UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

CREACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS: UN ANÁLISIS MEDIANTE MAPAS HÍBRIDOS

Tesis para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

Esmeralda Jasso Vázquez

Directores de tesis:

Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís

Dr. Nehemías Moreno Martínez

Zacatecas, Zac. Octubre 2021

DEDICATORIA

A mi hermano Valentín, por ser el motor en mi vida y quien me impulsa a conquistar mis sueños. Por infundirme fortaleza, perseverancia y disciplina, y sobre todo, por el inmenso cariño y apoyo que me ha brindado para poder alcanzar mis metas.

AGRADECIMIENTO

Se agradece al Centro Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo otorgado a través de la beca de maestría a la becaria No. 1000497.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis más sinceros agradecimientos a cada una de las personas que estuvieron apoyándome en este proceso.

En primer lugar, expreso mi especial reconocimiento, gratitud y admiración a mis directores de tesis, al Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís y al Dr. Nehemías Moreno Martínez, por haberme guiado en el proceso de elaboración de este trabajo de investigación, por sus consejos, motivación en cada momento, y por compartir conmigo de su experiencia y conocimiento.

Al Dr. Luis Roberto Pino Fan, Dr. Luis Manuel Cabrera Chim y Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez, por sus valiosas aportaciones para la mejora de este trabajo.

A mis padres, quienes son los pilares de mi vida. Gracias por educarme y convertirme en una persona de bien, por brindarme su apoyo incondicional y amor sincero.

A mis hermanos, por estar siempre a mi lado apoyándome en este trayecto de mi vida y de quienes he aprendido demasiado.

A mis amigos Rubí y Alex, por permitirme aprender a su lado compartiendo experiencias y conocimientos que nos han llevado mano a mano a cumplir nuestras metas, por apoyarme y motivarme en todo momento.

A todos ellos, muchas gracias.

Resumen

¿Qué significa enseñar matemáticas? ¿Qué significa resolver problemas en matemáticas? ambas preguntas responden a cierta actividad matemática, a un lenguaje y procedimientos matemáticos que de preferencia, sea adecuado. Desde la investigación en Matemática Educativa, la actividad de resolver problemas no es trivial en los estudiantes, son distintas las posturas teóricas y metodológicas que atienden el cómo mejorar esta actividad para el aprendizaje. La presente tesis comparte dicha problemática pero con un enfoque distinto, que considera que el crear problemas permite al estudiante ser creativo, crítico, donde expresan mejor sus ideas, su lenguaje y argumentos. Al respecto, en las clases de matemáticas se estimulan las respuestas de los alumnos a preguntas que realiza el profesor, pero se presta poca atención a que los estudiantes formulen preguntas o bien se deja de lado la creatividad de crear sus propios problemas de matemáticas para su aprendizaje. Por tanto, nos cuestionamos cómo se dan estos procesos de desarrollo del pensamiento matemático al crear problemas y cuáles son las prácticas involucradas. Por lo tanto, en esta tesis se propone analizar la construcción de conocimiento matemático mediante la creación de problemas a través de la técnica del Mapa Híbrido desde algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico, a partir de una perspectiva gráfica de los Objetos Matemáticos Primarios, sus conexiones, y los procesos cognitivos que se ponen en juego al abordar la Creación de Problemas a partir de uno dado, también llamado variación del problema. De manera concreta, se pretende abordar la Creación de Problemas de optimización. Mediante un estudio cualitativo, de caso, se pretende analizar la producción oral y escrita generada por algunos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de crear problemas matemáticos por el método de variación que involucran a la optimización. La interpretación ontosemiótica de la técnica del Mapa Híbrido permite describir el sistema de prácticas presentes en la resolución de situaciones problematizadas de la matemática que se estudian en el aula, asimismo permite visualizar los distintos Objetos Matemáticos, las relaciones entre dichos objetos, la organización de las prácticas y permite advertir la realización de algunos procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas. Se plantea entonces que la interpretación ontosemiótica de la técnica del Mapa Híbrido podría mostrar las prácticas implicadas, los Objetos Matemáticos que intervienen en dichas prácticas, las conexiones que se establecen entre los objetos de una misma práctica y entre objetos pertenecientes a distintas prácticas, y también poder advertir la realización de los procesos cognitivos implicados en la construcción del conocimiento matemático relacionado con la actividad de Creación de Problemas por variación.

Palabras clave: Enfoque Ontosemiótico, Mapas Híbridos, Cálculo Diferencial, técnicas de representación, procesos cognitivos, aprendizaje, Creación de Problemas.

Abstract

What does it mean to teach mathematics? What does it mean to solve problems in mathematics? Both questions answer a certain mathematical activity, to a language and mathematical procedures that preferably, is suitable. From research in educational mathematics, the activity of solving problems is not trivial in students and the theoretical and methodological positions that address how to improve this activity are different. For example, through methods of solution or promoting different representations of certain content in order to favor the student, meaning of it. However, there are still difficulties in students when constructing these meanings, to improve arguments through the proper use of mathematical language and procedures that broaden a vision of mathematics through its teaching and learning. Therefore, this project shares this problem and considers that creating problems allows the development of these elements by creating a profile in the student as creative, critical, where they better express their ideas, their language and arguments. In this regard, in mathematics classes the student's answers to questions asked by the teacher are stimulated, but little attention is paid to students asking questions or else the creativity of creating their own math problems for their learning. Therefore, we question how these processes of development of mathematical thinking occur when creating problems in a classroom and what are the practices involved. Therefore, in this project we proposed to analyze the construction of mathematical knowledge by creating problems through of the technique of the Hybrid Conceptual Map from some elements of the Onto-semiotic Approach, from the graphic description of the Primary Mathematical Objects, their connections, and the cognitive processes that are put into play when approaching the problem posing from a given one, also called problem variation. Specifically, it is intended to address the creation of optimization problems. By means of a qualitative case study, the aim is to analyze the oral and written productions generated by some students, when they face the task of creating mathematical problems by the variation method involving optimization. The ontosemiotic interpretation of the Hybrid Map technique makes it possible to describe the system of practices present in the resolution of mathematical problem situations studied in the classroom, as well as to visualize the different Mathematical Objects, the relationships between these objects, the organization of the practices and the realization of some cognitive processes involved in problem solving. It is then proposed that the ontosemiotic interpretation of the Hybrid Map technique could show the practices involved, the Mathematical Objects involved in these practices, the connections established between objects of the same practice and between objects belonging to different practices, and also be able to notice the realization of the cognitive processes involved in the construction of mathematical knowledge related to the activity of Problems Posing by Variation.

Key words: Onto-Semiotic Approach, Hybrid Maps, differential calculus, representational techniques, cognitive processes, learning, problem posing.

Índice

Resumen **6**

Abstract **7**

Introducción **12**

Motivación **15**

CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES **16**

1.1 Introducción 17

1.2 Estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial 17

1.3 La optimización en las matemáticas como contenido científico 19

1.4 Tratamiento matemático de la optimización en libros de texto 21

1.4.1 Algunas reflexiones acerca del tratamiento que realizan los libros de texto sobre la optimización 31

1.5 La Creación de Problemas y la forma de aprender matemáticas 32

1.6 Problema de investigación 35

1.7 Justificación 36

CAPÍTULO 2 HIPOTESIS, PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN, OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS **38**

2.1 Introducción **39**

2.2 Descripción de la hipótesis y las preguntas de investigación 39

2.3 Objetivo General y objetivos específicos 40

CAPÍTULO 3 MARCO TEÓRICO **43**

3.1 Introducción 44

3.2 Algunos elementos teóricos del EOS 44

3.2.1 Prácticas y Sistema de prácticas 44

3.2.2 Objetos Primarios Matemáticos 45

3.2.3 Perspectivas duales 46

3.2.4 Procesos cognitivos 47

3.2.5 Funciones Semióticas 48

3.3 La técnica del Mapa Híbrido 49

3.3.1 El Mapa Conceptual 49

3.3.2 El Diagrama de Flujo 50

3.3.3 La técnica del Mapa Híbrido 50

3.4 La Creación de Problemas desde la interpretación ontosemiótico del Mapa Híbrido 53

CAPÍTULO 4 METODOLOGÍA **55**
4.2 Estudio de casos 57
4.3 Estudio de tipo transversal 57
4.4 Metodología de Malaspina en el contexto virtual 58
4.5 Diseño de la investigación 59
4.6 Población y rol del investigador 65
4.7 Herramientas de investigación 65
4.8 Construcción del Mapa Híbrido 66
4.9 Descripción del diseño de instrumento de investigación 67
4.10 Implementación en el aula 69
CAPÍTULO 5 RESULTADOS **74**
5.1 Introducción 75
5.2 Resultados del problema de la radio 75
CAPÍTULO 6 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN **96**
6.1 Introducción 97
6.2 Análisis de los resultados del problema diagnóstico de la radio 97
6.3 Análisis de la resolución y variación del problema individual 98
6.4 Mapa Híbrido de la Creación de Problemas grupal 103
6.5 Mapa Híbrido de la resolución del problema creado por otro equipo 112
CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES **119**
7.1 Introducción 120
7.2 Concepción de la optimización mediante la Creación de Problemas 120
7.3 Cómo se construye el conocimiento de optimización mediante la Creación de Problemas y aspectos a considerar sobre la Creación de Problemas 121
7.4 Análisis de la construcción de conocimiento mediante Mapas Híbridos 122
7.5 Aportes y perspectivas futuras de investigación 122
REFERENCIAS **124**
APÉNDICE I **130**
APÉNDICE II **135**

Índice de figuras

Figura 1. Pasos para resolver un problema de optimización (Stewart, 2012, pág.325) 22
Figura 2. Solución de un problema de optimización (Stewart, 2012, pág. 326) 23
Figura 3. Prueba del máximo y mínimo absoluto (Stewart, 2012, pág. 328)................................ 24
Figura 4. Ejercicios propuestos (Stewart, 2012, pág. 331)... 25
Figura 5. Ejercicios resueltos (Thomas, 2006, pág. 278)... 26
Figura 6. Pasos para resolver un problema de optimización (Thomas, 2006, pág. 280)................. 26
Figura 7. Ejemplos de optimización matemática (Thomas, 2006, pág. 280) 27
Figura 8. Ejercicios propuestos (Thomas, 2006, pág. 285).. 28
Figura 9. Pasos a seguir para resolver un problema de optimización (Purcell, 2007, pág. 167)...... 28
Figura 10. Ejercicios de optimización resueltos (Purcell, 2007, pág. 167)................................... 29
Figura 11. Ejercicios de optimización propuestos (Purcell, 2007, pág. 176)................................. 30
Figura 12. Diseño de la implementación de la metodología de la Creación de Problemas por variación en el contexto virtual 59
Figura 13. Diseño de investigación. Elaboración propia 64
Figura 14. Diseño de implementación. Elaboración propia 70
Figura 15. Sesión 1. Elaboración propia 71
Figura 16. Sesión 2. Elaboración propia 71
Figura 17. Sesión 3. Elaboración propia 72
Figura 18. Sesión 4. Elaboración propia 72
Figura 19. Diseño de implementación de la metodología de Creación de Problemas. Elaboración propia... 73
Figura 20. Producción escrita a la resolución al problema de la radio por parte de la Alumna A. .. 77
Figura 21. Problema creado a partir de la primera variación del problema del cono por parte de la Alumna A 80
Figura 22. Problema creado a partir de la segunda variación del problema del cono por parte de la Alumna A 81
Figura 23. Problema creado a partir de la variación del problema del cono por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A. 87
Figura 24. Solución al problema creado a partir de la variación del problema del cono por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.. 88
Figura 25. Producción escrita a la resolución al problema de la radio por parte de la Alumna A ... 95
Figura 26. Mapa Híbrido de la variación individual de la Alumna A... 101
Figura 27. Esquema del sistema de prácticas perteneciente al Mapa Híbrido de la variación del problema por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A. 103
Figura 28. Mapa Híbrido de la práctica I. Discusión e interpretación de la variación del problema de manera grupal por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A. 105
Figura 29. Mapa Híbrido de la práctica II. Variación del problema de manera grupal por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.. 108
Figura 30. Mapa Híbrido de la práctica III. Resolución del problema variado de manera grupal por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A. 110
Figura 31. Mapa Híbrido de la práctica IV. Resolución para el requerimiento 2 del problema variado de manera grupal por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A. 111

Figura 32. Mapa Híbrido de la práctica I. interpretación y discusión del problema resuelto por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A. 113
Figura 33. Mapa Híbrido de la práctica II. Modificación de problema resuelto por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A. 115
Figura 34. Mapa Híbrido de la práctica III. Resolución del problema creado por el equipo 2 y resuelto por parte del equipo 1 donde colaboró Alumna A. 117

Introducción

En las aulas de matemáticas, es común ver que algunos profesores enseñan de una manera tradicional, es decir, se propicia en los estudiantes la memorización de conceptos y aplicación de fórmulas para resolver problemas evitando que reflexionen sobre el mismo. Asimismo, algunos profesores que enseñan de manera tradicional, evalúan las competencias que adquieren los estudiantes a partir de métodos algorítmicos y mediante ejercicios similares o iguales al abordar algún tema (Moreno, 2010). Además, solamente se les plantean problemas tomando ejercicios de los libros de texto en el cual memorizan procedimientos donde los Objetos Matemáticos no tienen el sentido conceptual en la tarea Moreno y Azcarate (2003). El tema de la optimización no es la excepción, por ejemplo, existen investigaciones centradas en el tratamiento de los libros de texto como es el caso de los autores Balcaza, Contreras y Font (2017).

Se han realizado diversas propuestas para mejorar el aprendizaje de la optimización en los estudiantes de nivel medio superior y superior (Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto, 2014; Rojas, Baez y Corona, 2017; Portillo, Ávila, Cruz y López, 2019), lo cual ha influido en las metodologías y estrategias de enseñanza-aprendizaje, que requieren de una mejora en la práctica docente e involucrar a los estudiantes en la construcción de su conocimiento. En este trabajo se coincide con los anteriores autores respecto a la mejora de la práctica docente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en el uso de una metodología. Una de ellas es la propuesta de Creación de Problemas de contenidos matemáticos realizado por los estudiantes en específico para la optimización en nivel superior.

La Creación de Problemas se ha abordado en algunas investigaciones como en Malaspina (2013, 2016), pero no en el tema de la optimización con estudiantes de nivel superior. La propuesta de este trabajo de investigación con la metodología de Creación de Problemas para la optimización en estudiantes universitarios consiste en realizar un análisis de las producciones hechas por los estudiantes al crear un problema de optimización. Esto mediante la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido, el cual aparece como un elemento relevante dentro de la propuesta de la Creación de Problemas por variación en la optimización.

El Mapa Híbrido ha sido empleado para analizar fenómenos educativos en la matemática escolar (Moreno, 2019) y en la física escolar (Moreno, Angulo y Reducindo, 2018; Moreno, Angulo, Reducindo y Aguilar, 2018). En este último caso a través de una extensión de los elementos teóricos del EOS a la física escolar. En nuestro caso nos apoyaremos en la interpretación ontosemiótico de Mapa Híbrido.

En este trabajo se presenta una estrategia educativa, aplicando la metodología de Creación de Problemas y el análisis de las producciones mediante la herramienta de interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido, la cual nos permitirá observar la construcción de los conocimientos en los alumnos sobre la optimización en la asignatura de Cálculo Diferencial, en un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Actuaría de la Universidad Autónoma de Zacatecas que cursaron la asignatura de Cálculo Diferencial. De acuerdo al contexto que se vive con la pandemia mundial (COVID 19), las clases se llevan a cabo de manera virtual, y es por tal motivo que nos vemos en la necesidad de recopilar la información de manera virtual apoyada de la plataforma Zoom.

Los elementos teóricos empleados en esta investigación son los Objetos Matemáticos Primarios y los procesos cognitivos provenientes del Enfoque Ontosemiótico (EOS), que es una teoría de la Matemática Educativa propuesta por Godino, Batanero y Font (2007).

Finalmente, la investigación tiene como objetivo caracterizar la construcción de conocimiento referente a la optimización a partir de la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación mediante la identificación de los Objetos Matemáticos y sus conexiones, los procesos cognitivos implicados y las prácticas que intervienen.

En el primer capítulo se presentan de manera general los antecedentes del tema, se incluye un apartado sobre la optimización clásica en las matemáticas, la cual se refiere al contenido científico, posteriormente aparece un tratamiento de la optimización de los libros de texto. Acto seguido se presentan estudios previos acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización clásica en Cálculo Diferencial, asimismo, se presenta un apartado sobre el aprendizaje de las matemáticas mediante la Creación de Problemas. También se presenta el problema de investigación y la justificación.

El segundo capítulo contiene la hipótesis planteada y las preguntas de investigación asociadas a la hipótesis. En un primer momento se describen los aspectos que dieron origen a la hipótesis, luego se plantean las preguntas de investigación y, por último, se describen el objetivo general y los objetivos específicos que permitirán orientar los aspectos teóricos y metodológicos del trabajo.

Posteriormente se presenta el tercer capítulo, el cual contiene el Marco teórico que sustenta con fundamentos teóricos esta investigación. Aquí se presentan algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS de ahora en adelante), así como la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido, que está constituida por algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS de ahora en adelante).

En el cuarto capítulo se encuentra la metodología utilizada, donde se plantea un diseño cualitativo con el detalle de los instrumentos de recolección de datos y los sujetos participantes dentro de la investigación.

El quinto capítulo contiene los resultados a partir de la implementación, así como la identificación de participantes y los resultados que arroja cada uno de los instrumentos utilizados. Acto seguido, se presenta el sexto capítulo que corresponde al análisis y discusión sobre los datos obtenidos por los alumnos estudiados en esta investigación. En el séptimo capítulo se encuentran las conclusiones que permiten una visión global de lo realizado en esta investigación.

Motivación

El aprendizaje de las matemáticas, desde el nivel educativo básico hasta el universitario, genera en los estudiantes dificultades que se ven reflejadas en los malos resultados de las evaluaciones (Moreno, 2005). A partir de lo anterior, la Matemática Educativa ha desarrollado investigaciones a favor de los procesos de enseñanza-aprendizaje mediante el diseño de nuevas estrategias y el desarrollo de investigaciones sobre la construcción del conocimiento. Asimismo, la indagación bibliográfica permite afirmar que los profesores enseñan contenidos matemáticos de una manera tradicional, privilegiando a los estudiantes de prácticas memorísticas y algorítmicas de aprendizaje a través de definiciones y fórmulas en lugar de la reflexión.

Se han realizado numerosas investigaciones sobre cómo abordar las problemáticas que han surgido en el área de la Matemática Educativa. Algunos investigadores (Malaspina, Mallart, Font, 2015; Torres, 2016; Salazar, 2015) plantean que la Creación de Problemas debe ser parte del aprendizaje en distintos niveles educativos, así como en la formación de profesores. Otros investigadores han realizado investigaciones basándose en la Creación de Problemas en áreas como álgebra, teoría de grupos, por mencionar algunos. Sin embargo, en la literatura no se han reportado investigaciones mediante Creación de Problemas en Cálculo diferencial, es por eso que es de mi interés ahondar en el tema de optimización clásica en la asignatura de Cálculo diferencial en el nivel universitario, ya que no se han realizado investigaciones sobre Creación de Problemas en dicho nivel. De la misma manera, no se ha sistematizado mediante análisis gráfico de la organización y los procesos que intervienen en la actividad matemática.

Se considera importante incluir la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido para analizar la producción oral y escrita generada por algunos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de la Creación de Problemas, ya que mediante los Mapas Híbridos se puede describir el sistema de prácticas presentes en la resolución de situaciones problematizadas de la matemática que se estudian en el aula, asimismo permite visualizar los distintos Objetos Matemáticos, las relaciones entre dichos objetos, la organización de las prácticas y permite advertir la realización de algunos procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas (Moreno, 2019).

Es por ello que nace el interés por realizar una investigación en la Creación de Problemas planteando la propuesta innovadora de que la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido podría mostrar las distintas conexiones entre los Objetos Matemáticos y procesos implicados en la construcción del conocimiento matemático relacionado con la actividad de Creación de Problemas, sustentada dicha investigación en la teoría de la Matemática Educativa el Enfoque Ontosemiótico.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1.1 Introducción

En este capítulo se presentan algunos estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial, esto con la finalidad de conocer lo que reportan algunos autores y en qué medida se han realizado dichas investigaciones; asimismo, se presenta un análisis de la optimización en las matemáticas como un contenido científico con el fin de esclarecer qué es la optimización y los tipos de problemas de optimización que existen; posteriormente, se describe cómo es el tratamiento matemático de la optimización en los libros de texto de nivel universitario con la finalidad de analizar cómo es abordado el tema de nuestro interés; y por último, se hace un análisis bibliográfico sobre la Creación de Problemas, el cual es el eje central de este trabajo de investigación.

Por otra parte, también se abordan aspectos que motivaron la realización de este trabajo debido a la enseñanza tradicional de la matemática escolar que se ha implementado dentro de las aulas, en donde los alumnos adquieren un aprendizaje mediante la memorización de fórmulas y conceptos. Así, se plantea la actividad de Creación de Problemas como una postura que favorece la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar implementando distintas tareas que fomente, en los estudiantes, un aprendizaje significativo vía la reflexión.

1.2 Estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial

En la siguiente sección se exponen la mirada de investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial. Estas fueron realizadas por los autores Fonseca, Casas, Bosch y Gascón (2009); González (2010); Baccelli et al. (2014); Rojas et al. (2017); Portillo et al. (2019); Malaspina, (2007; 2008); Malaspina y Font (2015); Camacho y González (2001) y Balcaza (2018).

En el estudio de Fonseca et al. (2009), menciona que durante muchos años, en las instituciones educativas, los estudiantes al momento de abordar la modelización y las aplicaciones, lo hacen restringiéndose solamente a aplicar conocimientos matemáticos que han sido aprendidos en determinadas situaciones y que además, han sido poco reales, esto se realiza con la doble intencionalidad de mostrar su utilidad y servir de motivación al aprendiz. Asimismo, se considera que hoy en día este uso perdura en los sistemas de enseñanza.

Por otra parte, en el estudio de Gonzáles (2010), se realiza una investigación para la enseñanza del cálculo diferencial en bachillerato, a través de problemas de optimización mediante la modelación, esto con el objetivo de proporcionar los instrumentos didácticos, teórico y prácticos, requeridos para la implementación efectiva de la modelización matemática en la enseñanza en bachillerato, en donde el estudiante, a partir de una cuestión problemática, sea capaz de construir su propio conocimiento y que mediante el recorrido de estudio e investigación desarrollado, el estudiante adquiera el conocimiento matemático que se tiene establecido institucionalmente, además de proveer a los profesores de bachillerato una herramienta para la enseñanza y aprendizaje de la optimización en cálculo diferencial

En la investigación “Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización”, Malaspina (2007) percibe que existen deficiencias entre los estudiantes en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización propuestos. También expresa que existen deficiencias en la argumentación al resolver los problemas de optimización propuestos, ya que la problemática referente a las deficiencias en la argumentación, radica en la poca presencia de justificación.

Malaspina (2008) señala que no existe una orientación hacia el desarrollo de la intuición, debido a que cuando se imparte la asignatura de Cálculo Diferencial solamente se le proporciona al estudiante una serie de pasos a seguir para resolver los problemas de optimización que se les presentan y esto conlleva a que no se estimule su creatividad. Asimismo, menciona que “en particular, cuando se usan las palabras mínimo y máximo no se hace tomar conciencia del significado de estos conceptos en el contexto que se está usando, ni hay énfasis en la verificación de que lo obtenido es realmente óptimo”. (p.264)

Malaspina y Font (2015) mencionan que la intuición de la optimización está relacionada con la idealización, la generalización y la argumentación. Dicha intuición se desarrolla a través de dos tipos de experiencia, en donde, el primer tipo sucede cuando en la vida diaria las personas se enfrentan a la tarea de tomar decisiones óptimas, y el segundo tipo de experiencia es más personal. Es por este tipo de situaciones y experiencias que los estudiantes pueden entender problemas de optimización por lo que les permite responder intuitivamente a algunos problemas.

En el estudio de Balcaza (2018) se menciona que los alumnos muestran conflictos semióticos potenciales, debido al proceso de instrucción de los libros de texto. Asimismo, menciona que aparecen conflictos semióticos relacionados con la no congruencia de las conversiones entre registros semióticos y con los instrumentos de cálculo utilizados. En la realización del análisis ontosemiótico observan que los alumnos tienen dificultades en la conversión entre el registro del lenguaje natural y el gráfico, ya que la representación gráfica lleva implícitamente el proceso de generalización a particularización que no es trivial para el alumno. Este conflicto semiótico conlleva que el alumno no pueda continuar la resolución de los problemas.

En el estudio de Baccelli et al. (2014) se menciona la problemática que presentan los estudiantes de nivel universitario al resolver problemas de optimización, se evidencia que existen dificultades desde el planteamiento del problema hasta su desarrollo de resolución, los cuales son reflejados en los resultados obtenidos.

En los curso de Cálculo Diferencial es común encontrar que el tema de problemas de optimización esté asignado al final de los libros de texto, y en algunas ocasiones no se logra cubrir dichos temas y quienes logran hacerlo solamente resuelven mediante el método tradicional en el cual solo aplica prácticas algorítmicas y no incluyen otros métodos para la enseñanza de dicho contenido (Rojas et al., 2017).

En Camacho y González (2001) se muestra una clasificación de los tipos de problemas de optimización que aparecen en los libros de texto, los cuales son clasificados en problemas de números, problemas de ángulos, problema del nadador, inscribir/circunscribir unas figuras a otras, construcción de figuras minimizando el costo del material, distancia de puntos a funciones, problema de la valla y problemas de enunciado variado. También describen algunas sugerencias didácticas para su resolución utilizando como recurso la calculadora gráfica TI-92 en donde se unen diferentes sistemas de representación (numérico, gráfico y algebraico) lo cual sirve para enriquecer el planteamiento y resolución de los problemas. Asimismo, los autores Azcarate et al. (1996) consideran que:

1. Los alumnos deben ser capaces de traducir correctamente el enunciado del problema al lenguaje de las funciones para poder aplicar las herramientas del cálculo.
2. Existe más de una manera de resolver un problema y que una elección conveniente de las variables dependiente/independiente puede simplificar considerablemente los cálculos.
3. No se debe olvidar las restricciones que puede haber sobre las variables.
4. Ciertas situaciones admiten una simplificación.
5. No en todas las funciones que presentan máximo y mínimo relativo la imagen del primero es mayor que la del segundo.

Tomando en consideración lo que reportan las investigaciones descritas anteriormente, nos podemos percatar de que existe una problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la optimización, que se relaciona con las prácticas memorísticas que los alumnos tienden a aplicar cuando emplean conceptos y fórmulas sin reflexionar y comprender el problema planteado, y esto se refleja en los malos resultados arrojados por los estudiantes cuando resuelven problemas.

