UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Sobre la Clasificación de Espacios Topológicos Finitos

Juan Omar Gómez Rodríguez
Universidad Autónoma de Zacatecas,
Zacatecas, Zac., 2018.

Asesor:
Dr. Juan Antonio Pérez

Índice general

Introducción

El estudio de los espacios topológicos finitos cobra popularidad en 1937 con un artículo de Alexandroff [1] en el cual describe la estrecha relación que tienen con los conjuntos finitos preordenados. Sin embargo, hasta el año 1966 surgen dos nuevos artículos de gran importancia sobre el tema. Uno de estos es debido a Stong [16], en el cual exhibe una clasificación por tipo de homotopía; además extiende el trabajo de Alexandroff con un estudio más detallado de la correspondencia entre espacios finitos y preórdenes antes mencionada. El segundo artículo es debido a McCord [9], este trabajo tiene un enfoque totalmente distinto al de Stong; presentando la relación que existe entre los espacios finitos y los poliedros compactos.

Recientemente, el estudio de los espacios topológicos finitos ha vuelto a surgir debido en gran parte a sus aplicaciones en cuanto al procesamiento digital de imágenes. Aunque sea esta una de las principales motivaciones para su estudio, también las aplicaciones matemáticas son de gran interés.

Nuestra atención se centra en la clasificación de espacios topológicos finitos, es decir, dado un conjunto con n elementos; ¿Cuantas topologías se pueden definir sobre este? Sin embargo es un problema muy complejo, tanto que no se conoce aún una formula cerrada o recursiva que exprese la cantidad de dichas topologías. Comunmente el número de topologías definibles sobre un conjunto con n elementos se denota por $T(n)$. Para valores pequeños de n el cálculo de $T(n)$ puede hacerse de forma sencilla pero el crecimiento de $T(n)$ es exponencial. La existencia de algunas fórmulas qe relacionan la cantidad de topologías T_0 en determinado conjunto en función con las cantidades de topologías en general y viceversa, justifican la motivación del estudio de los espacios topológicos finitos T_0.

Históricamente, el estudio de los espacios finitos motivaron el estudio de los A-espacios, es decir, espacios topológicos en los que la intersección arbitraria de abiertos es abierta. Estos espacios son más comunes dentro de las matemáticas de lo que pudiera pensarse, los espacios finitos y los espacios localmente finitos son algunos ejemplos. Es fácil notar que un A-espacio que es además Hausdorff es un espacio discreto. Sin embargo, los A-espacios tienen muchas propiedades interesantes.

Concretamente, dedicamos los primeros cuatro capítulos a brindar un descripción detallada de la relación más general que existe entre los espacios topológicos y los preórdenes desde un punto de vista categórico. En primer capítulo nos centraremos en los conceptos básicos de la teoría de categorías, así como en algunos ejemplos de éstas. El segudo y tercer capítulo estan enfocados en la descripción de los A-espacios y los preórdenes respectivamente, así como en resaltar algunas de sus propiedades más importantes. En el cuarto capítulo hacemos explícita la relación entre estos objetos y exhibimos una de las aplicaciones en el problema de conteo de topologías sobre un conjunto finito.

El quinto capítulo está dedicado al conteo de topologías. Primero, damos una fórmula para el número de topologías de árbol sobre un conjunto finito dado. En este mismo capítulo defimos la altura de un conjunto, que nos va a brindar un metódo para contar las topologías T_0 que tienen una cantidad grande de abiertos.

Capítulo 1

Estructuras

Nacida en la década de 1940, la teoría de categorías ha sido usada como una gran herramienta para remodelar y reformular los problemas dentro de las matemáticas, en áreas como la topología, la teoría de homotopía y la geometria algebraica. La teoría de categorías explica estos problemas, facilitando su solución, además, abre puertas a nuevas vías de investigación. Históricamente, la teoría de categorías es considerada como una aplicación inmersa dentro de las matemáticas. Sin embargo, la teoría de categorías ha encontrado aplicaciones en una amplia gama de disciplinas fuera de las matemáticas. Estas disciplinas incluyen química, neurociencia, biología de sistemas, procesamiento del lenguaje natural, causalidad, teoría de redes, sistemas dinámicos y teoría de bases de datos, por nombrar algunas.

1.1. Categorías

Definición 1.1 ([5], pag. 107)**.** Una **categoría** $\mathcal{C}$ es una 6-túpla

$$(Ob\ \mathcal{C}, Mor\ \mathcal{C}, dom, cod, id, \circ)$$

donde $Ob\ \mathcal{C}$ es una clase de objetos, $Mor\ \mathcal{C}$ es una clase de morfismos y las aplicaciones

$$\begin{gathered} Dom : Mor\ \mathcal{C} \to Ob\ \mathcal{C} \\ coDom : Mor\ \mathcal{C} \to Ob\ \mathcal{C} \\ id : Ob\ \mathcal{C} \to Mor\ \mathcal{C} \\ \circ : Comp(\mathcal{C}) \subseteq Mor\ \mathcal{C} \times Mor\ \mathcal{C} \to Mor\ \mathcal{C} \end{gathered}$$

con $Comp(\mathcal{C}) = \{(f, g) \in Mor\ \mathcal{C} \times Mor\ \mathcal{C} : cod(f) = dom(f)\}$, son tales que: (escribimos $g \circ f$ para $\circ(f, g)$)

(1) $Dom \circ id = 1_{Ob\ \mathcal{C}}$ y $coDom \circ id = 1_{Ob\ \mathcal{C}}$.

(2) $Dom(g \circ f) = Dom\ f,\ Cod(g \circ f) = Cod\ g$, para todo $(f, g) \in Comp(\mathcal{C})$.

(3) $id(coDom\ f) \circ f = f,\ f \circ id(Dom\ f) = f$ para dodo $f \in Mor\ \mathcal{C}$. Es decir, los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} Dom\ f \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & coDom\ f \arrow[d, "id(coDom\ f)"] \\ & coDom\ f \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} Dom\ f \arrow[r, "id(Dom\ f)"] \arrow[dr, "f"'] & Dom\ f \arrow[d, "f"] \\ & coDom\ f \end{tikzcd}$$

son comutativos.

(4) Si $(f, g), (g, h) \in Comp(\mathcal{C})$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Dom\ f \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & coDom\ f \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & coDom\ g \arrow[r, "h"'] & coDom\ h \end{tikzcd}$$

conmuta.

Es común denotar por $Mor(A, B)$ a la coleccion de morfismos f, tales que $Dom(f) = A,\ coDom(f) = B$.

Ejemplo 1.2. La categoría de los conjuntos Set. Aqui $Ob\ Set$ es la colección de todos los conjuntos, $Mor\ Set$ la colección de las aplicaciones entre conjuntos, y si f es una aplicación del conjunto A al conjunto B, entonces $Dom(f) = A,\ coDom(f) = B,\ id(A) = 1_A$, y $\circ$ es la composición usual.

Ejemplo 1.3. La categoría de los espacios topológicos Top. Donde $Ob\ Top$ es la colección de espacios topológicos, $Mor\ Top$ es la colección de aplicaciones continuas, y las aplicaciones Dom, $coDom$, id, $\circ$ se definen de la forma usual.

Definición 1.4. Una categoría $\mathcal{D}$ es llamada **subcategoría** de la categoría $\mathcal{C}$ si:

(1) $Ob\ \mathcal{D},\ Mor\ \mathcal{D}$ son una subcolección de $Ob\ \mathcal{C},\ Mor\ \mathcal{C}$ respectivamente.

(2) $Dom_{\mathcal{D}}, coDom_{\mathcal{D}}, id_{\mathcal{D}}, \circ_{\mathcal{D}}$ son las restricciones de las respectivas aplicaciones en $\mathcal{C}$.

Si además para todo $A, B \in Ob\ \mathcal{D}$, se cumple que $Mor_{\mathcal{D}}(A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ diremos que $\mathcal{D}$ es una **subcategoría completa**.

Definición 1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Definimos $\mathcal{C}^{op}$ como $Ob\ \mathcal{C}^{op} = Ob\ \mathcal{C}$; para $A, B \in Ob\ \mathcal{C}$, $Mor_{\mathcal{C}^{op}}(B, A) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$; las aplicaciones $Dom_{\mathcal{C}^{op}} = Dom_{\mathcal{C}}$, $coDom_{\mathcal{C}^{op}} = coDom_{\mathcal{C}}$, $id_{\mathcal{C}^{op}} = id_{\mathcal{C}}$ y $f \circ_{\mathcal{C}^{op}} g = g \circ f$ para $(f, g) \in Comp(\mathcal{C})$. Decimos que $\mathcal{C}^{op}$ es la **categoría dual** de $\mathcal{C}$.

1.2. Transformaciones naturales

Definición 1.6. Un **funtor (covariante)** $\mathcal{F}$ de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{D}$ (escribimos $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) es un par $(\mathcal{F}_{Ob}, \mathcal{F}Mor)$, donde

$$\mathcal{F}_{Ob} : Ob\ \mathcal{C} \to Ob\ \mathcal{D}$$
$$\mathcal{F}_{Mor} : Mor\ \mathcal{C} \to Mor\ \mathcal{D}$$

son tales que:

(1) $Dom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}_{Mor}\ f) = \mathcal{F}_{Ob}(Dom_{\mathcal{C}}(f))$ y $coDom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}_{Mor}\ f) = \mathcal{F}_{Ob}(coDom_{\mathcal{C}}(f))$ para todo $f \in Mor\ \mathcal{C}$.

(2) $\mathcal{F}_{Mor}(id_{\mathcal{C}} A) = id_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}_{Ob}(A))$ para todo $A \in Ob\ \mathcal{C}$.

(3) Si $(f, g) \in Comp(\mathcal{C})$, entonces $\mathcal{F}_{Mor}(g \circ_{\mathcal{C}} f) = \mathcal{F}_{Mor}(g) \circ_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_{Mor}(f)$.

Definición 1.7. Un **funtor contravariante** $\mathcal{F}$ de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{D}$ es un funtor de $\mathcal{C}^{op}$ a $\mathcal{D}$.

Ejemplo 1.8. Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$. Tenemos que el funtor de inclusión de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$ esta dado como aquel que manda a cada objeto en $\mathcal{D}$ en el mismo objeto en $\mathcal{C}$ y a cada morfismo en $\mathcal{D}$ en el mismo morfismo en $\mathcal{C}$. En el caso particular en que $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ decimos que este funtor es la identidad, lo denotamos por $1_{\mathcal{C}}$.

Definición 1.9. Dadas las categorías $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, y un par de funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Una **transformación natural** $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ consiste de:

- Un morfismo $\alpha_C : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{G}(C)$ en $\mathcal{D}$ para cada objeto $C \in \mathcal{C}$, a esta colección la llamamos las **componentes** de la transformación natural, tal que para todo morfismmo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$ se cumple que

  $$\mathcal{G}(f) \circ \alpha_C = \alpha_{C'} \circ \mathcal{F}(f).$$

  Es decir, el siguiente diagrama

  $$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(C) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & \mathcal{G}(C') \end{tikzcd}$$

  conmuta.

Un **isomorfismo natural** es una transformación natural $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ en la cuál cada componente α_C es un isomorfismo.

1.3. Isomorfismo y equivalencia

Definición 1.10. Dadas las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, decimos que son **isomorfas** si existen funtores

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

$$\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

tales que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1_{\mathcal{C}}$.

Ejemplo 1.11. Consideremos la categoría Ab de los grupos abelianos y la categoría $\mathbb{Z}$-mod de los $\mathbb{Z}$-módulos. Si A es un grupo abeliano (escrito en forma aditiva), definimos nx para $n \in \mathbb{Z}$ como el n-ésimo multiplo de x, con lo que A es un $\mathbb{Z}$-módulo. De manera inversa, si A es un $\mathbb{Z}$-módulo, tenemos que el grupo aditivo A es abeliano. Además, para $f : A \to B$ un homomorfismo de grupos abelianos, tenemos que $f(nx) = nf(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, por eso f es un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. De forma análoga obtenemos que un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos define un homomorfismo de grupos abelianos. Se deduce que las categorías Ab y $\mathbb{Z}$-mod son equivalentes.

