UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
«FRANCISCO GARCÍA SALINAS»

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Nombre de la tesis:

HACES COHERENTES SOBRE VARIEDADES ALGEBRAICAS

Tesis realizada por *Miriam Bocardo Gaspar* para obtener el Grado de Maestría en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas

---

Asesor de tesis:
Dr. Alexis García Zamora

Dedicada a:
Mi madre Ma. Trinidad Gaspar Nuño,
María de la Paz Argüelles Martínez
y
Dr. Alexis García Zamora.

Agradecimientos a:

Dr. Alexis García Zamora, Fam. Argüelles, Fermín Bocardo Hernández, Dr. Santos Hernández Hernández, Margarita Castañeda Salazar, Alejandra Fabiola Huitrado, Eutiquio Cantú-Jenaro, Juan Pablo Martínez Navarro, Sergio Adrian Escobar Veloz, Elias Escobedo, Diego Armando Caldera Durán, Roberto Carlos Ortíz Huerta, Omar Zapata, Arilín Haro, Luis Manuel Ríos Castro, Dr. Jesús Leaños Macías, Alonso Castillo Ramírez, Alfonso Ramos Ibáñez, Ana Cecilia García e Iris Sahagún Flores.

También quiero agradecer al proyecto de CONACYT con título «*Algunas aplicaciones de análisis diofantino a problemas diofantinos*» dirigido por el Dr. Santos Hernández Hernández con clave de registro 000000000134132.

Índice general

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es demostrar los Teoremas de Anulamiento sobre variedades afines y proyectivas y el Teorema de Finitud sobre variedades proyectivas. El conocimiento de estos teoremas es fundamental para la demostración del *Teorema de Riemann-Roch*, el cual se incluye en este trabajo como una aplicación de éstos para el caso de curvas proyectivas suaves. La demostración del Teorema de Riemann-Roch que presento es una demostración muy bonita y sencilla del libro «Algebraic Geometry» de *Robin Hartshorne* [4].

El lector de este trabajo de tesis necesita como pre-requisito, un conocimiento básico de Algebra Conmutativa, Cohomología y Geometría Algebraica; este último principalmente basado en el primer capítulo de el libro «The Red Book» de *David Mumford* [8]. En este contexto, consideraré sólo variedades algebraicas sobre un campo fijo k algebraicamente cerrado y anillos conmutativos con unidad. También se requiere el conocimiento de resultados importantes como el Teorema de los ceros de Hilbert.

En el primer capítulo, se realiza un breve desarrollo de la Teoría de Haces [1] sobre un espacio topológico, a partir de definir $\mathcal{B}$-prehaces donde $\mathcal{B}$ es una base para la topología de el espacio dado, basado en el libro «Algebraic Geometry and Arithmetic Curves» de *Qing Liu* [11]. En este capítulo, se definen haces de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ y se detallan algunas propiedades sobre éstos, con referencia en el libro «Algebraic Geometry 2: Sheaves and Cohomology» de *Kenji Ueno* [15]. También, se demuestra que el conjunto de haces invertibles sobre un espacio topológico X junto con los

[1] En México se ha establecido la convención de nombrar «gavilla» a lo que se conoce como «sheaf» en el idioma inglés; pero en este trabajo de tesis se ha optado por la traducción «haz» de este mismo concepto.

morfismos de haces sobre ellos es una categoría. Además, este conjunto es un grupo abeliano con el producto tensorial definido sobre haces. En algunos textos, en el caso de que X es una variedad, este grupo es llamado «Grupo de Picard sobre X», esta definición tiene sentido, pues en el capítulo 2 se demostrará que el grupo de haces invertibles sobre X es isomorfo a $Pic(X)$, el cual es el grupo de Divisores de Cartier sobre X módulo los divisores de Cartier principales. En el apéndice A se desarrolla parte de la teoría de categorías requerida para la comprensión de este capítulo y se establece la notación correspondiente a la noción categórica del mismo; por ejemplo la notación de categorías específicas como la categoría de grupos abelianos o la notación utilizada para la colección de morfismos que definen una transformación natural, étc.

Durante el segundo capítulo, se definen fibrado vectorial de rango finito y divisor de Cartier sobre una variedad, estas definiciones extraidas de los libros «Heights in Diophantine Geometry» de *Enrico Bombieri y Walter Gubler* [1] y «Diophantine Geometry» de *Joseph H. Silverman, Marc Hindry* [14], respectivamente. Además, se demuestra que el conjunto de fibrados vectoriales sobre una variedad fija X junto con los morfismos definidos entre ellos forman una categoría y la existencia de una equivalencia categórica entre los fibrados en rectas y haces invertibles sobre X, esto consultado principalmente en «Basic Algebraic Geometry 2» de *Igor R. Shafarevich* [13]. También, se define una estructura de grupo abeliano sobre el conjunto de divisores de Cartier y se obtiene el resultado enunciado en el párrafo anterior acerca de estos divisores.

El tercer capítulo inicia con una breve introducción a la Cohomología de Čech sobre un espacio topológico. Se definen, sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, haces $\mathcal{O}_X$-coherentes. Gran parte de esta teoría se consultó en «Faisceaux Algebriques Coherents» de *Jean-Pierre Serre* [12]. La definición de haz coherente plasmada en este libro es equivalente a la definición usada en este trabajo de tesis, debido a que en el caso de variedades algebraicas X tenemos que su haz estructural $\mathcal{O}_X$ sobre cualquier abierto afín, es un haz de anillos Noetherianos; por tanto todo subhaz de $\mathcal{O}_X^n$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$), es coherente (esto se verifica en la sub-sección 3.2.2). También, se demuestra la existencia de la «*sucesión exacta larga en cohomología*» sobre una variedad algebraica X para una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ donde

$\mathcal{F}$ es un haz $\mathcal{O}_X$-coherente. Además, para variedades afínes X, se establece la equivalencia categórica entre haces $\mathcal{O}_X$-coherentes y $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulos finitamente generados. Para el caso, en el que X es una variedad proyectiva, a todo M $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulo $\mathbb{Z}$-graduado finitamente generado, se le asocia $\widetilde{M}$ un haz $\mathcal{O}_X$-coherente. Y se demuestra que todo haz $\mathcal{O}_X$-coherente $\mathcal{F}$, es isomorfo a un haz de la forma $\widetilde{M}$ para algún M $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulo $\mathbb{Z}$-graduado finitamente generado. Esta parte se basa en el libro «Algebraic Varieties» de *George R. Kempf* [5].

En en el cuarto y último capítulo se demuestran los Teoremas de Anulamiento y Finitud. Las demostraciones que presento para estos teoremas están basadas en el libro «Algebraic Geometry» de *Daniel Perrin* [10]. Los Teoremas de Anulamiento establecen las condiciones para las cuáles los p-ésimos grupos de cohomología de *Čech* son cero ($p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Para variedades afines X y haces $\mathcal{O}_X$-coherentes, estos grupos son cero para todo $p \geq 1$; y para variedades proyectivas X y haces $\mathcal{O}_X$-coherentes, éstos se anulan para todo $p > dim(X)$. Ahora, existe una estructura de k-espacio vectorial sobre cada uno de los p-ésimos grupos de cohomología de Čech. Así, en el Teorema de Finitud se estipula que sobre una variedad proyectiva X y un haz $\mathcal{O}_X$-coherente, la dimensión de estos k-espacios vectoriales es finita para todo $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Posteriormente, se define el grupo de divisores de Weil y se asocia a cada divisor de Cartier, uno de estos divisores. En el caso de variedades suaves esta aplicación definida entre ambos grupos de divisores es un isomorfismo de grupos. Así que sobre estas variedades nos referimos a un divisor indistintamente. Y finalmente, se concluye el capítulo presentando la demostración del Teorema de Riemann-Roch.

Capítulo 1

Haces

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para $\mathcal{T}$. Tenemos definido un orden parcial sobre $\mathcal{T}$ dado por $\subseteq$. En particular, $(\mathcal{B}, \subseteq)$ es un preorden (ver definición [A.6]). Por tanto $(\mathcal{B}, \subseteq)$ induce una categoría (ver ejemplo [A.7]), donde los morfismos están definidos de la siguiente manera: $(\forall)$ V, $V' \in \mathcal{B}$.

$$Hom(V, V') := \begin{cases} \{i_{VV'}\} & \text{si } V \subseteq V' \\ \varnothing & \text{otro caso.} \end{cases}$$

donde $i_{VV'} : V \to V'$ es la inclusión de espacios topológicos. Denotemos a esta categoría por $Top(\mathcal{B})$.

En lo sucesivo de éste capítulo nos restringiremos a categorías C que admiten límites inversos (ver Apéndice A).

Definición 1.1. *Un $\mathcal{B}$-prehaz sobre X con valores en C es un funtor contravariante $\mathcal{F} : Top(\mathcal{B}) \to C$ tal que si C posee objeto cero 0, entonces, $F(\varnothing) = 0$.*

Si $V \subseteq V'$, denotemos con $\rho_{_{VV'}} := \mathcal{F}(i_{VV'}) : \mathcal{F}(V') \to \mathcal{F}(V)$ y lo llamamos *morfismo restricción de* $\mathcal{F}$ o $\mathcal{F}$*-restricción*. Entonces

$$\rho := \left\{\rho_{_{VV'}} | V \subseteq V'; V, V' \in \mathcal{B}\right\}$$

es el conjunto de $\mathcal{F}$*-restricciones*.

Sea $V' \in \mathcal{B}$ y $s \in \mathcal{F}(V')$ entonces, decimos que s es una *sección de* $\mathcal{F}$ *sobre* V'. Si $V \subseteq V'$, entonces $s|_V := \rho_{_{VV'}}(s) \in \mathcal{F}(V)$ se llama la *restricción de s a V*.

Definición 1.2. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}$-prehaz sobre X con valores en C. Decimos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-haz sobre X con valores en C. Si para cada $V \in \mathcal{B}$ y para cada recubrimiento abierto $\{V_i\}_{i\in I}$ de V, $V_i \in \mathcal{B}$ $(\forall)$ $i \in I$, se satisface que:*

i) $(\forall)$ $x, y \in \mathcal{F}(V)$ *tal que* $x|_{V_i} = y|_{V_i}$ $(\forall)$ $i \in I$, *entonces* $x = y$.

ii) $(\forall)$ $s_j \in \mathcal{F}(V_j)$ $j \in I$ *tal que*

$$s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$$

Entonces $(\exists)$ $s \in \mathcal{F}(V)$ *tal que*

$$s|_{V_i} = s_i \ (\forall) i \in I \ (*)$$

Proposición 1.3. *Con la notación anterior, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-haz, entonces existe un único $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que satisface $(*)$.*

Demostración. Supongamos que existe $s' \in \mathcal{F}(V)$ tal que $s'|_{V_i} = s_i$ $(\forall) i \in I$, entonces $s|_{V_i} = s'|_{V_i}$ $(\forall)$ $i \in I$, de i) tenemos que $s = s'$ □

En particular, si $\mathcal{B} = \mathcal{T}$, denotamos $Top(\mathcal{T})$ por $Top(X)$ y para todo $\mathcal{T}$-prehaz (resp. $\mathcal{T}$-haz) $\mathcal{F}$ con valores en C, decimos simplemente prehaz (resp. haz) $\mathcal{F}$ sobre X con valores en C y definimos $\Gamma(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$ al que llamamos el conjunto de *secciones globales de $\mathcal{F}$ en X.*

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz (resp. haz) sobre X con valores en C. Si C es *Set* ó *Ab* ó *An* ó ... étc. entonces decimos que $\mathcal{F}$ es un prehaz (resp. haz) de conjuntos, grupos abelianos, anillos, ..., étc., respectivamente.

Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X de grupos abelianos. Entonces podemos sustituir equivalentemente i) por

i') $(\forall) s \in \mathcal{F}(U)$ *tal que* $s|_{U_i} = 0$ $(\forall) i \in I$, *entonces* $s = 0$.

En efecto,

i)⇒i'). Sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $(\forall) i \in I$ $s|_{U_i} = 0$. Puesto que $0 \in \mathcal{F}(U)$ y $(\forall) i \in I$ $s|_{U_i} = 0|_{U_i}$, entonces de i) concluimos que $s = 0$.

i')⇒i). Sean x, $y \in \mathcal{F}(U)$ tal que $(\forall)\ i \in I\ x|_{U_i}{=}y|_{U_i}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= x|_{U_i} - y|_{U_i} \\ &= (x-y)|_{U_i}\ (\forall)\ i \in I. \end{aligned}$$

de i') concluimos que $x = y$.

Note que esta equivalencia también es válida si $\mathcal{F}$ es un haz de anillos.

Sea $U \subseteq X$, un abierto. Consideremos la topología relativa sobre U. Todo prehaz $\mathcal{F}$ sobre X con valores en C induce un prehaz $\mathcal{F}|_U$ sobre U con valores en C de forma natural: $(\forall)\ V \in \mathcal{T}$ tal que $V \subseteq U$

$$\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

y definamos el conjunto de las $\mathcal{F}|_U$-restricciones como el subconjunto de las $\mathcal{F}$-restricciones $\{\rho_{_{WV}} |\ W, V \subseteq U\}$. Llamamos $\mathcal{F}|_U$ la *restricción de $\mathcal{F}$ a U.*

En particular, si $\mathcal{F}$ es un haz sobre X con valores en C, entonces $\mathcal{F}|_U$ es un haz sobre U con valores en C.

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos abiertos de X, $U = \bigcup U_i$ y $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos sobre X. Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \quad (**)$$

donde $d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_{i\in I}$ y $d_1 : (s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}$.
Note que d_0 es inyectiva y que $d_1 \circ d_0 = 0$. Denotaremos esta sucesión con $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Lema 1.4. *Con la notación anterior, $\mathcal{F}$ es un haz de grupos abelianos si y sólo si $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es exacta para toda familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{U}$ de X.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un haz. Sea $s \in ker(d_0)$. Entonces $s|_{U_i} = 0\ (\forall)\ i \in I$. Por i) en la definición de haz $s = 0$. Por tando d_0 es inyectiva.
Dado que $d_1 \circ d_0 = 0$, entonces $Im(d_0) \subseteq ker(d_1)$.

Ahora, sea $(s_i)_{i\in I} \in ker(d_1)$. Entonces, $s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j} = 0$ $(\forall) i, j$. Entonces, $(\exists)$ $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$. Por tanto $d_0(s) = (s_i)_{i\in I}$.

Inversamente, sea $U \subseteq X$ abierto y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U.

i) Sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = 0$ $(\forall)$ $i \in I$. Así, $s \in ker(d_0)$. Entonces $s = 0$.

ii) Sea $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ $(\forall)$ $i \in I$ tal que $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ $(\forall)$ $i, j \in I$. Entonces $(s_i)_{i\in I} \in ker(d_1) = Im(d_0)$. Por tanto $(\exists)$ $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ $(\forall)$ $i \in I$. □

Definición 1.5. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ $\mathcal{B}$-prehaces (resp. $\mathcal{B}$-haces) sobre X con respecto a una categoría C. Un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces (resp. de $\mathcal{B}$-haces) $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una transformación natural entre los funtores contravariantes $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ (ver Apéndice A). Entonces, decimos que φ es un* isomorfismo de $\mathcal{B}$-prehaces *(resp. de $\mathcal{B}$-haces) si es un isomorfismo en la categoría de funtores contravariantes.*

Así, un morfismo de $\mathcal{B}$-haces es simplemente un morfismo entre los $\mathcal{B}$-prehaces correspondientes.

Proposición 1.6. *$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un isomorfismo de $\mathcal{B}$-prehaces si y sólo si α_{U} es un isomorfismo $(\forall)$ $U \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Sean $\rho := \{\rho_{VU} | V \subseteq U\}$ y $\rho' := \left\{\rho'_{VU} | V \subseteq U\right\}$ las $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$- restricciones, respectivamente.

Si α es un isomorfismo, entonces existe un morfismo de prehaces

$$\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$$

tal que $\alpha \circ \beta = 1_{\mathcal{G}}$ y $\beta \circ \alpha = 1_{\mathcal{F}}$. Así, tenemos

$$\begin{aligned}(\alpha \circ \beta)_{U} &= \alpha_{U} \circ \beta_{U} \\ &= 1_{\mathcal{G}(U)}\end{aligned}$$

Análogamente, $(\beta \circ \alpha)_{U} = 1_{\mathcal{F}(U)}$. Por tanto α_{U} es un isomorfismo en C para todo $U \in \mathcal{B}$.

Inversamente, supongamos que α_U es un isomorfismo para todo $U \in \mathcal{B}$. Entonces, existe

$$\beta_U \in Hom_C(\mathcal{G}(U), \mathcal{F}(U))$$

para cada $U \in \mathcal{B}$ tal que $\alpha_U \circ \beta_U = 1_{\mathcal{G}(U)}$ y $\beta_U \circ \alpha_U = 1_{\mathcal{F}(U)}$

Note que $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ definido por la colección $\{\beta_U | U \in \mathcal{B}\}$ es una transformación natural. En efecto, dado que α es un morfismo de prehaces, entonces $\rho'_{VU} \circ \alpha_U = \alpha_V \circ \rho_{VU}$ $(\forall)$ $V, U \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq U$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\rho_{VU} \circ \beta_U &= (1_{\mathcal{F}(V)} \circ \rho_{VU}) \circ \beta_U \\
&= ((\beta_V \circ \alpha_V) \circ \rho_{VU}) \circ \beta_U \\
&= \beta_V \circ ({\rho'}_{VU} \circ \alpha_U) \circ \beta_U \\
&= \beta_V \circ {\rho'}_{VU} \circ 1_{\mathcal{G}(U)} \\
&= \beta_V \circ {\rho'}_{VU}
\end{aligned}$$

Por la construcción de β, tenemos que $\alpha \circ \beta = 1_{\mathcal{G}}$ y $\beta \circ \alpha = 1_{\mathcal{F}}$. Por lo tanto α es un isomorfismo. $\square$

1.1. Extensión de un $\mathcal{B}$-prehaz de grupos abelianos a un prehaz de grupos abelianos

Sea $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una base para la topología τ de X y $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-prehaz sobre X de grupos abelianos con restricciones $\left\{\rho_{B_\beta B_\alpha}\right\}$. Para cada abierto $U \subseteq X$, definimos

$$\mathcal{B}_U := \{B_\alpha \in \mathcal{B} | B_\alpha \subseteq U\}$$

y

$$\mathcal{F}'(U) := \varprojlim_{B_\alpha \in \mathcal{B}_U} \mathcal{F}(B_\alpha).$$

(ver Apéndice A.5). Tenemos que las aplicaciones naturales del límite inverso son las proyecciones del producto restringidas al límite inverso (ver Apéndice [A.5])

$$\left\{\pi_\alpha^{(U)} : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(B_\alpha) | B_\alpha \in \mathcal{B}_U\right\}.$$

Sea $V \subseteq U$. Entonces, $\mathcal{B}_V \subseteq \mathcal{B}_U$. Por la propiedad del límite inverso (ver Apéndice A.4, diagrama [**1**]), existe un único homomorfismo h_{VU} tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'(U) \arrow[r, "\pi_\alpha^{(U)}"] \arrow[d, dashed, "h_{VU}"'] & \mathcal{F}(B_\alpha) \\ \mathcal{F}'(V) \arrow[ur, "\pi_\alpha^{(V)}"] & \end{tikzcd}$$

Sea $\mathcal{F}'(i_{VU}) := h_{VU}$ donde $i_{VU} : V \hookrightarrow U$ es la inclusión de espacios topológicos.

Proposición 1.7. *Con la notación anterior, $\mathcal{F}'$ es un prehaz de grupos abelianos sobre X y $\mathcal{F}' \cong \mathcal{F}$ son isomorfos como $\mathcal{B}$-prehaces.*

Demostración. Claramente $h_{UU} = id_{\mathcal{F}'(U)}$.

Ahora, sea $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'(V) \arrow[r, "\pi_\alpha^{(V)}"] \arrow[d, "h_{WV}"'] & \mathcal{F}(B_\alpha) \\ \mathcal{F}'(W) \arrow[ur, "\pi_\alpha^{(W)}"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}'(U) \arrow[r, "\pi_\alpha^{(U)}"] \arrow[d, "h_{WU}"'] & \mathcal{F}(B_\alpha) \\ \mathcal{F}'(W) \arrow[ur, "\pi_\alpha^{(W)}"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} (\pi_\alpha^{(W)} \circ h_{WV}) \circ h_{VU} &= \pi_\alpha^{(V)} \circ h_{VU} \\ &= \pi_\alpha^{(U)} \end{aligned}$$

por la unicidad de h_{WU}, entonces $h_{WV} \circ h_{VU} = h_{WU}$. Así, $\mathcal{F}'$ es un prehaz.

Sea $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Consideremos la aplicación natural $\pi_\alpha^{(B_\alpha)} : \mathcal{F}'(B_\alpha) \to \mathcal{F}(B_\alpha)$. Ahora, sea $B_\beta \subseteq B_\alpha$, demostremos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'(B_\alpha) \arrow[r, "\pi_\alpha^{(B_\alpha)}"] \arrow[d, "h_{B_\beta B_\alpha}"'] & \mathcal{F}(B_\alpha) \arrow[d, "\rho_{B_\beta B_\alpha}"] \\ \mathcal{F}'(B_\beta) \arrow[r, "\pi_\beta^{(B_\beta)}"] & \mathcal{F}(B_\beta) \end{tikzcd}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_\beta^{(B_\beta)} \circ h_{B_\beta B_\alpha} &= \pi_\beta^{(B_\alpha)} \\ &= \rho_{B_\beta B_\alpha} \circ \pi_\alpha^{(B_\alpha)} \end{aligned}$$

la última igualdad es por la construcción de $\mathcal{F}'(B_\alpha)$ pues si $(s_\beta) \in \mathcal{F}'(B_\alpha)$, entonces $s_\beta = s_\alpha|_{B_\beta}$.

Por tanto la colección de homomorfismos $\left\{\pi_\alpha^{(B_\alpha)}\right\}_{\alpha\in A}$ es un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces.

Note que para cada $s \in \mathcal{F}(B_\alpha)$, $(s|_{B_\beta}) \in \mathcal{F}'(B_\alpha)$, por lo que la aplicación $\pi_\alpha^{(B_\alpha)}$ es sobreyectiva. Ahora, demostremos que $\pi_\alpha^{(B_\alpha)}$ es un morfismo inyectivo. Sea $(s_\beta) \in \mathcal{F}'(B_\alpha)$ tal que $\pi_\alpha^{(B_\alpha)}((s_\beta)) = 0$, entonces $s_\alpha = 0$, pero para todo $B_\beta \subseteq B_\alpha$ $s_\beta = s_\alpha|_{B_\beta}$, por tanto $(s_\beta) = 0$.

Entonces, por la proposición [1.6], la colección de morfismos $\left\{\pi_\alpha^{(B_\alpha)}\right\}_{\alpha\in A}$ es un isomorfismo de $\mathcal{B}$-prehaces. $\square$

Proposición 1.8. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces. Entonces, φ se extiende de manera única a un morfismo de $\mathcal{T}$-prehaces $\widetilde{\varphi} : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$.*

Demostración. Sean $\left\{\rho'_{B_\beta B_\alpha}\right\}$ las $\mathcal{G}$-restricciones. Tenemos que para cada $B_\alpha \in \mathcal{B}$ y para todo $B_\beta \subseteq B_\alpha$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(B_\alpha) \arrow[r, "\varphi_{B_\alpha}"] \arrow[d, "\rho_{B_\beta B_\alpha}"'] & \mathcal{G}(B_\alpha) \arrow[d, "\rho'_{B_\beta B_\alpha}"] \\
\mathcal{F}(B_\beta) \arrow[r, "\varphi_{B_\beta}"] & \mathcal{G}(B_\beta)
\end{tikzcd} \qquad 1)$$

Ahora, sea $U \in \mathcal{T}$, consideremos las aplicaciones naturales $\left\{\pi_\alpha^{(U)}\right\}$ del límite inverso $\mathcal{F}'(U) := \varprojlim_{B_\alpha\in\mathcal{B}_U} \mathcal{F}(B_\alpha)$. Si $B_\beta \subseteq B_\alpha$, entonces

$$\rho_{B_\beta B_\alpha} \circ \pi_\alpha^{(U)} = \pi_\beta^{(U)} \qquad 2)$$

Consideremos la colección de morfismos $\left\{\varphi_{B_\alpha} \circ \pi_\alpha^{(U)}\right\}_{B_\alpha\in\mathcal{B}_U}$, demostremos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}'(U) \arrow[r, "\varphi_{B_\alpha}\circ\pi_\alpha^{(U)}"] \arrow[d, "\varphi_{B_\beta}\circ\pi_\beta^{(U)}"'] & \mathcal{G}(B_\alpha) \arrow[dl, "\rho'_{B_\beta B_\alpha}"] \\
\mathcal{G}(B_\beta) &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho'_{B_\beta B_\alpha} \circ \varphi_{B_\alpha} \circ \pi_\alpha{}^{(U)} &= \varphi_{B_\beta} \circ \rho_{B_\beta B_\alpha} \circ \pi_\alpha^{(U)} \quad \text{sustituyendo 1)} \\
&= \varphi_{B_\beta} \circ \pi_\beta^{(U)} \quad \text{sustituyendo 2)}
\end{aligned}$$

Entonces, por la propiedad del límite inverso tenemos que existe un único homomorfismo de grupos $\widetilde{\varphi}_U$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}'(U) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_U"] \arrow[d, "\pi_{\alpha(U)}"'] & \mathcal{G}'(U) \arrow[d, "\pi'_{\alpha(U)}"] \\
\mathcal{F}(B_\alpha) \arrow[r, "\varphi_{B_\alpha}"] & \mathcal{G}(B_\alpha)
\end{tikzcd} \qquad 3)$$

donde $\left\{\pi'_{\alpha(U)}\right\}$ son las aplicaciones del límite inverso $\mathcal{G}'(U)$. Sea $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Puesto que $\mathcal{F}'(B_\alpha) \cong \mathcal{F}(B_\alpha)$ y $\mathcal{G}'(B_\alpha) \cong \mathcal{G}(B_\alpha)$ entonces, de la unicidad de $\widetilde{\varphi}_{B_\alpha}$ tal que el diagrama 3) conmuta y de la conmutatividad del diagrama 1), se sigue que $\widetilde{\varphi}_{B_\alpha} = \varphi_{B_\alpha}$.

Ahora, sea $V \subseteq U$. Entonces, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}'(U) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_U"] \arrow[d, "h_{VU}"'] & \mathcal{G}'(U) \arrow[d, "h'_{VU}"] \\
\mathcal{F}'(V) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

donde $\left\{h'_{VU}\right\}$ son las $\mathcal{G}'$-restricciones. Demostremos la conmutatividad de este diagrama. Sea $\alpha \in A$ tal que $B_\alpha \subseteq V$. De la conmutatividad de h'_{VU} con las aplicaciones naturales π' tenemos que

$$(\pi'^{(V)}_\alpha \circ h'_{VU}) \circ \widetilde{\varphi}_V = \pi'^{(U)}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_V$$

y, de la conmutatividad de h_{VU} con las aplicaciones naturales π y la conmutatividad del diagrama 3) se sigue que

$$\begin{aligned}
(\pi'^{\,(V)}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_U) \circ h_{VU} &= \varphi_{B_\alpha} \circ (\pi_\alpha^{(V)} \circ h_{VU}) \\
&= \varphi_{B_\alpha} \circ \pi_\alpha^{(U)} \\
&= \pi'^{(U)}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_V .
\end{aligned}$$

Por tanto $\widetilde{\varphi} = \{\widetilde{\varphi}_U\} : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$ es un morfismo de $\mathcal{T}$-prehaces. $\square$

Definición 1.9. *Decimos que* $\mathcal{B}$ *es* cerrado bajo intersección *si* $(\forall)\ B_\alpha,\ B_\beta \in \mathcal{B}$, $B_\alpha \cap B_\beta \in \mathcal{B}$.

Proposición 1.10. *Sea* $\mathcal{B}$ *cerrado bajo intersección y* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{B}$*-prehaz de grupos abelianos sobre* X*. El prehaz* $\mathcal{F}'$ *definido anteriormente es un haz si y sólo si* $\mathcal{F}$ *es un* $\mathcal{B}$*-haz. Además, si existe otro haz* $\mathcal{G}$ *sobre* X *tal que es isomorfo a* $\mathcal{F}$ *como* $\mathcal{B}$*-prehaz, entonces* $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}'$ *como* $\mathcal{T}$*-haces.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}'$ es un haz. Por la proposición [1.7]

$$\mathcal{F}' \cong \mathcal{F}$$

es un isomorfismo $\mathcal{B}$-prehaces . Entonces, $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-haz.

Inversamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$- haz. Sea $U \subseteq X$ abierto.

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

$U_i \subseteq X$ abiertos para toda $i \in I$. Además,

$$U = \bigcup_{B_\alpha \in \mathcal{B}_U} B_\alpha$$

y

$$U_i = \bigcup_{B_\alpha \in \mathcal{B}_{U_i}} B_\alpha \quad \text{para cada } i \in I.$$

Para cualquier $B_\alpha \in \mathcal{B}$, definimos

$$\mathcal{A}_\alpha := \left\{ B_\beta^{(i)} \in \mathcal{B}_{U_i} \middle|\ i \in I,\ B_\alpha \cap B_\beta^{(i)} \neq \varnothing \right\}.$$

Sea $s \in \mathcal{F}'(U)$ tal que $s|_{U_i} = 0\ (\forall)\ i \in I$. Consideremos $B_\alpha \in \mathcal{B}_U$, tenemos dos casos

1. $B_\alpha \in \mathcal{B}_{U_i}$ para algún $i \in I$, ó
2. $B_\alpha \nsubseteq U_i\ (\forall)\ i \in I$.

En el primer caso, $s|_{B_\alpha} = 0$. En el segundo caso, tenemos

$$B_\alpha = \bigcup_{B_\beta^{(i)} \in \mathcal{A}_\alpha} B_\alpha \cap B_\beta^{(i)}.$$

Como $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersección, del primer caso tenemos que

$$s|_{B_\alpha \cap B_\beta^{(i)}} = 0$$

para todos estos abiertos básicos. Y dado que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-haz, entonces $s|_{B_\alpha} = 0$. Note que las $\mathcal{F}'$-restricciones a los abiertos de la base son las aplicaciones naturales del límite inverso. Por tanto $s = 0$.

Ahora, $(\forall)$ $i \in I$ sean $s_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ tal que

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Sea $B_\alpha^{(i)} \in \mathcal{B}_{U_i}$ y definimos $s_{i,\alpha} := s_i|_{B_\alpha^{(i)}}$.

$$\begin{aligned}
s_{i,\alpha}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}} &= s_i|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}} \\
&= \left(s_i|_{U_i \cap U_j}\right)|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}} \\
&= \left(s_j|_{U_i \cap U_j}\right)|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}} \\
&= s_j|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}} \\
&= (s_j|_{B_\beta^{(j)}})|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}} \\
&= s_{j,\beta}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}}
\end{aligned}$$

Escribimos

$$B_\alpha^{(i)} = \bigcup_{B_\gamma^{(l)} \in \mathcal{A}_\alpha^{(i)}} B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}$$

y consideremos $s_{i,\alpha}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}}$. Entonces

$$\begin{aligned}
s_{i,\alpha}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)} \cap B_\beta^{(j)}} &= (s_{i,\alpha}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}})|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)} \cap B_\beta^{(j)}} \\
&= (s_{j,\beta}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\beta^{(j)}})|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)} \cap B_\beta^{(j)}} \\
&= s_{j,\beta}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)} \cap B_\beta^{(j)}}
\end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersección y $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-haz. Entonces, existe un único $s_\alpha^{(i)} \in \mathcal{F}(B_\alpha^{(i)})$ tal que

$$s_\alpha^{(i)}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}} = s_{i,\alpha}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}}.$$

Supongamos que $B_\alpha^{(i)} \subseteq B_\beta^{(j)}$, entonces

$$\begin{aligned}
(s_\beta^{(j)}|_{B_\alpha^{(i)}})|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}} &= s_\beta^{(j)}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}} \\
&= (s_\beta^{(j)}|_{B_\beta^{(j)} \cap B_\gamma^{(l)}})|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}} \\
&= (s_{j,\beta}|_{B_\beta^{(j)} \cap B_\gamma^{(l)}})|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}} \\
&= (s_{l,\gamma}|_{B_\beta^{(j)} \cap B_\gamma^{(l)}})|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}} \\
&= s_{l,\gamma}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}} \\
&= s_{i,\alpha}|_{B_\alpha^{(i)} \cap B_\gamma^{(l)}}.
\end{aligned}$$

Se sigue de la unicidad de $s_\alpha^{(i)}$, que

$$s_\beta^{(j)}|_{B_\alpha^{(i)}} = s_\alpha^{(i)} \quad (*).$$

Sea $B_\alpha \in \mathcal{B}_U$ tal que $B_\alpha \nsubseteq U_i$ $(\forall)$ $i \in I$. Ahora, escribimos

$$B_\alpha = \bigcup_{B_\beta^{(i)} \in \mathcal{A}_\alpha} B_\alpha \cap B_\beta^{(i)}.$$

Entonces, para cada una de estas intersecciones tenemos una sección

$$s_{\alpha\beta}^{(i)} \in \mathcal{F}(B_\alpha \cap B_\beta^{(i)}).$$

Se sigue de (*) que

$$s_{\alpha\beta}^{(i)}|_{B_\alpha \cap B_\beta^{(i)} \cap B_\gamma^{(j)}} = s_{\alpha\gamma}^{(j)}|_{B_\alpha \cap B_\beta^{(i)} \cap B_\gamma^{(j)}}.$$

Como $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-haz, entonces existe $s_\alpha^{(0)} \in \mathcal{F}(B_\alpha)$ tal que

$$s_\alpha^{(0)}|_{B_\alpha \cap B_\beta^{(i)}} = s_{\alpha\beta}^{(i)} \quad (**).$$

Consideremos
$$s = (s_\alpha^{(i)})_{i\in I, i=0} \in \prod \mathcal{F}(V_\alpha).$$
Se sigue de (*) y (**) que $s \in \mathcal{F}'(U)$.

Ahora, sea $s_i' = s|_{U_i}$, entonces

$$\begin{aligned} s_i'|_{B_\alpha} &= s|_{B_\alpha} \\ &= s_\alpha \\ &= s_{i,\alpha} \\ &= s_i|_{B_\alpha} \end{aligned}$$

Como ya demostramos que $\mathcal{F}'$ satisface i) de la definición de haz, entonces $s_i' = s_i$. Por tanto $\mathcal{F}'$ es un haz.

Sea $\mathcal{G}$ otro haz de grupos abelianos sobre X con restricciones $\left\{\rho'_{UV} | U, V \subseteq X \text{ abiertos}\right\}$ tal que $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$ como $\mathcal{B}$-prehaces. Se sigue de la propiedad del límite inverso (ver Apéndice A.4, diagrama [**1**]) que para cada abierto $U \subseteq X$, existe un único homomorfismo de grupos aelianos φ_U tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\rho'_{B_\alpha U}"] \arrow[d, dashed, "\varphi_U"'] & \mathcal{F}(B_\alpha) \\ \mathcal{F}'(U) \arrow[ur, "\pi_\alpha^{(U)}"] & \end{tikzcd}$$

para todo $B_\alpha \subseteq U$. Demostraremos que la colección $\{\varphi_U\}$ es un morfismo de haces (ver definición [1.12]). Sea $V \subseteq U$ abierto. Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'(U) \arrow[r, "\pi_\alpha^{(U)}"] \arrow[d, dashed, "h_{VU}"'] & \mathcal{F}(B_\alpha) \\ \mathcal{F}'(V) \arrow[ur, "\pi_\alpha^{(V)}"] & \end{tikzcd}$$

de la conmutatividad de los dos diagramas anteriores tenemos que

$$\pi_\alpha^{(V)} \circ h_{VU} \circ \varphi_U = \pi_\alpha^{(V)} \circ \varphi_V \circ \rho'_{VU}$$

entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho'_{VU}"'] & \mathcal{F}'(U) \arrow[d, "h_{VU}"] \\ \mathcal{G}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathcal{F}'(V) \end{tikzcd}$$

Demostraremos que φ_U es inyectiva y sobreyectiva para todo abierto U. Sea $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\varphi_U(t) = 0$. Entonces,

$$t|_{B_\alpha} = \pi_\alpha^{(U)}(\varphi_U(t)) = 0$$

para todo $B_\alpha \in \mathcal{B}_U$. Como G es un haz, entonces $t = 0$.