1.3 La optimización en las matemáticas como contenido científico

En este apartado se presenta la optimización como un contenido científico (disciplinar). Se considera relevante definir lo que es la optimización en las matemáticas, y conocer sus distintos tipos. Asimismo, constatarlos con las concepciones que tienen los estudiantes una vez que se lleve a cabo la implementación de la metodología de Creación de Problemas, y como se les presenta a los alumnos dentro del aula.

Como se menciona en Ramos et al. (2001) la optimización consiste en la elección de una mejor alternativa. Se menciona que los problemas de optimización tiene tres elementos principales los cuales son: (I) Función objeto, (II) Variables y (III) Restricciones, los cuales se describen a continuación.

- **Función objeto:** es la medida del funcionamiento que se desea maximizar o minimizar, es decir, optimizar. Por ejemplo cuando se quiere encontrar el mínimo material requerido para fabricar un objeto.
- **Variables:** representa las decisiones que puede tomar para afectar el valor de la función objetivo.
- **Restricciones:** representan el conjunto de relaciones que ciertas variables están obligadas a satisfacer.

De igual manera, en matemáticas, Dawkins (2007) define optimizar como "buscar el máximo o menor valor de una función limitada por algún tipo de restricción. La restricción será alguna condición (que generalmente se puede describir mediante alguna ecuación) que debe ser absolutamente cierta sin importar cuál sea nuestra solución". (p. 308)

Por otra parte, Malaspina (2008) define los problemas de optimización como "a todo problema en el cual el objetivo fundamental es obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable" (p.25). Asimismo, menciona que existen distintas maneras de clasificar los problemas de optimización. Una es teniendo en cuenta las características de la función objetivo y otra es considerando las del conjunto factible. Señala que existen cuatro clases de problemas de optimización en matemáticas: continua, discreta, combinatoria y variacional las cuales se describen a continuación.

- ***Problema de optimización continua:*** esta se refiere a cuando todos los elementos del conjunto factible son puntos de acumulación.
- ***Problema de optimización discreta:*** aquí se hace énfasis cuando el conjunto factible no tiene puntos de acumulación.
- ***Problema de optimización combinatoria*:** aquí se refiere a cuando su conjunto factible es finito. Y menciona que en estos problemas los elementos del conjunto factible no están explícitamente determinados, sino indirectamente especificados mediante relaciones combinatorias.
- ***Problema de optimización variacional:*** cuando su conjunto factible es un subconjunto de dimensión infinita de un espacio de funciones. El autor menciona un ejemplo sobre formular y examinar la determinación del camino más corto sobre una determinada superficie, que une a dos puntos dados de esta.

De acuerdo con ello, indica que existen otros criterios de clasificación de los problemas de optimización los cuales están relacionados con:

1. El tipo de restricciones en las variables como:

- Restricciones dadas por igualdades
- Restricciones dadas por desigualdades

2. Las propiedades de la función objetivo y de las que definen las siguientes restricciones: cuales son

- Lineales
- No lineales
- Convexas, por mencionar algunos

También señala que se pueden considerar para trabajar con problemas de optimización en la primaria y la secundaria, y teniendo en cuenta los recursos matemáticos a usarse en la solución, los cuales son:

- Problemas aritméticos
- Problemas algebraicos
- Problemas geométricos
- Problemas de geometría analítica
- Problemas de análisis matemático
- Problemas mixtos.

Pero que también se consideran problemas de carácter lúdico, que pueden estar en cualquiera de los casos anteriores. Alude que los problemas de programación lineal pueden ser considerados como problemas de geometría analítica, ya que es en ese marco en el que se tratan en la secundaria.

1.4 Tratamiento matemático de la optimización en libros de texto

En el presente capítulo se presenta el tratamiento de la optimización en los libros de texto de nivel universitario. Se realizó una revisión de tres libros de texto (Stewart, 2012; Thomas, 2006; Purcell, 2007) utilizados en la enseñanza del Cálculo diferencial para el nivel medio superior y superior. El propósito del análisis de dichos libros es observar cómo presentan el tema de optimización en cada uno de ellos, analizar si el tratamiento del tema es similar en los tres, cuáles son las situaciones y ejercicios que se presentan, qué tipos de ejercicios de optimización que se presentan y si estos contribuyen a la reflexión didáctica en los alumnos, asimismo, se pretende observar si estos inducen a la argumentación, y observar si incluyen algunas variaciones en sus problemas aplicados.

Se considera que, en esencia, la enseñanza de la optimización está descrita en ejercicios típicos y similares en cada uno de los libros en donde solo se aplican fórmulas y conceptos de manera algorítmica y memorística. Para el análisis de los libros de texto se siguió la investigación realizada por Balcaza et al. (2017) quienes ya han realizado análisis de libros de texto.

Revisión del libro de Stewart, (2012)

Al realizar el análisis del tratamiento del tema de optimización en el libro de texto de Cálculo de una variable para nivel superior del autor Stewart, se observa una introducción que motiva al lector a resolver problemas de optimización en los que les presenta los contextos de la vida cotidiana en los que se puede aplicar dichos problemas.

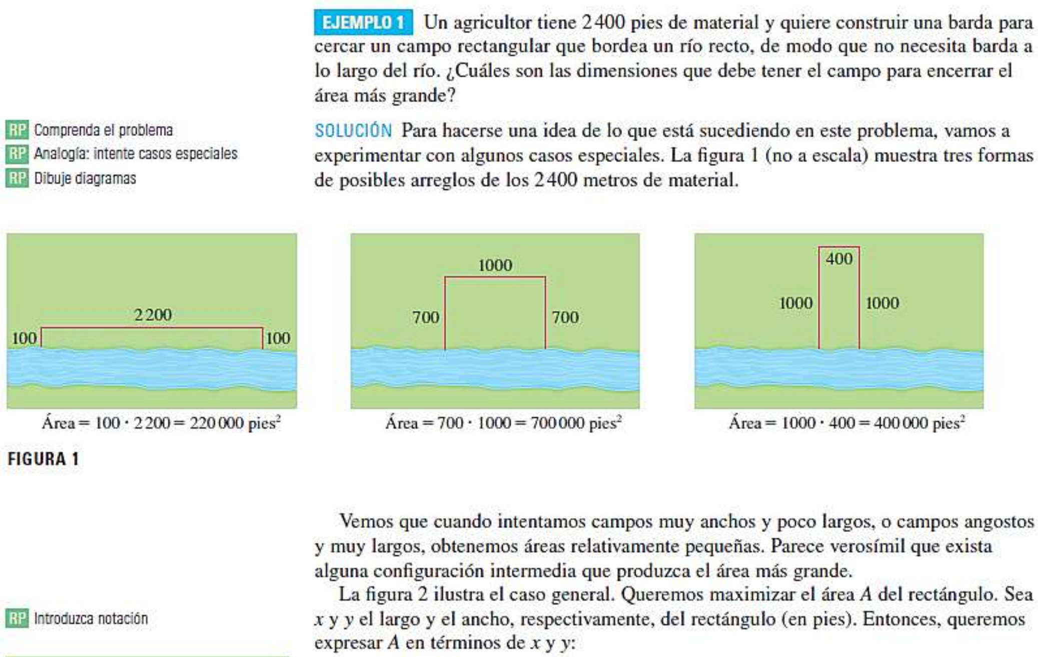
Así mismo, hacen énfasis en el desafío que presenta el problema expresado en palabras a un problema de optimización matemática en el que se debe establecer la función que se va a maximizar o minimizar. Posteriormente describe una serie de pasos que deben seguir los lectores para poder resolver un problema de optimización como se observa en la Figura 1.

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar las cantidades dadas y las cantidades requeridas en el diagrama.
3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada [vamos a llamarla Q (del inglés *quantity*) por ahora]. También seleccione símbolos ($a, b, c, \dots, x, y$) para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes —p. ej., A para el área, h para la altura, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de *una* variable x, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Utilice los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para encontrar los valores máximo o mínimo *absolutos* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces puede utilizarse el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

Figura 1. Pasos para resolver un problema de optimización (Stewart, 2012, pág.325)

Después se presenta un listado de seis ejercicios resueltos sobre el tema de optimización donde cinco de los ejemplos era de tipo intramatemáticos en los cuales se presenta una representación pictórica que les ayuda a visualizar de una mejor manera el problema planteado. En algunos ejemplos se pide encontrar las dimensiones que debe tener un campo para encerrar el área más grande o para minimizar el costo de un metal como se muestra en la Figura 2. También se presenta un ejemplo aplicado a la economía en el que se pide encontrar una función demandada y una función de ingreso, así como encontrar un descuento el cual le permita maximizar sus ingresos. En dicho ejemplo no se presenta ninguna representación.



EJEMPLO 1 Un agricultor tiene 2400 pies de material y quiere construir una barda para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita barda a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

RP Comprenda el problema
RP Analogía: intente casos especiales
RP Dibuje diagramas

SOLUCIÓN Para hacerse una idea de lo que está sucediendo en este problema, vamos a experimentar con algunos casos especiales. La figura 1 (no a escala) muestra tres formas de posibles arreglos de los 2400 metros de material.

Área = 100 · 2200 = 220000 pies^2 Área = 700 · 1000 = 700000 pies^2 Área = 1000 · 400 = 400000 pies^2

FIGURA 1

Vemos que cuando intentamos campos muy anchos y poco largos, o campos angostos y muy largos, obtenemos áreas relativamente pequeñas. Parece verosímil que exista alguna configuración intermedia que produzca el área más grande.

RP Introduzca notación

La figura 2 ilustra el caso general. Queremos maximizar el área A del rectángulo. Sea x y y el largo y el ancho, respectivamente, del rectángulo (en pies). Entonces, queremos expresar A en términos de x y y:

Figura 2. Solución de un problema de optimización (Stewart, 2012, pág. 326)

Por otra parte, aparece una explicación de una prueba o criterio de la primera derivada para saber cuándo un valor es el máximo absoluto de una función o el mínimo absoluto. Del mismo modo describen un método alternativo de resolución al problema propuesto, el cual consiste en utilizar la derivación implícita, como se muestra en la Figura 3.

NOTA 1 El argumento utilizado en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (que sólo se aplica a valores máximos o mínimos *locales*) y se establece aquí para referencia futura.

> **Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos** Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.
>
> a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.
>
> b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 Un método alternativo para resolver problemas de optimización es utilizar derivación implícita. Veamos el ejemplo 2 nuevamente para ilustrar el método. Trabajamos con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1000$$

pero en lugar de eliminar h, derivamos ambas ecuaciones implícitamente, respecto a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se produce en un número crítico, por lo que establecemos $A' = 0$; simplificamos para llegar a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y la sustracción da $2r - h = 0$, o $h = 2r$.

Figura 3. Prueba del máximo y mínimo absoluto (Stewart, 2012, pág. 328)

Al final del tema se muestra un listado de ejercicios propuestos, los cuales son ejercicios similares a los ejemplos antes mencionados, como son el caso de los ejercicios del 14 al 19. En dichos ejercicios se presentan problemas para calcular las dimensiones de una caja que minimicen la cantidad de material, el costo mínimo de materiales para la elaboración de un recipiente. También se plantean ejercicios no contextualizados, como son los ejercicios del 2 al 6, en ellos se puede observar que los ejercicios propuestos hacen referencia a situaciones intramatemáticas en donde solamente se dan funciones para que a partir de ellas se obtenga la distancia mínima o máxima entre ellas, así como se muestra en la Figura 4 (Stewart, 2012).

2. Encuentre dos números cuya diferencia es 100 y cuyo producto es un mínimo.

3. Encuentre dos números positivos cuyo producto es 100 y cuya suma es un mínimo.

4. La suma de dos números positivos es 16. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de sus cuadrados?

5. ¿Cuál es la distancia vertical máxima entre la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?

6. ¿Cuál es la distancia vertical mínima entre la parábolas $y = x^2 + 1$ y $y = x - x^2$?

14. Una caja con una base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que ha de utilizarse.

15. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa; encuentre el mayor volumen posible de la caja.

16. Un contenedor rectangular de almacenamiento sin tapa ha de tener un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces el ancho. El material para la base cuesta $10 por metro cuadrado y el material para los costados cuesta $6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales que hagan más barato el contenedor.

17. Resuelva el ejercicio 16 suponiendo que el contenedor tiene una tapa fabricada con el mismo material que los lados.

18. a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área determinada, el de perímetro más pequeño es un cuadrado.
    b) Pruebe que de todos los rectángulos con un perímetro determinado, el de mayor área es un cuadrado.

19. Encuentre el punto sobre la recta $y = 2x + 3$ que está más cerca del origen.

Figura 4. Ejercicios propuestos (Stewart, 2012, pág. 331)

Revisión de libro de Thomas, (2006)

Al realizar el análisis del tema de optimización en el libro utilizado para la enseñanza del Cálculo diferencial en el nivel superior del autor Thomas (2006), se puede observar que el tratamiento es similar que el texto anteriormente revisado.

Comienza describiendo qué significa optimizar, a lo que describe como maximizar o minimizar algo, cuestionándose ¿Cómo se pueden determinar las dimensiones de un rectángulo con perímetro fijo y área máxima? ¿Qué forma debe tener una lata cilíndrica para que su producción resulte lo más barata posible? ¿Qué cantidad de la producción es la más rentable? Asimismo, mencionan otras áreas en las que se presenta la optimización, por ejemplo, en la Física y la Economía.

Acto seguido muestran un listado de siete ejercicios de optimización resueltos, de los cuales tres están relacionados con la aplicación a la economía. En primera instancia se presentan dos ejercicios típicos como son la fabricación de una caja en donde se pide que encuentren que tan grandes deben ser los cuadrados que se corten de las esquinas para que la caja tenga la máxima capacidad. Asimismo, muestran el ejercicio de diseñar una lata cilíndrica empleando la menor cantidad de material, así como se muestra en la Figura 5. Ambos ejercicios muestran una representación pictórica que facilita la visualización y comprensión del problema.

Ejemplos de los negocios y la industria

EJEMPLO 1 Fabricación de una caja

Se quiere hacer una caja abierta cortando pequeños cuadrados congruentes en las esquinas de una lámina de hojalata que mide 12 por 12 pulgadas, y doblando los lados hacia arriba. ¿Qué tan grandes deben ser los cuadrados que se corten de las esquinas para que la caja tenga la máxima capacidad posible?

Solución Empezamos por hacer un planteamiento gráfico del problema (figura 4.32). En la figura, los cuadrados de las esquinas tienen lados de x pulgadas. El volumen de la caja es una función de esta variable:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3. \qquad V = hlw$$

Como los lados de la lámina de hojalata tienen sólo 12 pulgadas de largo, $x \leq 6$ y el dominio de V es el intervalo $0 \leq x \leq 6$.

Una gráfica de V (figura 4.33) sugiere un valor mínimo de 0 en $x = 0$ y $x = 6$ y uno máximo cerca de $x = 2$. Para obtener más información, examinamos la primera derivada de V respecto de x:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$

De los dos ceros, $x = 2$ y $x = 6$, solamente $x = 2$ está en el interior del dominio de la función y es el único elemento de la lista de puntos críticos. Los valores de V en este punto crítico y en los extremos del intervalo son

$$\text{Valor en el punto crítico:} \quad V(2) = 128$$

$$\text{Valores en los extremos del intervalo:} \quad V(0) = 0, \quad V(6) = 0.$$

El volumen máximo es 128 pulg^3. Los cortes cuadrados deben medir 2 pulgadas por lado.

Figura 5. Ejercicios resueltos (Thomas, 2006, pág. 278)

Posteriormente, y al igual que el libro anterior, se presenta un listado de paso a seguir para la resolución de los problemas de optimización como se muestra en la siguiente Figura 6.

Pasos para la resolución de problemas aplicados de optimización

1. *Leer el problema*. lea el problema hasta que lo entienda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que hay que optimizar?
2. *Hacer un dibujo*: identifique con una etiqueta cualquier parte que pueda ser importante para el problema.
3. *Introducir variables*: haga una lista de las relaciones que encuentre en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraica, e identifique la variable desconocida.
4. *Escribir una ecuación para la cantidad desconocida*: de ser posible, exprese la incógnita como función de una sola variable o en dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello puede ser necesaria una manipulación considerable.
5. *Examinar los puntos críticos y los extremos del dominio de la incógnita*: use la información con que cuenta acerca de la forma de la gráfica de la función. Emplee la primera y segunda derivadas para identificar y clasificar los puntos críticos de la función.

Figura 6. Pasos para resolver un problema de optimización (Thomas, 2006, pág. 280)

Acto seguido se muestran ejercicios de optimización no contextualizados, los cuales son ejercicios aplicados con la Física y la Economía. En la siguiente Figura 7 se muestra un ejemplo relacionado con la geometría plana (distancia, ángulo, perímetro y área) en donde se pide encontrar el área máxima que puede tener un rectángulo. Asimismo, se presenta un ejercicio aplicado a la Física, el cual está relacionado con el principio de Fermat en donde se pide encontrar la trayectoria que seguirá un rayo de luz para ir del punto *A*, en un medio donde la rapidez de la luz es *v*, a un punto *B* en un segundo medio dada la rapidez de la luz. En todos estos ejercicios mencionados se tienen una representación pictórica y gráfica de los problemas planteados, lo cual facilita su comprensión. También se presenta ejercicios relacionados a la economía en los que se pide la minimización de la utilidad y de costos. En estos ejemplos se incluyen representaciones gráficas de la modelación del problema.

Ejemplos de matemáticas y física

EJEMPLO 3 Rectángulos inscribibles

Un rectángulo se inscribe en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el rectángulo y cuáles son sus dimensiones?

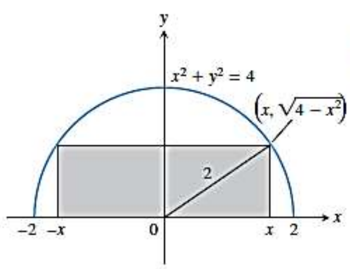


FIGURA 4.36 El rectángulo inscrito en el semicírculo del ejemplo 3.

Solución Sean $(x, \sqrt{4 - x^2})$ las coordenadas del vértice del rectángulo obtenido al colocar el círculo y el rectángulo en el plano coordenado (figura 4.36). La longitud, altura y área del rectángulo pueden expresarse en términos de la posición x del vértice inferior derecho:

$$\text{Longitud: } 2x, \qquad \text{Altura: } \sqrt{4 - x^2}, \qquad \text{Área: } 2x \cdot \sqrt{4 - x^2}.$$

Observe que los valores de x tienen que estar en el intervalo $0 \leq x \leq 2$, donde está el vértice seleccionado del rectángulo.

Nuestro objetivo es encontrar el valor máximo absoluto de la función

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

en el dominio [0, 2].

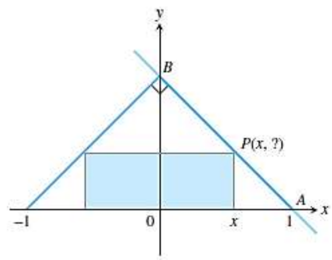
Figura 7. Ejemplos de optimización matemática (Thomas, 2006, pág. 280)

Finalmente, al término del capítulo se presenta un listado de ejercicios propuestos para ser resueltos por el lector, ejercicios que son similares a los planteados como ejemplos y algunos otros con un grado mayor de complejidad, tal y como se muestra en la Figura 8.

En los ejercicios del 1 al 4 se presentan ejercicios no contextualizados con aplicación a la geometría, en donde solamente se les pide calcular un perímetro o el área mayor de un rectángulo. Sin embargo en los ejercicios del 7 al 10 son ejercicios propuestos de tipo de aplicación en donde los contextos que se presentan no son reales al contexto del estudiante. Las desventajas que se pueden presentar al realizar este tipo de ejercicios, es que los alumnos solamente apliquen las fórmulas y métodos algorítmicos para resolver los problemas planteados, ya que no están en un contexto cercano a ellos y no les dan la suficiente importancia.

Aplicaciones en geometría

1. **Minimización de un perímetro** ¿Cuál es el menor perímetro posible para un rectángulo cuya área es 16 pulg.^{2}, y cuáles son sus dimensiones?
2. Demuestre que entre todos los rectángulos con perímetro de 8 m, el de mayor área es un cuadrado.
3. La figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa mide 2 unidades de largo.
   a. Exprese la coordenada y de P en términos de x. (*Sugerencia:* Escriba una ecuación para la recta AB).
   b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.
   c. ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo y cuáles son sus dimensiones?



4. Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores sobre la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo, y cuáles son sus dimensiones?

mento es máxima cuando $a = b$.

7. **La mejor cerca** Una parcela rectangular en una granja tendrá límites, por un lado, por un río, y por los otros tres mediante una cerca electrificada con un solo alambre. Si se cuenta sólo con 800 m de alambre, ¿cuál es la mayor área que puede ocupar la parcela y cuáles son sus dimensiones?
8. **La cerca más corta** Un sembradío rectangular de chícharos mide 216 m^2; se quiere encerrar con una cerca, y dividirlo en dos partes iguales mediante otra cerca paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones del rectángulo exterior requieren la menor longitud total de la cerca? ¿Cuánta cerca se requerirá?
9. **Diseño de un tanque** La fundidora en donde usted trabaja ha sido contratada para diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de 500 pies^3. El tanque se tiene que hacer soldando placas delgadas de acero a lo largo de sus bordes. Como ingeniero de producción, su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y la altura que harán que el tanque pese lo menos posible.
   a. ¿Qué dimensiones le dirá al taller que use?
   b. Describa brevemente cómo tomó en cuenta el peso en su cálculo.
10. **Recolección de agua de lluvia** Se quiere construir un tanque rectangular abierto por arriba de 1125 pies^3 con base cuadrada de x pies de lado y y pies de profundidad, con su parte superior al nivel del piso, para recoger agua de lluvia. El costo asociado con el tanque involucra no sólo el material que se usará para construirlo, sino también el costo de excavación proporcional al producto xy.
    a.

$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy,$$

Figura 8. Ejercicios propuestos (Thomas, 2006, pág. 285)

Revisión de libro (Purcell, 2007), novena edición

En el libro de texto de nivel universitario, el tema de optimización aparece en el último capítulo relacionado con Cálculo diferencial. El tema se encuentra a la mitad del capítulo, dicho tema es nombrado como problemas prácticos. En este libro de texto, a diferencia de los dos anteriormente revisados, comienza el tema presentando la serie de pasos que debe seguir el lector para poder resolver los problemas de optimización que se les presentará más adelante, tal y como se muestra en la siguiente Figura 9.

Paso 1: Haga un dibujo del problema y asigne variables idóneas para las cantidades importantes.

Paso 2: Escriba una fórmula para la función objetivo Q que se maximizará o minimizará, en términos de las variables del paso 1.

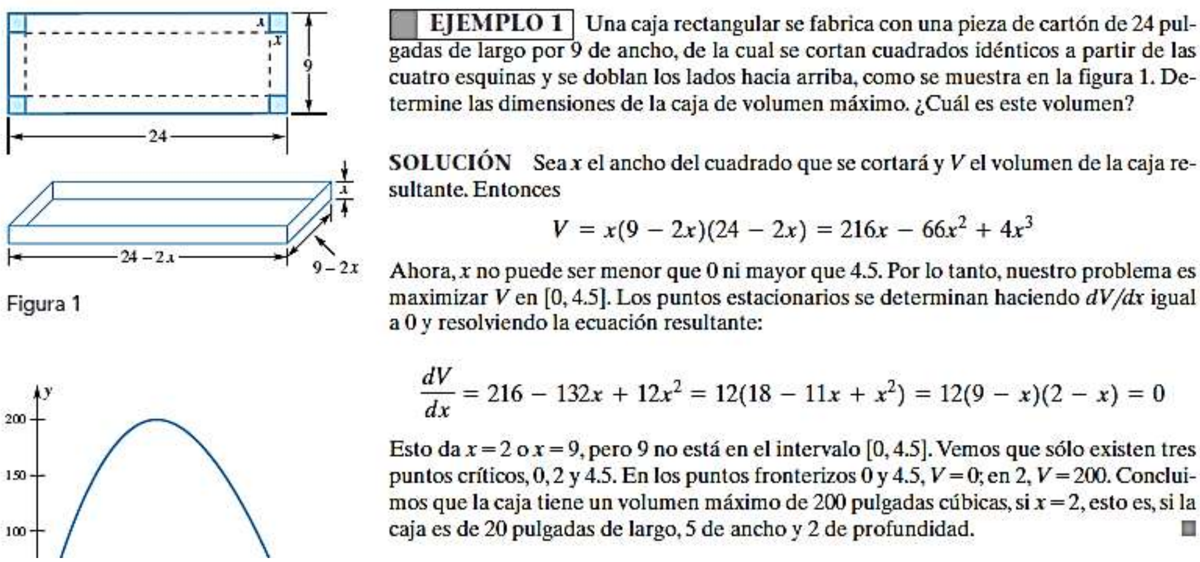
Paso 3: Utilice las condiciones del problema para eliminar todas, excepto una de estas variables, y por consiguiente expresar a Q como una función de una sola variable.

Paso 4: Encuentre los puntos críticos (fronterizos, estacionarios, singulares).

Paso 5: Sustituya los valores críticos en la función objetivo o bien utilice la teoría de la última sección (es decir, los criterios de la primera o segunda derivada) para determinar el máximo o el mínimo.

Figura 9. Pasos a seguir para resolver un problema de optimización (Purcell, 2007, pág. 167)

Posteriormente, como se muestra en la Figura 10, en el libro de texto se presentan seis ejemplos resueltos similares a los ejercicios analizados en los libros anteriores. Los primeros tres ejemplos que presentan piden encontrar el volumen máximo de una caja, las dimensiones de un terreno para un área máxima y las dimensiones de un cilindro. Los ejercicios siguientes son problemas aplicados a la Física, en la cual se pide calcular la velocidad que minimiza la energía empleada en nadar una cierta distancia, así como ejercicios de optimización aplicados a la Economía en donde se pide encontrar el costo promedio y expresiones para ingresos y costos, por mencionar algunos. Todos los ejercicios planteados contienen una representación gráfica o pictórica.



EJEMPLO 1 Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba, como se muestra en la figura 1. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo. ¿Cuál es este volumen?

SOLUCIÓN Sea x el ancho del cuadrado que se cortará y V el volumen de la caja resultante. Entonces

$$V = x(9 - 2x)(24 - 2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Ahora, x no puede ser menor que 0 ni mayor que 4.5. Por lo tanto, nuestro problema es maximizar V en $[0, 4.5]$. Los puntos estacionarios se determinan haciendo dV/dx igual a 0 y resolviendo la ecuación resultante:

$$\frac{dV}{dx} = 216 - 132x + 12x^2 = 12(18 - 11x + x^2) = 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

Esto da $x = 2$ o $x = 9$, pero 9 no está en el intervalo $[0, 4.5]$. Vemos que sólo existen tres puntos críticos, 0, 2 y 4.5. En los puntos fronterizos 0 y 4.5, $V = 0$; en 2, $V = 200$. Concluimos que la caja tiene un volumen máximo de 200 pulgadas cúbicas, si $x = 2$, esto es, si la caja es de 20 pulgadas de largo, 5 de ancho y 2 de profundidad.

