UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Nombre de la tesis:

APLICACIONES TRI-COCIENTES Y ANÁLISIS NO-ESTÁNDAR

Tesis realizada por *Diego Armando Caldera Durán* para obtener el
Grado de Maestro en Matemáticas en la
Universidad Autónoma de Zacatecas,
Zacatecas, Zac., 2016.

Asesor de la tesis:
Dr. Alexander P. Pyshchev

Agradecimientos a:

A todos los profesores que han contribuido a mi formación académica, desde el proceso básico de primaria hasta Maestría, a ellos les debo el gusto y el amor a las Matemáticas.

Al Dr. Alexander Pyshchev, por aceptar ser mi asesor de tesis y por el apoyo que me ha brindado, a su gran esfuerzo y paciencia para formarme como matemático.

A los sinodales Valentin Afraimovich, Lev Glebsky, Alexander Pyshchev, Luis Manuel Rivera, Leticia Adriana Ramírez y Alexis Zamora por sus aportes y enriquecimiento a este trabajo.

También quiero agradecer la beca de CONACyT de Agosto 2013 a Julio 2015.

Dedicatoria

Dedico esta tesis a mis amigos que estuvieron en el transcurso de estos años de formación: Shuy Martínez, Edgar Ponciano, Alex Acosta, Monica Aranzazu. A Yadira Guevara por ser parte de mis triunfos.

A mis hermanos Juan José y Julio Cesar Caldera, a mi cuñada Irma del Carmen Mora y mi sobrina Siboney, por el apoyo brindado en el trascurso de mi vida.

Y a las personas que les debo todo lo que soy, a mi madre Ma. Teresa Durán por todo su apoyo tanto moral como económico a lo largo de mi vida, en las decisiones buenas, malas y sobre todo en los momentos más angustiantes de mi vida, que siempre estuvo ahí para abrazarme y llorar conmigo y sacarme adelante.

A mi hija Shakty Dayana Caldera por ser el motor de mi vida pues por ella hago hasta lo imposible por salir adelante, por entenderme que no puedo estar todos los días a su lado y hacer de mi vida el lugar más hermoso.

Principalmente a mi hermana Elizabeth Caldera ya que ella es la responsable de mi regreso a estudiar, apoyándome moral y económicamente, pues hizo lo imposible para convencerme, gracias a ella he logrado lo que ahora soy y lo que ahora tengo, por eso, este logro practicamente es de ella y de mi madre; de ellas es el título de MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS.

Y a Citlali Perez por apoyarme hasta el final y animarme en los momentos más difíciles de la maestría y evitar que renunciara a mi sueño.

Índice general

Introducción

Uno de los teoremas más famosos de Topología General es el teorema de Tychonoff sobre la compacidad del producto cartesiano de los espacios compactos. Este teorema tiene demostraciones cortas y sencillas, como por ejemplo una que utiliza el lema de Alexander (de subbase). Una demostración muy famosa fue propuesta por Nicolas Bourbaki ([2], pág. 88); esta demostración utiliza la teoría de filtros y ultrafiltros. El método de ultrafiltros es muy poderoso; véase, por ejemplo, el teorema de Bourbaki y Frolík sobre los productos de las aplicaciones perfectas ([2], pág. 103). Otra demostración del teorema de Tychonoff fue dada por Abraham Robinson en su monografía "Análisis no-estándar" ([11], pág. 95). Esta demostración es muy corta pero utiliza la teoría complicada de las extensiones no-estándar; en nuestra opinión la demostración de Robinson ofrece una vista más general que el método de ultrafiltros.

En 1977 Ernest Michael [10] dió una definición de las aplicaciones tri-cocientes y mostró que el producto finito de las aplicaciones tri-cocientes es tri-cociente. Michael mencionó que no sabia la respuesta en el caso de los productos infinitos. La pregunta estuvo abierta hasta 1995 cuando Vladimir Uspenskij [12] mostró que el producto arbitrario de las aplicaciones tri-cocientes es tri-cociente. En 2002 Maria Manuel Clementino y Dirk Hofmann [4, 5] publicaron una demostración muy profunda del teorema de Uspenskij basada en el método de ultrafiltros. El objetivo de esta tesis es mostrar que la demostración de Clementino y Hofmann tiene un análogo "no-estándar." Para obtenerlo, vamos a usar los universos no-estándar especiales construidos por Vieri Benci [1].

Capítulo 1

Universos no-estándar

En este capítulo vamos dar una descripción de la construcción de los universos no-estándar $(V(S), V(^*S), *)$ tales que $^*S = S$ [1].

Definición 1.1 ([3], pág. 263)**.** Sea S un conjunto; definimos

$$V_0(S) = S, \quad V_n(S) = V_{n-1}(S) \cup \mathscr{P}(V_{n-1}(S)) \quad (n \geq 1),$$

donde $\mathscr{P}(X)$ denota el conjunto potencia de X. Sea

$$V(S) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n(S);$$

se dice que $V(S)$ es la **superestructura** sobre S. Se dice que S es un **conjunto de base** si $\emptyset \notin S$ y para todo $s \in S$ $s \cap V(S) = \emptyset$.

Nota 1.2. Las siguientes afirmaciones se verifican de manera directa. Si S es conjunto de base, entonces

$$V(S) \setminus S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{P}(V_n(S)).$$

Además, si $X, Y \in V(S) \setminus S$ y $Z \subseteq X$, entonces

$$Z,\ X \cup Y,\ X \times Y,\ \mathscr{P}(X) \in V(S) \setminus S.$$

(Para mostrar que $X \times Y \in V(S) \setminus S$, usamos la definición de un par ordenado: $(x, y) = \{\{x, y\}, \{x\}\}$.) Si $x \in X \in V_n(S)$ y $x \in V(S)$, entonces $n \geq 1$ y $x \in V_{n-1}(S)$.

Lema 1.3 ([3], pág. 263)**.** *Para cada conjunto S existe un conjunto de base S' de la mísma cardinalidad.*

Demostración. Sea S un conjunto dado. Definimos recursivamente para cada $s \in S$

$$P_0(s) = s, \quad P_n(s) = \{P_m(s) : 0 \leq m \leq n-1\} \quad (n \geq 1).$$

La sucesión $(P_n(s))_{n\geq 0}$ es inyectiva (recordaremos que $x \notin x$ para cualquier conjunto x) y $|P_n(s)| = n$ para $n \geq 1$. Ahora definimos

$$N(s) = \{P_n(s) : n \geq 1\}$$

y observemos que la aplicación $s \mapsto N(s)$ es inyectiva. (Si $N(s_1) = N(s_2)$, entonces $P_1(s_1) = P_n(s_2)$ para algún $n \geq 1$; se sigue que $n = 1$ y $s_1 = s_2$.) Sea

$$S' = \{\{N(s)\} : s \in S\}.$$

Claro que $|S'| = |S|$ y $\emptyset \notin S'$. Vamos a mostrar ahora que $N(s) \notin V(S')$ para cada $s \in S$. Si $N(s) \in V(S')$, consideremos

$$\mu = \min\{n \geq 0 : N(s) \in V_n(S')\}.$$

Observemos que $N(s)$ es infinito y $|t| = 1$ para cada $t \in S'$. Se sigue que $\mu \geq 1$ y de

$$N(s) \in V_\mu(S') = V_{\mu-1}(S') \cup \mathscr{P}(V_{\mu-1}(S'))$$

obtenemos $N(s) \subseteq V_{\mu-1}(S')$. Ahora para $n \geq 1$ sea

$$\nu(n) = \min\{m \geq 0 : P_n(s) \in V_m(S')\} \leq \mu - 1.$$

Si $n \geq 2$, entonces $\nu(n) \geq 1$ y por eso $P_n(s) \in \mathscr{P}(V_{\nu(n)-1}(S'))$; se deduce que $P_{n-1}(s) \in V_{\nu(n)-1}(S')$ y $\nu(n-1) \leq \nu(n) - 1$. Se sigue que la sucesión $(\nu(n))_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente, lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 1.4 ([3], pág. 267, y [9])**.** Vamos a considerar las fórmulas en lenguaje $\mathscr{L} = \{\in\}$ (las **$\in$-fórmulas**). Se dice que una $\in$-fórmula φ tiene **cuantificadores acotados** si todas las entradas de cuantificadores en φ son de la forma

$$(\exists u \in v)\chi \quad \text{ó} \quad (\forall u \in v)\chi,$$

donde $(\exists u \in v)\chi$ es una abreviación para

$$(\exists u)(u \in v \wedge \chi)$$

y $(\forall u \in v)\chi$ es una abreviación para

$$(\forall u)(u \in v \to \chi).$$

Se dice que una familia $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ es **centrada** si $\Gamma \neq \emptyset$ y para cada $\Omega \subseteq \Gamma$ finito y no vacío

$$\bigcap_{\gamma\in\Omega} A_\gamma \neq \emptyset.$$

Sea κ un cardinal no numerable. Se dice que una terna

$$(V(S), V(S'), *)$$

es un **universo no-estándar κ-saturado** si S y S' son conjuntos de base infinitos, $* : V(S) \to V(S')$ y se cumplen las siguentes propiedades (escribimos ${}^*x$ para $*(x)$):

(1) ${}^*S = S'$;

(2) (El principio de transferencia.) Si $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ es una $\in$-fórmula con cuantificadores acotados y $x_1, \ldots, x_n \in V(S)$, entonces

$$(V(S), \in) \models \phi(x_1, \ldots, x_n) \;\Leftrightarrow\; (V(S'), \in) \models \phi({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n).$$

(3) (κ-saturación.) Si $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia centrada tal que $|\Gamma| < \kappa$ y para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $X_\gamma \in V(S) \setminus S$ con $A_\gamma \in {}^*X_\gamma \setminus S'$, entonces

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset.$$

Definición 1.5. Un **ultrafiltro** en un conjunto I es un conjunto D de subconjuntos de I que tiene las siguientes propiedades:

(1) $I \in D$ y $\emptyset \notin D$;

(2) si A, $B \in D$, entonces $A \cap B \in D$;

(3) si $A \in D$ y $A \subseteq B \subseteq I$, entonces $B \in D$;

(4) para todo $A \subseteq I$ tenemos $A \in D$ ó $I \setminus A \in D$.

Sea D ultrafiltro en I. Se dice que D es **numerablemente incompleto** si existe una sucesión

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$$

de los elementos de D tal que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \emptyset.$$

Sea κ un cardinal; se dice que D es **κ-bueno** si para cada conjunto Γ tal que $|\Gamma| < \kappa$ y para cada aplicación

$$F : \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma) \to D$$

tal que para todo $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$

$$\Omega_1 \supseteq \Omega_2 \ \Rightarrow\ F(\Omega_1) \subseteq F(\Omega_2)$$

existe

$$G : \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma) \to D$$

tal que para todo $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$

$$G(\Omega_1 \cup \Omega_2) = G(\Omega_1) \cap G(\Omega_2),$$

$$G(\Omega_1) \subseteq F(\Omega_1).$$

($\mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$ denota la colección de todos subconjuntos finitos de Γ.)

Sea D un ultrafiltro en I y $P(i)$ una propiedad de $i \in I$; vamos a decir que $P(i)$ se cumple **D-c.t.p.** (en casi todas partes con respecto a D) si

$$\{i \in I : P(i)\} \in D.$$

Teorema 1.6 (K. Kunen, [7])**.** *Sea κ un cardinal infinito y I un conjunto tal que $|I| = \kappa$. Existe un ultrafiltro D en I tal que D es numerablemente incompleto y κ^+-bueno. (Aquí κ^+ es el primer cardinal $> \kappa$.)*

Definición 1.7. Seguimos la construción en [9]. Sea D un ultrafiltro en I y S un conjunto de base infinito. Definimos

$$\mathscr{F}_m(S, D) = \{f \in V(S)^I : f(i) \in V_m(S) \ \ D\text{-c.t.p.}\} \quad (m \geq 0),$$

$$\mathscr{F}(S,D) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathscr{F}_m(S,D).$$

De forma breve vamos a escribir $\mathscr{F}_m(S)$ para $\mathscr{F}_m(S,D)$ y $\mathscr{F}(S)$ para $\mathscr{F}(S,D)$. Notemos que $\mathscr{F}_0(S) \subseteq \mathscr{F}_1(S) \subseteq \ldots$.

Consideremos una relación $\approx_D$ en S^I:

$$f \approx_D g \iff f(i) = g(i) \;\; D\text{-c.t.p.}$$

Notemos que como D es un ultrafiltro, $\approx_D$ es una relación de equivalencia en S^I; el conjunto cociente $S^I/\approx_D$ se llama la **ultrapotencia** de S con respecto a D.

Para cada $x \in V(S)$ definimos

$$\theta_x : I \to \{x\};$$

notemos que para todo $x, y \in S$

$$\theta_x \approx_D \theta_y \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

Ahora supongamos que

$$b : S^I/\approx_D \to S$$

es una biyección fija. Definimos recursivamente

$$j_m(S,D,b) : \mathscr{F}_m(S) \to V_m(S) \quad (m \geq 0).$$

De forma breve vamos a escribir j_m para $j_m(S,D,b)$. Sea

$$j_0 : \mathscr{F}_0(S) \to V_0(S) = S,$$

$$j_0(f) = b([f]),$$

donde

$$[\,\_\,] : \mathscr{F}_0(S) \to S^I/\approx_D$$

la aplicación canónica (notemos que para cada $f \in \mathscr{F}_0(S)$ existe $g \in S^I$ tal que $f(i) = g(i)$ D-c.t.p.). Si $m \geq 1$, para cada $f \in \mathscr{F}_0(S)$ definimos

$$j_m(f) = j_0(f) \in S$$

y para cada $f \in \mathscr{F}_m(S) \setminus \mathscr{F}_0(S)$ definimos

$$j_m(f) = \{j_{m-1}(g) : g \in \mathscr{F}_{m-1}(S) \text{ y } g(i) \in f(i) \;\; D\text{-c.t.p.}\} \subseteq V_{m-1}(S).$$

Notemos que en ambos casos $j_m(f) \in V_m(S)$.

Lema 1.8. *Si $m \geq 1$ y $f_0, f_1 \in \mathscr{F}_m(S) \setminus \mathscr{F}_0(S)$ y $f_0(i) \neq f_1(i)$ D-c.t.p., entonces existe $h \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$ y $l \in \{0,1\}$ tal que $h(i) \in f_l(i)$ D-c.t.p. y $h(i) \notin f_{1-l}(i)$ D-c.t.p.*

Demostración. Escogemos $p \in S$. Consideremos

$$A = \{i \in I : f_0(i) \in V_m(S) \setminus S,\ f_1(i) \in V_m(S) \setminus S \text{ y } f_0(i) \neq f_1(i)\} \in D$$

Definimos

$$B_0 = \{i \in A : f_0(i) \setminus f_1(i) \neq \emptyset\},$$
$$B_1 = \{i \in A : f_1(i) \setminus f_0(i) \neq \emptyset\}.$$

Como $B_0 \cup B_1 = A \in D$, existe $l \in \{0,1\}$ tal que $B_l \in D$. Para cada $i \in B_l$ escogemos $h(i) \in f_l(i) \setminus f_{1-l}(i) \in V_{m-1}(S)$. Para cada $i \in I \setminus B_l$ definimos

$$h(i) = p \in S = V_0(S) \subseteq V_{m-1}(S).$$

Se deduce que $h \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$. También

$$\{i \in I : h(i) \in f_l(i)\} \supseteq B_l \in D,$$

$$\{i \in I : h(i) \notin f_{1-l}(i)\} \supseteq B_l \in D,$$

y por eso $h(i) \in f_l(i)$ D-c.t.p. y $h(i) \notin f_{1-l}(i)$ D-c.t.p. $\square$

Lema 1.9. *Para cada $m \geq 0$ tenemos*

$$j_m = j_{m+1} | \mathscr{F}_m(S).$$

Demostración. Inducción sobre $m \geq 0$. Si $m = 0$, la afirmación es obvia.