Ahora, sea $(s_\alpha) \in \mathcal{F}'(U)$, por la construcción del límite inverso (ver Apéndice A.5) tenemos que

$$s_\alpha|_{B_\alpha \cap B_\beta} = s_\beta|_{B_\alpha \cap B_\beta}.$$

Dado que $\mathcal{G}$ es un haz y coincide con $\mathcal{F}$ sobre los elementos de la base, existe $s \in \mathcal{G}(U)$ tal que $s|_{B_\alpha} = s_\alpha$. Por lo tanto $\varphi_U(s) = (s_\alpha)$. □

1.2. Gérmen de un prehaz en un punto

En lo sucesivo de éste capítulo consideraremos categorías C que admiten límites directos (ver Apéndice A).

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X con valores en C. Sea $p \in X$. Consideremos

$$\mathcal{U}_p := \{U \in \mathcal{T} | p \in U\}.$$

Definamos una relación $\leq$ sobre $\mathcal{U}_p$, dada por $U \leq V$ si y sólo si $V \subseteq U$. Note que $(\mathcal{U}, \leq)$ es un orden parcial. Más aún, es un conjunto directo, pues $(\forall)$ $V, U \in \mathcal{U}_p$, tenemos que $V \cap U \in \mathcal{U}_p$.

Ahora, para todo $V, U \in \mathcal{U}_p$ definimos $\mathcal{F}'(U) := \mathcal{F}(U)$ y si $U \leq V$, consideremos

$$\rho_{VU} : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}'(V)$$

donde ρ_{VU} son las $\mathcal{F}$-restricciones. Entonces, $\mathcal{F}' : \mathcal{U}_p \to C$ dado en esta manera es un funtor covariante, por tanto un sistema directo (ver Apéndice A.6). Así, definimos el *gérmen de $\mathcal{F}$ en p* como

$$\mathcal{F}_p := \varinjlim_{U \in \mathcal{U}_p} \mathcal{F}(U)$$

Por la construcción del límite directo (ver Apéndice [A.6]), tenemos que cada elemento de $\mathcal{F}_p$ se puede expresar como una clase $\overline{\langle s, U\rangle}$, donde $s \in \mathcal{F}(U)$. Esta relación se define de la siguiente manera: $\langle s, U\rangle \sim \langle t, V\rangle$ si y sólo si $(\exists)$ $W \subseteq U \cap V$ con $p \in W$, tal que $s|_W = t|_W$.

Dado que todo haz es un prehaz, entonces si $\mathcal{F}$ es un haz, definimos $\mathcal{F}_p$ como el gérmen de $\mathcal{F}$ en p considerando $\mathcal{F}$ como prehaz.

Tenemos los morfismos canónicos del límite directo, $\lambda_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ tal que $s \mapsto s_p := \overline{\langle s, U\rangle}$. Llamamos a s_p *el gérmen de s en p.*

En particular, si $\mathcal{F}$ es un prehaz de grupos abelianos (resp. anillos), entonces $\mathcal{F}_p$ existe y es un grupo abeliano (resp. anillo).

Lema 1.11. *Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X con valores en C, tal que satisface la condición i) de la definición de haz. Sean s, $t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ con $s_p = t_p$ $(\forall)p \in X$. Entonces, $s = t$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que para cada $p \in X$, existe una vecindad abierta de p, V_p tal que $s|_{V_p} = t|_{V_p}$. Además,

$$X = \bigcup_{p \in X} V_p$$

se sigue de la condición i) de la definición de haz, que $s = t$. □

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos sobre X y $p \in X$. Consideremos un abierto $U \subseteq X$ tal que contiene a p. Ahora, definamos

$$\mathcal{U}_U := \{V \in \mathcal{U}_p | V \subseteq U\},$$

note que éste es un subconjunto cofinal de $\mathcal{U}_p$, pues $(\forall)V \in \mathcal{U}_p$, $V \cap U \in \mathcal{U}_U$. Entonces,

$$(\mathcal{F}|_U)_p = \mathcal{F}_p$$

$(\forall)$ $p \in U$ (ver proposición [A.16]).

1.3. Morfismos de prehaces

Fijemos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una categoría C. Ahora, consideraremos sólo prehaces y haces sobre X con valores en C (a menos que se especifique otra categoría).

Si $\mathcal{B}$ es una topología para $\mathcal{T}$, al inicio de este capítulo definimos morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces. Ahora, si consideramos $\mathcal{B} = \mathcal{T}$, entonces tenemos la siguiente definición:

Definición 1.12. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ prehaces (resp. haces). Un morfismo de prehaces (resp. de haces) $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de $\mathcal{T}$-prehaces (resp. de $\mathcal{T}$-haces) (ver definición [1.5]).*

Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de prehaces, entonces

$$\varphi|_U : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$$

donde $\varphi|_U = \{\varphi_V | V \subseteq U\}$, es un morfismo de prehaces. Llamamos a $\varphi|_U$ la *restricción de φ sobre U.*

Consideremos $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces de grupos abelianos (resp. anillos). Entonces, por la propiedad del límite directo tenemos definido un homomorfismo de grupos abelianos (resp. anillos)

$$\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$$

tal que $s_p \mapsto \varphi_U(s)_p$ (ver Apéndice [A.6]).

Definición 1.13. *Un morfismo de prehaces φ es inyectivo si $(\forall)$ $U \in \mathcal{T}$, φ_U es inyectivo y es sobreyectivo, si φ_p es sobreyectivo $(\forall)$ $p \in X$.*

Proposición 1.14. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces de grupos abelianos sobre X. $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es inyectivo si y sólo si $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es inyectivo $(\forall) p \in X$.*

Demostración. Supongamos que φ es inyectiva. Sea $p \in X$ y $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi_p(s_p) = 0_p$. Entonces, existe una vecindad abierta de p, $V \subseteq U$ tal que $\varphi_U(s)|_V = 0|_V$. Por la conmutatividad de φ con las restricciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_V(s|_V) &= \varphi_U(s)|_V \\ &= 0|_V \end{aligned}$$

Por la inyectividad de φ, $s|_V = 0|_V$. Entonces, $s_p = 0_p$.

Inversamente, sea $U \in \mathcal{T}$ y $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi_U(s) = 0$. Por hipótesis tenemos que $(\forall) p \in X$, $\varphi_p(s_p) = \varphi_U(S)_p = 0_p$, implica $s_p = 0_p$. Entonces, por lema [1.11], $s = 0$. $\square$

Proposición 1.15. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces de grupos abelianos sobre X. $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un isomorfismo si y sólo si $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo $(\forall) p \in X$.*

Demostración. Si φ es un isomorfismo, entonces por la proposición [1.6], φ_U es un isomorfismo $(\forall)$ U. Entonces por proposición [1.14] φ_p es inyectivo.

Ahora, demostremos que φ_p es sobreyectivo. Sea $t_p \in \mathcal{G}_p$, $t \in \mathcal{G}(U)$. Entonces, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi_U(s) = t$. Así, $\varphi_p(s_p) = t_p$.

Inversamente, por la proposición [1.14], $(\forall)$ U, φ_U es inyectivo. Sea $t \in \mathcal{G}(U)$. Dado que φ_p es sobreyectivo, entonces, para cada $p \in U$, existe V_p una vecindad abierta de p, una sección $s(p) \in \mathcal{F}(V_p)$ y $W_p \subseteq V_p \cap U$ una vecindad abierta de p, tal que $\varphi_{V_p}(s(p))|_{W_p} = t|_{W_p}$. Por tanto podemos escribir

$$U = \bigcup_{p \in U} W_p$$

Veamos que $s(p)|_{W_p \cap W_q} = s(q)|_{W_p \cap W_q}$ $(\forall)$ $p, q \in U$. En efecto, tenemos que

$$\varphi_{V_p}(s(p))|_{W_p \cap W_q} = t|_{W_p \cap W_q}.$$

Ahora, por la conmutatividad de φ con las restricciones concluimos que

$$\varphi_{W_p \cap W_q}(s(p)|_{W_p \cap W_q}) = \varphi_{W_p \cap W_q}(s(q)|_{W_p \cap W_q}),$$

el resultado se sigue de la inyectividad de $\varphi_{W_p \cap W_q}$.

Dado que $\mathcal{F}$ es un haz, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que

$$s|_{W_p} = s(p)|_{W_p}.$$

Note que $\varphi_U(s) = t$, pues $(\forall) p \in X$, $\varphi_U(s)_p = t_p$. Por tanto, $(\forall)$ U, φ_U es un isomorfismo.

$\square$

Corolario 1.16. *Con la notación de la proposición tenemos φ es un isomorfismo si y sólo si es inyectivo y sobreyectivo.*

En particular, concluimos que $\varphi|_U$ es un isomorfismo si φ lo es.

Teorema 1.17. *Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X de grupos abelianos. Entonces, existe un haz $\mathcal{F}^+$, único salvo isomorfismo, y una transformación natural $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ tal que $(\forall)$ $\mathcal{G}$ haz de grupos abelianos y para toda transformación natural $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $(\exists)!$ $\tilde{\alpha}$, transformación natural, tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, dashed, "\tilde{\alpha}"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Más aún, $\theta_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p^+$ es un isomorfismo $(\forall)$ $p \in X$. Llamamos a $\mathcal{F}^+$ el haz asociado a $\mathcal{F}$.

Demostración. Sólo mencionaré la construcción de $\mathcal{F}^+$ y θ (para la demostración ver [4] Cap. II, Proposición 1.2).

Para demostrar la existencia, para cada $U \in \mathcal{T}$, se define

$$\mathcal{F}^+(U) := \begin{cases} f : U \to \dot{\bigcup}_{p\in U}\mathcal{F}_p : \ (\forall)\ p \in U,\ (\exists) \text{ un abierto } V \subseteq U,\ p \in V, \\ \text{y } t \in \mathcal{F}(V) \text{ tal que } (\forall)\ q \in V,\ f(q) = t_q \in \mathcal{F}_q \end{cases}$$

(el cual es no vacío pues $0 : p \mapsto 0_p \in \mathcal{F}^+(U)$), y las restricciones de $\mathcal{F}^+$ como $\rho^+_{VU} : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(V)$ tal que $f \mapsto f|_V$, para todo abierto $V \subseteq U$.

Ahora, definamos $\theta_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ $s \mapsto s^+$, donde $s^+(p) := s_p$ $(\forall)$ $p \in U$. Entonces, $\theta := \{\theta_U | U \in \mathcal{T}\}$, es el morfismo de prehaces del teorema.

$\square$

Corolario 1.18. *θ es inyectivo si $\mathcal{F}$ satisface i) en la definición de haz.*

Demostración. Tenemos $\theta_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ tal que $s \mapsto s^+$. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\theta_U(s) = 0$, por la definición de s^+, tenemos que $s_p = 0$ para toda $p \in U$. Entonces, por lema [1.11], $s = 0$. $\square$

Definición 1.19. *Sean $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}$ prehaces de grupos abelianos (resp. anillos) sobre X. Diremos que $\mathcal{F}'$ es un sub-prehaz de $\mathcal{F}$ si:*

i) Para cada $U \in \mathcal{T}$, $\mathcal{F}'(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ es un subgrupo (resp. subanillo).

ii) Si $V \subseteq U$, entonces $\rho'_{VU} = \rho_{VU}|_{\mathcal{F}'(U)}$, donde ρ'_{VU} y ρ_{VU} son las $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}$-restricciones, respectivamente.

Y lo denotaremos como $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}'$ es un haz, entonces decimos que es un sub-haz de $\mathcal{F}$.

Note que $(\forall)p \in X$, $\mathcal{F}'_p \subseteq \mathcal{F}_p$. En efecto, todo se deduce de la segunda condición en la definición [1.19].

Proposición 1.20. *$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ si y sólo si existe un morfismo de prehaces inyectivo $\varphi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$.*

Demostración. $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, entonces para cada U abierto de X consideremos $id_{\mathcal{F}'(U)} : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U)$. Por la segunda condición de la definición [1.19], tenemos que la identidad conmuta con las restricciones y además es inyectivo para cada U. Por tanto tenemos un morfismo de prehaces inyectivo.

Inversamente, dado un morfismo inyectivo $\varphi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, para cada U tenemos que $\mathcal{F}'(U) \cong Im(\varphi_U)$, por lo que podemos considerar $\mathcal{F}'(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ como subgrupo. Ahora, por la conmutatividad de φ con las restricciones tenemos la segunda condición de la definición. Así, $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. $\square$

Sea $\mathcal{F}$ un pre-haz (resp. haz) de grupos abelianos sobre X y $\mathcal{F}'$ un sub-prehaz (resp. sub-haz) de $\mathcal{F}$. Si $V \subseteq U$, tenemos el homomorfismo de grupos inducido por el paso al cociente

$$h_{VU} : \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V)$$

definido por $\bar{s} \mapsto \overline{s|_V}$.

$$Top(X) \to Ab$$

que envía a cada abierto $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ y a cada inclusión $V \subseteq U \mapsto h_{VU}$, es un funtor contravariante, el cuál denotaremos por $Q(\mathcal{F}/\mathcal{F}')$.

Por lo general éste no es un haz. Así, que denotaremos con $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ a su haz asociado y lo llamamos *haz cociente*.

Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos. Note que si $V \subseteq U$, entonces para toda $s \in ker(\varphi_{_U})$, tenemos $s|_V \in ker(\varphi_{_V})$. En efecto,

$$\varphi_{_V}(s|_V) = \varphi_{_U}(s)|_V = 0$$

Por lo que la aplicación que envía a cada abiero $U \mapsto ker(\varphi_{_U})$ y a cada inclusión $V \subseteq U \mapsto \rho_{VU}|_{ker(\varphi_{_U})}$, donde ρ son las $\mathcal{F}$- restricciones, es un funtor contravariante. Más aún, éste es un sub-haz de $\mathcal{F}$ llamado el kernel de φ y lo denotamos como $ker\ \varphi$.

Ahora, sea $V \subseteq U$. Si $t \in Im(\varphi_{_U})$, entonces $t|_V \in Im(\varphi_{_V})$. En efecto, pues $\varphi_{_U}(s)|_{_V} = \varphi_{_V}(s|_{_V})$ $(\forall)$ $s \in \mathcal{F}(U)$. Entonces, la aplicación que envía a cada abierto $U \mapsto Im(\varphi_{_U})$ y a cada inclusión $V \subseteq U \mapsto \rho'_{VU}|_{Im(\varphi_{_U})}$, donde ρ' son las $\mathcal{G}$- restricciones, es un funtor contravariante, el cuál denotaremos con I_φ.

Note que I_φ satisface i) en la definición de haz. En efecto, sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U y $s \in Im(\varphi_{_U})$ tal que $s|_{U_i} = 0$ $(\forall)i \in I$, dado que $\mathcal{G}$ es un haz entonces $s = 0$.

Para ver si I_φ satisface la segunda condición en la definición de haz, sea $s_j \in Im(\varphi_{_{U_j}})$ para cada $j \in I$ tal que

$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}.$$

Puesto que $\mathcal{G}$ es un haz, entonces existe $s \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para cada $i \in I$. Pero, ¿cómo saber que $s \in Im(\varphi_{_U})$? una respuesta sería que $\varphi_{_U}$ sea un homomorfismo sobreyectivo. Así, que por lo general éste no es un haz. Por tanto denotaremos con $Im\ \varphi$ a su haz asociado y lo llamamos *imagen de* φ. De la observación anterior y el corolario [1.18], deducimos que I_φ es un sub-prehaz de $Im\ \varphi$.

Veamos que $Im\ \varphi$ es un sub-haz de $\mathcal{G}$. En efecto, para cada U tenemos $id_{_{Im(\varphi_U)}} : Im(\varphi_{_U}) \to \mathcal{G}(U)$ y si $V \subseteq U$

$$id_{_{Im(\varphi_V)}} \circ \rho'_{VU}|_{Im(\varphi_U)} = \rho'_{VU} \circ id_{_{Im(\varphi_U)}}$$

Por tanto tenemos un morfismo de prehaces inyectivo $I_\varphi \to \mathcal{G}$. Entonces, por la propiedad universal del haz asociado existe un único morfismo inyectivo

$Im\ \varphi \to \mathcal{G}$.

Si $V \subseteq U$, tenemos el homomorfismo de grupos inducido por el paso al cociente

$$f_{VU} : coker(\varphi_U) \to coker(\varphi_V)$$

definido por $\bar{t} \mapsto \overline{t|_V}$. Entonces la aplicación

$$Top(X) \to Ab$$

que envía a cada abierto $U \mapsto coker(\varphi_U)$ y a cada inclusión $V \subseteq U \mapsto f_{VU}$, es un funtor contravariante. Por lo general éste no es una haz. Así, que denotaremos con *coker* φ a su haz asociado y lo llamaremos *cokernel de* φ.

Lema 1.21. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos sobre X y $\mathcal{F}'$ un sub-haz de $\mathcal{F}$. Entonces*

a) $(ker\varphi)_p = ker(\varphi_p)$.

b) $(Im\varphi)_p = Im(\varphi_p)$.

c) $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_p = \mathcal{F}_p/\mathcal{F}'_p$.

Demostración. a) Sea $s_p \in (ker\varphi)_p \subseteq \mathcal{F}_p$ con $s \in ker(\varphi_U)$. Tenemos que

$$\varphi_p(s_p) = \varphi_U(s)_p = 0_p$$

Ahora, sea $t_p \in ker(\varphi_p)$, $t \in \mathcal{F}(V)$. Entonces, $\varphi_V(t)_p = 0_p$. Por tanto, existe una vecindad abierta de p, $W \subseteq V$ tal que

$$\varphi_V(t)|_W = 0$$

Entonces, $\varphi_W(t|_W) = 0$. Así, $(t|_W)_p \in (ker\varphi)_p$. Note que $(t|_W)_p = t_p$. Por tanto se tiene la igualdad.

b) Dado que $(Im\varphi)_p \cong (I_\varphi)_p$, entonces es suficiente demostrar que $Im(\varphi_p) = I_{\varphi_p}$. La demostración es similar a la del inciso a).

c) Definamos un homomorfismo $Q(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_p \to \mathcal{F}_p/\mathcal{F}'_p$, tal que $\bar{s}_p \mapsto \overline{s_p}$, donde $\bar{s} \in \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$.

Esta aplicación está bien definida. En efecto, supongamos que $\bar{s}_p = \bar{t}_p$, donde $\bar{t} \in \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V)$. Entonces, existe $W \subseteq V \cap U$ una vecindad abierta de p, tal que $\bar{s}|_W = \bar{t}|_W$, por la conmutatividad con las restricciones tenemos $\overline{s|_W} = \overline{t|_W}$, entonces $s|_W - t|_W \in \mathcal{F}'(W)$. Por tanto $\overline{s_p} = \overline{t_p}$.

Note que esta aplicación es sobreyectiva e inyectiva. Por tanto es un isomorfismo. □

Definición 1.22. *Una sucesión de haces de grupos abelianos* $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ *se dice exacta si* $Im\ \alpha = ker\ \beta$.

Proposición 1.23. *Una sucesión de haces de grupos abelianos* $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *es exacta si y sólo si* $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \to \mathcal{H}_p$ *es exacta para todo* $p \in X$.

Demostración. Se sigue del lema anterior y la proposición [1.15]. □

Los resultados obtenidos en este primer capítulo sobre haces y prehaces de grupos abelianos, también son válidos sobre haces y prehaces de anillos.

1.4. O_X-módulos

Definición 1.24. *Un* espacio anillado *es un par* $(X, \mathcal{O}_X)$ *que consiste de un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *y un haz de anillos* $\mathcal{O}_X$ *sobre* X. *Llamamos a* $\mathcal{O}_X$ *haz estructural sobre* X.

Si X es una variedad algebraica, entonces, su haz estructural también se conoce como *haz de funciones regulares*.

Para el resto de esta sección fijemos $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado con $\mathcal{O}_X$-restricciones $r := \{r_{VU} | V \subseteq U\}$; $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ denotan prehaces de grupos abelianos sobre X (a menos que se especifique que son haces) y, $\rho := \{\rho_{VU} | V \subseteq U\}$ y $\rho' := \left\{\rho'_{VU} | V \subseteq U\right\}$ las $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$-restricciones, respectivamente.

Definición 1.25. *Decimos que* $\mathcal{F}$ *es de* $\mathcal{O}_X$*-módulos (ó simplemente un* $\mathcal{O}_X$*-módulo) si satisface que para todo* V, $U \subseteq \mathcal{T}$

i) $\mathcal{F}(U)$ *es un* $\mathcal{O}_X(U)$*-módulo.*

ii) Si $V \subseteq U$, entonces $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos. (i.e.) Si $s \in \mathcal{F}(U)$ y $f \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces

$$\rho_{VU}(fs) = r_{VU}(f)\rho_{UV}(s)$$

Definición 1.26. *Un haz es un $\mathcal{O}_X$-módulo si lo es como prehaz.*

Proposición 1.27. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{F}_p$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo.*

Demostración.

$$\mathcal{O}_{X,p} \times \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p$$

tal que $(a_p, s_p) \mapsto (as)_p$. $\square$

En los siguientes ejemplos $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ son prehaces de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Ejemplo 1.28. *Definamos*

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} : Top(X) \to Ab$$

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$$

Si $V \subseteq U$ asignamos el morfismo

$$(\rho_{VU}, {\rho'}_{VU}) : \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(V) \oplus \mathcal{G}(V)$$

el cual es un morfismo de $\mathcal{O}_X(U)-$módulos.
Si $W \subseteq V \subseteq U$, entonces

$$(\rho_{WV}, {\rho'}_{WV}) \circ (\rho_{VU}, {\rho'}_{VU}) = (\rho_{WU}, {\rho'}_{WU})$$

Además, $(\rho_{UU}, {\rho'}_{UU}) = id_{\mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)}$.
Así, $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es un funtor contravariante. Más aún, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces de $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos y lo llamamos suma directa de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

Para cualquier entero $n > 0$, definimos el haz de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$\mathcal{O}_X^n := \mathcal{O}_X \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X \quad (n\text{-veces})$$

Ejemplo 1.29. *Definamos*

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} : Top(X) \to Ab$$

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

Si $V \subseteq U$ asignamos el morfismo

$$\rho_{VU} \otimes {\rho'}_{VU} : \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{G}(V)$$

el cuál es un morfismo de $\mathcal{O}_X(U)-$módulos.

Si $W \subseteq V \subseteq U$, entonces

$$(\rho_{WV} \otimes {\rho'}_{WV}) \circ (\rho_{VU} \otimes {\rho'}_{VU}) = \rho_{WU} \otimes {\rho'}_{WU}$$

Además, $\rho_{UU} \otimes {\rho'}_{UU} = 1_{\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)}$.

Por lo que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es un prehaz de $\mathcal{O}_X-$módulos. Por lo general este no es un haz, así que denotemos con $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ el haz asociado a este prehaz y lo llamamos producto tensorial de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. *Si no existe confusión con el haz estructural sobre X, entonces simplemente denotamos este haz como $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Ahora, por la proposición [1.31], este haz es un $\mathcal{O}_X$-módulo.*

1.4.1. Morfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos

Definición 1.30. *Decimos que una transformación natural $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, es un morfismo de $\mathcal{O}_X-$módulos (ó simplemente un $\mathcal{O}_X$-morfismo) si*

- *$\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son $\mathcal{O}_X-$módulos,*
- *para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ el morfismo de grupos φ_U es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)-$módulos.*

Un $\mathcal{O}_X-$morfismo es un *isomorfismo de $\mathcal{O}_X-$módulos (ó $\mathcal{O}_X-$isomorfismo)*, si éste es un isomorfismo de prehaces.

Sea A un anillo. Tenemos que la composición de dos homomorfismos de A-módulos es un homomorfismo de A-módulos, entonces la composición de dos $\mathcal{O}_X-$ morfismos es también un $\mathcal{O}_X-$morfismo. Así, los $\mathcal{O}_X-$módulos junto con los $\mathcal{O}_X-$morfismos, forman una categoría, la cual llamaremos *categoría de $\mathcal{O}_X-$módulos.*

Proposición 1.31. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces $\mathcal{F}^+$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo y θ un $\mathcal{O}_X$-morfismo.*

Demostración. Definamos la acción sobre cada abierto U de X, como

$$\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(U)$$
$$(a, f) \mapsto af : p \mapsto a_p f(p)$$

Es la estructura de $\mathcal{O}_X(U)$-módulo de $\mathcal{F}^+(U)$. Además, la aplicación

$$\mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(V)$$

si $V \subseteq U$, es la restricción de funciones, por tanto un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos.
Ahora, recordemos que $(\forall)$ $U \subseteq X$ abierto.

$$\theta_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$$

$s \mapsto s^+ : p \mapsto s_p$. Sea $a \in \mathcal{O}_X(U)$. Entonces

$$\begin{aligned} \theta_U(as)(p) &= (as)_p \\ &= a_p s_p \\ &= a\theta_U(s)(p). \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.32. *i) $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}$*

ii) $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F}$

iii) Sea $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$. Entonces, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}'$.

iv) $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \cong (\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{G} \otimes \mathcal{H})$.

Demostración. i) Por la conmutatividad del producto tensorial sobre los módulos, tenemos que los prehaces $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ son isomorfos.

ii) Tenemos que $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U) \cong \mathcal{F}(U)$ son isomorfos como $\mathcal{O}_X(U)$-módulos, entonces

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F}$$

son isomorfos como prehaces de $\mathcal{O}_X$-módulos.

iii) Sea $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ un isomorfismo. Para cada abierto $U \subseteq X$, consideremos

$$id_{\mathcal{F}(U)} \otimes \varphi_U : \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}'(U)$$

note que este homomorfismo es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos. Más aún, por la conmutatividad de φ con las restricciones, tenemos que

$$id_{\mathcal{F}} \otimes \varphi := \left\{ id_{\mathcal{F}(U)} \otimes \varphi_U \right\}$$

es un isomorfismo de prehaces. Por lo tanto los haces asociados son isomorfos.

iv) Se sigue del isomorfismo

$$(\mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)) \otimes \mathcal{H}(U) \cong (\mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{H}(U)) \oplus (\mathcal{G}(U) \otimes \mathcal{H}(U))$$

$(\forall)$ $U \subseteq X$ abierto. □

Definición 1.33. *Un $\mathcal{O}_X-$módulo $\mathcal{F}$ es llamado libre si es $\mathcal{O}_X-$isomorfo a la suma directa de $\mathcal{O}_X$. Más aún, si para algún entero $r > 0$, existe un $\mathcal{O}_X-$isomorfismo $\mathcal{F} \to \mathcal{O}_X^r$, entonces decimos que $\mathcal{F}$ es libre de rango r.*

Observaciones:

1. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre X, entonces $\mathcal{F}|_U$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo para todo abierto U de X.
2. Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X-$morfismo, entonces $\varphi|_U : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$ es un $\mathcal{O}_X-$morfismo. Más aún, $\varphi|_U$ es un $\mathcal{O}_X-$isomorfismo si φ lo es.

1.4.2. $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X y $U \subseteq X$ abierto. Consideremos

$$Hom_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$$

el conjunto de homomorfismos de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos de $\mathcal{F}(U)$ a $\mathcal{G}(U)$. Tenemos que este conjunto tiene estructura de $\mathcal{O}_X(U)$-módulo, con suma y multiplicación definida de la siguiente manera: sean $f, g \in Hom_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ y $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces

$$(f + g)(s) := f(s) + g(s)$$

y para todo $a \in \mathcal{O}_X(U)$, $(af)(s) := af(s)$.

Ahora, sea $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ el conjunto de todos los homomorfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$. Note que $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \neq \varnothing$. En efecto, tenemos el homomorfismo $0_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ tal que $s \mapsto 0$. Entonces,

$$0 := \{0_U\} \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

Sean φ, $\psi \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Definamos

$$\varphi + \psi := \{\varphi_U + \psi_U \mid U \text{ abierto en } X\}$$

Note que $\varphi+\psi \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. En efecto, si $V \subseteq U$, $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi_U + \psi_U)(s)|_V &= \varphi_U(s)|_V + \psi_U(s)|_V \\ &= \varphi_V(s|_V) + \psi_V(s|_V) \\ &= (\varphi_V + \psi_V)(s|_V)\end{aligned}$$

Lema 1.34. *$(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}),+)$ es un $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-módulo.*

Demostración. $\varphi+0 = 0+\varphi = \varphi$. Por tanto $0 \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, es el elemento cero. Además, $-\varphi := \{-\varphi_U\} \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ y $\varphi+(-\varphi) = (-\varphi)+\varphi = 0$.

La asociatividad y la conmutatividad se siguen de que

$$Hom_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U),\mathcal{G}(U))$$

es un grupo abeliano para todo abierto $U \subseteq X$.

Sea $a \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$. Definimos

$$a \cdot \varphi := \{a|_U \cdot \varphi_U\}$$

donde $\cdot$ de la derecha es la acción de $\mathcal{O}_X(U)$ sobre $Hom_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U),\mathcal{G}(U))$. $\square$

Ahora, fijemos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de $\mathcal{O}_X$-módulos. Definamos una aplicación $Top(X) \to Ab$ tal que

$$U \mapsto Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U)$$

Para todo abierto $V \subseteq U$ tenemos un homomorfismo de $\mathcal{O}_X|_U$-módulos

$$Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U) \to Hom_{\mathcal{O}_X|_V}(\mathcal{F}|_V,\mathcal{G}|_V) \quad *$$

tal que $\varphi \mapsto \varphi|_V$.

Teorema 1.35. *La colección* $\left\{ Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) | U \subseteq X \text{ abierto} \right\}$ *junto con los morfismos definidos en* $(*)$ *definen un haz de* $\mathcal{O}_X$*-módulos.*

Demostración. Dado que la asignación entre los homomorfismos de ambas categorías es precisamente la restricción de morfismos de haces, entonces esta aplicación es un prehaz de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Ahora, sea $U \subseteq X$ un subconjunto abierto, $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U y $\varphi \in Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ tal que $\varphi|_{U_i} = 0$ $(\forall)$ $i \in I$. Sea $V \subseteq U$, entonces podemos escribir

$$V = \bigcup_{i \in I} V \cap U_i$$

por lo supuesto sobre φ, tenemos que $\varphi_{V \cap U_i} = 0$ $(\forall)$ $i \in I$.

Ahora, sea $y \in \mathcal{F}(V)$, entonces

$$\varphi_V(y)|_{V \cap U_i} = \varphi_{V \cap U_i}(y|_{V \cap U_i}) = 0$$

$(\forall)$ $i \in I$. Como $\mathcal{G}$ es un haz, entonces $\varphi_V(y) = 0$. Así, $\varphi_V = 0$. Por tanto, $\varphi = 0$.

Sean $\varphi^{(i)} \in Hom_{\mathcal{O}_X|_{U_i}}(\mathcal{F}|_{U_i}, \mathcal{G}|_{U_i})$ tal que

$$\varphi^{(i)}|_{U_i \cap U_j} = \varphi^{(j)}|_{U_i \cap U_j}.$$

y $s \in \mathcal{F}(V)$. Consideremos $\varphi^{(i)}_{V \cap U_i}(s|_{V \cap U_i}) \in \mathcal{G}(V \cap U_i)$ para cada $i \in I$. Se sigue de la conmutatividad de los morfismos con las restricciones que

$$\varphi^{(i)}_{V \cap U_i}(s|_{V \cap U_i})|_{V \cap U_i \cap U_j} = \varphi^{(j)}_{V \cap U_j}(s|_{V \cap U_j})|_{V \cap U_i \cap U_j}$$

dado que $\mathcal{G}$ es un haz, entonces existe un único $t_s \in \mathcal{G}(V)$ tal que

$$t_s|_{V \cap U_i} = \varphi^{(i)}_{V \cap U_i}(s|_{V \cap U_i}).$$

Definamos $\varphi_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$ tal que $s \mapsto t_s$. Sean $s, s' \in \mathcal{F}(V)$. Dado que

$$(t_s + t_{s'})|_{V \cap U_i} = \varphi^{(i)}_{V \cap U_i}(s|_{V \cap U_i}) + \varphi^{(i)}_{V \cap U_i}(s'|_{V \cap U_i})$$

entonces, por la unicidad de $t_{s+s'}$, tenemos que $t_{s+s'} = t_s + t_{s'}$. Por tanto φ_V es un homomorfismo de grupos abelianos. Ahora, usando la estructura de

$\mathcal{O}_X$-módulos, tenemos que φ_V es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(V)$-módulos.

Sea $W \subseteq V$ un abierto no vacío. Entonces,

$$t_s|_W = t_{s|_W}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} t_s|_{W\cap U_i} &= (t_s|_{V\cap U_i})|_{W\cap U_i} \\ &= \varphi^{(i)}_{V\cap U_i}(s|_{V\cap U_i})|_{W\cap U_i} \\ &= \varphi^{(i)}_{W\cap U_i}(s|_{W\cap U_i}) \\ &= \varphi^{(i)}_{W\cap U_i}((s|_W)|_{W\cap U_i}) \end{aligned}$$

así, la igualdad se sigue de la unicidad de $t_{s|_W}$ con esta propiedad. Por tanto $\varphi_V(s)|_W = \varphi_W(s|_W)$, así la colección $\varphi := \{\varphi_V\} \in Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ y por construcción $\varphi|_{U_i} = \varphi^i$. □

Denotemos este haz de $\mathcal{O}_X$-módulos con $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (ó simplemente con $Hom(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ si no existe confusión con el haz estructural sobre X) y lo llamamos el haz de $\mathcal{O}_X$-morfismos de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$. En particular, si $\mathcal{G} = \mathcal{O}_X$, entonces decimos que $Hom(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ es el *haz dual de* $\mathcal{F}$ *sobre* X y lo denotamos con $\mathcal{F}\check{}$.

1.4.3. Haces invertibles

Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es *localmente libre* si existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es un $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-módulo libre.

Llamaremos *el rango de* $\mathcal{F}$ *en el abierto* U_i al rango de $\mathcal{F}|_{U_i}$ (ver definición [1.33]).

Cuando dicho rango es finito e igual en todos los abiertos del recubrimiento, digamos n, se dice que $\mathcal{F}$ *es un haz localmente libre de rango* n. En particular, si $n = 1$ decimos que $\mathcal{F}$ *es un haz invertible.*

Ejemplo 1.36. *$\mathcal{O}_X$ es un haz invertible sobre X.*

Lema 1.37. *Sea $\mathcal{F}$, un haz invertible sobre X y $\{U_i\}_{i\in I}$, un cubrimiento abierto de X, tal que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$ $(\forall)$ $i \in I$. Entonces,*

$$Hom(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)|_{U_i} \cong Hom(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)|_{U_i}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-módulos, $(\forall)$ $i \in I$.

Demostración. Fijemos $i \in I$. Sean $\varphi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{O}_X|_{U_i}$ el isomorfismo de la hipótesis y $V \subseteq U_i$ un abierto no vacío. Sea $h \in Hom_{\mathcal{O}_X|_V}(\mathcal{F}|_V, \mathcal{O}_X|_V)$. Entonces $h \circ \varphi_i^{-1}|_V \in Hom_{\mathcal{O}_X|_V}(\mathcal{O}_X|_V, \mathcal{O}_X|_V)$. Definimos

$$\psi_V : Hom(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)|_V \to Hom(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)|_V$$

tal que $h \mapsto h \circ \varphi_i^{-1}|_V$.

Note que ψ_V es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_V$-módulos con inversa

$$Hom(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)|_V \to Hom(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)|_V$$

tal que $g \mapsto g \circ \varphi_i|_V$. □

Lema 1.38. $Hom(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X$

Demostración. Sea $V \subseteq U$ abiertos no vacíos. Dado que $\mathcal{O}_X(V)$ es un módulo libre de rango 1 sobre él mismo, entonces

$$\mathcal{O}_X(V) \to End(\mathcal{O}_X(V))$$

enviando $t \mapsto t_L(: s \mapsto ts)$, es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X(V)$-módulos.

Sea $g \in Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)$. Por lo anterior, para cada $V \subseteq U$ $(\exists)$ $t_V \in \mathcal{O}_X(V)$ tal que ${t_V}_L = g_V$. Por la conmutatividad de g con las restricciones tenemos que $(\forall)$ V, $V' \subseteq U$, note que $t_V|_{V\cap V'} = t_{V'}|_{V\cap V'} = t_{V\cap V'}$, . Dado que

$$U = \bigcup_{V\subseteq U} V$$

entonces existe un único $t \in \mathcal{O}_X(V)$ tal que $t|_V = t_V$, por lo anterior $t = t_U$.

Definimos

$$Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U) \to \mathcal{O}_X(U) \ (*)$$

tal que $g \mapsto t_U$.

