UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Nombre de la tesis:

UN TEOREMA SOBRE CONJUNTOS SÍNDICOS.

Tesis realizada por *Víctor Hugo Martínez Espino* para obtener el Grado de Maestro en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas,

Zacatecas, Junio 2019.

Asesor de la tesis:

Dr. Alexander P. Pyshchev

Índice general

Introducción

Sea S un semigrupo y $A \subseteq S$. Para cada $x \in S$ se define el conjunto

$$x^{-1}A := \{y \in S : xy \in A\}.$$

Decimos que A es **síndico** si existe $F \subseteq S$ finito tal que,

$$S = \bigcup_{t \in F} t^{-1}A.$$

Se dice que A es **síndico a trozos** si existe $F \subseteq S$ finito tal que, la familia

$$\{a^{-1}(\bigcup_{t \in F} t^{-1}A) : a \in S\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita.

Es claro de la definición que cualquier subconjuto síndico es síndico a trozos. Aunque el recíproco en general no se cumple, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 0.1 (Veáse ejercicio 4.4.5 en [1])**.** *Sea G un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo de G. Entonces H es síndico si y solo si H es síndico a trozos.*

Una parte de el trabajo de esta tesis consiste en encontrar un resultado similar en el ambiente más general de los semigrupos. Para esto, primero necesitamos introducir la siguiente definición. Sea S un semigrupo, para cada $A \subseteq S$ se define el conjunto

$$\phi(A) := \{y \in S : \exists x \in A \ yx \in A\}.$$

Notemos que cuando H es un subgrupo de un grupo G, tenemos que $\phi(H) = H$. Nosotros logramos encontrar el siguiente resultado:

Teorema 0.2. *Sea S un semigrupo y $A \subseteq S$, entonces si A es síndico a trozos, $\phi(A)$ es síndico. Más aún, si F es un subconjunto finito de S tal que, la familia*

$$\{a^{-1}(\bigcup_{t\in F} t^{-1}A) : a \in S\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita, entonces

$$S = \bigcup_{t\in F} t^{-1}\phi(A).$$

La única demostración que tenemos para este teorema requiere algunos resultados básicos de la teoría algebraica de la compactificación de Stone-Čech de un semigrupo discreto, esta teoría tiene importantes aplicaciones en teoría combinatoria de números, dinámica topológica y teoría de Ramsey. Un estudio más detallado de esta teoría se puede encontrar en [1]. Uno de los resultados más famosos acerca de conjuntos síndicos a trozos es el siguiente:

Teorema 0.3 (Véase 2.5 en [2])**.** *Sea S un semigrupo y $A_1, ..., A_n$ subconjuntos de S tales que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es síndico a trozos. Entonces para algún i, A_i es síndico a trozos.*

Es común referirse a este resultado diciendo que la colección de subconjuntos síndicos a trozos en un semigrupo dado es regular por particiones.

En el ejemplo 1.4 se muestra que el análogo de este teorema para conjuntos síndicos no se cumple. De 0.2 y 1.7 se sigue inmediatamente que si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es síndico, entonces al menos para algún i, $\phi(A_i)$ es síndico. La otra parte de este trabajo consiste en mostrar que se puede obtener un resultado un poco más fuerte:

Teorema 0.4. *Sea S un semigrupo y $A_0, A_1, \cdots, A_n$ subconjuntos de S. Si $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ es síndico, entonces al menos uno de los conjuntos*

$$A_0, \phi(A_1), \cdots, \phi(A_n)$$

es síndico.

Este teorema nos ofrece como corolario el siguiente resultado bastante conocido en álgebra; que se debe a B. H. Neumann [3]:

Teorema 0.5 (B. H. Neumann [3]). *Sea G un grupo y $H_1, \cdots, H_n$ subgrupos de G. Supongamos que existen $g_1, \cdots, g_n$ elementos de G tal que*

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i H_i.$$

Entonces al menos uno de los subgrupos H_i tiene índice finito.

Capítulo 1

Conjuntos síndicos y síndicos a trozos

1.1. Subconjuntos síndicos

En este capítulo presentamos algunos resultados básicos sobre conjuntos síndicos y síndicos a trozos.