Supongamos que $m \geq 1$; vamos a mostrar que para todo $f \in \mathscr{F}_m(S)$ tenemos

$$j_m(f) = j_{m+1}(f).$$

Si $f \in \mathscr{F}_0(S)$, entonces

$$j_m(f) = j_0(f) = j_{m+1}(f).$$

Supongamos que

$$f \in \mathscr{F}_m(S) \setminus \mathscr{F}_0(S) \subseteq \mathscr{F}_{m+1}(S) \setminus \mathscr{F}_0(S).$$

Si $\pi \in j_m(f)$, entonces existe $g \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$ tal que $g(i) \in f(i)$ D-c.t.p. y $\pi = j_{m-1}(g)$; tenemos que $g \in \mathscr{F}_m(S)$ y $\pi = j_m(g)$ y por eso $\pi \in j_{m+1}(f)$. Si $\pi \in j_{m+1}(f)$, entonces existe $g \in \mathscr{F}_m(S)$ tal que $g(i) \in f(i)$ D-c.t.p. y $\pi = j_m(g)$; tenemos

$$g(i) \in f(i) \in V_m(S) \;\; D\text{-c.t.p.}$$

y por eso $g(i) \in V_{m-1}(S)$ D-c.t.p.; se deduce que $g \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$ y $\pi = j_{m-1}(g)$ y $\pi \in j_m(f)$. □

Definición 1.10. Sea $j : \mathscr{F}(S) \to V(S)$, $j = \bigcup_{m=0}^{\infty} j_m$.

Lema 1.11. *Para todo $m \geq 0$ y para todo $f_0, f_1 \in \mathscr{F}_m(S)$ tenemos*

$$j_m(f_0) = j_m(f_1) \iff f_0(i) = f_1(i) \;\; D\text{-}c.t.p.$$

Demostración. $(\Rightarrow)$: Inducción sobre m.

Sean $f_0, f_1 \in \mathscr{F}_0(S)$ tales que $j_0(f_0) = j_0(f_1)$; como b es biyección tenemos

$$[f_0] = b^{-1}(j_0(f_0)) = b^{-1}(j_0(f_1)) = [f_1].$$

Por eso $f_0(i) = f_1(i)$ D-c.t.p.

Supongamos que $m \geq 1$, $f_0, f_1 \in \mathscr{F}_m(S)$ y $j_m(f_0) = j_m(f_1)$.

Si $f_0, f_1 \in \mathscr{F}_0(S)$, entonces

$$j_0(f_0) = j_m(f_0) = j_m(f_1) = j_0(f_1)$$

y por eso tenemos

$$f_0(i) = f_1(i) \; D\text{-c.t.p.}$$

Ahora supongamos que $f_0, f_1 \in \mathscr{F}_m(S) \backslash \mathscr{F}_0(S)$ y $f_0(i) = f_1(i)$ D-c.t.p. no se cumple. Tenemos $f_0(i) \neq f_1(i)$ D-c.t.p. y por el lema 1.8 existen $l \in \{0, 1\}$ y $h \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$ tales que

$$h(i) \in f_l(i) \; D\text{-c.t.p.},$$

$$h(i) \notin f_{1-l}(i) \; D\text{-c.t.p.}$$

Tenemos por definición de $j_m(f_l)$ que

$$j_{m-1}(h) \in j_m(f_l) = j_m(f_{1-l}).$$

Por eso existe $h' \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$ tal que $h'(i) \in f_{1-l}(i)$ D-c.t.p. y $j_{m-1}(h') = j_{m-1}(h)$. Por hipótesis de inducción

$$h'(i) = h(i) \ D\text{-c.t.p.}$$

Se deduce que $h(i) \in f_{1-l}(i)$ D-c.t.p., la contradicción buscada.

Ahora supongamos que $f_l \in \mathscr{F}_0(S)$ y $f_{1-l} \in \mathscr{F}_m(S) \setminus \mathscr{F}_0(S)$, $l \in \{0, 1\}$.

Si $f_{1-l}(i) = \emptyset$ D-c.t.p., por la definición de j_m tenemos

$$j_m(f_{1-l}) = \emptyset = j_0(f_l) \in S;$$

pero como S es conjunto de base, $\emptyset \notin S$, la contradicción buscada.

Supongamos que $f_{1-l}(i) = \emptyset$ D-c.t.p. no se cumple. Como $\emptyset \in V_1(S) \setminus S$, tenemos

$$\theta_\emptyset \in \mathscr{F}_m(S) \setminus \mathscr{F}_0(S).$$

Tenemos $f_{1-l}(i) \neq \theta_\emptyset(i)$ D-c.t.p. y por el lema 1.8 existe $g \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$ tal que $g(i) \in f_{1-l}(i)$ D-c.t.p. Tenemos

$$j_{m-1}(g) \in j_m(f_{1-l}) = j_m(f_l) \in S,$$

la contradicción buscada.

($\Leftarrow$) : Obvio. □

Lema 1.12. *Para todo $m \geq 0$ y para todo $f_0, f_1 \in \mathscr{F}_m(S)$ tenemos*

$$j_m(f_0) \in j_m(f_1) \iff f_0(i) \in f_1(i) \ D\text{-}c.t.p.$$

Demostración. Análoga al lema anterior. □

Lema 1.13. *Sean $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ una $\in$-fórmula con cuantificadores acotados y $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}(S)$. Entonces*

$$(V(S), \in) \models \varphi(j(f_1), \ldots, j(f_n)) \ \Leftrightarrow \ (V(S), \in) \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \ D\text{-}c.t.p.$$

Demostración. Inducción sobre la complejidad de φ. Si φ es una fórmula atómica, la afirmación sigue de los lemas 1.11 y 1.12. El caso de los conectivos es sencillo (usamos la definición de un ultrafiltro).

Supongamos que φ tiene la forma

$$(\exists u \in v_k)\chi(u, v_1, \ldots, v_n), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}(S)$ tales que

$$(V(S), \in) \models \varphi(j(f_1), \ldots, j(f_n)).$$

Existe $x \in j(f_k) \cap V(S)$ tal que

$$(V(S), \in) \models \chi(x, j(f_1), \ldots, j(f_n)).$$

Como S es un conjunto de base, tenemos $j(f_k) \notin S$ y por eso $f_k \in \mathscr{F}(S) \setminus \mathscr{F}_0(S)$. Existe $g \in \mathscr{F}(S)$ tal que $g(i) \in f_k(i)$ D-c.t.p. y $x = j(g)$. Por la hipotesis de inducción tenemos

$$A = \{i \in I : \ g(i) \in f_k(i) \text{ y } (V(S), \in) \models \chi(g(i), f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in D$$

y para cada $i \in A$ tenemos

$$(V(S), \in) \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i)).$$

Ahora supongamos que existe $A \in D$ tal que para todo $i \in A$

$$(V(S), \in) \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i)).$$

Se deduce que para cada $i \in A$ existe $g(i) \in V(S) \cap f_k(i)$ tal que

$$(V(S), \in) \models \chi(g(i), f_1(i), \ldots, f_n(i));$$

para cada $i \in I \setminus A$ definimos $g(i) = p$, donde $p \in S$ un elemento fijo. Sea $m \geq 0$ tal que $f_k \in \mathscr{F}_m(S)$. Como

$$g(i) \in f_k(i) \in V_m(S) \ \ D\text{-c.t.p.},$$

tenemos $m \geq 1$ y $g(i) \in V_{m-1}(S)$ D-c.t.p.; se deduce que $g \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$. Por la hipotesis de inducción tenemos

$$(V(S), \in) \models \chi(j(g), j(f_1), \ldots, j(f_n)).$$

Como $j(g) \in j(f_k)$, obtenemos

$$(V(S), \in) \models \varphi(j(f_1), \ldots, j(f_n)).$$

La demostración está completa. $\square$

Teorema 1.14 (V. Benci, [1]). *Sea λ un cardinal infinito y κ un cardinal no numerable. Existen un universo no-estándar κ-saturado*

$$(V(S), V(^*S), *)$$

y un conjunto $S_0 \subseteq S$ tales que $|S_0| \geq \lambda$, $^*S = S$ y $^*s = s$ para cada $s \in S_0$.

Demostración. Por el teorema 1.6 existen un conjunto I y un ultrafiltro D en I tal que D es numerablemente incompleto y κ-bueno. Por el lema 1.3 existe un conjunto de base S tal que

$$|S| = |\lambda^I| \geq \lambda.$$

Como S es infinito, existe $S_0 \subseteq S$ tal que

$$|S_0| = |S \setminus S_0| = |S|.$$

Notemos que

$$\Theta : S \to S^I/\approx_D, \quad \Theta(x) = [\theta_x],$$

es una inyección. Tenemos

$$|S| \leq |S^I/\approx_D| \leq |S^I| = |S|.$$

Como $|S^I/\approx_D| = |S|$, tenemos

$$|(S^I/\approx_D) \setminus \Theta[S_0]| = |S| = |S \setminus S_0|$$

y por eso existe una biyección

$$\varphi : (S^I/\approx_D) \setminus \Theta[S_0] \to S \setminus S_0.$$

Definimos ahora

$$b : S^I/\approx_D \to S,$$

$$b(q) = \begin{cases} \Theta^{-1}(q) & \text{si} \quad q \in \Theta[S_0], \\ \varphi(q) & \text{si} \quad q \notin \Theta[S_0]. \end{cases}$$

Notemos que b es una biyección tal que para cada $s \in S_0$

$$b([\theta_s]) = s.$$

Consideremos la aplicación correspondiente

$$j : \mathscr{F}(S) \to V(S).$$

Definimos
$$* : V(S) \to V(S), \quad {}^*x = j(\theta_x).$$

Vamos a mostrar ahora que ${}^*S = S$. Notemos que si $s \in S$, entonces para algún $f \in S^I$ tenemos $b([f]) = s$; se deduce que

$$s = b([f]) = j(f) \in j(\theta_S) = {}^*S.$$

Ahora supongamos que $x \in {}^*S$. Como $S \notin V_0(S)$, tenemos $\theta_S \notin \mathscr{F}_0(S)$ y por eso existe $g \in \mathscr{F}(S)$ tal que $g(i) \in \theta_S(i)$ D-c.t.p. y $x = j(g)$. Obtenemos que $g \in \mathscr{F}_0(S)$ y por eso
$$x = j(g) = b([g]) \in S.$$

Notemos que para cada $s \in S_0$

$${}^*s = j(\theta_s) = b([\theta_s]) = s.$$

Vamos a mostrar ahora que se cumple el principio de transferencia. Sea $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ una $\in$-fórmula con cuantificadores acotados y $x_1, \ldots, x_n \in V(S)$. Usando el lema 1.13, obtenemos

$$(V(S), \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow$$
$$(V(S), \in) \models \varphi(\theta_{x_1}(i), \ldots, \theta_{x_n}(i)) \;\; D\text{-c.t.p.} \Leftrightarrow$$
$$(V(S), \in) \models \varphi(j(\theta_{x_1}), \ldots, j(\theta_{x_n})) \Leftrightarrow$$
$$(V(S), \in) \models \varphi({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n).$$

Vamos a verificar ahora que se cumple el principio de κ-saturación. Sea

$$X_\gamma \in V(S) \setminus S \quad (\gamma \in \Gamma)$$

y $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ una familia centrada tal que para cada $\gamma \in \Gamma$

$$A_\gamma \in {}^*X_\gamma \setminus S$$

y $|\Gamma| < \kappa$. Vamos a mostrar que

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset.$$

Para cada $\gamma \in \Gamma$ tenemos

$$\theta_{X_\gamma} \in \mathscr{F}(S) \setminus \mathscr{F}_0(S);$$

se deduce que existe $g_\gamma \in \mathscr{F}(S)$ tal que

$$g_\gamma(i) \in \theta_{X_\gamma}(i) \;\; D\text{-c.t.p. y } j(g_\gamma) = A_\gamma.$$

Como D es numerablemente incompleto, existe

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$$

una sucesión de los elementos de D tal que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \emptyset.$$

Definimos ahora

$$F : \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma) \to D,$$

$$F(\Omega) = \{i \in I_{|\Omega|} : V(S) \cap \bigcap_{\gamma \in \Omega} g_\gamma(i) \neq \emptyset\}.$$

Vamos a verificar que F esta bien definida. Tenemos $F(\emptyset) = I \in D$. Si $\Omega \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$ y $\Omega \neq \emptyset$, escogemos

$$b \in \bigcap_{\gamma \in \Omega} A_\gamma \neq \emptyset;$$

como para todo $\gamma \in \Gamma$ $A_\gamma \in V(S) \setminus S$, tenemos $b \in V(S)$. Se deduce que para todo $\gamma \in \Omega$

$$g_\gamma \in \mathscr{F}(S) \setminus \mathscr{F}_0(S)$$

y por eso existe $h \in \mathscr{F}(S)$ tal que para todo $\gamma \in \Omega$

$$h(i) \in g_\gamma(i) \;\; D\text{-c.t.p.}, \quad j(h) = b.$$

Se deduce que

$$F(\Omega) \supseteq I_{|\Omega|} \cap \bigcap_{\gamma \in \Omega} \{i \in I : h(i) \in g_\gamma(i)\} \in D$$

y por eso $F(\Omega) \in D$.

Ahora notemos que si $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$ y $\Omega_1 \supseteq \Omega_2$, entonces para cada $i \in F(\Omega_1)$ tenemos

$$i \in I_{|\Omega_1|} \subseteq I_{|\Omega_2|}$$

y

$$V(S) \cap \bigcap_{\gamma \in \Omega_2} g_\gamma(i) \supseteq V(S) \cap \bigcap_{\gamma \in \Omega_1} g_\gamma(i) \neq \emptyset$$

y por eso $i \in F(\Omega_2)$; se deduce que

$$F(\Omega_1) \subseteq F(\Omega_2).$$

Como $|\Gamma| < \kappa$ y D es κ-bueno, existe

$$G : \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma) \to D$$

tal que $\forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$

$$G(\Omega_1 \cup \Omega_2) = G(\Omega_1) \cap G(\Omega_2),$$

$$G(\Omega_1) \subseteq F(\Omega_1).$$

Ahora para cada $i \in I$ definimos

$$\Gamma_i = \{\gamma \in \Gamma : i \in G(\{\gamma\})\}$$

Notemos que para todo $i \in I$ y para todo $n \leq |\Gamma_i|$ tenemos $i \in I_n$, por que si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son elementos distintos de Γ_i, entonces

$$i \in \bigcap_{k=1}^{n} G(\{\gamma_k\}) = G(\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) \subseteq F(\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) \subseteq I_n$$

Se deduce que para todo $i \in I$, $\Gamma_i \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$.