Ahora, sea $s \in \mathcal{O}_X(U)$. Entonces, para cada $V \subseteq U$ tenemos

$$s|_{V_L} : \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(V).$$

Consideremos $\varphi_s := \{s|_{V_L} : V \subseteq U\}$. Éste es un elemento de $Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)$. Entonces, definamos

$$\mathcal{O}_X(U) \to Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)\ (**)$$

tal que $s \mapsto \varphi_s$. $(*)$ y $(**)$ son inversas una de la otra. $\square$

Teorema 1.39. *Sea $\mathcal{F}$ un haz invertible sobre X. Entonces $\mathcal{F}\check{}$ es invertible.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$, un cubrimiento abierto de X, tal que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$ $(\forall)\ i \in I$. Entonces, por los dos lemas anteriores

$$Hom(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)|_{U_i} \cong Hom(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

$\square$

Proposición 1.40. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces invertibles sobre X. Entonces, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ es un haz invertible.*

Demostración. Sean $\{U_i\}_{i\in I}$ y $\{V_j\}_{j\in J}$ cubrimientos abiertos de X tal que

$$\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{O}_X|_{U_i}$$
$$\varphi_i : \mathcal{G}|_{V_j} \to \mathcal{O}_X|_{V_j}$$

son isomorfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos $(\forall)\ i \in I,\ j \in J$.

Podemos escribir

$$X = \bigcup_{i\in I, j\in J} U_i \cap V_j$$

Además, tenemos que

$$\psi_i|_{U_i\cap V_j} : \mathcal{F}|_{U_i\cap V_j} \to \mathcal{O}|_{U_i\cap V_j}$$
$$\varphi_i|_{U_i\cap V_j} : \mathcal{G}|_{U_i\cap V_j} \to \mathcal{O}|_{U_i\cap V_j}$$

son isomorfismos de $\mathcal{O}_X|_{U_i \cap V_j}$-módulos $(\forall)$ $i \in I$, $j \in J$.

Por lo que hemos encontrado un cubrimiento común, con el cuál $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son localmente libres. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ambos cubrimientos son el mismo, digamos $\{U_i\}_{i\in I}$.

Fijemos $i \in I$ y consideremos el prehaz $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_{U_i}$. Entonces, para cada $V \subseteq U_i$ tenemos los isomorfismos de $\mathcal{O}_X(V)$-módulos

$$\psi_{i_V} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{O}(V)$$
$$\varphi_{i_V} : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{O}(V)$$

entonces, $\mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{G}(V) \cong \mathcal{O}_X(V)$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X(V)$-módulos. Por tanto,

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

es un isomorfismo de prehaces. Así, los haces asociados son isomorfos como $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-módulos (i.e.)

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}.$$

Por tanto $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ es localmente libre de rango 1. $\square$

Proposición 1.41. *Sea $\mathcal{F}$ un haz invertible sobre X. Entonces $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^{\vee} \cong \mathcal{O}_X$.*

Demostración. Ver [4], Cap. II, Proposición 6.12, Pág. 143. $\square$

Sea $Inv(X)$ el conjunto de haces invertibles sobre X; $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in Inv(X)$, escribimos $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ si y sólo si $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. $\sim$ es una relación de equivalencia. Denotemos la clase de equivalencia de un haz invertible $\mathcal{F}$ con $\overline{\mathcal{F}}$. Ahora, definamos

$$\overline{\mathcal{F}} \otimes \overline{\mathcal{G}} := \overline{\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}}$$

Note que esta operación, la cual llamaremos producto tensorial, está bien definida. En efecto, sean $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$ y $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$, entonces por la proposición [1.32] inciso iii), $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{F}' \otimes \mathcal{G}'$.

Proposición 1.42. *$(Inv(X), \otimes)$ es un grupo abeliano.*

Demostración. Se sigue de la proposición anterior y de las proposiciones [1.32], [1.39], [1.40] y [1.38]. $\square$

Proposición 1.43. *Sea* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de* $\mathcal{O}_X$*-módulos sobre* X *y* $\mathcal{L}$ *un haz invertible sobre* X*. Entonces, la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{L} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Para cada $x \in X$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \longrightarrow 0 \,.$$

Ahora como $\mathcal{L}$ es un haz invertible, entonces para cada $x \in X$ $\mathcal{L}_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo libre de rango 1. Por tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_x \bigotimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{L}_x \bigotimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{L}_x \bigotimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$$

es exacta. □

1.5. Imagen directa de un haz

Definición 1.44. *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *e* $(Y, \mathcal{T}')$ *espacios topológicos,* $f : Y \to X$ *una aplicación continua y* $\mathcal{F}$ *un haz sobre* Y *con valores en una categoría* C*. Sea* $\left\{\rho'_{U'V'} \mid V', U' \in \mathcal{T}'\right\}$ *el conjunto de* $\mathcal{F}$*-restricciones. Para cualquier conjunto abierto* $U \subseteq X$*, definimos*

$$f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

y para todo $V \in \mathcal{T}$ *tal que* $V \subseteq U$ *tenemos*

$$\rho'_{f^{-1}(V)f^{-1}(U)} : f_*\mathcal{F}(U) \to f_*\mathcal{F}(V)$$

denotemos esta aplicación con ρ_{VU}*. Entonces,* $\{f_*\mathcal{F}(U), \rho_{VU}\}$ *definen un haz llamado imagen directa de* $\mathcal{F}$ *bajo* f *sobre* X*, el cual denotaremos con* $f_*\mathcal{F}$*.*

Proposición 1.45. *Sea* $Y \subseteq X$ *un subespacio cerrado y* $\mathcal{F}$ *un haz de grupos abelianos sobre* Y*. Entonces*

i)

$$(i_*\mathcal{F})_p = \begin{cases} \mathcal{F}_p, & \text{si } p \in Y \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

ii) $(\forall)\ n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$i_*\mathcal{F}^n = (i_*\mathcal{F})^n.$$

Demostración. i) Si $p \in Y$, tenemos $\mathcal{U}_p := \{U \subseteq X |\ U$ es abierto en X y $p \in U\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p &= \varinjlim_{U \in \mathcal{U}_p} \mathcal{F}(U \cap Y) \\ &= \varinjlim_{U \in \mathcal{U}_p} i_*\mathcal{F}(U) \\ &= (i_*\mathcal{F})_p\end{aligned}$$

pues todos los abiertos sobre Y son de la forma $U \cap Y$ para U abierto en X.

Ahora, consideremos el abierto $U' = X \backslash Y$. Entonces,

$$i_*\mathcal{F}(U') = \mathcal{F}(\varnothing) = 0.$$

Sea $p \in U'$ y $s \in i_*\mathcal{F}(U)$ para algún abierto U en X tal que $p \in U$. Por la definición de las restricciones sobre $i_*\mathcal{F}$, tenemos que

$$s|_{U \cap U'} = 0.$$

Dado que U y s son arbitrarios, entonces $(i_*\mathcal{F})_p = 0$.

ii) Se sigue de la definición del haz suma directa. □

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de grupos abelianos sobre $Y \subseteq X$ un subespacio cerrado y

$$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

un morfismo de haces. Entonces, tenemos un morfismo de haces

$$\varphi_* : i_*\mathcal{F} \to i_*\mathcal{G}$$

dado por la colección $\left\{\varphi_{*_U} := \varphi_{U \cap Y} |\ U \subseteq X \text{ abierto}\right\}$.

Proposición 1.46. *Sea* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de haces de grupos abelianos sobre* Y*. Entonces, la sucesión*

$$0 \longrightarrow i_*\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi_*} i_*\mathcal{G} \xrightarrow{\psi_*} i_*\mathcal{H} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Se sigue de la definición de las aplicaciones φ_* y ψ_*. $\square$

Sean $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(X, \mathcal{O}_X)$ espacios anillados (ver definición [1.24]).

Definición 1.47. *Un* morfismo de espacios anillados *de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *a* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un par* (f, g) *tal que*

i) $f : X \to Y$ *es una función continua.*

ii) $g : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ *un morfismo de haces.*

Consideremos

$$(f, g) : Y \to X$$

una aplicación de espacios anillados y $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_Y$-módulos sobre Y. Entonces, $f_*\mathcal{F}$ tiene una estructura natural de $f_*\mathcal{O}_Y$-módulo. Además, tenemos

$$g : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y.$$

Por tanto, $f_*\mathcal{F}$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X$-módulo.

Sea X una variedad algebraica e Y una subvariedad de X. Entonces, el haz estructural $\mathcal{O}_X$, induce un haz $\mathcal{O}_Y$ sobre Y de la siguiente manera: sea $U \subseteq Y$ un conjunto abierto, definamos

$$\mathcal{O}_Y(U) := \begin{cases} f : U \to k : \ (\forall)\ x \in U,\ (\exists) \text{ un abierto } V \subseteq X,\ x \in V, \\ \text{y } g \in \mathcal{O}_X(V) \text{ tal que } f|_{V \cap U} = g|_{V \cap U} \end{cases}$$

En particular, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es una variedad (ver [8], Cap. I, Sec. 6, Nota I, pág. 38.). Entonces, decimos que Y es una *subvariedad cerrada de* X.

Tenemos una aplicación $i : Y \to X$ de variedades definida por la inclusión de espacios topológicos, donde

$$i_* : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$$

es simplemente la restricción de funciones (i.e) para $g \in \mathcal{O}_X(U)$, implica $g|_{Y \cap U} \in \mathcal{O}_Y(U \cap Y)$).

Definamos

$$ker(i^*) := \mathcal{J}_Y$$

éste es un haz de ideales (i.e.) $\mathcal{J}_Y(U)$ es un ideal de $\mathcal{O}_X(U)$ para todo abierto $U \subseteq X$.

Proposición 1.48. *Con la notación anterior,*

$$i_* : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$$

es sobreyectiva.

Demostración. Tenemos una aplicación definida sobre los gérmenes (ver Sec. 1.3)

$$i_{*x} : \mathcal{O}_{X,x} \to (i_*\mathcal{O}_Y)_x.$$

Supongamos $x \in Y$, entonces por la proposición [1.45] $(i_*\mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y,x}$.

Sea $s_x \in \mathcal{O}_{Y,x}$, entonces $s \in \mathcal{O}_Y(U \cap Y)$ para algún abierto U en X tal que $x \in U$. Por definición de $\mathcal{O}_Y$ existe un abierto $U' \subseteq X$ tal que $x \in U'$ y una sección $t \in \mathcal{O}_X(U')$ tal que

$$t|_{U' \cap U \cap Y} = s|_{U' \cap U \cap Y},$$

entonces $(t \circ i)_x = s_x$. □

Por tanto tenemos la sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

llamada *sucesión exacta fundamental asociada a* Y.

Capítulo 2

Fibrados vectoriales y Divisores de Cartier

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica sobre un campo k algebraicamente cerrado. Definamos $\mathcal{K}(X)$ como el campo de funciones racionales sobre X; $\mathcal{K}^*(X)$ como el conjunto de funciones racionales invertibles sobre X y $\mathcal{O}^*(X) \subseteq \mathcal{K}^*(X)$ el conjunto de unidades en el anillo $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Entonces, si $f \in \mathcal{K}^*(X)$, $f \in \mathcal{O}_X^*(X)$ si y sólo si f no tiene polos ni ceros en X. Además, para cualesquiera dos abiertos V y U de X, si $V \subseteq U$ y $f \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces $f \in \mathcal{O}_X(V)$ significa que $f|_V \in \mathcal{O}_X(V)$.

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{A}^n(k)$ (ó $\mathbb{A}^n$) y $\mathbb{P}^n(k)$ (ó $\mathbb{P}^n$) denotan el *n-espacio afín sobre k* y el *n-espacio proyectivo sobre k*, respectivamente.

2.1. Fibrados vectoriales

Sea $r \in \mathbb{Z}_{>0}$. Un *fibrado vectorial de rango r sobre una variedad algebraica X*, es un par (E, π), donde E es una variedad algebraica sobre k y $\pi : E \to X$ un morfismo sobreyectivo de variedades tal que:

i) existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X e isomorfismos de variedades $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{A}^r(k)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & U_\alpha \times \mathbb{A}^r(k) \arrow[d, "P_1"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd}$$

donde P_1 es la proyección sobre el primer factor.

ii) $(\forall)\ \alpha, \beta \in A$ y $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $(\exists)\ g_{\alpha\beta}(x) \in GL(r,k)$ tal que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x,v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$$

$(\forall)\ v \in \mathbb{A}^r(k)$.

Los morfismos φ_α son llamados *trivializaciones locales de* E y los conjuntos $E_x := \pi^{-1}(\{x\})\ (\forall)\ x \in X$, *las fibras de* E. En particular, si $r = 1$ decimos que (E, π) es un *fibrado en rectas*. Denotaremos el conjunto de las trivializaciones locales de E por $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Sea $M(r,k)$ el k-espacio vectorial de las matrices de $r \times r$ con entradas en k. Identificamos el espacio $M(r,k)$ con k^{r^2} ordenando las entradas a_{ij} de las matrices con el orden lexicográfico, (i.e.)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r}, a_{21}, \ldots, a_{rr}).$$

Esta aplicación define un isomorfismo de k-espacios vectoriales. Por tanto, podemos dar estructura de k-variedad afín a $M(r,k)$.

Consideremos el subespacio de las matrices invertibles $GL(r,k)$. Sean $\{Y_{ij}\}$ las coordenadas de $M(r,k)$. Entonces, $det(Y_{ij}) \in k[Y_{11},\dots,Y_{rr}]$, así

$$\begin{aligned} M(r,k)_{det(Y_{ij})} &= \{A \in M(r,k) : det(A) \neq 0\} \\ &= GL(r,k) \end{aligned}$$

Por lo que $GL(r,k)$ es un abierto afín de $\mathbb{A}^{r^2}(k)$.

Proposición 2.1. *La aplicación*

$$U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r,k) \subseteq \mathbb{A}^{r^2}(k)$$

tal que $x \mapsto g_{\alpha\beta}(x)$ *es un morfismo de variedades.*

Demostración. Denotemos esta aplicación por $g_{\alpha\beta}$, note que está dada por una matriz (g_{ij}) de $r \times r$ funciones k-valuadas sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. Entonces, es suficiente demostrar que g_{ij} es una función regular sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ para cada (i,j).

De la definición de fibrado vectorial tenemos que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{A}^r(k) \to U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{A}^r(k)$$

es un isomorfismo dado por $(x,v) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$.

Ahora, sea $\{e_i : i = 1,\dots,r\}$ la base canónica para $\mathbb{A}^r(k)$. Entonces para cada i, la restricción

$$\varphi_i := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\big|_{U_\alpha \cap U_\beta \times \{e_i\}} : U_\alpha \cap U_\beta \times \{e_i\} \to U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{A}^r(k)$$

es un morfismo de variedades. Consideremos la inclusión natural

$$i : U_\alpha \cap U_\beta \to U_\alpha \cap U_\beta \times \{e_i\}$$

y la segunda proyección

$$P_2 : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{A}^r(k) \to \mathbb{A}^r(k).$$

Entonces, la composición $P_2 \circ \varphi_i \circ i : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{A}^r(k)$ es un morfismo de variedades, (i.e.) para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos que

$$\begin{aligned} (P_2 \circ \varphi_i \circ i)(x) &= g_{\alpha\beta}(x)e_i \\ &= (g_{1i}(x), \cdots, g_{ri}(x)), \end{aligned}$$

por tanto $g_{1i},\dots,g_{ri} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$. Así, $(\forall) i,j$ $g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$. $\square$

Las matrices $g_{\alpha\beta}(x)$ son llamadas *matrices de transición* para E. Además, estas matrices satisfacen las siguientes identidades:

- $g_{\alpha\alpha}(x) = id$.
  Tenemos $\varphi_\alpha \varphi_\alpha^{-1} = id_{U_\alpha \times \mathbb{A}^r(k)}$.

- $g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.
  En efecto,

$$\begin{aligned}(x, g_{\alpha\gamma}(x)v) &= \varphi_\alpha \circ \varphi_\gamma^{-1}(x, v) \\ &= \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\gamma^{-1}(x, v) \\ &= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})((x, g_{\beta\gamma}(x)v)) \\ &= (x, g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x)v)\end{aligned}$$

Proposición 2.2. *Sea (E, π) un fibrado vectorial de rango r sobre X. Consideremos las trivializaciones locales de E, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Entonces, para cada $\alpha \in A$, U_α puede ser considerado afín.*

Demostración. Sea $V \subseteq U_\alpha$ un conjunto abierto no vacío, entonces por la continuidad y la sobreyectividad de π, $\pi^{-1}(V) \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha)$ es un abierto no vacío.

Note que $\varphi_\alpha(\pi^{-1}(V)) = V \times \mathbb{A}^r(k)$. En efecto, sea $x \in \pi^{-1}(V)$, entonces $\pi(x) \in V$. Dado que $\pi = P_1 \circ \varphi_\alpha$, entonces $\varphi_\alpha(x) \in V \times \mathbb{A}^r(k)$. Inversamente, sea $(y, v) \in V \times \mathbb{A}^r(k)$, entonces $\pi(\varphi_\alpha^{-1}(y, v)) = y \in V$, por tanto $\varphi_\alpha^{-1}(y, v) \in \pi^{-1}(V)$, esto implica que $(y, v) \in \varphi_\alpha(\pi^{-1}(V))$.

Así, por el corolario [B.4],

$$\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(V)} : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{A}^r(k)$$

es un isomorfismo. Además, $\pi|_{\pi^{-1}(V)} = \varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(V)} \circ P_1|_{V \times \mathbb{A}^r(k)}$ y si $W \subseteq U_\beta$, entonces la condición *ii*) de la definición de fibrado vectorial se sigue cumpliendo con $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(r, k)$ y las restriciones de $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ sobre $V \cap W$.

Puesto que los abiertos afines forman una base sobre X, lo anterior prueba que la cubierta abierta de la definición de fibrado vectorial puede considerarse afín. $\square$

Proposición 2.3. *Sea (E, π) un fibrado vectorial de rango r sobre X. Consideremos las trivializaciones locales de E, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Entonces, E_x es un k-espacio vectorial de dimensión r.*

Demostración. Por la proposición [2.2], podemos suponer U_α abierto afín para todo $\alpha \in A$. Sea $x \in X$, entonces $\{x\}$ es un subespacio cerrado irreducible de U_α para algún $\alpha \in A$. Por la continuidad de π tenemos que $\pi^{-1}(\{x\}) \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha)$ es un conjunto cerrado. Dado que

$$\varphi_\alpha(\pi^{-1}(\{x\})) = \{x\} \times \mathbb{A}^r(k),$$

entonces, por el corolario [B.4],

$$\varphi_\alpha|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{A}^r(k)$$

es un isomorfismo de variedades.

Ahora, tenemos una estructura de k-espacio vectorial sobre $\{x\} \times \mathbb{A}^r(k)$ dada por

$$\begin{aligned}(x, v) + (x, v') &:= (x, v + v') \\ v' \cdot (x, v) &= (x, v'v)\end{aligned}$$

para todo $v, v' \in \mathbb{A}^r(k)$, donde la suma y el producto de la derecha de ambas ecuaciones son las definidas sobre el k-espacio vectorial $\mathbb{A}^r(k)$. Por lo tanto, $\{x\} \times \mathbb{A}^r(k)$ es un k-espacio vectorial de dimensión r. Entonces, podemos definir una estructura de k-espacio vectorial sobre cada fibra E_x tal que $\varphi_\alpha|_{E_x}$ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}y + y' &:= \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(y) + \varphi_\alpha(y')) \\ \lambda y &:= \varphi_\alpha^{-1}(\lambda \varphi_\alpha(y)) \ (\forall) \lambda \in k\end{aligned}$$

donde la suma de la derecha es la definida sobre $\{x\} \times \mathbb{A}^r(k)$.

Note que esta estructura sobre E_x no depende de la elección de la trivialización, pues si $x \in U_\beta$, entonces

$$\varphi_\beta^{-1}|_{E_x} \circ \varphi_\alpha|_{E_x} : E_x \to E_x$$

es un isomorfismo de k-espacios vectoriales. $\square$

Ejemplo 2.4. *Consideremos la primer proyección $P_1 : X \times \mathbb{A}^r(k) \to X$.*
Tenemos que $P_1^{-1}(X) = X \times \mathbb{A}^r(k)$. Entonces, para

$$id_{X\times\mathbb{A}^r(k)} : P_1^{-1}(X) \to X \times \mathbb{A}^r(k)$$

el diagrama del inciso i) de la definición de fibrado vectorial conmuta y la matriz identidad en $GL(r,k)$ es la matriz de transición para E.

Por tanto, éste es un fibrado vectorial, llamado *fibrado vectorial trivial de rango r.*

Ejemplo 2.5. *Sea (E,π) un fibrado vectorial de rango r sobre X, $U \subseteq X$ abierto no vacío. Entonces, $\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \to U$ es un fibrado vectorial con fibras E_x tal que $x \in U$.*

Dado que π es continua, entonces $\pi^{-1}(U)$ es una subvariedad abierta de E. Además, $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ es sobreyectiva. Consideremos las trivializaciones de E

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{A}^r(k)$$

entonces,

$$\psi_\alpha := \varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(U\cap U_\alpha)} : \pi^{-1}(U \cap U_\alpha) \to U \cap U_\alpha \times \mathbb{A}^r(k)$$

$\alpha \in A$, son isomorfismos de variedades y $\psi_\alpha \circ P_1 = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ donde

$$P_1 : U \cap U_\alpha \times \mathbb{A}^r(k) \to U \cap U_\alpha$$

es la proyección sobre el primer factor. Como $U \cap U_\alpha \cap U_\beta \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$, entonces $(\forall) x \in U \cap U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos que existen $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(r,k)$ tal que

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x,v) &= \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x,v) \\ &= (x, g_{\alpha\beta}(x)v) \end{aligned}$$

$(\forall) v \in \mathbb{A}^r(k)$.

Denotaremos este fibrado vectorial de rango r sobre U con $E|_U$, cuyas trivializaciones locales son $\{(\psi_\alpha, U \cap U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.

2.1.1. Morfismos de fibrados vectoriales

Definición 2.6. *Sea $\pi_E : E \to X$ y $\pi_{E'} : E' \to X$ fibrados vectoriales. Un morfismo de fibrados vectoriales es un morfismo de variedades $f : E \to E'$ tal que:*

i) el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_E"'] & E' \arrow[dl, "\pi_{E'}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

ii) para toda $x \in X$, la aplicación $f_x := f|_{E_x} : E_x \to E'_x$ es una transformación lineal de espacios vectoriales.

Sean $\pi_E : E \to X$, $\pi_{E'} : E' \to X$ y $\pi_{E''} : E'' \to X$ fibrados vectoriales, y sean $f : E \to E'$, $g : E' \to E''$ morfismos de fibrados vectoriales.

Proposición 2.7. *$g \circ f : E \to E''$ es un morfismo de fibrados vectoriales.*

Demostración. Dado que f y g son morfismos de fibrados vectoriales, entonces, $\pi_E = \pi_{E'} \circ f$ y $\pi_{E'} = \pi_{E''} \circ g$. Así,

$$\pi_E = \pi_{E''} \circ g \circ f$$

Ahora, $(\forall)$ $x \in X$, $f|_{E_x} : E_x \to E'_x$ y $g|_{E'_x} : E'_x \to E''_x$ son transformaciones lineales, entonces $(g \circ f)|_{E_x} = g|_{E'_x} \circ f|_{E_x} : E_x \to E''_x$ es una transformación lineal. $\square$

Así, la colección de fibrados vectoriales sobre una variedad fija X y los morfismos definidos entre ellos forman una categoría.

Teorema 2.8. *Sean (E, π_E) y $(E', \pi_{E'})$ fibrados vectoriales sobre una variedad X. Un morfismo de fibrados vectoriales $f : E \to E'$, es un isomorfismo de fibrados vectoriales si y sólo si f es un isomorfismo de variedades.*

Demostración. Si f es un isomorfismo de fibrados vectoriales, entonces f es un isomorfismo de variedades.

Inversamente, si f es un isomorfismo de variedades, entonces $f^{-1} : E' \to E$ es un morfismo de variedades. Demostraremos que f^{-1} es un morfismo de

fibrados vectoriales.
Dado que f es un morfismo de fibrados vectoriales, entonces $\pi_E = \pi_{E'} \circ f$. Así, $\pi_E \circ f^{-1} = \pi_{E'}$.

Ahora, tenemos $f_x^{-1} := f^{-1}|_{E'_x} : E'_x \to E_x$. Note que $f_x \circ f_x^{-1} = id_{E'_x}$ y $f_x^{-1} \circ f_x = id_{E_x}$. Entonces f_x^{-1} es una tranformación lineal. □

De la demostración anterior deducimos que si f es un isomorfismo de fibrados vectoriales, entonces E y E' tienen el mismo rango, en efecto, pues f_x es un isomorfismo de k-espacios vectoriales.

Definición 2.9. *Un fibrado vectorial (E, π) de rango r sobre X se dice trivial si es isomorfo al fibrado vectorial trivial sobre X de rango r.*

Definición 2.10. *Dos fibrados vectoriales (E, π_E) y $(E', \pi_{E'})$ sobre una variedad X son localmente isomorfos si para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta no vacía $U \subseteq X$ de x tal que los fibrados vectoriales sobre U, $E|_U$ (para esta notación ver ejemplo [2.5]) y $E'|_U$ son isomorfos.*

Proposición 2.11. *Sea (E, π) un fibrado vectorial sobre X de rango r. Entonces, (E, π) es localmente trivial (i.e.) localmente isomorfo al fibrado vectorial trivial de rango r sobre X.*

Demostración. Consideremos las trivializaciones locales de E, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Demostraremos que φ_α es un morfismo de fibrados vectoriales $(\forall)\ \alpha \in A$.

Por definición de fibrado vectorial el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\pi_E"'] & U_\alpha \times \mathbb{A}^r(k) \arrow[dl, "P_1"] \\
U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

y además, $\varphi_\alpha|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{A}^r(k)$ es una transformación lineal. Ahora, dado que φ_α es un isomorfismo de variedades entonces por el teorema [2.8], $E|_{U_\alpha}$ y $X \times \mathbb{A}^r(k)|_{U_\alpha}$ son isomorfos para todo $\alpha \in A$. □

2.1.2. Haz de secciones de un fibrado vectorial

Consideremos fibrados vectoriales de rango r sobre una variedad fija X.

Definición 2.12. *Sea (E, π) un fibrado vectorial sobre X. Una sección de E sobre un subconjunto abierto $U \subseteq X$ no vacío, es un morfismo de variedades $s : U \to E$ tal que $\pi \circ s = id_U$.*

Denotamos al conjunto de secciones de E sobre U por $\Gamma(U, E)$.

Proposición 2.13. *Con la notación anterior, $\Gamma(X, E) \neq \varnothing$.*

Demostración. Definamos $s_0 : X \to E$, tal que $x \mapsto (x, 0) \in E_x$. Primero demostremos que es un morfismo de variedades. Por el teorema [B.1], es suficiente ver que sobre los abiertos afínes de las trivializaciones es un morfismo; en particular, sobre éstos el fibrado es localmente trivial, por la tanto podemos considerar E como el fibrado vectorial trivial de rango r sobre X.

$$id_{X \times \mathbb{A}^r(k)} : X \times \mathbb{A}^r(k) \to X \times \mathbb{A}^r(k)$$

Sea $s_0 : X \to X \times \mathbb{A}^r(k)$, tal que $x \mapsto (x, 0)$. Note que

$$s_0 = (id_X, 0) : X \to X \times \mathbb{A}^r(k)$$

Así, s_0 es un morfismo de variedades. Ahora, $(\forall)x \in X$, $P_1(s_0(x)) = x$. Por tanto $s_0 \in \Gamma(X, X \times \mathbb{A}^r(k))$. □

s_0 se llama la *sección cero* de E.

Sean s, $t \in \Gamma(X, E)$. Tenemos que $\pi(s(x)) = x$ $(\forall)$ $x \in X$, por tanto $s(x) \in E_x$. Definamos

$$(s + t)(x) := s(x) + t(x)$$

donde la suma de la derecha es la suma definida sobre el k-espacio vectorial E_x.

Lema 2.14. *Sea $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ y $s \in \Gamma(X, E)$, entonces $hs : X \to E$ tal que $x \mapsto h(x)s(x)$ es una sección de E sobre X.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer X afín y E fibrado vectorial trivial de rango r. Como en la demostración de la proposición [2.15], $s = (id, f) : X \to X \times \mathbb{A}^r(k)$, donde

$$f = (f_1, \dots f_r) : X \to \mathbb{A}^r(k)$$

es un morfismo de variedades.

Note que la aplicación $hf : X \to \mathbb{A}^r(k)$ tal que $x \mapsto h(x)f(x)$ es un morfismo de variedades.

En efecto, dado que $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $hf_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $i = 1, \ldots, r$; y $hf = (hf_1, \ldots, hf_r)$.

Veamos que $hs = (id_X, hf)$. Sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}(hs)(x) &= h(x)s(x)\\ &= h(x)(x, f(x))\\ &= (x, h(x)f(x))\\ &= (x, (hf)(x))\end{aligned}$$

y dado que E_x es un k-espacio vectorial, entonces $h(x)s(x) \in E_x$. Por lo tanto $P_1(h(x)s(x)) = x$. Así, $hs \in \Gamma(U, E)$. □

Teorema 2.15. $(\Gamma(X, E), +)$ *es un* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$*-módulo.*

Demostración. Note que $s + t \in \Gamma(X, E)$.
En efecto, primero demostremos que $s + t$ es un morfismo de variedades. Consideremos X variedad afín y E como fibrado vectorial trivial de rango r sobre X.

Tenemos que $s = (f', f)$ y $t = (g', g)$, donde

$$f', g' : X \to X$$

$$f = (f_1, \ldots, f_r), g = (g_1, \ldots, g_r) : X \to \mathbb{A}^r(k)$$

son morfismos. Dado que $P_1 \circ s = id_X$ y $P_1 \circ t = id_X$, entonces $f' = g' = id_X$.

Note que la aplicación $f + g : X \to \mathbb{A}^r(k)$ tal que $x \mapsto f(x) + g(x)$, es un morfismo de variedades. En efecto, tenemos que $f_i, g_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ $(\forall)i$, y éste es un anillo, entonces $f_i + g_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $(\forall)i$ y $f + g = (f_1 + g_1, \ldots, f_r + g_r)$.

Así, $s + t = (id_X, f + g) : X \to X \times \mathbb{A}^r(k)$ es un morfismo de variedades. Sea $x \in X$. Dado que $s(x) + t(x) \in E_x$, entonces $P_1(s(x) + t(x)) = x$. Por lo que $P_1 \circ (s + t) = id_X$.

Ahora, $s + s_0 = s_0 + s = s$, entonces la sección cero $s_0 \in \Gamma(X, E)$, es el elemento cero en $\Gamma(X, E)$.

Veamos que la aplicación $s' : X \to X \times \mathbb{A}^r(k)$ tal que $x \mapsto -s(x)$ es una sección de E.

Tenemos que $s = (id_X, f)$. Ahora, note que la aplicación $f'' : X \to \mathbb{A}^r(k)$ tal que $x \mapsto -f(x)$ es un morfismo de variedades.
En efecto, dado que $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $-f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $i = 1, \ldots, r$; y $f'' = (-f_1, \ldots, -f_r)$.

Entonces, $s' = (id, f'') : X \to X \times \mathbb{A}^r(k)$ es un morfismo de variedades. Dado que $(\forall)x \in X$, $-s(x) \in E_x$, entonces $P_1(-s(x)) = x$. Así, $s' \in \Gamma(X, E)$

Además s' es el elemento inverso de s. En efecto, sea $x \in X$, entonces $(s' + s)(x) = s'(x) + s(x) = -s(x) + s(x) = 0_x = s_0(x)$ y análogamente, $s + s' = s_0$. Denotaremos a s' como $-s$, para indicar que es el elemento inverso de s.

La asociatividad y la conmutatividad se siguen de que E_x es un k-espacio vectorial para todo $x \in X$.

Por el lema [2.14], tenemos que $\Gamma(X, E)$ es un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulo. □

Dado que $k \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $\Gamma(X, E)$ es un k-espacio vectorial.

Proposición 2.16. $\Gamma(U, E|_U) = \Gamma(U, E)$

Demostración. Sea $s \in \Gamma(U, E|_U)$, entonces $s : U \to \pi^{-1}(U) \subseteq E$, y $\pi \circ s = id_U$. Por tanto $s \in \Gamma(U, E)$. Sea $t \in \Gamma(U, E)$, entonces $t(U) \subseteq \pi^{-1}(U)$, por lo que $t \in \Gamma(U, E|_U)$. □

Ejemplo 2.17. *Consideremos $(X \times \mathbb{A}^1(k), P_1)$ el fibrado vectorial trivial de rango 1 sobre X. Sea $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Entonces, la aplicación $x \mapsto (x, f(x))$ es un morfismo de variedades. Además, $P_1 \circ (id_X, f) = id_X$. Por tanto (id_X, f) es una sección de $X \times \mathbb{A}^1(k)$ sobre X.*

Inversamente, toda sección en $\Gamma(X, X \times \mathbb{A}^1(k))$ tiene esta forma. En efecto, sea $s \in \Gamma(X, X \times \mathbb{A}^1(k))$. Entonces, $s = (id_X, g)$, donde $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Por *tanto podemos identificar biunívocamente* $\Gamma(X, X \times \mathbb{A}^1(k))$ *con* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Más aún,

$$\phi : \Gamma(X, X \times \mathbb{A}^1(k)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

tal que $(id_X, f) \mapsto f$ es un isomorfismo de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)-$módulos. En efecto, sean $g, h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. De la demostración del lema [2.14] se sigue que $g(id_X, f) = (id_X, gf)$ y de la demostración de [2.15]

$$(id_X, f) + (id_X, h) = (id_X, f + h).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\phi(g(id_X, f) + (id_X, h)) &= \phi((id_X, gf) + (id_X, h)) \\
&= \phi((id_X, gf + h)) \\
&= gf + h \\
&= g\phi((id_X, f)) + \phi((id_X, h))
\end{aligned}$$

Por tanto, ϕ es un homomorfismo de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulos. Y por lo anterior éste es biyectivo.

Ejemplo 2.18.

$$\Gamma(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{A}^1(k)) \cong k$$

Por el ejemplo anterior tenemos que

$$\Gamma(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{A}^1(k)) \cong \Gamma(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}) = k,$$

pues las únicas funciones regulares sobre $\mathbb{P}^n$ *son las constantes (ver proposición [4.9]).*

Más aún, $\Gamma(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{A}^r(k)) \cong \mathbb{A}^r(k)$. *En efecto, tenemos que un morfismo*

$$F : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{A}^r(k)$$

está dado por r *funciones regulares sobre* $\mathbb{P}^n(k)$, *por tanto podemos identificar cada sección* $s = (id, F)$ *con un único punto de* $\mathbb{A}^r(k)$ *y viceversa.*

Sea $U \subseteq X$, abierto no vacío, (E, π) un fibrado vectorial de rango r sobre X. Definamos

$$\mathcal{E}(U) := \Gamma(U, E)$$

$$V \subseteq U \mapsto \Gamma(U, E) \to \Gamma(V, E)$$

tal que $s \mapsto s|_V$ es la restricción de morfismos. Así, $\mathcal{E}$ es un pre-haz y además se satisface la condición i) de la definición de haz.

Teorema 2.19. *$\mathcal{E}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Demostración. Sólo falta verificar la condición ii) de la definición de haz. Sea $V = \bigcup_{j \in J} V_j$, $s_j \in \Gamma(V_j, E)$. Supongamos que $s_j|_{V_j \cap V_{j'}} = s_{j'}|_{V_j \cap V_{j'}}$ $(\forall) j, j' \in J$. Entonces, tenemos una aplicación $s : V \to E$ tal que $s|_{V_j} = s_j$ $(\forall) j \in J$. Mostremos que $s \in \Gamma(V, E)$.

Primero demostremos que s es un morfismo de variedades. Supongamos que los abiertos de las trivializaciones U_i son afines. Entonces por la proposición [B.1] es suficiente demostrar que $(\forall) j \in J$

$$s : U_\alpha \cap V_j \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

es un morfismo de variedades, pero $s|_{U_\alpha \cap V_j} = s_j|_{V_j \cap U_\alpha}$. Por tanto s es un morfismo.