Figura 10. Ejercicios de optimización resueltos (Purcell, 2007, pág. 167)

Finalmente se presenta un listado de ejercicios como se muestra en la Figura 11, los cuales son similares a los que se plantearon con ejemplo, en donde se pide maximizar o minimizar dependiendo del problema que este planteado. Algunos ejercicios que se presentan en el listado tienen un grado de dificultad mayor que los presentados en los ejemplos.

18. Un cono circular recto será inscrito en otro cono circular recto de volumen dado, con los mismos ejes y con el vértice del cono interior tocando la base del cono exterior. ¿Cuál debe ser la razón entre sus alturas para que el cono inscrito tenga volumen máximo?

≈ **19.** Una pequeña isla está a 2 millas del punto más cercano, P, de una playa rectilínea de un gran lago. Si una mujer en la isla puede remar en una lancha a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora, ¿en dónde debe desembarcar en el bote para llegar, en el menor tiempo, a un pueblo que está a 10 millas, medidas sobre la playa, del punto P?

≈ **20.** En el problema 19 suponga que, cuando llegue a la playa, la mujer será recogida por un automóvil que promedia 50 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

≈ **21.** En el problema 19, suponga que la mujer utiliza una lancha de motor, que viaja a 20 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

22. Una central eléctrica está situada en una ribera de un río rectilíneo que tiene w pies de ancho. Una fábrica está situada en la ribera opuesta del río, L pies río abajo del punto A, que está enfrente a la central eléctrica. ¿Cuál es la ruta más económica para conectar un cable de la central a la fábrica, si cuesta a dólares por pie tender el cable bajo el agua y b dólares por pie en tierra $(a > b)$?

23. A las 7:00 a. m., un barco estaba a 60 millas al este de un segundo barco. Si el primer barco navega hacia el oeste a 20 millas por hora y el segundo navega con rumbo sureste a 30 millas por hora, ¿cuándo estarán más cerca uno del otro?

24. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y que forma con los ejes de coordenadas el triángulo con menor área posible (a y b son constantes positivas).

40. Un humidificador utiliza un disco giratorio de radio r que está sumergido parcialmente en el agua. La mayor evaporación ocurre cuando la región húmeda expuesta (mostrada como la región superior sombreada en la figura 26) se maximiza. Demuestre que esto sucede cuando h (la distancia del centro al agua) es igual a $r/\sqrt{1 + \pi^2}$.

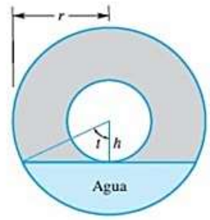


Figura 26

41. Un canalón metálico para el agua de lluvia tiene lados de 3 pulgadas y un fondo horizontal de 3 pulgadas, los lados forman ángulos iguales θ con el fondo (véase la figura 27). ¿Cuál debe ser θ para maximizar la capacidad de desalojo de agua del canalón? *Nota:* $0 \le \theta \le \theta/2$.

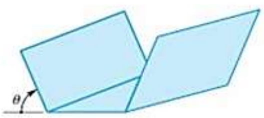


Figura 27

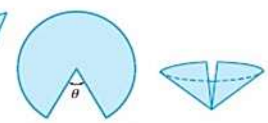


Figura 28

42. Se fabricará un gran depósito cónico con una pieza metálica circular con radio de 10 metros, cortando un sector con ángulo θ y luego soldando los lados rectos de la pieza restante (véase la figura 28). Encuentre θ, de modo que el cono resultante tenga el mayor volumen posible.

Figura 11. Ejercicios de optimización propuestos (Purcell, 2007, pág. 176)

En los ejercicios del 19 al 23 se puede observar que los ejercicios propuestos son de tipo de aplicación, en donde los contextos que se presentan no son reales al contexto del estudiante. Por otra parte, en los ejercicios 40 y 41 se observa el uso de representaciones pictóricas que promueven el análisis gráfico y hacen referencia a situaciones intramatemáticas, así como los ejercicios 18 y 42. Asimismo, se encuentran problemas con aplicaciones a otras ciencias como la Física y Economía.

1.4.1 Algunas reflexiones acerca del tratamiento que realizan los libros de texto sobre la optimización

Analizando los pasos que presentan los tres libros de texto para resolver un problema de optimización, se puede observar que en efecto coinciden, pues sugieren los mismos pasos, los cuales son, en primera instancia, leer y comprender el problema. Posteriormente se sugiere que el lector dibuje un diagrama y así poder identificar las variables, a continuación indican introducir notaciones o ecuaciones y finalmente encontrar los puntos críticos y los extremos del dominio de la incógnita. Este es el orden de los pasos que se sugiere en los tres libros de texto.

También se pudo observar que los ejercicios que se plantean en los libros de texto son ejercicios de tipo convencional. Este tipo de ejercicios son los que se encuentran en una clase regular y son estructurados en su planteamiento y cerrados en su solución y procedimientos. No se proponen ejercicios de tipos no convencionales, los cuales son problemas como los que se plantean en la olimpiadas de matemáticas, los cuales requieren hacer interpretaciones, inferencias y realizar una reflexión.

En Ramos et al. (2001) se menciona que los problemas de optimización se componen generalmente de tres elementos que son (I) función objetivo, el cual es la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar), (II) variables representante de las decisiones, las cuales se pueden tomar para afectar el valor de la función objetivo y, por último, (III) restricciones, que representan el conjunto de relaciones (expresadas mediante ecuaciones e inecuaciones) que ciertas variables están obligadas a satisfacer. También menciona que para resolver un problema de optimización se debe encontrar el valor que deben tomar las variables para hacer óptima la función objetivo satisfaciendo el conjunto de restricciones. Como podemos observar, algunos de los elementos que se presentan, guardan relación con lo que plantean los libros de texto como el identificar las variables y la sugerencia de introducir notaciones o ecuaciones.

Por otra parte, según Malaspina (2002), los pasos que los sujetos deben realizar para resolver un problema de optimización son, analizar enunciados matemáticos formales complejos y construir significados con base en tales formalismos, pero también deben aprender a expresar en lenguaje formal los significados que han construido. Ayudados por la intuición; haciendo una representación gráfica del problema y empleando variables, la notación funcional y el cálculo el máximo y el mínimo.

Con el análisis de los tres libros de texto se pudo observar que el tratamiento es similar y esto contribuye a la enseñanza tradicional, ya que solamente presentan ejercicios típicos donde se construye una caja con el máximo o mínimo volumen y no inducen a la reflexión y es por ello que se encuentran dificultades en la argumentación, justificación y en la creación de ideas debido al tipo problemas planteados en donde solamente propician a la aplicación de fórmulas Asimismo, con la revisión de los libros de texto nos podemos percatar que la aplicación de ejercicios a otras ciencias es muy escasa, destacando que todos incluyen la Física y Economía. Sin embargo, los problemas que se presentan con mayor frecuencia en los libros analizados anteriormente, son los relacionados con la geometría plana (distancia, ángulo, perímetro y área), geometría espacial (dimensionar figuras e inscribir/circunscribir unas en otras), funciones y números.

Con base en lo anterior, se puede percatar de que a los estudiantes solamente se les presentan los algoritmos y pasos específicos para resolver los problemas de optimización, es decir, se dota al alumno de herramientas específicas en donde solamente se le proporciona los pasos para la resolución de los problemas, sin importar que él reflexione acerca de lo que está realizando. Asimismo, también se observa un elemento importante que menciona Malaspina (2008), que no se enseña a los estudiantes a verificar y a argumentar que realmente el resultado obtenido haya sido el óptimo.

1.5 La Creación de Problemas y la forma de aprender matemáticas

En este apartado se exponen algunas investigaciones acerca del aprendizaje de las matemáticas mediante la Creación de Problemas (Malaspina, 2013, 2016, 2014; Chamoso y Cáceres, 2019; Salazar, 2015) en donde pondremos mayor énfasis en la Creación de Problemas realizadas por el autor (Malaspina, 2013, 2016, 2014).

En primera instancia, se define la Creación de Problemas. Según Malaspina (2013), la Creación de Problemas matemáticos es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido (variación de un problema dado) o a partir de una situación dada (elaboración de un problema) (p.131).

Asimismo, nos menciona que un problema matemático cotidiano tiene cuatro elementos fundamentales: Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático. Además, señala que puede crearse un nuevo problema a partir de un problema dado en donde se puede modificar creativamente uno o más de estos elementos. A continuación, se describen cada uno de los elementos del problema:

- La *información:* son los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema.

- El *requerimiento:* Es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo. Estos pueden incluir gráficos y demostraciones.

- El c*ontexto*: El contexto puede ser *intra matemático* o *extra matemático*.

- El *entorno matemático:* Es el marco matemático global en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema (por ejemplo: funciones lineales, geometría analítica, cálculo diferencial, por mencionar algunos).

Como ya se mencionó en párrafos anteriores, la Creación de Problemas de matemáticas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, ya sea por *variación* de un problema dado o por *elaboración*. El segundo puede ser libre, a partir de una situación dada o configurada o por un pedido específico (con énfasis matemático o didáctico). A continuación, se describe lo que es un problema por variación según Malaspina (2017).

La variación de un problema dado es el proceso según el cual se crea un nuevo problema a partir de un problema dado en donde se modifican uno o más de los cuatro elementos del problema original. También afirma que las variaciones pueden ser cualitativas si se hacen cambios en los objetos que interviene en el problema o en las relaciones entre los objetos, y cuantitativas si se hacen modificaciones referentes a cantidades como precio de los productos, velocidades de los móviles, por mencionar algunos. Asimismo, puede ser más desafiante crear problemas nuevos realizando ambas variaciones a la vez, ya que refleja mayor creatividad de la persona.

Por otra parte, la Creación de Problemas de matemáticas por variación, se propone una estrategia la cual es creación del Dr. Uldarico Malaspina. La estrategia consiste en: Estrategia en clase, Problema pre, Problema pos, llamada Estrategia EPP. La metodología de enseñanza de Creación de Problemas por variación de Malaspina (2017), a grandes rasgos consiste en: (i) Información básica**,** (ii) Episodio en clase, (iii) Problemas Pre y Problemas Pos, (iv) Trabajos individuales y grupales sobre Creación de Problemas y (v) Socialización con todos los participantes.

Por otra parte, en el estudio de Malaspina (2014), se menciona algunas ventajas que tienen los estudiantes en el aprendizaje al crear problemas. Algunas de las ventajas es que contribuyen a desarrollar la creatividad, motiva a los estudiantes al estudio, fortalece las capacidades de resolver problemas, de formular preguntas, de identificar problemas y de investigar, así como ver aspectos matemáticos en el medio que los rodea, establecer conexiones entre las matemáticas y otros campos del conocimiento, ampliar la visión de las matemáticas, adquirir una formación matemática más sólida (con experiencias que van más allá de lo operativo y de los problemas tipo), y fortalecer la autoestima del alumno.

Otra de las ventajas que brinda la Creación de Problemas es que ayuda a iniciar a los estudiantes en la investigación, ya que los motiva a descubrir e innovar conocimientos y elementos que la sociedad actual necesita.

La Creación de Problemas por parte de los alumnos es de suma importancia principalmente, la construcción de conocimientos ya que motiva el estudio, fortalece las capacidades que tiene el estudiante para resolver un problema. Para llevar a cabo esta actividad de crear problemas el estudiante debe formular preguntas, identificar problemas y ampliar la visión matemática (Malaspina, 2013).

Asimismo, la Creación de Problemas tiene gran potencialidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que contribuye a desarrollar el pensamiento matemático de quien los crea y amplía su horizonte matemático. Es por ello que se considera importante que los profesores desarrollen la capacidad para crear problemas ya que de esta manera induciría a sus alumnos al aprendizaje mediante esta actividad (Malaspina, 2016).

Analizando diversas investigaciones, la Creación de Problemas se ha abordado únicamente con alumnos en los niveles básicos de educación y con profesores en activo y en formación de nivel básico. Los temas matemáticos que se abordan son problemas aritméticos de adición y sustracción de números naturales en educación primaria, números, operaciones y funciones, en nivel secundaria. La revisión literaria realizada no arrojó investigaciones de Creación de Problemas por variación realizadas en el nivel superior con el tema matemático de optimización, es por ello que es de nuestro interés abordar dicho tema en el nivel superior.

Algunos hallazgos encontrados en Malaspina (2015) mediante la Creación de Problemas son, en el caso de los profesores, que genera una dinámica matemática acompañada de lo didáctico, cuyas fronteras son difíciles de predecir. Asimismo, se han encontrado algunos casos de descubrimiento de nuevos horizontes matemáticos y contribuye a desarrollar el pensamiento matemático de quien los crea.

Se ha encontrado en Malaspina (2017) que en el proceso de Creación de Problemas con propósitos didácticos, mediante la estrategia ERPP (Episodio, Reflexión didáctica, Problema pre, Problema Pos), la reflexión didáctica desarrollada usando las configuraciones epistémica y cognitiva contribuye a crear más adecuadamente un Problema Pre. Asimismo, contribuye a fortalecer la competencia de análisis e intervención didáctica considerada en el modelo del conocimiento Didáctico Matemático.

Por otra parte, Salazar (2015) menciona que el diseño de una secuencia de tareas basadas en Creación de Problemas y uso de material concreto, para introducir el concepto de grupo como estructura algebraica, muestran que los estudiantes logran reafirmar los conocimientos matemáticos. También menciona que los futuros docentes pueden desarrollar la habilidad de formular problemas que respondan a un objetivo específico y a su vez reflexionen sobre la actividad matemática.

Asimismo, Chamoso y Cáceres (2019) nos dice que la creación de tareas matemáticas a partir de contextos reales puede ser un elemento formativo para futuros docentes e incluso convertirse en un eje de formación. Evidencian que la aplicación de esta metodología consiguió una alta motivación en los estudiantes ante las posibilidades que ofrecen los contextos reales para aprender matemáticas.

De acuerdo con el cuestionamiento que se hace Malaspina, ¿Por qué aprender y enseñar matemáticas resolviendo sólo problemas que otros crearon? Es por ello que en este trabajo se está proponiendo la Creación de Problemas y no solo la resolución de los mismos, ya que el examinar y resolver problemas creados individual o grupalmente potencia los procesos de enseñanza y aprendizaje, estimula el desarrollo del pensamiento matemático, asimismo contribuye a ampliar su horizonte matemático y a iniciarlo en la investigación y en el hacer matemáticas.

Tomando en consideración lo anteriormente analizado, la Creación de Problemas tiene muchas ventajas tanto en la enseñanza, en la investigación y en el aprendizaje, ya en profesores o en estudiantes. La Creación de Problemas contribuye en gran medida a desarrollar el pensamiento matemático de quien los crea y a ampliar su horizonte matemático. Con base en el análisis realizado, nos podemos percatar de que no se ha realizado un análisis de cómo se lleva a cabo la construcción del conocimiento matemático para observar cuales son los Objetos Matemáticos Primarios, los sistemas de prácticas y los procesos cognitivos implicados al momento de crear un problema, así como se relacionan las prácticas.

1.6 Problema de investigación

En la investigación de Baccelli et al. (2014) se menciona que los alumnos fracasan al momento de resolver problemas de optimización; evidenciando dificultades en el planteamiento y desarrollo del problema. Aunado a lo anterior, Malaspina (2013) explica que en las clases de matemáticas se estimulan las respuestas de los alumnos a preguntas que realiza el profesor, pero se presta poca atención a que los estudiantes formulen preguntas o bien se deja de lado la creatividad proactiva al no estimular que ellos avancen en sus aprendizajes creando sus propios problemas de matemáticas. Lo anterior según este autor es fundamental para desarrollar su actitud crítica y su pensamiento científico y para que la creatividad se manifieste reactivamente.

Como se menciona en Luna et al. (2013) la mala comprensión de algunos temas de cálculo diferencial en los alumnos se debe a las clases tradicionales que imparten los profesores mediante definiciones, aplicación de fórmulas y algoritmos. Por otra parte, analizando el tratamiento de los tres libros de texto, se puede observar que el tratamiento es similar y que esto contribuye a la enseñanza tradicional ya que solamente presentan ejercicios típicos donde se construye una caja con el máximo o mínimo volumen y no inducen a la reflexión y es por ello que se encuentran dificultades en la argumentación y justificación debido a que solamente se propicia la aplicación de fórmulas y conceptos. Asimismo, se proporcionan una serie de pasos para resolver los problemas planteados, además, el tipo de tareas más usados en la optimización y que se emplean con mayor frecuencia son ejercicios de la geometría plana (distancia, ángulo, perímetro y área), geometría espacial (dimensionar figuras e inscribir/circunscribir unas en otras), funciones y números.

Los estudiantes no comprenden qué es la optimización, y la asocian a un proceso algorítmico sin una reflexión de sus modificaciones que lleva a una postura crítica y creativa del mismo. Los estudiantes consideran que optimizar implica solamente la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mediante la realización de un algoritmo. A este tipo de optimización se puede considerar como optimización clásica. Sin embargo, ante situaciones ligeramente distintas de las que se presentan en los libros de textos, los alumnos se muestran incapaces de resolver dichos problemas y mucho menos a repensarlos.

Es por ello que el problema de investigación es que con gran frecuencia se ha planteado problemas convencionales de optimización mediante la resolución de problemas y no se cuestiona acerca de alguna interpretación que se pudiese dar de esos resultados o de alguna dificultad que se pudiese presentar. Asimismo, se presta poca atención a que los estudiantes formulen preguntas.

1.7 Justificación

La investigación educativa se ha convertido en un factor importante para el crecimiento de las universidades en la búsqueda de solución a las problemáticas académicas que enfrentamos hoy día.

Existen dificultades a las que se enfrentan los alumnos de todos los niveles de educación con respecto al aprendizaje de las Matemáticas, ya que a muchos alumnos les presenta gran dificultad el comprender temas matemáticos. La mayoría de ellos no profundiza en el análisis de la resolución de problemas, ocasionando que apliquen únicamente un algoritmo para resolverlos.

La problemática surge a partir de varios factores, entre ellas la metodología tradicional empleada para la enseñanza de las matemáticas, ya que se considera un factor muy importante que influye en la obtención de los malos resultados arrojados por los estudiantes, porque solamente se les presenta los conceptos matemáticos mediante definiciones y fórmulas, generando en los estudiantes prácticas memorísticas de aprendizaje e impidiendo el análisis y la reflexión.

Según Malaspina (2013), la resolución de problemas ha sido el enfoque predominante en la enseñanza de la matemática, de tal manera que se han elaborado diversas teorías y metodologías de enseñanza y aprendizaje con la intención de promover una enseñanza más acorde a las necesidades de cada época. Asimismo, menciona que ésta ha sido identificada en el ámbito académico, como un importante campo de estudio dentro la educación matemática y que dicho interés se muestra en algunas investigaciones en donde consideran que se debe instruir a los estudiantes en la resolución de problemas, así como también en la Creación de Problemas.

Es por ello que nuestra investigación tiene una connotación de cómo se organiza la creación de un problema en un grupo de nivel superior. Aquí se toma en cuenta la metodología empleada por el autor Malaspina para la Creación de Problemas por variación, considerando que el autor no ha analizado los Objetos Matemáticos Primarios y su relación, así como los procesos cognitivos que se ponen en juego.

Por lo tanto, la finalidad de esta investigación es considerar la interpretación de la técnica del Mapa Híbrido, el cual se ha empleado para visualizar la actividad matemática en la resolución de problemas (Moreno, 2019) más no se ha hecho para la Creación de Problemas. Es por ello que se considera un elemento relevante dentro de este trabajo de investigación, empleando dicha técnica a partir las producciones orales y escritas de los estudiantes cuando ellos crean problemas de optimización. Asimismo, tampoco el autor Malaspina lo ha realizado, si bien ha trabajado la Creación de Problemas, él no ha empleado la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido y no se han encontrado investigaciones que hayan empleado esta interpretación de la técnica del Mapa Híbrido en la Creación de Problemas por parte de otros autores. De ahí que el trabajo de investigación sea novedoso y resulta interesante observar cuáles serían las distintas conexiones entre los Objetos Matemáticos y procesos implicados en la construcción del conocimiento matemático relacionado con la actividad de Creación de Problemas. Por otra parte, no se ha realizado estudios en los temas matemáticos de optimización en el nivel de educación superior.

CAPÍTULO 2

HIPÓTESIS, PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN, OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan la hipótesis planteada y las preguntas de investigación asociadas a la hipótesis. En un primer momento se describen los aspectos que dieron origen a la hipótesis, luego se plantean las preguntas de investigación y, por último, se describen el objetivo general y los objetivos específicos que permitirán orientar los aspectos teóricos y metodológicos del trabajo.

2.2 Descripción de la hipótesis y las preguntas de investigación

Se ha señalado anteriormente que entre los factores que influyen en la obtención de los malos resultados que arrojan los estudiantes cuando resuelven un problema de optimización, se encuentran la falta de comprensión y una inadecuada organización del proceso de resolución del problema, por lo cual, se considera que una manera de ayudar a los alumnos a superar dichas dificultades es a través del empleo de Creación de Problemas, analizando mediante los Mapas Híbridos la construcción de conocimiento, la cual tiene que ver con qué objetos matemáticos, procesos, facetas y significados implica el sujeto en la creación del problema. Con base en estos elementos se plantean la siguiente hipótesis.

Hipótesis. La implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación permite construir conocimiento matemático relacionado con la optimización.

El estudio de la construcción de conocimiento matemático de optimización mediante la metodología de Creación de Problemas supone, por un lado, conocer qué concepción generan los estudiantes a través de un proceso de enseñanza que se apoya en dicha metodología y, por otro lado, cómo dicho conocimiento emerge a través de la práctica de Creación de Problemas. Por lo tanto, de esta hipótesis se desprenden las siguientes dos preguntas de investigación.

Para conocer el impacto de la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación, en la investigación se indagará a un grupo de estudiantes universitarios. Primero se experimentará en el marco de la enseñanza tradicional en el que se resuelve un problema de optimización y posteriormente se experimentará con la metodología de Creación de Problemas por variación. Con esto en mente se planteó la primera pregunta de investigación.

1. ¿Qué concepción construyen los estudiantes acerca de la optimización a partir de la Creación de Problemas?

La implementación de la metodología de Creación de Problemas de optimización por variación en la clase de Cálculo Diferencial involucra cierto conjunto de Objetos Matemáticos y procesos cognitivos, se considera entonces necesario plantear la tarea de analizarlos y describirlos a través del uso de la herramienta gráfica del Mapa Híbrido. Esto motivó el planteamiento de la segunda pregunta de investigación.

2. ¿Cómo se construye el conocimiento de optimización con universitarios mediante la Creación de Problemas?

Para responder a las preguntas anteriores, en esta investigación se considera a la interpretación de la técnica del Mapa Híbrido desde el EOS para analizar y describir la actividad matemática implicada en la Creación de Problemas por variación. Se ha reportado en la literatura que la interpretación Ontosemiótico del Mapa Híbrido permite describir el sistema de prácticas presentes en la resolución de problemas, así como también permite advertir los distintos Objetos Matemáticos (argumentos, conceptos, procedimientos, propiedades, lenguaje), las relaciones entre dichos objetos, la organización de las prácticas y la realización de algunos procesos cognitivos y significado. Con base en lo anterior, en el contexto de la Creación de Problemas, se empleará la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido para analizar la construcción del conocimiento, por lo cual se plantea el siguiente objetivo general.

2.3 Objetivo General y objetivos específicos

***Objetivo general*.** Caracterizar de forma gráfica la construcción de conocimiento referente a la optimización a partir de la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación adaptada al contexto virtual, mediante la identificación de los Objetos Matemáticos y sus conexiones, los procesos cognitivos implicados y las prácticas que intervienen.

Este objetivo me permite indagar qué conocimiento sobre la optimización se construye a partir de la implementación de la Creación de Problemas a través de los sistemas de prácticas representados y procesos que se logran advertir mediante los Mapas Híbridos y, también, cómo este conocimiento sobre la optimización es construido a partir de las funciones semióticas o conexiones que se representan en los Mapas Híbridos.

Para llevar a cabo el objetivo general descrito anteriormente, se concreta el estudio con un grupo de estudiantes universitarios que cursan la Licenciatura en Actuaría, por lo cual se plantean los siguientes objetivos específicos.

Los siguientes dos objetivos específicos, objetivo 1 y 2, permiten responder la pregunta de qué conocimiento matemático de optimización se construye, ya que están enfocados en la implementan las etapas de la metodología de la Creación de Problemas por variación adaptada en el contexto virtual y se realiza una entrevista a los estudiantes para conocer más sobre sus producciones.

Objetivo específico 1. Proponer actividades de Creación de Problemas por variación de optimización no convencionales, dicha metodología adaptada al contexto virtual, a los alumnos de nivel superior de la Licenciatura en Actuaría que cursan la asignatura de Cálculo Integral.

Si bien es importante considerar las producciones orales y escritas de los estudiantes, también es de nuestro interés conocer sus reacciones de acuerdo al problema presentado, si se les hizo complicado, fácil o si se les presentó dificultades. Es por ello que se plantea el segundo objetivo específico.

Objetivo específico 2. Entrevista a algunos estudiantes para conocer más sobre los resultados obtenidos.

Por último, los siguientes objetivos, objetivos 3, 4 y 5, nos permiten responder la segunda pregunta de investigación, debido a que estos están enfocados en los mecanismos por los cuales se construyó el conocimiento.

Además, es necesario conocer el impacto de la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación y comparar los resultados obtenidos. Para ello se plantea el tercer objetivo específico.

Objetivo específico 3. Clasificar los resultados obtenidos de las producciones de los alumnos.

Una vez implementada la metodología de la Creación de Problemas por variación, y obtenidas las producciones orales y escritas, se considera necesario analizarlos mediante la herramienta gráfica del Mapa Híbrido. Es por ello que se plantea el cuarto objetivo específico.

Objetivo específico 4. Generar Mapas Híbridos a partir de las producciones de los estudiantes cuando crean problemas.

Una vez analizadas las producciones orales y escritas de los estudiantes y generados los Mapas Híbridos, es necesario analizar los Mapas Híbridos desde algunos elementos del EOS. Con esto en mente se plantea el quinto objetivo específico.

Objetivo específico 5. Analizar los Mapas Híbridos construidos, a partir de algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico

La realización de los objetivos específicos anteriores, permiten concretar el objetivo general. Para poner en marcha los objetivos específicos, en el siguiente capítulo se describe el marco teórico de la investigación.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

3.1 Introducción

En el presente capítulo se tratan los aspectos teóricos de la investigación la cual es una interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido, la cual está constituida por algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS de ahora en adelante). Los elementos teóricos que son considerados en este trabajo serán de gran utilidad para caracterizar la construcción del conocimiento de los estudiantes referente a la optimización a partir de la implementación de la metodología de la Creación de Problemas mediante la identificación de las prácticas que intervienen, los Objetos Primarios Matemáticos y sus conexiones y los procesos cognitivos.

En primera instancia en el apartado 3.2 se presentan algunos elementos teóricos del EOS propuesta por el investigador Juan D. Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino et al., 2007), en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, posteriormente en la sección 3.3 se describe la técnica de los Mapas Híbridos, en el apartado 3.4 se describe la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido y por último en la sección 3.5 la Creación de Problemas desde el la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido.