Para cada $i \in I$ tenemos que $i \in F(\Gamma_i)$ y por eso existe

$$l(i) \in V(S) \cap \bigcap_{\gamma \in \Gamma_i} g_\gamma(i).$$

Fijamos $\gamma \in \Gamma$. Tenemos

$$\{i \in I : l(i) \in g_\gamma(i)\} \supseteq \{i \in I : \gamma \in \Gamma_i\} = \{i \in I : i \in G(\{\gamma\})\} = G(\{\gamma\}) \in D$$

y por eso $l(i) \in g_\gamma(i)$ D-c.t.p. Sea $m \geq 0$ tal que $g_\gamma \in \mathscr{F}_m(S)$. Como $l \in V(S)^I$ y $l(i) \in g_\gamma(i)$ D-c.t.p., tenemos $m \geq 1$ y $l \in \mathscr{F}_{m-1}(S)$. Se deduce que $j(l) \in j(g_\gamma) = A_\gamma$. Se deduce que

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset.$$

La demostración está completa. $\square$

Capítulo 2

Extensiones no-estándar

En este capítulo vamos a recopilar las propiedades de los universos no-estándar necesarias para nuestra aplicación. Suponemos que

$$(V(S), V(^*S), *)$$

es un universo no-estándar arbitrario. (La hipotesis $^*S = S$ no se utiliza.) Sea κ un cardinal no numerable tal que $(V(S), V(^*S), *)$ es κ-saturado.

Todo el material de este capítulo es estándar, véase [9, 11].

Proposición 2.1. *Si $X \in V(S) \setminus S$, entonces $^*X \in V(S') \setminus S'$.*

Demostración. Supongamos que nó. Como $^*X \in V(S')$, tenemos $^*X \in S' = {}^*S$ y por eso

$$(V(S'), \in) \models \varphi(^*X, {}^*S),$$

donde $\varphi(v_0, v_1)$ es una $\in$-fórmula $v_0 \in v_1$. Por el principio de transferencia

$$(V(S), \in) \models \varphi(X, S)$$

y por eso $X \in S$, la contradicción buscada. □

Nota 2.2. Aplicando el principio de transferencia, vamos a sustituir las entradas libres de variables en $\in$-fórmulas con las interpretaciones correspondientes.

Proposición 2.3. *Sean $X, Y \in V(S) \setminus S$. Entonces*

$$X \subseteq Y \;\Rightarrow\; {}^*X \subseteq {}^*Y,$$

$$^*(X \cup Y) = {}^*X \cup {}^*Y, \quad ^*(X \cap Y) = {}^*X \cap {}^*Y, \quad ^*(X \setminus Y) = {}^*X \setminus {}^*Y.$$

Demostración. Vamos a mostrar la primera implicación. Para cada $x \in X \cap V(S)$ tenemos $x \in Y$. Se deduce que

$$(V(S), \in) \models (\forall v_0 \in X)(v_0 \in Y).$$

Por el principio de transferenicia

$$(V(S'), \in) \models (\forall v_0 \in {}^*X)(v_0 \in {}^*Y).$$

Por la proposición 2.1 tenemos ${}^*X \in V(S') \setminus S'$ y por eso ${}^*X \subseteq V(S')$. Se deduce que para todo $y \in {}^*X \cap V(S') = {}^*X$ tenemos $y \in {}^*Y$. $\square$

Proposición 2.4. *Para cada $x \in V(S)$ tenemos $\{x\} \in V(S) \setminus S$ y*

$${}^*\{x\} = \{{}^*x\}.$$

Demostración. Como $x \in \{x\}$, por el principio de transferencia ${}^*x \in {}^*\{x\}$. Tenemos

$$(V(S), \in) \models (\forall v_0 \in \{x\})(v_0 = x)$$

y por eso

$$(V(S), \in) \models (\forall v_0 \in {}^*\{x\})(v_0 = {}^*x).$$

Como $\{x\} \cap V(S) \neq \emptyset$, tenemos $\{x\} \in V(S) \setminus S$ y por eso ${}^*\{x\} \in V(S') \setminus S'$. Se deduce que para cada $y \in {}^*\{x\}$ tenemos $y = {}^*x$. $\square$

Definición 2.5. Las n-tuplas se definen recursivamente:

$$(x) = x, \quad (x, y) = \{\{x, y\}, \{x\}\},$$

$$(x_1, \ldots, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) \quad (n \geq 3).$$

Proposición 2.6. *Si $x_1, \ldots, x_n \in V(S)$, $n \geq 1$, entonces*

$$(x_1, \ldots, x_n) \in V(S)$$

y

$${}^*(x_1, \ldots, x_n) = ({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n).$$

Demostración. Aplicamos las proposiciones 2.3 y 2.4. $\square$

Nota 2.7. Sea $(v_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de variables. Consideremos las siguentes abreviaciones $(i, j, k \geq 0)$:
$\{v_i, v_j\} = v_k$ para

$$v_i \in v_k \wedge v_j \in v_k \wedge (\forall v_l \in v_k)(v_l = v_i \vee v_l = v_j);$$

$(v_i, v_j) = v_k$ para

$$(\exists v_l \in v_k)(\exists v_m \in v_k)(\{v_i, v_j\} = v_l \wedge \{v_i, v_i\} = v_m \wedge \{v_l, v_m\} = v_k).$$

Aquí $l = \max(i, j, k)+1$ y $m = l+1$. Se muestra directamente que si $i, j, k \geq 0$ son distintos y $\varphi(v_i, v_j, v_k)$ es $(v_i, v_j) = v_k$, entonces para todo conjunto de base S y para todo $x, y, z \in V(S)$

$$(V(S), \in) \models \varphi(x, y, z) \;\Leftrightarrow\; (x, y) = z.$$

Proposición 2.8. *Sean $X, Y \in V(S) \setminus S$ y $f : X \to Y$. Entonces*

$$X \times Y,\; f \in V(S) \setminus S,$$

$$^*(X \times Y) = {}^*X \times {}^*Y,$$

$$^*f : {}^*X \to {}^*Y.$$

Además, para cada $x \in X$

$$^*(f(x)) = {}^*f(^*x).$$

Si f es inyectiva (resp. sobreyectiva), entonces $^*f$ es inyectiva (resp. sobreyectiva). Para cada $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$

$$^*(f[A]) = {}^*f[^*A], \quad {}^*(f^{-1}[B]) = (^*f)^{-1}[^*B].$$

Demostración. Aplicamos la nota 2.7 y el principio de transferencia. □

Proposición 2.9. *Para cada $X \in V(S) \setminus S$ tenemos $^*\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(^*X)$.*

Demostración. Tenemos

$$(V(S), \in) \models (\forall v_0 \in \mathcal{P}(X))(\forall v_1 \in v_0)(v_1 \in X).$$

Por el principio de transferencia

$$(V(S'), \in) \models (\forall v_0 \in {}^*\mathcal{P}(X))(\forall v_1 \in v_0)(v_1 \in {}^*X).$$

Como $\mathscr{P}(X) \in V(S) \setminus S$, tenemos ${}^*\mathcal{P}(X) \in V(S') \setminus S'$ y por eso

$$^*\mathcal{P}(X) \cap V(S') = {}^*\mathcal{P}(X).$$

Notemos que $\mathcal{P}(X) \cap S = \emptyset$. Por la proposición 2.3

$$^*\mathcal{P}(X) \cap S' = {}^*\mathcal{P}(X) \cap {}^*S = {}^*(\mathcal{P}(X) \cap S) = {}^*\emptyset = \emptyset.$$

Si $T \in {}^*\mathcal{P}(X)$, entonces $T \in V(S') \setminus S'$ y $T \cap V(S') = T$. Obtenemos que para cada $T \in {}^*\mathcal{P}(X)$ se cumple $T \subseteq {}^*X$. □

Definición 2.10. Sea (X, τ_X) espacio topológico, $X \in V(S) \setminus S$. Para cada $x \in X$ definimos

$$\mu_{(X,\tau_X)}(x) := \bigcap \{{}^*U : x \in U \in \tau_X\}$$

(la **mónada** de x con respecto a la topología τ_X). De forma breve vamos a escribir $\mu_X(x)$ para $\mu_{(X,\tau_X)}(x)$. Notemos que si $x \in U \in \tau_X$, entonces $U \subseteq X$ y por eso ${}^*x \in {}^*U \subseteq {}^*X$; se deduce que para cada $x \in X$

$$^*x \in \mu_X(x) \subseteq {}^*X.$$

Proposición 2.11. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico tal que $X \in V(S) \setminus S$. Supongamos que $\kappa > |\tau_X|$. Entonces $U \subseteq X$ es abierto en (X, τ_X) si y sólo si para cada $x \in U$ tenemos $\mu_X(x) \subseteq {}^*U$.*

Demostración. ($\Rightarrow$): Obvio.

($\Leftarrow$): Supongamos que nó; existe $x \in U$ tal que para cada V, $x \in V \in \tau_X$, tenemos $V \setminus U \neq \emptyset$. Notemos que

$$\{{}^*V \setminus {}^*U : x \in V \in \tau_X\}$$

es una familia centrada; como

$$^*V \setminus {}^*U = {}^*(V \setminus U) \in {}^*\mathscr{P}(X)$$

y $|\tau_X| < \kappa$, existe

$$\zeta \in \bigcap \{{}^*V \setminus {}^*U : x \in V \in \tau_X\}.$$

Tenemos

$$\zeta \in \mu_X(x) \subseteq {}^*U,$$

la contradicción buscada. □

Proposición 2.12. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) los espacios topológicos tales que $X, Y \in V(S) \setminus S$ y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces para todo $x \in X$ tenemos*

$$^*f[\mu_X(x)] \subseteq \mu_Y(f(x)).$$

Demostración. Sea $V \in \tau_Y$ y $f(x) \in V$. Tenemos que $x \in f^{-1}[V] \in \tau_X$ y por la proposición 2.8

$$\mu_X(x) \subseteq {}^*(f^{-1}[V]) = ({}^*f)^{-1}[{}^*V];$$

se deduce que

$$^*f[\mu_X(x)] \subseteq {}^*V.$$

La demostración está completa. □

Proposición 2.13. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico, $X \in V(S) \setminus S$, $Y \subseteq X$ y τ_Y la topología en Y inducida por la topología τ_X. Entonces para cada $y \in Y$ tenemos*

$$\mu_Y(y) = \mu_X(y) \cap {}^*Y.$$

Demostración. Para cada $y \in Y$ tenemos

$$\mu_Y(y) = \bigcap \{{}^*(U \cap Y) : \, y \in U \in \tau_X\} = \mu_X(y) \cap {}^*Y.$$

La demostración está completa. □

Proposición 2.14. *Sean (X_k, τ_k) $(1 \leq k \leq m)$, los espacios topológicos tales que para todo $k \leq m$ $X_k \in V(S) \setminus S$. Consideremos en $X_1 \times \cdots \times X_m$ la topología producto $\tau_{X_1 \times \cdots \times X_m}$. Entonces para cada*

$$(x_1, \ldots, x_m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$$

tenemos

$$\mu_{X_1 \times \cdots \times X_m}(x_1, \ldots, x_m) = \mu_{X_1}(x_1) \times \cdots \times \mu_{X_m}(x_m).$$

Demostración. Como para todo $k \leq m$ $X_k \in V(S) \setminus S$, obtenemos

$$X_1 \times \cdots \times X_m \in V(S) \setminus S.$$

Además, por la proposición 2.8

$$^*(X_1 \times \cdots \times X_m) = {}^*X_1 \times \cdots \times {}^*X_m.$$

Consideremos

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mu_{X_1 \times \cdots \times X_m}(x_1, \ldots, x_m).$$

Fijamos $k \leq m$ y $U \in \tau_k$ tal que $x_k \in U$. Para cada $i \leq m$ definimos $V_i \in \tau_i$ en la manera siguiente: si $i \neq k$, definimos $V_i = X_i$ y sea $V_k = U$. Tenemos

$$(x_1, \ldots, x_m) \in V_1 \times \cdots \times V_m \in \tau_{X_1 \times \cdots \times X_m}$$

y por eso

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in {}^*(V_1 \times \cdots \times V_m) = {}^*V_1 \times \cdots \times {}^*V_m.$$

Se deduce que $\xi_k \in {}^*U$. Por eso $\xi_k \in \mu_k(x_k)$.

Ahora consideremos

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mu_{X_1}(x_1) \times \cdots \times \mu_{X_m}(x_m).$$

Sea

$$(x_1, \ldots, x_m) \in O \in \tau_{X_1 \times \cdots \times X_m}.$$

Para cada $k \leq m$ existe $U_k \in \tau_k$ tal que

$$(x_1, \ldots, x_m) \in U_1 \times \cdots \times U_m \subseteq O.$$

Para cada $k \leq m$

$$\xi_k \in \mu_{X_k}(x_k) \subseteq {}^*U_k$$

y por eso

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in {}^*U_1 \times \cdots \times {}^*U_m = {}^*(U_1 \times \cdots \times U_m) \subseteq {}^*O.$$

Se deduce que

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mu_{X_1 \times \cdots \times X_m}(x_1, \ldots, x_m).$$

La demostración está completa. $\square$

Proposición 2.15. *Sea (X_i, τ_i) $(i \in I)$ una familia de los espacios topológicos y sea $(\mathscr{X}, \tau_{\mathscr{X}})$ el producto cartesiano,*

$$\mathscr{X} = \prod_{i \in I} X_i.$$

Supongamos que existe $n \geq 0$ *tal que*

$$I \cup \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq V_n(S).$$

Entonces $\mathscr{X} \in V(S) \setminus S$ *y para cada* $p \in \mathscr{X}$ *tenemos*

$$\mu_{\mathscr{X}}(p) = \{\xi \in {}^*\mathscr{X} : \forall i \in I \ {}^*\mathrm{pr}_{X_i}(\xi) \in \mu_{X_i}(p(i))\}.$$

Demostración. Tenemos

$$\mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}(V_n(S) \times V_n(S))$$

y como $V_n(S) \in V(S) \setminus S$, tenemos $\mathscr{X} \in V(S) \setminus S$.

Si $I = \emptyset$, tenemos $\mathscr{X} = \{\emptyset\}$ y la afirmación es obvia. Supongamos que $I \neq \emptyset$. Fijamos $p \in \mathscr{X}$. Si $\xi \in \mu_{\mathscr{X}}(p)$, entonces por la proposición 2.12 para cada $i \in I$ tenemos

$${}^*\mathrm{pr}_{X_i}(\xi) \in \mu_{X_i}(\mathrm{pr}_{X_i}(p)) = \mu_{X_i}(p(i)).$$

Ahora supongamos que $\xi \in {}^*\mathscr{X}$ es tal que $\forall i \in I$

$${}^*\mathrm{pr}_{X_i}(\xi) \in \mu_{X_i}(p(i)).$$

Sea O una vecindad abierta de p. Existe $J \subseteq I$ finito y no vacío y una familia

$$V_j \in \tau_j \quad (j \in J)$$

tal que

$$p \in \bigcap_{j \in J} \mathrm{pr}_{X_j}^{-1}[V_j] \subseteq O.$$

Para cada $j \in J$ tenemos

$$p(j) \in V_j \in \tau_j$$

y por eso

$${}^*\mathrm{pr}_{X_j}(\xi) \in \mu_{X_j}(p(j)) \subseteq {}^*V_j;$$

se deduce que

$$\xi \in ({}^*\mathrm{pr}_{X_j})^{-1}[{}^*V_j] = {}^*(\mathrm{pr}_{X_j}^{-1}[V_j]).$$

Como J es finito, tenemos

$$\xi \in \bigcap_{j \in J} {}^*(\mathrm{pr}_{X_j}^{-1}[V_j]) = {}^*\bigcap_{j \in J} \mathrm{pr}_{X_j}^{-1}[V_j] \subseteq {}^*O.$$

Se deduce que $\xi \in \mu_{\mathscr{X}}(p)$. $\square$

Capítulo 3

Aplicaciones tri-cocientes

Fijamos un universo no-estándar $(V(S), V({}^*S), *)$ tal que ${}^*S = S$ y supongamos que $\mathbb{N} \subseteq S$ es una copia de los números enteros mayor o igual que cero tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ ${}^*n = n$ (véase el teorema 1.14). Notemos que $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$. Sea κ un cardinal no numerable tal que $(V(S), V({}^*S), *)$ es κ-saturado. Vamos a denotar con On la clase de todos ordinales.