Ahora, sea $x \in V$, entonces $x \in V_j$, para algún $j \in J$. Así,

$$\pi(s(x)) = \pi(s_j(x)) = x.$$

Por el lema [2.14] y dado $V \subseteq U$, $fs \in \mathcal{L}_E(U)$, entonces $(fs)|_V = f|_V s|_V \in \mathcal{L}_E(V)$, entonces $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo. □

Entonces, $\mathcal{E}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X, llamado el *haz de secciones de E*.

Teorema 2.20. *Sean (E, π_E) y $(E', \pi_{E'})$ fibrados vectoriales sobre X, y $f : E \to E'$ un isomorfismo de fibrados vectoriales. Entonces, $(\forall)$ abierto no vacío $U \subseteq X$, $\Gamma(U, E) \cong \Gamma(U, E')$ como $\mathcal{O}_X(U)-$módulos.*

Demostración. Consideremos la aplicación $F : \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, E')$ dada por $s \mapsto f \circ s$. Note que F está bien definida.
En efecto, pues $f \circ s$ es un morfismo y dado que $\pi_{E'} \circ f = \pi_E$, entonces $\pi_{E'} \circ f \circ s = id_U$.

Veamos que F es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)-$módulos. Sean $s, t \in \Gamma(U, E)$, $g \in \mathcal{O}_X(U)$, $x \in U$. Entonces

$$\begin{aligned} F(gs+t)(x) &= (f \circ (gs+t))(x) \\ &= f((gs)(x) + (t)(x)) \\ &= f(g(x)s(x) + t(x)) \\ &= g(x)f(s(x)) + f(t(x)) \\ &= (g(f \circ s))(x) + (f \circ t)(x) \\ &= (g(F(s)) + (F(t)))(x) \end{aligned}$$

Supongamos que $f \circ s = f \circ t$, dado que f es un isomorfismo, entonces $s = t$. Ahora, sea $g \in \Gamma(U, E')$, entonces $f^{-1} \circ g \in \Gamma(U, E)$. En efecto, pues $\pi_E \circ f^{-1} \circ g = \pi_{E'} \circ g = id_U$. Así, $F(f^{-1} \circ g) = g$. Por tanto F es biyectiva. □

2.1.3. Fibrados en rectas y Haces invertibles

Sea $\pi : E \to X$ un fibrado vectorial de rango 1 y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ sus trivializaciones locales.

Sea $\mathcal{L}_E$ el haz de secciones de E. En la sección 2.3 demostramos que $\mathcal{L}_E$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre X.

Por la proposición [2.11] tenemos que $E|_{U_\alpha}$ es isomorfo a $(U_\alpha \times \mathbb{A}^1(k), P_1)$ $(\forall)$ $\alpha \in A$. Así,

$$\mathcal{L}_E|_{U_\alpha} \to \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$$

tal que $s \mapsto \varphi_\alpha \circ s$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$-módulos (ver teorema [2.20] y ejemplo [2.17]). En particular, podemos denotar estos isomorfismos como φ_α. Así, $\mathcal{L}_E$ es un haz invertible.

Inversamente, sea L un haz invertible sobre X. Así, existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ para X tal que $\varphi^{(\alpha)} : L|_{U_\alpha} \to \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$-módulos. Entonces, ${\varphi^{(\alpha)}}_{U_\alpha} : L(U_\alpha) \to \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ es un isomorfismo de

$\mathcal{O}_X(U_\alpha)$-módulos.

Para cada $\alpha \in A$, sea $s_\alpha \in L(U_\alpha)$ tal que ${\varphi^{(\alpha)}}_{U_\alpha}(s_\alpha) = 1$, por tanto s_α es una $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$-base para $L(U_\alpha)$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
L(U_\alpha) \arrow[r, "{\varphi^{(\alpha)}}_{U_\alpha}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(U_\alpha) \arrow[d] \\
L(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[r, "{\varphi^{(\alpha)}}_{U_\alpha \cap U_\beta}"'] & \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)
\end{tikzcd}$$

entonces, $\left\{s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}\right\}$ y $\left\{s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}\right\}$ son $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$-bases para $L(U_\alpha \cap U_\beta)$. Por tanto,

$$s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} = g_{\alpha\beta} s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

con $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Así, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(1,k) = k^*$ es un morfismo de variedades. Además, $g_{\alpha\beta}$ satisfacen las siguientes condiciones:

i) $g_{\alpha\alpha} = 1$.

ii) $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

La condición ii) se sigue de las relaciones

1. $s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} = g_{\alpha\beta} s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$
2. $s_\gamma|_{U_\beta \cap U_\gamma} = g_{\beta\gamma} s_\beta|_{U_\beta \cap U_\gamma}$
3. $s_\gamma|_{U_\alpha \cap U_\gamma} = g_{\alpha\gamma} s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\gamma}$

en efecto,

$$\begin{aligned}
(g_{\beta\gamma} s_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} &= s_\gamma|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \\
&= (g_{\alpha\gamma} s_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \\
&= (g_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta}^{-1} s_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}
\end{aligned}$$

como $\left\{s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}\right\}$ es una $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$-base para $L(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$, entonces $g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta}^{-1}$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Así, podemos construir un fibrado en rectas $\mathcal{E}_L$ sobre X con matrices de transición $\{g_{\alpha\beta}\}$ sobre el cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (ver [1] A.5.7, Pág. 527).

Teorema 2.21. *La aplicación*

$$\{\textit{Fibrados en rectas sobre } X\}\,/\cong \to Inv(X)/\cong$$

$\overline{E} \mapsto \overline{\mathcal{L}_E}$ *es una biyección.*

Demostración. Esta aplicación esta bien definida. En efecto, sea (E', π') otro fibrado en rectas. Supongamos que es isomorfo a (E, π). Entonces, por el teorema [2.20] y la proposición [1.6] $\mathcal{L}_E \cong \mathcal{L}_{E'}$.

Ahora, la aplicación

$$Inv(X)/\cong \to \{\text{Fibrados en rectas sobre } X\}\,/\cong$$

$\overline{L} \mapsto \overline{\mathcal{E}_L}$ también está bien definida:

Sea $\mathcal{G}$ otro haz invertible y $\phi : \mathcal{G} \to L$ un isomorfismo de haces. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los abiertos sobre los que $\mathcal{G}$ es localmente libre es la misma cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Entonces, igual que en la construcción de $\mathcal{E}_L$, tenemos elementos $s'_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ y $g'_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*_X(U_\alpha \cap U_\beta)$ tal que

$$s'_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} = g'_{\alpha\beta} s'_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

por tanto obtenemos un fibrado en rectas $\mathcal{E}_\mathcal{G}$ con matrices de transición $g'_{\alpha\beta}$. Para cada α, $\beta \in A$ consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(U_\alpha) \arrow[r, "\phi_{U_\alpha}"] \arrow[d] & L(U_\alpha) \arrow[d] \\
\mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[r, "\phi_{U_\alpha \cap U_\beta}"'] & L(U_\alpha \cap U_\beta)
\end{tikzcd}$$

dado que ϕ es un isomorfismo, entonces $\phi_{U_\alpha \cap U_\beta}(s'_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta})$ es una $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$-base para $L(U_\alpha \cap U_\beta)$. Por tanto

$$\phi_{U_\alpha \cap U_\beta}(s'_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}) = t_\alpha s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

con $t_\alpha \in \mathcal{O}^*_X(U_\alpha \cap U_\beta)$. Dado que ϕ es un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos entonces

$$\begin{aligned}
t_\beta g_{\alpha\beta} s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} &= t_\beta s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \\
&= \phi_{U_\alpha \cap U_\beta}(s'_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}) \\
&= g'_{\alpha\beta} \phi_{U_\alpha \cap U_\beta}(s'_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}) \\
&= g'_{\alpha\beta} t_\alpha s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}
\end{aligned}$$

así, $t_\beta g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta} t_\alpha$. Por tanto $\mathcal{E}_\mathcal{G} \cong \mathcal{E}_L$ (ver [13] Cap. VI, 1.2, Pág. 56).

Sea E un fibrado en rectas con trivializaciones locales $(U_\alpha, \varphi^\alpha)_{\alpha\in A}$ y matrices de transición $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$. Entonces, tenemos los isomorfismos

$$\mathcal{L}_E|_{U_\alpha} \to \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$$

tal que $s \mapsto \varphi_\alpha \circ s$.

Ahora, determinaremos las matrices de transición para $\mathcal{L}_E$. Para cada $\alpha \in A$, sea $s_\alpha \in \mathcal{L}_E(U_\alpha)$ tal que $\varphi_\alpha \circ s_\alpha = 1$. Entonces,

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ s_\alpha = s_\beta$$

sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. Por la definición de las trivializaciones locales, $g_{\alpha\beta} s_\alpha = s_\beta$. Por tanto, las matrices de transición para $\mathcal{L}_E$ son $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$.

Así, $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_E} = E$. □

Sea $f : E \to E'$ un morfismo de fibrados en rectas, entonces

$$\varphi : \mathcal{L}_E \to \mathcal{L}_{E'}$$

tal que $s \mapsto f \circ s$ es un morfismo de haces. Entonces, la correspondencia es una equivalencia entre las dos categorías.

Ejemplo 2.22. *Sean L y L' haces invertibles sobre X. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ambos haces son invertibles sobre la misma cubierta abierta, digamos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Tenemos que $L \bigotimes_{\mathcal{O}_X} L'$ es un haz invertible. Calcularemos las funciones de transición para $L \bigotimes_{\mathcal{O}_X} L'$.*

De la construcción del fibrado en rectas asociado a un haz invertible tenemos que para cada α existe $s_\alpha \in L(U_\alpha)$ tal que $s_\alpha \mapsto 1$ y

$$s_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta} = g_{\alpha\beta} s_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta},$$

entonces las matrices de transición para $\mathcal{E}_L$ son $\{g_{\alpha\beta}\}$. Análogamente, para $\mathcal{E}_{L'}$ existen $s'_\alpha \in L'(U_\alpha)$ tal que

$$s'_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta} = g'_{\alpha\beta} s'_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

Por tanto, la sección $s_\beta \otimes s'_\beta \mapsto 1$. Así, sobre $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\begin{aligned} s_\alpha \otimes s'_\alpha &= g_{\alpha\beta} s_\alpha \otimes g'_{\alpha\beta} s'_\alpha \\ &= g_{\alpha\beta} g'_{\alpha\beta} (s_\alpha \otimes s'_\alpha). \end{aligned}$$

Entonces, las funciones de transición para $L \bigotimes_{\mathcal{O}_X} L'$ son $\left\{g_{\alpha\beta} g'_{\alpha\beta}\right\}$ sobre la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Por la biyección anterior, denotemos el fibrado en rectas asociado a $L \bigotimes_{\mathcal{O}_X} L'$ con $\mathcal{E}_L \bigotimes \mathcal{E}_{L'}$.

2.2. Divisores de Cartier

Definición 2.23. *Una* familia de Cartier sobre X, *es una colección* $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ *tal que:*

i) $U_i \subseteq X$ *son abiertos,* $X = \bigcup U_i$

ii) $f_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$

ii) $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i)$

Consideremos la colección $\mathcal{C}(X)$ de todas las familias de Cartier sobre X.

Dos familias de Cartier $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$, $\{(V_j, g_j)\}_{j \in J}$ se dicen equivalentes si y sólo si $f_i g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$, $(\forall)$ $i \in I$, $j \in J$. A esta relación la denotamos con $\sim$.

Lema 2.24. *Sea $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ una familia de Cartier sobre X. Sean $V, W \subseteq X$ abiertos y $f \in \mathcal{K}^*(V)$, $g \in \mathcal{K}^*(W)$ tal que*

$$f f_i^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V) \ , \ f_i g^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap W), \ (\forall) i \in I.$$

Entonces, $f g^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(V \cap W)$.

Demostración. Dado que $X = \bigcup U_i$, entonces $V \cap W = \bigcup (V \cap W \cap U_i)$.

Tenemos que $f_i f^{-1}, f_i g^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(V \cap W \cap U_i)$ $(\forall) i$. Así, $f g^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(V \cap W \cap U_i)$ $(\forall) i$. Entonces, $f g^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(V \cap W)$. $\square$

Teorema 2.25. $\sim$ *es una relación de equivalencia sobre* $\mathcal{C}(X)$.

Demostración. Sean $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$, $\{(V_j, g_j)\}_{j\in J}$ y $\{(W_l, h_l)\}_{l\in L} \in \mathcal{C}(X)$.

Por inciso *iii*) en la definición de familia de Cartier $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I} \sim \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$.

Supongamos que $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I} \sim \{(V_j, g_j)\}_{j\in J}$, entonces $f_i g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$, implica que $g_j f_i^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$. Por tanto $\{(V_j, g_j)\}_{j\in J} \sim \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$.

Ahora, si $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I} \sim \{(V_j, g_j)\}_{j\in J}$ y $\{(V_j, g_j)\}_{j\in J} \sim \{(W_l, h_l)\}_{l\in L}$, entonces aplicando el lema [2.24] a cada par (U_i, f_i) y (W_l, h_l). Obtenemos que $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I} \sim \{(W_l, h_l)\}_{l\in L}$. □

Definición 2.26. *Una clase de equivalencia de* $\mathcal{C}(X)/\sim$, *se llama un* divisor de Cartier sobre X. *Denotamos* CaDiv(X) $:= \mathcal{C}(X)/\sim$, *el conjunto de divisores de Cartier sobre* X, *y la clase de una familia de Cartier se representará entre corchetes.*

Sea $f \in \mathcal{K}^*(X)$, entonces $\{(X, f)\}$ es una familia de Cartier sobre X, y $div(f) := [\{(X, f)\}]$ es llamado *divisor de Cartier principal.*

Sean $D = [\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}]$, $D' = [\{(V_j, g_j)\}_{j\in J}] \in CaDiv(X)$. Definamos

$$D + D' := [\{(U_i \cap V_j, f_i g_j)\}_{i\in I, j\in J}]$$

Veamos que + está bien definida. Note que

$$\{(U_i \cap V_j, f_i g_j)\}_{i\in I, j\in J}$$

es una familia de Cartier sobre X. En efecto, tenemos que i) y ii) en la definición de familia de Cartier se satisfacen. Así que sólo verificaremos iii). Dado que D y D' son divisores de Cartier, entonces $f_i f_{i'}^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_{i'})$ y $g_j g_{j'}^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(V_j \cap V_{j'})$. Por tanto,

$$f_i f_{i'}^{-1} g_j g_{j'}^{-1} = (f_i g_j)(f_{i'} g_{j'})^{-1} \in \mathcal{O}_X^*((U_i \cap U_{i'}) \cap (V_j \cap V_{j'})).$$

por lo que iii) en la definición de divisor de Cartier se satisface.

Ahora supongamos que

$$\{(U_l', f_l')\}_{l\in L} \sim \{(U_i, f_i)\}_{i\in I} \quad \text{y} \quad \{(V_t', g_t')\}_{t\in T} \sim \{(V_j, g_j)\}_{j\in J}$$

y consideremos $(U_l' \cap V_t', f_l' g_t')$ y $(U_i \cap V_j, f_i g_j)$.

Por hipótesis tenemos que $f_l' f_i^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_l' \cap U_i)$ y $g_t' g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(V_t' \cap V_j)$, entonces $f_l' f_i^{-1}$, $g_t' g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*((U_l' \cap U_i) \cap (V_t' \cap V_j))$. Así

$$(f_l' g_t')(f_i g_j)^{-1} \in \mathcal{O}_X^*((U_l' \cap U_i) \cap (V_t' \cap V_j))$$

por lo tanto $\{(U_l' \cap V_t', f_l' g_t')\}_{t\in T, l\in L} \sim \{(U_i \cap V_j, f_i g_j)\}_{i\in I, j\in J}$. Por tanto esta operación $+$ sobre $CaDiv(X)$ está bien definida.

Proposición 2.27. $(CaDiv(X), +)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración. Sea $D = [\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}] \in CaDiv(X)$, y consideremos $div(1)$. Entonces,

$$D + div(1) = div(1) + D = D$$

por lo que $div(1) \in CaDiv(X)$ es el elemento identidad.

Note que $\left\{(U_i, f_i^{-1})\right\}_{i\in I}$ es una familia de Cartier y que además es el elemento inverso de D.
En efecto,

$$\begin{aligned} D + [\left\{(U_i, f_i^{-1})\right\}_{i\in I}] &= [\left\{(U_i \cap U_j, f_i^{-1} f_j)\right\}_{i\in I, j\in J}] \\ &= div(1). \end{aligned}$$

Análogamente, $[\left\{(U_i, f_i^{-1})\right\}_{i\in I}] + D = div(1)$. Denotemos D^{-1} por $-D$.

Dado que $\mathcal{K}(X)$ es un campo, entonces, la asociatividad y la conmutatividad sobre $CaDiv(X)$ se satisfacen. □

Proposición 2.28. *El conjunto de divisores principales de Cartier es un subgrupo de $CaDiv(X)$.*

Demostración. Sean $div(f)$ y $div(g)$ divisores de Cartier principales, entonces $div(f) - div(g) = [\{(X, fg^{-1})\}] = div(fg^{-1})$. □

Puesto que $Cadiv(X)$ es abeliano, entonces podemos formar el grupo cociente $CaDiv(X)$ módulo el subgrupo de los divisores principales. Denotamos a este subgrupo por $Pic(X)$ y lo llamaremos el *grupo de Picard de X*.

Definición 2.29. *Dos divisores de Cartier D y D', se dicen* linealmente equivalentes *si $\overline{D} = \overline{D'}$ en $Pic(X)$ (i.e) si $(\exists) f \in \mathcal{K}^*(X)$ tal que*

$$D - D' = div(f),$$

y escribimos $D \sim D'$.

Definición 2.30. *Sea $D = [\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}]$ un divisor de Cartier sobre X. Decimos que un punto $x \in U_i \subseteq X$,* está en el soporte de D, *si f_i no es localmente invertible en x, (i.e.) el soporte de D se define como*

$$supp(D) := \bigcup \{ceros\ y\ polos\ de\ los\ f_i\}.$$

Note que el $supp(D)$ no depende de la elección del representante para D. En efecto, sea $\{(V_j, g_j)\}_{j\in J}$ otro representante de D. Sea $x \in X$, entonces $x \in U_i$ para algún $i \in I$, tal que $f_i(x) = 0$. Dado que $X = \bigcup V_j$, entonces $x \in V_j$ para algún $j \in J$.

Afirmamos que $g_j(x) = 0$, pues si no, $g_j^{-1}(x) \neq 0$. Así $f_i(x)g_j^{-1}(x) = 0$, lo cual es una contradicción, pues $f_i g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$.

Ahora, si $x \in X$, $x \in U_i \cap V_j$, es tal que f_i no está definido en x (i.e.) un polo de f_i, entonces $f_i^{-1}(x) = 0$. Aplicando el procedimiento anterior, obtenemos que $g_j^{-1}(x) = 0$.

Análogamente, se prueba que $x \in X$ es un cero o un polo de f_i para algún $i \in I$, si x es un cero o un polo de g_j para algún $j \in J$, respectivamente.

Proposición 2.31. *Sean $D' = [\{(V_i, g_i)\}_{i\in I}]$ y $D'' = [\{(W_j, h_j)\}_{j\in J}]$ divisores de Cartier sobre X. Entonces, $supp(D' + D'') \subseteq supp(D') \cup supp(D'')$.*

Demostración. Sea $x \in supp(D' + D'')$, entonces x es un cero de algún $g_i h_j$ o x es polo de algún $g_r h_s$, dado que k es un dominio, en el primer caso esto implica que x es un cero de g_i ó x es un cero de h_j, y en el segundo implica que x es un polo de g_r ó x es un polo de h_s, por tanto $x \in supp(D') \cup supp(D'')$. $\square$

Definición 2.32. *Decimos que un divisor de Cartier $D = [\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}]$ es un* divisor efectivo o positivo *si $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ $(\forall)i$, (i.e.) f_i no tiene polos sobre U_i $(\forall)i$. Escribimos $D \geq div(1)$ para indicar que D es positivo.*

Note que esta relación está bien definida. En efecto, sea $\{(V_j, g_j)\}_{j\in J}$ otro representante para D. Dado que $X = \bigcup U_i$, entonces para cada $j \in J$,

$$V_j = \bigcup (U_i \cap V_j).$$

Ahora, tenemos que $g_j f_i^{-1} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap V_j)$ $(\forall) i$ y por hipótesis $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$. Así, $(g_j f_i^{-1}) f_i = g_j \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$ $(\forall) i$. Dado que $g_j \in \mathcal{K}^*(V_j)$, lo anterior prueba que $g_j \in \mathcal{O}_X(V_j)$.

Si $D' = [\{(V_j, g_j)\}_{j\in J}]$ es otro divisor de Cartier. Escribimos $D \geq D'$ si y sólo si $D - D'$ es efectivo. Esta relación sobre los divisores de Cartier es de equivalencia. En efecto, $D - D = div(1)$. Por tanto $D \geq D$.

Ahora, si $D \geq D'$, entonces $f_i g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$. Por tanto, $g_j f_i^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$.

y por último, sea $D'' = [\{(W_l, h_l)\}_{l\in L}]$ otro divisor de Cartier. Supongamos que $D \geq D'$ y $D' \geq D''$, entonces $f_i h_l^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j \cap W_l)$ $(\forall)$ $j \in J$. Así, $f_i h_l^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap W_l)$. Por tanto, $D \geq D''$.

Proposición 2.33. *El conjunto de divisores de Cartier positivos es cerrado bajo adición.*

Demostración. En efecto, sean $D = [\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}]$ y $D' = [\{(V_j, g_j)\}_{j\in J}] \in CaDiv(X)$ positivos. Se sigue de que $f_i, g_j \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$. □

2.2.1. Haces invertibles y Divisores de Cartier

Demostraremos que existe una correspondencia biyectiva entre divisores de Cartier sobre X y haces invertibles sobre X (salvo equivalencia lineal e isomorfismos de haces invertibles).

Sea L un haz invertible, entonces existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X tal que

$$\psi_\alpha : L|_{U_\alpha} \to \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$-módulos. De manera similar al caso en que asociamos un haz invertible a un fibrado en rectas obtenemos las matrices $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathcal{K}(X)$ que satisfacen

i) $g_{\alpha\alpha} = 1$.

ii) $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Fijemos γ, digamos γ_0. Definamos $f_\alpha := g_{\gamma_0\alpha} \in \mathcal{K}^*(X)$. Entonces, de la segunda relación tenemos que $g_{\alpha\beta} = g^{-1}_{\beta\gamma_0} g_{\alpha\gamma_0} = f_\beta^{-1} f_\alpha \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Por lo que

$$\mathcal{D}_L := [\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in A}]$$

es un divisor de Cartier sobre X.

Sea L' un haz invertible isomorfo a L. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir el mismo cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ para L' sobre el cual es localmente libre.

Sean $\left\{g'_{\alpha\beta}\right\}$ las matrices de transición para L'. Como anteriormente, fijemos γ_0 y definamos $h_\alpha := g'_{\gamma_0\alpha}$, entonces $\mathcal{D}_{L'} = [\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha\in A}]$. Dado que L y L' son isomorfos entonces para cada $\alpha \in A$, existe $t_\alpha \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha)$ tal que

$$g_{\alpha\beta} = t_\beta^{-1} g'_{\alpha\beta} t_\alpha$$

$(\forall)$ α, $\beta \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} f_\alpha h_\alpha^{-1} &= g_{\gamma_0\alpha} g'_{\gamma_0\alpha} \\ &= t_\alpha^{-1} g'_{\gamma_0\alpha} t_{\gamma_0} g'_{\gamma_0\alpha} \\ &= t_\alpha^{-1} t_{\gamma_0} \end{aligned}$$

por tanto $\mathcal{D}_L - \mathcal{D}_{L'} = [\{(U_\alpha, t_\alpha^{-1} t_{\gamma_0})\}_{\alpha\in A}] = div(t_{\gamma_0})$ pues $t_\alpha \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha)$. Así, $\mathcal{D}_L \sim \mathcal{D}_{L'}$.

Inversamente, Sea $D = [\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in A}] \in CaDiv(X)$. Definamos

$$L(D) := \{f \in \mathcal{K}^*(X) : div(f) \geq -D\} \cup \{0\}$$

Proposición 2.34. *$L(D)$ es un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulo.*

Demostración. Demostremos que es un grupo abeliano con la suma definida en $\mathcal{K}(X)$. Sean $f, g \in L(D)$, entonces

$$\begin{aligned} div(f-g) + D &= [\{(U_\alpha, (f-g)f_\alpha)\}_{\alpha\in A}] \\ &= [\{(U_\alpha, ff_\alpha - gf_\alpha)\}_{\alpha\in A}] \end{aligned}$$

pero por hipótesis $ff_\alpha, gf_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$, entonces $div(f-g) \geq -D$.

Ahora, sea $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $(hf)|_{U_\alpha} f_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$, por lo cual $div(hf) \geq -D$. □

Note que D define un divisor de Cartier sobre cualquier conjunto abierto no vacío $U \subseteq X$. En efecto, tenemos que

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

así,

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} (U \cap U_\alpha)$$

Dado que D es un divisor de Cartier, entonces $f_\alpha|_{U \cap U_\alpha} \in \mathcal{K}^*(U \cap U_\alpha)$ y $(f_\alpha f_\beta^{-1})|_{U \cap U_\alpha \cap U_\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U \cap U_\alpha \cap U_\beta)$.

Por lo que D define el divisor de Cartier $D_U := [\{(U \cap U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in A}]$. Definamos

$$\mathcal{L}_D(U) := L(D_U).$$

Sea V un subconjunto no vacío de U y $f \in L(D_U)$, entonces $div(f) \geq -D_U$ (i.e.) $(ff_\alpha)|_{U \cap U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(U \cap U_\alpha)$, por lo que $ff_\alpha|_{V \cap U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(V \cap U_\alpha)$. Entonces, $div(f) \geq -D_V$. Así, $L_D(U) \subseteq L_D(V)$ con la restricción de funciones.

Proposición 2.35. *Sea $D = div(f)$, $f \in \mathcal{K}^*(X)$. Entonces, $1/f \in \Gamma(X, \mathcal{L}_D)$ y la aplicación $\mathcal{O}_X \to \mathcal{L}_D$ que envía $1 \mapsto 1/f$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Demostración. Dado que $div(f^{-1}) = -div(f)$, entonces $f^{-1} \in \Gamma(X, \mathcal{L}_D)$.

Ahora, sea $g \in \Gamma(X, \mathcal{L}_D)$, entonces $gf \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Así, $g = h/f$ para algún $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Puesto que $f \in \mathcal{K}^*(X)$, entonces $\{1/f\}$ es una $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-base para $\Gamma(X, \mathcal{L}_D)$. Por lo cual

$$\Gamma(X, \mathcal{L}_D) = \frac{1}{f}\Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Que la aplicación sea un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos, se sigue del hecho de que

$$\mathcal{L}_D(V) = \frac{1}{f}|_V \mathcal{O}_X(V)$$

para todo abierto $V \subseteq X$. □

Teorema 2.36. *$\mathcal{L}_D$ junto con la restricción de funciones es un haz invertible sobre X.*

Demostración. Como las restricciones coinciden con las restricciones de funciones, entonces se satisfacen las condiciones de la definición de prehaz y la condición i) de la definición de haz. Entonces, sólo resta verificar la condición ii) de la definición de haz.

Sea $V \subseteq X$ un abierto no vacío. Escribamos

$$V = \bigcup_{j \in J} V_j$$

y sean $g_j \in \mathcal{L}_D(V_j)$ $j \in J$ tal que $g_j|_{V_j \cap V_i} = g_i|_{V_j \cap V_i}$. Como $\mathcal{K}$ es un haz sobre X, entonces existe $g \in \mathcal{K}(V)$ tal que $g|_{V_j} = g_j$. Ahora, dado que cada g_j es una función racional no cero, entonces g es no cero. Ahora, tenemos que demostrar que $g \in \mathcal{L}_D(V)$. Consideremos $gf_\alpha \in \mathcal{K}^*(V \cap U_\alpha)$. Para cada $\alpha \in A$ fijo, podemos escribir

$$V \cap U_\alpha = \bigcup_{j \in J} V_j \cap U_\alpha$$

Entonces, $gf_\alpha|_{V_j \cap U_\alpha} = g_j f_\alpha|_{V_j \cap U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(V_j \cap U_\alpha)$ $(\forall)$ $j \in J$. Por tanto $gf_\alpha \in \mathcal{O}_X(V \cap U_\alpha)$. Así, $div(g) \geq -D_V$.

Por la proposición [2.34] $\mathcal{L}_D$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.

Note que $D = [\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in A}]$ es localmente un divisor principal, pues para cada $\alpha \in A$

$$D_{U_\alpha} = div(f_\alpha)$$

sobre U_α. Entonces, por la proposición anterior $\mathcal{L}_D$ es un haz invertible. $\square$

Sea D' otro divisor de Cartier. Supongamos que $D - D' = div(f)$, para $f \in \mathcal{K}^*(X)$. Definamos

$$\psi_X : L(D) \to L(D')$$

tal que $g \mapsto fg$. Note que esta aplicación está bien definida, pues

$$div(fg) = div(f) + div(g) \geq div(f) - D = -D'$$

Teorema 2.37. *Con la notación anterior, supongamos que $D - D' = div(f)$. Entonces, ψ_X es un isomorfismo de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulos.*

Demostración. Tenemos que ψ_X es un homomorfismo de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulos. Sean $g, g' \in L(D)$ y supongamos que $fg = fg'$, dado que $\mathcal{K}(X)$ es un campo, entonces $g - g' = 0$. Por tanto esta aplicación es inyectiva.

Sea $h \in L(D')$, entonces $div(h) \geq -D' = div(f) - D$. Así, $hf^{-1} \in L(D)$. Por lo cual ψ_X es sobreyectiva. □

Proposición 2.38. *Sea $U \subseteq X$ abierto no vacío. Si $D - D' = div(f)$, entonces $D_U \sim D'_U$.*

Demostración. Por hipótesis, $ff_ig_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$ $(\forall)$ $i \in I, j \in J$, entonces

$$ff_ig_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U \cap U_i \cap V_j) \ (\forall) \ i \in I, \ j \in J$$

por tanto $D_U - D'_U = div(f|_U)$. □

Se deduce de esta proposición y el teorema anterior que la aplicación

$$\psi := \{\psi_U\}_{U \subseteq X} : \mathcal{L}_D \to \mathcal{L}_{D'}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Proposición 2.39. *Sean $D = [\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in A}]$ y $D' = [\{(U_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha \in A}]$ divisores de Cartier sobre X. Entonces,*

$$\mathcal{L}_D \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_{D'} = \mathcal{L}_{D+D'}$$

Demostración. De la construcción del haz invertible asociado a un divisor de Cartier, tenemos que $\mathcal{L}_D$ es invertible bajo el isomorfismo

$$\mathcal{L}_D|_{U_\alpha} \to \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$$

tal que $1/f_\alpha \mapsto 1$. Además, como $f_\alpha f_\beta^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$, entonces las funciones de transición para el fibrado en rectas asociado a $\mathcal{L}_D$ son precisamente $\left\{f_\alpha f_\beta^{-1}\right\}$ (ver la construcción del fibrado en rectas en la sub-sección 2.1.3).

Entonces, las funciones de transición para el fibrado en rectas asociado a $\mathcal{L}_{D+D'}$ son $\{f_\alpha g_\alpha (f_\beta g_\beta)^{-1}\}$. Pero las funciones de transición para $\mathcal{L}_D \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_{D'}$ son $\left\{(f_\alpha f_\beta^{-1})(g_\alpha g_\beta^{-1})\right\}$ (ver ejemplo [2.22]). El resultado se sigue de la conmutatividad del producto en el campo de funciones racionales. □

Teorema 2.40. *El homomorfismo*

$$Pic(X) \to Inv(X)/\cong$$

tal que $\overline{D} \mapsto \overline{\mathcal{L}_D}$ *es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Demostración. La proposición anterior muestra que esta aplicación es un homomorfismo de grupos. Ahora, demostremos que la aplicación definida al inicio de esta sub-sección

$$Inv(X)/\cong \to Pic(X)$$

tal que $\overline{L} \mapsto \overline{\mathcal{D}_L}$ es su inversa.

Sea $D = [\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in A}]$ un divisor de Cartier. Tenemos los isomorfismos de $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$-módulos

$$\varphi_\alpha : \mathcal{O}_X|_{U_\alpha} \to \mathcal{L}_D|_{U_\alpha}$$

tal que $1 \mapsto 1/f_\alpha$.

Entonces, $f_\alpha f_\beta^{-1}$ son las funciones de transición para $\mathcal{L}_D$ fijemos β. Entonces, tenemos un divisor

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}_D}[\left\{(U_\alpha, f_\alpha f_\beta^{-1})\right\}_{\alpha \in A}] = D - div(f_\beta).$$

Por tanto, $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_D} = D$.

$\square$

Capítulo 3

Cohomología de $\check{C}ech$ sobre haces coherentes

En el Apéndice D se definen los conceptos básicos de cohomología, necesarios para la comprensión de éste capítulo.

3.1. Cohomología de $\check{C}ech$

Sea X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X. Para cada $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definamos

$$U_{i_0,\cdots,i_p} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$$

para cada $p+1$-tupla $(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$; un grupo abeliano

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0,\ldots,i_p)\in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0,\cdots,i_p}).$$

y un homomorfismo

$$d_p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

llamado *homomorfismo cofrontera*, tal que para cada $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y para todo $(i_0, \cdots, i_{p+1}) \in I^{p+2}$

$$d_p(\alpha)((i_0, \cdots, i_{p+1})) := \sum_{l=0}^{p+1} (-1)^l \alpha((i_0, \cdots, \hat{i_l}, \cdots, i_{p+1}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}}.$$

La notación $\hat{i_l}$ significa omitir i_l.

Note que d_p es un homomorfismo de grupos abelianos. En efecto,

$$\begin{aligned} d_p(\alpha+\beta)((i_0,\cdots,i_{p+1})) &= \sum_{l=0}^{p+1}(-1)^l(\alpha+\beta)((i_0,\cdots,\hat{i_l},\cdots,i_{p+1}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}} \\ &= \sum_{l=0}^{p+1}(-1)^l\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_l},\cdots,i_{p+1}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}} \\ &+ \sum_{l=0}^{p+1}(-1)^l\beta((i_0,\cdots,\hat{i_l},\cdots,i_{p+1}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}} \end{aligned}$$

Proposición 3.1. $(\forall)\ p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $d_{p+1} \circ d_p = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} & d_{p+1}(d_p(\alpha))((i_0,\cdots,i_{p+2})) = \\ & = \textstyle\sum_{l=0}^{p+2}(-1)^l d_p(\alpha)((i_0,\cdots,\hat{i_l},\cdots,i_{p+2}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+2}}} \\ & = \textstyle\sum_{l=0}^{p+2}(-1)^l[\sum_{j<l}(-1)^j\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_j},\cdots,\hat{i_l},\cdots,i_{p+2}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+2}}} \\ & + \textstyle\sum_{j>l}(-1)^{j-1}\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_l},\cdots,\hat{i_j},\cdots,i_{p+2}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+2}}}] \\ & = \textstyle\sum_{l=0,j<l}(-1)^{j+l}\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_j},\cdots,\hat{i_l},\cdots,i_{p+2}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+2}}} \\ & + \textstyle\sum_{l=0,j>l}(-1)^{j-1+l}\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_l},\cdots,\hat{i_j},\cdots,i_{p+2}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+2}}} \end{aligned}$$

Tenemos dos a dos los términos

Si $j < l$ $\mathcal{A}_{l,j} := (-1)^{j+l}\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_j},\cdots,\hat{i_l},\cdots,i_{p+2}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+2}}}$

Si $j > l$ $\mathcal{A}^-_{l,j} := (-1)^{j-1+l}\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_l},\cdots,\hat{i_j},\cdots,i_{p+2}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+2}}}$

Note que para todo $j' > l'$, $\mathcal{A}^-_{l',j'} = -\mathcal{A}_{j',l'}$.

Por lo que $d_{p+1}(d_p(\alpha))((i_0,\cdots,i_{p+2})) = 0$. $\square$

Por lo tanto, tenemos el complejo de cocadenas de grupos abelianos

$$C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) : 0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d_1} \cdots$$

llamado *complejo de Čech*. Los elementos en el núcleo de d_p son llamados *cociclos de Čech con respecto a $\mathcal{U}$ de grado p* y los elementos en la imagen de d_{p-1} son llamados *cofronteras de Čech con respecto a* $\mathcal{U}$ *de grado* p.

Para cada $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, definamos

$$\begin{aligned}\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= H^p(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \\ &= \frac{ker(d_p)}{Im(d_{p-1})}\end{aligned}$$

como *el* p*-ésimo grupo de cohomología de Čech de* $\mathcal{F}$ *con respecto a* $\mathcal{U}$.