Definición 1.1. Sea S un semigrupo. Dados $A \subseteq S$ y $x \in S$, se define

$$x^{-1}A := \{y \in S : xy \in A\}.$$

Definición 1.2. Sea S un semigrupo. Decimos que $A \subseteq S$ es **síndico** si existe F un subconjunto finito de S tal que

$$S = \bigcup_{t \in F} t^{-1}A.$$

Algunos subconjuntos síndicos del semigrupo $(\mathbb{N}.+)$; donde $0 \in \mathbb{N}$, son el conjunto $\mathbb{N}$, el conjunto $a\mathbb{N} + b$; donde a y b son números naturales, entre otros. Un ejemplo importante de un subconjunto que no es síndico en este semigrupo son los números primos.

Ejemplo 1.3. Vamos a mostrar que el conjunto de los números primos no es síndico en $(\mathbb{N}, +)$. Denotemos como $\mathbb{P}$ al conjunto de números primos. Supongamos que existe F un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{t \in F} (-t) + \mathbb{P}.$$

Definimos $m := \text{máx}\, F + 1$. Notemos que

$$\{m! + 2, m! + 3, \cdots, m! + m\} \cap \mathbb{P} = \emptyset.$$

Se deduce que $m! + 1 \notin \bigcup_{t \in F} (-t) + \mathbb{P}$, que es la contradicción deseada.

Si $A_1, \cdots, A_n$ son subconjuntos de un semigrupo S tales que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es síndico, no necesariamente alguno de los conjuntos $A_1, \cdots, A_n$ debe ser síndico, es decir, la colección de subconjuntos síndicos no es regular por particiones.

Ejemplo 1.4. Pensemos en el semigrupo $(\mathbb{N}, +)$ y definimos los subconjuntos

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^{2n-1}, 2^{2n-1} + 1, ..., 2^{2n} - 1\},$$

$$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} \{2^{2n}, 2^{2n} + 1, ..., 2^{2n+1} - 1\}.$$

Supongamos que A es síndico y sea $F \subseteq S$ finito tal que,

$$\mathbb{N} = \bigcup_{t \in F} (-t) + A.$$

Sea $m := \max F + 1$, como $m < 2^{2m}$ se sigue que

$$\{2^{2m} + t : t \in F\} \subseteq \{2^{2m} + 1, 2^{2m} + 1, \cdots, 2^{2m} + m\} \cap A = \emptyset.$$

Se deduce que $2^{2m} \notin \bigcup_{t\in F}(-t) + A$, que es la contradicción deseada. La demostración de que B no es síndico es similar. Sin embargo, $A \cup B = \mathbb{N}$.

1.2. Conjuntos síndicos a trozos

Definición 1.5. Sea S un semigrupo y $A \subseteq S$. Decimos que A es **síndico a trozos** si existe $H \subseteq S$ finito tal que, la colección

$$\{a^{-1}(\bigcup_{t\in H} t^{-1}A) : a \in S\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita.

Es claro de las definiciones que hemos dado que cualquier subconjunto síndico es síndico a trozos. La siguiente caracterización sera útil.

Proposición 1.6. *Sea S un semigrupo y $A \subseteq S$. A es síndico a trozos si y solo si existe $H \subseteq S$ finito tal que, para cada F subconjunto finito de S, existe $x \in S$ tal que,*

$$Fx \subseteq \bigcup_{t\in H} t^{-1}A.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $F \subseteq S$ finito y no vacío. Como

$$\{a^{-1}(\bigcup_{t\in H} t^{-1}A) : a \in S\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita, podemos elegir

$$x \in \bigcap_{a\in F} a^{-1}(\bigcup_{t\in H} t^{-1}A).$$

Se deduce que $Fx \subseteq \bigcup_{t\in H} t^{-1}A$.

($\Leftarrow$) Sean $a_1, \cdots, a_n \in S$ y consideremos $F := \{a_1, \cdots, a_n\}$. Como F es finito, existe $x \in S$ tal que $Fx \subseteq \bigcup_{t\in H} t^{-1}A$. Se deduce que

$$x \in \bigcap_{a\in F} a^{-1}(\bigcup_{t\in H} t^{-1}A),$$

es decir, A es síndico a trozos. □

En el ejemplo 1.4 mostramos que la familia de subconjuntos síndicos no es regular por particiones. Sin embargo, para los subconjuntos síndicos a trozos la situación es distinta.