Definición 1.12. Decimos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes si existen funtores

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

$$\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

tales que

$$\alpha : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$$

$$\alpha' : \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$$

son isomorfismos naturales.

Nota 1.13. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías isomorfas, en particular son equivalentes. Vamos a escribir $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ si las categorías son equivalentes.

Nota 1.14. Tenemos que $\cong$ es una relación de equivalencia.

Capítulo 2

Topologías finitas

A primera vista el estudio de los espacios topológicos finitos puede parecer trivial, sin embargo, la vasta cantidad de aplicaciones los vuelven objetos interesantes. La estrecha relación entre espacios finitos y preórdenes es por demás una herramienta muy útil en combinatoria y cada vez más recurente en el precesamiento de imágenes, la topología digital, química teórica, genética, redes, etc. Por si fuera poco, dichos espacios los podemos identificar con complejos simpliciales, poliedros, álgebras booleanas y otros, dando pauta al estudio de homotopía simple de poliedros, homotopía de espacios finitos, sistemas electorales, entre muchas más.

2.1. Espacios de Alexandroff

Una de las consecuencias del estudio de los espacios finitos son los espacios de Alexandroff, introducidos en [1], siendo una generalización de estos, muchos de los resultados para los espacios finitos se pueden extender sin mayor complicación. Además, la relación entre los espacios finitos y los preórdenes sobre un conjunto finito se extiende a espacios de Alexandroff con preórdenes sobre un conjunto no necesariamente finito.

Definición 2.1. Un espacio topológico (X, τ) se dice de Alexandroff (o A-espacio) si τ es cerrado respecto a las intersecciones arbitrarias.

Ejemplo 2.2. Si X es un espacio discreto, entonces es un A-espacio dado que cualquier subconjunjunto de X es abierto.

Ejemplo 2.3. Un **espacio finito**, es decir, un espacio topológico (X, τ), donde X es un conjunto finito es en particular un A-espacio, las intersecciones arbitrarias se reducen a intersecciones finitas.

Ejemplo 2.4. Sean k un campo y $n \geq 0$. Consideremos un espacio afín $\mathbb{A}^n(k)$, es decir, las n-túplas de elementos de k. Los subconjuntos de $\mathbb{A}^n(k)$ de la forma

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n(k) : f(x) = 0, \forall f \in S\}$$

donde S es un conjunto de polinomios de n variables sobre k, son llamados conjuntos algebraicos. La topología de Zariski está definida como aquella que tiene precisamente los conjuntos algebraicos como cerrados. Más aún, es una topología de Alexandroff.

Ejemplo 2.5. El plano digital $\mathbb{Z}^2$ es un A-espacio. Éste último juega un papel importante en una de las aplicaciones más relevantes de los A-espacios, la topología digital, que contribuye en el estudio de procesamiento y análisis de imagenes.

Definición 2.6. Definimos la **categoría de los A-espacios** como la 6-túpla A-*top* dada por:

- *Ob* A-Top la coleccíon de los A-espacios.
- Mor A-Top la colección de las aplicaciones continuas entre A-espacios.
- $Dom, coDom, id, \circ$ están dadas de la forma usual.

Nota 2.7. A-Top es en efecto una categoría. Además, es una subcategoría completa de Top.

Definición 2.8. La **categoría de los A-espacios** T_0 como la 6-tupla dada por:

- *Ob* A_0-Top la coleccíon de los A-espacios T_0.
- Mor A_0-Top la colección de las aplicaciones continuas entre A-espacios T_0.
- $Dom, coDom, id, \circ$ están dadas de la forma usual.

La vamos a denotar por A_0-Top.

Nota 2.9. Tenemos que A_0-Top es una subcategoría completa de A-Top.

Definición 2.10. Sea X un A-espacio. Para cada $x \in X$ definimos la **vecindad mínima de** x como

$$U_x = \bigcap \mathcal{N}(x)$$

donde $\mathcal{N}(x)$ expresa el sistema de vecindades de x.

Ejemplo 2.11. La topología de la divisibilidad sobre los naturales (con el cero): la vecindad mínima de un natural es el conjunto de sus divisores.

Nota 2.12. Para todo $x \in X$ tenemos que U_x es abierto por la definición de A-espacio.

Teorema 2.13. *Tenemos que (X, τ) es un A-espacio si y solo si todo $x \in X$ tiene una vecindad abierta minimal.*

Demostración. Fijamos $x \in X$. Notemos que U_x cumple que $U_x \subseteq V$ para todo $V \in \mathcal{N}(x)$ y por eso es mínima.
Recíprocamente, sea $A \subseteq \tau$. Si $\cap A = \emptyset$ terminamos. En otro caso fijamos $x \in \cap A$, y consideremos U, la vecindad abierta minimal de x. Por ser minimal se cumple que $U \subseteq V$ para todo $V \in A$. Se deduce que $U \subseteq \cap A$ y por tanto $\cap A$ es abierto. Entonces $U = U_x$.

□

Teorema 2.14. *Sea X un conjunto. Si β es una colección de subconjuntos de X tal que para cada $x \in X$ existe un subconjunto minimal $m_x \in \beta$ que contiene a x. Entonces β es base de alguna topología τ sobre X. Más aún, tenemos que (X, τ) es un A-espacio y $m_x = U_x$ para todo $x \in X$.*

Demostración. De la definición de β sabemos que es una cubierta de X. Ahora, si $U, V \in \beta$ y $x \in U \cap V$, tenemos que en particular $m_x \subseteq U \cap V$. Se deduce que es base para alguna topología τ sobre X. Vamos a mostrar que (X, τ) es un A-espacio. Fijamos $x \in X$. Notemos que si $V \in \mathcal{N}(x)$, entonces $m_x \subseteq V$ de donde obtenemos que m_x es precisamente la vecindad abierta minimal de x, es decir, $U_x = m_x$. Por el teorema 2.13 se sigue que (X, τ) es un A-espacio.

□

Definición 2.15. Sea X es un A-espacio. Definimos la **base minimal** de X como el conjunto

$$\mathcal{B}_m = \{U_x : x \in X\}.$$

Teorema 2.16. *Para (X, τ) un A-espacio tenemos que la base minimal $\mathcal{B}_m$ es en efecto una base para τ. Más aún, si $\mathcal{B}$ es otra base para τ, entonces $\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{B}$.*

Demostración. Por el teorema 2.14 tenemos que $\mathcal{B}_m$ es base de una topología τ'. Tenemos que $\tau' \subseteq \tau$ puesto que $\mathcal{B}_m \subseteq \tau$. Notemos que si $U \in \tau$ se tiene que

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x$$

de donde $U \in \tau'$ y por ende $\tau = \tau'$. Ahora, sea $\mathcal{B}$ es otra base para τ. Fijamos $x \in X$, tenemos que existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U_x$ y por tanto $V = U_x$. Se deduce que $\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{B}$.

□

Corolario 2.17. *Si τ, τ' son dos topologías de Alexandroff sobre X tales que $U_x^{\tau} = U_x^{\tau'}$ para todo $x \in X$, entonces $\tau = \tau'$.*

Lema 2.18. *Sea X un A-espacio. Si $x \in X$, entonces U_x es compacto, conexo y trayecto-conexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de U_x, notemos que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, se deduce que $U_x \subseteq U$ y por eso U es una subcubierta de $\mathcal{U}$. Obtenemos que U_x es compacto. Ahora, sean $U, V \subseteq U_x$ dos abiertos tales que $U \cup V = U_x$, entonces $x \in U$ ó $x \in V$, se deduce que $U_x = U$ ó $U_x = V$, de donde U_x es conexo. Para mostrar que es trayecto-conexo consideremos $y \in U_x$, tenemos que $L_{y,x} : I \to U_x$, definida por $L_{y,x}(t) = y$ si $t \in [0,1)$, $L_{y,x}(1) = x$. Notemos que $L_{x,y}$ es continua (véase 2.32). Entonces si $y, z \in U_x$, tenemos que la concatenación $L_{x,y} * L_{z,x}^{-1}$ es una trayectoria en U_x de y a z. □

Teorema 2.19. *Si X es un A-espacio. Entonces es localmente compacto, localmente conexo y localmente trayecto-conexo.*

Teorema 2.20. *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos, donde $n \geq 2$. Tenemos que $X_1 \times ... \times X_n$ es un A-espacio si y solo si X_i es un A-espacio para todo $i,\ 1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Vamos a mostrar la afirmación para dos espacios topológicos X, Y. La afirmación general se sigue por inducción. Fijamos $(x, y) \in X \times Y$. Notemos que $U_x^X \times U_y^Y \in \mathcal{N}(x, y)$. Ahora, sea $W \in \mathcal{N}(x, y)$, tenemos que existen U, V abiertos en X y Y respectivamente, tales que $(x, y) \in U \times V \subseteq W$. Pero $U_x^X \subseteq U$ y $U_y^Y \subseteq V$ de donde $U_x^X \times U_y^Y \subseteq U \times V$. Se deduce que $U_x^X \times U_y^Y$ es minimal y por eso $X \times Y$ es un A-espacio.

Para el recíproco, fijamos $(x, y) \in X \times Y$. Consideremos W el abierto minimal de este punto, entonces existen U, V abiertos en X y Y respectivamente, tales que $(x, y) \in U \times V \subseteq W$, y por la minimalidad de W se sigue que $U \times V = W$. Sea $U' \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U' \subseteq U$, entonces $U' \times V \subseteq U \times V$ y por eso $U' \times V = U \times V$ de donde $U' = U$. Obtenemos que U es la vecindad abierta minimal de x. De forma análoga obtenemos que V es la vecindad abierta minimal de y. Concluimos que tanto X como Y son A-espacios.

□

Teorema 2.21. *Si Y es un subespacio de un A-espacio X, entonces Y es un A-espacio.*

Demostración. Fijamos $x \in Y$. Tenemos que $U = U_x^X \cap Y$ es abierto en Y. Además, si V es un abierto de X tal que $x \in V \cap Y \subseteq U$ tenemos que $V \subseteq U_x$. Se deduce que U es una vecindad abierta minimal en Y de x. □

Teorema 2.22. *Si $X/\sim$ es un espacio cociente del A-espacio X, entonces $X/\sim$ también es un A-espacio.*

Demostración. Sea $q : X \to X/\sim$ la aplicación cociente. Consideremos una intersección arbitraria $\cap_{\alpha \in A} V_\alpha$ de abiertos en $X/\sim$. Tenemos que $q^{-1}(\cap_{\alpha \in A} V_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} q^{-1}(U_\alpha)$. Como $q^{-1}(V_\alpha)$ es abierto para cada $\alpha \in A$, pues q es la aplicación cociente, se deduce que $\cap_{\alpha \in A} V_\alpha$ es abierto en X. Por la definición de topología cociente se sigue que $\cap_{\alpha \in A} V_\alpha$ es abierto en $X/\sim$. □

2.2. Continuidad

Proposición 2.23. *Si X, Y son dos espacios topológicos homeomorfos y X es un A-espacio, entonces Y también es un A-espacio.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Consideremos $\mathcal{V}$ una colección arbitraria de abiertos en Y. Sabemos que $\cap_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}(V)$ es abierto en X y por eso

$$f(\cap_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}(V)) = \cap_{V \in \mathcal{V} f(f^{-1}(V))} = \cap \mathcal{V}$$

Se dedude que Y es un A-espacio. □

Lema 2.24. *Sean X, Y dos A-espacios. Tenemos que una aplicación*

$$f : X \to Y$$

es continua si y solo si $f(U_x^X) \subseteq U_{f(x)}^Y$ para todo $x \in X$.