Proposición 3.2. $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$

Demostración. Dado que $\mathcal{F}$ es un haz de grupos abelianos sobre X, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d'} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{i,j})$$

tal que

$$d(s) = (s|_{U_i})_{i \in I} \quad y \quad d'((s_i)_{i \in I}) = (s_i|_{U_{i,j}} - s_j|_{U_{i,j}})_{i<j \in I}$$

Note que $d' = d_0$. Entonces, tenemos que

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \cong Im(d) = ker(d_0) = \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

□

Definición 3.3. *Un elemento* $\alpha = (\alpha_{i_0,\ldots,i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ *se dice alternado de grado* p *si satisface*

i) $\alpha_{i_0,\ldots,i_p} = 0$ *si dos índices en el conjunto* $\{i_0, \ldots, i_p\}$ *son iguales.*

ii) $\alpha_{i_0,\ldots,i_p} = sgn(\sigma)\alpha_{i_{\sigma(0)},\ldots,i_{\sigma(p)}}$ *para toda permutación* σ *de* $\{0, \ldots, p\}$ *donde* $sgn(\sigma)$ *denota el signo de* σ.

El conjunto de formas alternadas de grado p, $C'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un subgrupo de $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Proposición 3.4. *Sea* $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$*. Entonces,* α *satisface ii) en la definición anterior si y sólo si* $\alpha_{i_0,\ldots,i_{l+1},i_l,\ldots,i_p} = -\alpha_{i_0,\ldots,i_l,i_{l+1},\ldots,i_p}$ $(\forall)$ $0 \leq l < n$ *(con la notación anterior).*

Demostración. La necesidad se sigue de que el signo de una transposición es -1. Inversamente, cada permutación σ es el producto de transposiciones, entonces $\sigma = t_1 \cdots t_m$ donde

$$t_j \in \{(0,1),(1,2),(2,3),...,(p-1,p)\}$$

$j = 1, \ldots, m$. Por lo tanto

$$\alpha_{i_{\sigma(0)},\ldots,i_{\sigma(p)}} = (-1)^m \alpha_{i_0,\ldots,i_p}.$$

□

Proposición 3.5. *Si α es alternada de grado p. Entonces, $d_p(\alpha)$ es alternada de grado $p+1$*

Demostración.

$$\begin{aligned}
&-d_p(\alpha)(i_0,\ldots,i_l,i_{l+1},\ldots,i_{p+1}) = \\
&= -\textstyle\sum_{t=0}^{p+1}(-1)^t\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_t},\cdots,i_l,i_{l+1},\ldots,i_{p+1}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}} \\
&= [-\textstyle\sum_{t<l}(-1)^t\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_t},\cdots,i_l,i_{l+1},\ldots,i_{p+1})) \\
&-(-1)^l\alpha((i_0,\cdots,\hat{i_l},i_{l+1},\ldots,i_{p+1})) - (-1)^{l+1}\alpha((i_0,\cdots,i_l,\hat{i_{l+1}},\ldots,i_{p+1})) \\
&-\textstyle\sum_{t>l+1}(-1)^t\alpha((i_0,\cdots,i_l,i_{l+1},\ldots,\hat{i_t},\cdots,i_{p+1}))]|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}} \\
&= d_p(\alpha)(i_0,\ldots,i_{l+1},i_l,\ldots,i_{p+1})
\end{aligned}$$

entonces por la proposición anterior, $d_p(\alpha)$ es alternada de grado $p+1$. □

Así, la restricción de d_p define un homomorfismo de grupos de

$$C'^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C'^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Por tanto, tenemos un complejo $C'^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Si fijamos un orden total $<$ sobre I y

$$C''^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{i_0<\ldots<i_p} \mathcal{F}(U_{i_0,\cdots,i_p}).$$

el homomorfismo cofrontera d_p induce un homomorfismo sobre C''^p dado por restricción.

Teorema 3.6. *Dado un orden total sobre I, existe un isomorfismo canónico*

$$H^p(C''^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) \cong H^p(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})).$$

Demostración. Tenemos las proyecciones de $C'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sobre las coordenadas $(i_0, \ldots, i_p)$ tal que $i_0 < \ldots < i_p$, entonces por la propiedad universal del producto tenemos un homomorfismo de grupos abelianos

$$f : C'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C''^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

tal que conmuta con las proyecciones de $C''^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Además, este homomorfismo es un isomorfismo. En efecto, sea

$$\alpha = (\alpha_{i_0,\ldots,i_p}) \in C'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

tal que $f(\alpha) = 0$. Se sigue de la conmutatividad de f con las proyecciones y de que α es una forma alternada, que $\alpha_{i_0,\ldots,i_p} = 0$ $(\forall)$ $(i_0, \ldots, i_p)$. Por tanto, f es inyectiva. Ahora, sea $\beta = (\beta_{i_0,\ldots,i_p}) \in C''^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Definamos

$$\beta'_{i_0,\ldots,i_p} := \begin{cases} \beta_{i_0,\ldots,i_p} & \text{, si } i_0 < \ldots < i_p \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

entonces $\beta' = (\beta'_{i_0,\ldots,i_p}) \in C'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y $f(\beta') = \beta$. Así, f es sobreyectiva. El resultado se sigue de que $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong C'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (ver [12], Proposición 2, Pág. 214). $\square$

Corolario 3.7. *Si $I = \{1, \ldots, n\}$ con el orden total usual $<$ sobre $\mathbb{R}$, entonces $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ $(\forall)$ $p \geq n$.*

Demostración. Si $p \geq n$, entonces no existe $(p + 1)$-tupla estrictamente creciente de índices $i_0, \ldots, i_p$, por tanto $C''^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ y en consecuencia $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. $\square$

Sea $\mathcal{F}'$ otro haz de grupos abelianos sobre X y $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morfismo de haces. Definamos

$$\varphi^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}')$$

tal que para cada $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$\varphi^p(\alpha)((i_0, \cdots, i_p)) := \varphi_{U_{i_0,\cdots,i_p}}(\alpha((i_0, \cdots, i_p)))$$

Note que φ^p es un homomorfismo de grupos abelianos. En efecto,

$$\begin{aligned}\varphi^p(\alpha+\beta)((i_0,\cdots,i_p)) &= \varphi_{U_{i_0,\cdots,i_p}}((\alpha+\beta)((i_0,\cdots,i_p)))\\ &= \varphi_{U_{i_0,\cdots,i_p}}(\alpha((i_0,\cdots,i_p))+\beta((i_0,\cdots,i_p)))\\ &= \varphi_{U_{i_0,\cdots,i_p}}(\alpha((i_0,\cdots,i_p)))+\varphi_{U_{i_0,\cdots,i_p}}(\beta((i_0,\cdots,i_p))).\end{aligned}$$

Sea $\varphi := \{\varphi^p\}_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Denotemos los morfismos cofrontera de $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}')$ con d'_p, $p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Proposición 3.8. *$\varphi : C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}')$ es un morfismo de complejos.*

Demostración. Debemos demostrar que $(\forall)$ $p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "d_p"] \arrow[d, "\varphi^p"] & C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[d, "\varphi^{p+1}"] \\ C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}') \arrow[r, "d'_p"] & C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}') \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}&(\varphi^{p+1}\circ d_p)(\alpha)((i_0,\cdots,i_{p+1})) =\\ &= \varphi^{p+1}\left(\textstyle\sum_{l=0}^{p+1}(-1)^l\alpha((i_0,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_{p+1}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}}\right)\\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{p+1}(-1)^l\varphi_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}}\left(\alpha((i_0,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_{p+1}))|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}}\right)\\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{p+1}(-1)^l\varphi_{U_{i_0,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_{p+1}}}(\alpha((i_0,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_{p+1})))|_{U_{i_0,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_{p+1}}}\\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{p+1}(-1)^l(\varphi^p(\alpha)((i_0,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_{p+1})))|_{U_{i_0,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_{p+1}}}\\ &= (d'_p\circ\varphi^p)(\alpha)((i_0,\cdots,i_{p+1})).\end{aligned}$$

□

Por tanto φ induce un homomorfismo natural de grupos

$$\check{H}^p(\varphi) : \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}')$$

$$\overline{\alpha} \;\mapsto\; \overline{\varphi^p(\alpha)}$$

Definición 3.9. *Sea $\mathcal{U}' = \left\{U'_j\right\}_{j\in J}$ un cubrimiento de X. Decimos que $\mathcal{U}'$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, si para cada $j\in J$ $(\exists)$ $i\in I$ tal que $U'_j\subseteq U_i$.*

En particular, $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

Sea $\mathcal{U}'$ un refinamiento de $\mathcal{U}$. Para cada $j \in J$ definamos

$$\mathcal{U}'_j := \left\{ U_i | \ i \in I \text{ y } U'_j \subseteq U_i \right\}.$$

Por definición de refinamiento, esta familia es no vacía. Ahora, por el axioma de elección podemos elegir una función de elección definida sobre la familia de conjuntos

$$\left\{ \mathcal{U}'_j \right\}_{j \in J}.$$

Esta aplicación induce una función sobre los conjuntos de índices

$$\begin{aligned} \mu : J &\to I \\ j &\mapsto \mu(j) \end{aligned}$$

tal que $U'_j \subseteq U_{\mu(j)}$. La aplicación μ es llamada *una función de refinamiento.* Esta función induce una aplicación

$$\theta^p_\mu : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$$

dada por

$$\theta^p_\mu(\alpha)((j_0, \cdots, j_p)) := \alpha((\mu(j_0), \cdots, \mu(j_p)))|_{U'_{j_0, \cdots, j_p}}$$

Dado que las restricciones son homomorfismos de grupos abelianos, entonces θ^p es un homomorfismo de grupos abelianos.

Denotemos los homomorfismos cofrontera de $C^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ por d'_p y

$$\theta_\mu := \left\{ \theta^p_\mu \right\} \quad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Proposición 3.10. *$\theta_\mu : C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ es un morfismo de complejos.*

Demostración.

$$\begin{aligned} (\theta^{p+1}_\mu \circ d_p)(\alpha)((j_0, \cdots, j_{p+1})) &= d_p(\alpha)((\mu(j_0), \cdots, \mu(j_{p+1})))|_{U'_{j_0, \cdots, j_{p+1}}} \\ &= \sum_{l=0}^{p+1} (-1)^l \alpha((\mu(j_0), \cdots, \widehat{\mu(j_l)}, \cdots, \mu(j_{p+1})))|_{U'_{j_0, \cdots, j_{p+1}}} \end{aligned}$$

$$(d'_p \circ \theta^p_\mu)(\alpha)((j_0, \cdots, j_{p+1})) = \sum_{l=0}^{p+1} (-1)^l \theta^p_\mu(\alpha)(((j_0), \cdots, \hat{j_l}, \cdots, j_{p+1}))|_{U'_{j_0,\cdots,j_{p+1}}}$$
$$= \sum_{l=0}^{p+1} (-1)^l \alpha((\mu(j_0), \cdots, \widehat{\mu(j_l)}, \cdots, \mu(j_{p+1})))|_{U'_{j_0,\cdots,j_{p+1}}}$$

por lo que $\theta^{p+1}_\mu \circ d_p = d'_p \circ \theta^p_\mu$ $(\forall)$ $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $\square$

Así, θ_μ induce un homomorfismo de grupos abelianos

$$\check{H}^p(\theta_\mu) : \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$$
$$\overline{\alpha} \mapsto \overline{\theta^p_\mu(\alpha)}$$

Sea $\tau : J \to I$ otra función de refinamiento y θ_τ el morfismo de complejos inducido por τ. Entonces, θ_μ y θ_τ son morfismos de complejos de cocadenas homotópicos (Ver [12], n° 21, Proposición 3, Pág. 214).

Entonces, $\check{H}^p(\theta_\mu) = \check{H}^p(\theta_\tau)$ (ver proposición [D.7]). Por lo que el homomorfismo sobre los grupos de cohomología es independiente de la función de refinamiento que se elija.

Para cualesquiera dos cubrimientos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ de X, escribimos $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}'$ si $\mathcal{U}'$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}'$ y $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U}$, entonces

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$$

es un isomorfismo de grupos (Ver [11], Cap. 5, Corolario 2.9, Pág. 182).

Denotemos al conjunto de cubrimientos de X por $Ref(X)$.

Note que $(Ref(X), \leq)$ es un conjunto directo. En efecto, para que éste sea un conjunto parcialmente ordenado sólo resta verificar la transitividad. Supongamos que $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}'$ y $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U}''$, donde $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{U}' = \left\{U'_j\right\}_{j \in J}$ y $\mathcal{U}'' = \{U''_l\}_{l \in L}$. Tenemos que $(\forall)$ $l \in L$ $(\exists)$ $j \in J$ tal que $U''_l \subseteq U'_j$, pero $(\forall)$ $j \in J$ $(\exists)$ $i \in I$ tal que $U'_j \subseteq U_i$. Por tanto $U''_l \subseteq U_i$. Entonces, $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}''$.

Ahora, con la notación anterior, consideremos

$$\mathcal{U}^{JL} := \left\{U_{jl} = U'_j \cap U''_l | (j, l) \in J \times L\right\}$$

note que $\mathcal{U}^{JL}$ es un cubrimiento abierto de X y, $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U}^{JL}$ y $\mathcal{U}'' \leq \mathcal{U}^{JL}$. Por tanto $(Ref(X), \leq)$ es un conjunto directo.

Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X. Definamos una aplicación

$$\check{H}^p(\_\_, \mathcal{F}) : Ref(X) \to Ab$$

tal que

$$\mathcal{U} \mapsto \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

y si $\mathcal{U}'$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, entonces para cualquier función de refinamiento, tenemos definido un homomorfismo de grupos abelianos $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$.

Proposición 3.11. *$\check{H}^p(\_\_, \mathcal{F})$ es un funtor covariante.*

Demostración. Si $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}$ tenemos el morfismo identidad $id : \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Ahora, si $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}' \leq \mathcal{U}''$, sean

$$\mu : J \to I \quad \mu' : L \to J \quad \text{y} \quad \mu'' : L \to I$$

funciones de refinamiento y

$$\theta^p_\mu : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \quad \theta^p_{\mu'} : C^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}'', \mathcal{F}) \quad \text{y}$$

$$\theta^p_{\mu''} : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}'', \mathcal{F})$$

los homomorfismos inducidos por μ, μ' y μ'', respectivamente.

Entonces $\theta^p_{\mu'} \circ \theta^p_\mu$ está dada por $\mu \circ \mu' : L \to I$ la cual es una aplicación de refinamiento. Dado que la aplicación inducida sobre los grupos de cohomología no depende de la función de refinamiento entonces tenemos que $\check{H}^p(\theta_{\mu'}) \circ \check{H}^p(\theta_\mu) = \check{H}^p(\theta_{\mu''})$. $\square$

Definición 3.12. *Para cada $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, definimos*

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U} \in Ref(X)} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

como el p-ésimo grupo de cohomología de Čech de $\mathcal{F}$.

Observación 3.13. *Dado que se define como el límite directo, entonces podemos restringirnos a subconjuntos cofinales de $Ref(X)$ (ver proposición [A.16]). Por ejemplo, si X es casi-compacto, el conjunto de cubrimientos finitos forman un subconjunto cofinal de $Ref(X)$. Y si X es una variedad algebraica los cubrimientos por abiertos afines forman un subconjunto cofinal de $Ref(X)$.*

Sea $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de haces sobre X. Por la proposición [B.6] tenemos la sucesión exacta en las secciones globales sobre cada abierto no vacío y por la proposición [C.1] la sucesión

$$0 \longrightarrow C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^p} C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^p} C^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

es exacta. Ahora, definimos $C_0^p(\mathcal{U},\mathcal{H}) := Im(\psi^p)$, entonces

$$0 \longrightarrow C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^p} C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^p} C_0^p(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. Sean d''_p los homomorfismos cofrontera para $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{H})$. Consideremos

$$d_p^0 := d''_p|_{C_0^p(\mathcal{U},\mathcal{H})} : C_0^p(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to C_0^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

la cual está bien definida, pues ψ es un morfismo de complejos. Entonces,

$$C_0^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{H}) := \cdots \longrightarrow C_0^p(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{d_p^0} C_0^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow \cdots$$

es un complejo de cocadenas. Así, tenemos la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C_0^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

por la proposición [D.8] induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow \check{H}_0^p(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow \cdots$$

donde para todo $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\check{H}_0^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$ es el p-ésimo grupo de cohomología inducido por el complejo $C_0^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{H})$. Así, por el teorema [A.17] la sucesión

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^p(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \check{H}_0^p(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^{p+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^{p+1}(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \cdots \quad \textbf{(1)}$$

es exacta.

3.2. Haces coherentes

Sea $\mathcal{A}$ un haz de anillos sobre un espacio topológico X. Un $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{F}$ es $\mathcal{A}$-*coherente* si existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tal que

$$\mathcal{A}|_{U_i}^{p_i} \longrightarrow \mathcal{A}|_{U_i}^{q_i} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $\mathcal{A}$-módulos, donde p_i, $q_i \geq 1$.

En este capítulo, si X es una variedad y $\mathcal{F}$ un haz $\mathcal{O}_X$-coherente sobre X, entonces decimos simplemente que $\mathcal{F}$ es un haz *algebraico coherente* (si no existe confusión con el haz estructural de la variedad X).

3.2.1. Cohomología de haces coherentes sobre variedades algebraicas

Para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y para cualquier subconjunto X de $\mathbb{A}^n(k)$, consideremos aquellos polinomios, en el anillo de polinomios en n-variables $k[X_1,\ldots,X_n]$, que se anulan sobre X; el conjunto de estos polinomios forman un ideal de $k[X_1,\ldots,X_n]$, llamado el *ideal de* X y lo denotamos con $I(X)$.

Ahora, para cualquier ideal J de $k[X_1,\ldots,X_n]$, definimos

$$V(J) := \{p \in \mathbb{A}^n(k) | f(p) = 0 (\forall) f \in J\}$$

y lo llamamos *conjunto algebraico afín.*

Análogamente, definimos el ideal definido por un subconjunto en el n-espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(k)$ y los conjuntos algebraicos proyectivos con la diferencia de que J debe ser un ideal homogéneo; en este caso ambos son denotados en la misma manera que en las definiciones anteriores.

En este capítulo, utilizaremos algunas de las propiedades de los conjuntos algebraicos y los ideales definidos por subconjuntos del espacio afín y proyectivo, éstas pueden consultarse en el libro «Algebraic Curves» de *William Fulton* [3].

La notación $n >> 0$ para $n \in \mathbb{N}$, significa n suficientemente grande.

Proposición 3.14. *Sea X una variedad, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ $f \neq 0$ y $g \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$. Entonces, $f^n g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ para $n >> 0$.*

Demostración. Dado que X es casi-compacto y los abiertos afínes forman una base para la topología sobre X, entonces supongamos que X es una subvariedad cerrada de k^r. Sea $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = A_f$. Por lo que existe un entero no negativo n y una función regular h sobre X tal que $g = h/f^n$. □

Proposición 3.15. *Sea X una variedad, $\mathcal{F}$ un haz $\mathcal{O}_X$-coherente sobre X, f una función regular sobre X y $g \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tal que $g|_{X_f} = 0$. Entonces, la sección $f^n g = 0 \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ para $n >> 0$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un cubrimiento abierto de X tal que $\mathcal{F}$ es coherente sobre cada uno de estos abiertos. Sin pérdida de generalidad supongamos que cada U_α es un abierto afín de X. Por la condición i) en la definición de haz, es suficiente demostrar que para n suficientemente grande $f^n g|_{U_\alpha} = 0$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Para cada U_α tenemos una sucesión exacta de haces

$$\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}^p \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}^q \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_\alpha} \longrightarrow 0$$

ϕ está dada por $t_1, \ldots, t_p \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X^q)$ tal que $(a_i) \mapsto \sum_{i=0}^p a_i t_i$. Entonces,

$$\phi_x : \mathcal{O}_{X,x}^p \to \mathcal{O}_{X,x}^q$$

tal que $(a_{ix}) \mapsto \sum_{i=0}^p a_{ix} t_{ix}$.
Sea $R := \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ Tenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{O}_{X,x}^p \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{O}_{X,x}^q \longrightarrow \mathcal{F}_x \cong \frac{\mathcal{O}_{X,x}^q}{Im(\phi_x)} \longrightarrow 0$$

además, $g_x \in \mathcal{F}_x$, por tanto existe $\sigma \in \mathcal{O}_{X,x}^q$ tal que en el cociente

$$\overline{\sigma} = g_x.$$

Por hipótesis $g|_{X_f} = 0$, entonces $g_x = 0$ $(\forall)$ $x \in X_f$. Así, $\sigma \in Im(\phi_x)$. Por tanto,

$$\sigma = \sum_{i=0}^p f_i t_{ix}$$

donde $f_i \in \mathcal{O}_{X,x} = R_{m_x}$, $m_x = \{f \in R | f(x) = 0\}$ es un ideal maximal. Entonces, para cada i escribamos $f_i = R_i/G_i$ donde $R_i \in R$ y $G_i(x) \neq 0$. Por lo tanto,

$$G_{(x)}\sigma = \sum_{i=0}^{p} R_i' t_{ix},$$

$G_{(x)} \in R$ y $G_{(x)}(x) \neq 0$ $(\forall)$ $x \in X_f$. Consideremos

$$J = \left\langle \left\{ G_{(x)} \right\}_{x \in X_f} \right\rangle.$$

Puesto que para cada $x \in X_f$, $X_f \subseteq X_{G_{(x)}}$, entonces $I(V(f)) \subseteq I(V(J))$. Por el teorema de los ceros de Hilbert $(\exists)$ $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in J$. Por tanto $f^n = \sum s_j G_{(x)}$, $s_j \in R$. Entonces,

$$\begin{aligned} f^n \sigma &= \sum s_j G_{(x)} \sigma \\ &= \sum s_j \sum_{i=0}^{p} R_i' t_{ix} \\ &= \sum s_i' t_{ix} \end{aligned}$$

Así, $f^n\sigma \in Im(\phi_x)$ $(\forall)$ $x \in U_\alpha$. Entonces,

$$\overline{f^n\sigma} = f^n s_x = 0$$

$(\forall)$ $x \in U_\alpha$. Entonces, por el lema [1.11] $f^n s = 0$ sobre U_α. $\square$

Proposición 3.16. *Sea X una variedad afín, $\{h_i\}_{i \in I}$ una familia finita de funciones regulares sobre X que no se anulan simultáneamente, entonces*

$$\mathcal{U} := \{U_i := X_{h_i}\}_{i \in I}$$

es un cubrimiento abierto de X. Si $\mathcal{F}$ es un sub-haz $\mathcal{O}_X$-coherente de $\mathcal{O}_X^p$, $p \in \mathbb{N}$, entonces $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ $(\forall)$ $q > 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $X_{h_i} \neq \varnothing$. Pues si no, consideramos el cubrimiento tal que $X_{h_i} \neq \varnothing$ y éste es un refinamiento equivalente a $\mathcal{U}$ (ver sección 3.1). Sea $f = (f_{i_0 \dots i_q}) \in \ker(d_q) \subseteq C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ donde

$$f_{i_0 \dots i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_q}) \subseteq \mathcal{O}_X^p(U_{i_0 \dots i_q}),$$

por lo que podemos identificar cada $f_{i_0\dots i_q}$ con un sistema de p funciones regulares sobre $U_{i_0,\dots,i_q} = X_{h_{i_0}\dots h_{i_q}}$.

Consideremos $h = h_{i_0}\dots h_{i_q}$ la cual es una función regular sobre X. Por la proposición [3.14] tenemos que para $n >> 0$

$$g_{i_0\dots i_q} = (h_{i_0}\dots h_{i_q})^n f_{i_0\dots i_q}$$

es un sistema de p funciones regulares sobre X.

Elijamos un entero n para el que esto se cumple para todos los sistemas $\{i_0,\dots,i_q\}$ lo cual es posible porque existe un número finito de tales sistemas.

Consideremos la imagen de $g_{i_0\dots i_q}$ en el haz algebraico coherente $\mathcal{O}_X^p/\mathcal{F}$ (ver [12], n° 13, Teorema 1, Pág. 208), tenemos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, por tanto

$$(h_{i_0}\dots h_{i_q})^n f_{i_0\dots i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_q}),$$

entonces $g_{i_0\dots i_q} \in \mathcal{O}_X^p/\mathcal{F}$ es cero sobre $U_{i_0\dots i_q}$. Por la proposición [3.15] para $m >> 0$, el producto de esta sección con $(h_{i_0}\dots h_{i_q})^m$ es cero en $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^p/\mathcal{F})$. Esto implica que

$$(h_{i_0}\dots h_{i_q})^m g_{i_0\dots i_q} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$$

para todo conjunto de índices $i_0,\dots,i_q$.

Sea $N = m + n$. Hemos construido secciones

$$t_{i_0\dots i_q} := (h_{i_0}\dots h_{i_q})^m g_{i_0\dots i_q} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$$

que coinciden con $(h_{i_0}\dots h_{i_q})^N f_{i_0\dots i_q}$ en $\Gamma(U_{i_0\dots i_q}, \mathcal{F})$.

Dado que los h_i^N no se anulan simultáneamente, entonces

$$V(\langle\{h_i^N\}\rangle) = \varnothing$$

Por el teorema de los ceros de Hilbert (Ver [3], Cap. 1, Sec. 1.7, Pág. 10), tenemos que

$$\langle\{h_i^N\}\rangle = \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Por tanto existen $R_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tal que

$$1 = \sum_i R_i h_i^N$$

Para todo sistema $j_0, \ldots, j_{q-1}$ definamos

$$l_{j_0 \ldots j_{q-1}} := \sum_i R_i t_{ij_0 \ldots j_{q-1}} / (h_{j_0} \ldots h_{j_{q-1}})^N$$

tiene sentido pues $h_{j_0} \ldots h_{j_{q-1}}$ no se anula sobre $U_{j_0, \ldots, j_{q-1}}$. Entonces, $l_{j_0 \ldots j_{q-1}}$ es una sección en $\Gamma(U_{j_0, \ldots, j_{q-1}}, \mathcal{F})$.

Así, tenemos la cocadena $l = (l_{j_0 \ldots j_{q-1}}) \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Además, por la construcción de $t_{j_0 \ldots j_q}$ tenemos que sobre $U_{j_0, \ldots, j_{q-1}}$

$$l_{j_0 \ldots j_{q-1}} = \sum_i R_i h_i^N f_{ij_0 \ldots j_{q-1}}$$

Note que $f = d_{q-1}(l)$. Para demostrar esto, es suficiente verificar que

$$d_{q-1}(l)(j_0, \ldots, j_q) = f_{j_0 \ldots j_q}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
-d_{q-1}(l)(j_0, \ldots, j_q) &= \sum_{s=0}^{q} (-1)^s l(j_0, \ldots, \hat{j}_s, \ldots, j_q) \\
&= \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_i R_i h_i^N f(i, j_0, \ldots, \hat{j}_s, \ldots, j_q) \\
&= \sum_i R_i h_i^N \sum_{s=0}^{q} (-1)^s f(i, j_0, \ldots, \hat{j}_s, \ldots, j_q) \\
&+ \sum_i R_i h_i^N f(\hat{i}, j_0, \ldots, j_q) - \sum_i R_i h_i^N f(\hat{i}, j_0, \ldots, j_q) \\
&= \sum_i R_i h_i^N \left[\sum_{s=0}^{q} (-1)^{s+1} f(i, j_0, \ldots \hat{j}_s, \ldots, j_q) + f(\hat{i}, j_0, \ldots, j_q) \right] \\
&- \sum_i R_i h_i^N f(\hat{i}, j_0, \ldots, j_q)
\end{aligned}$$

como f es un cociclo, entonces

$$\begin{aligned}
d_{q-1}(l)(j_0, \ldots, j_q) &= \sum_i R_i h_i^N f(j_0, \ldots, j_q) \\
&= f(j_0, \ldots, j_q).
\end{aligned}$$

Entonces, $f \in Im(d_{q-1})$. Por lo que $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ $(\forall)$ $q > 0$. $\square$

Corolario 3.17. *Sea X una variedad afín y $\mathcal{F}$ es un sub-haz $\mathcal{O}_X$-coherente de $\mathcal{O}_X^p$, $p \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0 \quad (\forall)\ q > 0.$$

Demostración. Tenemos que los abiertos afínes $\{X_f | f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\}$ forman una base para la topología sobre X y X es casi-compacto. Entonces, los cubrimientos finitos de esta forma son un subconjunto cofinal de el conjunto de refinamientos de X. Por tanto, se puede definir el límite directo sobre este tipo de cubrimientos (ver observación [3.13]). Así, por la proposición [3.16] $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ $(\forall)$ $q > 0$. □

Corolario 3.18. *Bajo las hipótesis del corolario [3.17], el homomorfismo*

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^p) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X^p/\mathcal{F})$$

es sobreyectivo.

Demostración. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X^p \longrightarrow \mathcal{O}_X^p/\mathcal{F} \longrightarrow 0\ .$$

por el corolario [D.11] la sucesión

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X^p) \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X^p/\mathcal{F}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^p) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^p/\mathcal{F})$$

es exacta. Entonces, el resultado se sigue del corolario [3.17]. □

Observación: Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre una variedad afín X. Entonces, existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que la sucesión

$$\mathcal{O}_X|_{U_i}^{m_i} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i}^{n_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0$$

es exacta. Sin pérdida de generalidad supongamos que para cada $i \in I$ $U_i = X_{f_i}$ para alguna función $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Teorema 3.19. *Con la notación de la observación anterior. Fijamos $i = 0$. Si $s_0 \in \mathcal{F}(U_0)$, entonces existe un entero positivo N y una sección $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tal que $s|_{U_0} = f_0^N s_0$.*

Demostración. Dado que cada U_i es abierto afín entonces, $U_i \cap U_0$ es variedad afín (ver [8], Cap. I, Sección 6, Proposición 6, Pág. 39). Tenemos que φ_i es sobreyectivo sobre $U_i \cap U_0$. Como $\mathcal{F}$ es coherente, entonces $ker(\varphi_i)$ es coherente (ver [1], A.10.16). Así, por el corolario [3.18] tenemos que el morfismo

$$\Gamma(U_i \cap U_0, \mathcal{O}_X^{n_i}) \to \Gamma(U_i \cap U_0, \mathcal{F})$$

es sobreyectivo para cada $i \in I$. Por tanto existe $\sigma_{0_i} \in \mathcal{O}_X^{n_i}(U_i \cap U_0)$ tal que

$$\varphi_{i_{U_i \cap U_0}}(\sigma_{0_i}) = s_0|_{U_i \cap U_0}$$

Ahora, consideremos σ_{0_i} como un sistema de n_i funciones regulares $\{g_j\}_{j=1,\ldots,n_i}$ sobre $U_i \cap U_0$. Dado que $U_i \cap U_0$ es un conjunto de puntos donde f_0 no se anula, aplicamos la proposición [3.14] a U_i tenemos que para n suficientemente grande $f_0^n g_j \in \mathcal{O}_X(U_i)$ $(\forall)$ j. Así,

$$\sigma_i := (f_0^n g_j)_{j=1,\ldots,n_i} \in \mathcal{O}_X^{n_i}(U_i) \quad \text{y}$$

$$\sigma_i|_{U_i \cap U_0} = f_0^n \sigma_{0_i}$$

Sea $s_i' = \varphi_{i_{U_i}}(\sigma_i) \in \mathcal{F}(U_i)$, entonces

$$\begin{aligned} s_i'|_{U_i \cap U_0} &= \varphi_{i_{U_i \cap U_0}}(\sigma_i|_{U_i \cap U_0}) \\ &= \varphi_{i_{U_i \cap U_0}}(f_0^n \sigma_{0_i}) \\ &= f_0^n s_0|_{U_i \cap U_0}. \end{aligned}$$

Note que $s_i' = s_j'$ sobre $U_i \cap U_j \cap U_0$. Aplicamos la proposición [3.15] a $U_i \cap U_j$ y a $s' = (s_i' - s_j')|_{U_i \cap U_j}$, entonces para m suficientemente grande

$$f_0^m s' = 0 \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F}).$$

(i.e.)

$$f_0^m s_i'|_{U_i \cap U_j} = f_0^m s_j'|_{U_i \cap U_j}$$

Dado que $\mathcal{F}$ es un haz, entonces el conjunto de funciones regulares $f_0^m s_i' \in \mathcal{F}(U_i)$ definen una única sección $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tal que $s|_{U_i} = f_0^m s_i'$. En particular, para $i = 0$, $s|_{U_0} = f_0^m(f_0^n s_0)$, elijamos $N = n + m$. $\square$

Corolario 3.20. *El haz $\mathcal{F}$, del teorema anterior, es isomorfo a un haz cociente de $\mathcal{O}_X^n$, para algún $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.*

Demostración. Con la notación del teorema anterior la sucesión

$$\mathcal{O}_X|_{U_i}^{m_i} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i}^{n_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0$$

es exacta. En particular, para $i = 0$ φ_0 está definido por un conjunto de secciones $s_1, \ldots, s_{n_0} \in \Gamma(U_0, \mathcal{F})$ tal que generan $\mathcal{F}_x$ $(\forall)$ $x \in U_0$. Por el teorema [3.19] existen $t_{j_0}^{(0)} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ $j_0 = 1, \ldots, n_0$ tal que $t_{j_0}^{(0)}|_{U_0} = f_0^N s_j$. Puesto que f_0 es invertible en $\mathcal{O}_{X,x}$ para $x \in U_0$, entonces

$$\mathcal{F}_x = \left\langle \left\{ s_{j_x} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ {f_0}_x{}^{-N} t_{j_0\ x}^{(0)} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ t_{j_0\ x}^{(0)} \right\} \right\rangle .$$

Por la casi-compacidad de X, el cubrimiento $\{U_i\}$ tiene una sub-cubierta finita $\{U_0, \ldots, U_l\}$. Entonces, por lo anterior tenemos un número finito de secciones $\left\{ t_{j_i}^{(i)} \right\}$ $i = 0, \ldots, l$; $j_i = 1, \ldots, n_i$ en $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Por tanto definamos un morfismo

$$\mathcal{O}_X{}^m \to \mathcal{F}$$

donde $m = \sum_{i=0}^{l} n_i$, y tal que $(a_1, \ldots, a_m) \mapsto \sum a_i t^{(i)}{}_{j_i}$ el cual es sobreyectivo por construcción. □

Teorema 3.21. *Sea X una variedad afín, $\{f_i\}$ una familia finita de funciones regulares sobre X, que no se anulan simultáneamente y $\mathcal{U} = \{U_i := X_{f_i}\}$. Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre X, entonces*

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \ (\forall) \ q > 0.$$

Demostración. Supongamos que X es una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}^r(k)$ para algún $r \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, por el corolario [3.20]

$$\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^p / \mathcal{R}$$

por lo que tenemos la sucesión exacta de haces algebraicos coherentes

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}_X^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 .$$

Aplicando el corolario [3.18] a $U_{i_0,\ldots,i_q}$, tenemos que la aplicación en las secciones globales

$$\Gamma(U_{i_0,\ldots,i_q}, \mathcal{O}_X^p) \longrightarrow \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_q}, \mathcal{F}) .$$

es sobreyectiva. Por tanto induce una sucesión exacta de complejos de cocadenas (ver notación en la sección 3.1)

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^p) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

la cual induce una sucesión exacta larga en cohomología (ver sucesión [**1**]).

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^p) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \longrightarrow \cdots$$

Ahora, por la proposición [3.16]

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^p) = 0 = \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \ (\forall) \ q > 0.$$

□

Corolario 3.22. *Sea X es una variedad afín y $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X. Entonces*

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0 \ (\forall) \ q > 0.$$

Demostración. Los cubrimientos finitos de abiertos afínes de la forma

$$\{X_{f_i} | f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\}$$

son un subconjunto cofinal de los cubrimientos de X. Por tanto, consideremos el límite directo sobre estos cubrimientos, entoces por el teorema anterior tenemos la igualdad. □

Corolario 3.23. *Sea* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de haces sobre una variedad afín X. Si $\mathcal{F}$ es algebraico coherente, entonces el homomorfismo sobre las secciones globales*

$$\Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

es sobreyectivo.

Demostración. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{H}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \cdots$$

del corolario anterior $\check{H}^1(X, \mathcal{F}) = 0$. □

Teorema 3.24. *Sea X una variedad algebraica y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de X por abiertos afínes. Sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X, donde $\mathcal{F}$ es algebraico coherente. Entonces el homomorfismo canónico (ver Sección 3.1)

$$\check{H}^q_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

es biyectivo $(\forall)\ q \geq 0$.