3.2 Algunos elementos teóricos del EOS

La teoría empleada en esta investigación proviene de la Matemática Educativa. Actualmente el EOS propone un conjunto de elementos teóricos que pueden ser clasificados en cinco ejes o grupos: (i) sistema de prácticas, (ii) configuración de objetos y procesos matemáticos, (iii) configuración didáctica, (iv) la dimensión normativa e (v) idoneidad didáctica. Estos ejes permiten estudiar diversos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. En la presente investigación nos apoyaremos en los Objetos Matemáticos primarios, prácticas y sistemas de prácticas, procesos cognitivos y algunas perspectivas duales, estos se describen a continuación. Lo anterior dado que se pretende caracterizar la construcción de conocimiento referente a la optimización a partir de la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación mediante la identificación de los Objetos Matemáticos y sus conexiones, los procesos cognitivos implicados y las prácticas que intervienen.

3.2.1 Prácticas y Sistema de prácticas

Se considera una práctica matemática a toda actuación o expresión que puede ser verbal o gráfica, realizada por un sujeto para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Asimismo, en el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas (Godino y Batanero, 1994).

Las prácticas pueden ser realizadas por una persona o realizadas en el seno de una institución. Desde la perspectiva del EOS, cuando un sujeto resuelve un problema físico-matemático implica la realización de un sistema de prácticas donde hace uso de un conjunto de Objetos Matemáticos Primarios que son: conceptos, lenguaje, propiedades, procedimientos, argumentos y situación-problema.

La noción de sistema de prácticas es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Además los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos físico-matemáticos, ya sea en su interpretación personal o institucional (D'Amore y Godino, 2007).

3.2.2 Objetos Primarios Matemáticos

EL EOS define como Objeto Primario Matemático los componentes (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) del conocimiento para la realización y evaluación de una práctica que permite resolver una situación-problema en la cual se observa el uso de lenguajes que pueden ser verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias (Font y Godino, 2006).

Los Objetos Matemáticos Primarios son los conceptos, lenguaje, propiedades, los procedimientos y argumentos, los cuales se describen a continuación:

- **Conceptos:** estos son introducidos mediante definiciones, tales como el concepto de máximo, mínimo, derivada, integral, entre otros.

- **Lenguaje:** se refiere a las notaciones, expresiones, gráficos (que pueden ser esquemas, representaciones pictóricas, por mencionar algunas) y que se pueden dar en forma oral, escrita o gesticulación.

- **Propiedades:** son argumentos que permiten relacionar conceptos y que suelen darse como enunciados o proposiciones. Como ejemplo de propiedades se tiene las propiedades de los límites o de la derivada.

- **Procedimientos:** son algoritmos, operaciones, etc., que emplea el sujeto para resolver una tarea.

- **Argumentos:** son enunciados de tipo justificativo que se emplea o dice para justificar procedimientos.

- **Situación-problema:** son las tareas, ejercicios, etc.

En el EOS los Objetos Matemáticos Primarios están relacionados entre sí formando configuraciones, las cuales están definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos y no ostensivos, y que son representados en forma textual, oral, gráfica o gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas surgen nuevos objetos que provienen de ellas y dan cuenta de su organización y estructura. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", si tales sistemas corresponden a una persona, los consideramos como "objetos personales" (Font, 2007).

Dichas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales), o cognitivas (redes de objetos personales) (Godino et al., 2009). Los objetos institucionales (OI) es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de OI. En cambio el objeto personal (Op) es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994).

3.2.3 Perspectivas duales

Los objetos primarios y las configuraciones de objetos pueden ser vistas o interpretadas desde cinco perspectivas, dimensiones o dualidades (Font, Godino, y D'Amore, 2007; Godino, 2003; Godino, 2002).

- **Personal-institucional:** la cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas, es decir, son las distintas formas en que los objetos primarios y las prácticas o los procesos cognitivos se pueden ver.

Si un sujeto es quien resuelve una tarea (por ejemplo, la descripción de un fenómeno, la resolución de un problema o la elaboración de una gráfica), esa práctica es de tipo personal, en cambio si esas tareas son realizadas dentro de una institución, a través de la resolución que propone un experto docente, un investigador o se encuentra resuelto en un libro de texto, esa práctica es considerado de tipo institucional.

- **Unitario-sistémico:** en algunas circunstancias los Objetos Matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. Los conceptos tienen una perspectiva unitaria o sistémica. Sistémico a cerca de los elementos constituyentes, que es como se aprende y la perspectiva unitaria no interesa de que esté constituido, se ve como una unidad y se aplica en diferentes circunstancias.

- **Ostensivo-no ostensivo:** podemos entender por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro, es decir lo ostensivo es cualquier objeto que es observable por cualquier sujeto, y no ostensivo es algo que tiene en la mente el sujeto.

- **Extensivo-intensivo:** se entiende por extensivo algo concreto y como intensivo algo abstracto y permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general.

- **Expresión-contenido:** antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los Objetos Matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

  La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los Objetos Matemáticos se caracterizan por ser relacionales. Esto está dado a través de la correspondencia entre una expresión y un significado, los cuales están establecidos por un sujeto (persona o institución).

3.2.4 Procesos cognitivos

En el EOS se considera que un proceso matemático es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada. Es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada) (Font y Rubio, 2017).

Según el EOS, diversos procesos cognitivos también son llevados a cabo a lo largo de la práctica de resolución de un problema, los cuales se encuentra asociados a las cinco dualidades (Font et al., 2007; Godino, 2003; Godino, 2002).

- **Materialización-idealización**: estos procesos se encuentran asociados a la dualidad ostensivo-no ostensivo, puesto que cuando un sujeto idealiza algo pasa de lo concreto a lo abstracto, es decir, pasa de lo ostensivo a lo no ostensivo y viceversa, cuando materializa va de lo abstracto a lo concreto. El vínculo entre ambos objetos (entre el objeto ostensivo y el no ostensivo) es establecido a través de una función semiótica.

- **Institucionalización–personalización:** estos se encuentran asociados a la dualidad institucional-personal, debido a que cuando un sujeto va de lo personal a lo institucional se llama institucionalización y si se va de lo institucional a lo personal se llama personalización.

- **Representación–significación:** estos procesos están asociados a las dualidades expresión/contenido, debido a que cuando un sujeto va de la expresión al contenido, se lleva a cabo un proceso de significación, y si se va del contenido a la expresión se le llama representación.

- **Generalización-particularización:** estos procesos están asociados a la dualidad extensivo/intensivo, puesto que cuando un sujeto va de lo intensivo a lo extensivo lleva a cabo un proceso de particularización, y viceversa, cuando se va de lo extensivo a lo intensivo se le llama generalización.

- **Descomposición-reificación:** estos procesos están asociados a la dualidad sistémico/unitario, puesto que cuando un sujeto va de lo sistémico a lo unitario lleva a cabo un proceso de reificación, y si se va de lo unitario a lo sistémico se llama descomposición.

3.2.5 Funciones Semióticas

El EOS considera que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), además de que permite también entender la comprensión en términos de funciones semióticas.

La noción de función semiótica permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O (sea ostensivo o no ostensivo, elemental o sistémico, etc.) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego O como funtivo. Cada función semiótica implica un acto de semiósis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo (Godino, 2003).

3.3 La técnica del Mapa Híbrido

El trabajo de investigación se apoya en los Mapas Híbridos, los cuales son interpretados a la luz del EOS. La técnica del mapa híbrido es una técnica es a su vez una combinación de dos técnicas, la técnica de mapas conceptuales y la técnica del diagrama de flujo. En las siguientes secciones se abordan las técnicas del Mapa Conceptual, el Diagrama de Flujo y el Mapa Híbrido, posteriormente se describe la manera en la que se ha interpretado el Mapa Híbrido tomando en cuenta los elementos teóricos del EOS.

3.3.1 El Mapa Conceptual

El mapa conceptual es una red de conceptos ordenados jerárquicamente, en el que la interconexión de los conceptos, mediante las ligas y frases de enlace, produce una red de estructuras proposicionales donde el significado no sólo se encuentra en la relación entre concepto y concepto, sino que se extiende a las relaciones que a su vez estos conceptos tienen con otros conceptos. El orden de estas relaciones está orientado por un dominio de conocimiento a partir del cual es posible señalar las relaciones verdaderas conforme al conocimiento de referencia. El mapa conceptual puede ser elaborado a partir de un texto mediante una transformación de los registros (Aguilar, 2006).

Los mapas conceptuales tienen como propósito representar las relaciones significativas entre conceptos, se compone de proposiciones las cuales están formadas por conectores y conceptos en los cuales se expresan regularidades entre objetos y acontecimientos. Por otra parte, el mapa conceptual se caracteriza por tener un impacto visual, por tener jerarquías de conceptos, donde sobresalen conceptos relevantes. Además, tiene características específicas que lo diferencian de otras técnicas como el mapa mental, cuadro sinóptico, diagramas de flujo, etc., dichas características son los conceptos, las ligas entre conceptos, las palabras de enlace y la construcción de proposiciones.

El mapa conceptual puede desempeñar diversas funciones en el proceso de enseñanza, algunas pueden ser un esquema general sobre el tema a desarrollar en una clase o un curso, una herramienta de diagnóstico, una herramienta de evaluación, estrategia y dinámica grupal para facilitar la negociación de significados, así como una herramienta para el aprendizaje como un método de estudio.

3.3.2 El Diagrama de Flujo

El Diagrama de Flujo tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, es empleado para guiar tratamientos médicos, para el desarrollo de software, para el mejoramiento de la calidad en la industria, entre otros. En el contexto de las matemáticas, el Diagrama de Flujo sirve para describir qué operaciones y la secuencia en la que estas operaciones se tienen que llevar a cabo para la solución de un problema y, a diferencia del Mapa Conceptual, no presenta una estructura jerárquica conceptual. El Diagrama de Flujo tiene la finalidad de mostrar esquemáticamente los procedimientos, las relaciones entre las partes, permitiendo representar los pasos y la lógica ligada al logro de una meta (Macias, 2007).

3.3.3 La técnica del Mapa Híbrido

El desarrollo del mapa conceptual y su implementación en otros campos de conocimiento ha dado lugar a la fusión del mapa conceptual con otro tipo de representación como es el diagrama de flujo, dando lugar a la técnica de representación del Mapa Híbrido, propuesto por primera vez por (Moreno, 2017) para la descripción gráfica de resolución de problemas en modelación matemática.

En este trabajo nos apoyamos en la investigación de Moreno (2017) quien menciona que la interpretación de la técnica del Mapa Híbrido interpretado desde el EOS permite representar esquemáticamente o de manera gráfica el sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema matemático. En el Mapa Híbrido, la componente del mapa conceptual permite representar Objetos Matemáticos tales como conceptos, propiedades y argumentos, mientras que la componente del diagrama de flujo permite la representación del objeto procedimiento, el cual involucra a procesos matemáticos tales como el de tratamiento algebraico, numérico, entre otros.

Asimismo, la técnica de los Mapas Híbridos ha sido empleada para describir la actividad matemática en los contextos de la física y la química escolar, estos últimos a través de la adaptación de los elementos teóricos ontosemióticos a dichos contextos.

Aunado a lo anterior, Moreno, Hernández y Briceño (en prensa) mencionan que la interpretación del Mapa Híbrido a partir de la adaptación a la física escolar de algunos elementos del enfoque ontosemiótico, permite analizar la actividad físicomatemática involucrada cuando un sujeto resuelve un problema físico, ya que dicha interpretación permite analizar de manera gráfica la organización y la conexión de los objetos fisicomatemáticos, así como observar algunos procesos implicados en la resolución del problema y describir el operativismo ciego al interpretar la representación de los objetos fisicomatemáticos desde dos perspectivas, cognitiva/epistémica y ostensiva/no ostensiva.

Por otra parte, la técnica del Mapa Híbrido ha sido empleada para describir la actividad matemática en el contexto de la química escolar. Los autores Moreno, Ramirez y Torres (2021) mencionan que cuando un sujeto resuelve un problema químico, este lo descompone en subproblemas que el mismo sujeto resuelve mediante prácticas, las cuales son coordinadas en un sistema de prácticas, en el cual, se realizan procesos sobre objetos químicos y químico-matemáticos. En cuanto a los procesos sobre objetos químicos de naturaleza material, nos señala que son considerados como idealizaciones de la experiencia perceptual del sujeto en el laboratorio de las mediciones experimentales. De la misma manera, se menciona que algunos de los objetos químicos idealizados se relacionan mediante funciones semióticas con los objetos matemáticos, dando lugar a los objetos químico-matemáticos.

A diferencia del Mapa Conceptual que ha sido empleado tradicionalmente, las características del Mapa Híbrido y su interpretación a la luz del EOS permite emplearlo en el contexto de la enseñanza de la matemática y la física escolar, puesto que considera el desarrollo de manera gráfica de la componente procedimental.

3.3.3.1 Interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido

En este apartado, se consideran las investigaciones de Moreno, Aguilar y Villanueva (2017) y Moreno (2019).

Desde la perspectiva del EOS, el Mapa Híbrido es una representación ostensiva de la práctica de resolución de un problema de la matemática escolar que realiza un sujeto, lo cual permite representar a los Objetos Matemáticos Primarios y a su organización (Moreno et al., 2017). El Mapa Híbrido permite observar el empleo del lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos, obtenidos de las diferentes rutas de lectura que conforman enunciados que validan o explican las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo.

La interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido considera que los Objetos Matemáticos Primarios (conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) pueden ser representados de manera ostensiva (lenguaje) mediante el Mapa Híbrido. En el Mapa Híbrido, la componente del mapa conceptual permite la unión entre conceptos mediante palabras enlace, permite expresar propiedades y argumentos. El Objeto Matemático Primario procedimiento se presenta a través de la componente del Diagrama de Flujo del Mapa Híbrido. Desde el EOS, el Mapa Híbrido puede ser interpretado como una representación ostensiva del sistema de prácticas discursivas y operativas que lleva a cabo un sujeto al resolver un problema.

Según el EOS, el Mapa Híbrido puede ser entendido desde una perspectiva unitaria/sistémica, en donde, desde la perspectiva unitaria, las representaciones que se muestran en el mapa conceptual dan cuenta del establecimiento de funciones semióticas establecidas por el sujeto que resuelve el problema.

Por otro lado, algunos procesos cognitivos también pueden advertirse a través del Mapa Híbrido. El proceso de idealización puede ser "observado" mediante el paso de una jerarquía a otra de la componente del MC presente en el Mapa Híbrido. También es posible observar el proceso de argumentación, a través de las distintas rutas lecturas o el de tratamiento matemático mediante la componente de Diagrama de Flujo.

Por otra parte, Moreno (2019) menciona que tomando en cuenta la dualidad personal/institucional, el Mapa Híbrido puede interpretarse como un Mapa Híbrido epistémico o institucional cuando este se encuentre asociado a la producción de un docente experto. En cambio, si el Mapa Híbrido se encuentra asociado a la producción de un estudiante inexperto este es llamado Mapa Híbrido cognitivo o personal. Asimismo, el Mapa Híbrido correspondiente a un sistema de prácticas que permite la resolución de un problema no es único, por ejemplo, en la resolución de un mismo problema, distintos Mapas Híbridos epistémicos pueden ser elaborados a partir de las producciones de distintos docentes expertos. Del mismo modo menciona que al realizar una comparación de un Mapa Híbrido epistémico y un Mapa Híbrido cognitivo, podría aportar información muy importante acerca de las concepciones de cada sujeto a través de las diferencias o semejanzas entre los elementos de cada mapa.

Asimismo, el autor menciona que el significado en el Mapa Híbrido también es concebido a través de las nociones de función semiótica y de sistema de prácticas. La primera se apoya en la perspectiva dual expresión/contenido, la cual permite entender el significado como una relación de tipo representacional, es decir, se trata de una función semiótica que tiene como expresión al objeto lenguaje observable en el Mapa Híbrido (palabras, símbolo, expresión algebraica, entre otros) y como contenido a cualquiera de los Objetos Matemáticos Primarios no ostensivos restantes (conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos). Mediante la segunda, el significado puede ser entendido a través de la organización de prácticas más específicas (las cuales constituyen el sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema en un contexto concreto) que son realizadas con una determinada finalidad, con un determinado tipo de notación y que producen un determinado sentido.

De la misma manera, Moreno, Reducindo y Angulo (2018) mencionan que el MH-EOS puede ser empleado tanto para la enseñanza de matemática escolar mediante el enfoque por resolución de problemas. Asimismo, la interpretación Ontosemiótico del Mapa Híbrido podría ser empleado como una herramienta para promover el trabajo colaborativo entre los estudiantes o entre los estudiantes y el profesor, ya que éste se puede emplear para indagar las concepciones de los estudiantes o de los docentes. De la misma manera, se menciona que el Mapa Híbrido puede ser empleado en distintos niveles educativos permitiendo evidenciar ciertos aspectos del conocimiento.

3.4 La Creación de Problemas desde la interpretación ontosemiótico del Mapa Híbrido

Esta investigación plantea la propuesta innovadora de que la interpretación ontosemiótica de la técnica del Mapa Híbrido podría mostrar las distintas conexiones entre los Objetos Matemáticos y procesos implicados en la construcción del conocimiento matemático relacionado con la actividad de Creación de Problemas, presentes en la producción oral y escrita generada por algunos estudiantes. Con lo anterior se pretende estudiar cómo se lleva a cabo la construcción del conocimiento matemático mediante la realización de tareas que implican la Creación de Problemas, tomando en cuenta la interpretación Ontosemiótico del Mapa Híbrido para observar las conexiones entre los Objetos Matemáticos y procesos implicados que ayuden a plantear estrategias didácticas en la comprensión de tareas de optimización.

La interpretación ontosemiótico del Mapa Híbrido empleada para analizar la producción oral y escrita generada por algunos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de la creación puede describir el sistema de prácticas presentes en la resolución de situaciones problematizadas de la matemática que se estudian en el aula, asimismo permite visualizar los distintos Objetos Matemáticos, las relaciones entre dichos objetos, la organización de las prácticas y permite advertir la realización de algunos procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas.

La propuesta se presenta como una idea innovadora, ya que no se ha empleado la técnica de representación gráfica para analizar las producciones oral y escrita por parte de los estudiantes al crear sus propios problemas de optimización. Aquí se incluyen algunos elementos importantes como son la interpretación Ontosemiótico del Mapa Híbrido, la Creación de Problemas y la optimización, los cuales se han estudiado de manera separada.

Teniendo en cuenta la problemática descrita, las hipótesis planteadas, el diseño del objetivo principal y los objetivos específicos y la descripción del marco teórico, se comenzó con el diseño e implementación de la presente investigación, la cual es descrita a grandes rasgos en los siguientes capítulos.

Con base en todo lo planteado en este capítulo, se considera importante incluir la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido para analizar la producción oral y escrita generada por algunos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de la Creación de Problemas, ya que mediante la interpretación Ontosemiótico del Mapa Híbrido se puede describir el sistema de prácticas presentes en la resolución de situaciones problematizadas de la matemática que se estudian en el aula, asimismo permite visualizar los distintos Objetos Matemáticos, las relaciones entre dichos objetos, la organización de las prácticas y permite advertir la realización de algunos procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas (Moreno, 2019).

Asimismo, resulta novedoso considerar la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido, ya que ésta se ha empleado para la resolución de problemas (Moreno, 2017; 2018a; 2018b) más no se ha hecho para la Creación de Problemas y lo que se realizara en este estudio es aplicar dicha técnica para la Creación de Problemas.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

4.1 Introducción

Este apartado describe los aspectos metodológicos de la investigación. Se expone la perspectiva metodológica y el diseño de la investigación que describe las distintas fases que se aplicaron en la investigación.

Se considera como método empleado en esta investigación, un estudio cualitativo de caso, en el que se indagó un grupo de alumnos de nivel superior. El enfoque es de tipo cualitativo debido a que es de nuestro interés saber si los estudiantes realizan y construyen las actividades de Creación de Problemas de optimización. Es decir, caracterizar la construcción de conocimiento referente a la optimización a partir de la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación para la identificación de los Objetos Matemáticos y sus conexiones, procesos cognitivos implicados y prácticas que intervienen. Asimismo, indagar las causas, motivaciones de los sujetos y la construcción del conocimiento en forma grupal al crear problemas. En cuanto a la temporalidad de la investigación se considera transversal, ya que se realiza en un único momento.

Por otra parte, es importante señalar que la metodología de Creación de Problemas se adaptó al contexto virtual debido a la pandemia que se vive a nivel mundial, ya que dicha metodología está diseñada para llevarse a cabo en el contexto presencial, pero en el caso de esta investigación, se realizó una adaptación de la metodología al contexto virtual. Esta adaptación trata de no mirar a las TIC´s como un medio de comunicación, sino también como una herramienta para la construcción de conocimiento.

Respecto a la investigación cualitativa, se emplea cuando se tiene una realidad que es subjetiva y múltiple, en ella el investigador está inmerso en el contexto de interacción que desea investigar, asumiendo que sus valores forman parte del proceso de conocimiento y reflexión de ello (reflexividad) con un énfasis en aspectos epistemológicos. En general, las investigaciones cualitativas enfatizan la discusión del paradigma y los principios que sustentan la posición metodológica (Sautu, Boniolo, Dalle y Elbert, 2005). Es por ello que esta investigación se considera cualitativa, ya que los resultados que se presentaran en el trabajo no son medibles a través de datos numéricos sino de categorías establecidas conceptualmente mediante el marco teórico del EOS.

Merriam (1998) sugiere que en la investigación educativa prevalecen cinco tipos de investigación cualitativa: estudios cualitativos básicos o genéricos, etnografía, fenomenología, teoría fundamentada y estudio de casos. Consideramos necesario describir en qué consiste este último tipo de investigación cualitativa como parte de este proyecto de investigación.

4.2 Estudio de casos

Los estudios de caso son descripciones y análisis intensivos de unidades simples o de sistemas delimitados tales como un individuo, un programa, un acontecimiento, un grupo, una intervención o una comunidad (Simith, 1978). El estudio de casos se utiliza para obtener una comprensión más profunda de una situación y de su significado para los implicados. En este estudio se pone mayor énfasis en el proceso que en el producto, así como en el contexto más que en la variante específica y en el descubrimiento más que en la confirmación (Canedo, 2009).

El estudio de casos se caracteriza principalmente por ser particularista, es decir, se enfoca en una situación, acontecimiento o fenómeno particular. También es de tipo descriptivo ya que el producto final es una descripción rica y densa del fenómeno bajo estudio; y heurístico ya que ilumina al investigador en la comprensión del fenómeno bajo estudio y puede dar lugar al descubrimiento de nuevos significados, así como a ampliar la experiencia del investigador o reafirmar lo que ya sabe (Canedo, 2009). Por otra parte es un estudio de una entidad simple, una unidad alrededor de la cual existen fronteras. El estudio de casos puede ser de diversos tipos: etnográficos, históricos, psicológicos y sociológicos, esto depende de la orientación disciplinar o de la intención general del estudio. Asimismo, los estudios de casos se pueden clasificar en descriptivos, interpretativos y evaluativos, esto tomando en cuenta la intención general del estudio (Merriam, 1998).

Para esta investigación, el estudio de caso es de tipo etnográfico, ya que se enfoca en la cultura de una escuela, la cual es la Universidad Autónoma de Zacatecas, con un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Actuaría y en el contexto de un taller. También es considerada como un estudio de caso descriptivo, ya que se explica detalladamente el fenómeno bajo estudio, interpretativo porque se lleva a cabo una descripción rica y densa de los datos se utilizan para desarrollar categorías conceptuales, que son interpretados con elementos teóricos (EOS) para la recopilación de datos. El caso de esta investigación es la caracterización de la construcción de conocimiento referente a la optimización a partir de la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación adaptada al contexto virtual.

4.3 Estudio de tipo transversal

El estudio se considera de tipo transversal, ya que se realizó en un solo momento del tiempo. En los diseños de investigación transversal se recolectan datos en un solo momento, en donde su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado (Hernández, 2014, p.154).

También se menciona que los diseños transversales se dividen en tres tipos, los cuales son: Exploratorios, Descriptivos y Correlacionales-causales. Para el caso que nos interesa, describiremos solamente el diseño transversal de tipo descriptivo. Se dice que los diseños transversales descriptivos tienen como objetivo indagar la incidencia de las modalidades o niveles de una o más variables en una población. Asimismo, el procedimiento consiste en ubicar en una o diversas variables a un grupo de personas, objetos, situaciones, contextos, fenómenos, etc., y proporcionar su descripción (Hernández, 2014).

4.4 Metodología de Malaspina en el contexto virtual

En esta sección se presenta la correspondencia virtual de la metodología de Malaspina, en donde se recogió la producción oral y escrita por medios tecnológicos, es decir, la creación y variación de problemas se llevó a cabo mediante la plataforma virtual Zoom, todo realizado en tiempo real, ya que por motivo de la pandemia mundial, los cursos que se llevaron en las escuelas cuando se realizó la investigación fueron de manera virtual. Para extraer la producción oral y escrita fue a través de un medio virtual, con el uso de la plataforma Zoom.

Como se ha señalado, la metodología de Malaspina fue planteada para llevarse a cabo de manera presencial, pero dado la situación de la pandemia, en esta investigación se replanteó la metodología en el contexto virtual apoyado en la plataforma Zoom, haciendo uso de recursos que ofrece como: compartir pantalla, grabar videos del grupo en general y subgrupos, y las herramientas de anotación. Consideramos que no existe dificultad en la obtención de los datos debido a que las etapas de la metodología se han subsanado con lo virtual, es decir, a cada uno de los estudiantes de manera individual, se les proporcionaran la Etapa 1: Información básica, Etapa 2: Un episodio en clase y Etapa 3: Problemas pre, trabajos individuales. Posteriormente, a manera de equipos (se crean salas) se les aplicará la Etapa 4: Problemas pos, trabajos grupales sobre Creación de Problemas y la Etapa 5: Socialización. Ver figura 12.