Demostración. Fijamos $x \in X$. Si f es continua tenemos que $f^{-1}(U_{f(x)}^Y) \in \mathcal{N}(x)$. Por la definición de abierto minimal se sigue que $U_x^X \subseteq f^{-1}(U_{f(x)}^Y)$. Se deduce que $f(U_x^X) \subseteq U_{f(x)}^Y$.

Para el recíproco, bastará mostrar que $f^{-1}(U_y^Y)$ es abierto para cada abierto minimal U_y^Y de Y. Sea $x \in f^{-1}(U_y^Y)$ y consideremos $x' \in U_x^X$. Entonces $f(x') \in U_{f(x)}^Y \subseteq U_y^Y$. Por eso $x' \in f^{-1}(U_y^Y)$. Se deduce que $U_{x'}^X \subseteq f^{-1}(U_y^Y)$, por tanto f es continua. □

Teorema 2.25. *Dados dos A-espacios X, Y y una aplicación $f : X \to Y$. Tenemos que f es un homemomorsimo si y solo si f es biyectiva y para cada $x \in X$ se cumple que*

$$f(U_x^X) = U_{f(x)}^Y.$$

Es decir, induce una biyección de bases mínimas

Demostración. Si f es un homeomorfismo, fijamos $x \in X$. Por el lema 2.24 aplicado a f y f^{-1} tenemos que

$$U_{f(x)}^Y \subseteq f(U_x^X) \subseteq U_{f(x)}^Y$$

Se deduce que $f(U_x^X) = U_{f(x)}^Y$.

Para el recíproco, tenemos que en particular $f(U_x^X) \subseteq U_{f(x)}^Y$. Adémas, notemos que

$$U_x^X = f^{-1}(f(U_x^X)) = f^{-1}(U_{f(x)}^Y)$$

por el lema 2.24 se deduce la continuidad de f y f^{-1}.

□

Proposición 2.26. *Definimos*

$$\mathcal{B}_m : A\text{–}Top \to Set$$

como $X \mapsto \mathcal{B}_m^X$*,* $f \mapsto \mathcal{B}_m(f)$*, donde* $\mathcal{B}_m^X$ *es la base minimal de* X *y* $\mathcal{B}_m(f)$ *es la aplicación tal que* $\mathcal{B}_m(f)(U_x^X) = U_{f(x)}^Y$*. Entonces* $\mathcal{B}_m$ *es un funtor.*

Demostración. Sea $1_X : X \to X$ la identidad, tenemos que $\mathcal{B}_m(1_X)(U_x) = U_x = 1_{\mathcal{B}_m^X}(U_x)$ para todo $U_x \in \mathcal{B}_m^X$.
Ahora, consideremos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Fijamos $x \in X$, tenemos que $\mathcal{B}_m(g \circ f)(U_x) = U_{g(f(x))} = \mathcal{B}_m(g)(U_{f(x)}) = \mathcal{B}_m(g)(\mathcal{B}_m(f)(U_x))$. Se deduce que $\mathcal{B}_m$ es un funtor.

□

Definición 2.27. Sean X, Y dos A-espacios. Dada una aplicación continua $f : X \to Y$, definimos para cada $x \in X$ la aplicación

$$f_x = f|_{U_x^X} : U_x^X \to U_{f(x)}^Y$$

Notemos que f_x es la única aplicación que hace el siguiente digrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U_x^X \arrow[u] \arrow[r, "f_x"'] & U_{f(x)}^Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde las aplicaciones verticales son las inclusiones obvias.

Corolario 2.28. *Dados dos* A*-espacios* X, Y *y una biyección continua* $f : X \to Y$*. Tenemos que* f *es un homeomorfismo si y solo si* f_x *es una biyección para cada* $x \in X$*.*

Demostración. La afirmación se sigue de que para $x \in X$ fijo, si f_x es una biyección, entonces $U_{f(x)}^Y = f_x(U_x^X) = f(U_x^X)$.

□

Teorema 2.29. *Si* X, Y *son dos* A*-espacios tales que:*

(1) Existe una biyección $b : \mathcal{B}_m^X \to \mathcal{B}_m^Y$*.*

(2) Existe una biyección $\alpha_x : U_x \to b(U_x)$ *para cada* $x \in X$*.*

(3) Si $U_x \cap U_y \neq \emptyset$*, se cumple que* $\alpha_x(z) = \alpha_y(z)$ *para todo* $z \in U_x \cap U_y$*.*

Entonces X *y* Y *son homeomorfos.*

Demostración. Para cada $x \in X$, definimos $\alpha'_x : U_x \to Y$ como $\alpha'_x(z) = \alpha_x(z)$ para $z \in U_x$. Como $\mathcal{B}_m^X$ es una cubierta de X, por (2) y (3) tenemos que

$$f = \bigcup_{x \in X} \alpha'_x : X \to Y$$

está bien definida, más aún, es biyectiva. Para mostrar que es sobreyectiva. Sea $y \in Y$, tenemos que existe $x \in b^{-1}(U_y)$ tal que $\alpha_{b^{-1}(U_y)}(x) = y$ y por eso $f(x) = y$. Para la inyectividad, sean $x_1, x_2 \in X$ distintos, si $f(x_1) = f(x_2)$ se sigue que $\alpha_{x_1}(x_1) = \alpha_{x_2}(x_2)$, de donde $f(x_1), f(x_2) \in b(U_{x_1}) \cap b(U_{x_2})$, pero sabemos que en particular α_{x_1} es inyectiva, se deduce que $x_1 = x_2$. Además, tenemos que $f(U_x) = \alpha_x(U_x) = b(U_x) = U_{f(x)}$. Por el teorema 2.25. □

2.3. Conexidad y Compacidad

Definición 2.30. Sea X un A-espacio. Decimos que dos puntos $x, y \in X$ son **comparables** si $x \in U_y$ ó $y \in U_x$. Decimos que son **no comparables** si $x \notin U_y$ y $y \notin U_x$.

Definición 2.31. Dado un espacio topológico X definimos una **trayectoria** en X como una aplicación continua

$$\alpha : I \to X$$

donde $I = [0, 1]$.

Lema 2.32. *Sean x, y dos puntos comparables de un A-espacio X. Entonces existe una trayectoria de x a y en X.*

Demostración. Podemos suponer que $x \in U_y$. Definimos $\alpha : I \to X$, $\alpha(t) = x$ si $t \in [0, 1)$, $\alpha(1) = y$. Si U es un abierto en X, tenemos que

- $\alpha^{-1}(U) = \emptyset$ si $\{x, y\} \cap U = \emptyset$.
- $\alpha^{-1}(U) = I$ si $y \in U$
- $\alpha^{-1}(U) = [0, 1)$ si $y \notin U$ y $x \in U$.

En cualquier caso $\alpha^{-1}(U)$ es abierto en I. Se deduce la continuidad de α. □

Definición 2.33. Sea X un A-espacio. Una **valla** en X es una sucesión $x_0, x_1, ..., x_n$ de puntos tales que cualesquiera dos cosecutivos son comparables. Decimos que X es **conexo por vallas** si para $x, y \in X$ existe una valla que comienza en x y termina en y.

Proposición 2.34. *Sea X un espacio finito. Son equivalentes:*

1. *X es conexo.*
2. *X es conexo por vallas.*
3. *X es trayectoconexo.*

Demostración. Si X es conexo por vallas, por el lema 2.32 se deduce que X es trayectoconexo. En general, tenemos que si un espacio es trayectoconexo, entonces es conexo. Entonces solo resta verificar que la conexidad implica conexidad por vallas. Supongamos que X es conexo. Fijamos $x \in X$. Sea

$$A = \{y \in X : \text{existe una valla de } x \text{ a } y\}$$

Vamos a mostrar que A es abierto. Si $y \in A$, consideremos la valla $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$. Notemos que para $z \in U_y$ tenemos que la concatenación de vallas $x = x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1} = z$ es una valla de x a z, por tanto $U_y \subseteq A$. Ahora, vamos a verificar que A es cerrado. Sea $y \in A^c$ y fijamos $z \in U_y$, si $z \in A$, entonces existe una valla $x = x_0, x_1, ..., x_n = z$. Pero $x = x_0, x_1, ..., x_{n+1} = y$ es una valla de x a y, que es una contradicción. Por eso tenemos que $A = X$.

□

Definición 2.35. Si X es un A-espacio compacto, definimos $min(X) := min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una cubierta mínima de X por abiertos minimales$\}$.

Teorema 2.36. *Sean X, Y dos A-espacios compactos. Si X y Y son homeomorfos, entonces $min(X) = min(Y)$.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo y fijamos $x \in X$. Notemos que $f(U_x) = U_{f(x)}$, de donde $\mathcal{V}$ es una cubierta de X por abiertos minimales si y solo si $\{f(V) : V \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta de Y por abiertos minimales. Se deduce que $min(X) = min(Y)$.

□

Definición 2.37. Sea (X, τ) un A-espacio. Decimos que un abierto U de X es un **átomo** de τ si es no vacío y para todo $V \in \tau$ tal que $V \subseteq U$ implica que $V \in \{\emptyset, U\}$.

Definición 2.38. Un abierto minimal U_x es llamado **básico** si para cualquier abierto minimal U_y; si $U_x \subseteq U_y$ y $U_z \subseteq U_y$, entonces $U_x \subseteq U_z$, y si U_x no está contenido en U_y, entonces son disjuntos.

Teorema 2.39. *Si U_x es un básico, entonces es un átomo.*

Demostración. Sea $U_y \subseteq U_x$. Si U_x no está contenido en U_y tenemos que $U_x \cap U_y = \emptyset$, lo cual es una contradicción dado que $y \in U_x$. Se deduce que $U_x = U_y$. □

Corolario 2.40. *Si U_x y U_y son básicos distintos, entonces son disjuntos.*

Demostración. Sea $z \in U_x \cap U_y$. Tenemos que $U_z = U_x$ por ser U_x un átomo 2.39. De forma análoga, $U_z = U_y$, de donde $U_x = U_z$ □

Teorema 2.41. *Sea X un A-espacio, para $x \in X$ tenemos que U_x contiene a lo más un básico.*

Demostración. Supongamos que U_x contiene dos básicos U_y, U_z. Por la definición tenemos que $U_z \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_z$. De donde $U_y = U_z$. $\square$

Teorema 2.42. *Si X es un A-espacio compacto, tenemos que el número de básicos es menor o igual que $min(X)$.*

Demostración. Sea $\{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$ una cubierta de X, donde $n = min(X)$. Fijamos U_y es un básico. Tenemos que existe i tal que $y \in U_{x_i}$ y por tanto $U_y \subseteq U_{x_i}$. Del teorema 2.41 se deduce el resultado.

$\square$

Definición 2.43. Sea X un A-espacio, definimos $index(X)$ como el número de subconjuntos básicos de X.

Teorema 2.44. *Sean X, Y dos A-espacios. Si $X \cong Y$, entonces $index(X) = index(Y)$.*

Capítulo 3

Retículos

Un retículo puede ser caracterizado como un conjunto parcialmente ordenado donde dos elementos arbitrarios tienen un único supremo y un único ínfimo, o bien, como estructuras algebraicas que satisfacen ciertos axiomas, siendo así objeto de estudio tanto en la teoría de órdenes como en el álgebra. La clase de los retículos distributivos es la mejor estructurada y encuentra aplicaciones en la realización de algoritmos para cálculos en conjuntos arbitrarios parcialmente ordenados. Cabe mencionar que autores como Benoumhani [3] utilizan la estrecha relación con los espacios topológicos finitos como herramienta en la clasificación de espacios finitos.