Demostración. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^p} C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^p} C^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

es exacta. En la sección 3.1 definimos $C^p_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) := Im(\psi^p)$, entonces

$$0 \longrightarrow C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^p} C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^p} C^p_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. Consideramos d''_p los homomorfismos cofrontera para $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{H})$ y definimos

$$d^0_p := d''_p|_{C^p_0(\mathcal{U},\mathcal{H})} : C^p_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to C^{p+1}_0(\mathcal{U},\mathcal{H}).$$

Entonces,

$$C^\bullet_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) := \cdots \longrightarrow C^p_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{d^0_p} C^{p+1}_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow \cdots$$

es un complejo de cocadenas. Por tanto, tenemos la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C^\bullet_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow 0\ .$$

Entonces, es suficiente demostrar que $C^q_0(\mathcal{U},\mathcal{H}) = C^q(\mathcal{U},\mathcal{H})$ $(\forall)\ q \geq 0$ o equivalentemente que toda sección de $\mathcal{H}(U_{i_0,\ldots,i_q})$ es imagen de una sección de $\mathcal{G}(U_{i_0,\ldots,i_q})$ $(\forall)$ $(i_0,\ldots,i_q) \in I^{q+1}$ donde $U_{i_0,\ldots,i_q} := U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$.

Dado que los abiertos del cubrimiento son afínes, entonces $U_{i_0,\ldots,i_q}$ es un abierto afín $(\forall)$ $q \geq 0$. Además, $\mathcal{F}$ es algebraico coherente sobre $U_{i_0,\ldots,i_q}$, entonces por [3.23]

$$\Gamma(U_{i_0,\ldots,i_q}, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_q}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0\ .$$

□

Corolario 3.25. *Sea X una variedad algebraica y sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X, donde $\mathcal{F}$ es algebraico coherente. Entonces

$$\check{H}^q_0(X,\mathcal{H}) \to \check{H}^q(X,\mathcal{H})$$

es biyectivo $(\forall)$ $q \geq 0$.

Demostración. Consideremos el límite directo sobre los cubrimientos finitos de X por abiertos afínes, entoces por el teorema anterior tenemos el isomorfismo. □

Corolario 3.26. *Bajo las hipótesis del corolario anterior. Existe una sucesión exacta larga en cohomología*

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^q(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \check{H}^q(X,\mathcal{H}) \longrightarrow \check{H}^{q+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^{q+1}(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Este resultado se sigue del corolario [3.25]. □

3.2.2. Correspondencia entre haces coherentes y módulos finitamente generados sobre una variedad afín

En esta sección X denotará una variedad afín y $\mathcal{O}_X$ su haz estructural.

Tenemos que el anillo $A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ es una k-álgebra finitamente generada. Sea M un A-módulo. Además,

$$\mathcal{B} := \{X_f | f \in A\}$$

es una base para la topología de Zariski sobre X. Sea $f \in A$ $f \neq 0$, definamos

$$\widetilde{M}(X_f) := M_f = M \bigotimes_A A_f$$

donde M_f es el localizado de M en el sistema multiplicativo $\{1, f, f^2, f^3, \cdots\}$.

Si $X_f \subseteq X_g$, entonces $I(V(f)) \subseteq I(V(g))$, por el teorema de los ceros de Hilbert (ver [3] Cap. 1. Sec. 1.7)

$$I(V(g)) = Rad(g)$$

donde $Rad(g)$ es el radical del ideal de A generado por g. Por tanto existe un entero $n > 0$ y $h \in A$ tal que $f^n = hg$. Por el principio del buen orden sobre $\mathbb{N}$ podemos suponer que n es el mínimo tal que $f^n \in \langle g \rangle$. Definamos

$$\rho_{X_f X_g} := M_g \to M_f$$

tal que $(\forall)$ $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{m}{g^l} \mapsto \frac{h^l m}{g^l h^l} = \frac{h^l m}{f^{nl}}$$

Proposición 3.27. *$\widetilde{A}$ junto con las aplicaciones $\left\{\rho_{X_f X_g} | g, f \in A\right\}$ es un $\mathcal{B}$-haz.*

Demostración. Si $X_h \subseteq X_g \subseteq X_f$, entonces existen t, r ,$s \in \mathbb{N}$ y g_1, h_1, $h_2 \in A$ tal que $g^t = g_1 f$ y $h^r = h_1 g$ y $h^s = h_2 f$. Tenemos

$$A_f \xrightarrow{\rho_{X_g X_f}} A_g \xrightarrow{\rho_{X_h X_g}} A_h$$

$$\frac{a}{f^j} \longmapsto \frac{a{g_1}^j}{f^j {g_1}^j} = \frac{a{g_1}^j}{g^{jt}} \longmapsto \frac{a{g_1}^j {h_1}^{jt}}{h^{jtr}} \quad (*)$$

y

$$A_f \xrightarrow{\rho_{X_h X_f}} A_h$$

$$\frac{a}{f^j} \longmapsto \frac{a{h_2}^j}{h^{sj}} \quad (**)$$

Demostraremos que

$$\rho_{X_h X_f} = \rho_{X_h X_g} \circ \rho_{X_g X_f} \ (***).$$

Ahora, $h^{rt} = h_1^t g^t = h_1^t g_1 f$, como s es el mínimo tal que $h^s \in \langle f \rangle$, entonces $rt \geq s$.

Si $rt = s$, elegimos $h_2 = g_1 h_1^t$, entonces $(*) = (**)$. Por tanto, $(***)$ se cumple.

Si $rt > s$, entonces existe $l \geq 1$ tal que $s + l = rt$, entonces

$$h^{l+s} = h^l h_2 f = h^{rt} = h_1^t g^t = h_1^t g_1 f$$

dado que A es dominio y $f \neq 0$, entonces $h^l h_2 = h_1^t g_1$. Por tanto

$$(*) = \frac{a h^{lj} h_2^j}{h^{jtr}}$$

y

$$h^{sj} a h^{lj} h_2^j = h^{jtr} a h_2^j.$$

Así, $(***)$ se satisface.

Además, $\rho_{X_f X_f} = id_{A_f}$. Por tanto, $\widetilde{A}$ es un $\mathcal{B}$-prehaz.

Verifiquemos que satisface las condiciones i) y ii) en la definición de $\mathcal{B}$-haz. Sea

$$X_f = \bigcup_{f_i \neq 0} X_{f_i}.$$

Entonces, $V(f) = V(I)$, $I = \langle \{f_i\} \rangle \leq A$. Dado que A es Noetheriano, entonces

$$I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle .$$

i) Sea $s = a/f^n \in A_f$ tal que $s|_{X_{f_i}} = 0$. Por la definición de las restricciones, tenemos que $f_i^l = hf$ para algún $n > 0$ y $h \in A$. Entonces,

$$\frac{a h^n}{f_i^{ln}} = 0$$

implica que $a = 0$ o $h = 0$ pues A es dominio. Pero si $h = 0$, entonces $f_i = 0$ lo cual es una contradicción. Entonces $s = 0$.

ii) Sea $s_i \in A_{f_i}$, entonces $s_i = a_i/f_i^{n_i}$ $i = 1, \ldots, r$. Dado que es un número finito de secciones s_i, entonces podemos elegir $n_i = n$ $i = 1, \ldots, r$.

Supongamos que

$$s_i|_{X_j \cap X_i} = s_i|_{X_j \cap X_i} \quad (\forall) \text{ i,j}$$

(i.e.) $a_i f_j^n = a_j f_i^n$ pues A es dominio. Ahora, tenemos que

$$V(f_1, \ldots, f_r) = V(f_1^n, \ldots, f_r^n),$$

entonces por el teorema de los ceros de Hilbert $f \in Rad(f_1, \ldots, f_r)$. Entonces, $(\exists)$ $m \geq 0$ tal que

$$f^m = \sum_{j=1}^{r} b_j f_j^n \quad b_j \in A.$$

Queremos encontrar una sección $s \in A_f$, $s = a/f^m$ tal que

$$s|_{X_{f_i}} = s_i$$

(i.e.)

$$\frac{a}{f^m} = \frac{a_i}{f_i^n}$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} a f_i^n &= f^m a_i \\ &= a_i \sum_{j=1}^{r} b_j f_j^n \\ &= \sum_{j=1}^{r} b_j a_i f_j^n \\ &= \sum_{j=1}^{r} b_j a_j f_i^n. \end{aligned}$$

Entonces, $\widetilde{A}$ satisface ii) con $a = \sum_{j=1}^{r} b_j a_j$. $\square$

Note que $\mathcal{B}$ es una base cerrado bajo intersección para la topología de Zariski sobre X. Entonces, por la proposición [1.10] $\widetilde{A}$ se extiende de manera única a un haz sobre X, el cual denotaremos con $\widetilde{A}$, además $\widetilde{A} = \mathcal{O}_X$.

De manera similar se demuestra que $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{B}$-haz y denotamos a su extensión también con $\widetilde{M}$.

Proposición 3.28. *La correspondencia $M \longmapsto \widetilde{M}$ es funtorial, exacta y conmuta con sumas directas y productos tensoriales.*

Demostración. Funtorialidad. Sean M, N A-módulos y $\varphi : M \to N$ un homomorfismo de A-módulos. Sea $f \in A$ distinto de cero. Entonces, tenemos un morfismo de $\mathcal{B}$-haces dado por la colección

$$\varphi_f : M_f \to N_f$$

tal que $m/f^l \mapsto \varphi(m)/f^l$.

Exactitud. Sea $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Entonces,

$$0 \longrightarrow M_f \longrightarrow N_f \longrightarrow M'_f \longrightarrow 0$$

es exacta (ver lema [C.4]). Ahora,

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_x &= \varinjlim_{x \in X_f} \widetilde{M}(X_f) \\ &= \varinjlim_{f \notin m_x} M_f \end{aligned}$$

donde $m_x = \{f \in A | f(x) \neq 0\}$.

Definamos $M_{m_x} \to \varinjlim_{f \notin m_x} M_f$ enviando $m/f^l \mapsto \overline{m/f^l}$ donde $\overline{m/f^l}$ significa la clase de m/f^l en el límite directo. Claramente esta aplicación es sobreyectiva. Ahora, por la construcción del límite directo y la definición de las restricciones sobre M_f, si

$$\overline{m/f^l} = \overline{0}$$

entonces $m/f^l = 0 \in M_f$. Por tanto es inyectiva. Entonces, $\widetilde{M_x} \cong M_{m_x}$.
Por la exactitud del límite directo (ver Apéndice C) y por el isomorfismo anterior concluimos que

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M'} \longrightarrow \widetilde{M''} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Sumas y productos tensoriales. Demostraremos que

i) $\widetilde{M \bigotimes_A N} \cong \widetilde{M} \bigotimes_{\widetilde{A}} \widetilde{N}$

ii) $\widetilde{M \oplus M'} \cong \widetilde{M} \oplus \widetilde{M'}$ son isomorfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos.

En efecto, i)

$$\begin{aligned}
M_f \bigotimes_{A_f} N_f &= M_f \bigotimes_{A_f} (A_f \bigotimes_A N) \\
&= (M_f \bigotimes_{A_f} A_f) \bigotimes_A N \\
&= M_f \bigotimes_A N \\
&= (A_f \bigotimes_A M) \bigotimes_A N) \\
&= A_f \bigotimes_A (M \bigotimes_A N) \\
&= (M \bigotimes_A N)_f
\end{aligned}$$

ii) Se sigue de la conmutatividad de la suma directa de módulos con el producto tensorial que

$$(M \oplus M')_f \cong M_f \oplus M'_f$$

. □

Lema 3.29. *Sea M un A-módulo. Entonces, M es finitamente generado si y sólo si $\widetilde{M}$ es un haz coherente sobre X.*

Demostración. Supongamos que $M = \langle m_1, \ldots, m_p \rangle$. Dado que A es Noetheriano, entonces M es isomorfo al conúcleo de un homorfismo de A-módulos

$$\varphi : A^q \to A^p$$

(ver corolario [C.3]). Entonces, tenemos la sucesión exacta

$$A^q \longrightarrow A^p \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

por la proposición [3.28]

$$\widetilde{A^q} \longrightarrow \widetilde{A^p} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0$$

es exacta. Además, $\tilde{A}^p = \mathcal{O}_X^p$. Entonces, $\widetilde{M}$ es coherente.

Inversamente, supongamos que $\widetilde{M}$ es coherente. Entonces, tenemos una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X^p \longrightarrow \mathcal{O}_X^q \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0$$

dado que $\mathcal{O}_X^p$ es coherente. Entonces, por el corolario [3.23] la aplicación

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^q) \to \Gamma(X, \widetilde{M})$$

es sobreyectiva. Pero $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$ por tanto M es un A-módulo finitamente generado. $\square$

Ahora, sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X, entonces $\Gamma(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo. Consideremos

$$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

un morfismo de haces, entonces

$$\varphi_X : \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$$

es un homomorfismo de A-módulos.

Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X. Entonces, tenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X^p \longrightarrow \mathcal{O}_X^q \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0\ .$$

Por el corolario [3.23] , la sucesión

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^n) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

es exacta. Pero $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^n) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ por definición de suma directa de haces. Entonces, $\Gamma(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo finitamente generado.

Consideremos una sucesión exacta de haces coherentes sobre X

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

entonces, por el corolario [3.23] la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Además, note que $\Gamma(X, \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(X, \mathcal{G})$ por la definición del haz suma directa.

Teorema 3.30. *La aplicación*

$$\{A\text{-módulos finitamente generados}\} \to \{\text{Haces coherentes sobre } X\}$$

$M \mapsto \widetilde{M}$ *es una equivalencia de categorías.*

Demostración. De la proposición [3.28], tenemos que esta aplicación es un funtor entre ambas categorías, pero sólo demostraremos la biyección entre los objetos.

Sea M un A-módulo finitamente generado. Entonces, por construcción

$$\Gamma(X, \widetilde{M}) = M.$$

Consideremos $\mathcal{O}_X$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Gamma(\widetilde{X, \mathcal{O}_X}) &= \widetilde{A} \\ &= \mathcal{O}_X \end{aligned}$$

En particular, $\Gamma(\widetilde{X, \mathcal{O}_X^p}) = \mathcal{O}_X^p$.

Ahora, sea $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X. Entonces, tenemos una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^q \xrightarrow{\psi} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

y así, la sucesión en las secciones globales

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X^p) \xrightarrow{\varphi_X} \Gamma(X,\mathcal{O}_X^q) \xrightarrow{\psi_X} \Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

es exacta.
Consideremeos $f \in A\setminus\{0\}$. Tensorizamos la sucesión exacta anterior con A_f. Entonces, tenemos la sucesión exacta

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X^p)\bigotimes_A A_f \xrightarrow{\varphi_X\otimes 1} \Gamma(X,\mathcal{O}_X^q)\bigotimes_A A_f \xrightarrow{\psi_X\otimes 1} \Gamma(X,\mathcal{F})\bigotimes_A A_f \longrightarrow 0$$

Ahora, tenemos definida una aplicación

$$\Gamma(X,\mathcal{F})\bigotimes_A A_f \to \Gamma(X_f,\mathcal{F})$$

tal que $s\otimes r \mapsto s|_{X_f} r$.

Entonces, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,\mathcal{O}_X^p)\bigotimes_A A_f \arrow[r, "\varphi_X\otimes 1"] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathcal{O}_X^q)\bigotimes_A A_f \arrow[r, "\psi_X\otimes 1"] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathcal{F})\bigotimes_A A_f \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Gamma(X_f,\mathcal{O}_X^p) \arrow[r, "\varphi_{X_f}"] & \Gamma(X_f,\mathcal{O}_X^q) \arrow[r, "\psi_{X_f}"] & \Gamma(X_f,\mathcal{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del diagrama anterior, se sigue de la conmutatividad de φ y ψ con las restricciones de los haces correspondientes. Entonces, por el lema del quinto, tenemos que $\Gamma(X,\mathcal{F})_f \cong \Gamma(X_f,\mathcal{F})$. Por tanto $\widetilde{\Gamma(X,\mathcal{F})} \cong \mathcal{F}$. □

Corolario 3.31. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces coherentes sobre X. Entonces $\mathcal{F}\cong\mathcal{G}$ si y sólo si $\Gamma(X,\mathcal{F})\cong\Gamma(X,\mathcal{G})$ como A-módulos.*

Proposición 3.32. *Todo subhaz $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos de un haz coherente $\mathcal{G}$ es un haz coherente.*

Demostración. Tenemos que $\Gamma(X,\mathcal{F})\subseteq\Gamma(X,\mathcal{G})$ es un $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-submódulo. Ahora, $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ es Noetheriano y $\Gamma(X,\mathcal{G})$ es finitamente generado, por tanto Noetheriano. Entonces, $\Gamma(X,\mathcal{F})$ es finitamente generado como $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-módulo. Por la correspondencia anterior $\widetilde{\Gamma(X,\mathcal{F})}$ es un haz coherente. Pero

$$\widetilde{\Gamma(X,\mathcal{F})} = \mathcal{F}.$$

□

Proposición 3.33. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces coherentes sobre X. Entonces*

i) $\mathcal{F} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ *es coherente sobre* X.

ii) $\Gamma(X, \mathcal{F} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) \bigotimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \Gamma(X, \mathcal{G})$.

Demostración. i) Dado que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces coherentes sobre X, entonces $\Gamma(X, \mathcal{F})$ y $\Gamma(X, \mathcal{G})$ son A-módulos finitamente generados, por lo tanto $\Gamma(X, \mathcal{F}) \bigotimes_A \Gamma(X, \mathcal{G})$ es A-módulo finitamente generado y

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}) \bigotimes_A \Gamma(X, \mathcal{G})} &= \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} \bigotimes_{\widetilde{A}} \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{G})} \\ &= \mathcal{F} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \end{aligned}$$

ii) se sigue de que $\mathcal{F} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} = \Gamma(X, \widetilde{\mathcal{F}) \bigotimes_A} \Gamma(X, \mathcal{G})$. □

3.2.3. Haces coherentes sobre una variedad proyectiva y módulos graduados finitamente generados

En esta sección X denotará una variedad proyectiva y $\mathcal{O}_X$ su haz estructural.

Consideremos $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ como una subvariedad cerrada. Sea $A = \Gamma_h(X)$ su anillo de coordenadas homogéneas (ver [3], Cap. 4, Pág. 46), puesto que $I(X)$ es un ideal homogéneo del anillo graduado $k[X_0, \ldots, X_n]$, entonces A es un anillo graduado (ver Apéndice C).

Ahora, sea $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ un A-módulo graduado (Ver Apéndice C), y $f \in A$ homogéneo. Definamos

$$X_f := \{p \in \mathbb{P}^n(k) | f(p) \neq 0\},$$

éstos son abiertos afínes y forman una base para la topología de Zariski definida sobre $\mathbb{P}^n(k)$. Sea $\mathcal{B} := \{X_f | f \in A \text{ homogéneo y } deg(f) > 0\}$. Para cada $X_f \in \mathcal{B}$, definamos

$$\widetilde{M}(X_f) := M_{(f)}$$

donde $M_{(f)}$ denota el submódulo de M localizado en f (M_f) que consiste de los elementos de grado cero, (i.e.) elementos de la forma m/f^n, donde m es homogéneo de grado $ndeg(f)$ donde $deg(f)$ es el grado de f en A.

Si $X_f \subseteq X_g$, entonces $I(V(f)) \subseteq I(V(g))$, por el teorema de los ceros de Hilbert (ver [3] Cap. 4. Sec. 4.2)

$$I(V(g)) = Rad(g)$$

donde $Rad(g)$ es el radical del ideal de A generado por g. Por tanto existe un entero $n > 0$ y $h \in A$ homogéneo, tal que $f^n = hg$. Por el principio del buen orden sobre $\mathbb{N}$ podemos suponer que n es el mínimo tal que $f^n \in \langle g \rangle$. Definamos

$$\rho_{X_f X_g} := M_g \to M_f$$

tal que $(\forall)$ $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{m}{g^l} \mapsto \frac{h^l m}{g^l h^l} = \frac{h^l m}{f^{nl}}$$

Análogamente que en la proposición [3.27] se demuestra que $\widetilde{M}$ junto con las aplicaciones

$$\left\{\rho_{X_f X_g} | g, f \in A \text{ homogéneos}\right\}$$

es un $\mathcal{B}$-haz y que $\widetilde{A} = \mathcal{O}_X$. Además, $\widetilde{M}$ tiene una estructura natural de $\mathcal{O}_X$-módulo, pues $M_{(f)}$ es un $A_{(f)}$-módulo y $A_{(f)} = \mathcal{O}_X(X_f)$.

Sobre una variedad afín X_f, $\widetilde{M}|_{X_f} = \widetilde{M_{(f)}}$ donde la segunda parte de la igualdad denota el haz asociado al $A_{(f)}$-módulo $M_{(f)}$ de la sección anterior. Así, si M es finitamente generado y dado que A es un anillo Noetheriano, enonces, $M_{(f)}$ es un $A_{(f)}$-módulo finitamente generado. Por tanto $\widetilde{M}$ es $\mathcal{O}_X$-coherente sobre X.

Sean M y N A-módulos $\mathbb{Z}$-graduados y $\varphi : M \to N$ un homomofismo de A-módulos homogéneo de grado 0 (ver Apéndice C). Sea $f \in A$ un elemento no cero. Entonces, tenemos una aplicación de $A_{(f)}$-módulos

$$\varphi_f : M_{(f)} \to N_{(f)}$$

tal que $m/f^l \mapsto \varphi(m)/f^l$ $(\forall)$ $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Y así, un morfismo de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}.$$

Proposición 3.34. *Sea* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} M' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de A-módulos graduados, φ y ψ homogéneos de grado 0. Supongamos que*

$$\varphi_i : M_i \to N_i \quad y \quad \psi_i : N_i \to M'_i$$

son sobreyectivas $(\forall)$ $i \in \mathbb{Z}$. *Entonces*

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{N} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \widetilde{M'} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Demostración. Puesto que el límite directo es exacto (ver teorema A.17), es suficiente demostrar que la sucesión de $A_{(f)}$-módulos

$$0 \longrightarrow M_{(f)} \xrightarrow{\varphi_f} N_{(f)} \xrightarrow{\psi_f} M'_{(f)} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sea $m/f^l \in ker(\varphi_f)$, entonces $\varphi(m)/f^l = 0$. Por tanto existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $f^t\varphi(m) = 0$. Por la inyectividad de φ, $f^t m = 0$. Entonces, $m/f^l = 0$.

Dado que $\psi \circ \varphi = 0$, entonces $Im(\varphi_f) \subseteq ker(\psi_f)$. Ahora, sea $n/f^s \in ker(\psi_f)$, entonces existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $f^t\psi(n) = 0$. Así, $f^t n \in Im(\varphi)$, por la sobreyectividad de $\varphi_{tdeg(f)+deg(n)}$ existe $m \in M_{tdeg(f)+deg(n)}$ tal que $\varphi(m) = f^t n$. Así, $m/f^{t+s} \in M_{(f)}$ y $\varphi_f(m/f^{t+s}) = n/f^s$.

Sea $m'/f^s \in M'_{(f)}$. Por la sobreyectividad de ψ_i existe $n \in N_{sdeg(f)}$ tal que $\psi(n) = m'$, entonces $\psi(n/f^s) = m'/f^s$. $\square$

Sea M A-módulo graduado, N y T sub-módulos graduados de M, definamos

$$(\widetilde{N} + \widetilde{T})(X_f) := N_{(f)} + T_{(f)}.$$

Éste es un $A_{(f)}$-submódulo de $M_{(f)}$. Ahora, si $X_g \subseteq X_f$ definamos una aplicación

$$N_{(f)} + T_{(f)} \to N_{(g)} + T_{(g)}$$

tal que $s + s' \mapsto s|_{X_g} + s'|_{X_g}$ son las restricciones de los haces $\widetilde{N}$ y $\widetilde{T}$, respectivamente.

Entonces, $\widetilde{N}+\widetilde{T}$ junto con estas aplicaciones es un $\mathcal{B}$-prehaz.

Ahora consideremos el sub-módulo $N+T$, entonces por la proposición [C.11] $N+T$ es un sub-módulo graduado de M y

$$N+T=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(N_i+T_i).$$

Además, tenemos que $(N+T)_f\cong N_f+T_f$ por tanto

$$\widetilde{N+T}(X_f)=(\widetilde{N}+\widetilde{T})(X_f).$$

Así, $\widetilde{N+T}=\widetilde{N}+\widetilde{T}$.

Teorema 3.35. *Sea M un A-módulo $\mathbb{Z}$-graduado. Supongamos que $\widetilde{M}$ es coherente. Entonces,*

$$\widetilde{M}=\widetilde{M'}$$

donde M' es un A-módulo $\mathbb{Z}$-graduado finitamente generado.

Demostración. Consideremos un cubrimiento abierto afín de X, digamos

$$\mathcal{B}':=\left\{X_f|\text{ tal que }\widetilde{M}|_{X_f}\text{ es }\mathcal{O}_X|_{X_f}\text{-coherente}\right\}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que este cubrimiento es un subconjunto cofinal de la base sobre X construida con los abiertos afínes de X.

Sea

$S=\{N\subseteq M|N$ es un A-submódulo graduado finitamente generado de $M\}$.

En particular,

$$M=\sum_{N\in S}N.$$

Podemos construir una cadena creciente de submódulos

$$N_1\subseteq N_1+N_2\subseteq N_1+N_2+N_3\subseteq\cdots$$

Por la proposición [C.11] tenemos que cada una de estas sumas es un submódulo graduado de M y además, cada uno de ellos es finitamente generado.

Ahora, si $N \hookrightarrow N'$ módulos graduados, entonces la aplicación inducida en los haces es inyectiva $\widetilde{N} \hookrightarrow \widetilde{N'}$ (ver la demostración de la proposición [3.34]). Por tanto tenemos la siguiente cadena de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$\widetilde{N_1} \subseteq \widetilde{N_1 + N_2} \subseteq N_1 + \widetilde{N_2} + N_3 \subseteq \cdots$$

Entonces, sobre cada X_f tenemos la cadena ascendente de $A_{(f)}$ sub-módulos

$$N_{1(f)} \subseteq (N_1 + N_2)_{(f)} \subseteq (N_1 + N_2 + N_3)_{(f)} \subseteq \cdots$$

Note que sobre los abiertos $X_f \in \mathcal{B}'$ esta cadena se estaciona, pues $M_{(f)}$ es $A_{(f)}$- módulo finitamente generado y A es un anillo Noetheriano. Además, como éste es un subconjunto cofinal de la base, entonces la aplicación sobre los gérmenes, inducida por la inclusión de los submódulos, es un isomorfismo. Así, la cadena de $\mathcal{O}_X$-módulos se estaciona.

Por tanto, podemos escribir $\widetilde{M} = \widetilde{\sum_{i=1}^{r} N_i}$. Además, $\sum_{i=1}^{r} N_i \in S$ $i = 1, \ldots, r$. □

Definición 3.36. *Para cada $d \in \mathbb{Z}$, definamos $\mathcal{O}_X(d) := \widetilde{A(d)}$ (para la notación $A(d)$ ver Apéndice C), el cual es un haz coherente sobre X, pues $A(d)$ es un A-módulo graduado finitamente generado. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces definamos*

$$\mathcal{F}(d) := \mathcal{F} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d).$$

Note que las secciones de $\mathcal{O}_X(d)$ sobre un abierto afín X_f son precisamente los elementos de grado d en A_f, y que si $\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre X, entonces por la proposición [3.33], $\mathcal{F}(d)$ es un haz coherente sobre X.

Proposición 3.37. *Si M es un A-módulo graduado, entonces*

$$\widetilde{M(d)} = \widetilde{M}(d)$$

$(\forall)\ d \in \mathbb{Z}$

Demostración. Sea $f \in A$ un elemento homogéneo no cero. Por la proposición [3.33]

$$\widetilde{M} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)(X_f) = M_{(f)} \bigotimes_{A_{(f)}} A(d)_{(f)}$$

donde la segunda parte de la igualdad es isomorfa al $A_{(f)}$-módulo que consiste de los elementos de grado d en M_f. Y por otra parte

$$\widetilde{M(d)} = M(d)_{(f)}.$$

$\square$

Note que $(A(d))(d') = A(d + d')$, entonces por la proposición anterior tenemos que $\widetilde{A(d)(d')} = \widetilde{A(d)}(d')$. Por tanto

$$\mathcal{O}_X(d + d') = \mathcal{O}_X(d)(d') = \mathcal{O}_X(d) \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d').$$

Entonces, para un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(d) \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d') &= \mathcal{F} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d') \\
&= \mathcal{F} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d + d') \\
&= \mathcal{F}(d + d').
\end{aligned}$$

Ahora, definimos

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(d)).$$

La estructura de A-módulo, está dada por

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) \bigotimes_A \Gamma(X, \mathcal{F}(d)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n + d)).$$

Por tanto, $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es un A-módulo graduado.

Sea $S = k[X_1, \ldots X_n]$, entonces tenemos la graduación sobre $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} Si$ dada por el grado de los polinomios. Además, S es finitamente generado por

S_1 como S_0-álgebra. Entonces, $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} \cong \mathcal{F}$, sólo definiré la aplicación ψ con la cual son isomorfos. La demostración del isomorfismo se puede consultar en el libro «Algebraic Geometry» de *Robin Hartshorne* [4], Cap. II, Sección 5, Proposición 5.15.

Tenemos la graduación sobre el anillo de coordenadas $A = \oplus A_i$ inducida por la aplicación cociente. Sea $f \in A_1$, es suficiente definir ψ sobre los abiertos X_f con $f \in A_1$, pues éstos forman un subconjunto cofinal de los elementos de la base.

Sea $m/f^d \in \Gamma_*(\mathcal{F})_{(f)}$, $m \in \Gamma(X, \mathcal{F}(d))$ para algún d. Consideremos $f^{-d} \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X(-d))$, entonces por la graduación de $\Gamma_*(\mathcal{F})$, $f^{-d} \otimes m \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$; esto define la aplicación

$$\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}(X_f) \to \mathcal{F}(X_f).$$

Entonces, si $\mathcal{F}$ es un haz coherente, por el teorema [3.35] $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ donde M es un A-módulo graduado finitamente generado.

Capítulo 4

Teoremas de anulamiento y finitud

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{P}^N(k)$ denota el n-espacio proyectivo, $X_0, \ldots, X_n$ las coordenadas homogéneas para $\mathbb{P}^n(k)$ y $\mathbb{P}^n{}_{X_i}$ los abiertos afínes de $\mathbb{P}^n(k)$ de la forma $\{X_i \neq 0\}$ $i = 0, \ldots, n$.

4.1. Teoremas de anulamiento

Sólo enunciaremos el primer Teorema de Anulamiento, el cual se define sobre una variedad afín X, pues éste es precisamente el corolario [3.22].

Teorema 4.1. *[**de Anulamiento I**] Sea X es una variedad afín y $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X. Entonces*

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0 \ (\forall) \ q > 0.$$

Lema 4.2. *Sea X una variedad afín y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto finito de X, donde U_i es afín para cada $i \in I$. Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre X, entonces $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ $(\forall) q > 0$.*

Demostración. Consideremos $\beta = \left\{X_{f_j}\right\}_{j \in J}$ un refinamiento finito de $\mathcal{U}$. Definamos para cada $p+1$-tupla $i_0, \ldots, i_p$ de elementos de I

$$U_{i_0 \ldots i_p} := U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}.$$

Sea
$$\beta_{i_0\ldots i_p} := \left\{U_{i_0\ldots i_p} \cap X_{f_j} | j \in J\right\}$$
puesto que $U_{i_0\ldots i_p}$ es una variedad afín, entonces por el teorema [3.21] tenemos que
$$H^q(\beta_{i_0\ldots i_p}, \mathcal{F}|_{U_{i_0\cdots i_p}}) = 0 \quad (\forall)\ q > 0.$$
Entonces, $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^q(\beta, \mathcal{F})$ $(\forall)$ $q \geq 0$ (ver proposición [D.9]). Se sigue del teorema [3.21] que $\check{H}^q(\beta, \mathcal{F}) = 0$ $(\forall)$ $q > 0$. □

Proposición 4.3. *Sea X una variedad algebraica, $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento finito de X, donde U_i es abierto afín para cada $i \in I$. Entonces, el homomorfismo*
$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^q(X, \mathcal{F})$$
es biyectivo $(\forall)$ $q \geq 0$.

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{B} := \{\beta^\alpha\}_{\alpha \in A}$ de cubrimientos finitos de X de abiertos afínes, donde
$$\beta^\alpha = \{{B_j}^\alpha\}_{j \in J_\alpha},$$
para cada $p+1$-tupla $i_0, \ldots, i_p$ de elementos de I y para cada $\alpha \in A$
$$\beta^\alpha_{i_0\ldots i_p} := \left\{U_{i_0\ldots i_p} \cap {B_j}^\alpha | j \in J_\alpha\right\}.$$
note que $\beta^\alpha_{i_0\ldots i_p} \in \mathcal{B}$. Entonces, por el lema [4.2]
$$\check{H}^q({\beta_{i_0\ldots i_p}}^\alpha, \mathcal{F}|_{U_{i_0\cdots i_p}}) = 0 \quad (\forall)\ q > 0.$$
Puesto que $\mathcal{B}$ es un subconjunto cofinal de todos los cubrimientos de X, entonces $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^q(X, \mathcal{F})$ es biyectivo $(\forall)$ $n \geq 0$ (ver teorema [D.10]). □

Lema 4.4. *Sea $X \subset \mathbb{P}^N(k)$ una subvariedad cerrada de dimensión n. Entonces, existe una subvariedad lineal $W \subset \mathbb{P}^N(k)$ tal que*
$$codim_{\mathbb{P}^N(k)} W = n + 1$$
(donde $codim_{\mathbb{P}^N(k)} W = N - dim(W)$) y $X \cap W = \varnothing$.

Demostración. Por inducción sobre N.

$N = 1$. Entonces, $X \subset \mathbb{P}^1(k)$. Por tanto $dim(X) = 0$, es decir $X = \{p\}$, $p \in \mathbb{P}^1(k)$. Ahora, tenemos que

$$\mathbb{P}^1(k) = \{[a : 1] \, | a \in k\} \cup \{[1 : 0]\}$$

Tenemos que X_0 y X_1 son coordenadas homogéneas. Si $p = [a : 1]$ para algún $a \in k$, consideremos $W = V(X_1)$ el punto al infinito, entonces $codim_{\mathbb{P}^1(k)} W = 1$ y $W \cap V = \varnothing$. Si $p = [1 : 0]$, consideremos $W = V(X_0)$, entonces $codim_{\mathbb{P}^1} W = 1$ y $W \cap X = \varnothing$.

Supongamos que el lema se cumple para $N - 1$.

Ahora, elijamos $x = [x_0 : \cdots : x_N] \in X$. Sea Ω el conjunto de hiperplanos en $\mathbb{P}^N(k)$ que no contienen a x. Note que $\Omega \neq \varnothing$, en efecto, tenemos que $x_i \neq 0$ para algún i. Entonces, $V(X_i) \in \Omega$. Además, $\Omega \subseteq \mathbb{P}^N$ es un abierto pues está definido por $\left\{ \sum_{i=0}^N a_i x_i \neq 0 | a_i \in k \right\}$.

Sea $H \in \Omega$. Tenemos dos casos:

i) $H \cap X = \varnothing$

ii) $H \cap X \neq \varnothing$

Ahora, $dim(H) = N - 1$ por tanto $H \cong \mathbb{P}^{N-1}(k)$.

i) Por hipótesis $n \leq N - 1$, Entonces elijamos una subvariedad lineal $W \subseteq H$ de dimensión $N - 1 - n$. En particular, $W \subseteq \mathbb{P}^N$. Por la elección de W, tenemos que $W \cap X = \varnothing$ y $codim_{\mathbb{P}^N(k)} W = n + 1$.

ii) $H \cap X \subseteq H$. Primero note que $H \cap X \subset H$. En efecto, si $H \cap X = H$, entonces $H \subseteq X$, pero $dim(X) \leq N - 1$ por tanto $H = X$, lo cual es una contradicción pues $H \in \Omega$. Y además, $dim(H \cap X) = r < n$. En efecto, sino $H \cap X = X$, entonces $X \subseteq H$, esto contradice la elección de H.