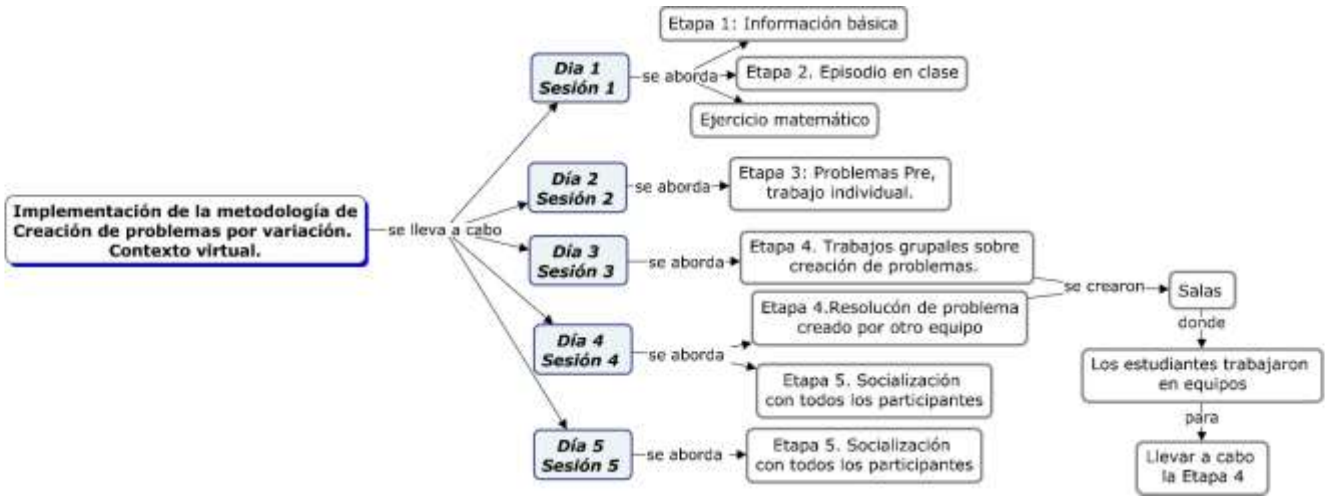


Figura 12. Diseño de la implementación de la metodología de la Creación de Problemas por variación en el contexto virtual

4.5 Diseño de la investigación

En el diseño de la investigación se considera, por un lado, la metodología de enseñanza de la Creación de Problemas por variación de Malaspina (2017), la cual consiste en:

- **Etapa 1. Información básica**

En esta fase, se hace una pequeña presentación en donde el profesor explica a los estudiantes sobre lo que significa Creación de Problemas, qué es la Creación de Problemas, qué elementos tiene un problema, y sobre todo, que se puede crear un problema, a partir de un problema dado modificando uno o más de los elementos presentes en el problema.

- **Etapa 2. Un episodio en clase**

En esta fase, el profesor les presenta a los estudiantes un problema ya elaborado, en donde se les explica en qué consiste el problema y a partir de esto, se hacen algunas anotaciones sobre cómo reaccionan los alumnos de acuerdo con el problema presentado, si se les hizo complicado o fácil.

- **Etapa 3. Problemas Pre y Problemas Pos**

Esta fase consiste en tres pasos. En primer lugar, el docente les pide a los alumnos que resuelvan el problema presentado anteriormente. Después se les pide a los estudiantes que propongan problemas modificando el problema dado, para que de esta manera su solución facilite la solución del problema dado y contribuya a clarificar las dudas de los estudiantes al resolver dicho problema o al intentar resolverlo. A estos nuevos problemas se les denomina *Problema Pre*. Finalmente, se les pide crear el *Problemas pos*, en donde se les pide a los estudiantes que propongan problemas modificando el problema dado, pero que estos nuevos problemas sean más retadores, de modo que desafíen a los estudiantes más allá de la obtención de una solución correcta del problema del episodio.

- **Etapa 4. Trabajos individuales y grupales sobre Creación de Problemas**

Una vez que los estudiantes hayan realizado de manera individual sus Problemas pre y Problemas pos, deben de realizar lo mismo en grupos de dos o tres participantes. Una vez creado el problema por un grupo debe ser resuelto por el grupo autor y luego por otro grupo. El otro grupo debe resolver el problema planteado por el grupo autor conociendo sólo el enunciado de dicho problema. Los grupos reciben hojas especialmente diseñadas, en las que, se deben escribir críticas constructivas al problema creado por otro grupo.

- **Etapa 5. Socialización con todos los participantes**

Los participantes comparten con todos, en exposiciones breves, las razones didácticas y matemáticas involucradas tras el problema creado, ya sea en forma individual o grupal. También exponen el problema resuelto por un grupo, que no es el grupo autor de tal problema, expone su solución y hace sus comentarios críticos desde el punto de vista matemático y didáctico. El propósito es que la discusión con los autores de los problemas, así como los comentarios de los participantes y del instructor, contribuyan a mejorar la capacidad de crear problemas con potencialidades matemáticas y didácticas.

Por otro lado, también se toma en cuenta el contexto de los estudiantes con los cuales se realizó el estudio, es decir nos interesa también indagar los conocimientos previos y los que fueron construidos una vez que se empleó la Creación de Problemas. Por esto, se considera algunos aspectos la metodología de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) las cuales son: fase preliminar, fase de análisis a priori, fase de experimentación y fase de análisis posteriori. No obstante, el uso de dicha metodología no fue riguroso, pues se tenía el propósito únicamente de guiar las etapas de investigación en donde se indagaba la eficacia de la metodología de Creación de Problemas por variación. La manera en cómo se articulan ambas metodologías es la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación en la fase experimental de la Ingeniería Didáctica.

La implementación de la metodología de la Ingeniería Didáctica en esta investigación es adecuada, ya que nos interesa confrontar los análisis a priori, los cuales son los diseños de actividades y los análisis a posteriori sobre lo que se producen en la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación, como es la forma básica de validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Asimismo, la Ingeniería Didáctica se caracteriza por ser un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, Douady y Moreno, 1995).

Fase 1. Análisis preliminar

El análisis preliminar no se presenta como resultados, más bien forma parte de los antecedentes de este trabajo. En esta fase se indagó la revisión de libros de texto, programas de estudio y artículos de investigación, también se consideran algunos aspectos como son el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva, todo lo anteriormente mencionado se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación. Aquí se consideran las concepciones de los alumnos antes de la Creación de Problemas. Dicha revisión permitió reformular los problemas que se plantearon para llevar a cabo la Creación de Problemas por variación.

Con base en lo mencionado en el párrafo anterior, en esta fase se incluyen los siguientes aspectos:

1. Identificación del problema. Análisis del contexto educativo.
2. Se realiza una búsqueda de bibliografía para identificar cómo abordar el problema.
3. Revisión bibliográfica de libros de texto.
4. Se selecciona los problemas de optimización.

Fase 2. Concepción y análisis a priori

Esta fase permite identificar las variables que se van a observar y diseñar tareas para observar cada una de esas variables.

5. Identificar las variables
6. El diseño de tareas como son dos problemas de optimización aplicados a la economía, los cuales son problemas de tipo no convencional, y mediante estos, se permite

observar variables como son el algoritmo, significado del valor obtenido en la resolución del problema de optimización y los procesos cognitivos.

Fase 3. Experimentación

En esta fase se consideran la Creación de Problemas, las sesiones, los tiempos, cómo se organiza la experimentación, cómo se recolectan datos y la implementación de la metodología de Malaspina (2017).

7. En una primera sesión, se les pide a los alumnos que resuelvan, a manera de diagnóstico y de manera tradicional, el problema de la radio.

8. En una segunda sesión, se considera el Episodio 1: Información básica**.** En esta fase, se hace una pequeña presentación en donde el profesor explica a los estudiantes sobre lo que significa la Creación de Problemas, qué es la Creación de Problemas, qué elementos tiene un problema, y sobre todo, que se puede crear un problema, a partir de un problema dado modificando uno o más de los elementos presentes en el problema. Asimismo, se aplica la Etapa 2: episodio en clase. En esta fase, el profesor les presenta a los estudiantes un problema matemático ya elaborado, en donde se les explica en qué consiste el problema y a partir de esto, se hacen algunas anotaciones sobre cómo reaccionan los alumnos de acuerdo al problema presentado, si se les hizo complicado o fácil.

9. Etapa 3: Problemas Pre y Problemas Pos. Esta fase consiste en tres pasos. En primer lugar, el investigador les pide a los alumnos que resuelvan el problema del cono. Después se les pide a los estudiantes que propongan problemas modificando el problema dado, para que de esta manera su solución facilite la solución del problema dado y contribuya a clarificar las dudas de los estudiantes al resolver dicho problema o al intentar resolverlo, a estos nuevos problemas se les denomina *Problema Pre*. Finalmente se les pide crear el *Problemas pos*, en donde se les pide a los estudiantes que propongan problemas modificando el problema dado, pero que estos nuevos problemas sean más retadores, de modo que desafíen a los estudiantes más allá de la obtención de una solución correcta del problema del episodio.

10. Etapa 4: Trabajos individuales y grupales sobre Creación de Problemas. Una vez que los estudiantes hayan realizado de manera individual sus Problemas pre y Problemas pos, deben de realizar lo mismo en grupos de dos o tres participantes. Una vez creado el problema por un grupo debe ser resuelto por el grupo autor y luego por otro grupo. El otro grupo debe resolver el problema planteado por el grupo autor conociendo sólo el enunciado de dicho problema. Los grupos reciben hojas especialmente diseñadas, en las que se deben escribir críticas constructivas al problema creado por otro grupo.

11. Etapa 5: Socialización con todos los participantes. Los participantes comparten con todos, en exposiciones breves, las razones didácticas y matemáticas tras el problema creado, ya sea en forma individual o grupal. También exponen el problema resuelto por un grupo, que no es el grupo autor de tal problema, expone su solución y hace sus comentarios críticos desde el punto de vista matemático y didáctico. El propósito es que la discusión con los autores de los problemas, así como los comentarios de los participantes y del instructor, contribuyan a mejorar la capacidad de crear problemas con potencialidades matemáticas y didácticas.

12. Entrevista. Se realizan cuestionamientos, primero de manera individual, mientras el estudiante está creando y variando problemas. Posteriormente, cuando los estudiantes estén realizando la variación y Creación de Problemas de manera grupal, se les realizará una serie de cuestionamientos a manera de entrevista de manera simultánea, mediante un formato con preguntas abiertas mientras son videograbados, esto con el fin de conocer más sobre los resultados obtenidos.

13. En una última sesión, se les pide a los alumnos que resuelvan, a manera de evaluación, el problema de la radio.

Fase 4. Análisis a posteriori y validación

En esta fase, se realiza una comparación entre el análisis preliminar y resultados de la fase 3, con el fin de constatar la construcción de conocimientos cuando el alumno resuelve el problema mediante la Creación de Problemas.

14. Se analizan las producciones orales y escritas, donde los instrumentos que se emplean son las producciones orales y escritas, que son la creación de los problemas de optimización por variación, a través de las videograbaciones obtenidas de la plataforma Zoom, la cual graba en tiempo real, audio, video y escritura.

15. Generación de Mapas Híbridos. Aquí se generan los Mapas Híbridos a partir de las producciones orales y escritas. Como método se hace un análisis de las producciones orales y escritas, con el instrumento de audio, video y escrituras (evidencias de fotografías de sus apuntes).

Con base en los resultados de la fase 1 del diagnóstico se busca comparar los resultados de la Fase 1 con los resultados de la Fase 3 en donde se pretende comparar los Objetos Matemáticos y Proceso cognitivos implicados.

En la Figura 13 se presenta a grandes rasgos el diseño de la investigación. En primera instancia, y en la columna central, se muestran las cuatro fases de la metodología de la ingeniería Didáctica, la cual se empleará en esta investigación. Las cuatro fases son: Fase 1.

Análisis preliminar; Fase 2. Concepción y análisis a priori; Fase 3. Experimentación; y Fase 4. Análisis a posteriori y validación. Asimismo, en algunas de las fases de la Ingeniería Didáctica se incluyen las etapas de la metodología de Creación de Problemas.

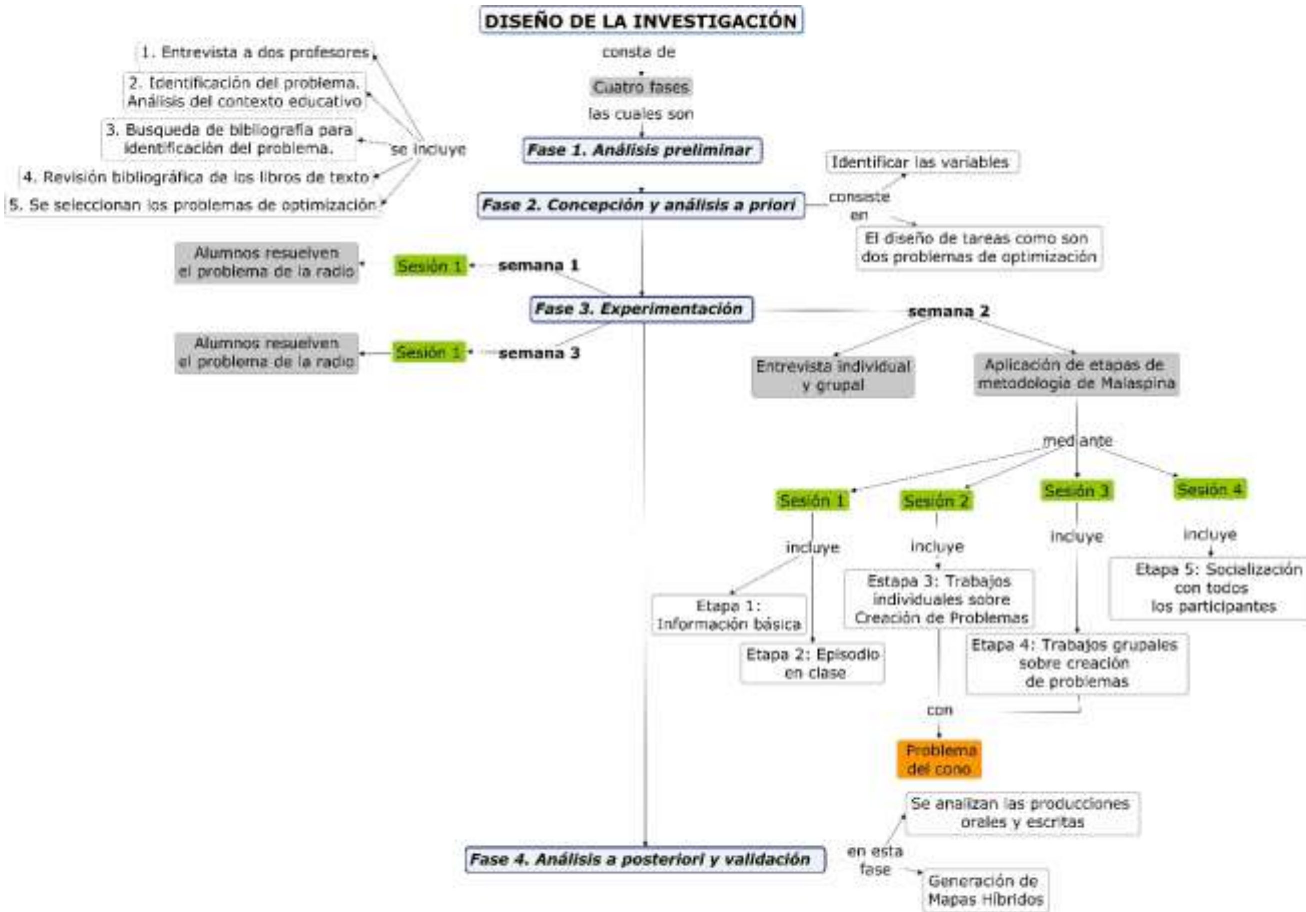


Figura 13. Diseño de investigación. Elaboración propia

4.6 Población y rol del investigador

Los sujetos de estudio fueron 7 estudiantes de la Licenciatura en Actuaría que cursaron en semestres anteriores la asignatura de Cálculo Diferencial, en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Los estudiantes fueron 7 mujeres con edad de 19 y 21 años, quienes tenían un desempeño promedio.

El rol que tuvo el investigador en la implementación de la metodología fue el de guía. En primera instancia, el investigador creó un cuestionario en Google Forms con una serie de preguntas, el cual permitió conocer datos personales como nombre, semestre en el que estaban inscritos los estudiantes, correo electrónico, si alguna vez había llevado el curso de Cálculo Diferencial. Asimismo, dentro del mismo cuestionario se les mostró el objetivo del Taller y la modalidad en la que se llevaría a cabo, por ejemplo el número de sesiones, la duración de cada una de éstas, el horario y la duración del taller (días).

De la misma manera, el investigador organizó a los estudiantes en equipos de dos y tres integrantes, asignando como líder a un estudiante de cada equipo. Esto con el objetivo de que, cuando los estudiantes estuvieran trabajando en equipos en sus respectivas salas, el líder grabara la sesión de su sala y enviara al investigador la videograbación y las producciones escritas.

Por otra parte, el investigador programó las sesiones en la plataforma Zoom y se las hacía llegar a los estudiantes mediante correo electrónico. Asimismo, creó salas, asignando una sala a cada uno de los equipo que el investigador conformó, para que los equipos trabajaran en su respectiva sala y así poder llevar a cabo la Etapa 4: Trabajos en equipo. Finalmente, el investigador grabó cada una de las sesiones que se llevaron a cabo en tiempo real y recolectó las producciones escritas de los estudiantes las cuales enviaban mediante fotografías.

4.7 Herramientas de investigación

Las herramientas empleadas para la recolección de los datos se obtuvieron a partir de grabaciones de audio y video que se obtuvieron de la plataforma Zoom, así como de las producciones orales y escritas a partir de problemas de optimización de tipo no convencional.

Dentro del diseño de la investigación se considera evaluar aspectos relacionados con los procesos cognitivos y Objetos Matemáticos Primarios presentes en la Creación de Problemas de optimización lo cual es descrito en el apartado siguiente.

De manera general, en la obtención de datos se utilizó diversos métodos, el primero se presenta en la fase 1 referente al análisis preliminar. En esta se realizó un análisis a documentos como programas analíticos de libros de textos utilizados con mayor frecuencia por los docentes para impartir ducho contenido matemático. Además de la revisión de textos, otro método utilizado fue la observación participante (Kothari, 2004), ya que esta permite la interacción social entre el investigador y los informantes (en este caso los alumnos del grupo de la Licenciatura en Actuaría), y durante la cual se recogieron datos de modo sistemático mediante hojas de trabajo, videograbaciones y producciones escritas utilizadas en las sesiones.

Asimismo, la investigación es de campo, ya que se realizaron entrevistas grupales en donde grupos de tres personas respondieron la entrevista de manera simultánea mediante un instrumento, el cual es un formato con preguntas abiertas y grabaciones de audio y video mientras que los estudiantes responden.

La técnica que se empleó para proponer la Creación de Problemas a los alumnos de nivel superior de la Licenciatura en Actuaría que cursan la asignatura de Cálculo Integral, fue la aplicación de dos problemas de optimización, la cual está dentro de la fase 3 referente a la experimentación. Estos problemas de optimización se eligieron de acuerdo a los tipos de problemas de optimización que existen. Los instrumentos que se emplearon fueron dos problemas de optimización de tipo no convencionales. Las herramientas que se emplearon para llevar a cabo la implementación fueron las producciones orales y escritas, que son la creación de los problemas de optimización por variación, obtenidas a través de videograbaciones obtenidas de la plataforma Zoom, la cual graba en tiempo real.

A partir de las producciones orales y escritas obtenidas mediante la plataforma Zoom, se generaron Mapas Híbridos. Una vez analizadas las producciones orales y escritas de los estudiantes y generados los Mapas Híbridos, es necesario analizar los Mapas Híbridos desde el EOS para observar las distintas conexiones entre los Objetos Matemáticos y procesos cognitivos implicados.

Por otra parte, es importante señalar que el análisis y discusión que se realiza tiene como foco central a la alumna representativa, Alumna A. Ya que, desde el punto de vista del investigador, se considera a esta alumna como representativa del resto de los estudiantes. Es por ello que toda la discusión que se presenta está alrededor de lo que hizo la alumna muestra.

4.8 Construcción del Mapa Híbrido

En esta sección se describe la manera en cómo se construyen los Mapas Híbridos. Se empleará el método de construcción de Mapas Híbridos que se ha reportado en otras investigaciones.

A continuación se describe una serie de pasos de cómo se deben construir los Mapas Híbridos.

Paso 1. Considerar el problema que se plantea.
Paso 2. Se debe solicitar al estudiante que resuelva el problema y al mismo tiempo que explique en voz alta dicha resolución.
Paso 3. Llevar un registro de la producción oral y escrita del estudiante cuando resuelve el problema. Pues dicha producción es la fuente de objetos matemático que serán tomados en cuenta al momento de la construcción del Mapa Híbrido.
Paso 4. Transcribir la producción del alumno.
Paso 5. Identificación de las prácticas y conocer en qué consiste cada una. En la resolución del problema es posible distinguir las prácticas o etapas en las que se apoya el estudiante al resolver el problema.
Paso 6. En la transcripción subrayar los conceptos implicados
Paso 7. Emplear un software para la elaboración del Mapa Híbrido, aunque también se puede realizar a mano. Sin embargo, es más fácil y tienes más ventajas usar el software.

Para este caso, se empleó el software CmapTools. Se captura la situación problema en un recuadro, también se capturan las prácticas y los objetos matemáticos y no matemáticos implicados en cada práctica. En CmapTools, se da clic en el primer objeto y se arrastra para hacer un enlace doble a otro recuadro. En dicho recuadro se captura el nombre de la práctica 1. Debajo de esta práctica se capturan todos los conceptos de la transcripción que fueron marcados. Los conceptos se conectan entre sí para dar lugar a los argumentos y propiedades matemáticas que empleó el alumno en esta primera práctica. Toda la transcripción uno y la producción escrita debe estar representada en el Mapa Híbrido.

Algunas veces se puede reemplazar conceptos y palabras de enlace con otras palabras equivalentes que mantengan el significado. En este paso 7 también se deben establecer conexiones entre los conceptos. Dichas conexiones no son señaladas por el alumno, sin embargo esto ayuda entender como el alumno va a organizando las prácticas entre sí. Las conexiones entre las prácticas están representadas mediante flechas segmentadas y de colores.

4.9 Descripción del diseño de instrumento de investigación

Se plantearon dos problemas de tipo no convencional, en los cuales se deben plantear consignas abiertas y que admiten diversos procedimientos para su solución. También se requiere hacer interpretaciones, inferencias y realizar una reflexión para su resolución. Un problema no convencional de optimización clásica en Cálculo Diferencial es aquel que no considera el criterio de la primera y segunda derivada como pasos específicos para su resolución, tales como se presenta en los libros de texto. Si el problema se resuelve considerando el criterio de la primera y segunda derivada, el problema es de tipo convencional, es decir, es un ejercicio típico.

Es por ello que no se plantearon problemas de tipo convencional, como son los que se plantean en una clase regular, los cuales son problemas que se pueden resolver de manera algorítmica. En dichos ejercicios, lo que hace el alumno es buscar una función, y ya que la obtiene deriva. Luego iguala a cero el resultado para posteriormente obtener las raíces y calcular la segunda derivada. Una vez calculada la segunda derivada, sustituye las raíces en la segunda derivada y observa si el resultado es positivo o negativo, si es positivo es mínimo y si es negativo es máximo. El estudiante sabe que está maximizando o minimizando por el criterio aplicado y porque la regla así lo plantea, y no porque realmente esté consciente de ello. Es decir, no se está resolviendo el problema con un pensamiento de optimización. Cuando eso ocurre, se tienen problemas convencionales como en los que se plantea una formulan directa para derivar.

Por esta razón se plantearon los siguientes dos problemas de optimización de tipo no convencional. El problema de la radio se encuentra en una "Guía didáctica" de la Universidad Central del Ecuador (2015, pág. 47). Asimismo, el problema del cono se encuentra en "Guía de estudio para presentar el examen de conocimientos y habilidades disciplinarias para la contratación temporal de profesores de asignatura interinos", del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México (2010, pág. 13).

Problema de la radio

Una candidata desea utilizar una combinación de anuncios de radio y televisión en su campaña. Las investigaciones han demostrado que cada anuncio de 1 minuto de televisión llega a 0.09 millones de personas y cada anuncio de 1 minuto en la radio llega a 0.006 millones de personas. La candidata considera que el anuncio debe llegar por lo menos a 2.16 millones de personas, y se considera que es necesario tener por lo menos 80 minutos de anuncios para tener una buena exposición de la candidata y que la campaña tenga éxito.

> *¿Cuántos minutos de cada medio se deberían utilizar para minimizar los costos si la televisión tiene un costo de $500 por minuto y la radio tiene un costo de $100 por minuto?*

El objetivo de plantear el primer ejercicio de optimización antes de la implementación de la metodología de la Creación de Problemas, es a manera de diagnóstico, para conocer las variables que están presentes en los estudiantes con respecto a la optimización.

Asimismo, se aplicará el mismo problema de la radio al término de la aplicación de la metodología de la Creación de Problemas. Al realizar esto, no interesa tanto el resultado, sino los cambios en la manera de organizar los objetos matemáticos al resolver el problema.

EL problema del cono, se plantea para llevar a cabo la implementación de la metodología de Creación de Problemas por variación, en la cual tiene que variar el problema dado, para que a partir de esas variaciones ellos puedan crear un problema nuevo.

Problema del cono

Un gusano se desplazará sobre un vaso cónico, del punto A al B, que se encuentran sobre la boca del vaso, como se muestra en la figura. El radio del cono es $\frac{1}{3}$ *y su altura es* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$*. Determinar la mínima longitud del recorrido del gusano cuando va del punto A al punto B.*

4.10 Implementación en el aula

La implementación se llevó a cabo en un periodo de tres semanas con un total de siete sesiones. El viernes de la semana 1, y a manera de diagnóstico, se aplicó a los estudiantes el problema de la radio. En la semana 2, se llevó a cabo la recolección de datos, en donde se implementó la metodología de Creación de Problemas durante cinco días en un total de cinco sesiones. Y finalmente, el día lunes correspondiente a la tercera semana, se aplicó en una sesión el problema de la radio, el cual se había aplicado en a semana uno a manera de diagnóstico. Ver Figura 14.

Figura 14. Diseño de implementación. Elaboración propia

Semana 1.

El día 1, se reunió el investigador con los siete estudiantes en una sesión virtual mediante la plataforma Zoom. En esa primera sesión, el investigador les planteó el problema de la radio de optimización de tipo no convencional para que los estudiantes lo resuelvan de manera tradicional.

Semana 2.

El día 1 de la semana 2, se reunió el investigador con los siete estudiantes de manera grupal, en una sesión virtual mediante la plataforma Zoom. En esa sesión, el investigador abordó la Etapa 1: Información básica**.** En esta fase, se hizo una pequeña presentación en donde se explicó a los estudiantes sobre lo que significa Creación de Problemas, qué es la Creación de Problemas, qué elementos tiene un problema, y sobre todo, que se puede crear un problema, a partir de un problema dado modificando uno o más de los elementos presentes en el problema.

Asimismo, en la misma sesión se presenta la Etapa 2. Episodio en clase. En esta fase, el investigador les presentó a los estudiantes, a manera de ejemplo, un problema matemático variado y creado. La finalidad de presentar dicho ejemplo fue para explicar a los estudiantes en qué consiste el problema y como se debe variar un problema, y a partir de esto, se hacen algunas anotaciones sobre cómo reaccionan el alumno de acuerdo al problema presentado, si se les hizo complicado o fácil. Esto se realiza empleando la herramienta **compartir pantalla** que ofrece la plataforma Zoom. Por otra parte, dentro de la misma sesión, y como parte de la Fase 2, se les planteó a los estudiantes un ejercicio matemático en donde se involucran el porcentaje, el cual no es de optimización, esto con la finalidad de que los estudiantes hicieran variaciones para crear un nuevo problema a partir de ese problema dado y verificar si los estudiantes comprendieron lo que significa crear un problema a partir de la variación de uno o más elementos del problema dado. Ver Figura 15.