Proposición 1.7. *(Véase 2.5 en [2]) . Sea S un semigrupo y $A_1, ..., A_n$ subconjuntos de S tales que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es síndico a trozos. Entonces para algún i, A_i es síndico a trozos*

Demostración. Es suficiente mostrarlo en el caso que $n = 2$. Supongamos que $A \cup B$ es síndico a trozos y escogemos H un subconjunto finito de S tal que, para cada $F \subseteq S$ finito existe $x \in S$ tal que,

$$Fx \subseteq \bigcup_{t\in H} t^{-1}(A \cup B).$$

Supongamos que ninguno de los conjuntos A y B son síndicos a trozos, entonces podemos escoger F un subconjunto finito de S tal que, para todo $x \in S$, existe $y \in F$ tal que, $yx \notin \bigcup_{t\in H} t^{-1}A$, es decir,

$$\forall x \in S \exists y \in F \quad Lyx \cap A = \emptyset.$$

Además, como B no es síndico a trozos, podemos escoger L subconjunto finito de S tal que, para cada $x \in S$ existe $y \in L$ tal que $y \notin \bigcup_{t\in HF} t^{-1}B$, es decir,

$$\forall x \in S \exists y \in F \quad HFyx \cap B = \emptyset.$$

Tomemos $x \in S$ tal que, $FLx \subseteq \bigcup_{t \in H} t^{-1}(A \cup B)$ y $y \in L$ tal que, $HFyx \cap B = \emptyset$. Ahora tomamos $z \in F$ tal que, $Hzyx \cap A = \emptyset$. Entonces $zxy \notin \bigcup_{t \in H} t^{-1}(A \cup B)$, que es la contradicción deseada. $\square$

Capítulo 2

Ultrafiltros

En este capítulo vamos a introducir algunos resultados básicos sobre ultrafiltros que seran necesarios para demostrar que si A es síndico a trozos entonces $\phi(A)$ es síndico.

Definición 2.1. Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una colección no vacia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un **filtro** en X si

(a) Para cada $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(b) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

(c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Algunos ejemplos de filtros incluyen: la familia de vecindades de un punto en un espacio topológico, dado un punto $x \in X$ la colección de todos los subconjuntos de X que contienen a x, entre otros.

Definición 2.2. Un **ultrafiltro** sobre un conjunto X es un filtro sobre X que no esta contenido propiamente en ningún otro filtro sobre X.

Usando el lema de Zorn se puede mostrar que cada familia con la propiedad de la intersección finita se puede extender a un ultrafiltro.

Teorema 2.3. *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita. Entonces existe un ultrafiltro p tal que $\mathcal{A} \subseteq p$.*

Demostración. Sea $\Gamma := \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de la intersección finita$\}$. Tenemos que $\mathcal{A} \in \Gamma \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en Γ. Claro que $\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Si $B_1, \cdots, B_n \in \bigcup \mathcal{C}$, como $\mathcal{C}$ es una cadena podemos encontrar $\mathcal{B}$ tal que $B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}$, por eso $\bigcap_{i=1}^n B_i \neq \emptyset$. Usando el lema de Zorn podemos encontrar p un elemento máximal en Γ. Se muestra fácilmente que p es en verdad un ultrafiltro. $\square$

Proposición 2.4. *Sea X un conjunto y p un ultrafiltro en X. Entonces se cumple lo siguiente*

(a) *Para cada $A \subseteq X$, $A \in p$ ó $X \setminus A \in p$.*

(b) *Si $A_1, \cdots, A_n$ son subconjuntos de X tales que $\bigcup_{i=1}^n A_i \in p$, entonces para algún i, $A_i \in p$.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$. Si $A \notin p$, se deduce que existe $B \in p$ tal que $A \cap B = \emptyset$; de lo contrario, la familia $\mathcal{F} := p \cup \{A\}$ tendra la propiedad de la intersección finita y se puede extender a un ultrafiltro q que contiene propiamente a p lo cual contradice que p es un ultrafiltro. Como $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $B \subseteq X \setminus A$ y dado que $B \in p$, obtenemos que $X \setminus A \in p$. Sean $A_1, \cdots, A_n$ subconjuntos de X tales que $\bigcup_{i=1}^n A_i \in p$. Si para cada i,