3.1. Orden y precategorías

Definición 3.1. Sea X un conjunto. Una **relación** binaria $\mathcal{R}$ en X es simplemente un subconjunto de $X \times X$. Decimos que la relacíon $\mathcal{R}$ es:

- **Reflexiva** si $(x, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in X$.
- **Simétrica** si $(x, y) \in \mathcal{R}$ implica $(y, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x, y \in X$.
- **Antisimétrica** si para todo $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{R}$ implica $x = y$.
- **Transitiva** si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}$ implica $(x, z) \in \mathcal{R}$ para todo $x, y, z \in X$.

Definición 3.2. Un **preorden** $\mathcal{R}$ sobre X es una una relación reflexiva y transitiva. Diremos que $\mathcal{R}$ es un **orden parcial** si es además antisimétrico. Un orden parcial $\mathcal{R}$ que además satisface que cualesquier par de elementos de X es **comparable**, es decir, si $x, y \in X$, entonces $(x, y) \in \mathcal{R}$ ó $(y, x) \in \mathcal{R}$ es llamado **orden total**. Es común denotar a $\mathcal{R}$ por $\leq$ y escribir $x \leq y$ como sinónimo de $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Ejemplo 3.3. La desigualdad usual $\leq$ sobre los números enteros $\mathbb{Z}$ es precisamente un orden total.

Ejemplo 3.4. Sea $X = \{a, b, c, d\}$, definimos

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (c, a)\}$$

Notemos que $\mathcal{R}$ es en efecto un preorden sobre X, pero no es ni un orden parcial ni un orden total.

Nota 3.5. Vamos a decir que $(X, \leq)$ es un conjunto **preodenado** (resp. **parcialmente ordenado**) si $\leq$ es un preorden (resp. orden parcial) sobre el conjunto X.

Definición 3.6. Un elemento x en un conjunto parcialmete ordenado $(X, \leq)$ se dice **maximal** (resp. **minimal**) si $y \geq x$ (resp. $y \leq x$) implica que $x = y$, es **máximo** (resp. **mínimo**) si $y \leq x$ (resp. $y \geq x$) para todo $y \in X$. Decimos que $C \subseteq X$ es una **cadena** si dos elementos cualesquiera de C son comparables.

Proposición 3.7. *Un conjunto finito parcialmente ordenado tiene un máximo (minímo) si y solo tiene un único elemento maximal (minimal).*

Definición 3.8. Un **ideal** del conjunto preordenado $(X, \leq)$ es un subconjunto A de X tal que si $x \in X$ y $y \leq x$, entonces $y \in A$. En particular, si A es de la forma $\{y \in X : y \leq x\}$ se dice que es un **ideal principal generado** por x. De forma dual se define un **filtro**, es decir, es un subconjunto B de X tal que si $x \in B$ y $y \leq x$, entonces $y \in B$.

Ejemplo 3.9. Consideremos el espacio preordenado $(X, \leq)$, donde

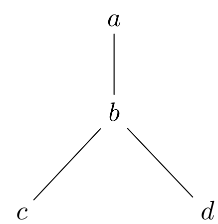
$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

y $\leq$ está dado por $a \leq b,\ b \leq d,\ d \leq e,\ a \leq c,\ c \leq d$. Tenemos que el ideal principal generado por a es $\{a\}$, mientras que el ideal principal generado por e es todo X. El filtro generado por c es $\{c, d, e\}$. Podemos notar que $\{b, c\}$ no es ni un filtro ni un ideal.

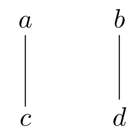
Definición 3.10. A cada conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ asociamos un digrafo llamado **diagrama de Hasse**, el cual vamos a denotar por $\mathcal{H} = (X, A)$ y cuyos vértices son los elementos de X y las aristas A son los pares ordenados (x, y) tales que $x \leq y$ y no existe $z \in X$ tal que $x \leq z \leq y$, en este caso decimos que y **cubre** a x.

Nota 3.11. Es común dibujar $\mathcal{H}$ en el plano de tal manera que si y cubre a x, entonces el vértice que representa a y está arriba del vértice que representa a x, por lo que no hay necesidad de flechas.

Ejemplo 3.12. Sea $(X, \leq)$ el conjunto parcialmente ordenado dado por $X = \{a, b, c, d\}$ y $c \leq b,\ d \leq b,\ b \leq a$, y las respectivas relaciones que implican la transividad y la reflexividad. El diagrama de Hasse está dado por:



Ejemplo 3.13. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $\leq$ el orden parcial generado por $c \leq a,\ d \leq b$. Tenemos que $\mathcal{H}(X)$ está representado por:



3.2. Morfismos ordenados

Definición 3.14. Sean $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ dos conjuntos preordenados. Decimos que una aplicación $f : X \to Y$ es un **morfismo ordenado** si para todo $x, y \in X$ tal que $x \leq_X y$ satisface que $f(x) \leq_Y f(y)$, es decir, es una aplicación monótona.

Proposición 3.15. *Si* $(X, \leq)$ *es un conjunto preordenado. Entonces*

$$1_X : X \to X$$

es un morfismo ordenado.

Demostración. Sean $x, y \in X$. Si $x \leq y$, entonces $1_X(x) = x \leq y = 1_X(y)$. □

Proposición 3.16. *Sean* $f : X \to Y$*,* $g : Y \to Z$ *dos morfismos ordenados respecto a los conjuntos preordenados* $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y), (Z, \tau_Z)$*. Entonces*

$$g \circ f : X \to Z$$

es un morfismo ordenado.

Demostración. Sean $x, y \in X$. Si $x \leq_X y$, por ser f un morfismo ordenado tenemos que $f(x) \leq_Y f(y)$. Como g es ordenado concluimos que $g(f(x)) \leq_Z g(f(y))$. □

Definición 3.17. Vamos a definir la **categoría de los conjuntos preordenados** Pre de la siguiente manera:

- $Ob\ Pre$ la colección de los conjuntos preordenados.
- $Mor\ Pre$ la colección de los morfismos ordenados.

- $Dom(f) = (X, \leq_x)$ y $coDom(f) = (Y, \leq_y)$ para

$$f : (X, \leq_X) \to (Y, \leq_Y),\ f \in Mor\ Pre$$

- $id(X, \leq) = 1_X$ para $(X, \leq) \in Ob\ Pre$.
- $\circ$ estará dado por la composición usual de aplicaciones.

Nota 3.18. De las proposiciones 3.15, 3.16 es claro que Pre es una categoría

Definición 3.19. Vamos a denotar por $Poset$ a la subcategoría de Pre tal que los objetos de $Poset$ son conjuntos parcialmente ordenados.

Nota 3.20. Tenemos que $Poset$ es una subcategoría completa.

3.3. Retículos

Definición 3.21. Sea $(X, \leq)$ un poset. Consideremos el subconjunto A de X. Diremos que $x \in X$ es una **cota superior** (resp. **cota inferior**) si $x \geq y$ $(resp. x \leq y)$ para todo $y \in A$. El **supremo** (resp. **ínfimo**), si existe, es la mínima cota superior (resp. la máxima cota inferior). Se denota por $sup\ A$ (resp. $\acute{\imath}nf\ A$).

Definición 3.22. Si para todo par de elementos x, y en un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ existen $x \vee y := sup\ \{x, y\}$, $x \wedge y := \acute{\imath}nf\ \{x, y\}$ se dice que $(X, \leq)$ es un **retículo**. $(X, \leq)$ es un **retículo completo** si para todo subconjunto A de X, existen $sup\ A$, $\acute{\imath}nf\ A$.

Proposición 3.23. *Un retículo completo $(X, \leq)$ tiene máximo y mínimo.*

Demostración. Notemos que el mínimo estará dado por $\acute{\imath}nf\ X$, mientras que el máximo por $sup\ X$.

□

Definición 3.24. Sea $(X, \leq_X)$ un retículo. Si $(Y, \leq_Y)$ es un retículo tal que $Y \subseteq X$ y $\leq_Y \subseteq \leq_X$, entonces diremos que es un **subretículo** de $(X, \leq_X)$.

Definición 3.25. Sean $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ retículos. Decimos que la aplicación

$$f : X \to Y$$

es un **morfismo de retículos** si para todo $x, y \in X$ se cumple:

- $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.
- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Proposición 3.26. *Sea $(X, \leq)$ un retículo, entonces se cumplen:*

(1) $x \vee x = x$ *y* $x \wedge x = x$.

(2) $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$.

(3) $x \vee y = y \vee x$ *y* $x \wedge y = y \wedge x$.

(4) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *y* $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

Proposición 3.27. *Dado un conjunto X y dos aplicaciones binarias $\vee, \wedge : X \times X \to X$ tales que satisfacen las propiedades de la proposición 3.26. Definimos la relación $\leq$ sobre X por $x \leq y$ si y solo si $x \vee y = y$, o bien, equivalentemente, $x \wedge y = x$. Entonces $(X, \leq)$ es un retículo.*

Definición 3.28. Sea X un conjunto. Definimos un A-conjunto sobre X como una colección β de subconjuntos de X tal que para cada $x \in X$ existe un subconjunto minimal $m_x \in \beta$ que contiene a x. Vamos a denotar por $A\text{-}Set(X)$ a la familia de todos los A-conjuntos sobre X. Consideremos además las dos aplicaciones binarias

$$\vee, \wedge : X \times X \to X$$

dadas por $\beta_1 \vee \beta_2 = \{m_x^1 \cap m_x^2 : x \in X\}$ y $\beta_1 \wedge \beta_2 = \{m_x^1 \cup m_x^2 : x \in X\}$.

Nota 3.29. Tenemos que $\beta_1 \vee \beta_2$ y $\beta_1 \wedge \beta_2$ son dos A-conjuntos sobre X.

Demostración. Fijamos $x \in X$. Si $U \in \beta_1 \vee \beta_2$ es tal que $x \in U$, entonces existe $y \in X$ tal que $U = m_y^1 \cap m_y^2$, de donde $x \in m_y^1$ y $x \in m_y^2$, se deduce que $m_x^1 \subseteq m_y^1$ y $m_x^1 \subseteq m_y^2$ y por eso $m_x^1 \cap m_x^2 \subseteq U$. De forma similar se muestra que $\beta_1 \wedge \beta_2$ es un A-conjunto.

□

Teorema 3.30. *La terna $(A\text{-}Set(X), \vee, \wedge)$ satisface las propiedades de la proposición 3.26. Se deduce que dicha terna define un retículo.*

Demostración. Es suficiente notar que para conjuntos A, B, C en general, se satisface que:

(1) $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$.

(2) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$.

(3) $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.

(4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

□

Nota 3.31. Hemos mostrado que las topologías de Alexandroff definibles sobre un conjunto X forman un retículo. Más aún, dicho retículo tiene máximo y mínimo, a saber, la topología discreta y la topología indiscreta respectivamente.

Proposición 3.32. *Tenemos que la 6-túpla Ret dada por:*

- *Ob Ret es la colección de retículos.*

- *Mor Ret es la coleccón de morfismos de retículos.*
- *Las aplicaciones $Dom, coDom, id, \circ$ estan definidas de la forma usual.*

Es una categoría.

Definición 3.33. Un **álgebra booleana** es un retículo distributivo y completo.

Ejemplo 3.34. Las familias $Pre(X)$ y $Poset(X)$ de los conjuntos preordenados y los conjuntos parcialmente ordenados respectivamente sobre un conjunto X pueden ser ordenadas respecto a la contencion sus relaciones, es decir, si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son preórdenes sobre X, entonces $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$ si $\mathcal{R}_1 \supseteq \mathcal{R}_2$. Entonces $(Pre, \leq)$ es un retículo completo y $(Poset(X), \leq)$ es un retículo. El *sup* de preórdenes es simplemente su intersección como relaciones. El *ínf* es la **clausura transitiva** de su unión, es decir, *sup* $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\} = \{(x, y)$: existe una susesión finita $x = x_0, ..., x_n = y$ de elementos de X tal que $(x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2,\ i = 1, ..., n\}$.