Figura 15. Sesión 1. Elaboración propia

Posteriormente, en el día 2, en una segunda sesión de manera grupal, se presenta la Etapa 3: Problemas Pre, trabajo individual. Esta fase consistió en pedir a los alumnos resolver el problema del cono de optimización. Después, se les pidió a los estudiantes proponer problemas variando uno o más de los elementos del problema dado, para que de esta manera su solución facilitara la solución del problema dado y contribuyera a clarificar las dudas de los estudiantes al resolver dicho problema o al intentar resolverlo, a estos nuevos problemas se les denomina *Problema Pre*. Se pidió a cada uno de los estudiantes que enviaran al investigador una fotografía del problema que elaboraron de manera individual. Esto con la finalidad de que cada alumno expusiera ante sus compañeros el problema variado y creado. Esto se llevó a cabo empleando la herramienta **compartir pantalla** y haciendo uso de las **herramientas de anotación** que ofrece la plataforma, como un apoyo para que el estudiante explicara lo que hizo para crear su nuevo problema. Cabe mencionar que todo se grabó para poder extraer las producciones orales y escritas. Este proceso se realizó con cada uno de los tres estudiantes. Una vez variado el problema dado, se les pidió que lo variaran nuevamente, pero que ahora creando otro problema más retador. Ver Figura 16.

Figura 16. Sesión 2. Elaboración propia

El tercer día, en una sesión, se abordó la Etapa 4. Trabajos grupales sobre Creación de Problemas. Una vez que los estudiantes realizaron de manera individual sus Problemas pre, se reunieron en equipos de dos y tres integrantes, en un total de tres equipos, para realizar la creación de un nuevo problema, pero ahora en equipos. Para poder llevar a cabo esta etapa, se crearon tres salas en la plataforma Zoom, asignando una sala a cada equipo. Asimismo, se eligió a un integrante de cada equipo como líder. La función del líder del equipo fue enviar al investigador las producciones orales y escritas, que en este caso fue el problema creado a partir la variación de uno o más elementos del problema del cono. Se pidió al líder de cada grupo que grabara la sesión de la sala que se les asignó**.** Ver Figura 17.

Figura 17. Sesión 3. Elaboración propia

El cuarto día, los alumnos se volvieron a reunir con sus equipos correspondientes en las salas asignadas en la sesión anterior. Cada uno de los equipos resolvió, en primera instancia, el problema planteado por otro equipo conociendo sólo el enunciado de dicho problema. Cuando los equipos terminaron de resolver los problemas asignados, todos los estudiantes junto con el investigador se reunieron en la sala principal para llevar a cabo la Etapa 5. Socialización con todos los participantes. Los equipos compartieron con todos, en exposiciones breves, las razones didácticas y matemáticas tras el problema creado, ya sea en forma individual o grupal. También expusieron la solución al problema que se les asignó creado por otro equipo. Cada equipo realizó comentarios críticos desde el punto de vista matemático y didáctico al problema creado por otro grupo, en el documento donde resolvió el ejercicio. El propósito fue que la discusión con los autores de los problemas, así como los comentarios de los participantes y del instructor, contribuyeran a mejorar la capacidad de crear problemas con potencialidades matemáticas y didácticas. Ver Figura 18.

Figura 18. Sesión 4. Elaboración propia

El quinto día se continuó con la Etapa 5. Socialización con todos los participantes, para poder proseguir con las exposiciones de los equipos restantes que no pudieron exponer el cuarto día.

La Figura 19 muestra a grandes rasgos la implementación de la metodología de Creación de Problemas descrita en párrafos anteriores. Se muestran los días y las sesiones en las que se implementaron cada una de las etapas de dicha metodología.

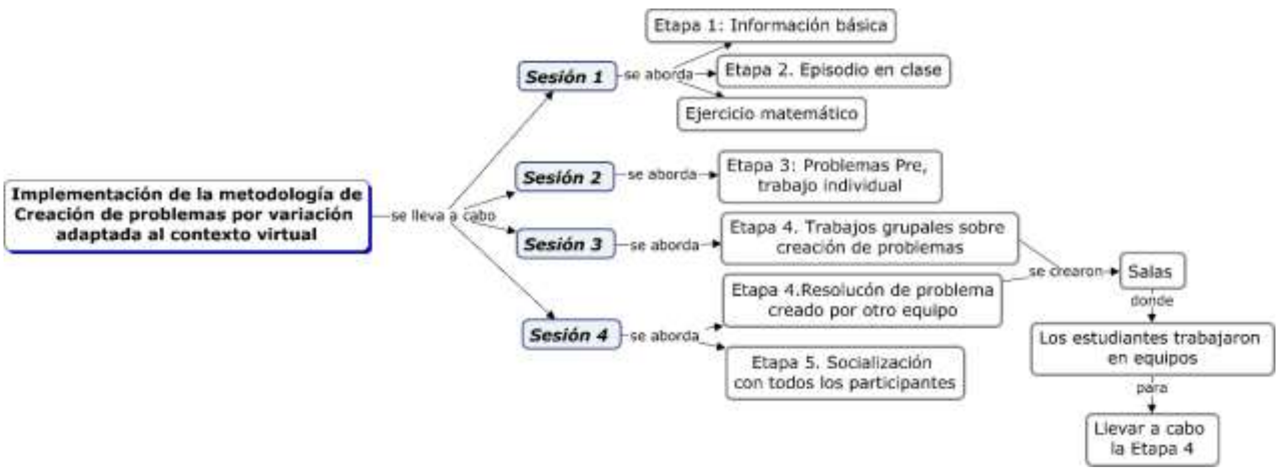


Figura 19. Diseño de implementación de la metodología de Creación de Problemas. Elaboración propia

Semana 3

En una sesión grupal, los estudiantes resolvieron el problema de la radio, planteado a manera de diagnóstico en la semana 1.

Finalmente, es necesario señalar que la metodología de Creación de Problemas por el método de variación se apoyó en lo virtual por motivo de la pandemia mundial. Dicha metodología fue pensada para llevarse a cabo en el contexto presencial, pero en el caso de esta investigación, se realizó una adaptación de la metodología al contexto virtual apoyada en la plataforma Zoom. Esta adaptación trata de no mirar a las TIC´s solamente como un medio de comunicación sino también como una herramienta para la construcción de conocimiento.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1 Introducción

En esta sección se presentan los resultados de la fase de experimentación obtenidos a partir de las producciones orales y escritas de los estudiantes al aplicar la metodología de la Creación de Problemas por variación, en donde los estudiantes de la Licenciatura en Actuaría variaron el problema del cono. Asimismo, se presentan los resultados obtenidos al aplicar el problema de la radio, a manera de diagnóstico y de evaluación del aprendizaje logrado sobre la optimización mediante la metodología de Malaspina, previo y al término de la aplicación de la metodología de Creación de Problemas por variación.

La estructura en la que se presentan los resultados es la siguiente. Se presentan por semanas, sesiones utilizadas en cada semana para llevar a cabo la implementación y por problema planteado. En primera instancia, se presenta la semana 1 con su sesión correspondiente y problema planteado. Posteriormente se presentan los resultados de las sesiones 2, 3 y 4 de la semana 2, y finalmente, se presentan los resultados de la sesión 5 de la semana 3.

Cabe mencionar que solamente se presentan los resultados representativos de la Alumna A, así como los resultados del equipo donde la Alumna A colaboró y de la producción que realizó el equipo de la Alumna A, quien resolvió el problema que creó otro equipo. Se toma como representativa ya que se trata de una alumna que tuvo una mayor participación.

5.2 Resultados del problema de la radio

En este apartado se presentan los resultados de la sesión 1 correspondiente a la semana 1, al aplicar el problema de la radio, el cual es un problema de optimización de tipo no convencional. Este problema se aplicó a manera de diagnóstico. Los estudiantes resolvieron dicho ejercicio de manera tradicional y de forma individual.

SEMANA 1

<u>Sesión 1</u>

Problema de la radio

Una candidata desea utilizar una combinación de anuncios de radio y televisión en su campaña. Las investigaciones han demostrado que cada anuncio de 1 minuto de televisión llega a 0.09 millones de personas y cada anuncio de 1 minuto en la radio llega a 0.006 millones de personas. La candidata considera que el anuncio debe llegar por lo menos a 2.16 millones de personas, y se considera que es necesario tener por lo menos 80 minutos de anuncios para tener una buena exposición de la candidata y que la campaña tenga éxito.

¿Cuántos minutos de cada medio se deberían utilizar para minimizar los costos si la televisión tiene un costo de $500 por minuto y la radio tiene un costo de $100 por minuto?

Las respuestas dadas por las alumnas al resolver el problema de la radio a manera de diagnóstico se pueden categorizar en cuatro grupos. Grupo 1. Centrados en la obtención de ecuaciones y aplicación de matrices, Grupo 2. Centrados en la aplicación de matrices y variables de holgura, Grupo 3. Centrados en el método de las esquinas, y Grupo 4. Método de prueba y error. La Alumna A se categoriza dentro del grupo 1.

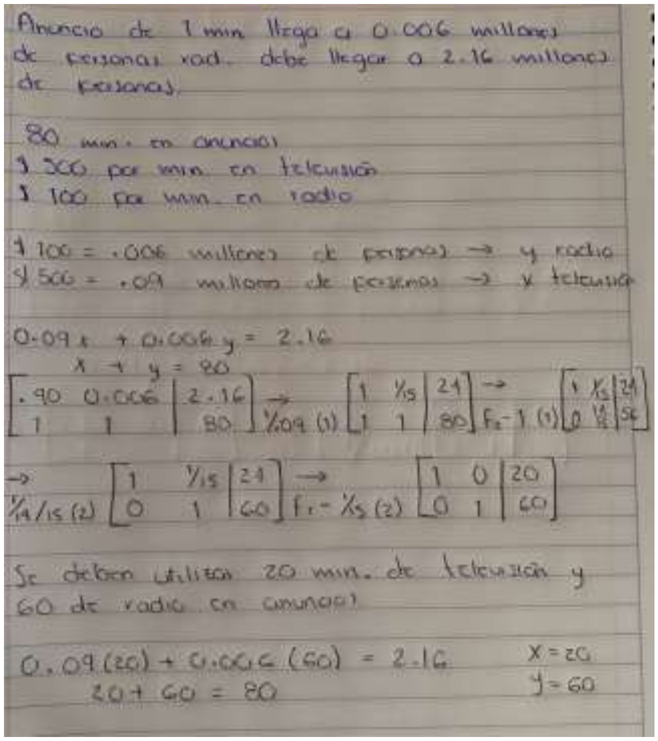
- **Grupo 1. Centrados en la obtención de ecuaciones y aplicación de matrices.** Son las alumnas que se centraron en la obtención de ecuaciones para poder resolver el problema mediante matrices.

- **Grupo 2. Centrados en la aplicación de matrices y variables de holgura.** Son las alumnas que se centraron en la resolver el problema mediante matrices incluyendo las variables de holgura.

- **Grupo 3. Centrados en el método de las esquinas.** Son las alumnas que consideraron emplear un método gráfico para poder analizar las esquinas en donde existen intersecciones

- **Grupo 4. Método de prueba y error.** Son las alumnas que plantearon sus variables.

Dos de las siete estudiantes se categorizaron en el grupo 1, en donde las alumnas, en primera instancia, obtenían sus ecuaciones y ponían restricciones al recordar que tenían que minimizar. Asimismo, planteaban un sistema de ecuaciones e introdujeron variables de holgura para proceder a resolver con matrices.


Anuncio de 1 min llega a 0.006 millones de personas rad. debe llegar a 2.16 millones de personas.

80 min. en anuncios
$ 500 por min. en televisión
$ 100 por min. en radio

$ 100 = .006 millones de personas → y radio
$ 500 = .09 millones de personas → x televisión

$0.09x + 0.006y = 2.16$
$x + y = 80$

Se deben utilizar 20 min. de televisión y 60 de radio en anuncios

$0.09(20) + 0.006(60) = 2.16$ $x = 20$
$20 + 60 = 80$ $y = 60$

Figura 20*.* Producción escrita a la resolución al problema de la radio por parte de la Alumna A.

Dos de las siete estudiantes se categorizaron en el grupo 2, el cual se refiere a las alumnas que consideraron introducir variables de holgura para poder resolver por el método de matrices.

Solamente una de las alumnas se centró en la categoría 3, la cual se refiere a que los estudiantes consideraron emplear un método gráfico para poder analizar en donde existen intersecciones y a partir de ahí sustituir esos puntos en la función y obtener el costo mínimo requerido.

Dos de las siete estudiantes se centraron en la categoría 4 Método de prueba y error. Son estudiantes que plantearon sus variables y no una ecuación, solamente pusieron valores, que en uno de los casos, el resultado resultó correcto y el otro estudiante obtuvo un resultado erróneo, justificando que intentó resolver el problema planteando un sistema de ecuaciones pero no obtuvo el resultado que quería y realizó una propuesta de cómo resolver el problema. En el apéndice se puede observar algunas de las respuestas dadas por las alumnas, correspondientes a cada uno de los grupos como base del discurso.

5.3 Resultados de las etapas metodológicas de Malaspina

SEMANA 2

Sesión 2

Etapa 3. Problemas Pre. Creación de Problemas de manera individual

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de la segunda sesión al aplicar la etapa 3, los cuales son la solución al problema del cono, resuelto de manera tradicional. Posteriormente, se presentan los resultados de la variación del problema del cono y la Creación de Problemas a partir de dichas variaciones. Las respuestas dadas por las alumnas al resolver el problema del cono se pueden categorizar en seis grupos. La Alumna A se categoriza dentro del grupo 1.

Problema del cono

Un gusano se desplazará sobre un vaso cónico, del punto A al B, que se encuentran sobre la boca del vaso, como se muestra en la figura. El radio del cono es $\frac{1}{3}$ *y su altura es* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$*. Determinar la mínima longitud del recorrido del gusano cuando va del punto A al punto B.*

- **Grupo 1. Teorema de Pitágoras**. Son los estudiantes que empelaron el teorema de Pitágoras para resolver el problema.

- **Grupo 2. Perímetro y área del círculo, y teorema de Pitágoras.** Son los estudiantes que emplearon el perímetro y el área del círculo así como el teorema de Pitágoras para dar solución al problema del episodio.

- **Grupo 3. Perímetro del círculo.** Son los estudiantes que utilizaron la fórmula del perímetro del círculo.

- **Grupo 4. Perímetro del círculo y teorema de Pitágoras.** Son los estudiantes que emplearon el perímetro del círculo y la fórmula del teorema de Pitágoras.

- **Grupo 5. Distancia entre dos puntos, volumen del cono y perímetro del círculo y del cono.** Son los estudiantes que emplearon el perímetro del círculo y del cono, el volumen del cono y la fórmula de la distancia entre dos puntos para resolver el problema.

- **Grupo 6. Volumen del cono y perímetro del círculo.** Son los alumnos que emplearon la fórmula del volumen del cono y el perímetro del círculo para resolver el problema.

Solamente una alumna se categorizó en el grupo 1, quien empleó el teorema de Pitágoras para encontrar la distancia más corta que debe recorrer el gusano. Aquí la alumna consideró que se forma un triángulo rectángulo, pero mostrando que el recorrido que realiza el gusano con la distancia mínima está sobre la superficie del cono.

Uno de los siete estudiantes se centró en el grupo 2. Perímetro y área del círculo, y teorema de Pitágoras. Que se refiere a que los estudiantes emplearon el perímetro y el área del círculo, así como el teorema de Pitágoras para dar solución al problema del episodio. Aquí, al igual que el estudiante anterior, muestra que el recorrido que realiza el gusano con la distancia mínima es la señalada sobre la superficie superior del cono.
Solamente dos de los siete estudiantes se centraron en el grupo 3. Perímetro del círculo, que se refiere a que los estudiantes emplearon el perímetro del círculo para dar solución al problema del episodio. Aquí, al igual que los otros estudiantes, muestra que el recorrido que realiza el gusano con la distancia mínima es la señalada sobre la superficie superior del cono.

Solamente uno de los siete estudiantes se centró en el grupo 4, la cual se refiere a los estudiantes que empelaron el perímetro del círculo y la fórmula del teorema de Pitágoras para dar solución al problema planteado.

Un estudiante se centró en el grupo 5. Distancia entre dos puntos, volumen del cono y perímetro del círculo. Aquí el estudiante empleo la fórmula del perímetro del círculo, el volumen del cono y la fórmula de la distancia entre dos puntos para resolver el problema.

Solo un estudiante se centró en el grupo 6. Volumen del cono y perímetro del círculo. El alumno empleó la fórmula del volumen del cono y el perímetro del círculo para resolver el problema.

Variación y Creación de Problemas de manera individual

Aquí se presentan las variaciones realizadas al problema del cono por parte de cada uno de las alumnas, y el problema creado a partir de esas variaciones.

- *Producción de la Alumna A*

Variación 1.

La Alumna A sigue considerando el gusano, pero ahora lo sitúa en un plano 2D, dentro de una circunferencia, y empleando una representación gráfica, tal y como se muestra en la figura 21 marcado en color azul. Asimismo, considera un requerimiento similar al del ejercicio inicial, pues pide encontrar una distancia mínima para llegar de un punto a otro, como se muestra en la figura señalado en color rojo. El entorno está situado en aplicar el concepto de distancia entre dos puntos para dar solución al problema, esto se observa en la parte marcada en color naranja. El contexto es extra matemático.

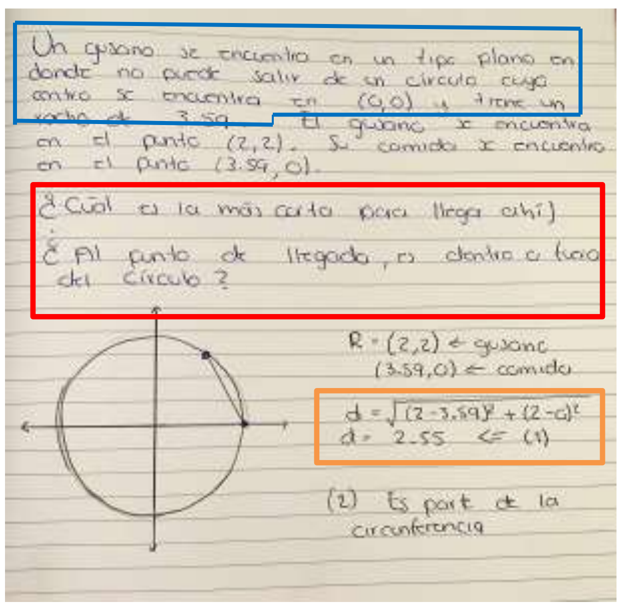


Figura 21. Problema creado a partir de la primera variación del problema del cono por parte de la Alumna A

Producción oral de la Alumna A:

"Yo hice un círculo del que no pudiera salir el gusanillo, entonces solo podía andar pues por adentro pero por acá afuera no. Entonces yo di un punto del circulo que es este (2,2) donde se encontraba el gusano, entonces lo que saqué fue la distancia con la fórmula de distancia entre dos puntos, y ya después hice otra pregunta de que el punto de su comida estaba adentro o afuera del círculo, entonces yo le puse que era parte de la circunferencia

porque el problema específica que su centro estaba en el origen y cuanto media el radio. Entonces el radio media 3.59 y su comida estaba en el punto (3.59, 0)"

Variación 2.

Para la variación 2, la alumna cambia la información respecto al problema inicial, el cual pedia *Determinar la mínima longitud del recorrido del gusano cuando va del punto A al punto B,* y en este caso, sitúa a una persona que tiene que recorrrer cierta distancia para realizar sus comprar. Esto se puede observar en la figura 22 marcado con color verde. También cambia el requerimiento, puesto que está pidiendo encontrar la distancia recorrida, pero en este caso, planteando expresiones para encontrar las medidas de los lados de la figura rectangular, observar el texto marcado en color rojo en la figura 22. El contexto es extra matemático y el entorno está situado en un concepto físico, que es la distancia recorrida. Asimismo, la estudiante realiza un diagrama representativo al problema.

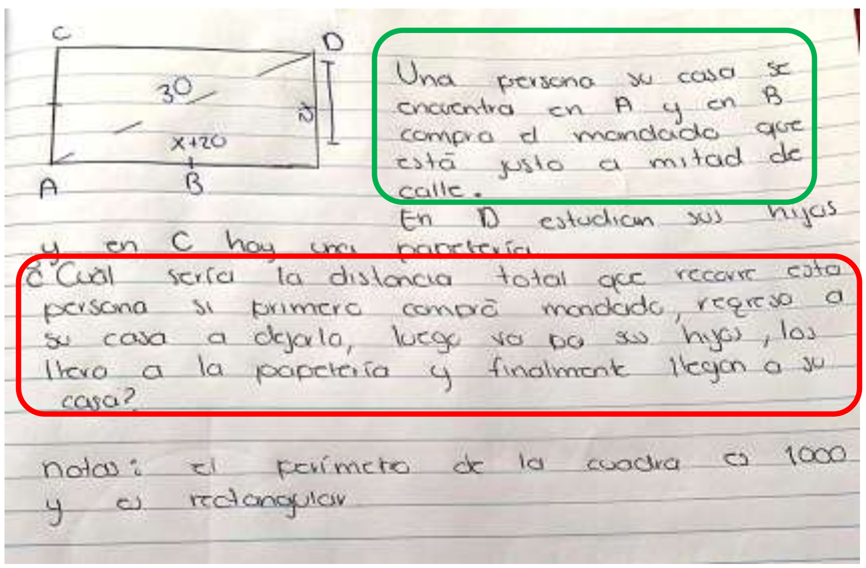


Figura 22. Problema creado a partir de la segunda variación del problema del cono por parte de la Alumna A

- *Estudiante 2*

Variación 1:

En esta variación, el estudiante 1 cambió el requerimiento, ya que en el ejercicio inicial se pedía encontrar la distancia mínima que recorrerá el gusano para ir del punto A al punto B, y en este caso, el estudiante pide encontrar las medidas máximas de los lados de un rectángulo. También cambió la información, el contexto sigue siendo extra matemático. El entorno matemático cambio, ya que emplea el criterio de la primera derivada.

Variación 2:

En la segunda variación para la creación del problema más retador, el estudiante cambió la información, pues en este caso el gusano es quien está empujando un triángulo, haciendo alusión a la formación de un sólido de revolución, que al empujar el triángulo forma un cono. El requerimiento también cambió, puesto que pide encontrar las medidas que debe tener la base del triángulo para que el volumen del cono sea máximo. El contexto sigue siendo extra matemático, y el entorno matemático cambio, ya que emplea el criterio de la primera derivada.

- ***Estudiante 3***

Variación 1.

El problema creado por el estudiante 3, está situado en un contexto intra matemático, el cual es distinto al contexto del problema inicial. Asimismo, el problema tiene un requerimiento distinto al problema inicial, pues lo que se desea encontrar en este caso es la máxima y la mínima distancia entre dos puntos que se encuentran en una circunferencia. De la misma manera, la información cambió y el contexto también. Se puede decir que el estudiante realizó una variación por combinación de elementos.

Variación 2.

El problema creado mediante la segunda variación del problema inicial, está situado en un contexto extra matemático. Asimismo, el problema tiene un requerimiento distinto al problema inicial, pues a diferencia del problema inicial, el requerimiento en este problema es encontrar la mínima distancia que puede recorrer la araña para salir de la caja. De la misma manera, la información cambió, ya que ahora sitúa a una araña quien está atrapada en una caja que tiene forma rectangular, y que se encuentra en el centro de dicha caja. El contexto también cambió. Se puede decir que el estudiante realizó una variación por combinación de elementos.

- ***Estudiante 4***

Variación 1.

Para el caso de la creación del problema del estudiante 2, el requerimiento es similar al de ejercicio del inicial, puesto que el estudiante pide calcular el recorrido más óptimo que deben recorrer dos personas para llegar a un restaurante en el menor tiempo posible. En este caso, el contexto sigue siendo extra matemático, y el entorno matemático cambio, ya que no emplea el criterio de la primera y la segunda derivada, sino que usa el perímetro de un triángulo. Asimismo, el estudiante plantea el problema en un plano 2D, haciendo uso de un triángulo.

Variación 2.

En la variación 2, el estudiante sigue considerando un entorno matemático pero distinto al que se plantea en el ejercicio inicial, ya que aquí ya involucra velocidades y distancias. Cambió la información, el contexto sigue siendo extra matemático y el requerimiento es distinto, ya que lo que se desea encontrar son los días que debe entrenar un nadador profesional.

- ***Estudiante 5***

Variación 1

Para el caso de la creación del problema del estudiante 5, la información cambió, el requerimiento es similar al de ejercicio del inicial, puesto que el estudiante pide calcular el recorrido de un gusano el punto A al punto B que se encuentran en las esquinas de un triángulo rectángulo. En este caso, el contexto sigue siendo extra matemático, y el entorno matemático cambio, ya que emplea el teorema de Pitágoras y el perímetro de un triángulo. Asimismo, el estudiante plantea el problema en un plano 2D, haciendo uso de un triángulo.

Variación 2

La variación 2 que realizó el estudiante 5, es similar a la variación 1. En esta nueva creación del problema, la información cambió, la figura ya no era un triángulo como en el problema creado anteriormente, el requerimiento es similar al del problema creado anteriormente, puesto que el estudiante pide calcular el recorrido de una persona que debe visitar distintos sitios. Asimismo, en el requerimiento pide la distancia recorrida en un menor tiempo, pero no incluye en su información la velocidad a la que camina o viaja la persona. En este caso, el contexto sigue siendo extra matemático, y el entorno matemático cambio, ya que emplea el teorema de Pitágoras y el perímetro de un triángulo. Asimismo, el estudiante plantea el problema en un plano 2D, haciendo uso de triángulos.

- ***Estudiante 6***

Variación 1

El estudiante 6 creó un nuevo problema realizando variaciones en tres de los elementos del problema inicial. La información cambió con respecto al ejercicio inicial, pues incluye velocidad, distancia y tiempo. El requerimiento, también es distinto, pues pide encontrar la distancia recorrida en determinado tiempo, en este caso en un tiempo de 3 horas. El contexto es extra matemático y el entorno cambió con respeto al problema inicial, puesto que incluye el concepto físico de velocidad.

Variación 2

En la variación 2 cambió la información respecto al problema inicial y al problema creado anteriormente. Este nuevo problema sigue estando en el contexto extra matemático. El requerimiento es distinto con respecto al problema creado mediante la primera variación, ya que aquí pide encontrar el total de área que recorre un conejo, asimismo, pregunta cuál será el camino indicado que debe recorrer el conejo. El entorno es similar al del problema creado mediante la primera variación, puesto que incluye el concepto físico de distancia recorrida. Sin embargo, el problema carece de datos y estructura para poder ser resuelto.

- ***Estudiante 7***

Variación 1

El estudiante 7, creó un nuevo problema variando tres de los cuatro elementos del problema inicial. La información la cambió, ya que ahora el gusano se desplaza sobre un triángulo isósceles con la restricción de no pasar por la base del mismo. Asimismo, asigna medidas a la base y a la altura de dicha figura. El requerimiento es distinto, puesto que pide encontrar las dimensiones de los lados del triángulo pro el cual pasará el gusano. El contexto es el mismo, extra matemático y el entorno es distinto, puesto que se incluye un concepto matemático como el de teorema de Pitágoras.