Definición 3.1. (Seguimos en esta definición a [6].) Sea $R \subseteq \mathbb{N}^m$, donde $m \geq 1$. Para cada ordinal $\alpha \in On$ definimos

$$ {}^{\alpha *}R \subseteq S^m. $$

(Sobre la recursión transfinita, véase por ejemplo [8, teorema I.9.2, pág. 45].) Sea ${}^{0*}R = R \subseteq S^m$. Supongamos que $\alpha > 0$ y $\forall \beta < \alpha$ ${}^{\beta *}R \subseteq S^m$ está definido. Si $\alpha = \gamma + 1$, definimos usando las proposiciones 2.3 y 2.8

$$ {}^{\alpha *}R = {}^*({}^{\gamma *}R) \subseteq {}^*(S^m) = ({}^*S)^m = S^m. $$

Si α es ordinal límite, definimos

$$ {}^{\alpha *}R = \bigcup_{\beta < \alpha} {}^{\beta *}R \subseteq S^m. $$

Lema 3.2. *Para cada ordinal $\alpha \in On$ y para cada $R \subseteq \mathbb{N}^m$, $m \geq 1$, tenemos ${}^{\alpha *}R \subseteq ({}^{\alpha *}\mathbb{N})^m$ y para cada $\beta < \alpha$*

$$ {}^{\beta *}R = {}^{\alpha *}R \cap ({}^{\beta *}\mathbb{N})^m. $$

Demostración. Inducción sobre α.

Si $\alpha = 0$, las afirmaciones son obvias.

Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$. Por la hipotesis de inducción tenemos ${}^{\gamma *}R \subseteq ({}^{\gamma *}\mathbb{N})^m$ y por eso

$$ {}^{\alpha *}R = {}^{*}({}^{\gamma *}R) \subseteq {}^{*}(({}^{\gamma *}\mathbb{N})^m) = ({}^{\alpha *}\mathbb{N})^m. $$

Ahora consideremos $\beta < \alpha$.

Supongamos que $\beta = 0$. Por la hipotesis de inducción tenemos

$$ R = {}^{\gamma *}R \cap \mathbb{N}^m; $$

por eso

$$ {}^{*}R = {}^{*}({}^{\gamma *}R \cap \mathbb{N}^m) = {}^{\alpha *}R \cap ({}^{*}\mathbb{N})^m. $$

Para cada $(n_1, \ldots, n_m) \in R$ por la proposición 2.6

$$ (n_1, \ldots, n_m) = ({}^{*}n_1, \ldots, {}^{*}n_m) = {}^{*}(n_1, \ldots, n_m) \in {}^{*}R $$

y por eso $R \subseteq {}^{*}R \cap \mathbb{N}^m$. Además, si

$$ (n_1, \ldots, n_m) \in {}^{*}R \cap \mathbb{N}^m, $$

entonces ${}^{*}(n_1, \ldots, n_m) \in {}^{*}R$ y por eso $(n_1, \ldots, n_m) \in R$. Se deduce que $R = {}^{*}R \cap \mathbb{N}^m$. Obtenemos

$$ R = {}^{\alpha *}R \cap ({}^{*}\mathbb{N})^m \cap \mathbb{N}^m = {}^{\alpha *}R \cap \mathbb{N}^m. $$

Supongamos ahora que $\beta = \delta + 1$. Por la hipotesis de inducción tenemos

$$ {}^{\delta *}R = {}^{\gamma *}R \cap ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m $$

y por eso

$$ {}^{\beta *}R = {}^{*}({}^{\gamma *}R \cap ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m) = {}^{\alpha *}R \cap ({}^{\beta *}\mathbb{N})^m. $$

Supongamos ahora que β es ordinal límite. Para cada $\delta < \beta$ por la hipotesis de inducción

$$ {}^{\delta *}R = {}^{\gamma *}R \cap ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m; $$

se deduce que

$$ {}^{(\delta+1) *}R = {}^{*}({}^{\gamma *}R \cap ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m) = {}^{\alpha *}R \cap ({}^{(\delta+1) *}\mathbb{N})^m. $$

También por la hipotesis de inducción

$$^{\delta *}R = {}^{(\delta+1)*}R \cap ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m.$$

Además, si $\delta \leq \epsilon < \beta$, entonces por la hipotesis de inducción (con $R = \mathbb{N}$) tenemos $^{\delta *}\mathbb{N} \subseteq {}^{\epsilon *}\mathbb{N}$; por eso

$$({}^{\beta *}\mathbb{N})^m = \bigcup_{\delta<\beta} ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m.$$

Se deduce que para todo $\delta < \beta$

$$^{\delta *}R = {}^{\alpha *}R \cap ({}^{(\delta+1)*}\mathbb{N})^m \cap ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m = {}^{\alpha *}R \cap ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m$$

y

$$^{\beta *}R = \bigcup_{\delta<\beta} {}^{\delta *}R = {}^{\alpha *}R \cap \bigcup_{\delta<\beta} ({}^{\delta *}\mathbb{N})^m = {}^{\alpha *}R \cap ({}^{\beta *}\mathbb{N})^m.$$

Ahora supongamos que α es límite. Por la hipotesis de inducción para cada $\beta < \alpha$ tenemos $^{\beta *}R \subseteq ({}^{\beta *}\mathbb{N})^m$ y por eso

$$^{\alpha *}R = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\beta *}R \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} ({}^{\beta *}\mathbb{N})^m \subseteq ({}^{\alpha *}\mathbb{N})^m.$$

Fijamos $\beta < \alpha$. Como α es ordinal límite, tenemos

$$^{\beta *}R \subseteq {}^{\alpha *}R \cap ({}^{\beta *}\mathbb{N})^m.$$

Ahora consideremos

$$(N_1, \ldots, N_m) \in {}^{\alpha *}R \cap ({}^{\beta *}\mathbb{N})^m.$$

Existe $\gamma < \alpha$ tal que

$$(N_1, \ldots, N_m) \in {}^{\gamma *}R.$$

Tenemos

$$(N_1, \ldots, N_m) \in {}^{\delta *}R,$$

donde $\delta = \max(\beta, \gamma) < \alpha$, y por eso

$$(N_1, \ldots, N_m) \in {}^{\delta *}R \cap ({}^{\beta *}\mathbb{N})^m = {}^{\beta *}R.$$

La demostración está completa. □

Nota 3.3. Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in On}$ una familia de subconjuntos de un conjunto Y tal que para todo $\alpha, \beta \in On$, $\alpha < \beta$, tenemos $X_\alpha \subseteq X_\beta$. Entonces existe $\xi \in On$ tal que $X_\alpha = X_\xi$ para todo $\alpha \geq \xi$.

Demostración. Consideremos

$$Z = \bigcup_{\alpha\in On} X_\alpha.$$

Como Z es una subclase de Y, Z es un conjunto. Definimos

$$F = \{(z, \alpha) : z \in Z,\ \alpha \in On,\ z \in X_\alpha \text{ y } \forall\beta < \alpha\ z \notin X_\beta\}$$

y notemos que F es una aplicación-clase con $\operatorname{dom}(F) = Z$. Por el axioma de reemplazo [8, pág. 10] $F[Z]$ es un conjunto; definimos

$$\xi = \bigcup\{F(z) : z \in Z\}.$$

Como $F(z) \in On$ para cada $z \in Z$, tenemos $\xi \in On$, véase [8, Exercise I.8.10, pág. 36]. Sea $\alpha \geq \xi$. Tenemos $X_\xi \subseteq X_\alpha$. Para cada $x \in X_\alpha$ tenemos $x \in Z$ y por eso $x \in X_{F(x)}$; pero $F(x) \subseteq \xi$ y por eso $F(x) \leq \xi$; se deduce que $x \in X_\xi$. Así obtenemos $X_\alpha = X_\xi$. □

Definición 3.4. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^m$, donde $m \geq 1$. Definimos

$${}^{\infty*}R = \bigcup_{\alpha\in On} {}^{\alpha*}R.$$

Por el lema 3.2 y la nota 3.3, existe un ordinal ξ tal que $\forall\alpha \geq \xi$

$${}^{\alpha*}\mathbb{N} = {}^{\xi*}\mathbb{N}.$$

Se deduce que $\forall\alpha \geq \xi$

$${}^{\alpha*}\mathbb{N} = {}^{\infty*}\mathbb{N} = {}^{*}({}^{\infty*}\mathbb{N}).$$

Además, por el lema 3.2 si $R \subseteq \mathbb{N}^m$, $m \geq 1$, entonces $\forall\alpha \geq \xi$

$${}^{\alpha*}R = {}^{\infty*}R = {}^{*}({}^{\infty*}R).$$

Definición 3.5. Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Se dice que $A \subseteq X$ es un **segmento inicial** en $(X, \leq)$ si para todo $a \in A$ y para todo $x \in X$ si $x \leq a$, entonces $x \in A$.

Se dice que $y \in X$ es **sucesor** de $x \in X$ en $(X, \leq)$ si $x < y$ y para todo $z \in X$ tal que $x < z$ tenemos $y \leq z$.

Proposición 3.6. *Sea $\leq$ el orden total canónico en $\mathbb{N}$ y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma(n) = n+1$. Para cada $\alpha \in On$ tenemos*

(1) ${}^{\alpha *}\!\leq$ *es un orden total en* ${}^{\alpha *}\mathbb{N}$*;*

(2) ${}^{\alpha *}\sigma : {}^{\alpha *}\mathbb{N} \to {}^{\alpha *}\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *es una biyección tal que* ${}^{\alpha *}\sigma(N)$ *es sucesor de* N *en* $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\!\leq)$ *para cada* $N \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$*;*

(3) $\forall \beta < \alpha$ ${}^{\beta *}\mathbb{N}$ *es un segmento inicial en* $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\!\leq)$*.*

Demostración. Inducción sobre α.

Si $\alpha = 0$, todas las afirmaciones son obvias.

Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$.

(1) Por la hipotesis de inducción tenemos que ${}^{\gamma *}\!\leq$ es un orden total en ${}^{\gamma *}\mathbb{N}$; por el principio de transferencia ${}^{\alpha *}\!\leq\; = {}^{*}({}^{\gamma *}\!\leq)$ es un orden total en ${}^{\alpha *}\mathbb{N} = {}^{*}({}^{\gamma *}\mathbb{N})$.

(2) Tenemos que

$${}^{\gamma *}\sigma : {}^{\gamma *}\mathbb{N} \to {}^{\gamma *}\mathbb{N} \setminus \{0\}$$

es una biyección y por las proposiciones 2.3, 2.4, 2.8

$${}^{\alpha *}\sigma = {}^{*}({}^{\gamma *}\sigma) : {}^{\alpha *}\mathbb{N} = {}^{*}({}^{\gamma *}\mathbb{N}) \to {}^{*}({}^{\gamma *}\mathbb{N} \setminus \{0\}) = {}^{\alpha *}\mathbb{N} \setminus \{0\}$$

es una biyección. Aplicando el principio de transferencia a

$$(\forall N \in {}^{\gamma *}\mathbb{N})(\forall M \in {}^{\gamma *}\mathbb{N})((N, M) \in {}^{\gamma *}\sigma \to [(N, M) \in {}^{\gamma *}\!\leq \wedge\, N \neq M \wedge$$
$$(\forall K \in {}^{\gamma *}\mathbb{N})(((N, K) \in {}^{\gamma *}\!\leq \wedge\, N \neq K) \to (M, K) \in {}^{\gamma *}\!\leq)]),$$

obtenemos que ${}^{\alpha *}\sigma(N)$ es sucesor de N en $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\!\leq)$ para cada $N \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$.

(3) Consideremos $\beta < \alpha$.

Supongamos que $\beta = 0$. Por la hipotesis de inducción $\mathbb{N} = {}^{0 *}\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\gamma *}\mathbb{N}, {}^{\gamma *}\!\leq)$. Aplicando el principio de transferencia a

$$(\forall N \in {}^{\gamma *}\mathbb{N})(\forall M \in \mathbb{N})((N, M) \in {}^{\gamma *}\!\leq\, \to N \in \mathbb{N}),$$

obtenemos que ${}^{*}\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\!\leq)$. Además, por el lema 3.2

$${}^{*}\!\leq\; = {}^{\alpha *}\!\leq \cap\, ({}^{*}\mathbb{N})^2.$$

Aplicando el principio de transferencia a

$$(\forall N \in \mathbb{N})((N, n) \in\, \leq\, \to\; N = 0 \vee \ldots \vee N = n),$$

donde $n \in \mathbb{N}$ número fijo, obtenemos que $\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^*\mathbb{N}, {}^*\leq)$. Se deduce que $\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\leq)$.

Supongamos ahora que $\beta = \delta + 1$. Como $\delta < \beta \leq \gamma$, por la hipotesis de inducción ${}^{\delta *}\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\gamma *}\mathbb{N}, {}^{\gamma *}\leq)$. Por el principio de transferencia ${}^{\beta *}\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\leq)$.

Supongamos ahora que β es ordinal límite. Para cada $\delta < \beta$ tenemos que ${}^{\delta *}\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\gamma *}\mathbb{N}, {}^{\gamma *}\leq)$ y por el principio de transferencia ${}^{(\delta+1)*}\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\leq)$. Se deduce que

$$ {}^{\beta *}\mathbb{N} = \bigcup_{\delta < \beta} {}^{\delta *}\mathbb{N} = \bigcup_{\delta < \beta} {}^{(\delta+1)*}\mathbb{N} $$

es un segmento inicial en $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\leq)$.

Ahora supongamos que α es ordinal límite.

(1) Vamos a mostrar que ${}^{\alpha *}\leq \ \subseteq ({}^{\alpha *}\mathbb{N})^2$ es una relación reflexiva. Sea $N \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$; existe $\beta < \alpha$ tal que $N \in {}^{\beta *}\mathbb{N}$ y por eso $(N, N) \in {}^{\beta *}\leq \ \subseteq {}^{\alpha *}\leq$.

Mostraremos ahora ${}^{\alpha *}\leq$ es una relación antisimétrica. Sean $N, M \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$ tales que $(N, M), (M, N) \in {}^{\alpha *}\leq$. Existen $\beta < \alpha$ y $\gamma < \alpha$ tales que $(N, M) \in {}^{\beta *}\leq$ y $(M, N) \in {}^{\gamma *}\leq$. Sea $\delta = \max(\beta, \gamma) < \alpha$; por el lema 3.2 y la hipotesis de inducción

$$ {}^{\beta *}\leq \cup {}^{\gamma *}\leq \ \subseteq {}^{\delta *}\leq $$

y ${}^{\delta *}\leq$ es un orden total en ${}^{\delta *}\mathbb{N}$; se deduce que $N = M$.

Vamos a mostrar que ${}^{\alpha *}\leq$ es transitiva. Sean $N, M, K \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$ tales que $(N, M), (M, K) \in {}^{\alpha *}\leq$. Existe $\beta < \alpha$ tal que $(N, M), (M, K) \in {}^{\beta *}\leq$ y como ${}^{\beta *}\leq$ es transitivo, tenemos $(N, K) \in {}^{\beta *}\leq \ \subseteq {}^{\alpha *}\leq$.