Definición 3.35. Sea $(Top(X), \subseteq)$ el conjunto preordenado, donde $Top(X)$ denota el conjunto de todas las topologías sobre el conjunto X, y la relación $\subseteq$ es simplemente la contención usual entre conjuntos.

Proposición 3.36. *Tenemos que $(Top(X), \subseteq)$ es un retículo completo.*

Demostración. Sea A un subconjunto de $Top(X)$. Dado que la intersección arbitraria de topologías sobre un conjunto es una topología, tenemos que *ínf* $A = \bigcap A$. Además, *sup* A estará dado por la topología que tiene como subbase a $\bigcup A$.

$\square$

Definición 3.37. Denotamos por A-$Top(X)$ al conjunto de todas las topologías de Alexandroff sobre X.

Proposición 3.38. $(A\text{-}Top(X), \subseteq)$ *es un subretículo de* $(Top(X), \subseteq)$

Capítulo 4

Proximidad y orden

Cuando se habla de proximidad existe algo que hay que tener bien claro y es que no necesariamente significa distancia. Sin embargo, la noción de proximidad permite definir tanto la continuidad como la convergencia, dos conceptos de suma importancia por ser el objeto de estudio de la topología.

4.1. Topologías y preórdenes

Lema 4.1. *Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X tal que es una cubierta de X y para cada $x \in U \cap V,\ U, V \in \mathcal{B}$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$. Entonces $\mathcal{B}$ es base para alguna topología en X.*

Proposición 4.2. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto preordenado. Entonces la colección de ideales principales*

$$\downarrow x := \{y \in X : y \leq x\}$$

es base para una topología en X, que vamos a denotar por $\tau(\leq)$. Además, $(X, \tau(\leq))$ es un A-espacio.

Demostración. Notemos que si $z \in \downarrow x \cap \downarrow y$, entonces $z \in \downarrow min\{x, y\} = \downarrow x \cap \downarrow y$, por el lema 4.1 concluimos genera alguna topología sobre X.Ahora, notemos que se para cualquier subconjunto $\mathcal{S}$ de $\tau(\leq)$ se cumple que

$$\bigcap \mathcal{S} = \downarrow (inf\mathcal{S}) \text{ ó } \emptyset$$

en cualquier caso son abiertos de $\tau(\leq)$. □

Proposición 4.3. *Sea (X, τ) un A-espacio. Entonces $\leq_\tau$, definida como $x \leq_\tau y$ si $x \in U_y$ es un preórden sobre X.*

Demostración. Dado que para todo $x \in X$ se cumple que $x \in U_x$ tenemos que $\leq_\tau$ es reflexiva. Ahora, sean $x, y, z \in X$ tales que $x \leq_\tau y$ y $y \leq_\tau z$, entonces como U_z es un abieto que contiene a y se tiene que $x \in U_y \subseteq U_z$ y por tanto $x \leq_\tau z$. Se deduce que $\leq_\tau$ es transitiva.

□

Teorema 4.4. *Tenemos que las categorías A-Top y Poset son isomorfas.*

Demostración. Definimos $\mathcal{F} : A\text{-}Top :\to Poset$ como

$$(X, \tau) \mapsto (X, \leq_\tau)$$

$$f \mapsto f$$

y $\mathcal{G} : Poset \to A\text{-}Top$ como

$$(X, \leq) \mapsto (X, \tau(\leq))$$

$$f \mapsto f$$

Notemos que $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son funtores. Tenemos que $\mathcal{F}(\mathcal{G}(X, \leq)) = (X, \leq_{\tau(\leq)}) = (X, \leq)$ y $\mathcal{G}(\mathcal{F}(X, \tau)) = (X, \tau(\leq_\tau)) = (X\tau)$. Se deduce que son funtores inversos. □

Corolario 4.5. *Las categorías A_0-Top y Poset son isomorfas.*

Corolario 4.6. *Sea (X, τ) espacio topológico T_0.*

- *$\{x\}$ es abierto si y solo si x es un elemento minimal en $\leq_\tau$.*
- *Si existe un elemento mínimo en X, entonces este es denso.*
- *$\{x\}$ es cerrado si y solo si x es un elemento maximal en $\leq_\tau$*
- *Si existe un elemento máximo en X, entonces este pertenece a la cerradura de cualquier otro punto.*
- *El conjunto de los elementos minimales A es abierto y es el conjunto más pequeño que es denso en X, es decir, cualquier otro conjunto denso en X contiene a A.*

4.2. Tipos de homotopía

Proposición 4.7. *Si X, Y son espacios finitos. Entonces la topología compacto-abierta en Y^X corresponde al orden puntual en Y^X; $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $S(K, W) = \{f \in Y^X : f(K) \subseteq W\}$ un sub-básico de a topología compacto-abierta. Si $g \leq f$ y $f \in S(W, K)$, entonces $g(x) \leq f(x) \in W$ para todo $x \in K$. Obtenemos que $g \in S(K, W)$ y con eso que es un conjunto inferior. Ahora, si $f \in Y^X$, entonces $\{g \in Y^X : g \leq f\} = \bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{f(x)})$. Se deduce que las topologias coinciden. □

Proposición 4.8. *Si X, Y son de Alexandroff y X es compacto, entonces $M(X,Y)$ es de Alexandroff con la topología compacto abierta, donde $M(X,Y)$ es el espacio de aplicaciones continuas de X en Y.*

Nota 4.9. Si X es un espacio finito y Y un espacio topológico culaquiera, entonces existe una correspondencia natural entre el conjunto de homotopías $\{H : X \times I \to Y\}$ y el conjunto de trayectorias $\{\alpha : I \to Y^X\}$, donde Y^X tiene la topología compacto-abierta.

Corolario 4.10. *Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones entre espacios finitos. Si $A \subseteq X$, entonces $f \simeq g$ rel A si solo si existe una valla $f = f_0 \leq f_1 \leq \ldots \leq f_n = g$ tal que $f_i|_A = f|_A$ para todo $0 \leq i \leq n$.*

Demostración. Existe una homotopía $H : f \simeq g \ rel \ A$ si y solo si existe una trayectoria $\alpha : I \to Y^X$ de f a g tal que $\alpha|_A = f|_A$. Si consideramos el subespacio M de Y^X de todas las aplicaciones que coinciden con f en A, entonces la afirmación anterior es equivalente a la existencia de una trayectoria $\alpha : I \to M$ de f a g. Por la proposición 2.34 tenemos que existe un valla de f a g en M. Además, el orden en M es el inducido por Y^X que es puntual por la proposición 4.7. □

Nota 4.11. Si X, Y son espacios finitos y Y es T_0, entonces Y^X es T_0.

Proposición 4.12. *Sea X un preorden. Definimos X_0 como el espacio cociente $X/\sim$, donde $x \sim y$ si $x \leq y$ y $x \geq y$. Entonces X_0 es T_0 y la aplicación cociente $q : X \to X_0$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Sea $i : X_0 \to X$ una sección, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "1_{X_0}"] \arrow[d, "i"'] & X_0 \\ X \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Notemos que la composición iq es un morfismo ordenado y por eso i es continua. Más aún, como $iq \leq 1_X$, i es la inversa homotópica de q.
Sean $x, y \in X$ tales que $q(x) \leq q(y)$, entonces $x \leq iq(x) \leq iq(y) \leq y$. Además, si $q(y) \leq q(x)$, se tiene que $y \leq x$ y por tanto $q(x) = q(y)$. Se deduce que el preorden en X_0 es antisimétrico.

□

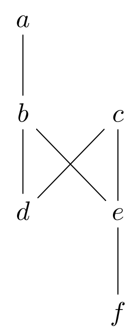
Definición 4.13. Sea Y un subespacio de X, con la inclusión denotada por $i : Y \to X$. Decimos que Y es un **retracto fuerte por deformación** de X si existe un aplicación $r : X \to Y$ tal que $r \circ i = 1_Y$ y existe una homotopía $h : X \times I \to X$ de 1_X a $i \circ r$ tal que $h(y,t) = y$ para todo $y \in Y$, $t \in I$.

Nota 4.14. Dado que $iq \leq 1_X$ y las aplicaciones iq y 1_X coinciden en X_0, tenemos que $iq \simeq 1_X \ rel \ X_0$. De donde X_0 es un retracto fuerte por deformación de X.

Definición 4.15. Sea X un espacio finito y T_0, decimos que un punto x es **removible por arriba** si x cubre solamente un punto de X. Es equivalente decir que $\widehat{U}_x = U_x \backslash \{x\}$ tiene máximo. De manera similar, $x \in X$ será un punto **removible por abajo** si es cubierto por un solo punto de X, o bien, $\widehat{F}_x = F_x \backslash \{x\}$ tiene mínimo. En cualquier caso diremos que x es un punto removible.

Ejemplo 4.16. Consideremos el espacio finito T_0

X



Podemos notar que a cubre solamente a b y por eso es un punto removible por arriba. En el caso de f, es cubierto solamente por e, de donde es un punto removible por abajo.

Proposición 4.17. *Sea X un espacio finito T_0. Si $x \in X$ es un punto removible, entonces $X \backslash \{x\}$ es un retracto fuerte por deformación de X.*

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que x es removible por arriba, sea y el máximo de $\widehat{U}_x$. Definimos $r : X \to X \backslash \{x\}$, $r(z) = z$ si $z \neq x$, $r(x) = y$. Claro que r preserva orden, por ejemplo, si $z \leq x$ tenemos que $z \in U_x$ y por tanto $z \leq y$, de donde $r(z) \leq r(x)$. Además, si $i : X \backslash \{x\} \to X$ es la inclusión, $ir \leq 1_X$. Por el corolario 4.10, $ir \simeq 1_X \ rel \ X \backslash \{x\}$. □

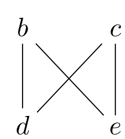
Definición 4.18. Un espacio finito T_0 es un **espacio finito minimal** si no tiene puntos removibles. El **núcleo** de un espacio finito X es un retracto fuerte por deformación que es un espacio finito minimal.

Corolario 4.19. *Todo espacio finito tiene un núcleo.*

Demostración. Se sigue de la proposición 4.17 □

Ejemplo 4.20. Consideremos el espacio finito T_0

Y



Notemos que Y es un espacio minimal. Más aún, es el espacio obtenido al remover a y f de X (véase 4.16). Se deduce que Y es el núcleo de X.

Teorema 4.21. *Sea X un espacio finito minimal. La aplicación $f : X \to X$ es homótopa a la identidad si y solo si $f = 1_X$.*

Demostración. Sabemos que $f \leq 1_x$ o bien $f \geq 1_x$. Consideremos el caso $f \geq 1_X$. Fijamos $x \in X$, si $f(x) \neq x$, entonces $f(x) \in \widehat{U}_x$ y para todo $y < x$, se tiene que $y \leq f(y) \leq f(x)$. Obtenemos que $f(x)$ es máximo de $\widehat{U}_x$ lo cual es una contradicción dado que X es minimal. □

Corolario 4.22 (Teorema de Clasificación)**.** *Una equivalencia homotópica entre espacios finitos minimales es un homeomorfismo. En particular el núcleo de espacios finitos es único salvo homeomorfismo y dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y solo si tienen núcleos homeomorfos.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica entre dos espacios finitos minimales y sea $g : Y \to X$ una inversa homotopica. Tenemos que $gf = 1_X$ y $fg = 1_Y$ por el teorema 4.21, de donde f es un homeomorfismo. Si X_0 y X_1 son dos núcleos de un espacio finito X, entonces son espacios finitos minimales homotópicamente equivalentes y por eso son homeomorfos. Además, dos espacios finitos tienen el mismo tipo de homotopía si y solo si sus núcleos son homotópicamente equivalentes, pero este es el caso solo si son homeomorfos. □

Corolario 4.23. *Un espacio finito es contráctil si y solo si su núcleo es un punto. De donde cualquier espacio contráctil tiene un punto que es un retracto fuerte por deformación.*

4.3. Topologías sobre un conjunto finito

Nota 4.24. Dado un conjunto X vamos a denotar la cardinalidad de X por $|X|$.