Variación 2

Vemos que el estudiante 7, sigue trabajando con triángulos isósceles, pero tiene la interesante idea de considerar triángulos inscritos a una circunferencia. Él no llega a una respuesta y no la plantea. Aquí la pregunta es ¿existirá el triángulo con área máxima inscrito en ese círculo de radio de 6 cm? En este problema la información cambia. El requerimiento ahora es diferente al del problema creado anteriormente, puesto que pide encontrar el triángulo inscrito de área máxima inscrito en el círculo. El contexto cambió, es intra matemático. Y el entorno es distinto.

Sesión 3

Etapa 4. Variación y Creación de Problemas de manera grupal

Aquí se presentan las variaciones al problema del cono y el problema creado a partir de dichas variaciones, pero ahora realizado de manera grupal. En primera instancia se presenta la producción oral (la cual se encuentra completa el Apéndice I) y la producción escrita del problema creado por el quipo donde colaboró la Alumna A, el cual es el equipo 1. Posteriormente se presenta una descripción de los problemas creados por los otros dos equipos.

- ***Equipo 1 (esquipo de la Alumna A)***

Producción oral

Alumna B: *pues es un árbol cuadrado. Imagínate que nada más sean dos gusanos que están en D y que tenga que llegar al punto A y al punto B, uno a cada lado. Entonces también la rayita naranja, o sea que todas estas rayitas también fueran parte del árbol. O sea que el árbol fuera como una raya o un rectángulo y ya pues nada más sacar la distancia más corta.*

Alumna A: *Sí, o podría ser más bien, ¿cuál sería la ruta más corta para el gusano de C, no? para que recorra más, para llegar a A o B*

Alumna A: *¿pero cuáles serían los dos? Hay que dejar los tres y que la pregunta de optimización sea cuál de los tres llega primero a su punto, no?*

Alumna A: *ahí le tienes que poner que el par de gusanos son los que van a A y B, porque C va de D*

Alumna B: *Pues es que no tiene caso que calculemos de C a D, ¿o si?, porque ya sabemos que es la mitad de árbol, o sea que es 1.5.*

Alumna B: *Tenemos los dos gusanitos de aquí en D, entonces los gusanos, tienen que llegar uno a A y uno a B. Entonces la pregunta va a ser ¿Cuál es la distancia más corta?, ¿no? O sea que, pues es lo menos que pueden hacer de B a D y de B a A*

Alumna A: *O sea nada más serían dos caminos, los naranjas y el azul.*

Alumna B: ***¿****Entonces si le cambió? es que entonces si no entendí para que nos sirve la velocidad*

Alumna A: *Es que yo creí que íbamos a poner que un gusano, tómala la ruta de las rayas naranjas y el otro la azul para saber cuánto se tarda uno por las naranjas y otro por la azul. Pero es que ya si vamos a tener nada más dos gusanos para que nos va a servir de C a D*

Alumna B: *Si pues ese lo quitamos, el otro era para ver cual lleva más rápido a cada punto, a su punto. Pues ya no tiene caso que nada más calculemos de C a D porque pues ya sabemos, el mismo largo del árbol lo dice. Yo pensaba que estando los dos gusanos en D, después ya sabiendo esto de las medidas de lo largo y lo ancho del árbol, con eso podríamos hacer la pregunta de ¿Cuál es el camino más corto para los gusanos para llegar a A y a B?*

Alumna A: *O sea dar la medida también de D a B, o sea las rayas Azules*

Alumna B: *Eso se puede omitir. Pero no sé porque siento que no estamos poniendo el problema de optimización si me entiendes*

Alumna A: *Sí, y sacar las dos rutas y ya nada más multiplicarlo para sacar cuánto se tarda, cuántos minutos,*

Alumna B: *Y ya de ahí sale el tiempo y c es la ruta es la más corta*

Alumna A: *Okay*

Alumna B: ¿*Quieres preguntar otra cosa?*

Alumna A: *Estaría bien, ¿no? y si otra pregunta es que se agrega otro punto en donde está entre A y B.*

Alumna B: ¿*Y así la Alumna A y la otra pregunta la pongo desde C hasta E?*

Alumna A: *Solo que un camino sería desde C hasta la punta y luego hacia E*

Alumna B: *Y el otro pues llega de C a D y luego de D se va a A y luego de A a E*

Alumna A: *Aja*

Alumna B: *Y el otro pues llega de C a D hasta a A. pero es que igual estas distancias ya las conocemos entonces no es tarada*

Alumna A: *¿Pero a los otros puntos que no tienen nombre no les pongo nada solo les pongo C a A?*

Alumna B: *Puedes poner de C a D y luego de D por el borde del cuadrado o triangulo rectángulo que se forme hasta llegar a A. Por ejemplo yo tengo que sacar cuánto tiempo tarda en minutos, pero tú vas a sacar la distancia o también el tiempo, igual se sacan los dos pero para poner las preguntas.*

Alumna A: *Si el tiempo, pues es que la distancia más corto va a ser el tiempo más corto también*

Alumna B: *Pues si*

Alumna A: *Si te sale 2.12?*

Alumna B: *Me sale raíz de 4.5*

Producción escrita

Los integrantes de este equipo cambiaron la información. Ahora incluyeron dos gusanos, los cuales están sobre un árbol, tal y como se muestra en la figura 23 marcado en color rojo. El requerimiento es distinto al problema inicial, ya que el problema inicial pedía *Determinar la mínima longitud del recorrido del gusano cuando va del punto A al punto B.* En cambio, en este problema piden encontrar el tiempo que tardan los gusanos en llegar al punto A y al Punto B, si se encuentran inicialmente en el punto D, esto se puede observar en la figura marcado en color azul. Aquí las alumnas argumentaron que la distancia más corta será el tiempo más corto. Asimismo, añaden otro requerimiento, el cual es encontrar el tiempo que tardara el gusano en realizar el recorrido más corto hasta el punto E, si ahora éste se sitúa en el punto C. El contexto es extra matemático y el entorno matemático que interviene para resolver el problema es el teorema de Pitágoras, la distancia entre dos puntos y el concepto físico de velocidad, esto se puede apreciar en la figura 24, en donde se explica la solución de dicho problema.

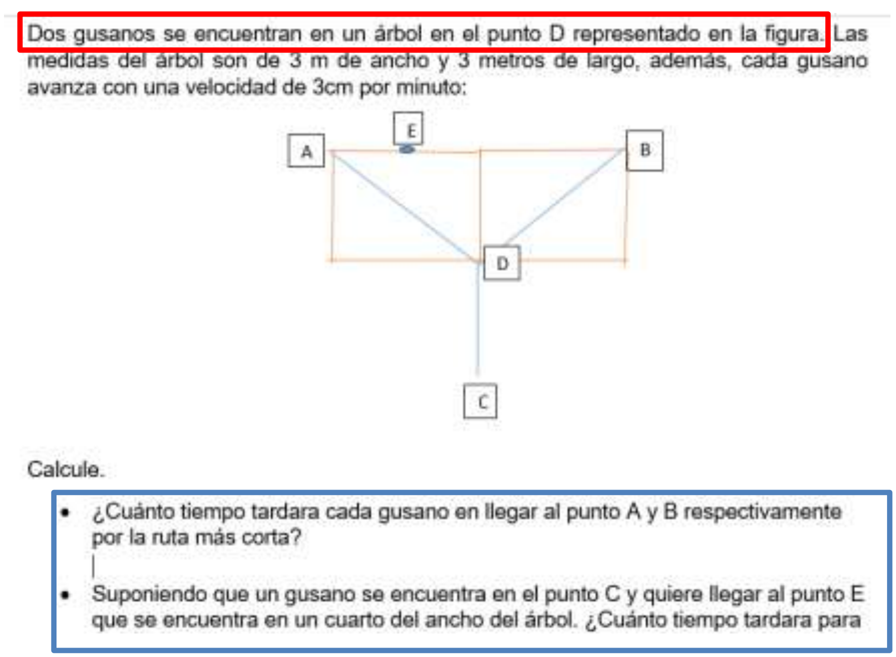


Figura 23. Problema creado a partir de la variación del problema del cono por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

La siguiente figura 24, muestra la solución al problema que las alumnas variaron. Como ya se menciono en parrafos anteriores, el contexto que se empleó en este problema es extra matemático y el entorno matemático que interviene para resolver el problema es el teorema de Pitágoras, la distancia entre dos puntos y el concepto físico de velocidad.

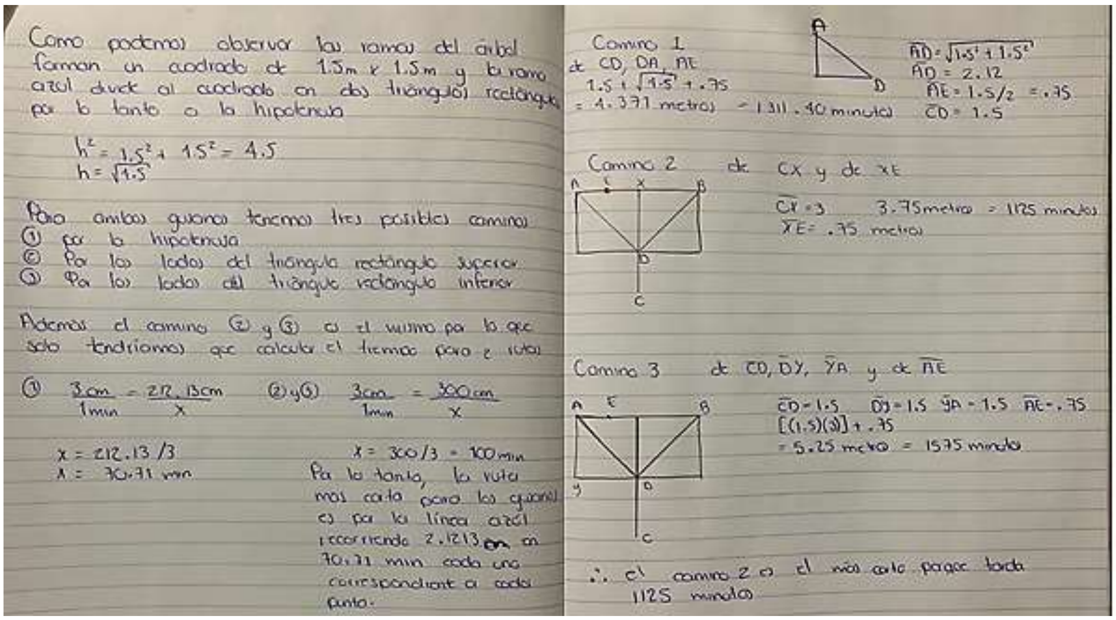


Figura 24. Solución al problema creado a partir de la variación del problema del cono por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

- ***Equipo 2***

El equipo 2, el cual estaba conformado por tres integrantes, creó un nuevo problema a partir del problema inicial, el del gusano sobre el cono, realizando una variación por combinación de elementos, es decir, variaron los cuatro elementos del problema.

Las estudiantes cambiaron la información en distintas ocasiones. En el primer problema creado, los estudiantes querían encontrar el costo mínimo de la compra de materiales para construir una cancha, teniendo dos opciones de compra, uno más barato que en otro. El contexto fue extra matemático y, el nuevo entorno matemático que quería que interviniera para resolver el problema era el criterio de la primera y segunda derivada.

Posteriormente, cambiaron la información y el requerimiento, ahora en el requerimiento piden encontrar el perímetro de una pista de hielo para que el costo del material sea el mínimo. El contexto fue el mismo que en el anterior, y el entorno matemático que interviene para resolver el problema es el criterio de la primera y segunda derivada. Los integrantes del equipo no pudieron resolver el problema que ellos crearon, por lo que decidieron crear otro problema.

Finalmente, volvieron a cambiaron la información. En este problema los estudiantes plantean una ecuación para aplicar el criterio de la primera y segunda derivada. Ahora en el requerimiento piden encontrar el costo de 210 labiales. El contexto fue el mismo que en el anterior, y el entorno matemático que interviene para resolver el problema es el criterio de la primera y segunda derivada.

- ***Equipo 3***

Los integrantes del equipo tres, cambiaron la información del problema inicial. En este caso, se sitúan en una parábola $y = x^2 - 1$, pero al momento de graficarla en el resultado, la grafican de manera errónea, la gráfica que plantean no corresponde con la función. El requerimiento también lo cambiaron, pues en este problema creado lo que piden es calcular las coordenadas del punto B, punto al que debe llegar el gusano. Asimismo, piden la distancia que recorrerá el gusano para llegar a su comida la cual se encuentra en el punto B. los estudiantes no lo escriben, pero el segundo requerimiento lo plantean teniendo en mente que la distancia que recorrerá el gusano debe ser mínima. El contexto es extra matemático y el entorno matemático que interviene para resolver el problema es el teorema de la distancia entre dos puntos y el criterio de la primera y segunda derivada.

Sesión cuatro

Etapa 5. Socialización con todos los participantes

En esta sección se presentan los resultados de la etapa 5, la cual es la socialización entre todos los participantes. Los participantes compartieron con todos, en exposiciones breves, las razones didácticas y matemáticas tras el problema creado, en forma grupal. También expusieron la solución de dicho problema. Asimismo resolvieron el problema creado por otro equipo, y expusieron su solución e hicieron comentarios críticos desde el punto de vista matemático y didáctico. El propósito fue que la discusión con los autores de los problemas, así como los comentarios de los participantes y del investigador, contribuyeran a mejorar la capacidad de crear problemas con potencialidades matemáticas y didácticas. En esta sesión, los integrantes del equipo 3 no asistieron para realizar esta etapa.

En este apartado, se presenta específicamente la producción oral y escrita que realizó el equipo de la Alumna A al resolver el problema que creó otro equipo.

- ***Equipo 1 resuelve el problema creado del equipo 2***

En esta sección se presenta la producción oral y escrita por parte del equipo donde colaboró la Alumna A al resolver el problema creado por otro equipo. La producción oral completa se presenta en el Apéndice II. En primera instancia se presenta el enunciado del problema que creó el equipo autor y algunas imágenes que incluyeron como apoyo visual. Posteriormente, se presentan algunas observaciones sobre el problema realizadas por el equipo de la Alumna A. Finalmente, se presentan algunas modificaciones, por parte realizadas por parte del equipo de la Alumna A, al enunciado inicial planteado por el equipo autor, las cuales están marcadas en color naranja, y con base en la modificación, resuelven el problema.

Producción oral del equipo de la Alumna A

Alumna B: *No pues no entiendo ese dato, pero es que mira lo que tenemos que optimizar es el perímetro de la pista, o sea la función perímetro*

Alumna B: *Es que o sea, por ejemplo, aquí nos dice que la pista de hielo tiene un área de 2000 m cuadrados, pero estamos de acuerdo que una fórmula para el área de esta figura pues no la conocemos, entonces la tendríamos que partir en un rectángulo y estas dos partes. Pero estas dos partes a su vez, la podemos partir en, o sea si pasamos una rayita por aquí y otra por aquí se parte otra vez en un rectángulo.*

Alumna A: *Para que las esquinas al contarlas se hagan el círculo.*

Alumna B: *Pero nada más dice que están unos medios círculos que tienen la medida del radio, o sea, éste y éste forman medio círculo, pero también este forma otro medio circulo pero no sé cuánto es de aquí a aquí.*

Alumna A: *Y luego dice que los lados curvos son, entonces, el ¼ del círculo que dices*

Alumna B: *si, o sea que también no sabemos, por ejemplo aquí podemos sacar una relación de que el costo por metro es de 50 pesos y todo este lado curvo también está en metros pero cuesta 60 entonces con una regla de tres, sacaríamos la medida de aquí, la medida de aquí, la medida de aquí, la medida de aquí.*

Alumna B: *pero no sabemos si el costo sea proporcional por metro, ¿si me entiendes? O si vaya disminuyendo.*

Alumna B: *Mira es que ahorita, se me ocurrió, según yo, nos falta el dato del radio mira por que por ejemplo, si nos vamos de acá abajo, la solución lo que tenemos, es minimizar es el costo del perímetro. Entonces sería la función perímetro en este caso es dos lados del rectángulo grande, dos lados del rectángulo chico y el del círculo, pero no conocemos el radio. Entonces se lo dejaríamos expresado, supongo.*

Alumna A: *Es que dice que de lado de los lados "y" que hay unos medios círculos que creo que es ése, a lo mejor se les olvidó dibujar el de arriba y dice que es la misma medida pero a lo mejor ese medio círculo es la misma medida que los de a lado.*

Alumna A: *¿Aquí maestra no falta que nos digan el radio? Pero maestra entonces pasa si falta eso ¿Nosotros le podemos dar valor o nada más poner las críticas?, entonces ¿podemos cambiar lo que nosotros creamos que nos va ayudar a resolverlo?*

Alumna B: *El primer problema que le veo es que o sea la redacción no está muy claro, o sea, cómo que no tiene continuidad o sea como que de un punto a otro cambia, pues sí está muy cortado*

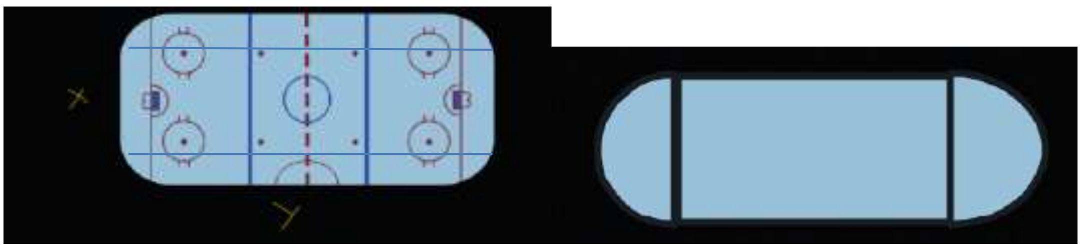
Alumna A: *si le falta algo, por ejemplo ahí en los 2000 m podemos especificar que esos 2000 m2 son del total, eso no lo dice.*

Producción escrita:

Problema inicial

Se desea construir una pista de hielo que tiene 2000 m^2. Está formada por un rectángulo de lados “x” y “y”. De los lados “y” están unos medios círculos que tienen la misma medida del radio. El precio de poner el hielo es de $200 pesos por m^2, también se pondrá una protección alrededor, en los lados rectos. El costo por metro es de $50 pesos y el precio de los lados curvos es de $60 pesos.

Calcular el perímetro de la pista para que su costo sea mínimo.



Observaciones.

- Falta especificar si el área es total para la pista
- Faltan medidas del radio
- Faltan fluidez y conexión en el texto
- Al resolver el ejercicio los valores de x e y son casi iguales
- Al resolver el ejercicio se encontraron fallas con la creación de las ecuaciones

Problema modificado.

Se desea construir una pista de hielo que tiene 2000 m^2 de área, esta está formada por un rectángulo de lados “x” y “y”. De los lados “y” están unos medios círculos que tienen diámetro de 2.4m, este medio circulo es el mismo que se forma en las esquinas de la pista. El precio de poner el hielo es de $200 pesos por m^2, también se pondrá una protección alrededor, en los lados rectos. El costo por metro es de $50 pesos y el precio de los lados curvos es de $60 pesos.

Calcular el perímetro de la pista para que su costo sea mínimo.

Solución

Ecuaciones derivadas de los datos:

$$A = (b * h) - [(l * l) - (\pi r^2)]$$

$$A = (y * x) - [(2.4 * 2.4) - (\pi 1.2^2)]$$

$$2000 = xy - 1.236$$

$$\frac{2001.236}{x} = y$$

Vamos a optimizar el perímetro de pista

$$P = 2(x - 2.4) + 2(y - 2.4) = 2x - 4.8 + 2y - 4.8 = 2x + 2y - 9.6$$

$$P = 2x + \frac{4002.472}{x} - 9.6$$

$$P^{\prime} = 2 + \frac{-4002.472}{x^2}$$

$$P^{\prime} = \frac{2x^2 - 4002.472}{x^2}$$

$$2x^2 - 4002.472 = 0$$

Encontramos los puntos críticos

$$x = \frac{-\sqrt{5003090}}{50}, x = \frac{\sqrt{5003090}}{50}$$

$$x = 44.73$$

Calculamos y

$$\frac{2001.236}{44.7} = y = 44.77$$

Calculamos la función del costo

$$C = 240 + 50(2x) + 50(2y)$$

$$C = 240 + 50(2(44.73)) + 50(2(44.77))$$

$$C = 240 + 4473 + 4477 = 9190$$

SEMANA 3

Primera sesión

En este apartado se presentan los resultados de la primera sesión al aplicar el problema de la radio a manera de evaluación. Los estudiantes resolvieron dicho ejercicio de manera tradicional.

- **Grupo 1. Centrados en la obtención de ecuaciones y aplicación de matrices.** Son las alumnas que se centraron en la obtención de ecuaciones para poder resolver el problema mediante matrices.

- **Grupo 2. Solución mediante desigualdades.** Son las alumnas que se centraron en el planteamiento de desigualdades.

- **Grupo 3. Método de prueba y error.** Son las alumnas que no plantearon sus variables y una ecuación.

- **Grupo 4. Centrados en la aplicación de matrices y variables de holgura.** Son las alumnas que se centraron en la resolver el problema mediante matrices incluyendo las variables de holgura.

Tres de las siete estudiantes se categorizaron en el grupo 1, en donde las alumnas, en primera instancia, obtenían sus ecuaciones y ponían restricciones al recordar que tenían que minimizar. Asimismo, planteaban un sistema de ecuaciones e introdujeron variables de holgura para proceder a resolver con matrices. Cabe mencionar que la alumna A, sigue estando categorizada en el grupo 1.

Figura 25. Producción escrita a la resolución al problema de la radio por parte de la Alumna A

Solamente una de las alumnas se centró en la categoría 2, la cual se refiere a que los estudiantes consideraron plantearon ecuaciones y a partir de ellas, resolver de manera algorítmica.

Una de las siete estudiantes se centró en la categoría 3 Método de prueba y error. La estudiante planteó sus variables y no una ecuación, solamente puso valores, que en uno de los casos, el resultado resultó correcto.

Dos de las siete estudiantes se categorizaron en el grupo 4, el cual se refiere a las alumnas que consideraron introducir variables de holgura para poder resolver por el método de matrices.

Se puede observar que solamente una de las alumnas que se encontraban dentro del grupo 3, al resolver el problema por segunda vez en la esta última sesión, lo realizo empleando marices al igual que la mayoría de sus compañeras. En cambio, la alumna que se encontraba en el grupo 2 en la primera sesión, consideró en esta última sesión resolver el problema solamente resolviendo desigualdades. Se puede decir que la Alumna A, tomada como representativa, volvió a resolver el problema empelando matrices, al igual que en la primera sesión a manera de evaluación., al igual que las dos alumnas que emplearon las variables de holgura en la primera sesión, también las emplearon para resolver el problema en la última sesión.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

6.1 Introducción

En este apartado se presentará el análisis y la discusión de los resultados presentados en el capítulo anterior.

En un primer momento se presenta el análisis y la discusión de los resultados del problema de la radio, el cual fue aplicado a manera de diagnóstico. Posteriormente, se presenta el análisis y la discusión del Mapa Hibrido que representa la creación del problema por variación de manera individual por parte de la Alumna A, el cual se llevó a cabo en la Etapa 3. Después se presenta el análisis y discusión del Mapa Híbrido de la creación del problema por variación, el cual se realizó de forma grupal en la Etapa 4. Posteriormente, se presenta el Mapa Híbrido correspondiente a la resolución del problema que creó otro equipo y que fue resuelto por parte del equipo de la Alumna A. Finalmente se presenta el análisis y la discusión de los resultados del problema de la radio, pero aplicado a manera de evaluación. El análisis y la discusión se llevarán a cabo mediante el empleo de los elementos del Enfoque Ontosemiótico.

Con la finalidad de facilitar la lectura de los Mapas Híbridos, los argumentos de dichos Mapas están marcados en color gris y blanco, esto con el fin de distinguir los argumentos empleados por cada una de las alumnas (alumna A y alumna B). Los argumentos de color gris corresponden a la Alumna A (marcado como A) y los argumentos de color blanco, son los que empleó la Alumna B (marcados como B).

6.2 Análisis de los resultados del problema diagnóstico de la radio

De acuerdo con los resultados obtenidos, la actividad matemática del grupo 1 se apoyó en el empleo de conceptos matemáticos como son ecuaciones, para posteriormente generar una matriz y dar solución mediante procedimientos algorítmicos. Cabe mencionar que la alumna representativa de la población de estudiantes, se encuentra dentro del grupo 1.

De acuerdo con los resultados obtenidos, la actividad matemática del grupo 2 se apoyó en el argumento “lo primero que vamos a hacer es sacar nuestras ecuaciones, y como lo que buscamos es maximizar, aplicamos algunas restricciones de donde se obtienen algunas desigualdades, en donde se les agregan las variables de holgura” para poder realizar el procedimiento en donde construyen una matriz ampliada con las nuevas variables de holgura las cuales son U, V y P. Posteriormente proceden a resolver de manera algorítmica intercambiando renglones, para finalmente obtener el resultado, sin embargo solo algunas de las alumnas llegaron al resultado correcto debido a que algunas otras se equivocaron en el planteamiento de sus ecuaciones para resolverlo mediante matrices “señalar en qué se equivocaron $u + 9v + x = 500$; $u + 6v + y = 100$; $80u + 216v – c = 0$, mientras que las alumnas que resolvieron correctamente el problema se apoyaron en las restricciones que tiene el problema para ser maximizado, planteando las ecuaciones correctamente y complementado con las variables de holgura para poder completar la matriz. Las alumnas emplean el concepto de variables de holgura y matriz ampliada para poder dar solución. Asimismo, se puede observar que la manera en la que emplean el concepto de optimización está relacionado con maximizar empleando matrices. Mencionan que teniendo definida la función objetivo, emplean el procedimiento de resolución como un problema dual para poder resolver el problema que es maximizar.

Por otra parte, la actividad matemática del grupo 3 se apoyó en el argumento "Debe llegar por lo menos a 2.16 millones de personas y debe de comprar un total de por lo menos 80 min de anuncio. Se deben hacer las ecuaciones y usar el método de las esquinas" para poder realizar el procedimiento en donde da nombre a las variables x y y, para posteriormente, plantear sus desigualdades. Posteriormente proceden a resolver de manera algorítmica mencionando que, para se emplea el método de las esquinas, obteniendo en primera instancia las esquinas de manera gráfica. Para lo que primero obtiene una función en donde sustituirá los valores obtenidos de las esquinas y finalmente obtener el resultado correcto.
Se puede observar que la manera en la que la alumna emplea el concepto de optimización está relacionado con el método de las esquinas, es decir, empleando un método gráfico, puesto que menciona que los puntos, donde intersectan las rectas obtenidas a partir de las ecuaciones, se obtienen graficando.

