teórico llamado MTSK. El MTSK se enfoca en el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Dicho conocimiento me ayudará a seguirme preparando, tanto en mi Conocimiento Matemático como en mi Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático. Ahora ya se cual ruta seguir en mi formación continua.

Otra de las cosas que quisiera resaltar, luego de haber concluido esta investigación radica en la diversidad de alumnos que debemos atender. Cada alumno tiene características muy distintas y valiosas, por lo cual, es imprescindible tomar en cuenta el papel de la equidad dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. De ahora en adelante, será necesario conocer a todos y cada uno de los alumnos que atienda. Me esforzaré en considerar sus orígenes, sueños, metas, condición social y física, etc., en aras de mejorar la calidad de mis clases.

Los conocimientos adquiridos llevan consigo la responsabilidad de ayudar a mis estudiantes a mejorar su rendimiento académico. El conocimiento que se pone en servicio pierde su valor, ya que no ayuda a mejorar el entorno. Es necesario que de ahora en adelante me concentre en utilizar lo que aprendí para lograr mejores resultados de aprendizaje en mis estudiantes.

El proceso de cambió que experimenté durante esta investigación no ha sido sencillo principalmente porque debí dedicarle tiempo de calidad. Mismo tiempo que tenía que gestionar con mi familia; para mí era muy difícil cuando mi hija de 5 años me pedía que jugara con ella; a lo que yo no podía corresponderle porque tenía que hacer las actividades académicas de mi posgrado. En este tenor, llevar a cabo una investigación requiere disciplina y constancia.

Es preciso mencionar que no hubiese logrado esta investigación sin el apoyo de mis Directoras, la M. en M. Elvira Borjón Robles, la M. T. I. Mónica del Rocío Torres Ibarra y la M en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara. Ellas son ejemplo de profesionalismo y dedicación. Ellas han sido mi apoyo y motivación durante esta investigación, ya que me dedican tiempo y me comparten de sus conocimientos y experiencias.

Soy un investigador primerizo que tuvo un pequeño acercamiento con la ciencia. Todavía falta mucho camino por recorrer, pero se ha despertado en mí el interés por la búsqueda de la verdad, por la indagación, por la experimentación, por la búsqueda de soluciones comprobables.

A mi entender, el Desarrollo Profesional es un estilo de vida, en el cual siempre estas aprendiendo y mejorando. Concluir este trabajo me ha ayudado a empoderarme y a consolidarme como profesor de matemáticas. Me siento con el ánimo de seguir trabajando el día a día convencido de que se pueden lograr cosas maravillosas con mis alumnos. Nuestro país está habido de buenos profesores que verdaderamente impulsen el progreso desde su trinchera.

Me siento orgulloso de ser nuevamente egresado de la Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Matemáticas. Gracias a todos mis Instructores de la Maestría por todas sus excelentes enseñanzas.

ANEXO 1:

HOJAS DE TRABAJO

PROPUESTA DE SITUACIÓN DIDÁCTICA COMO ALTERNATIVA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES LINEALES EN EL NIVEL BACHILLERATO

Material para el alumno (1)

Nombre del alumno: ____

Grupo: ________________ Fecha: __________________________

1. **Lee el siguiente enunciado.**

   El peso de una piedra más 8 kg es igual a 33 kg.

La siguiente expresión representa la traducción del enunciado: $\_\_\_\_ + 8 = 33$

a) Determina el peso de la piedra encontrando el elemento faltante en la igualdad anterior.

b) Describe la estrategia que utilizaste para encontrar el elemento faltante.

c) Escribe paso a paso las operaciones que utilizaste para encontrar el elemento faltante.

2. **Considera el siguiente enunciado**

Se obtienen 23 kg si se multiplica por tres el peso de una roca y a ese peso se le suman 2 kg.

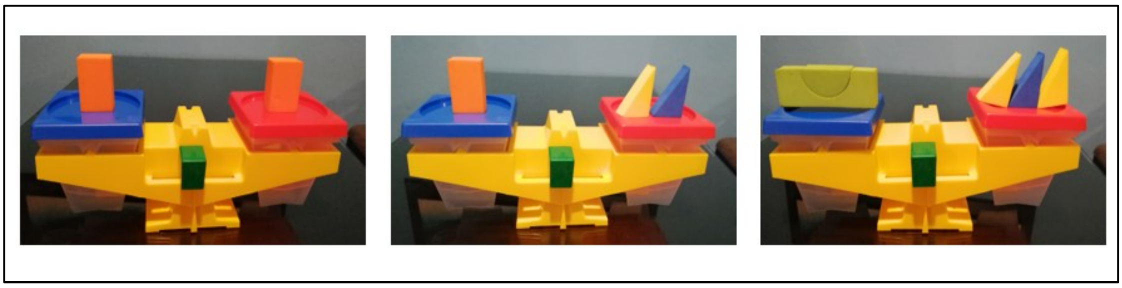
a) ¿Cómo quedaría la expresión con el elemento faltante?

b) Escribe paso a paso las operaciones que se realizan para encontrar el elemento faltante.