Definición 4.25. Sea $t(n, k)$ el conjunto de topologías sobre un conjunto con n elementos tal que tienen k conjuntos abiertos $(2 \leq k \leq 2^n)$ y $T(n, k) = |t(n, k)|$. Notemos que

$$T(n) = \sum_{k \geq 2} T(n, k)$$

Teorema 4.26 (Sharp [13]- Stephen [14])**.** *Si $n \geq 3$, $T(n, k) = 0$ para $3 \cdot 2^{n-2} < k < 2^n$.*

Demostración. Sin perdida de generalidad consideremos

$$\mathcal{B} = \{\{x_1\}, ..., \{x_{n-1}\}, \{x_1, x_n\}\}$$

claro que $\mathcal{B}$ es base de algúna topología τ en X. Además, si τ' es una topología de X tal que $|\tau'| > |\tau|$ tendriamos que τ' es la topología discreta, si $U \in \tau' \backslash \tau$ cumple que $x_n \in U$ de donde $\{x_n\} \subseteq U \cap \{x_1, x_n\} \in \tau'$. Entonces para $k, |\tau| < k < 2^n$, se tiene que $T(n, k) = 0$. Para calcular $|\tau|$, notemos que τ no tiene elementos de la forma $\{x_1, x_i\}$, $2 \leq i \leq n-1$. El número de estos conjuntos esta dado por $\binom{n-2}{1=n-2}$. En general los conjuntos del tipo $\{x_n, x_1, , ..., x_k\}$, $2 \leq k \leq n-2$, no están en τ y el número de estos es $\binom{n-2}{k}$. Se deduce que

$$|\tau| = 2^n - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} = 2^n - 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}.$$

□

Definición 4.27. El número de particiones de un conjunto finito con n elementos en k bloques es llamado el **número de Stirling de segundo tipo**[1]. Lo vamos a denotar por $S(n, k)$ y de forma explicita está dado por

$$S(n, k) = S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

Ejemplo 4.28. El conjunto $\{a, b, c\}$ puede ser particionado en tres subconjuntos de una sola manera $\{\{a\}, \{b\}.\{c\}\}$; en dos subconjuntos de tres maneras $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$ y $\{\{b, c\}, \{a\}\}$; y en un subconjunto de una sola manera $\{\{a, b, c\}\}$. De donde $S(3, 1) = 1, S(3, 2) = 3, S(3, 3) = 1$

Definición 4.29. Una **topología de cadena** sobre X, es una topología T_0 cuyos elementos estan totalmente ordenados por la inclusión.

Lema 4.30. *Sea $C(n, k)$ el número de topologías de cadena sobre X que tienen k conjunto abiertos. Entonces*

$$C(n, k) = \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n}{l} C(l, k-1) = (k-1)!S(n, k-1).$$

Demostración. Vamos a mostrar que existe una correspondencia biunivoca entre las particiones órdenadas de X con $k+1$ bloques y las cadenas con k subconjuntos no triviales de X. Consideremos la cadena $\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_k \subset X$, definimos $B_1 = A_1$, $B_i = A_i - A_{i-1}$, $(2 \leq i \leq k)$, $B_{k+1} = X - A_k$ y notemos que en efecto $(B_1, ..., B_{k+1})$ es una partición de X en $k+1$ bloques. Reciprocamente, sea $(B_1, ..., B_{k+1})$ una partición de X, tenemos que $\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_k \subset X$, donde $A_1 = B_1$, $A_i = A_{i-1} \cup B_i$, $(2 \leq i \leq k)$, es una cadena con k subconjuntos no triviales de X. Por 4.27 sabemos que el número de tales particiones estan dadas por $(k+1)!S(n, k+1)$. Como cualquier cadena con $k-2$ subconjuntos no triviales de X define precisamente una topología de cadena sobre X con k conjuntos abiertos, tenemos que $C(n, k) = (k-1)!S(n, k-1)$. Para la otra igualdad notemos que una topología de cadena sobre un subconjunto $A \subseteq X$, $1 \leq |A| = l \leq n-1$, con $k-1$ conjuntos abiertos, es una topología de cadena

[1]Introducidos por James Stirling en el siglo XVIII

sobre X con k conjuntos abiertos. Se deduce que el número de dichas topologías sobre A esta dado por $\binom{n}{r}C(l, k-1)$. Por eso

$$C(n,k) = \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n}{l} C(l, k-1).$$

$\square$

Teorema 4.31 (Benoumahani, [3]). *Para todo $n \leq 1$ tenemos:*

$T(n,4) = S_{n,2} + 3!S_{n,3} = 3^n - 5 \cdot 2^{n-1} + 2$

$T(n,5) = 3!S_{n,3} + 4!S_{n,4} = 4^n - 3^{n+1} + 3 \cdot 2^n - 1$

$T(n,6) = 3!S_{n,3} + \frac{3}{2}4!S_{n,4} + 5!S_{n,5}$

$T(n,7) = \frac{9}{4}4!S_{n,4} + 2 \cdot 5!Sn, 5 + 6!S_{n,6}$

$T(n,8) = S_{n,3} + 2 \cdot 4!S_{n,4} + \frac{15}{4}5!S_{n,5} + \frac{5}{2}6!S_{n,6} + 7!S_{n,7}$

$T(n,9) = \frac{5}{6}4!S_{n,4} + 5 \cdot 5!S_{n,5} + \frac{11}{2}6!S_{n,6} + 3 \cdot 7!S_{n,7} + 8!S_{n,8}$

$T(n,10) = 4!S_{n,4} + \frac{11}{2}5!S_{n,5} + \frac{73}{8}6!S_{n,6} + \frac{15}{2}7!S_{n,7} + \frac{7}{2}8!S_{n,8} + 9!S_{n,9}$

$T(n,11) = \frac{25}{6}5!S_{n,5} + \frac{79}{6}6!S_{n,6} + \frac{29}{2}7!S_{n,7} + \frac{29}{4}8!S_{n,8} + 4 \cdot 9!S_{n,9} + 10!S_{n,10}$

$T(n,12) = \frac{1}{2}4!S_{n,4} + \frac{9}{2}5!S_{n,5} + 16 \cdot 6!S_{n,6} + \frac{295}{12}7!S_{n,7} + \frac{85}{4}8!S_{n,8} + \frac{49}{4}9!S_{n,9} + \frac{9}{2}10!S_{n,10} + 11!S_{n,11}$.

Demostración. Vamos a mostrar el resultado solo para $T(n,6)$. Sea $\tau \in t(n,k)$, entonces tiene una de las siguientes formas:

(1) Las topologías de cadena con 6 conjuntos abiertos.

(2) $A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = C,\ A \subset C,\ C \cap D = B,\ C \cup D = X$.

(3) $\emptyset \subset A_1 \subset A_3 \subset A_4 \subset X,\ \emptyset \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset X,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y el caso simétrico.

(4) $\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset A_4 \subset X,\ \emptyset \subset A_1 \subset A_3 \subset A_4 \subset X,\ A_2 \cup A_3 = A_4$.

Para el primer caso por el lema 4.30 tenemos que el número de topologías es $5!S_{n,5}$. En el segundo caso consideremos $C \subset X$, tal que $2 \leq |C| = k \leq n-1$. Notemos que a cada partición de C en dos bloques A, B define dos topologías:

$$\{\emptyset, A, B, C, A \cup (X - B), X\}$$

$$\{\emptyset, A, B, C, B \cup (X - A), X\}.$$

Se tiene que el número de topologías es

$$2\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}(2^{k-1}-1) = 3^n - 3\cdot 2^n + 3 = 3!S_{n,3}.$$

Para el tercer caso, podemos elegir A_3, $2 \leq |A_3| = k \leq n-2$ en $\binom{n}{k}$ maneras distintas y una partición de A_3 en 2 bloques de $S_{k,2}$ maneras. Para elegir los elementos de A_4, notemos que $|A_4| = k + i \leq n - 1$. El número de opciones es $\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}S_{n,2}$. Se deduce que para el tercer el número de topologías esta dado por

$$2\sum_{k=2}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-k-1}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}(2^{k-1}-1) = 4!S_{n,4}.$$

Para el último caso, podemos elegir A_4, $3 \leq |A_4| = k \leq n-1$ de $\binom{n}{k}$ formas diferentes, y las posibles particiones de A_4 en dos bloques están dadas por $S_{n,2}$. Para elegir los elementos de A_1, observemos que $|A_1| = i \leq k-2$ y así tenemos que el número de opciones es $\binom{n}{k}\binom{k}{i}S_{k,2}$. Finalmente obtenemos

$$2\sum_{k=3}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}(2^{k-1}-1) = \frac{1}{2}4!S_{n,4}.$$

Sumando los resultados anteriores obtenemos $T(n,6)$. $\square$

Capítulo 5

Resultados de conteo

Podemos calcular a mano y de forma muy sencilla los números $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, *sin embargo, es fácil percatarse de que las cosas son más delicadas para* $T(4)$, *y es que* $T(n)$ *crece de forma exponencial y cada vez es más complejo tratar con cantidades tan grandes de topologías, tanto que hasta la fecha solo se conocen los valores de* $T(n)$ *para* $n \leq 18$ *[4]. Ya hemos mencionado un metódo para el estudio de los espacios topologícos finitos que es la relación existente con los preórdenes. Y dentro de este es muy popular el estudio de las topologías de acuerdo a los abiertos que contiene, es decir, el estudio de* $T(n,k)$.

Distintos autores han contribuido al cálculo de $T(n)$, *para* $n \leq 7$ *fueron descritos por Evans [8], para* $n \leq 9$ *por Erné [7], para* $n \leq 11$ *por Das [6], para* $n \leq 14$ *por Stege, para* $n \leq 18$ *por McKay [10]. En cuanto a los números* $T(n,k)$, *Stanley [12] detalla el cálculo para* $k \geq 3 \cdot 7^{n-4}$, $n \geq 5$. *Para valores pequeños de k, Stege [15] determinó los valores para* $k \leq 12$ *y n adecuada, mismos que Benoumhani [3] calculó de forma paralela, usando un metódo directo, el cúal explicamos breve en 4.3 para ejemplificar la utilidad de la relación antes descrita.*

Cabe mencionar que varios de los resultados anteriores fueron el fruto de algoritmos computacionales, los primeros podian calcular cerca de 90,000 topologías por segundo, mientras que los modernos pueden listar más de 4,000,000 topologías por segundo. Por nuestra parte, vamos a describir las topologías definibles sobre un conjunto finito dado que son T_0 *y simplemente conexas. Y como resultado principal de la tesis, detallamos un metódo para calcular* $T(n,k)$ *para* $k \geq 2^{n-1}+1$.

5.1. Topologías Simplemente Conexas

Definición 5.1. Un espacio topológico X se dice que es un **árbol** si es T_0 y simplemente conexo.

Nota 5.2. Vamos a denotar por $T_0^s(n)$ al número de topologías definibles sobre un conjunto con n elementos que hacen al espacio un árbol.