$A_i \notin p$, por lo anterior tenemos que $X \setminus A_i \in p$. Como p esta cerrado bajo intersecciones finitas se deduce que $\bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus A_i) \in p$, y de aquí que

$$\emptyset = (\bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus A_i)) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in p,$$

que es la contradicción deseada. □

Definición 2.5. Sea S un semigrupo y $p, q \in \beta S$, se define

$$p \star q := \{A \subseteq X : \{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in p\}.$$

Proposición 2.6. *Si* $(S, \cdot)$ *es un semigrupo, entonces* $(\beta S, \star)$ *es un semigrupo.*

Demostración. Sean $p, q \in \beta S$ arbitrarios. Vamos a mostrar que $p \star q \in \beta S$. Si $A, B \in p \star q$ entonces

$$\{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in p,$$

$$\{x \in S : x^{-1}B \in q\} \in p.$$

Notemos que

$$\{x \in S : x^{-1}A \in q\} \cap \{x \in S : x^{-1}B \in q\} = \{x \in S : x^{-1}(A \cap B) \in q\}.$$

Como p es un ultrafiltro se sigue que

$$\{x \in S : x^{-1}(A \cap B) \in q\} \in p,$$

es decir, $A \cap B \in p \star q$. Si $A \in p \star q$, es claro que $A \neq \emptyset$, además, si $A \subseteq B$ tenemos que

$$\{x \in S : x^{-1}B \in q\} \supseteq \{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in p.$$

Se deduce que $B \in p \star q$. Sea $A \subseteq S$, supongamos que $A \notin p \star q$, entonces

$$\{x \in S : x^{-1}A \in p\} \notin q.$$

Notemos que para cada $x \in S$ se cumple que $x^{-1}A \notin p$ si y solo si $x^{-1}(S \setminus A) \in p$, es decir,

$$S \setminus \{x \in S : x^{-1}A \in p\} = \{x \in S : x^{-1}(S \setminus A) \in p\}.$$

Como q es un ultrafiltro se deduce que

$$S \setminus \{x \in S : x^{-1}(S \setminus A) \in p\} \in q,$$

es decir, $S \setminus A \in p \star q$. De lo anterior se deduce que $p \star q$ es un ultrafiltro en S.

Ahora vamos a mostrar que la operación es asociativa. Sean $p, q, r \in \beta S$ y $A \subseteq S$ tal que $A \in (p \star q) \star r$, tenemos que

$$B := \{x \in S : x^{-1}A \in r\} \in p \star q.$$

Se sigue que

$$\{y \in S : y^{-1}B \in q\} \in p.$$

Notemos que

$$y^{-1}(\{x \in S : x^{-1}A \in r\} \subseteq \{x \in S : x^{-1}(y^{-1}A) \in r\}.$$

Se deduce que

$$\{z \in S : z^{-1}A \in q \star r\} \supseteq \{y \in S : y^{-1}(\{x \in S : x^{-1}A \in r\} \in q\} \in p.$$

Tenemos

$$\{z \in S : z^{-1}A \in q \star r\} \in p,$$

es decir, $A \in p \star (q \star r)$. Como $(p \star q) \star r \subseteq p \star (q \star r)$ y ambos son ultrafiltros, obtenemos que $(p \star q) \star r = p \star (q \star r)$. □

A partir de este momento vamos a denotar como pq al producto $p \star q$. La siguiente proposición nos dice que podemos identificar S con un subconjunto de βS

Proposición 2.7. *Sea S un semigrupo. Entonces la función $e : S \to \beta S$ dada por*

$$e(a) := \{A \subseteq S : a \in A\}$$

es un monomorfismo de semigrupos.

Demostración. Es claro de la definición que para cada $a \in S$, $e(a) \in \beta S$. Sean $a, b \in S$ y $A \subseteq S$ tal que $A \in e(a)e(b)$, tenemos

$$\{x \in S : x^{-1}A \in e(b)\} \in e(a).$$

Se deduce que $a^{-1}A \in e(b)$, es decir, $b \in a^{-1}A$. Por lo anterior tenemos que $ab \in A$ y por eso $A \in e(ab)$. Obtenemos que $e(a)e(b) \subseteq e(ab)$, pero como ambos son ultrafiltros se cumple la igualdad. Si $a, b \in S$ son tales que $e(a) = e(b)$, tenemos que $\{a\} \in e(b)$, es decir, $b \in \{a\}$ y por eso $b = a$. □

Apelando a la proposición anterior vamos a identificar a cada $a \in S$ con $e(a) \in \beta S$, de manera que $S \subseteq \beta S$. Con esta identificación en mente, notemos que para cada $A \subseteq S$, $p \in \beta S$ y $a \in S$ tenemos que $A \in ap$ si y solo si $a^{-1}A \in p$.