Mostraremos ahora que ${}^{\alpha *}\leq$ es un orden total en ${}^{\alpha *}\mathbb{N}$. Sean $N, M \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$. Existen $\beta < \alpha$ y $\gamma < \alpha$ tales que $N \in {}^{\beta *}\mathbb{N}$ y $M \in {}^{\gamma *}\mathbb{N}$; tenemos

$$ {}^{\beta *}\mathbb{N} \cup {}^{\gamma *}\mathbb{N} \subseteq {}^{\delta *}\mathbb{N}, $$

donde $\delta = \max(\beta, \gamma) < \alpha$, y ${}^{\delta *}\leq$ es un orden total en ${}^{\delta *}\mathbb{N}$; se deduce que $(N, M) \in {}^{\delta *}\leq \subseteq {}^{\alpha *}\leq$ ó $(M, N) \in {}^{\delta *}\leq \subseteq {}^{\alpha *}\leq$.

(2) Tenemos

$$ \operatorname{dom}({}^{\alpha *}\sigma) = \bigcup_{\beta < \alpha} \operatorname{dom}({}^{\beta *}\sigma) = \bigcup_{\beta < \alpha} {}^{\beta *}\mathbb{N} = {}^{\alpha *}\mathbb{N} $$

y

$$ \operatorname{ran}({}^{\alpha *}\sigma) = \bigcup_{\beta < \alpha} \operatorname{ran}({}^{\beta *}\sigma) = \bigcup_{\beta < \alpha} ({}^{\beta *}\mathbb{N} \setminus \{0\}) = {}^{\alpha *}\mathbb{N} \setminus \{0\}. $$

Sea $N \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$. Existe $\beta < \alpha$ tal que $N \in {}^{\beta *}\mathbb{N}$; tenemos

$$(N, {}^{\beta *}\sigma(N)) \in {}^{\beta *}\sigma \subseteq {}^{\alpha *}\sigma.$$

Ahora supongamos que $M \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$ y $(N, M) \in {}^{\alpha *}\sigma$. Existe $\gamma < \alpha$ tal que $(N, M) \in {}^{\gamma *}\sigma$. Por el lema 3.2 y la hipotesis de inducción

$${}^{\beta *}\sigma \cup {}^{\gamma *}\sigma \subseteq {}^{\delta *}\sigma$$

y

$${}^{\delta *}\sigma : {}^{\delta *}\mathbb{N} \to {}^{\delta *}\mathbb{N} \setminus \{0\},$$

donde $\delta = \max(\beta, \gamma) < \alpha$. Como

$$(N, {}^{\beta *}\sigma(N)) \in {}^{\delta *}\sigma,$$

$$(N, M) \in {}^{\delta *}\sigma,$$

tenemos $M = {}^{\beta *}\sigma(N)$. Se deduce que

$${}^{\alpha *}\sigma : {}^{\alpha *}\mathbb{N} \to {}^{\alpha *}\mathbb{N} \setminus \{0\}$$

es una aplicación sobreyectiva.

Ahora fijamos $N \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$; existe $\beta < \alpha$ tal que $N \in {}^{\beta *}\mathbb{N}$. Tenemos por la hipotesis de inducción

$$(N, {}^{\beta *}\sigma(N)) \in {}^{\beta *}\sigma \cap {}^{\beta *}\leq \subseteq {}^{\alpha *}\sigma \cap {}^{\alpha *}\leq$$

y $N \neq {}^{\beta *}\sigma(N)$; se deduce que

$${}^{\alpha *}\sigma(N) = {}^{\beta *}\sigma(N), \quad (N, {}^{\alpha *}\sigma(N)) \in {}^{\alpha *}\leq, \quad N \neq {}^{\alpha *}\sigma(N).$$

Supongamos que $M \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$ es tal que

$$(N, M) \in {}^{\alpha *}\leq, \; N \neq M.$$

Existe $\gamma < \alpha$ tal que $(N, M) \in {}^{\gamma *}\leq$. Tenemos $(N, M) \in {}^{\delta *}\leq$, donde $\delta = \max(\beta, \gamma) < \alpha$ y como $N \neq M$, tenemos por la hipotesis de inducción

$$({}^{\delta *}\sigma(N), M) \in {}^{\delta *}\leq \; \subseteq {}^{\alpha *}\leq.$$

Pero como ${}^{\beta *}\sigma \subseteq {}^{\delta *}\sigma$, tenemos

$${}^{\alpha *}\sigma(N) = {}^{\beta *}\sigma(N) = {}^{\delta *}\sigma(N)$$

y por eso
$$({}^{\alpha *}\sigma(N), M) \in {}^{\alpha *}\leq.$$
Se deduce que ${}^{\alpha *}\sigma(N)$ es sucesor de N en $({}^{\alpha *}\mathbb{N}, {}^{\alpha *}\leq)$.

(3) Consideremos $\beta < \alpha$. Sean $N \in {}^{\beta *}\mathbb{N}$ y $M \in {}^{\alpha *}\mathbb{N}$ tales que $(M, N) \in {}^{\alpha *}\leq$. Existe $\gamma < \alpha$ tal que $(M, N) \in {}^{\gamma *}\leq$. Sea $\delta = \max(\gamma, \beta)$. Tenemos $(M, N) \in {}^{\delta *}\leq$. Como $\beta \leq \delta < \alpha$, por la hipotesis de inducción ${}^{\beta *}\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\delta *}\mathbb{N}, {}^{\delta *}\leq)$ y por eso $M \in {}^{\beta *}\mathbb{N}$. La demostración está completa. $\square$

Definición 3.7. Para cada $N \in {}^{\infty *}\mathbb{N}$ definimos
$$[0, N] = \{M \in {}^{\infty *}\mathbb{N} : (M, N) \in {}^{\infty *}\leq\}.$$

Lema 3.8. *Para cada $N \in {}^{\infty *}\mathbb{N}$ tenemos*
$${}^{\infty *}\sigma[[0, N]] = [0, {}^{\infty *}\sigma(N)] \setminus \{0\}$$

Demostración. Notemos que por la proposición 3.6 $\mathbb{N}$ es un segmento inicial en $({}^{\infty *}\mathbb{N}, {}^{\infty *}\leq)$ y ${}^{\infty *}\leq \cap \mathbb{N}^2 = \leq$. Se deduce que 0 es el primer elemento en $({}^{\infty *}\mathbb{N}, {}^{\infty *}\leq)$.

Para cada $M \in [0, N]$ tenemos, usando la proposición 3.6,
$$({}^{\infty *}\sigma(M), {}^{\infty *}\sigma(N)) \in {}^{\infty *}\leq.$$
Además, ${}^{\infty *}\sigma(M) \neq 0$.

Ahora consideremos
$$M \in [0, {}^{\infty *}\sigma(N)] \setminus \{0\}.$$
Como ${}^{\infty *}\sigma : {}^{\infty *}\mathbb{N} \to {}^{\infty *}\mathbb{N} \setminus \{0\}$ es una biyección, existe $K \in {}^{\infty *}\mathbb{N}$ tal que ${}^{\infty *}\sigma(K) = M$. Vamos a mostrar que $K \in [0, N]$. Supongamos que no; tenemos $({}^{\infty *}\sigma(N), K) \in {}^{\infty *}\leq$ y por eso ${}^{\infty *}\sigma(K) = M \notin [0, {}^{\infty *}\sigma(N)]$, la contradicción. $\square$

Definición 3.9. Sean X y Y conjuntos; definimos
$$\mathrm{PFunc}(X, Y) = \{\varphi : \varphi : X \supseteq \mathrm{dom}(\varphi) \to Y\},$$
la familia de todas las funciónes parciales entre X y Y.

Para cada $n \geq 0$ definimos

$$\Lambda_n = \{\varphi \in \mathrm{PFunc}({}^{\infty *}\mathbb{N}, V_n(S)) : \exists N \in {}^{\infty *}\mathbb{N} \text{ tal que } \mathrm{dom}(\varphi) = [0, N]\},$$

$$l_n : \Lambda_n \to {}^{\infty *}\mathbb{N}, \quad l_n(\varphi) = \max(\mathrm{dom}(\varphi)).$$

(Tomamos el máximo en $({}^{\infty *}\mathbb{N}, {}^{\infty *}\leq)$.) Sea

$$\Lambda = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n, \quad l = \bigcup_{n=0}^{\infty} l_n;$$

notemos que $l : \Lambda \to {}^{\infty *}\mathbb{N}$ y para todo $n \geq 0$ $l|\Lambda_n = l_n$.

Lema 3.10. *Si $X, Y \in V(S) \setminus S$, entonces* ${}^*\mathrm{PFunc}(X, Y) \subseteq \mathrm{PFunc}({}^*X, {}^*Y)$.

Demostración. Notemos que como $\mathrm{PFunc}(X, Y) \subseteq \mathscr{P}(X \times Y)$, por las proposiciones 2.3 y 2.9

$${}^*\mathrm{PFunc}(X, Y) \subseteq {}^*\mathscr{P}(X \times Y) \subseteq \mathscr{P}({}^*X \times {}^*Y).$$

Se deduce que para cada $\varphi \in {}^*\mathrm{PFunc}(X, Y)$ tenemos $\varphi \subseteq {}^*X \times {}^*Y$. Ahora aplicamos el principio de transferencia a

$$(\forall \varphi \in \mathrm{PFunc}(X, Y))(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\forall y' \in Y)$$
$$(((x, y) \in \varphi \wedge (x, y') \in \varphi) \to y = y').$$

Se deduce que cada $\varphi \in {}^*\mathrm{PFunc}(X, Y)$ es una función parcial entre ${}^*X$ y ${}^*Y$. □

Lema 3.11. *Para cada $n \geq 0$ tenemos* ${}^*V_n(S) \subseteq V_n(S)$.

Demostración. Inducción sobre $n \geq 0$. Tenemos

$${}^*V_0(S) = {}^*S = S = V_0(S).$$

Si $n \geq 1$, usando la hipotesis de inducción obtenemos

$${}^*V_n(S) = {}^*(V_{n-1}(S) \cup \mathscr{P}(V_{n-1}(S))) \subseteq {}^*V_{n-1}(S) \cup \mathscr{P}({}^*V_{n-1}(S)) \subseteq$$

$$\subseteq V_{n-1}(S) \cup \mathscr{P}(V_{n-1}(S)) = V_n(S).$$

La demostración está completa. □

Proposición 3.12. *Para cada $n \geq 0$ tenemos ${}^*\Lambda_n \subseteq \Lambda_n$ y ${}^*l_n = l_n|{}^*\Lambda_n$.*

Demostración. Notemos que como ${}^{\infty *}\mathbb{N} \in V(S) \setminus S$ y $V_n(S) \in V(S) \setminus S$,

$$\mathrm{PFunc}({}^{\infty *}\mathbb{N}, V_n(S)) \in V(S) \setminus S$$

y por eso $\Lambda_n \in V(S) \setminus S$. Por los lemas 3.10 y 3.11 tenemos

$$\begin{aligned} {}^*\Lambda_n &\subseteq {}^*\mathrm{PFunc}({}^{\infty *}\mathbb{N}, V_n(S)) \subseteq \\ &\subseteq \mathrm{PFunc}({}^*({}^{\infty *}\mathbb{N}), {}^*V_n(S)) \subseteq \mathrm{PFunc}({}^{\infty *}\mathbb{N}, V_n(S)). \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el principio de transferencia a

$$\begin{aligned} &(\forall \varphi \in \Lambda_n)(\exists N \in {}^{\infty *}\mathbb{N})(\forall M \in {}^{\infty *}\mathbb{N})((M, N) \in {}^{\infty *}\!\leq\, \leftrightarrow \\ &\qquad\qquad (\exists x \in V_n(S))(M, x) \in \varphi). \end{aligned}$$

Como ${}^*({}^{\infty *}\mathbb{N}) = {}^{\infty *}\mathbb{N}$ y ${}^*({}^{\infty *}\!\leq) = {}^{\infty *}\!\leq$, obtenemos que ${}^*\Lambda_n \subseteq \Lambda_n$.

Como $l_n : \Lambda_n \to {}^{\infty *}\mathbb{N}$, tenemos

$${}^*l_n : {}^*\Lambda_n \to {}^*({}^{\infty *}\mathbb{N}) = {}^{\infty *}\mathbb{N}.$$

Aplicamos el principio de transferencia a

$$\begin{aligned} &(\forall \varphi \in \Lambda_n)(\forall N \in {}^{\infty *}\mathbb{N})((\varphi, N) \in l_n \to [((\exists x \in V_n(S))(N, x) \in \varphi) \wedge \\ &\qquad (\forall M \in {}^{\infty *}\mathbb{N})(\forall y \in V_n(S))((M, y) \in \varphi \to (M, N) \in {}^{\infty *}\!\leq)]) \end{aligned}$$

y obtenemos que para todo $\varphi \in {}^*\Lambda_n$

$${}^*l_n(\varphi) = \max(\mathrm{dom}(\varphi)) = l_n(\varphi).$$

La demostración está completa. $\square$

Definición 3.13. Para cada $\varphi \in \Lambda$ y para cada $x \in V(S)$ definimos

$$x^\frown\varphi = \{(0, x)\} \cup (\varphi \circ ({}^{\infty *}\sigma)^{-1}).$$

Lema 3.14. *Sea $n \geq 0$. Si $x \in V_n(S)$ y $\varphi \in \Lambda_n$, entonces $x^\frown\varphi \in \Lambda_n$ y $l_n(x^\frown\varphi) = {}^{\infty *}\sigma(l_n(\varphi))$. Si $x, y \in V_n(S)$, $\varphi, \chi \in \Lambda_n$ y $x^\frown\varphi = y^\frown\chi$, entonces $x = y$ y $\varphi = \chi$.*

Demostración. Tenemos $\mathrm{dom}(\varphi) = [0, l_n(\varphi)]$ y por el lema 3.8

$$\mathrm{dom}(\varphi \circ ({}^{\infty *}\sigma)^{-1}) = {}^{\infty *}\sigma[\mathrm{dom}(\varphi)] = [0, {}^{\infty *}\sigma(l_n(\varphi))] \setminus \{0\}.$$

Se deduce que $x^\frown\varphi \in \Lambda_n$ y $l_n(x^\frown\varphi) = {}^{\infty *}\sigma(l_n(\varphi))$. La segunda afirmación es obvia. $\square$

Definición 3.15. Sea (X, τ_X) un espacio topológico tal que $X \subseteq V_n(S)^m$ ($n \geq 0$ y $m \geq 1$). Definimos para cada ordinal α

$$\Sigma_m^{(\alpha)}(X, \tau_X) \subseteq \Lambda_n^m.$$

Sea

$$\Sigma_m^{(0)}(X, \tau_X) = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) : \forall k \leq m \; \varphi_k : \{0\} \to V_n(S), \\ (\varphi_1(0), \ldots, \varphi_m(0)) \in X\} \subseteq \Lambda_n^m.$$

Supongamos que $\alpha > 0$ y para todo $\beta < \alpha$ $\Sigma_m^{(\beta)}(X, \tau_X) \subseteq \Lambda_n^m$ está definido. Por la proposición 3.12 para todo $\beta < \alpha$ tenemos

$${}^*\Sigma_m^{(\beta)}(X, \tau_X) \subseteq {}^*(\Lambda_n^m) = ({}^*\Lambda_n)^m \subseteq \Lambda_n^m.$$

Si $\alpha = \gamma + 1$, definimos (usando la definición 2.10 y el lema 3.14)

$$\Sigma_m^{(\alpha)}(X, \tau_X) = \Sigma_m^{(0)}(X, \tau_X) \cup \{(x_1^\frown\chi_1, \ldots, x_m^\frown\chi_m) : (x_1, \ldots, x_m) \in X,$$

$$(\chi_1, \ldots, \chi_m) \in {}^*\Sigma_m^{(\gamma)}(X, \tau_X), \; (\chi_1(0), \ldots, \chi_m(0)) \in \mu_X(x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq \Lambda_n^m.$$

Si α es ordinal límite, definimos

$$\Sigma_m^{(\alpha)}(X, \tau_X) = \bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_m^{(\beta)}(X, \tau_X) \subseteq \Lambda_n^m.$$

Notemos que el valor de n se utiliza solamente para verificar que la definición es correcta. De forma breve vamos a escribir $\Sigma_m^{(\alpha)}X$ para $\Sigma_m^{(\alpha)}(X, \tau_X)$ y $\Sigma^{(\alpha)}X$ para $\Sigma_1^{(\alpha)}(X, \tau_X)$.