Proposición 5.3. *Si X es un árbol tal que $|X| > 1$, entonces existe $x \in X$ que es removible.*

Demostración. Supongamos que no existe dicho x, entonces X es un espacio minimal. Como $|X| > 1$ se deduce que no es homeomorfo a un espacio con un único punto y por el teorema de clasificación 4.22 tenemos que no pueden ser homotópicamente equivalentes, lo que es una contradicción, ya que por hipótesis, X es simplemente conexo. $\square$

Proposición 5.4. *Sea (X, τ) un árbol tal que $|X| > 1$. Fijamos $x \in X$ removible. Entonces el espacio*

$$(X', \tau')$$

donde $X' = X \backslash \{x\}$ y τ' es la topología de subespacio, es un árbol.

Demostración. Claro que (X', τ') es T_0. Como x es removible, por la proposición 4.17 tenemos que X' es un retracto por deformación fuerte de X, de donde se deduce el resultado. $\square$

Proposición 5.5. *Sean (X, τ) es un espacio finito simplemente conexo y x un punto de X. Consideremos z tal que $z \notin X$. Definimos $\leq_1, \leq_2$ como los preórdenes generados por $\leq_\tau \cup \{(x, z)\}$ y $\leq_\tau \cup \{(z, x)\}$ respectivamente. Entonces*

$$\tau_1 = \tau(\leq_1)$$

$$\tau_2 = \tau(\leq_2)$$

Son dos topologías de árbol sobre $X \cup \{z\}$.

Demostración. Notemos que en ambos casos z es un punto removible, pues z es cubierto únicamente por x (ó z solamente cubre a x). Por la proposición 4.17 X es un retracto por deformación fuerte de $X \cup \{z\}$. Como X es simplemente conexo, se deduce que $X \cup \{z\}$ tambien lo es.

$\square$

Teorema 5.6. *Para $n > 1$ tenemos que*

$$T^s(n) = 2^{n-1}(n-1)!$$

Demostración. Por la proposición 5.5 tenemos que

$$T^s(n) \geq 2(n-1)T^s(n-1)$$

Por la proposición 5.4 obtenemos que precisamente cualquier árbol X, tal que $|X| = n$, se obtiene de un árbol de cardinalidad $n-1$ "agregando" precisamente un punto removible, de donde

$$T^s(n) = 2(n-1)T^s(n-1)$$

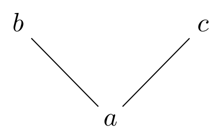
Por inducción sobre n, se deduce que $T^s(n) = 2^{n-1}(n-1)!$. $\square$

5.2. La altura de un espacio finito

Definición 5.7. Sea (X, τ) un espacio finito. Decimos que un abierto U de X es un **átomo** de τ si es no vacío y para todo $V \in \tau$ tal que $V \subseteq U$ implica que $V \in \{\emptyset, U\}$. Decimos que $x \in X$ es un **generador** si $\{x\} \in \tau$.

Nota 5.8. Si U es átomo, entonces es el abierto minimal de algun punto en X. Además, tenemos que $U = U_x$ para todo $x \in U$. Sin embargo, un abierto minimal no necesariamente es un átomo.

Ejemplo 5.9. Sea $X = \{a, b, c\}$. Consideremos el espacio topológico (X, τ), donde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Tenemos que $U_a = \{a\}$ es claramente un átomo. Pero $U_b = \{a, b\}$ cumple que $\emptyset \neq \{a\} \subseteq U_b$, por lo que U_b no es un átomo. En el diagrama de Hasse



es fácil observar que tanto U_b como U_c no son átomos.

Ejemplo 5.10. Consideremos $X = \{a, b, c, d\}$ y τ la topología generada por la base $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$. Es claro que (X, τ) es un espacio topológico que no es T_0. Notemos que $\{a, d\}$ a pesar de ser el abierto minimal de d no es un átomo; los abiertos $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ son todos átomos.

Proposición 5.11. *Sea (X, τ) es un espacio finito T_0. Si U es un átomo de τ, entonces*

$$|U| = 1.$$

Demostración. De la nota 5.8 tenemos que si $x, y \in U$, entonces $U = U_x = U_y$ y como X es T_0 tenemos que $x = y$. $\square$

Proposición 5.12. *Si (X, τ) es un espacio finito. Sea U un abierto de X. Entonces*

$$(X', \tau')$$

donde $X' = X - U$, $\tau' = \{V - U : V \in \tau\}$, es un espacio topológico. Además, si (X, τ) es T_0 también lo es el espacio (X', τ')

Demostración. Notemos que

$$V - U = V \cap (X - U) = V \cap X'$$

es decir, τ' es justamente la topología de subespacio sobre X'. Más aún, puesto que la propiedad T_0 es hederitaria a subespacios tenemos que si(X, τ) es T_0 también lo es (X', τ'). $\square$

Definición 5.13. Dado (X, τ) un espacio finito. Vamos a definir $(X^{(i)}, \tau^{(i)})$ de (X, τ) de forma recursiva. Sea $(X^{(0)}, \tau^{(0)}) = (X, \tau)$,

$$(X^{(i)}, \tau^{(i)}) = (X - I^i, \{U - I^i : V \in \tau^{(i-1)}\})$$

donde I^i es la union de los átomos de $(X^{(i-1)}, \tau^{(i-1)})$, para $n > 0$.

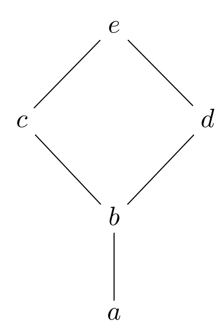
Nota 5.14. Si $|X| = n$, se tiene que $\tau^{(n)} = \{\emptyset\}$. Además, se cumple que existe una inclusión canonica de $\left(X^{(i)}, \tau^{(i)}\right)$ en $\left(X^{(i-1)}, \tau^{(i-1)}\right)$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Definición 5.15. Sea (X, τ) un espacio finito. La **altura** de (X, τ) es el máximo i tal que $\tau^{(i)} \neq \{\emptyset\}$.

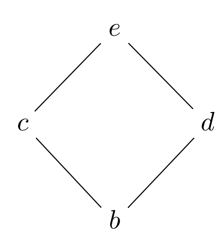
Ejemplo 5.16. El espacio topológico

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$$

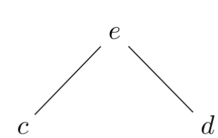
es claramente T_0 y el siguiente es su diagrama de Hasse:



Notemos que $\{a\}$ el único átomo de $(X^{(0)}, \tau^{(0)})$, de donde $X^{(1)} = \{b, c, d, e\}$, $\tau^{(1)} = \{\emptyset, X^{(1)}, \{b\}, \{b, c\}, \{b, d\}\}$, cuyo diagrama de Hasse se muestra a continuación:



Podemos observar que $\{b\}$ es el único átomo de $\tau^{(1)}$, por tanto $X^{(2)} = \{c, d, e\}$, $\tau^{(2)} = \{\emptyset, X^{(2)}, \{c\}, \{d\}\}$. El diagrama de Hasse estará dado por:



Es fácil ver que $\tau^{(2)}$ tiene dos átomos, a saber $\{c\}$ y$\{d\}$. Obtenemos que $X^{(3)} = \{e\}$, $\tau^{(3)} = \{\emptyset, X^{(3)}\}$, mientras que su diagrama de Hasse estará dado por solo un punto. Notemos que $\{e\}$ es el único átomo de $\tau^{(3)}$. Se deduce entonces que $\tau^{(4)} = \{\emptyset\}$. Entonces la altura de (X, τ) es 3.

Proposición 5.17. *Sea (X, τ) un espacio finito. Entonces la altura de (X, τ) es k $(k \geq 0)$ si y solo si la longitud de las cadenas maximales en (X, τ) es k.*

Demostración. Basta notar que dos elementos de una cadena no pueden ser átomos de $\left(X^{(i)}, \tau^{(i)}\right)$, para $0 \leq i \leq k$. $\square$

Corolario 5.18. *Un espacio (X, τ) tiene altura $|X| - 1$ si y solo si τ es una topología de cadena sobre X.*

Definición 5.19. Para cada espacio finito (X, τ), definimos la sucesión

$$\alpha_\tau(i), \ i \geq 0$$

como el número de átomos en $(X^{(i)}, \tau^{(i)})$. Vamos a escribir simplemente $\alpha_i = \alpha_\tau(i)$ a menos que se necesite hacer énfasis en la topología.

Lema 5.20. *Sea X un espacio finito de cardinalidad n. Entonces X es T_0 si y solo si tiene una base minimal con n elementos.*

Demostración. Sean x, y dos puntos distintos de X. Tenemos que $U_x \neq U_y$ si solo si $x \notin U_y$ ó $y \notin U_x$ y dado que tanto U_x como U_y son abiertos se deduce la equivalencia a que X sea T_0.

$\square$

Teorema 5.21. *Sea (X, τ) un espacio finito de cardinalidad n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es T_0.

(2) $(X^{(i)}, \tau^{(i)})$ es T_0 para todo $1 \leq i \leq n$.

(3) Si I es un átomo de $(X^{(i)}, \tau^{(i)})$ para algún $0 \leq i \leq n$, entonces $|I| = 1$.

Demostración. Por las proposiciones 5.11, 5.12 solo bastará demostrar que (3) $\Rightarrow$ (1). Sea k, $1 \leq k \leq n$ la altura de X. Para cada átomo A respecto a algún $(X^{(i)}, \tau^{(i)})$, vamos a asociar el abierto minimal que corresponde al generador de dicho átomo, es decir, si $x \in J$ le corresponde U_x. Notemos que tal correspondencia es biyectiva. Más aún, tenemos que

$$\sum_{i \geq 0} \alpha_i = n$$

de donde se deduce que la base minimal de τ tiene n elementos y por el lema 5.20 tenemos que X es T_0.

$\square$

Teorema 5.22. *Sean τ_1, τ_2 dos topologías T_0 sobre X. Tenemos que (X, τ_1) es homeomorfo a (X, τ_2) si y y solo si $\left(X^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right)$ y $\left(X^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)$ son homeomorfos para todo $i \geq 1$.*

Demostración. Sea $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ un homeomorfismo. Fijamos $i \geq 1$, basta notar que si A es un abierto átomo de $\left(X^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right)$, entonces $f(A)$ es un átomo de $\left(X^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)$, de donde

$$f\left[\left(X^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right)\right] = \left(X^{(i-1)} - f(A), \{U - f(A) : U \in \tau_2^{(i-1)}\}\right)$$

Se deduce que

$$f|_{\left(X^{(i)}, \tau^{(i)}\right)} : \left(X^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) \to \left(X^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)$$

es un homeomorfismo. El recíproco es trivial. □

5.3. El teorema de Sharp-Stephen

Proposición 5.23. *Sea X un espacio finito con altura $a \geq 1$. Tenemos que*

$$(a+1)2^{n-a}$$

es una cota superior para el número de abiertos k de X, donde $n = |X|$.

Demostración. Sea $1 \leq i \leq a$. Notemos que cada $\tau^{(i)}$ a lo más 2^{n-a} abiertos, puesto que el número de elementos de $X^{(i)}$ no es mayor que $n - a$. De donde la suma de todos estos es una cota superior de X. □

Nota 5.24. Si (X, τ) tiene altura 1, entonces τ es la topología discreta.

Teorema 5.25 (Sharp[13]-Stephen[14])**.** *Si $n \geq 3$, $T(n, k) = 0$ para $3 \cdot 2^{n-2} < k < 2^n$.*

Demostración. Por la proposición 5.23 y la nota 5.24 se deduce que un espacio no discretro, es decir, de altura al menos dos, tiene

$$(a+1)2^{n-a} \leq 3 \cdot 2^{n-2}$$

conjuntos abiertos. □

5.4. Los números $T_0^a(n, k)$

Definición 5.26. Vamos a denotar por $T_0^a(n, k)$ al número de topologías T_0 sobre X tales que tienen k abiertos y altura a.