Capítulo 3

Teorema principal

Definición 3.1. Sea S un semigrupo y $A \subseteq S$, se define

$$\phi(A) := \{x \in S : \exists y \in A \ \ xy \in A\}.$$

La siguiente proposición y ejemplo nos dicen que relación existe entre que A sea síndico a trozos y $\phi(A)$ sea síndico.

Proposición 3.2. *Sea S un semigrupo y $A \subseteq S$, entonces si A es síndico a trozos, $\phi(A)$ es síndico. Más aún, si F es un subconjunto finito de S tal que,*

$$\{a^{-1}(\bigcup_{t \in F} t^{-1}A) : a \in S\}$$

tiene la propiedad de intersección finita, entonces

$$S = \bigcup_{t \in F} t^{-1}\phi(A).$$

Demostración. Supongamos que A es síndico a trozos y tomemos $F \subseteq S$ finito tal que, el conjunto

$$B := \{a^{-1}(\bigcup_{t \in F} t^{-1}A) : a \in S\}$$

tiene la propiedad de intersección finita. Escogemos $p \in \beta S$ tal que $B \subseteq p$. Fijamos $a \in S$, y tenemos que

$$a^{-1}(\bigcup_{t\in F} t^{-1}A) \in p,$$

esto es equivalente a decir que

$$\bigcup_{t\in F} t^{-1}A \in ap,$$

por lo que podemos escoger $f \in F$ tal que, $f^{-1}A \in ap$, es decir,

$$(fa)^{-1}A = a^{-1}f^{-1}A \in p.$$

Sea $s \in S$ arbitrario, tenemos que

$$(sfa)^{-1}(\bigcup_{t\in F} t^{-1}A) \in p,$$

esto implica que existe $t \in F$ tal que, $t^{-1}A \in (sfa)p$ y por eso

$$(sfa)^{-1}t^{-1}A \cap (fa)^{-1}A \neq \emptyset.$$

Escogemos

$$x \in (sfa)^{-1}t^{-1}A \cap (fa)^{-1}H.$$

Tenemos que

$$fax \in A,$$

$$tsfax \in A.$$

De la definición de $\phi(A)$ se deduce que $ts \in \phi(A)$, es decir, $s \in t^{-1}\phi(A)$. Como s es arbitrario, obtenemos que

$$S = \bigcup_{t\in F} t^{-1}\phi(A).$$

$\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que si $\phi(A)$ es síndico, esto no implica que A sea síndico a trozos, ni siquiera cuando el semigrupo es un grupo abeliano.

Ejemplo 3.3. Consideremos el grupo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$. Definamos la sucesión $a_n := 1 + 2 + \cdots + n$ y sea $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que $\phi(A) = \mathbb{Z}$; pues para cada $n \geq 1$ tenemos que $n + a_{n-1} = a_n \in A$ y $-n + a_n = a_{n-1}$. Vamos a mostrar que A no es síndico a trozos por contradicción. Supongamos que A es síndico a trozos y sea $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito tal que, para cada $G \subseteq \mathbb{Z}$ finito existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que

$$G + y \subseteq \bigcup_{t \in F} (-t) + A.$$

Sea $n := \text{máx}\{|t| : t \in F\} + 1$ y escogemos $m \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq m$ tenemos $a_{k+1} - a_k > 3n$. Definimos $G := [1, a_{m+1}]$, y sea $y \in \mathbb{Z}$ tal que

$$[1, a_{m+1}] + y \subseteq \bigcup_{t \in F} (-t) + A.$$

Tenemos que existen $i, j \in F$ y $l, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$a_m + y + i = a_l,$$

$$a_m + 1 + y + j = a_s.$$

Si $l < s$, tenemos

$$3n < a_l - a_s = i - (j + 1) < 2n.$$

Si $s < l$, tenemos que

$$3n < a_s - a_l = (j + 1) - i < 2n.$$

En cualquier caso tenemos una contradicción, se deduce que A no es síndico a trozos.