Ahora, aplicamos la hipótesis de inducción. Entonces existe una subvariedad lineal

$$W \subseteq H \cong \mathbb{P}^{N-1}(k)$$

tal que $W \cap (H \cap X) = W \cap X = \varnothing$ y $codim_{\mathbb{P}^{N-1}(k)} W = r+1$. Por tanto

$$N - 1 - n \leq dim(W)$$

entonces, elijamos una subvariedad lineal $W' \subseteq W \subset \mathbb{P}^{N-1}(k) \subset \mathbb{P}^N(k)$ de dimensión $N-1-n$. Entonces, W' satisface el lema. □

Teorema 4.5. *[**de Anulamiento II**] Sea X una variedad proyectiva de dimensión n y $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X. Entonces,*

$$\check{H}^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad (\forall)\ i > n.$$

Demostración. Supongamos que X es una subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^N(k)$. Entonces, por el lema anterior existe W, salvo cambio de coordenadas proyectivo supongamos que $W = V(X_0, \ldots, X_n)$, tal que $W \cap X = \varnothing$. Entonces,

$$X \subseteq U_0 \cup \ldots \cup U_n$$

donde $U_i := {\mathbb{P}^N}_{X_i}$. Así, X esta cubierto por los $n+1$ abiertos afines $X \cap U_i$, entonces por corolario [3.7])

$$\check{H}^j(\{X \cap U_i\}_{i=0,\ldots,n}, \mathcal{F}) = 0 \quad (\forall)\ j > n.$$

entonces por la proposición [4.3] $\check{H}^j(X, \mathcal{F}) = 0$ para $j > n$. □

4.2. Teorema de finitud

Proposición 4.6. *Sea Y una subvariedad cerrada de una variedad algebraica X, $i : Y \hookrightarrow X$ la inclusión y $\mathcal{F}$ un haz $\mathcal{O}_Y$-coherente sobre Y. Considere $i_*\mathcal{F}$ la imagen directa de $\mathcal{F}$ sobre X. Entonces, $i_*\mathcal{F}$ es $\mathcal{O}_X$-coherente.*

Demostración. Tenemos una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_Y|_{U \cap Y}{}^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_Y|_{U \cap Y}{}^q \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}|_{U \cap Y} \longrightarrow 0$$

sobre un conjunto abierto $U \subseteq X$ y p, $q \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U es un abierto afín.

Ahora, por la proposición [1.46] y [1.45]

$$i_*\mathcal{O}_Y|_U{}^p \xrightarrow{\varphi_*} i_*\mathcal{O}_Y|_U{}^q \xrightarrow{\psi_*} i_*\mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

es exacta.

Además, por la proposición [1.48] tenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X|_U \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y|_U \longrightarrow 0 \; .$$

Por tanto induce una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X{}^q|_U \xrightarrow{i'} i_*\mathcal{O}_Y{}^q|_U \longrightarrow 0 \; .$$

Así, la composición $\psi_* \circ i'$ es sobreyectiva. Por tanto, $i_*\mathcal{F}|_U$ es isomorfo a un haz cociente de $\mathcal{O}_X|_U{}^q$. Ahora, dado que U es afín, entonces por la proposición [3.32], $i_*\mathcal{F}|_U$ es un haz coherente. □

En particular, $i_*\mathcal{O}_Y$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente sobre X.

Proposición 4.7. *Sea X una variedad algebraica, Y una subvariedad cerrada de X y $\mathcal{F}$ un haz $\mathcal{O}_Y$-coherente sobre Y, entonces*

$$\check{H}^p(Y, \mathcal{F}) = \check{H}^p(X, i_*\mathcal{F}) \quad (\forall)\ p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

donde $i : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión.

Demostración. Para todo cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y $(\forall)$ $p \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} C^p(\mathcal{U}, i_*\mathcal{F}) &= \prod_{i_0,\ldots,i_p} i_*\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}) \\ &= \Pi_{i_0,\ldots,i_p}\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p} \cap Y) \\ &= C^p(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{U} \cap Y = \{U_i \cap Y\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de Y, en particular, para cualquier cubrimiento abierto afín. Además, por la casi-compacidad de X, cada cubrimiento $\mathcal{U}$ se puede suponer finito. Entonces,

$$\check{H}^p(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(Y, \mathcal{F})$$

es biyectivo $(\forall)$ $p \geq 0$ (ver proposición [4.3]). Entonces,

$$\begin{aligned}\check{H}^p(X, i_*\mathcal{F}) &= \varinjlim_{\mathcal{U} \text{ afín}} \check{H}^p(\mathcal{U}, i_*\mathcal{F}) \\ &= \varinjlim_{\mathcal{U} \text{ afín}} \check{H}^p(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F}) \\ &\cong \varinjlim_{\mathcal{U} \text{ afín}} \check{H}^p(Y, \mathcal{F}) \\ &= \check{H}^p(Y, \mathcal{F})\end{aligned}$$

□

Proposición 4.8. *Sea X una variedad $\{F_j\}_{j\in J}$ una familia finita de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto finito. Entonces, para todo $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \bigoplus_{j\in J} F_j) = \bigoplus_{j\in J} \check{H}^p(\mathcal{U}, F_j).$$

Demostración. Este resultado se sigue de que para todo $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}C^p(\mathcal{U}, \bigoplus_{j\in J} F_j) &= \prod_{i_0,\ldots,i_p} \bigoplus_{j\in J} F_j(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}) \\ &= \bigoplus_{i_0,\ldots,i_p} \bigoplus_{j\in J} F_j(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}) \\ &= \bigoplus_{j\in J} \prod_{i_0,\ldots,i_p} F_j(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}) \\ &= \bigoplus_{j\in J} C^p(\mathcal{U}, F_j).\end{aligned}$$

□

En lo sucesivo de este capítulo X denotará una variedad proyectiva,

$$R = k[X_0, \ldots, X_n]$$

el anillo de polinomios en $n+1$ variables sobre k y $U_i := \mathbb{P}^n_{X_i}$ $i = 0, \ldots, n$. Escribimos

$$R = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} R_d$$

donde R_d son las componentes homogéneas de R, graduado por el grado de los monomios. Por convención $R_d = 0$ si $d < 0$. Note que para cada $d \in \mathbb{Z}$, R_d es un k-espacio vectorial.

Proposición 4.9.

$$\Gamma(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(d)) = \begin{cases} 0 & si\ d < 0 \\ R_d & si\ d \geq 0. \end{cases}$$

En particular, $\Gamma(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}) = k$ *(ver definición [3.36]).*

Demostración. Sea $d \geq 0$ y $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(d))$, $f \neq 0$. Note que la restricción de f a U_i está dada por un polinomio $P_i(X_0, \ldots, X_n)$ de grado d el cual es independiente de i. En efecto, tenemos que

$$f|_{U_i} = P_i / X_i^{r_i}$$

donde P_i es un polinomio de grado $d + r_i$ en las variables $X_0, \ldots, X_n$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que X_i no divide a P_i. Entonces, sobre la intersección $U_i \cap U_j$

$$P_i / X_i^{r_i} = P_j / X_j^{r_j}$$

en el campo de funciones racionales. De esto se sigue que

$$P_i X_j^{r_j} = P_j X_i^{r_i}$$

pero $X_i \nmid P_i$, entonces $r_i = 0$, análogamente $r_j = 0$. Por tanto $P_i = P_j$. □

Teorema 4.10. *Sea $n \geq 1$ entero y considere $d \in \mathbb{Z}$, entonces*

- $H^0(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(d)) = R_d$ $(\forall)$ d.
- $H^i(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(d)) = 0$ *para* $0 < i < n$ *y* $(\forall)$ d.
- $H^n(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(d)) = H^0(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(-d-n-1))^*$ $(\forall)$ d.

Demostración. Ver [10], Cap. VII, Teorema 4.1, pág. 122. □

Teorema 4.11. *[**de Finitud**] Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X. Entonces, $(\forall)$ $i \geq 0$, $\check{H}^i(X, \mathcal{F})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita.*

Demostración. Supongamos que $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ es la inclusión canónica. Consideremos la imagen directa de $\mathcal{F}$, $i_*\mathcal{F}$ el cual es un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}$-módulo coherente sobre $\mathbb{P}^n(k)$, pues X es una subvariedad cerrada. Dado que $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = \check{H}^q(\mathbb{P}^n(k), i_*\mathcal{F})$ (ver proposición 4.7) entonces, podemos suponer $X = \mathbb{P}^n(k)$ y $\mathcal{F} = i_*\mathcal{F}$.

Tenemos que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(d)$ es un haz coherente (ver definición [3.36]). Note que para el caso $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(d)$ $d \in \mathbb{Z}$ el teorema se cumple. En efecto, tenemos que

$$dim_k R_d = \binom{n+d}{n}$$

(ver [3] Cap. 2, Ejercicio 2.36, Pág 25). Y por el teorema [4.10]

$$\Gamma(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(d)) = R_d.$$

Por hipótesis, $\mathcal{F}$ es coherente, entonces $\mathcal{F} = \tilde{M}$, donde

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$$

es un R-módulo graduado finitamente generado. Sea $\{m_1, \ldots, m_t\}$ un conjunto de generadores. Sin pérdida de generalidad podemos suponer m_r homogéneos de grado n_r $r = 1, \ldots, t$, respectivamente.

Entonces, existe un homomorfismo sobreyectivo de R-módulos

$$p : L := \bigoplus_{r=1}^{t} R(-n_r) \to M$$

tal que asocia al elemento m_r, el r-ésimo elemento de la base de L; donde

$$R(-n_r) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_{n-n_r} \quad \text{(ver ejemplo [C.6])}.$$

Sea $N = ker(p)$, tenemos que N es un R-módulo graduado (ver proposición [C.8]). Dado que L es libre y R es Noetheriano, entonces N es finitamente generado (proposición [C.2]).

Entonces, la sucesión exacta de R-módulos

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta de haces coherentes

$$0 \longrightarrow \tilde{N} \longrightarrow \tilde{L} \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow 0\ .$$

Por definición $\widetilde{R(-n_r)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(-n_r)$, entonces

$$\tilde{L} = \bigoplus_{r=1}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(-n_r)$$

Ahora, demostremos el teorema por inducción descendente sobre i. Dado que la dimensión de $\mathbb{P}^n(k)$ es n, entonces por el Teorema de anulamiento tenemos que para $i \geq n+1$ $\check{H}^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para cualquier haz coherente $\mathcal{F}$. Supongamos que el resultado se conoce para $i+1$ y cualquier haz coherente. Entonces, sólo falta demostrarlo para i.

Puesto que $\tilde{N}$ es coherente, entonces por el corolario [3.26] tenemos sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^i(X, \tilde{L}) \xrightarrow{f} \check{H}^i(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{g} \check{H}^{i+1}(X, \tilde{N}) \longrightarrow \cdots$$

entonces,

$$\begin{aligned} dim_k \check{H}^i(X, \mathcal{F}) &= dim_k Im(g) + dim_k ker(g) \\ &= dim_k Im(g) + dim_k Im(f) \\ &\leq dim_k \check{H}^{i+1}(X, \tilde{N}) + dim_k \check{H}^i(X, \tilde{L}) \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $dim_k \check{H}^{i+1}(X, \tilde{N}) < \infty$. Ahora, por la proposición [4.8]

$$dim_k \check{H}^i(X, \tilde{L}) = \sum dim_k \check{H}^i(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(-n_r))$$

el cual es finito por el teorema [4.10]. Por tanto $dim_k \check{H}^i(X, \mathcal{F}) < \infty$. $\square$

4.3. Una aplicación: Teorema de *Riemann-Roch* sobre curvas proyectivas

Sea X una variedad algebraica. Definamos el conjunto

$$\varsigma := \{Y \subseteq X : Y \text{ es subvariedad cerrada de } X \text{ y } codim_X(Y) = 1\}$$

donde $codim_X(Y) := dim(X) - dim(Y)$. Considere $\mathbb{Z}\langle\varsigma\rangle$, el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por ς. A un elemento $D \in \mathbb{Z}\langle\varsigma\rangle$ se le llama *Divisor de Weil* y a $\mathbb{Z}\langle\varsigma\rangle$ el *grupo de divisores de Weil*, el cual denotaremos por $Div(X)$.

Definición 4.12. *Sea $D = \sum_Y n_Y Y$ un divisor de Weil. Definimos el grado de D como*

$$deg(D) := \sum_Y n_Y.$$

Definimos 0 como el divisor tal que $n_Y = 0$ $(\forall)Y \in \varsigma$ y lo llamamos el *divisor cero de X*.

Definición 4.13. *Si en D, $n_Y \geq 0$ $(\forall)Y \in \varsigma$ se dice que D es un divisor de Weil efectivo o positivo y se escribe $D \geq 0$.*

Para todo $D \in Div(X)$, definimos $D \geq D'$ si y sólo si $D - D' \geq 0$.
Note que $\geq$ es un orden parcial sobre $Div(X)$. En efecto, sean

$$D = \sum n_Y Y \;\; D' = \sum n'_Y Y \quad \text{y} \quad D'' = \sum n''_Y Y$$

divisores de Weil. Puesto que $D - D = 0$ por lo que $D \geq D$. Ahora, supongamos que $D \geq D'$ si y sólo si $D - D' \geq 0$, esto implica que $n_Y - n'_Y \geq 0$, por tanto $n'_Y - n_Y \leq 0$ $(\forall)Y \in \varsigma$. Si $D \geq D'$ y $D' \geq D''$, entonces $n_Y - n'_Y \geq 0$ y $n'_Y - n''_Y \geq 0$ $(\forall)Y \in \varsigma$ por lo que

$$n_Y - n''_y = n_Y - n'_Y + n'_Y - n''_Y \geq 0.$$

Así $D \geq D''$.

El soporte de $D = \sum n_Y Y$, denotado con $supp(D)$, es

$$supp(D) := \bigcup_{n_Y \neq 0} Y$$

A tales Y se le llama *componentes de* D y a n_Y la *multiplicidad de* Y. Las componentes Y de D con multiplicidad $n_Y > 0$ (respectivamente $n_Y < 0$) se les llama *ceros* (respect. *polos*) de D y $\sum_{n_Y>0} n_Y Y$ (resp. $\sum_{n_Y<0}(-n_Y)Y$) es el *divisor de ceros* (respect. *divisor de polos*).

Si X es una curva, entonces los divisores primos de X son los conjuntos que consisten de un solo punto. Así, los divisores de Weil sobre X son de la forma

$$\sum_{p\in X} n_p p$$

Definición 4.14. *Un anillo R es llamado un anillo de valuación discreta si es un dominio de ideales principales y tiene un único ideal primo no cero.*

Una función $\nu : k \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, k-campo, se llama valuación discreta si

i) ν es sobreyectiva.

ii) $\nu(\alpha) = \infty$ si y sólo si $\alpha = 0$.

iii) $\nu(\alpha\beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$.

iv) $\nu(\alpha + \beta) \geq min\,\{\nu(\alpha), \nu(\beta)\}$.

El anillo $R_\nu = \{\alpha \in k : \nu(\alpha) \geq 0\}$ es un anillo de valuación discreta. Éste es un anillo local con ideal maximal $m_\nu = \{\alpha \in k : \nu(\alpha) > 0\}$, en particular R_ν es un DIP. A un generador π de m_ν se le llama *parámetro local* y se caracteriza por $\nu(\pi) = 1$ o por ser π irreducible.

Inversamente, la valuación discreta ν se puede recuperar del anillo de valuación discreta R_ν por la propiedad de la factorización única: para $\alpha \in k$ y el parámetro local π, existe una única unidad $u \in R_\nu$ tal que $\alpha = u\pi^n$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\nu(\alpha) = n$.

Definición 4.15. *Sea R un anillo local Noetheriano con ideal maximal m y campo residual $K = R/m$. R es un anillo local regular si*

$$dim_K(m/m^2) = dim(R)$$

donde $dim(R)$ es la dimensión de Krull del anillo R.

Definición 4.16. *Sea X una variedad algebraica. X es no singular o suave en un punto $p \in X$ si el anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local regular. X es no singular si ésta es no singular en cada uno de sus puntos. X es singular si es no no-singular. Un punto p el cual no es suave es llamado punto singular o singularidad.*

Ahora, en el resto de esta sección X denotará una curva proyectiva suave.

Para cada $p \in X$, $\mathcal{O}_{X,p}$ es un dominio local Noetheriano con ideal máximal m_p y campo de cocientes $k(X)$. Puesto que la curva es suave, entonces $dim(\mathcal{O}_{X,p}) = dim(X) = 1$. Así, $\mathcal{O}_{X,p}$ es un dominio de valuación discreta con función de valuación discreta ord_p (ver [1], Teorema A.8.5, Pág. 545).

Sea $f \in k(X)$. Entonces el divisor de Weil asociado a f se define como

$$div(f) := \sum_{p \in X} ord_p(f)p.$$

Mostremos que esta suma es finita. Dado que $f \in k(x)$, entonces $f = h/g$ tal que $h,\ g \in \mathcal{O}_{X,p}$; y además, por la definición de la función de valuación $ord_p(h/g) = ord_p(h) - ord_p(g)$. Por tanto, es suficiente considerar $f \in \mathcal{O}_{X,p}$.

Tenemos que $V(\{f\}) = p_1 \cup \cdots \cup p_r$, y $f \in m_p$ si y sólo si $f(p) = 0$. Entonces $ord_Y(f) = 0$ $(\forall)$ $p \notin \{p_1, \cdots, p_r\}$. Por tanto $div(f)$ es un divisor de Weil.

Denotemos con $(f)_0$ y $(f)_\infty$ el divisor de ceros y el divisor de polos de $div(f)$, respectivamente. Entonces,

$$div(f) = (f)_0 - (f)_\infty.$$

Llamamos $ord_p(f)$ el orden de f en p y a $div(f)$ *divisor principal de Weil*.

Sea $D = [\{U_i, f_i\}_{i \in I}] \in CaDiv(X)$ y $p \in X$. Tenemos que $p \in U_i$ para algún $i \in I$. Defina el *orden de D a lo largo de p* como

$$ord_p(D) := ord_p(f_i).$$

Note que está bien definida. En efecto, sea $j \in I$ tal que $p \in U_j$. Tenemos que

$$\begin{aligned} ord_p(f_i) = ord_p(f_j) &\Leftrightarrow ord_p(f_i) - ord_p(f_j) = 0 \\ &\Leftrightarrow ord_p(f_i f_j^{-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow f_i f_j^{-1} \text{es una unidad en el anillo } \mathcal{O}_{X,p} \\ &\Leftrightarrow f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j). \end{aligned}$$

Sea $\{V_j, g_j\}$ otro representante para D. Entonces, $ord_p(f_i) = ord_p(g_j)$ pues $f_i g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ (ver definición de divisor de Cartier en la sección 2.2).

Escribimos

$$\sum_{p \in X} ord_p(D)p = \sum_{p \in U_i} ord_p(D)p + \sum_{p \notin U_i} ord_p(D)p.$$

Veamos que estas sumas son finitas o equivalentemente que f_i es una unidad en el anillo $\mathcal{O}_{X,p}$ para casi todo $p \in X$ excepto una cantidad finita de puntos.

La finitud de la primera suma se deduce de que $f_i \in m_p$ si y sólo si $p \in V(f) = \{p_1, \cdots, p_r\}$. Entonces $ord_p(f_i) = 0$ $(\forall) p \notin \{p_1, \cdots, p_r\}$.

Ahora, $p \notin U_i$ si y sólo si $p \in X \backslash U_i = Z$. Pero $Z = \{q_1, \cdots, q_s\}$, entonces $p = q_t$ para algún $t \in \{1, \ldots, s\}$. Por tanto $\sum_p ord_p(D)p$ es un divisor de Weil sobre X.

Entonces, tenemos una aplicación

$$\varphi : CaDiv(X) \to Div(X)$$

tal que $D \mapsto \sum_p ord_p(D)p$.

Note que a cada divisor de Cartier efectivo, le corresponde un divisor de Weil efectivo. Sea $D = [\{U_i, f_i\}_{i \in I}]$ efectivo. Sea $p \in X$. Tenemos que $p \in U_i$ para algún $i \in I$. Como $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, entonces $f_i \in \mathcal{O}_{X,p}$. Así, $ord_p(f_i) \geq 0$. Por tanto $\sum_p ord_p(D)p$ es un divisor de Weil efectivo.

En este caso, para X una curva suave, tenemos que esta aplicación es un isomorfismo de grupos y que los divisores de Cartier efectivos (resp. principales) se corresponden con los divisores de Weil efectivos (resp. principales) (ver [4], Cap. II, Proposición 6.11, Pág 141).

Definición 4.17. *Sea X una variedad proyectiva de dimensión n y $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X. Definimos la característica de Euler de $\mathcal{F}$ como*

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i dim_k H^i(X,\mathcal{F}).$$

Esta suma es finita por el teorema de anulamiento [4.5] y $\chi(\mathcal{F}) < \infty$ por el teorema de finitud [4.11].

Proposición 4.18. *Sea X una variedad proyectiva de dimensión n y*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de haces algebraicos coherentes sobre X. Entonces,

$$\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H}).$$

Demostración. Del corolario [3.26] tenemos que existe una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^q(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^{q+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{q+1}(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \cdots$$

y por el teorema [4.5] tenemos que

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

Ahora, sea F un campo, sabemos del álgebra lineal que si

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_m \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de F-espacios vectoriales de dimensión finita, entonces

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^i dim_F V_i = 0.$$

Por tanto, $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H})$. □

Teorema 4.19. *[Riemann-Roch sobre curvas] Sea X una curva proyectiva suave, $D \in Div(X)$. Denotemos el haz invertible asociado al divisor D con $\mathcal{O}_X(D)$. Entonces,*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = deg(D) + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Demostración. Sea D cualquier divisor sobre X y p un punto de X. Demostraremos que la fórmula es cierta para D si y sólo si es cierta para $D + p$. Esto es suficiente para demostrar el teorema pues cualquier divisor puede obtenerse a partir del divisor cero 0 en un número finito de pasos por sumar o restar un punto cada vez.

Sea $p \in X$. Consideremos la inclusión canónica $i : \{p\} \hookrightarrow X$. Por tanto tenemos la sucesión exacta fundamental asociada a $\{p\}$ (ver sección 1.5)

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_p \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_p \longrightarrow 0$$

donde $i_*\mathcal{O}_p$ es la imagen directa de $\mathcal{O}_p$ bajo i. Note que $\mathcal{O}_X(-p) = \mathcal{J}_p$. En efecto, En la sub-sección 2.2.1 definimos que para cualquier abierto $U \subseteq X$ tal que $p \in U$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(-p)) := \{f \in k^*(X) | div(f) \geq p\}.$$

lo cual implica que $f(p) = 0$. Entonces, $f \in \Gamma(U, \mathcal{J}_p)$.

Ahora, sea $f \in \Gamma(U, \mathcal{J}_p)$. Entonces, $f(p) = 0$, por lo que $div(f) \geq p$. Así, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X(-p))$.

Entonces, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-p) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_p \longrightarrow 0 \quad (1)$$

Dado que $\mathcal{O}_X(-p)$ es un haz invertible (ver sección 2.2.1), entonces es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente. Así, por la proposición [4.18]

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_X(-p)) + \chi(i_*\mathcal{O}_p).$$

Como $\check{H}^i(X, i_*\mathcal{O}_p) = \check{H}^i(X, \mathcal{O}_p)$ para toda $i \geq 0$ (ver proposición [4.7]) y por el teorema de anulamiento [4.5]

$$\check{H}^i(\Gamma(\{p\}, \mathcal{O}_p) = 0$$

para $i \geq 1$. Entonces, sólo determinaremos $dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_p)$. De la definición del haz $\mathcal{O}_p$ (ver sección 1.5), tenemos que para cada abierto $U \subseteq X$

$$\mathcal{O}_p(U) = \begin{cases} k & , \text{si } p \in U \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto, $\chi(\mathcal{O}_p) = 1$. Así, $\chi(\mathcal{O}_X(-p)) = -1 + \chi(\mathcal{O}_X) = deg(-p) + \chi(\mathcal{O}_X)$.

Ahora, tensorizamos la sucesión exacta (1) con $\mathcal{O}_X(D + p)$, como éste es un haz invertible y $\mathcal{O}_X(D) \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D') = \mathcal{O}_X(D + D')$ (ver proposición [2.39]), entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D+p) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_p \longrightarrow 0$$

entonces,

$$\chi(\mathcal{O}_X(D+p)) = \chi(\mathcal{O}_X(D)) + \chi(i_*\mathcal{O}_p) \quad (2).$$

Ahora, supongamos que el resultado se cumple para $\mathcal{O}_X(D)$, entonces sustituimos en (2)

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_X(D+p)) &= deg(D) + \chi(\mathcal{O}_X) + 1 \\ &= deg(D+p) + \chi(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

es decir el resultado se cumple para $D + p$.

Recíprocamente, supongamos que el resultado se cumple para $D + p$, entonces sustituimos en (2) y obtenemos que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_X(D)) + \chi(i_*\mathcal{O}_p) &= \chi(\mathcal{O}_X(D+p)) \\ &= deg(D+p) + \chi(\mathcal{O}_X) \\ &= deg(D) + 1 + \chi(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = deg(D) + \chi(\mathcal{O}_X).$$

□

Apéndice A

Categorías y Funtores

A.1. Definición de categoría

Una categoría C consta de

i) Una clase de objetos $\mathcal{O}b(C)$.

ii) Para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{O}b(C)$, un conjunto $Hom_C(X, Y)$ cuyos elementos se llaman *morfismos* o *flechas* f de X en Y denotados con $f : X \to Y$, decimos que X es el *dominio de la flecha* f y Y su *codominio*.

   Definamos $dom(f) := X$ y $cod(f) := Y$.

iii) Para cada terna de objetos $X, Y, Z \in \mathcal{O}b(C)$ y para cada par de flechas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ una operación llamada composición de f y g, escrita como $g \circ f$, es una flecha de X en Z.

   Además, esta ley de composición satisface que: $(\forall)$ $f : X \to Y, g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ y $h' : Z \to X$

   a) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

   b) Para todo objeto $X \in \mathcal{O}b(C)$ existe un morfismo $1_X : X \to X$ tal que $f \circ 1_X = f$ y $1_X \circ h' = h'$.

Entonces escribimos

$$C = (\mathcal{O}b(C), Hom(C))$$

donde $Hom(C) := \{Hom_C(X,Y)|X,Y \in \mathcal{O}b(C)\}$. Si no existe confusión con respecto a la categoría podemos escribir $Hom(X,Y)$ por $Hom_C(X,Y)$.

Cuando se conoce el tipo de flechas entre los objetos, nos referimos a la categoría simplemente como la colección de objetos que la conforma.

Proposición A.1. *Para todo objeto X, existe un único morfismo $1_X : X \to X$ tal que satisface la propiedad b). A este morfismo lo llamaremos morfismo identidad sobre X.*

Demostración. Supongamos que existe $h : X \to X$ tal que $f \circ h = f$ y $h \circ g = g$ $(\forall) f, g \in Hom(X,Y)$ y $Hom(Z,X)$, respectivamente. Entonces, en particular $h = h \circ 1_X = 1_X$. □

Un morfismo $f : X \to Y$ es *invertible* o *isomorfismo* si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, entonces decimos que los objetos X e Y son isomorfos y escribimos $X \cong Y$.

Proposición A.2. *Con la notación anterior, si f es un isomorfismo, entonces g es único. Por tanto decimos que g es el inverso de f y viceversa, y escribimos $g = f^{-1}$.*

Demostración. Supongamos que $(\exists) h \in Hom(Y,X)$ tal que $h \circ f = 1_X$ y $f \circ h = 1_Y$. Entonces

$$\begin{aligned} h &= 1_X \circ h \\ &= (g \circ f) \circ h \\ &= g \circ (f \circ h) \\ &= g \circ 1_Y \\ &= g \end{aligned}$$

□

A continuación enunciaremos algunos ejemplos de categorías así como la notación que en lo sucesivo de este apartado utilizaremos.

Ejemplo A.3. *Set es la categoría de conjuntos. Donde*

$\mathcal{O}b(Set) = \{S|\ S \text{ es un conjunto}\}$ *y*
$Hom(Set) = \{\text{aplicaciones de conjuntos}\}$

Ejemplo A.4. *Gr es la categoría de grupos. Donde*

$\mathcal{O}b(Gr) = \{G|\ G$ *es un grupo*$\}$ *y*
$Hom(Gr) = \{$*homomorfismos de grupos*$\}$

Ejemplo A.5. *Similarmente, denotaremos por An, Ab y Mod_A (A anillo) las categorías de anillos conmutativos y con 1, grupos abelianos y A-módulos con los homomorfismos correspondientes, respectivamente.*

Definición A.6. *Un preorden es un conjunto S junto con una relación binaria $\leq$ en S tal que $(\forall)s,\, t,\, r \in S$*

i) $s \leq s$.

ii) *si* $r \leq s$ *y* $s \leq t$, *entonces* $r \leq t$.

Ejemplo A.7. *Un preorden $(S, \leq)$ induce una categoría. Consideremos los elementos de S como los objetos y $(\forall)s,\, t \in S$ definamos*

$$Hom(s,t) := \begin{cases} \{i_{st}\} & \text{si } s \leq t \\ \varnothing & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por la propiedad ii), podemos definir una operación de composición

$$Hom(s,t) \times Hom(r,s) \to Hom(r,t)$$

$$(i_{st}, i_{rs}) \mapsto i_{st} \circ i_{rs} := i_{rt}$$

Note que esta composición es asociativa. En efecto, si $r \leq s \leq t \leq u$, entonces

$$i_{tu} \circ (i_{st} \circ i_{rs}) = i_{tu} \circ i_{rt} = i_{ru}$$
$$(i_{tu} \circ i_{st}) \circ i_{rs} = i_{su} \circ i_{rs} = i_{ru}$$

Sean $s \leq t$ y $r \leq s$, así $i_{st} \circ i_{ss} = i_{st}$ e $i_{ss} \circ i_{rs} = i_{rs}$. Por lo que i_{ss} es el morfismo identidad sobre s.

Por tanto $(S, Hom(S))$ es una categoría.

Definición A.8. *Un objeto X en una categoría C se dice terminal (resp. inicial) si para cualquier objeto $Y \in \mathcal{O}b(C)$ $(\exists)$ un único morfismo $f : Y \to X$ (resp. $g : X \to Y$).*

Así, para $X \in \mathcal{O}b(C)$ terminal o inicial, $Hom(X, X) = \{1_X\}$.

Proposición A.9. *Cualesquiera dos objetos iniciales (resp. terminales) en una categoría C son isomorfos.*

Demostración. Sean X, $X' \in \mathcal{O}b(C)$ ambos iniciales. Entonces, existen únicos morfismos $f : X \to X'$ y $g : X' \to X$. Además, $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_{X'}$. Por lo que $X \cong X'$.

Análogamente, si X y X' son objetos terminales en C. □

Definición A.10. *Un objeto cero en una categoría C es un objeto que es inicial y terminal en C.*

De la proposición anterior deducimos que cualesquiera dos objetos cero en una categoría C son isomorfos.

Por lo tanto, si C posee objeto cero, lo denotamos con 0. Además para cada par de objetos X, Y de C existe un único morfismo de X en Y que se factoriza a través de 0, (i.e.) la composición de las flechas $X \to 0 \to Y$, y lo llamamos *morfismo cero.*

Ejemplos:

• Ab posee objeto cero, el grupo trivial $\{0\}$. Y el morfismo cero entre dos grupos abelianos $G \to G'$ es el que envía a cada $g \in G$ a $0 \in G'$.

• An. El anillo trivial $\{0\}$ es el objeto cero en esta categoría.

• Mod_A (A anillo) posee objeto cero, el A-módulo trivial $\{0\}$.

En los sucesivo C y D denotan categorías, a menos que se especifique otra cosa.

A.2. Definición de Funtor

Decimos que $\mathcal{F} : C \to D$ es un *funtor contravariante* (resp. covariante) si:

i) para cada $X \in \mathcal{O}b(C)$, asigna un objeto $\mathcal{F}(X) \in \mathcal{O}b(D)$.

ii) a cada morfismo $f \in Hom_C(X,Y)$ le asocia un morfismo

$$\mathcal{F}(f) \in Hom_D(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$$
$$(\text{resp. } \mathcal{F}(f) \in Hom_D(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)))$$

iii) $(\forall)\ g \in Hom_C(Y,Z)$

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$$
$$(\text{resp. } \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f))$$

iv) $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$.

Ejemplo A.11. *Sea $Y \in \mathcal{O}b(D)$. Definamos $\Delta_Y : C \to D$ como $\Delta_Y(X) := Y$ $(\forall)\ X \in \mathcal{O}b(C)$ y $(\forall)\ f \in Hom_C(X,X')$ $\Delta_Y(f) := id_Y$. Entonces Δ_Y satisface ambas definiciones, por tanto podemos considerarlo como un funtor covariante ó contravariante. Este funtor se conoce como funtor constante sobre C con valor en Y.*

Ejemplo A.12. *Sea $\mathcal{F} : Ab \to Set$ tal que*

$$(G,+) \mapsto G$$

$$(G,+) \to (H,+) \mapsto G \to H$$

este funtor recibe el nombre de Funtor de olvido.

A.3. Transformaciones naturales

Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : C \to D$ dos funtores covariantes (resp. contravariantes). Una *transformación natural* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, es una colección de morfismos

$$\varphi_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$$

uno para cada objeto $X \in \mathcal{O}b(C)$ tal que para cualquier morfismo $f : X \to Y$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & \mathcal{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

(resp. el siguiente diagrama conmuta)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(Y) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\varphi_X"] & \mathcal{G}(X) \end{tikzcd}$$

Ahora, consideremos sólo funtores contravariantes de una categoría fija C a otra fija D.

Sean $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ transformaciones naturales.
Definamos $\beta \circ \alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ como la colección de morfismos

$$\{(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X | X \in \mathcal{O}b(C)\}$$

donde la composición entre β_X y α_X es la composición definida en D.

Proposición A.13. *$\alpha \circ \beta$ es una transformación natural.*

Demostración. Dado que α y β son transformaciones naturales, entonces $(\forall)$ $f : X \to Y$ tenemos que $\alpha_X \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \alpha_Y$ y $\beta_X \circ \mathcal{G}(f) = \mathcal{H}(f) \circ \beta_Y$. Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "(\beta\circ\alpha)_Y"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{H}(Y) \arrow[d, "\mathcal{H}(f)"] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[r, "(\beta\circ\alpha)_X"] & \mathcal{H}(X) \end{tikzcd}$$

□

Sea $\mathcal{F}' : C \to D$ otro funtor y $\gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{F}'$ una transformación natural. Entonces por la asociatividad de la composición en D tenemos que

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$$

Para cada funtor $\mathcal{F}$, definamos

$$1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

como la colección $\left\{1_{\mathcal{F}_X} := 1_{\mathcal{F}(X)} | X \in \mathcal{O}b(C)\right\}$. Por la propiedad del morfismo identidad $1_{\mathcal{F}(X)}$ sobre cada objeto X de C, tenemos que $1_{\mathcal{F}}$ es una transformación natural.

Además, para todo funtor $\mathcal{G}'$ y $(\forall)$ $\gamma' : \mathcal{F} \to \mathcal{G}'$ transformación natural, $1_{\mathcal{F}} \circ \gamma' = \gamma'$. Análogamente $\alpha' \circ 1_F = \alpha'$ para todo funtor $\mathcal{H}'$ y para toda transformación natural $\alpha' : \mathcal{F} \to \mathcal{H}'$. Por tanto $1_{\mathcal{F}}$ es el morfismo identidad sobre $\mathcal{F}$.

Así, la colección de funtores contravariantes de C en D junto con las transformaciones naturales definidas sobre ellos forman una categoría.

Análogamente, la colección de funtores covariantes de C en D forman una categoría.

A.4. Conos y Límites

Sean $\mathcal{F} : C \to D$ un funtor covariante (resp. contravariante), un *cono para* $\mathcal{F}$ es un par (Y, μ) donde $Y \in \mathcal{O}b(D)$ y $\mu : \Delta_Y \to \mathcal{F}$ es una transformación natural de funtores covariantes (resp. contravariantes) (ver ejemplo [A.11]). Y es llamado el *vértice del cono.*

Consideremos conos para un funtor fijo $\mathcal{F}$ (covariante ó contravariante).

Definición A.14. *Un morfismo de conos $(Y, \mu) \to (Y', \mu')$ es un morfismo $g : Y \to Y'$ tal que $\mu'_X \circ g = \mu_X$ $(\forall) X \in \mathcal{O}b(C)$. Denotemos este morfismo por φ_g indicando que está determinado por el morfismo g.*

Usando la notación de la definición anterior, sea (Y'', μ'') otro cono para $\mathcal{F}$ y un morfismo de conos $\varphi_{g'} : (Y', \mu') \to (Y'', \mu'')$.