Proposición 3.16. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico tal que $X \subseteq V_n(S)^m$, donde $n \geq 0$ y $m \geq 1$. Entonces para todo $\alpha, \beta \in On$, $\beta < \alpha$, tenemos*

$$\Sigma_m^{(\beta)}X \subseteq \Sigma_m^{(\alpha)}X.$$

Demostración. Inducción sobre α.

Si $\alpha = 0$, la afirmación es obvia.

Si α es ordinal límite, la afirmación tambien es obvia. Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$ y consideremos $\beta < \alpha$. Si $\beta = 0$, la afirmación es obvia.

Supongamos que $\beta = \delta + 1$. Por la hipotesis de inducción tenemos

$$\Sigma_m^{(\delta)} X \subseteq \Sigma_m^{(\gamma)} X$$

y por eso

$$^*\Sigma_m^{(\delta)} X \subseteq {}^*\Sigma_m^{(\gamma)} X;$$

se deduce que

$$\Sigma_m^{(\beta)} X \subseteq \Sigma_m^{(\alpha)} X.$$

Ahora supongamos que β es ordinal límite. Para cada $\delta < \beta$ tenemos

$$\delta < \delta + 1 < \beta \leq \gamma < \alpha$$

y por la hipotesis de inducción

$$\Sigma_m^{(\delta)} X \subseteq \Sigma_m^{(\gamma)} X;$$

por eso

$$^*\Sigma_m^{(\delta)} X \subseteq {}^*\Sigma_m^{(\gamma)} X;$$

se deduce que

$$\Sigma_m^{(\delta+1)} X \subseteq \Sigma_m^{(\alpha)} X.$$

También para cada $\delta < \beta$ por la hipotesis de inducción

$$\Sigma_m^{(\delta)} X \subseteq \Sigma_m^{(\delta+1)} X$$

y por eso

$$\Sigma_m^{(\beta)} X = \bigcup_{\delta<\beta} \Sigma_m^{(\delta)} X \subseteq \bigcup_{\delta<\beta} \Sigma_m^{(\delta+1)} X \subseteq \Sigma_m^{(\alpha)} X.$$

La demostración está completa. □

Proposición 3.17. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) los espacios topológicos, $X, Y \in V(S)\setminus S$, y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Consideremos en $f \subseteq X \times Y$ la topología inducida por la topología producto en $X \times Y$. Entonces para cada $\alpha \in On$*

$$\Sigma_2^{(\alpha)} f : \Sigma^{(\alpha)} X \to \Sigma^{(\alpha)} Y$$

y es tal que para cada $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)}X$

$$((\Sigma_2^{(\alpha)}f)(\varphi))(0) = f(\varphi(0)), \quad l((\Sigma_2^{(\alpha)}f)(\varphi)) = l(\varphi).$$

También para cada $\alpha \in On$ *y para cada* $\varphi \in \Sigma^{(0)}X$ *tenemos*

$$\varphi : \{0\} \to X, \quad \Sigma_2^{(\alpha)}f(\varphi) \in \Sigma^{(0)}Y, \quad \Sigma_2^{(\alpha)}f(\varphi) : \{0\} \to \{f(\varphi(0))\}.$$

Si $\alpha = \gamma + 1$, *entonces para cada* $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)}X \setminus \Sigma^{(0)}X$ *existe un único* $\hat{\varphi} \in {}^*\Sigma^{(\gamma)}X$ *tal que*

$$\varphi = \varphi(0)^\frown\hat{\varphi}, \quad (\Sigma_2^{(\alpha)}f)(\varphi) = f(\varphi(0))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f(\hat{\varphi}) \in \Sigma^{(\alpha)}Y \setminus \Sigma^{(0)}Y,$$

$$\hat{\varphi}(0) \in \mu_X(\phi(0)), \quad ({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f(\hat{\varphi}))(0) \in \mu_Y(f(\varphi(0))).$$

Demostración. Notemos que como $X, Y \in V(S) \setminus S$, existe $n \geq 0$ tal que $X \cup Y \subseteq V_n(S)$; se deduce que $f \subseteq V_n(S)^2$.

Inducción sobre α.

Tenemos

$$\Sigma_2^{(0)}f = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \forall k \leq 2 \ \ \varphi_k : \{0\} \to V_n(S), \ (\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \in f\} =$$
$$= \{(\varphi, f \circ \varphi) : \varphi : \{0\} \to X\}.$$

Por eso

$$\Sigma_2^{(0)}f : \Sigma^{(0)}X \to \Sigma^{(0)}Y$$

y para cada $\varphi \in \Sigma^{(0)}X$ tenemos

$$(\Sigma_2^{(0)}f)(\varphi) = f \circ \varphi : \{0\} \to \{f(\varphi(0))\},$$

$$l_n((\Sigma_2^{(0)}f)(\varphi)) = l_n(\varphi) = 0.$$

Supongamos ahora que $\alpha = \gamma + 1$. Por la hipotesis de inducción y el principio de transferencia tenemos

$${}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f : {}^*\Sigma^{(\gamma)}X \to {}^*\Sigma^{(\gamma)}Y$$

y para cada $\chi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)}X$

$$({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f(\chi))(0) = {}^*f(\chi(0)), \quad {}^*l_n({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f(\chi)) = {}^*l_n(\chi).$$

Como f es continua, usando las Proposiciones 2.12, 2.13 y 2.14, obtenemos que para todo $(x,y) \in f$

$$\mu_f(x,y) = \{(\xi,\eta) \in {}^*f : \xi \in \mu_X(x),\ \eta \in \mu_Y(y)\} = \\ = \{(\xi,\eta) : \xi \in \mu_X(x),\ \eta = {}^*f(\xi)\}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{(\alpha)} f &= \Sigma_2^{(0)} f \cup \{(x^\frown\chi, y^\frown\psi) : (x,y) \in f,\ (\chi,\psi) \in {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f, \\ &\qquad (\chi(0),\psi(0)) \in \mu_f(x,y)\} = \\ &= \Sigma_2^{(0)} f \cup \{(x^\frown\chi, y^\frown\psi) : x \in X,\ y = f(x),\ \chi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X,\ \psi = {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\chi), \\ &\qquad \chi(0) \in \mu_X(x),\ \psi(0) = {}^*f(\chi(0))\} = \\ &= \Sigma_2^{(0)} f \cup \{(x^\frown\chi, f(x)^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\chi)) : x \in X,\ \chi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X,\ \chi(0) \in \mu_X(x)\} \subseteq \\ &\subseteq \Sigma^{(\alpha)} X \times \Sigma^{(\alpha)} Y. \end{aligned}$$

Fijamos $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)} X$.

Supongamos que $\varphi \in \Sigma^{(0)} X$. Tenemos

$$(\varphi, f \circ \varphi) \in \Sigma_2^{(0)} f \subseteq \Sigma_2^{(\alpha)} f.$$

Consideremos $\psi \in \Sigma^{(\alpha)} Y$ tal que $(\varphi,\psi) \in \Sigma_2^{(\alpha)} f$. Notemos que para todo $x \in X$ y $\chi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X$ tenemos por el lema 3.14

$$l_n(x^\frown\chi) = {}^{\infty *}\sigma(l_n(\chi)) \neq 0 = l_n(\varphi)$$

y por eso $x^\frown\chi \neq \varphi$. Se deduce que $(\varphi,\psi) \in \Sigma_2^{(0)} f$ y por eso $\psi = f \circ \varphi$.

Ahora supongamos que $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)} X \setminus \Sigma^{(0)} X$. Usando el lema 3.14, obtenemos que existen los únicos $x \in X$ y $\hat{\varphi} \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X$ tales que $\varphi = x^\frown\hat{\varphi}$ y $\hat{\varphi}(0) \in \mu_X(x)$. Notemos que $x = \varphi(0)$. Tenemos

$$(\varphi, f(x)^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\hat{\varphi})) \in \Sigma_2^{(\alpha)} f.$$

Consideremos $\psi \in \Sigma^{(\alpha)} Y$ tal que $(\varphi,\psi) \in \Sigma_2^{(\alpha)} f$. Como $\varphi \notin \Sigma^{(0)} X$, tenemos $(\varphi,\psi) \notin \Sigma_2^{(0)} f$ y por eso

$$\psi = f(x)^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\hat{\varphi}).$$

Notemos que $\psi(0) = f(x) = f(\varphi(0))$. Como

$$\hat{\varphi} \in {}^*\Sigma^{(\gamma)}X \subseteq {}^*\Lambda_n, \quad {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f(\hat{\varphi}) \in {}^*\Sigma^{(\gamma)}Y \subseteq {}^*\Lambda_n,$$

usando la proposición 3.12 tenemos

$$l_n({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f(\hat{\varphi})) = {}^*l_n({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f(\hat{\varphi})) = {}^*l_n(\hat{\varphi}) = l_n(\hat{\varphi})$$

y por eso

$$l_n(\psi) = {}^{\infty *}\sigma(l_n({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f(\hat{\varphi}))) = {}^{\infty *}\sigma(l_n(\hat{\varphi})) = l_n(\varphi).$$

Ahora supongamos que α es ordinal límite. Tenemos

$$\Sigma_2^{(\alpha)}f = \bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_2^{(\beta)}f \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha}(\Sigma^{(\beta)}X \times \Sigma^{(\beta)}Y) \subseteq \Sigma^{(\alpha)}X \times \Sigma^{(\alpha)}Y.$$

Fijamos $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)}X$. Existe $\beta < \alpha$ tal que $\varphi \in \Sigma^{(\beta)}X$ y por eso

$$(\varphi, \Sigma_2^{(\beta)}f(\varphi)) \in \Sigma_2^{(\beta)}f \subseteq \Sigma_2^{(\alpha)}f.$$

Consideremos $\psi \in \Sigma^{(\alpha)}Y$ tal que $(\varphi, \psi) \in \Sigma_2^{(\alpha)}f$. Existe $\gamma < \alpha$ tal que $(\varphi, \psi) \in \Sigma_2^{(\gamma)}f$. Definimos $\delta = \max(\beta, \gamma) < \alpha$. Tenemos

$$(\varphi, \Sigma_2^{(\beta)}f(\varphi)), (\varphi, \psi) \in \Sigma_2^{(\beta)}f \cup \Sigma_2^{(\gamma)}f \subseteq \Sigma_2^{(\delta)}f$$

y como $\Sigma_2^{(\delta)}f$ es una aplicación, tenemos $\psi = \Sigma_2^{(\beta)}f(\varphi)$. Además, $\psi(0) = f(\varphi(0))$ y $l_n(\psi) = l_n(\varphi)$. □

Proposición 3.18. *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) espacios topológicos, $X, Y, Z \in V(S) \setminus S$, y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Entonces para cada $\alpha \in On$*

$$\Sigma_2^{(\alpha)}1_X = 1_{\Sigma^{(\alpha)}X}, \quad \Sigma_2^{(\alpha)}(g \circ f) = \Sigma_2^{(\alpha)}g \circ \Sigma_2^{(\alpha)}f.$$

Demostración. Inducción por α.

Para cada $\varphi \in \Sigma^{(0)}X$ tenemos

$$\varphi = \Sigma_2^{(0)}1_X(\varphi) : \{0\} \to \{\varphi(0)\}, \quad \Sigma_2^{(0)}f(\varphi) : \{0\} \to \{f(\phi(0))\},$$

$$(\Sigma_2^{(0)}(g \circ f))(\varphi) = \Sigma_2^{(0)}g(\Sigma_2^{(0)}f(\varphi)) : \{0\} \to \{g(f(\phi(0)))\}.$$

Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$. Fijamos $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)} X$. Si $\varphi \in \Sigma^{(0)} X$, entonces

$$\Sigma_2^{(\alpha)} 1_X(\varphi) = \Sigma_2^{(0)} 1_X(\varphi) = \varphi,$$

$$(\Sigma_2^{(\alpha)}(g \circ f))(\varphi) = (\Sigma_2^{(0)}(g \circ f))(\varphi) = \Sigma_2^{(0)} g(\Sigma_2^{(0)} f(\varphi)) = \Sigma_2^{(\alpha)} g(\Sigma_2^{(\alpha)} f(\varphi)).$$

Supongamos ahora que $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)} X \setminus \Sigma^{(0)} X$. Tenemos $\varphi = \varphi(0)^\frown \hat{\varphi}$, donde $\hat{\varphi} \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X$ y $\hat{\varphi}(0) \in \mu_X(\varphi(0))$. Por la hipotesis de inducción y el principio de transferencia tenemos

$${}^*\Sigma_2^{(\gamma)} 1_X(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}, \quad {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}(g \circ f)(\hat{\varphi}) = {}^*\Sigma_2^{(\alpha)} g({}^*\Sigma_2^{(\alpha)} f(\hat{\varphi})).$$

Tenemos

$$\Sigma_2^{(\alpha)} 1_X(\varphi) = 1_X(\varphi(0))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} 1_X(\hat{\varphi}) = \varphi(0)^\frown \hat{\varphi} = \varphi,$$

$$\Sigma_2^{(\alpha)} f(\varphi) = f(\varphi(0))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\hat{\varphi}) \in \Sigma^{(\alpha)} Y \setminus \Sigma^{(0)} Y.$$

Se deduce que

$$\Sigma_2^{(\alpha)} g(\Sigma_2^{(\alpha)} f(\varphi)) = g(f(\varphi(0)))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} g({}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\hat{\varphi})) =$$

$$= (g \circ f)(\varphi(0))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}(g \circ f)(\hat{\varphi}) = \Sigma_2^{(\alpha)}(g \circ f)(\varphi).$$

Ahora supongamos que α es ordinal límite. Fijamos $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)} X$. Existe $\beta < \alpha$ tal que $\varphi \in \Sigma^{(\beta)} X$. Se deduce que

$$\Sigma_2^{(\alpha)} 1_X(\varphi) = \Sigma_2^{(\beta)} 1_X(\varphi) = \varphi,$$

$$\Sigma_2^{(\alpha)}(g \circ f)(\varphi) = \Sigma_2^{(\beta)}(g \circ f)(\varphi) = \Sigma_2^{(\beta)} g(\Sigma_2^{(\beta)} f(\varphi)) = \Sigma_2^{(\alpha)} g(\Sigma_2^{(\alpha)} f(\varphi)).$$

La demostración está completa. $\square$

Corolario 3.19. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, $X, Y \in V(S) \setminus S$, y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces para cada $\alpha \in On$*

$$\Sigma_2^{(\alpha)} f : \Sigma^{(\alpha)} X \to \Sigma^{(\alpha)} Y$$

es una biyección.