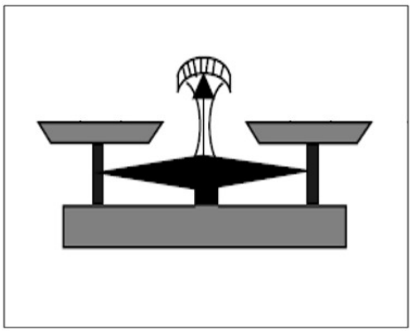
c) ¿Cuál es el peso de la piedra?

3. Reúnete en equipo y considera lo siguiente:

En la imagen aparecen tres balanzas que están en equilibrio; si disponemos de tantos objetos como sea necesario y de iguales características a los propuestos, dibujar otra balanza diferente que esté en equilibrio.



Balanza diferente:



Integrantes del equipo: ____

____

a) Explica por qué decidieron dibujar esa balanza

4. **Representen la ecuación en la balanza y manifiesten ante el grupo si la respuesta es correcta o incorrecta y por qué.**

5. **Escucha y participa en la plenaria dirigida por el profesor.**

6. **De acuerdo a lo que se presentó en las cinco actividades anteriores, escribe con tus propias palabras el significado de los siguientes conceptos:**

a) igualdad

b) incógnita

c) ecuación de primer grado con una incógnita

Material para el alumno (2)

Nombre del alumno: ______________________________________Edad: ____________

Grupo: ________________ Fecha: ___________________________

1. **En la siguiente balanza en equilibrio queremos determinar cuántas canicas hay en una bolsa. Todas las bolsas contienen el mismo número de canicas.**

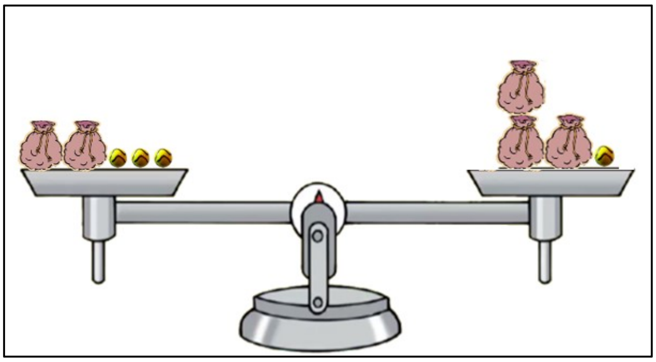
   ¿Cuál de las siguientes expresiones crees que represente mejor el problema? Subráyala.

a) $2 + 3x = 3 + x$

b) $2 + 3x = 3x + 1$

c) $2x + 3 = 3x + 1$

d) $2x + 3 = 3 + x$



a) De acuerdo con la ecuación que elegiste, ¿cuántas canicas hay en cada bolsa?

b) Explica qué estrategia utilizaste para averiguar el número de canicas que hay en cada bolsa.

c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar el número de canicas que hay en cada bolsa.

2. **Reúnete en equipo y compara tu respuesta con la de tus compañeros.**

a) ¿Encuentran alguna diferencia en los pasos que realizaron? Entre todos, determinen cuál es la respuesta correcta y anótenla.

b) Escriban por qué decidieron elegir esa respuesta.

3. **Representen la ecuación anterior en la balanza y manifiesten ante el grupo si la respuesta es correcta o incorrecta y por qué.**

a) Explica a qué conclusión llegaste luego de haber manifestado tu respuesta y escuchado la de tus compañeros.

4. **Escucha la explicación y participa en ella. Manifiesta tus dudas e inquietudes.**

a) Anota lo que te parezca más importante de la explicación.

b) ¿Qué pasa si se suma el mismo un número en ambos lados de una ecuación?

c) ¿Qué pasa si se multiplica el mismo número en ambos lados de una ecuación?