Antes de presentar la prueba del teorema principal, cabe recalcar que aunque las ideas de la demostración son bastante parecidas a la usadas en la demostración de 1.7; que se deben a Hindman y Bergelson, la formulación precisa del teorema y una demostración se encontraron estudiando las nociones de síndico y síndico a trozos usando los métodos del análisis no-estándar.

Teorema 3.4. *Sea S un semigrupo y $A_0, A_1, \cdots, A_n$ subconjuntos de S. Si $\bigcup_{i=0}^n A_i$ es síndico, entonces al menos uno de los conjuntos*

$$A_0, \phi(A_1), \cdots, \phi(A_n)$$

es síndico.

Demostración. Vamos a mostrarlo por inducción, primero supongamos que $n = 1$. Como $A_0 \cup A_1$ es síndico, podemos tomar H un subconjunto finito de S tal que,

$$S = \bigcup_{t \in H} t^{-1}(A_0 \cup A_1).$$

Supongamos que A_0 y $\phi(A_1)$ no son síndicos por lo que podemos tomar

$$y \in S \setminus \bigcup_{t \in H} t^{-1}\phi(A_1).$$

Ahora elegimos

$$x \in S \setminus \bigcup_{t \in (H \cup HyH)} t^{-1}A_0.$$

Como $S = \bigcup_{t \in H} t^{-1}(A_0 \cup A_1)$, existe $z \in H$ tal que, $zx \in A_0 \cup A_1$. Por nuestra elección de x, obtenemos que $zx \in A_1$. Además, existe $w \in H$ tal que,

$$wyzx \in A_0 \cup A_1.$$

Como $wyz \in HyH$, entonces $wyzx \in A_1$ y se deduce que $wy \in \phi(A_1)$, que es la contradicción deseada.

Ahora supongamos que se cumple el resultado para $k \leq n$ y tenemos que $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i$ es síndico. Definimos $A' := A_0 \cup A_1$. Por hipótesis de inducción, al menos uno de los conjuntos $A', \phi(A_2), \cdots, \phi(A_{n+1})$ es síndico. Si A' es síndico, aplicamos la base de la inducción y obtenemos el resultado deseado. □

A continuación presentamos algunos resultados conocidos que son corolario inmediato de nuestro resultado.

Teorema 3.5 (I. Protasov [4])**.** *Sea G un grupo y $A_1, \cdots, A_n$ subconjuntos de G tales que $G = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Entonces para algún i existe F subconjunto finito de G tal que*

$$G = FA_i^{-1}A_i.$$

Teorema 3.6 (B. H. Neumann [3])**.** *Sean $H_1, \cdots, H_n$ subgrupos de un grupo G. Supongamos que existen $g_1, \cdots, g_n$ elementos de G tal que*

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i H_i.$$

Entonces al menos uno de los subgrupos H_i tiene índice finito.

Corolario 3.7. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo infinito k y $W_1, \cdots, W_n$ subespacios de V. Si existen $w_1, \cdots, w_n$ elementos de V tales que*

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} (w_i + W_i),$$

entonces para algún i, $W_i = V$.

Demostración. Supongamos que $V = \bigcup_{i=1}^{n}(w_i + W_i)$. Por el teorema de B. H. Neumann, algún W_i tiene índice finito, y por eso el espacio vectorial cociente V/W_i es finito. Como k es infinito, se deduce que $V/W_i = 0$, es decir, $V = W_i$. $\square$

Bibliografía

[1] Hindman N., Strauss D., *Algebra in the Stone-Čech compactification: theory and applications*, 2nd ed., De Gruyter, Berlin, 2012.

[2] Hindman N., Bergelson V., McCutcheon R., *Notions of Size and Combinatorial Properties of Quotient Sets in Semigroups*, Topology Proc., 23 (1998), 23-60.

[3] B. Neumann, *Groups covered by permutable subsets*, J. London Math. Soc., 29, 236-248 (1954).

[4] I. Protasov, *Combinatorics of numbers*, Mathematical Studies Monograph Series Volume 2, VNTL Publishers, 1997.