Demostración. Tenemos

$$\Sigma_2^{(\alpha)}(f^{-1}) \circ \Sigma_2^{(\alpha)} f = 1_{\Sigma^{(\alpha)} X}, \quad \Sigma_2^{(\alpha)} f \circ \Sigma_2^{(\alpha)}(f^{-1}) = 1_{\Sigma^{(\alpha)} Y}.$$

Se deduce que $\Sigma_2^{(\alpha)}(f^{-1})$ es la aplicación inversa para $\Sigma_2^{(\alpha)} f$. $\square$

Proposición 3.20. *Sean* (X_k, τ_k), $1 \leq k \leq m$, *espacios topológicos tales que para todo* $k \leq m$ $X_k \in V(S) \setminus S$. *Para cada* $\alpha \in On$

$$\Delta^{(\alpha)} : \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \cdots \times X_m) \to \Sigma^{(\alpha)} X_1 \times \cdots \times \Sigma^{(\alpha)} X_m,$$

$$\Delta^{(\alpha)}(\varphi) = (\Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_1(\varphi), \ldots, \Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_m(\varphi)),$$

es una inyección con la imagen

$$\mathscr{I}^{(\alpha)} = \{(\psi_1, \ldots, \psi_m) \in \Sigma^{(\alpha)} X_1 \times \cdots \times \Sigma^{(\alpha)} X_m : l(\psi_1) = \ldots = l(\psi_m)\}.$$

Demostración. Para cada $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \ldots \times X_m)$ y para cada $k \leq m$ tenemos

$$l(\Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_k(\varphi)) = l(\varphi);$$

se deduce que

$$\Delta^{(\alpha)} : \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \cdots \times X_m) \to \mathscr{I}^{(\alpha)}.$$

Inducción sobre α. Si $\alpha = 0$, la afirmación es obvia.

Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$.

Vamos a mostrar que $\Delta^{(\alpha)}$ es inyectiva. Sean $\varphi, \chi \in \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \cdots \times X_m)$ tales que $\forall k \leq m$

$$\Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_k(\varphi) = \Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_k(\chi).$$

Tenemos

$$l(\varphi) = l(\Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_1(\varphi)) = l(\Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_1(\chi)) = l(\chi).$$

Si $l(\varphi) = l(\chi) = 0$, entonces $\varphi, \chi \in \Sigma^{(0)}(X_1 \times \cdots \times X_m)$; por eso $\Delta^{(0)}(\varphi) = \Delta^{(0)}(\chi)$ y $\varphi = \chi$. Supongamos que $l(\varphi) = l(\chi) \neq 0$. Tenemos

$$\varphi, \chi \in \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \cdots \times X_m) \setminus \Sigma^{(0)}(X_1 \times \cdots \times X_m).$$

y por eso $\forall k \leq m$

$$\Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_k(\varphi) = \mathrm{pr}_k(\varphi(0))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_k(\hat{\varphi}) = \mathrm{pr}_k(\chi(0))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_k(\hat{\chi}) = \Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_k(\varphi).$$

Se deduce que $\varphi(0) = \chi(0)$ y $\forall k \leq m$

$${}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_k(\hat{\varphi}) = {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_k(\hat{\chi}).$$

Usando el principio la transferencia, obtenemos

$$\begin{aligned} {}^*\Delta^{(\gamma)}(\hat{\varphi}) = ({}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_1(\hat{\varphi}), \ldots, {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_m(\hat{\varphi})) = \\ = ({}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_1(\hat{\chi}), \ldots, {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_m(\hat{\chi})) = {}^*\Delta^{(\gamma)}(\hat{\chi}). \end{aligned}$$

Por la hipotesis de inducción y el principio de transferencia ${}^*\Delta^{(\gamma)}$ es inyectiva; se deduce que $\hat{\varphi} = \hat{\chi}$ y por eso $\varphi = \chi$.

Ahora consideremos $(\psi_1, \dots, \psi_m) \in \mathscr{I}^{(\alpha)}$. Claro que si $l(\psi_1) = 0$, entonces $(\psi_1, \dots, \psi_m) = \Delta^{(\alpha)}(\varphi)$ para algún $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \cdots \times X_m)$. Supongamos que $l(\psi_1) \neq 0$. Para cada $k \leq m$ tenemos

$$\psi_k = \psi_k(0)^\frown \hat{\psi}_k, \quad \hat{\psi}_k \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X_k, \quad \hat{\psi}_k(0) \in \mu_{X_k}(\psi_k(0)).$$

Notemos que existe $n \geq 0$ tal que

$$X_1 \cup \cdots \cup X_m \subseteq V_n(S).$$

Por el principio de transferencia y la proposición 3.12 tenemos

$$\begin{aligned} {}^*\mathscr{I}^{(\gamma)} &= \{(\chi_1, \dots, \chi_m) \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X_1 \times \cdots \times {}^*\Sigma^{(\gamma)} X_m : {}^*l_n(\chi_1) = \ldots = {}^*l_n(\chi_m)\} \\ &= \{(\chi_1, \dots, \chi_m) \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X_1 \times \cdots \times {}^*\Sigma^{(\gamma)} X_m : l(\chi_1) = \ldots = l(\chi_m)\}. \end{aligned}$$

Por el lema 3.14 $\forall k \leq m$

$$l(\psi_1) = l(\psi_k) = {}^{\infty *}\sigma(l(\hat{\psi}_k))$$

y como la aplicación ${}^{\infty *}\sigma$ es inyectiva, $l(\hat{\psi}_k) = l(\hat{\psi}_1)$. Se deduce que

$$(\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_m) \in {}^*\mathscr{I}^{(\gamma)}.$$

Por la hipotesis de inducción y el principio de transferencia existe

$$\chi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)}(X_1 \times \cdots \times X_m)$$

tal que para todo $k \leq m$

$${}^*\Sigma_2^{(\gamma)} \mathrm{pr}_k(\chi) = \hat{\psi}_k.$$

Aplicando la proposición 3.17 y el principio de transferencia, obtenemos que para todo $k \leq m$

$$\hat{\psi}_k(0) = {}^*\mathrm{pr}_k(\chi(0)).$$

Tambien por el principio de transferencia

$$\chi(0) = ({}^*\mathrm{pr}_1(\chi(0)), \dots, {}^*\mathrm{pr}_m(\chi(0))) = (\hat{\psi}_1(0), \dots, \hat{\psi}_m(0)).$$

Por la proposición 2.14

$$\mu_{X_1 \times \ldots \times X_m}(\psi_1(0), \dots, \psi_m(0)) = \mu_{X_1}(\psi_1(0)) \times \cdots \times \mu_{X_m}(\psi_m(0)).$$

Como para todo $k \leq m$
$$\hat{\psi}_k(0) \in \mu_{X_k}(\psi_k(0)),$$
tenemos
$$\chi(0) \in \mu_{X_1 \times \cdots \times X_m}(\psi_1(0), \ldots, \psi_m(0)).$$
Definimos
$$\varphi = (\psi_1(0), \ldots, \psi_m(0))^\frown \chi \in \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \cdots \times X_m) \setminus \Sigma^{(0)}(X_1 \times \cdots \times X_m)$$
y notemos que para todo $k \leq m$
$$\Sigma_2^{(\alpha)}\mathrm{pr}_k(\varphi) = \mathrm{pr}_k(\varphi(0))^{\frown *}\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_k(\hat{\varphi}) = \psi_k(0)^\frown \hat{\psi}_k = \psi_k;$$
se deduce que
$$\Delta^{(\alpha)}(\varphi) = (\psi_1, \ldots, \psi_m).$$

Ahora supongamos que α es ordinal límite. Sean
$$\varphi, \chi \in \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \cdots \times X_m)$$
tales que $\Delta^{(\alpha)}(\varphi) = \Delta^{(\alpha)}(\chi)$. Existe $\beta < \alpha$ tal que
$$\varphi, \chi \in \Sigma^{(\beta)}(X_1 \times \cdots \times X_m);$$
tenemos $\Delta^{(\beta)}(\varphi) = \Delta^{(\beta)}(\chi)$ y por eso $\varphi = \chi$. Ahora consideremos
$$(\psi_1, \ldots, \psi_m) \in \mathscr{I}^{(\alpha)};$$
existe $\beta < \alpha$ tal que
$$(\psi_1, \ldots, \psi_m) \in \Sigma^{(\beta)}X_1 \times \cdots \times \Sigma^{(\beta)}X_m$$
y como
$$(\psi_1, \ldots, \psi_m) \in \mathscr{I}^{(\beta)},$$
por la hipotesis de inducción existe
$$\varphi \in \Sigma^{(\beta)}(X_1 \times \cdots \times X_m) \subseteq \Sigma^{(\alpha)}(X_1 \times \cdots \times X_m)$$
tal que
$$\Delta^{(\alpha)}(\varphi) = \Delta^{(\beta)}(\varphi) = (\psi_1, \ldots, \psi_m).$$
La demostración está completa. $\square$

Definición 3.21. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) los espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Se dice que f es **tri-cociente** [10] si existe una aplicación $(\_)^\sharp : \tau_X \to \tau_Y$ tal que

(T1) para todo $U \in \tau_X$ $U^\sharp \subseteq f[U]$;

(T2) $X^\sharp = Y$;

(T3) para todo $U, V \in \tau_X$ tales que $U \subseteq V$ tenemos $U^\sharp \subseteq V^\sharp$;

(T4) para todo $U \in \tau_X$, $y \in U^\sharp$, $\mathscr{W} \subseteq \tau_X$ tales que $f^{-1}(y) \cap U \subseteq \bigcup \mathscr{W}$ existe $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{W}$ finito tal que $y \in (\bigcup \mathscr{F})^\sharp$.

En las siguientes dos proposiciones usamos la esquema de demostración dada en [4].

Proposición 3.22. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) los espacios topológicos tales que $X, Y \in V(S) \setminus S$ y $f : X \to Y$ una aplicación tri-cociente. Supongamos que $\kappa > |\tau_X|$. Entonces para todo $\alpha \in On$, $U \in \tau_X$, $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)} Y$ tales que $\varphi(0) \in U^\sharp$ existe $\chi \in \Sigma^{(\alpha)} X$ tal que $\chi(0) \in U$ y $\Sigma_2^{(\alpha)} f(\chi) = \varphi$.*

Demostración. Inducción sobre α. Como $U^\sharp \subseteq f(U)$, la afirmación se cumple para $\alpha = 0$.

Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$. Si $\varphi \in \Sigma^{(0)} Y$, la afirmación es obvia. Consideremos $\varphi \in \Sigma^{(\alpha)} Y \setminus \Sigma^{(0)} Y$. Definimos

$$\mathscr{W} = \{W \in \tau_X : \text{ no existe } \psi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X \text{ tal que } \psi(0) \in {}^*W \text{ y } {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\psi) = \hat{\varphi}\}.$$

Notemos que si $W_1, W_2 \in \mathscr{W}$, entonces $W_1 \cup W_2 \in \mathscr{W}$ porque ${}^*(W_1 \cup W_2) = {}^*W_1 \cup {}^*W_2$.

Vamos a mostrar ahora que para todo $W \in \mathscr{W}$ tenemos $\varphi(0) \notin W^\sharp$. Supongamos que nó; sea $W \in \mathscr{W}$ tal que $\varphi(0) \in W^\sharp$. Como $\hat{\varphi}(0) \in \mu_Y(\varphi(0))$ y $W^\sharp \in \tau_Y$, tenemos

$$\hat{\varphi}(0) \in {}^*(W^\sharp).$$

Por la hipotesis de inducción y el principio de transferencia existe $\psi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)} X$ tal que $\psi(0) \in {}^*W$ y ${}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\psi) = \hat{\varphi}$, la contradicción.

Como f es tri-cociente,

$$f^{-1}(\varphi(0)) \cap U \not\subseteq \bigcup \mathscr{W}.$$

Sea $x \in f^{-1}(\varphi(0)) \cap U$ tal que $x \notin \bigcup \mathscr{W}$. Sea $\mathscr{N}_x$ la familia de todas las vecindades abiertas de x en (X, τ_X). Para cada $V \in \mathscr{N}_x$ tenemos $V \notin \mathscr{W}$ y por eso

$$T_V = \{\xi \in {}^*V : \exists \psi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)}X \text{ tal que } \psi(0) = \xi \text{ y } {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\psi) = \hat{\varphi}\} \neq \emptyset.$$

Notemos que por el principio de transferencia $T_V \in {}^*\mathscr{P}(X)$ y la familia $(T_V)_{V \in \mathscr{N}_x}$ es centrada. Como $|\mathscr{N}_x| < \kappa$, existe

$$\eta \in \bigcap_{V \in \mathscr{N}_x} T_V.$$

Para cada $V \in \mathscr{N}_x$ tenemos $\eta \in {}^*V$ y por eso $\eta \in \mu_X(x)$. Como $\eta \in T_X$, existe $\psi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)}X$ tal que $\psi(0) = \eta$ y ${}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\psi) = \hat{\varphi}$. Definimos

$$\chi = x^\frown \psi \in \Sigma^{(\alpha)}X \setminus \Sigma^{(0)}X.$$

Tenemos $\chi(0) = x \in U$ y

$$\Sigma_2^{(\alpha)} f(\chi) = f(x)^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)} f(\psi) = \varphi(0)^\frown \hat{\varphi} = \varphi.$$

Si α es ordinal límite, la demostración es obvia. $\square$

Proposición 3.23. *Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *espacios topológicos tales que* $X, Y \in V(S) \setminus S$ *y* $f : X \to Y$ *una aplicación continua. Supongamos que* $\kappa > |\tau_X \cup \tau_Y|$. *Sea* $\rho \in On$ *tal que*

$$\Sigma^{(\rho+1)}Y = \Sigma^{(\rho)}Y.$$

Para cada $U \in \tau_X$ *tenemos*

$$U^\sharp = \{y \in Y : \forall \varphi \in \Sigma^{(\rho)}Y,\ \varphi(0) = y,\ \exists \chi \in \Sigma^{(\rho)}X \quad \textit{tal que } \chi(0) \in U \textit{ y } \Sigma_2^{(\rho)} f(\chi) = \varphi\} \in \tau_Y$$

y la aplicación $(\_)^\sharp : \tau_X \to \tau_Y$ *es tal que se cumplen las propiedades* (T1), (T3) *y* (T4).

Demostración. Sea $U \in \tau_X$; vamos a mostrar que $U^\sharp \in \tau_Y$. Por el principio de transferencia

$${}^*U^\sharp = \{\eta \in {}^*Y : \forall \psi \in {}^*\Sigma^{(\rho)}Y,\ \psi(0) = \eta,\ \exists \theta \in {}^*\Sigma^{(\rho)}X \quad \text{tal que } \theta(0) \in {}^*U \text{ y } {}^*\Sigma_2^{(\rho)} f(\theta) = \psi\}.$$

Fijamos $y \in U^\sharp$ y $\eta \in \mu_Y(y)$; mostraremos que $\eta \in {}^*U^\sharp$. Consideremos $\psi \in {}^*\Sigma^{(\rho)}Y$ tal que $\psi(0) = \eta$. Tenemos que

$$y^\frown\psi \in \Sigma^{(\rho+1)}Y = \Sigma^{(\rho)}Y;$$

como $y \in U^\sharp$, existe $\chi \in \Sigma^{(\rho)}X$ tal que $\chi(0) \in U$ y $\Sigma_2^{(\rho)}f(\chi) = y^\frown\psi$. Como $\Sigma_2^{(\rho+1)}f \supseteq \Sigma_2^{(\rho)}f$ y $l(\chi) = l(y^\frown\psi) \neq 0$, tenemos que

$$y^\frown\psi = \Sigma_2^{(\rho)}f(\chi) = \Sigma_2^{(\rho+1)}f(\chi) = f(\chi(0))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\rho)}(\hat{\chi})$$

y por el lema 3.14

$${}^*\Sigma_2^{(\rho)}f(\hat{\chi}) = \psi$$

y como $\chi(0) \in U \in \tau_X$, tenemos

$$\hat{\chi}(0) \in \mu_X(\chi(0)) \subseteq {}^*U.$$

Se deduce que $\eta \in {}^*U^\sharp$. Como $\kappa > |\tau_Y|$, por la proposición 2.11 $U^\sharp$ es abierto.