Consideremos $g' \circ g : Y \to Y''$.

Note que $\varphi_{g' \circ g} : (Y, \mu) \to (Y'', \mu'')$ es un morfismo de conos. En efecto, tenemos que $\mu'_X \circ g = \mu_X$ y $\mu''_X \circ g' = \mu'_X$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu''_X \circ (g' \circ g) &= (\mu''_X \circ g') \circ g \\ &= \mu'_X \circ g \\ &= \mu_X \end{aligned}$$

Definamos $\varphi_{g'} \circ \varphi_g := \varphi_{g' \circ g}$.

Por la asociatividad de la composición en D, esta composición definida sobre los morfismos de conos es asociativa.

Además para cada cono (Y, μ) sobre $\mathcal{F}$, tenemos el morfismo

$$\varphi_{1_Y} : (Y, \mu) \to (Y, \mu)$$

dado por el morfismo identidad sobre Y. Por la definición de la composición en D, éste es el morfismo identidad sobre (Y, μ).

Por lo que el conjunto de conos para un funtor fijo $\mathcal{F}$ y los morfismos definidos sobre ellos forman una categoría. Denotaremos esta categoría con $Cono(\mathcal{F})$.

Tenemos que los objetos terminales en una categoría son únicos salvo isomorfismo. Entonces, si $Cono(\mathcal{F})$ tiene un objeto terminal, decimos que éste es *el cono límite para* $\mathcal{F}$. En particular, por la definición de la composición en $Cono(\mathcal{F})$ los vértices de cualesquiera dos objetos terminales en esta categoría son isomorfos.

Definición A.15. *Sea $(S, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un diagrama en una categoría C de tipo S es un funtor contravariante $\mathcal{F} : S \to C$ y el cono límite para $\mathcal{F}$, si existe, es llamado el límite del diagrama $\mathcal{F}$.*

El par $(S, \mathcal{F})$ recibe el nombre de *sistema inverso* y el vértice del límite del diagrama $\mathcal{F}$, si éste existe, *límite inverso o límite proyectivo de este sistema inverso*, el cual denotamos con

$$\varprojlim_{s \in S} F(s)$$

o simplemente $\varprojlim F(s)$ y a los morfismos que definen la transformación natural en el límite del diagrama los llamamos *aplicaciones naturales del límite inverso*.

Note que si $S' \subseteq S$, entonces S' es parcialmente ordenado con la restricción del orden parcial definido sobre S. Sea $\mathcal{F} : S \to C$ un funtor contravariante. Definamos una aplicación de $S' \to C$ de la siguiente manera: $s' \mapsto \mathcal{F}(s')$ y $i_{t's'} \mapsto \mathcal{F}(i_{t's'})$. Dado que $\mathcal{F}$ es un funtor contravariante, entonces esta aplicación también lo es. Por tanto decimos que $\mathcal{F}$ induce un funtor contravariante sobre S' y lo denotamos con $F|_{S'}$. Así, podemos considerar el límite inverso de este sistema

$$\varprojlim_{s' \in S'} F(s').$$

Sean $\{\mu_s\}_{s\in S}$ y $\{\mu'_{s'}\}_{s'\in S'}$ las aplicaciones naturales de los límites $\varprojlim F(s)$ y $\varprojlim \mathcal{F}(s')$, respectivamente. Dado que para toda $s', t' \in S'$ tal que $s' \leq t'$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \varprojlim \mathcal{F}(s)_{s\in S} \arrow[r, "\mu_{t'}"] \arrow[dr, "\mu_{s'}"'] & \mathcal{F}(t') \arrow[d, "\mathcal{F}(i_{s't'})"] \\ & \mathcal{F}(s') \end{tikzcd}$$

Así, $\varprojlim \mathcal{F}(s)_{s\in S}$ junto con la colección de aplicaciones $\{\mu_s | s \in S'\}$ es un cono para $\mathcal{F}|_{S'}$. Entonces, como $(\varprojlim \mathcal{F}(s'), \mu')$ es un objeto terminal en $Cono(\mathcal{F}|_{S'})$ tenemos que existe un único morfismo h en C, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \varprojlim \mathcal{F}(s) \arrow[r, "\mu_{s'}"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \mathcal{F}(s') \\ \varprojlim \mathcal{F}(s') \arrow[ur, "{\mu'}_{s'}"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

A.5. Construcción del límite inverso

Costruiremos el límite inverso en la categoría de conjuntos.

Sea I un conjunto parcialmente ordenado. Sea $\mathcal{F} : I \to Set$ un funtor contravariante. Definamos $E_\alpha := \mathcal{F}(\alpha)$ y si $\alpha \leq \beta$ $f_{\alpha\beta} := \mathcal{F}(i_{\alpha\beta}) : E_\beta \to E_\alpha$ (ver ejemplo [A.7]).

Sea Y el subconjunto del producto

$$\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$$

que consiste de los elementos $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$, $x_\alpha \in E_\alpha$ tal que $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ $(\forall)\alpha$, $\beta \in I$ con $\alpha \leq \beta$.

Consideremos las proyecciones del producto $\{\pi_\alpha\}$ restringidas a Y, entonces por la construcción de Y, tenemos que para $\alpha \leq \beta$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi_\beta"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & E_\beta \arrow[d, "f_{\alpha\beta}"] \\ & E_\alpha \end{tikzcd}$$

Así la colección $\pi := \{\pi_\alpha|_Y\}_{\alpha\in I}$ es una transformación natural de Δ_Y a $\mathcal{F}$. Por tanto $(Y,\pi) \in Cono(\mathcal{F})$. Mostremos que este cono es un objeto terminal en $Cono(\mathcal{F})$. Sea $(Y',\mu) \in Cono(\mathcal{F})$. Para cada $\alpha \in I$ tenemos un morfismo $\mu_\alpha : Y' \to E_\alpha$. Entonces, por la propiedad del producto, existe un único morfismo g tal que para cada $\alpha \in I$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "\mu_\alpha"] & \\ \prod E_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha"] & E_\alpha \end{tikzcd} \quad (\mathbf{2})$$

Note que $Im(g) \subseteq Y$
En efecto, sea $y' \in Y'$, entonces $g(y') = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in Im(g)$. Si $\alpha \leq \beta$

$$\begin{aligned} x_\alpha &= (\pi_\alpha \circ g)(y') \\ &= \mu_\alpha(y') \\ &= (f_{\alpha\beta} \circ \mu_\beta)(y') \\ &= (f_{\alpha\beta} \circ (\pi_\beta \circ g))(y') \\ &= f_{\alpha\beta}(x_\beta) \end{aligned}$$

Por lo que $g(y') \in Y$. Ahora, por la conmutatividad del diagrama [**2**], $\varphi_g : (Y',\mu) \to (Y,\pi)$ es un morfismo de conos. Además, por la unicidad de g, φ_g es único. Por tanto (Y,π) es el cono límite para $\mathcal{F}$.

Así, $Y = \varprojlim E_\alpha$ y $\{\pi_\alpha|_Y\}_{\alpha\in I}$ sus aplicaciones naturales.

Note que esta construcción es válida para la categoría de grupos abelianos, anillos y módulos sobre un anillo fijo.

A.6. Límite directo

Un *conjunto directo* es un conjunto parcialmente ordenado $(D,\leq)$ tal que si λ, $\mu \in D$, entonces $(\exists)$ $\nu \in D$ tal que $\lambda \leq \nu$ y $\mu \leq \nu$. Un subconjunto E

de D se dice *cofinal*, si para cada $\lambda \in D$ $(\exists)$ $\nu \in E$ con $\lambda \leq \nu$. En particular, cualquier subconjuto cofinal es un conjunto directo.

Supongamos que para cada $\lambda \in D$ tenemos un conjunto M_λ y si $\lambda \leq \mu$ tenemos aplicaciones
$$f_{\mu\lambda} : M_\lambda \to M_\mu$$
tal que satisfacen las siguientes condiciones

1. $f_{\lambda\lambda} = id$
2. $f_{\nu\mu} \circ f_{\mu\lambda} = f_{\nu\lambda}$ para $\lambda \leq \mu \leq \nu$.

Entonces, llamamos a $\mathcal{F} := \{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}$ un *sistema directo*. Note que esto es lo mismo que definir un funtor covariante de la categoría definida por el sistema directo a la categoría de conjuntos.

Decimos que un conjunto M junto con una colección de funciones
$$\{g_\lambda : M_\lambda \to M\}_{\lambda \in D}$$
las cuales satisfacen que si $\lambda \leq \mu$, entonces $g_\lambda = g_\mu \circ f_{\mu\lambda}$ es el *límite directo del sistema directo* $\mathcal{F}$, si para todo conjunto M' con aplicaciones $\{g'_\lambda : M_\lambda \to M'\}_{\lambda \in D}$ tal que $g'_\lambda = g'_\mu \circ f_{\mu\lambda}$ $(\forall)$ $\lambda \leq \mu$, tenemos que existe una aplicación $\varphi : M \to M'$ tal que $(\forall)$ $\lambda \in D$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[d, "g_\lambda"'] \arrow[dr, "g'_\lambda"] & \\ M \arrow[r, dashed, "\varphi"] & M' \end{tikzcd}$$

y escribimos
$$M = \varinjlim_{\lambda \in D} M_\lambda.$$

Consideremos la unión disjunta $\coprod_{\lambda \in D} M_\lambda$. Definamos una relación $\sim$ sobre esta unión disjunta, dada por $x \sim y$ si y sólo si $x \in M_\lambda$, $y \in M_\mu$, y $(\exists)$ $\nu \in D$ con $\lambda \leq \nu$, $\mu \leq \nu$ y $f_{\nu\lambda}(x) = f_{\nu\mu}(y)$.

Note que $\sim$ es una relación de equivalencia. Además,
$$\coprod_{\lambda \in D} M_\lambda / \sim = \varinjlim_{\lambda \in D} M_\lambda.$$
(ver [7] Appendix A, Direct limits).

Proposición A.16. *Con la notación anterior, sea E un subconjunto cofinal de D. Entonces*

$$\varinjlim_{\lambda \in D} M_\lambda = \varinjlim_{\lambda \in E} M_\lambda.$$

Demostración. Es suficiente demostrar que en cada clase de equivalencia de $\varinjlim_{\lambda \in D} M_\lambda$ existe un conjunto indizado por un elemento de E.

Sea $\lambda \in D$ y $x \in M_\lambda$, dado que E es cofinal existe $\mu \in E$ tal que $\lambda \leq \mu$, entonces $x \sim f_{\mu\lambda}(x)$. $\square$

Teorema A.17. *Sean $\mathcal{F} = \{M_\lambda : f_{\mu\lambda}\}$, $\mathcal{F}' = \left\{M'_\lambda : f'_{\mu\lambda}\right\}$ y $\mathcal{F}'' = \left\{M''_\lambda : f''_{\mu\lambda}\right\}$ sistemas directos indizados por el mismo conjunto Λ y aplicaciones*

$$\{\varphi_\lambda\} : \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \quad y \quad \{\psi_\lambda\} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$$

tal que $(\forall)\ \lambda \in \Lambda$

$$M'_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} M''_\lambda$$

es una sucesión exacta. Entonces, la sucesión obtenida en el límite

$$\varinjlim M'_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} \varinjlim M_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} \varinjlim M''_\lambda$$

es exacta.

Demostración. Ver [7] Apéndice A, Teorema A.2. $\square$

Apéndice B

Geometría algebraica

Para determinar si una aplicación entre variedades es un morfismo, usaremos el siguiente resultado de geometría algebraica.

Proposición B.1. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre variedades. Sea $\{V_i\}$ una colección de abiertos afínes tal que $Y = \bigcup V_i$. Sea $\{U_i\}$ un cubrimiento abierto de X tal que:*

i) $f(U_i) \subseteq V_i$

ii) Si f_* envía $\mathcal{O}_Y(V_i)$ en $\mathcal{O}_X(U_i)$

Entonces f es un morfismo de variedades.

Demostración. Ver [8] Cap. I, Proposición 6, pág 30. □

Las condiciones i) y ii) en la proposición anterior, implican que si $f|_{U_i}$ es un morfismo de variedades, entonces f es un morfismo.

Proposición B.2. *Si $f : X \to Y$ es cualquier morfismo de variedades, sea $Z = \overline{f(X)}$. Entonces Z es irreducible. Por tanto una subvariedad cerrada de Y.*

Demostración. Ver [8], Cap. 1, Secc. 8, Proposición 1. □

Teorema B.3. *Sea $f : X \to Y$ un isomorfismo de variedades y $V \subseteq X$ una subvariedad. Supongamos que $f(V)$ es una subvariedad de Y. Entonces, $f|_V : V \to f(V)$ es un isomorfismo de variedades con inversa $f^{-1}|_{f(V)}$.*

Demostración. Tenemos que $f|_V$ es un morfismo de variedades, además es inyectivo y sobreyectivo. Consideremos $f^{-1}|_{f(V)}$, es también un morfismo de variedades. Además $f^{-1}|_{f(V)} \circ f|_V = id_V$ y $f|_V \circ f^{-1}|_{f(V)} = id_{f(V)}$. Por tanto es un isomorfismo de variedades. □

Corolario B.4. *Con la notación del teorema. Si V es abierto ó cerrado irreducible en X, entonces $f|_V$ es un isomorfismo de variedades.*

Demostración. Si V es abierto, entonces $f(V)$ es una subvariedad abierta de Y.
Si V es cerrado irreducible, entonces $f(V)$ es cerrado y por la proposición [B.2] es irreducible, por tanto una subvariedad cerrada de Y. □

Proposición B.5. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, para cada $i \in I$ un haz $\mathcal{F}_i$ sobre U_i y para cada i, $j \in I$ un isomorfismo de haces*

$$\varphi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$$

tal que

i) *para cada i $\varphi_{ii} = id_{\mathcal{F}_i}$*

ii) $(\forall)$ *i, j, $k \in I$ $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$*

Entonces, existe un único haz $\mathcal{F}$ sobre X, junto con isomorfismos

$$\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$$

tal que para cada i, j $\psi_j = \varphi_{ij} \circ \psi_i$ sobre $U_i \cap U_j$.

Entonces, decimos que se obtiene de pegar los haces $\mathcal{F}_i$ via los isomorfismos φ_{ij}. [Ver [4] Ejercicio 1.22]

Proposición B.6. *Sea* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ *una suceción exacta de haces sobre X. Entonces*

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H})$$

es una sucesión exacta $(\forall)$ *$U \subseteq X$ abierto.*

Demostración. φ_U es inyectiva pues φ lo es. Ahora, demostremos que

$$Im(\varphi_U) = ker(\psi_U).$$

Tenemos que

$$Im\varphi = ker\psi.$$

En particular, $Im(\varphi_U) \subseteq Im\varphi(U) = ker(\psi_U)$.

Sea $s \in ker(\psi_U)$. Entonces, $\psi_U(s) = 0$, por tanto $\psi_p(s_p) = 0$ $(\forall)$ $p \in U$. Así,

$$s_p \in ker(\psi_p) = im(\varphi_p)$$

por la exactitud en los gérmenes. Entonces, existe $\overline{\langle t^{(p)}, V_p\rangle} \in \mathcal{F}_p$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi_p(\overline{\langle t^{(p)}, V_p\rangle}) &= \overline{\left\langle \varphi_{V_p}(t^{(p)}), V_p \right\rangle} \\ &= s_p \end{aligned}$$

(i.e.) $(\exists)$ $W_p \in V_p \cap U$ con $p \in W_p$ tal que

$$\varphi_{V_p}(t^{(p)})|_{W_p} = s|_{W_p}.$$

Entonces, $\overline{\langle t^{(p)}, V_p\rangle} = \overline{\langle t^{(p)}, W_p\rangle} \in \mathcal{F}_p$ $(\forall)$ $p \in U$.

Escribamos

$$U = \bigcup_{p \in U} W_p.$$

Tenemos $t^{(p)} \in \mathcal{F}(W_p)$ y $\varphi_{W_p}(t^{(p)}) = s|_{W_p}$. Ahora, $(\forall)$ p, $q \in U$.

$$\begin{aligned} \varphi_{W_p \cap W_q}(t^{(p)}|_{W_p \cap W_q}) &= \varphi_{W_p}(t^{(p)})|_{W_p \cap W_q} \\ &= s|_{W_p \cap W_q} \\ &= \varphi_{W_q}(t^{(q)})|_{W_p \cap W_q} \\ &= \varphi_{W_p \cap W_q}(t^{(q)}|_{W_p \cap W_q}) \end{aligned}$$

por la inyectividad de φ, entonces $t^{(p)}|_{W_p \cap W_q} = t^{(q)}|_{W_p \cap W_q}$. Dado que $\mathcal{F}$ es un haz, entonces $(\exists)$ $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t|_{W_p} = t^{(p)}$. Por tanto, $t_p = \overline{\langle t^{(p)}, W_p\rangle}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} s_p &= \varphi_p(\overline{\langle t^{(p)}, W_p\rangle}) \\ &= \varphi_p(t_p) \\ &= \varphi_{_U}(t)_p \end{aligned}$$

$(\forall)$ $p \in U$. Por lema [1.11] $\varphi_{_U}(t) = s$. $\square$

Apéndice C

Algebra conmutativa

Proposición C.1. *Sean* $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ *y* $\{C_i\}_{i\in I}$ *colecciones de grupos abelianos y,* $\{\varphi_i : A_i \to B_i\}_{i\in I}$ *y* $\{\psi_i : A_i \to B_i\}_{i\in I}$ *colecciones de homomorfismos de grupos tal que para cada* $i \in I$ *la sucesión*

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{\varphi_i} B_i \xrightarrow{\psi_i} C_i$$

es exacta. Entonces,

$$0 \longrightarrow \prod A_i \longrightarrow \prod B_i \longrightarrow \prod C_i$$

es exacta para cada $i \in I$.

Demostración. Se sigue de componer las proyecciones de $\prod A_i$ y $\prod B_i$ con φ_i y ψ_i respectivamente, para cada $i \in I$ y utilizar la propiedad universal del producto. $\square$

Teorema C.2. *Sea* A *un anillo Noetheriano,* M *un* A*-módulo finitamente generado. Entonces,* M *es Noetheriano.*

Demostración. Ver [7], Cap. 1, Secc. 3, Teorema 3.1. $\square$

Corolario C.3. *Sean* A *y* M *como en el teorema anterior. Si* $M = \langle m_1, \ldots, m_p \rangle$. *Entonces, existe un entero positivo* q *tal que* M *es isomorfo al conúcleo de un homomorfismo*

$$\varphi : A^q \to A^p$$

Demostración. Tenemos un homomorfismo de A-módulos sobreyectivo

$$f : A^p \to M$$

Dado que A es Noetheriano, entonces por el teorema anterior A^p es noetheriano. Así, $ker(f)$ es A-submódulo finitamente generado (i.e.) $(\exists)$ $q \in \mathbb{N}$ tal que $ker(f)$ es isomorfo a un cociente de A^q. Consideremos

$$A^q \xrightarrow{\pi} ker(f) \xrightarrow{i} A^p$$

donde π es la proyección canónica e i la inclusión canónica.

Note que $Im(i \circ \pi) = ker(f)$, entonces

$$M \cong A^p / Im(\varphi)$$

donde $\varphi = i \circ \pi$. $\square$

Lema C.4. *Sea A un anillo, $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativo. Sea A_S la localización de A con respecto a S. Si*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces

$$0 \longrightarrow A_S \otimes_A M \longrightarrow A_S \otimes_A M' \longrightarrow A_S \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Ver [7], Cap. 2, Secc. 4, Teorema 4.5. $\square$

Sea G un semigrupo abeliano con elemento identidad 0.

Definición C.5. *Un anillo graduado (o G-graduado) es un anillo A junto con una descomposición en suma directa de R como grupo aditivo*

$$R = \bigoplus_{i \in G} R_i$$

tal que $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ $(\forall)$ $i, j \in G$.

Sea $R = \bigoplus_{i \in G} R_i$ un anillo graduado. Un R-módulo graduado es un R-módulo M junto con una descomposición en suma directa

$$M = \bigoplus_{i \in G} M_i$$

tal que $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$ $(\forall)$ $i, j \in G$.

Un elemento $m \in M$ es homogéneo si $m \in M_i$ para algún $i \in G$ e i es llamado el grado de m, el cuál denotaremos como $deg(m)$. Tenemos que todo elemento $x \in M$ puede ser escrito de manera única en la forma

$$m = \sum_{i \in G} m_i$$

donde $m_i \in M_i$ y solamente un número finito de $m_i \neq 0$; m_i es llamado el término homogéneo de m de grado i.

Ejemplo C.6. *Sea $M = \bigoplus_{i \in G} M_i$ un R-módulo graduado. Definamos*

$$M(j) := \bigoplus_{i \in G} M_{i+j}$$

entonces, $M(j)$ es un R-módulo graduado igual a M pero con distinta graduación.

Definición C.7. *Un submódulo $N \subseteq M$ se dice submódulo homogéneo (o submódulo graduado) si para cada $n \in N$ implica que cada término homogéneo de n está en N o equivalentemente $N = \bigoplus_{i \in G}(N \cap M_i)$.*

Para un submódulo homogéneo $N \subseteq M$ definamos $N_i := N \cap M_i$ para cada $i \in G$. Entonces

$$N = \bigoplus_{i \in G} N_i.$$

Sean M y N R-módulos graduados. Un homomorfismo de R-módulos

$$\varphi : M \to N$$

se dice *homogéneo de grado i* si, $(\forall)$ $j \in G$, $\varphi_j := \varphi|_{M_j} : M_j \to N_{j+i}$.

Proposición C.8. *Sea $\varphi : M \to N$ homogéneo de grado i. Entonces, $ker(\varphi)$ es un R-módulo graduado.*

Demostración. Sea $m = \sum m_j \in ker(\varphi)$. Supongamos $m \neq 0$, entonces $(\exists)$ $j_0 \in G$ tal que $m_{j_0} \neq 0$. Tenemos que $\varphi(m) = \sum_{j\in G} \varphi(m_j) = 0$. En particular,

$$\varphi(m_{j_0}) = -\sum_{j\neq j_0} \varphi(m_j)$$

puesto que φ es de grado i, entonces $\varphi(m_{j_0}) \in N_{i+j_0}$. Además,

$$-\sum_{j\neq j_0} \varphi(m_j) \in \sum_{j\neq j_0} N_{j+i} = \sum_{j\neq j_0+i} N_j$$

pero

$$N_{j_0+i} \cap \sum_{j\neq j_0+i} N_j = 0$$

pues $N = \bigoplus_{j\in G} N_j$. Entonces, $\varphi(m_{j_0}) = 0$. Así, sucesivamente con cada término homogéneo de m. $\square$

Definición C.9. *Sea R un anillo graduado. Un ideal I de R se dice homogéneo si lo es como R-submódulo de R.*

Proposición C.10. *Sea R un anillo graduado e I un ideal homogéneo de R. Sea $S = R/I$ y $p : R \to S$ la proyección canónica. Entonces, S tiene una graduación natural por $S_i = p(R_i)$.*

Demostración. Sea $s \in S$, entonces $s = r + I$ para algún $r \in R$. Tenemos que $r = \sum_i r_i$, $r_i \in R_i$. Entonces,

$$s = p(r) = \sum_i p(r_i).$$

Note que

$$p(R_i) \bigcap \sum_{i\neq j} p(R_j) = \{0\}.$$

En efecto, sea $p(r_i)$, $r_i \in R_i$, un elemento en la intersección. Entonces

$$p(r_i) = \sum_{i\neq j} p(r_j),$$

por tanto $p(r_i - \sum_{i\neq j} r_j) = 0$ implica que $r_i - \sum_{i\neq j} r_j \in I$, puesto que I es homogéneo, entonces r_i, $r_j \in I$. Así, $p(r_i) = 0$. Ahora,

$$p(R_i)p(R_j) \subseteq p(R_iR_j) \subseteq p(R_{i+j}).$$

$\square$

Proposición C.11. *Sea R un anillo G-graduado, $M = \bigoplus_{i\in G} M_i$ R-módulo graduado y N, T R sub-módulos graduados de M. Considere el sub-módulo $N+T$. Entonces, $N+T$ es un submódulo graduado de M y, con la notación de la definición [C.7],*

$$N + T = \bigoplus_{i\in G}(N_i + T_i).$$

Demostración. Sea $m = \sum_{i\in G} m_i \in M$ tal que $m \in N + T$. Entonces, $m = n + t$ donde $n \in N$ y $t \in T$. En particular, podemos escribir de manera única $n = \sum_{i\in G} m'_i$ tal que $m'_i \in M_i$.

Ahora, $m - n = \sum_{i\in G}(m_i - m'_i) = t \in T$, pero T es homogéneo, entonces $m_i - m'_i \in T$ para cada i. Y dado que N es homogéneo, entonces $m'_i \in N$ para cada i. Así, $m_i \in N + T$. Por lo que $N + T$ es un sub-módulo graduado de M. Por tanto,

$$N + T = \bigoplus_{i\in G}(N + T) \cap M_i.$$

Note que $N \cap M_i + T \cap M_i \subseteq (N+T) \cap M_i$. Ahora, como $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = \{0\}$, entonces $(N + T) \cap M_i \subseteq N \cap M_i + T \cap M_i = N_i + T_i$. $\square$

Apéndice D

Cohomología

En esta sección se definirán algunos conceptos básicos de cohomología como complejo de cocadenas, cohomología de un complejo, morfismos de complejos y se mencionará la noción de homotopía.

Definición D.1. *Sea A un anillo y $C := \{C^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $d := \{d_i : C^i \to C^{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una familia de A-módulos y una familia de morfismos de A-módulos respectivamente. Se dirá que estas colecciones son un complejo de cocadenas de A-módulos si la sucesión*

$$C^\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{i-1}} C^i \xrightarrow{d_i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots$$

es semiexacta, es decir, $d_i \circ d_{i-1} = 0$ $(\forall)$ $i \in \mathbb{Z}$. Nos referiremos al complejo formado por (C, d) como $(C^\bullet, d)$ o simplemente $C^\bullet$ si no existe confusión con los morfismos.

Definición D.2. *Se define el i-ésimo grupo de cohomología asociado al complejo $C^\bullet$ como*

$$H^i(C^\bullet) := ker(d_i)/Im(d_{i-1}) \quad (\forall)\ i \in \mathbb{Z}\ .$$

Ahora, consideremos sólo complejos de cocadenas de A-módulos.

Definición D.3. *Sean $(C^\bullet, d)$ y $(D^\bullet, d')$ dos complejos, sea $r \in \mathbb{Z}$. Un morfismo de complejos*

$$\varphi : (C^\bullet, d) \to (D^\bullet, d')$$

de grado r es una sucesión de morfismos de A-módulos $\varphi^i : C^i \to D^{i+r}$ tales que para todo $i \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C^i \arrow[r, "\varphi^i"] \arrow[d, "d_i"'] & D^{i+r} \arrow[d, "d'_{i+r}"] \\ C^i \arrow[r, "\varphi^{i+1}"] & D^{i+1+r} \end{tikzcd} \qquad (*)$$

En un diagrama más complejo φ^i y φ^{i+1} se ilustrarían de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r, "d_{i-1}"] & C^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[drrr, "\varphi^i"] & C^{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[drrr, "\varphi^{i+1}"] & \dots \arrow[r] & C^{i+r} \arrow[r, "d_{i+r}"] & C^{i+1+r} \arrow[r] & \dots \\ \dots \arrow[r, "d'_{i-1}"'] & D^i \arrow[r, "d'_i"'] & D^{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"'] & \dots \arrow[r] & D^{i+r} \arrow[r, "d'_{i+r}"'] & D^{i+1+r} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

donde la condición de conmutatividad del cuadrado anterior se traduce a pedir conmutatividad en el rombo central.

En lo sucesivo consideraremos morfismos de complejos de grado 0.

Sea $\varphi : (C^\bullet, d) \to (D^\bullet, d')$ un morfismo de complejos de cocadenas. Por la conmutatividad del diagrama $(*)$ tenemos un morfismo de grupos definido sobre los grupos de cohomología

$$H^i(\varphi) : H^i(C^\bullet) \to H^i(D^\bullet)$$

tal que $\overline{z} \mapsto \overline{\varphi^i(z)}$ para cada $z \in ker(d_i)$ donde $\overline{}$ indica la clase del elemento en el grupo cociente.

Definición D.4. *Una sucesión de complejos de cocadenas*

$$C^\bullet \xrightarrow{\varphi} D^\bullet \xrightarrow{\psi} E^\bullet$$

se dice exacta si $\psi^i \circ \varphi^i = 0$ $(\forall)$ $i \in \mathbb{Z}$. Si además, la sucesión

$$0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{\varphi} D^\bullet \xrightarrow{\psi} E^\bullet \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces decimos que es una sucesión exacta corta.

Definición D.5. *Un morfismo entre dos sucesiones exactas cortas de complejos de cocadenas*

$$0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{\varphi} D^\bullet \xrightarrow{\psi} E^\bullet \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \longrightarrow \overline{C}^\bullet \xrightarrow{\varphi} \overline{D}^\bullet \xrightarrow{\psi} \overline{E}^\bullet \longrightarrow 0$$

consiste de morfismos de complejos $\varphi : C^\bullet \to \overline{C}^\bullet$, $\psi : D^\bullet \to \overline{D}^\bullet$ *y* $\varsigma : E^\bullet \to \overline{E}^\bullet$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & D^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & E^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varsigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{C}^\bullet \arrow[r] & \overline{D}^\bullet \arrow[r] & \overline{E}^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es decir, cada cuadrante del siguiente diagrama conmuta para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^i"'] & D^i \arrow[r] \arrow[d, "\psi^i"'] & E^i \arrow[r] \arrow[d, "\varsigma^i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{C}^i \arrow[r] \arrow[d] & \overline{D}^i \arrow[r] \arrow[d] & \overline{E}^i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Definición D.6. *Dos morfismos de complejos*

$$\varphi, \psi : (C^\bullet, d) \to (D^\bullet, d')$$

se dicen homotópicos si existe una sucesión de morfismos de A-módulos $\{h_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *donde* $h_i : C^i \to D^{i-1}$ *tal que* $\varphi^i - \psi^i = d'_{i-1} \circ h_i + h_{i+1} \circ d_i$ *para todo índice* i.

En un diagrama, la situación se ilustra como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d_{i-2}"] & C^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi^{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi^{i-1}"] & C^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, "h_i"] \arrow[d, shift right, "\varphi^i"'] \arrow[d, shift left, "\psi^i"] & C^{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[dl, "h_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi^{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi^{i+1}"] & C^{i+2} \arrow[r, "d_{i+2}"] \arrow[dl, "h_{i+2}"] \arrow[d, shift right, "\varphi^{i+2}"'] \arrow[d, shift left, "\psi^{i+2}"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "d'_{i-2}"'] & D^{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"'] & D^i \arrow[r, "d'_i"'] & D^{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"'] & D^{i+2} \arrow[r, "d'_{i+2}"'] & \dots
\end{tikzcd}$$

Proposición D.7. *Sean $\varphi, \psi : (C^\bullet, d) \to (D^\bullet, d')$ dos morfismos de complejos de cocadenas homotópicos. Entonces,*

$$H^i(\varphi) = H^i(\psi) : H^i(C^\bullet) \to H^i(D^\bullet) \quad (\forall)\ i \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Dado que φ, ψ son homotópicos, entonces existe una colección de morfismos de A-módulos $\{h_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ donde $h_i : C^i \to D^{i-1}$ tal que para todo índice i y para todo $z \in ker(d_i)$,

$$\varphi^i(z) - \psi^i(z) = (d'_{i-1} \circ h_i)(z).$$

Por lo que $\overline{\varphi^i(z)} = \overline{\psi^i(z)}$. □

Proposición D.8. *Dada una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas de módulos sobre un anillo A*

$$0 \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow 0$$

Existen homomorfismos δ tal que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H^{p-1}(E^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^p(C^\bullet) \longrightarrow H^p(D^\bullet) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^p(E^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(C^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta, y tal que dado un homomorfismo de sucesiones exactas cortas de complejos de cocadenas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & D^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & E^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{C}^\bullet \arrow[r] & \overline{D}^\bullet \arrow[r] & \overline{E}^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^p(E^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & H^{p+1}(C^\bullet) \arrow[d] \\ H^p(\overline{E}^\bullet) \arrow[r] & H^{p+1}(\overline{C}^\bullet) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Ver [16] Cap. 5, Proposición 5.17, Pág. 174 . □

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X. Considere cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X. Para cada n entero no negativo y para todo $s = (i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$, definamos

$$\mathcal{B}_s := \{U_s \cap B | B \in \mathcal{B}\}$$

donde $U_s := U_{i_0} \cap U_{i_n}$.

Proposición D.9. *Supongamos que $\mathcal{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ y que*

$$\check{H}^q(\mathcal{B}_s, \mathcal{F}|_{U_s}) = 0$$

$(\forall)$ $s \in I^{n+1}$, $n \geq 0$ y $(\forall)$ $q > 0$. Entonces,

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{B}, \mathcal{F})$$

es biyectivo $(\forall)$ $q \geq 0$.

Demostración. [12], Proposición 5, pág. 222. □

Teorema D.10. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Con la notación anterior, supongamos que existe una familia*

$$\{\mathcal{B}^\alpha\}_{\alpha \in A}$$

de cubrimientos de X tal que

i) Para todo cubrimiento $\mathcal{B}$ de X, existe $\alpha \in A$ tal que $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}^\alpha$ (i.e.) $\mathcal{B}^\alpha$ es un refinamiento de $\mathcal{B}$.

ii) $\check{H}^q(\mathcal{B}^\alpha_s, \mathcal{F}|_{U_s}) = 0$ $(\forall)$ $s \in I^{n+1}$ para todo n entero no negativo y $(\forall)$ $q > 0$.

Entonces,

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^q(X, \mathcal{F})$$

es biyectivo $(\forall)$ $q \geq 0$.

Demostración. Las condiciones i) y ii) nos permiten utilizar la proposición [D.9], entonces tenemos las biyecciones

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{B}^\alpha, \mathcal{F})$$

$(\forall)\ q \geq 0$, $\alpha \in A$.

Ahora, de la condición i) deducimos que la familia

$$\{\mathcal{B}^\alpha\}_{\alpha \in A}$$

es un subconjunto cofinal de los cubrimientos abiertos de X. Entonces,

$$\begin{aligned} \check{H}^q(X, \mathcal{F}) &= \varinjlim_{\alpha \in A} \check{H}^q(\mathcal{B}^\alpha, \mathcal{F}) \\ &= \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

(ver proposición [A.16]). □

Proposición D.11. *Sea X un espacio topológico. Sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de haces sobre X. Entonces, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}''(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}')$$

es exacta.

Demostración. Ver [11], Cap. 5, proposición 2.15. □

Bibliografía

[1] Bombieri, Enrico; Gubler, Walter. Heights in Diophantine Geometry. *Cambridge University Press*(2006).

[2] Bredom, Glen E.. Sheaf Theory. *Springer-Verlag New York Inc.*(1997).

[3] Fulton, William. Algebraic Curves An Introduction to algebraic geometry. (2008).

[4] Hartshorne, Robin. Algebraic Geometry. *Springer-Verlag New York Inc.*(1977).

[5] Kempf, George R.. Algebraic Varieties. *Cambridge University Press*(1993).

[6] Lluis-Puebla, Emilio. Algebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría algebraica clásica. *Sociedad Matemática Mexicana*(2005).

[7] Matsumura, Hideyuki. Commutative Ring Theory. *Cambridge University Press*(1986).

[8] Mumford, David. The Red Book of Varieties and Schemes. *Springer, 2º edición*(1999).

[9] Oosten, Jaap Van. Basic Category Theory. *BRICS Lecture series*(1995).

[10] Perrin, Daniel. Algebraic Geometry An Introduction. *Springer-Verlag New York Inc.*(2008).

[11] Liu, Qing. Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. *Oxford Graduate Texts in Mathematics*(2002).

[12] SERRE, JEAN-PIERRE. Faisceaux Algebriques Coherents. *Annals of Mathematics*(1955) pp. 197-278.

[13] SHAFAREVICH, IGOR R.. Basic Algebraic Geometry 2. *Springer-Verlag New York Inc.*(1994).

[14] SILVERMAN, JOSEPH H. HINDRY, MARC. Diophantine Geometry. *Springer-Verlag New York Inc.*(2000).

[15] UENO, KENJI. Algebraic Geometry 2: Sheaves and Cohomology. *American Mathematical Society*(2001).

[16] WARNER, FRANK W.. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. *University of Pennsylvania*(1983).