Lema 5.27. *Para todo $n \geq 1$, $k \geq 2$ tenemos que*

$$T_0(n,k) = \sum_{a=1}^{n} T_0^a(n,k).$$

Teorema 5.28. *Si $2^{n-1} + 1 \leq k \leq 3 \cdot 2^{n-2}$, entonces la altura de un espacio topológico finito T_0 con k abiertos es a lo sumo 2.*

Demostración. En general, si a es la altura de X. Por la proposición 5.23 tenemos que

$$k \leq (a+1)2^{n-a}$$

Ahora bien, si además $k \geq 2^{n-1} + 1$ se deduce que $a \leq 2$.

□

Definición 5.29. Para cada espacio topológco (X, τ), vamos a denotar por $\mathcal{A}_1^\tau$, $\mathcal{A}_2^\tau$, o simplemente $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ si el contexto es claro, al conjunto de todos los abiertos generados por los átomos de $(X^{(0)}, \tau^{(0)})$ y $(X^{(1)}, \tau^{(1)})$ respectivamente.

Lema 5.30. *Sea (X, τ) un espacio finito T_0 con altura 2. Tenemos que*

$$2^{\alpha_1 - 1} + 2^{n-1}$$

es una cota superior para el número de abiertos de X.

Demostración. Tenemos que la cardinalidad de $\mathcal{A}_1$ es 2^{α_1}. Ahora bien, para cada átomo $\{x\}$ de $\tau^{(1)}$, tenemos que

$$U_x \cup V$$

para $V \in \mathcal{A}_1$, es un abierto de X. Notemos que $U_x \cup V_1 \neq U_x \cup V_2$ si $U_x \cap V_1 = \emptyset = U_x \cap V_2$. Dado que $|U_x \cap \bigcup \mathcal{A}_1| \geq 1$ tenemos que los conjuntos abiertos de éste tipo son a lo más $2^{\alpha_1 - 1}$. En general, tenemos que si $U \in \mathcal{A}_2$, entonces $\{U \cup V : V \in \mathcal{A}_1\}$ tiene a lo sumo $2^{\alpha_1 - 1}$ elementos. Más aún, se tiene que

$$\tau = \bigcup_{U \in \mathcal{A}_2, U \neq \emptyset} \{U \cup V : V \in \mathcal{A}_1\} \bigcup \mathcal{A}_1$$

Como la cardinalidad de $\mathcal{A}_2$ es 2^{α_2} se deduce que

$$k \leq 2^{\alpha_1} + (2^{\alpha_2} - 1)2^{\alpha_1 - 1} = 2^{\alpha_1 - 1} + 2^{n-1}$$

□

Proposición 5.31. *Sea (X, τ) es un espacio finito T_0 con altura 2 tal que $|X| = n > 5$ y k es el número de abiertos. Tenemos que*

(1) Si $\alpha_1 = n - 1$, $|\widehat{U}_x| = j$, $1 \leq j \leq n-1$ donde x es el generador de $X^{(1)}$. Entonces

$$k = 2^{n-1} + 2^{n-j-1}$$

(2) Si $\alpha_1 > 1$, y para todo generador x de $X^{(1)}$ se cumple que existe un generador z de $X^{(0)}$ tal que $\widehat{U}_x = \{z\}$. Entonces

$$k = 2^{n-1} + 2^{\alpha_1 - 1}$$

(3) Si $\alpha_1 = n-2$, y para los generadores x, y de $X^{(0)}$ se cumple que $\widehat{U}_x = \{z_1\} \neq \{z_2\} = \widehat{U}_y$, donde z_1, z_2 son generadores distintos de $X^{(0)}$. Entonces

$$k = 9 \cdot 2^{n-4}$$

(4) Si $\alpha_1 \leq n-2$, y si existe un generador x de $X^{(1)}$ tal que $|\widehat{U}_x| > 1$. Entonces

$$k \leq 2^{n-1}$$

(5) Si $\alpha_1 \leq n-3$, y existen generadores x, y de $X^{(0)}$ tales que $\widehat{U}_x \neq \widehat{U}_y$. Entonces

$$k \leq 2^{n-1}$$

Demostración. (1) Sea $\mathcal{A}' = \{W \in \mathcal{A}_1 : W \cap U_x = \emptyset\}$. Notemos que $\mathcal{A}'$ es precisamente el conjunto de abiertos generados por los átomos de X tales que no estan contenidos en U_x, claro que

$$\tau = \mathcal{A}_1 \bigsqcup \{U_x \cup V : V \in \mathcal{A}'\}$$

Más aún, tenemos que la cardinalidad de $\mathcal{A}_1$ es 2^{n-1} y la cardinalidad de $\mathcal{A}'$ es 2^{n-j-1}. Se obtiene que

$$k = 2^{n-1} + 2^{n-j-1}.$$

En éste caso los átomos de X pueden ser dados de $\binom{n}{n-1}$ maneras, mientras que U_x puede darse de $\binom{n-1}{j}$ maneras. Se deduce que τ puede estar dado de

$$\binom{n}{n-1}\binom{n-1}{j}$$

formas distintas.

(2) Sea $\mathcal{A}' = \{U \in \mathcal{A}_1 : z \notin U\}$, es claro que éste conjunto es el generado por todos los átomos de $X^{(0)}$ distintos de $\{z\}$, en particular tiene cardinalidad $2^{\alpha_1 - 1}$. Ahora, sabemos que $\mathcal{A}_2$ tiene cardinalidad 2^{α_2}. Con lo que obtenemos que la cardinalidad de

$$\{U \cup V : U \in \mathcal{A}_2 \backslash \{\emptyset\}, V \in \mathcal{A}'\}$$

es $(2^{\alpha_2} - 1)2^{\alpha_1 - 1}$. Y dado que

$$\tau = \mathcal{A}_1 \bigsqcup \{U \cup V : U \in \mathcal{A}_2 \backslash \{\emptyset\}, V \in \mathcal{A}'\}$$

Se deduce que

$$k = 2^{\alpha_1} + (2^{\alpha_2} - 1)2^{\alpha_1 - 1} = 2^{\alpha_1 - 1} + 2^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} = 2^{\alpha_1 - 1} + 2^{n-1}$$

Ahora, tenemos $\binom{n}{\alpha_1}$ maneras de escoger los átomos de $X^{(0)}$, mientras que tenemos $\binom{\alpha_1}{1}$ formas de elegir z. Se deduce que en este caso hay

$$\binom{n}{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{1}$$

topologías diferentes.

(3) Sabemos que la cardinalidad de $\mathcal{A}_1$ es 2^{n-2}. Tenemos que $A_1 = \{U_x \cup V : V \in \mathcal{A}_1, z_1 \notin V\}$, $A_2 = \{U_y \cup V : V \in \mathcal{A}_1, z_2 \notin V\}$, $A_3 = \{U_x \cup U_y \cup V : V \in \mathcal{A}_1, z_1, z_2 \notin V\}$ tienen cardinalidad 2^{n-3}, 2^{n-3}, 2^{n-4} respectivamente. Puesto que

$$\tau = \mathcal{A}_1 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$$

Se deduce que

$$k = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-3} + 2^{n-4} = 9 \cdot 2^{n-4}$$

Ahora, hay $\binom{n}{n-2}$ formas de elegir los átomos de $X^{(0)}$, mientras que tenemos $2 \cdot n - 2 \cdot 2$ formas de elegir z_1, z_2. Se deduce que para éste caso hay

$$2 \cdot \binom{n}{n-2}\binom{n-2}{2}$$

topologías distintas.

(4) Notemos que $\mathcal{A}_1$ tiene 2^{α_1} elementos. Además, tenemos que al menos

$$\{U_x \cup V : V \in \mathcal{A}_1, U_x \cap V = \emptyset\}$$

y

$$\{U_x \cup U_y \cup V : V \in \mathcal{A}_1, U_x \cap V = \emptyset\}$$

donde y es otro generador de $X^{(1)}$, tienen cardinalidad menor que $2^{\alpha_1 - 2}$. Se deduce que

$$k \leq 2^{\alpha_1} + (2^{\alpha_2} - 3)2^{\alpha_1 - 1} + 2 \cdot 2^{\alpha_1 - 2} =$$
$$2^{\alpha_1} + (2^{\alpha_2} - 1)2^{\alpha_1 - 1} + 2 \cdot 2^{\alpha_1 - 2} - 2 \cdot 2^{\alpha_1 - 1} = 2^{n-1}$$

(5) Sea $z \in X$ un generador de $X^{(0)}$ distinto de x, y. Tenemos que al menos dos de los siguientes conjuntos

$$\{U_x \cup U_z \cup V : V \in \mathcal{A}_1, (U_x \cup U_z) \cap V = \emptyset\}$$

$$\{U_y \cup U_z \cup V : V \in \mathcal{A}_1, (U_y \cup U_z) \cap V = \emptyset\}$$

$$\{U_x \cup U_y \cup V : V \in \mathcal{A}_1, (U_x \cup U_y) \cap V = \emptyset\}$$

tienen cardinalidad a lo más $2^{\alpha_1 - 2}$. Usando el mismo razonamiento que en el caso anterior se deduce que

$$k \leq 2^{n-1}.$$

□

Teorema 5.32. *Para $n \geq 5$, tenemos que*

$T_0(n, 3 \cdot 2^{n-2}) = n(n-1)$.

$T_0(n, 2^{n-1} + 1) = 2n$.

$T_0(n, 9 \cdot 2^{n-4}) = \frac{5}{6} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)$.

$T_0(n, 2^{n-1} + 2^{n-j}) = n\binom{n-1}{j} - j\binom{n}{n-j} + n\binom{n}{n-j}$, *para* $j \in \{2, 3, ..., n-1\} \setminus \{4\}$.

Corolario 5.33. *Para $n \geq 5$, se cumple que*

$T_0^h(n, 3 \cdot 2^{n-2}) = 1$.

$T_0^h(n, 2^{n-1} + 1) = 2$.

$T_0^h(n, 9 \cdot 2^{n-4}) = 3$.

$T_0^h(n, 2^{n-1} + 2^{n-j}) = 2$.

$T_0^c(n, 3 \cdot 2^{n-2}) = n(n-1)$.

$T_0^c(n, 2^{n-1} + 1) = 2n$.

$T_0^c(n, 9 \cdot 2^{n-4}) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$.

$T_0^c(n, 2^{n-1} + 2^{n-j}) = n\binom{n-1}{j} - j\binom{n}{n-j} + n\binom{n}{n-j}$, *para* $j \in \{2, 3, ..., n-1\} \setminus \{4\}$.

Bibliografía

[1] *Alexandroff, P. S. Diskrete Raume.*

[2] *Barmak, Jonathan A. Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications, Ed. Springer, 2011.*

[3] *Benoumhani, Moussa. The number of topologies on a finite set.*

[4] *Brinkmann, G.-McKay, B.D. Counting unlabelled topologies and transitive relations, J. Integer Sequences, 8 (2005).*

[5] *McLarty, Colin. Elementary Categories Elementary Toposes.*

[6] *Das, S. K. A machine representation of finite T_0 topologies.*

[7] *Erné, M. Struktur- und anzahlformeln für topologien auf endlichen mengen.*

[8] *Evans, W. On the computer enumeration of finite topologies.*

[9] *M.C. McCord, Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces.*

[10] *McKay, B. D. Counting unlabelled topologies and transitive relations.*

[11] *Rubiano, Gustavo. Sobre el número de topologías en un conjunto finito.*

[12] *Stanley, R. P. On the number of open sets of finite topologies.*

[13] *Sharp, H- Cardinality of finite topologies, J. Combinatorial Theory (1968), 82-85.*

[14] *Stephen,D. Topology on finite sets, Amer. Math. Monthly 75 (1968), 739-741.*

[15] *Stege K. Combinatorial applications of ordinal sum decompositions.*

[16] *Stong, R. E. Finite topological spaces.*