Claro que $(\_)^\sharp : \tau_X \to \tau_Y$ es tal que se cumplen las propiedades (T1) y (T3). Vamos a verificar (T4). Sean $U \in \tau_X$, $y \in U^\sharp$ y $\mathscr{W} \subseteq \tau_X$ tales que para cada finito $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{W}$ tenemos $y \notin (\bigcup \mathscr{F})^\sharp$. Consideremos

$$\mathscr{O} = \{\bigcup \mathscr{F} : \mathscr{F} \subseteq \mathscr{W} \text{ es finito}\} \neq \emptyset.$$

Para cada $O \in \mathscr{O}$ definimos

$$\Xi_O = \{\varphi \in \Sigma^{(\rho)}Y : \varphi(0) = y \text{ y } \forall \chi \in \Sigma^{(\rho)}X \text{ tal que } \chi(0) \in O \\ \text{tenemos } \Sigma_2^{(\rho)}f(\chi) \neq \varphi\} \neq \emptyset.$$

Por el principio de transferencia para cada $O \in \mathscr{O}$

$${}^*\Xi_O = \{\psi \in {}^*\Sigma^{(\rho)}Y : \psi(0) = {}^*y \text{ y } \forall \theta \in {}^*\Sigma^{(\rho)}X \text{ tal que } \theta(0) \in {}^*O \\ \text{tenemos } {}^*\Sigma_2^{(\rho)}f(\theta) \neq \psi\} \neq \emptyset.$$

Sean $k \geq 1$, $O_1, \ldots, O_k \in \mathscr{O}$; tenemos

$${}^*\Xi_{O_1} \cap \ldots \cap {}^*\Xi_{O_k} \supseteq {}^*\Xi_{O_1 \cup \ldots \cup O_k} \neq \emptyset.$$

Se deduce que la familia $({}^*\Xi_O)_{O\in\mathscr{O}}$ es centrada y como $\kappa > |\mathscr{O}|$, existe

$$\psi \in \bigcap_{O\in\mathscr{O}} {}^*\Xi_O.$$

Como $\psi \in {}^*\Sigma^{(\rho)}Y$ y $\psi(0) = {}^*y \in \mu_Y(y)$ (véase la definición 2.10), tenemos

$$y^\frown\psi \in \Sigma^{(\rho+1)}Y = \Sigma^{(\rho)}Y.$$

Como $y \in U^\sharp$, existe $\chi \in \Sigma^{(\rho)}X$ tal que $\chi(0) \in U$ y $\Sigma_2^{(\rho)}f(\chi) = y^\frown\psi$. Por la proposición 3.17 $f(\chi(0)) = y$, $l(\chi) = l(y^\frown\psi) \neq 0$ y

$$y^\frown\psi = \Sigma_2^{(\rho)}f(\chi) = \Sigma_2^{(\rho+1)}f(\chi) = f(\chi(0))^\frown {}^*\Sigma_2^{(\rho)}f(\hat{\chi});$$

por eso $\psi = {}^*\Sigma_2^{(\rho)}f(\hat{\chi})$. Para cada $O \in \mathscr{O}$ tenemos $\psi \in {}^*\Xi_O$ y por eso $\hat{\chi}(0) \notin {}^*O$; como $\hat{\chi}(0) \in \mu_X(\chi(0))$ y $O \in \tau_X$, tenemos $\chi(0) \notin O$. Se deduce que

$$\chi(0) \in U \cap f^{-1}(y) \nsubseteq \bigcup\mathscr{O} = \bigcup\mathscr{W}.$$

La demostración está completa. $\square$

Teorema 3.24. *Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios topológicos, $X, Y \in V(S)\backslash S$, y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Supongamos que $\kappa > |\tau_X \cup \tau_Y|$. Entonces f es tri-cociente si y sólo si para cada $\alpha \in On$ la aplicación*

$$\Sigma_2^{(\alpha)}f : \Sigma^{(\alpha)}X \to \Sigma^{(\alpha)}Y$$

es sobreyectiva.

Demostración. $(\Rightarrow)$: Aplicamos la proposición 3.22 con $U = X$.

$(\Leftarrow)$: Por la proposición 3.16 y la nota 3.3 existe $\rho \in On$ tal que

$$\Sigma^{(\rho+1)}Y = \Sigma^{(\rho)}Y.$$

Por la proposición 3.23 la aplicación $(\_)^\sharp : \tau_X \to \tau_Y$ es tal que se cumplen las propiedades $(\mathrm{T}1) - (\mathrm{T}4)$. $\square$

Teorema 3.25 (V. V. Uspenskij, [12])**.** *Sean (X_i, τ_{X_i}) y (Y_i, τ_{Y_i}) $(i \in I)$ espacios topológicos y $f_i : X_i \to Y_i$ $(i \in I)$ aplicaciones tri-cocientes. Entonces el producto*

$$F : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i,$$
$$F((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I},$$

es tri-cociente.

Demostración. Supongamos que $I \neq \emptyset$. Usamos el teorema 1.14. Tomando las copias, podemos suponer que para algún $n \geq 0$

$$I \cup \bigcup_{i \in I} (X_i \cup Y_i) \subseteq V_n(S),$$

donde $(V(S), V(^*S), *)$ es universo no-estándar tal que $^*S = S$ y $^*n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se deduce que

$$\mathscr{X}, \mathscr{Y}, F \in V(S) \setminus S,$$

donde

$$\mathscr{X} = \prod_{i \in I} X_i, \quad \mathscr{Y} = \prod_{i \in I} Y_i.$$

Supongamos que

$$\kappa > |I \cup \tau_{\mathscr{X}} \cup \tau_{\mathscr{Y}} \cup \bigcup_{i \in I} (\tau_{X_i} \cup \tau_{Y_i})|.$$

Como cada f_i es continua, F es continua. Vamos a mostrar que para todo $\alpha \in On$ la aplicación

$$\Sigma_2^{(\alpha)} F : \Sigma^{(\alpha)} \mathscr{X} \to \Sigma^{(\alpha)} \mathscr{Y}$$

es sobreyectiva.

Inducción por α. Si $\alpha = 0$, la afirmación es obvia.

Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$. Sea

$$\varphi \in \Sigma^{(\alpha)} \mathscr{Y} \setminus \Sigma^{(0)} \mathscr{Y}.$$

Como cada f_i es tri-cociente, por el teorema 3.24 para cada $i \in I$ existe

$$\chi_i \in \Sigma^{(\alpha)} X_i \setminus \Sigma^{(0)} X_i$$

tal que

$$\Sigma_2^{(\alpha)} f_i(\chi_i) = \Sigma_2^{(\alpha)} \mathrm{pr}_{Y_i}(\varphi) \in \Sigma^{(\alpha)} Y_i.$$

Para cada $i \in I$ definimos

$$T_i = \{\psi \in {^*\Sigma^{(\gamma)}} \mathscr{X} : {^*\Sigma_2^{(\gamma)}} F(\psi) = \hat{\varphi} \text{ y } {^*\Sigma_2^{(\gamma)}} \mathrm{pr}_{X_i}(\psi) = \hat{\chi}_i\}.$$

Por el principio de transferencia para cada $i \in I$ tenemos

$$T_i \in {^*\mathscr{P}}(\Sigma^{(\gamma)} \mathscr{X}).$$

Vamos a mostrar que la familia $(T_i)_{i\in I}$ es centrada. Sean $j_1,\dots,j_m$ los elementos distintos de I, $m\geq 1$. Definimos

$$J=\{j_1,\dots,j_m\},\quad \hat{\mathscr{X}}=\prod_{i\in I\setminus J}X_i,\quad \hat{\mathscr{Y}}=\prod_{i\in I\setminus J}Y_i,$$

$$\hat{F}:\hat{\mathscr{X}}\to\hat{\mathscr{Y}},\quad \hat{F}((x_i)_{i\in I\setminus J})=(f_i(x_i))_{i\in I\setminus J}.$$

Consideremos un homeomorfismo

$$h_{\mathscr{X}}:\mathscr{X}\to X_{j_1}\times\cdots\times X_{j_m}\times\hat{\mathscr{X}}.$$

(Notemos que si $I=J$, entonces $\hat{\mathscr{X}}=\{\emptyset\}$.) Sean

$$\pi_{X_{j_k}}:X_{j_1}\times\cdots\times X_{j_m}\times\hat{\mathscr{X}}\to X_{j_k}\quad (k=1,\dots,m),$$

$$\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{X}}}:\mathscr{X}\to\hat{\mathscr{X}},\quad \pi_{\hat{\mathscr{X}}}:X_{j_1}\times\cdots\times X_{j_m}\times\hat{\mathscr{X}}\to\hat{\mathscr{X}}$$

las proyecciones canónicas; tenemos

$$\pi_{X_{j_k}}\circ h_{\mathscr{X}}=\mathrm{pr}_{X_{j_k}}\quad (k=1,\dots,m),\quad \pi_{\hat{\mathscr{X}}}\circ h_{\mathscr{X}}=\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{X}}}.$$

Análogamente se definen las aplicaciónes $h_{\mathscr{Y}}$, $\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{Y}}}$, $\pi_{Y_{j_k}}$, $\pi_{\hat{\mathscr{Y}}}$. Por la hipotesis de inducción y el principio de transferencia la aplicación

$${}^*\Sigma_2^{(\gamma)}F:\ {}^*\Sigma^{(\gamma)}\mathscr{X}\to{}^*\Sigma^{(\gamma)}\mathscr{Y}$$

es sobreyectiva y por eso existe $\xi\in{}^*\Sigma^{(\gamma)}\mathscr{X}$ tal que

$${}^*\Sigma_2^{(\gamma)}F(\xi)=\hat{\varphi}.$$

Consideremos

$$\zeta={}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{X}}}(\xi)\in{}^*\Sigma^{(\gamma)}\hat{\mathscr{X}}.$$

Notemos que para cada $i\in I$

$${}^{\infty*}\sigma(l(\hat{\chi}_i))=l(\chi_i)=l(\varphi)={}^{\infty*}\sigma(l(\hat{\varphi}))={}^{\infty*}\sigma(l(\xi))={}^{\infty*}\sigma(l(\zeta))$$

y por eso

$$l(\hat{\chi}_i)=l(\zeta).$$

Usando las Proposiciones 3.12, 3.20 y el principio de transferencia, obtenemos que existe

$$\theta\in{}^*\Sigma^{(\gamma)}(X_{j_1}\times\cdots\times X_{j_m}\times\hat{\mathscr{X}})$$

tal que

$$^*\Sigma_2^{(\gamma)}\pi_{X_{j_k}}(\theta) = \hat{\chi}_{j_k} \quad (k = 1, \ldots, m), \quad ^*\Sigma_2^{(\gamma)}\pi_{\hat{\mathscr{X}}}(\theta) = \zeta.$$

Por el corolario 3.19 y el principio de transferencia existe

$$\psi \in {}^*\Sigma^{(\gamma)}\mathscr{X}$$

tal que

$$^*\Sigma_2^{(\gamma)}h_{\mathscr{X}}(\psi) = \theta.$$

Usando la proposición 3.18, obtenemos

$$^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{X_{j_k}}(\psi) = \hat{\chi}_{j_k} \quad (k = 1, \ldots, m), \quad ^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{X}}}(\psi) = \zeta.$$

Para cada $k \leq m$

$$\begin{aligned} ^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{Y_{j_k}}({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}F(\psi)) &= {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f_{j_k}({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{X_{j_k}}(\psi)) \\ &= {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}f_{j_k}(\hat{\chi}_{j_k}) = {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{Y_{j_k}}(\hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Tambien

$$\begin{aligned} &^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{Y}}}({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}F(\psi)) = {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\hat{F}({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{X}}}(\psi)) = {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\hat{F}(\zeta) \\ &\quad = {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\hat{F}({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{X}}}(\xi)) = {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{Y}}}({}^*\Sigma_2^{(\gamma)}F(\xi)) = {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}\mathrm{pr}_{\hat{\mathscr{Y}}}(\hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Usando el corolario 3.19 y la proposición 3.20, obtenemos

$$^*\Sigma_2^{(\gamma)}F(\psi) = \hat{\varphi}.$$

Se deduce que

$$\psi \in \bigcap_{k=1}^{m} T_{j_k}.$$

Como $|I| < \kappa$, existe

$$\eta \in \bigcap_{i \in I} T_i.$$

Definimos

$$p = (\chi_i(0))_{i \in I} \in \mathscr{X}.$$

Notemos que

$$F(p) = (f_i(\chi_i(0)))_{i\in I} = (\mathrm{pr}_{Y_i}(\varphi(0)))_{i\in I} = \varphi(0).$$

Por la proposición 3.17 y el principio de transferencia para cada $i \in I$ tenemos

$${}^*\mathrm{pr}_{X_i}(\eta(0)) = \hat{\chi}_i(0) \in \mu_{X_i}(\chi_i(0)) = \mu_{X_i}(\mathrm{pr}_{X_i}(p)).$$

Por la proposición 2.15 tenemos

$$\eta(0) \in \mu_{\mathscr{X}}(p).$$

Se deduce que

$$p^\frown\eta \in \Sigma^{(\alpha)}\mathscr{X};$$

tenemos

$$\Sigma_2^{(\alpha)}F(p^\frown\eta) = F(p)^\frown {}^*\Sigma_2^{(\gamma)}F(\eta) = \varphi(0)^\frown\hat{\varphi} = \varphi.$$

Si α es ordinal límite, la demostración es obvia.

Por el teorema 3.24 $F : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es tri-cociente. $\square$

Bibliografía

[1] Benci, V. *A construction of a nonstandard universe.* In: Advances of Dynamical Systems and Quantum Physics (eds. S. Albeverio et al.), World Scientific, Singapore, 1995, 11 – 21.

[2] Bourbaki, N. *General Topology, Part 1.* Hermann, 1966.

[3] Chang, C. C., Keisler, H. J. *Model Theory, 3rd ed.* North-Holland, 1990.

[4] Clementino, M. M., Hofmann, D. *Triquotient maps via ultrafilter convergence.* Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 3423 – 3431.

[5] Clementino, M. M., Hofmann, D. *On limit stability of special classes of continuous maps.* Topology Appl. 125 (2002), 471 – 488.

[6] Di Nasso, M. *Iterated hyper-extensions and an idempotent ultrafilter proof of Rado's theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 1749 – 1761.

[7] Kunen, K. *Ultrafilters and independent sets.* Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972), 299 – 306.

[8] Kunen, K. *The Foundations of Mathematics.* College Publications, 2009.

[9] Lindstrøm, T. *An invitation to nonstandard analysis.* In: Nonstandard analysis and its applications (ed. N. Cutland), London Mathematical Society Student Texts 10, Cambridge University Press, 1988, 1 – 105.

[10] Michael, E. *Complete spaces and tri-quotient maps.* Illinois J. of Math. 21 (1977), 716 – 733.

[11] Robinson, A. *Non-standard analysis.* North-Holland, 1966.

[12] Uspenskij, V. V. *Tri-quotient maps are preserved by infinite products.* Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 3567 – 3574.