Material para el alumno (3)

Nombre del alumno: ____

Grupo: ________________ Fecha: __________________________

1. Lee detenidamente el siguiente problema:

Rubén tiene $9 y Aldo tiene $8. Cada uno compra un lápiz idéntico. Después de la compra, a Aldo le quedan dos terceras partes del dinero que le queda a Rubén. Calcula el precio del lápiz.

La ecuación que representa este problema es:

$$8 - x = \frac{2}{3}(9 - x)$$

a) Resuelve la ecuación y encuentra el precio del lápiz.

b) Explica qué estrategia utilizaste para encontrar la solución del problema.

c) Escribe paso a paso las operaciones que realizaste para encontrar la cantidad de dinero que se depositó en cada banco.

2. Reúnete en equipo y compara tu solución con la de tus compañeros.

a) Determinen cuál es la respuesta correcta y anótenla.

b) Escriban por qué decidieron elegir esa respuesta

c) Entre todos contesten lo siguiente:

Sin utilizar la balanza, ¿cómo pueden comprobar que su respuesta es correcta? Expliquen y comprueben su respuesta.

3. **Observen los pasos que siguieron sus compañeros que pasaron al frente. Elaboren una conclusión acerca de lo que se presentó:**

4. **Escucha y participa en la explicación, manifestando tus dudas e inquietudes.**

a) Anota lo que te parezca más sobresaliente de la explicación.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano S. A. de C. V.

Avila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. *Educación Matemática, 13*(3), 5-21.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Chavarría, Y. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, 2*, 1-10.

Colegio Nacional de Matemáticas. (2015). *Matemáticas Simplificadas.* México: Pearson Education.

Correa, Y., & Pulido, E. (2013). Adaptación e implementación de recursos didácticos para la enseñanza de ecuaciones de primer y segundo grado a niños con discapacidad visual en un aula inclusiva. *Educación científica y tecnológica, Edición Especial*, 568-572.

Dalcín, M., & Olave, M. (2007). Ecuaciones de primer grado: su historia. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (Vol 20, pp. 156-161) Ciudad de México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*.

De Moreno, I., & De Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *EMA, 2*(3), 247-258.

Dirección General de Bachillerato. (2017). *Matemáticas I. Programa de Estudios. Primer Semestre.* México: Autor.

Fuentes, I. (2016). Del lenguaje aritmético al algebraico: errores y dificultades. *Uno, 73*, 38-44.

Garrido, M., Llamas, L., & Sánchez, I. (2015). *Matemáticas I.* México, D.F.: Secretaría de Educación Pública.

Gavilán, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el aprendizaje cooperativo? *Investigación en la escuela, 73*, 98-108.

Hernández, M., & Andonegui, M. (2003). Una experiencia didáctica referente a la introducción del tema Ecuaciones en educación básica. 176-182.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7*(3), 229-240.

López, M. (2015). *Propuesta Didáctica para la Enseñanza de Ecuaciones Lineales Mediada por Ambientes Virtuales en el Grado Noveno de la Institución Educativa Ana de Castrillón.* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia. Medellín.

López, S., Illanes, L., & Domínguez, Á. (2013). Uso de software especializado para incrementar el aprendizaje de solución de ecuaciones lineales de una variable. *XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*, 1-11.

Lovaglia, F., Elmore, M., & Conway, D. (1972). *ALGEBRA.* México, D.F.: HARLA S.A. de C.V. .

Martínez, L., Rincón, E., & Domínguez, Á. (2011). El juego y el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa, (Vol. 24, pp. 397-405). Ciudad de México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.*

Nieto, N., Viramontes, J., & López, F. (2009). ¿Qué es Matemática Educativa? *CULCyT, 35*, 16-21.

Orts, A. (2007). Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un estudio histórico. *SUMA, 56*, 56.

Paz, A. (2004). *Propuesta Didáctica para el trabajo de Ecuaciones de Primer Grado en N, por estudiantes de entre 10 y 11 años.* (Tesis de Maestría no publicada). Pontificia Universiadad Católica de Valparaíso. Valparaíso.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* URSS: Mir.

Rojano, M. T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números, 75*, 5-20.

Ruano, R., Socas, M., & Palarea, M. M. (s. f.). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportes de la Investigación. *Números, 77*, 5-34.

Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría.* México: Pearson Education.

Zapatera, A. (2016). Cómo desarrollar el pensamiento algebraico. *Uno, 73*, 32-37.