Finalmente, en la actividad matemática del grupo 4, las alumnas se apoyaron en el argumento "si solo fuera de radio, solo sería esa cantidad de dinero $36,000 por 2.16 millones de personas y si fuera por televisión sería 12,000, también considerando que lo verán alrededor de 2.16 millones de personas, aunque solo abarcan 24 min un total de $40,000 en 80 min con 7.2 millones de personas viéndolo" para poder realizar el procedimiento en donde plantea porcentajes. Para obtener estos resultados, el estudiante no realiza ningún procedimiento, por lo que si resultado resulta erróneo.

De lo anterior puede verse que la optimización para los grupos 1, 2 y 3 está relacionado con los procedimientos de matrices y esquinas, mientras que la optimización para el grupo 4 no es del todo claro debido a que no tienen asociado un procedimiento o cualquier otro objeto en el cual apoyarse para poder resolver (directamente) el problema.

6.3 Análisis de la resolución y variación del problema individual

De acuerdo con los resultados obtenidos, la actividad matemática del grupo 1 se apoyó en el argumento "aplicamos el teorema de Pitágoras" para poder realizar el procedimiento en donde traza líneas en el cono formando un triángulo rectángulo, en el cual consideran como catetos el valor del radio y la altura del cono. Posteriormente proceden a resolver de manera algorítmica para encontrar el lado faltante, que en este caso sería la distancia más corta. Sin embargo, se puede observar que la alumna llega a la respuesta correcta pero el recorrido que ella señala que es el más corto es erróneo, ya que el señalamiento que ella realiza, es sobre la superficie del cono. Asimismo, el planteamiento del problema es erróneo.

La actividad matemática del grupo 2 se apoyó en los conceptos de perímetro y área del círculo, y teorema de Pitágoras para dar solución al problema del episodio. La estudiante realiza el procedimiento en donde traza líneas en el cono formando un triángulo rectángulo, en el cual consideran como catetos el valor del radio y la altura del cono. Asimismo, emplea el área y perímetro del cono para poder encontrar la distancia mínima. Aquí, al igual que el estudiante anterior, muestra que el recorrido que realiza el gusano con la distancia mínima es la señalada sobre la superficie superior del cono, la cual es errónea. Asimismo, se puede observar que la manera en la que emplean el concepto de optimización está relacionado con el Teorema de Pitágoras.

Por otra parte, la actividad matemática del grupo 3 se apoyó en el argumento “la mínima longitud sería recorrer la mitad de la circunferencia del vaso cónico” para poder realizar el procedimiento en donde plantea obtener el perímetro. Posteriormente proceden a resolver de manera algorítmica aplicando la fórmula para obtener el perímetro de un círculo y finalmente dividirlo entre 2, justificando que lo realiza porque el gusano solo recorre la mitad.

Finalmente se puede observar que el recorrido que ella propone es erróneo, ya que lo describe sobre la superficie de cono. La manera en la que emplean el concepto de optimización está relacionado con el concepto de perímetro.

La actividad matemática del grupo 4 se apoyó en los conceptos de perímetro del círculo y teorema de Pitágoras para dar solución al problema del episodio. La estudiante realiza el procedimiento en donde traza líneas en el cono formando un triángulo rectángulo, en el cual consideran como catetos el valor del radio y la altura del cono. Asimismo, emplea el perímetro del círculo para poder encontrar la distancia mínima y finalmente dividirlo entre 2. Aquí, al igual que el estudiante anterior, muestra que el recorrido que realiza el gusano con la distancia mínima es la señalada sobre la superficie superior del cono, la cual es errónea.
Asimismo, se puede observar que la manera en la que emplean el concepto de optimización está relacionado con el Teorema de Pitágoras. Cabe mencionar que la Alumna A se encuentra categorizada en este grupo 4.

La actividad matemática del grupo 5 se apoyó en un procedimiento algorítmico para resolver el problema aplicando la fórmula para obtener el perímetro de un círculo y la fórmula del volumen de cono. Al momento de obtener el perímetro, realiza un procedimiento (resta) el cual conduce a un resultado erróneo. Asimismo, se puede observar que la alumna solamente plantea la fórmula de distancia entre dos punto argumentando que es la función que se debe optimizar, sin embargo, no la emplea para resolver el problema.

Finalmente se puede observar que el recorrido que ella propone es erróneo, ya que lo describe sobre la superficie de cono. La manera en la que emplean el concepto de optimización está relacionado con el concepto de perímetro y distancia entre dos puntos.

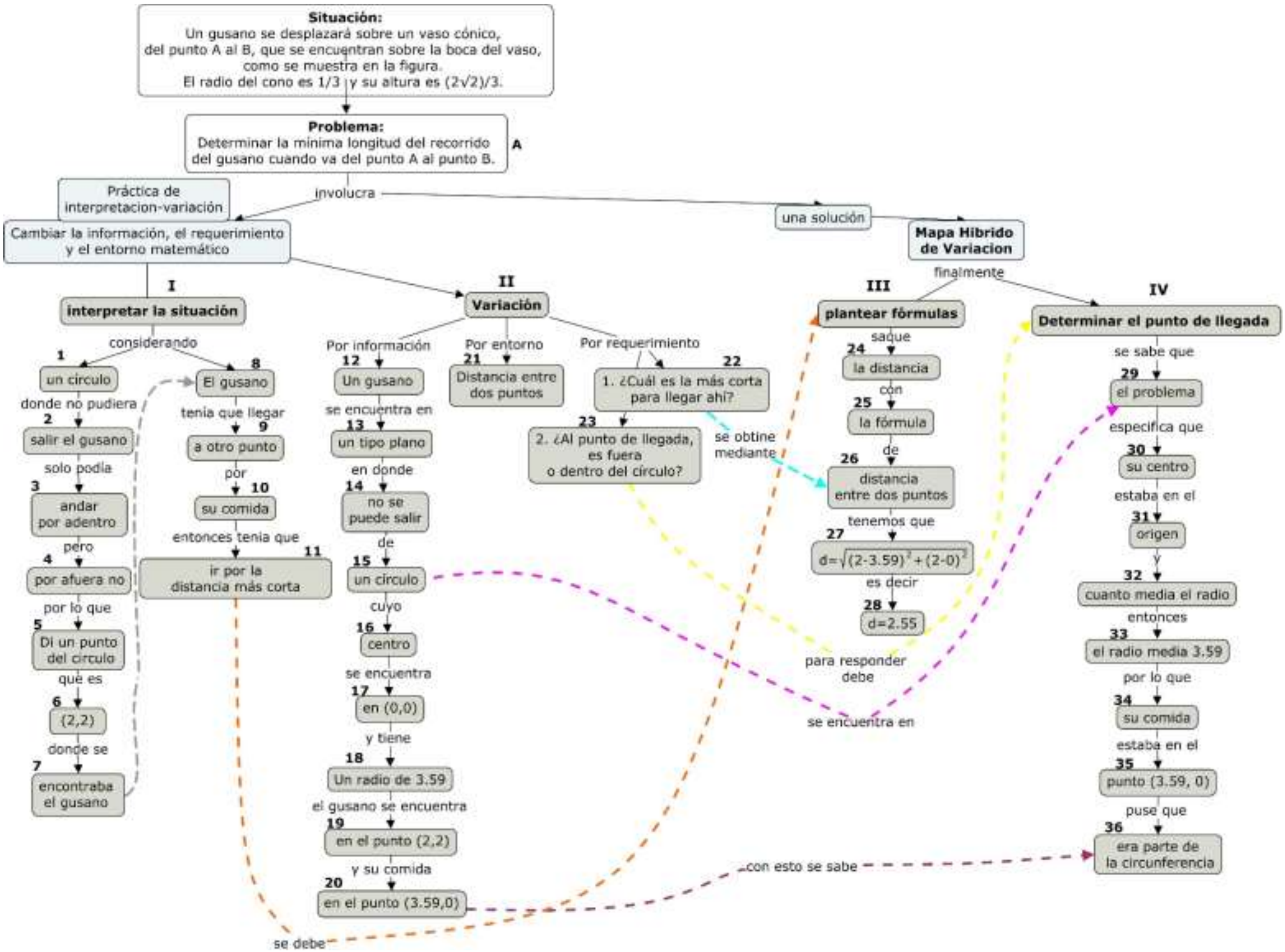


Figura 26. Mapa Híbrido de la variación individual de la Alumna A

En la figura 26 se ilustra el Mapa Híbrido asociado a la producción de la Alumna A en la variación del problema del cono. En el mapa se identifican 3 prácticas: la práctica I, que es de interpretación; la práctica II, de variación; la práctica III, resolución del problema variado. Asimismo, se identifican un total de 36 objetos matemáticos y no matemáticos, 24 de ellos son objetos matemáticos, 10 son objetos no matemáticos y 2 de ellos son argumentos. Existen 11 objetos en la práctica I numerados del 1 al 11, 12 objetos en la práctica II numerados del 12 al 23 y 13 objetos en la práctica III numerados del 24 al 36. La construcción del Mapa Híbrido correspondiente a la variación se inicia con la descripción del problema del cono mediante la pregunta correspondiente al problema (ver A en figura 25). Asimismo, en la parte inferior se describen los nombres de cada una de las prácticas correspondientes de manera consecutiva.

En la primera práctica la alumna identifica la restricción del movimiento del gusano al materializar el primer argumento: *Yo hice un* ***círculo*** *del que no pudiera* ***salir el gusanillo****, entonces solo podía* ***andar pues por adentro*** *pero* ***por acá afuera no****. Entonces yo di* ***un punto del círculo*** *que es este* ***(2,2)*** *donde se* ***encontraba el gusano***. En éste primer argumento se encuentran los conceptos matemáticos 1, 5, 6, relacionados con aspectos geométricos del problema; así como los conceptos no matemáticos 2, 3, 4 relacionados con las restricciones del movimiento del gusano y un argumento 7. En un segundo argumento: *entonces* ***el gusano*** *tenía que llegar a* ***otro punto*** *por* ***su comida****. Entonces tenía que* ***ir por la distancia más corta****;* mediante los conceptos matemáticos 9 y 11, relacionados con aspectos geométricos del problema, y conceptos no matemáticos 8 y 10, se identifica el problema a ser resuelto, el cual es identificar la distancia mínima. Dicho argumento marcado con la ruta 8-9-10-11, está relacionado con la optimización, en donde identifica la restricción del gusano y la alumna lo emplea para variar el problema y dar lugar al primer argumento de la práctica II.

La práctica II se inicia con una idealización los objetos 12-20, representados mediante la ruta 12-13-14-…-20, ya que la alumna no está pensando en el gusano, sino más bien, en un punto en el plano. También se realizó dos procesos de significación, a través de 12-13-14-…-20, el primer proceso de significación se realizó en 19, que es entre el par ordenado (2,2) y la ubicación del gusano, y el segundo, en 20, con el concepto comida asociado al punto (3.59, 0) en el plano.

Por otra parte, en 21 dentro de la práctica II, se involucra una propiedad matemática que es distancia entre dos puntos. Finalmente, se presenta en 22 y 23 las preguntas correspondiente al nuevo problema creado a partir de la variación, las cuales están relacionadas con la optimización. En 22 se puede observar un proceso de problematización, el cual está relacionado con el concepto de optimización.

En la práctica III, en un primer argumento señalado en la ruta 24-25-26-27-28, la alumna llevó a cabo un proceso de algoritmización para calcular la distancia entre dos puntos, es decir, resuelve el problema que planteó en la práctica II, el cual le permite obtener el resultado en 28. También llevó a cabo un proceso de particularización porque emplea el Teorema de Pitágoras general y lo particulariza al contexto que está resolviendo. Finalmente, en el segundo argumento que se señala en la ruta 29-30-…-36, se puede observar un proceso de argumentación y de significación.

En el argumento 8-11 de la práctica I, donde la alumna identifica la restricción del movimiento del gusano en el argumento 1-7, y la acción en el argumento 8-11, el cual tiene que ver con la optimización y emplea ambos argumentos 1-7 y 8-11 para llevarlos al contexto nuevo, el cual corresponde a la variación por información, en el argumento marcado con la ruta 12-20 en la práctica II. Y una vez obtenida la variación en la práctica II, la alumna problematiza. Después, en la práctica III en el argumento señalado con la ruta 24-25-26-27-28, la alumna lleva a cabo un proceso de algoritmización y particularización. Finalmente, en la misma práctica III, la alumna la alumna lleva a cabo un proceso de justificación marcado con la ruta 29-30-…-36, el cual está apoyado en el argumento 12-13-14-…-20 para poder justificar el resultado en 28.

6.4 Mapa Híbrido de la Creación de Problemas grupal

A continuación, en la figura 27 se presenta un esquema general del Mapa Híbrido de la variación y creación del problema de manera grupal. Dicho mapa fue creado a partir de la producción oral y escrita por parte de las integrantes del Equipo 1, en donde colaboró la Alumna A. El mapa presenta tres prácticas: práctica I, de discusión e interpretación; práctica II, de variación; práctica III, resolución de la pregunta 1; y práctica IV, resolución de la pregunta 2. Se presentan dos prácticas relacionadas con la resolución, esto debido a que, cuando las alumnas variaron en la práctica II, surgieron dos preguntas. Por cuestiones de espacio, se presentan cuatro mapas separados, los cuales corresponden a cada una de las prácticas.

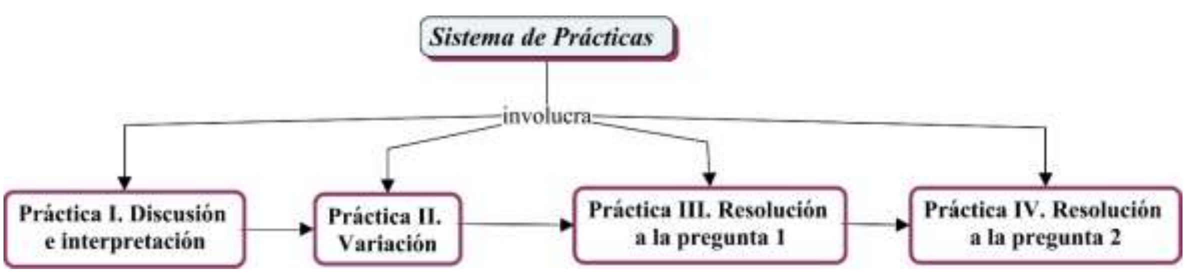


Figura 27. Esquema del sistema de prácticas perteneciente al Mapa Híbrido de la variación del problema por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

La figura 28 muestra el Mapa Híbrido de la práctica I: interpretación y discusión, el cual muestra el intercambio de ideas e interpretación. El mapa se presenta de manera simplificada, en donde la simplificación consistió en prescindir de la discusión de variación del problema que no está relacionada con la optimización.

En general, esta primera práctica consiste en dos momentos, que por cuestiones de espacio, solamente se presentará en el mapa del segundo momento. El primer momento consiste en un dialogo en el cual las alumnas planteaban tres gusanos y señalaron que estaban optimizando sin emplear funciones y el criterio de la primera y segunda derivada. Asimismo, comenzaron planteando un problema en el cual un árbol iba a crecer ciertos metros por año, por lo que optaron por modificar y plantear que el árbol no creciera, sino más bien, situar a tres gusanos en el árbol y que los gusanos avanzaran con cierta velocidad cada minuto, y con base en ello poder calcular cuánto tiempo tardan en llegar de un punto a otro y calcular cuál era la ruta más corta. De la misma manera, incluyen una propiedad que es la regla de tres, la cual la emplean para realizar conversiones de medidas y obtener distancias. Asimismo, argumentan las posiciones en las que se encontraran los gusanos y los distintos puntos a los que llegarán cada uno tomando en cuenta las distintas rutas.

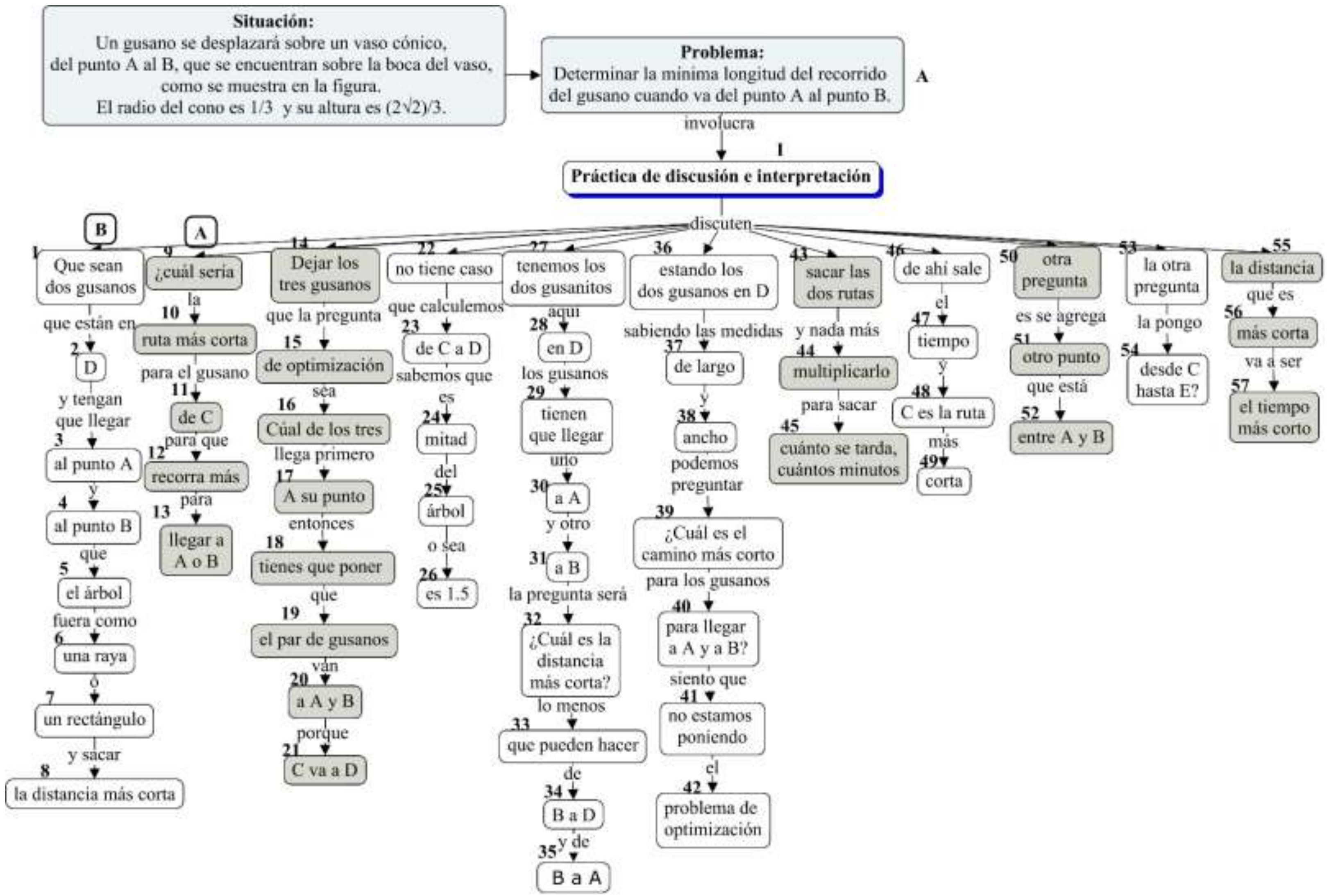


Figura 28. Mapa Híbrido de la práctica I. Discusión e interpretación de la variación del problema de manera grupal por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

En la figura 28 correspondiente al Mapa Híbrido de la práctica I, se identifican un total de 57 objetos matemáticos y no matemáticos numerados del 1 al 57, de los cuales 40 son objetos matemáticos y 17 son objetos no matemáticos. Los argumentos marcados en color gris, son argumentos que empleó la Alumna A, tomada como representativa, y los argumentos marcados en color blanco, son los argumentos empleados por la alumna B, quien formó parte del equipo de la Alumna A.

En el discurso que las alumnas emplean para variar y crear el problema en la Práctica I, hablan de dos gusanos, en este sentido están empleando un proceso de idealización. En el primer argumento de la alumna B, ruta 1-2-…-8, aparecen 6 conceptos matemáticos. En particular cuando la alumna habla del concepto 5, no está pensando en un árbol como tal, sino más bien lo piensa como algo abstracto al decir que el árbol sea como 6 y 7. Aquí se puede observar la realización de una idealización debido a que la alumna habla de un árbol, pero a su vez lo está representando como una raya, es decir, primero idealiza el árbol y a su vez lleva a cabo un proceso de significación mentalmente, donde dicha significación es que a una raya le asocia el significado de árbol para posteriormente materializar el concepto de raya. Es por ello que al momento de hablar de un árbol, lo está idealizando y está estableciendo una función semiótica con un concepto matemático. Es decir, al árbol lo está significando de forma geométrica como raya o como rectángulo. Asimismo cuando las alumnas hablan de optimización se están refiriendo al concepto 8.

Así mismo, en el primer argumento de la Alumna A, ver A, se puede apreciar el proceso de problematización con la pregunta planteada en la ruta 9-11-12-13. Se puede observar que la alumna relaciona la optimización con el concepto 10. Asimismo, en su segundo argumento marcado con la ruta 14-15-16-…-21, afirma que la optimización está relacionada con los conceptos 16 y 17.

También se puede observar que la alumna B, en su cuarto argumento, ver 37-44, considera que no está empleando la optimización debido a que no tienen funciones para derivar.

Las alumnas al momento de abordar la optimización no solo ven la optimización en las trayectorias, sino también en el tiempo, ver 45-46-47; 48-49-50-51; 52-53-54; 55-56; 57-58-59. Esto surge del argumento 37-38-39. Asimismo, la E1 que es la Alumna A considera una problematización, pues considera relevante introducir un nuevo punto con el fin de optimizar en espacio y tiempo, y así hacer del problema, un problema más retador, ver 52-54 y 57-59.

Por otra parte, la alumna B sugiere prescindir del tercer gusano por el hecho de que el gusano ya se sabe la distancia y no tiene otras opciones más que una sola ruta, pero en este caso la alumna tiene una equivocación, ver ruta 22-27, porque si bien, el hecho de tener una sola posibilidad puede que esa sea la mínima distinta aunque los otros dos gusanos tengan distintas posibilidades para llegar a su destino. Entonces, como el tercer gusano tiene solo un camino, tienen la creencia de que no puede optimizarlo ver ruta 22-27. Sin embargo, el hecho de que sepan cuál es la distancia que recorrerá el gusano de C a D, no quiere decir que la distancia sea mayor, puede ser menor que las otras distancias que recorrerán los otros dos gusanos. Realmente si podían considerar los tres gusanos y aunque ya se conociera la distancia que recorrería el tercer gusano, pudiera ser que esa fuera la distancia mínima. Se puede observar que las alumnas entienden que solamente se puede optimizar si se tienen distintas rutas.

La siguiente figura 29, muestra el Mapa Híbrido correspondiente a la práctica II de variación.

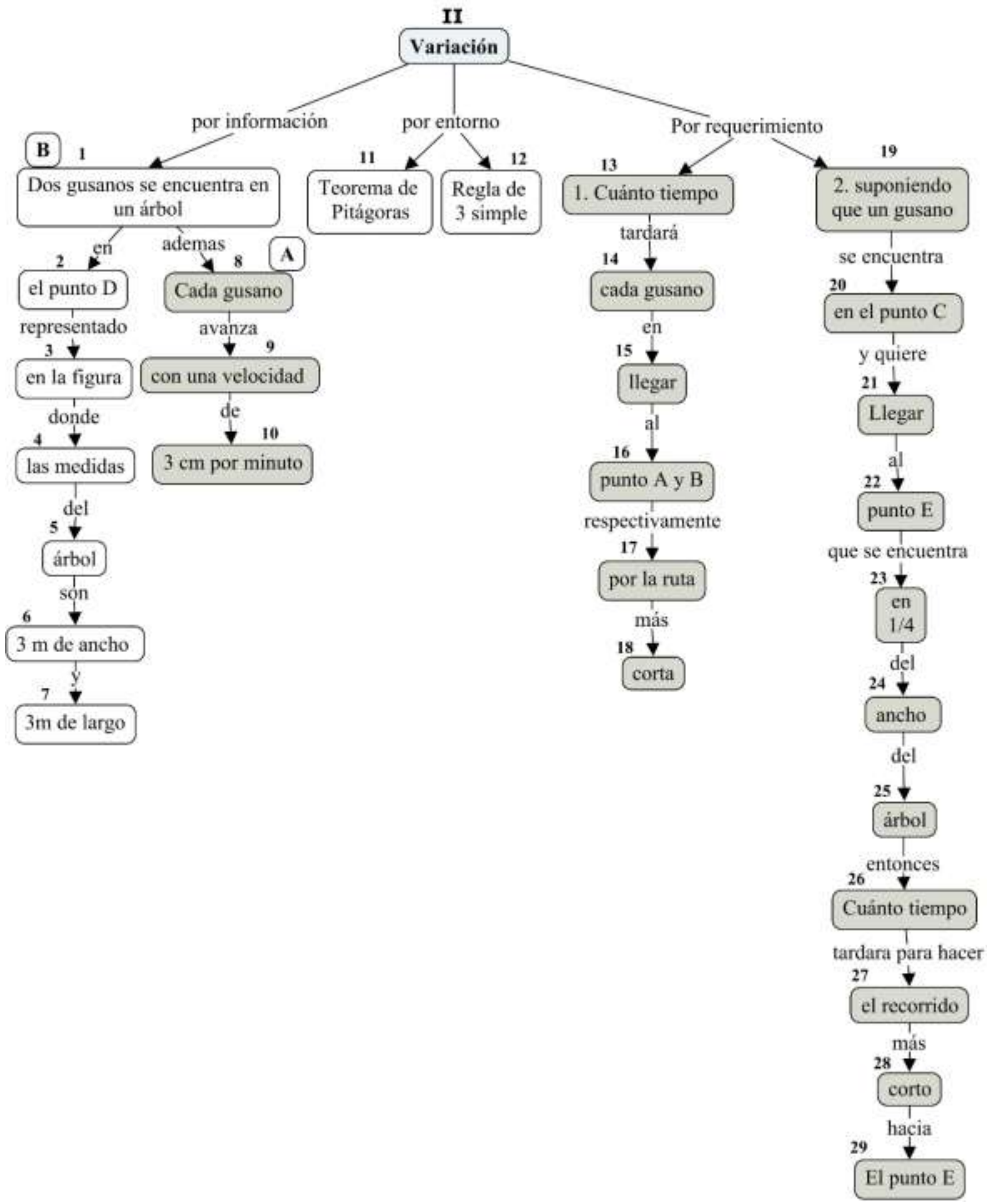


Figura 29. Mapa Híbrido de la práctica II. Variación del problema de manera grupal por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

En esta práctica II se identifican un total de 26 objetos matemáticos y no matemáticos numerados del 1 al 26, de los cuales 20 son objetos matemáticos y 6 son objetos no matemáticos. De manera general, las alumnas plantea tres categorías que llevan a la variación del problema, la primera nombrada información, la segunda entorno y la tercera requerimiento. Los argumentos marcados en color gris, son los empleados por la alumna representativa, Alumna A, y los argumentos en color blanco, por la Alumna B.

En la primera categoría, las alumnas inician con la idealización del gusano, del árbol y de la ubicación espacial de los gusanos en el árbol, ruta 1-5, los cuales relacionan con los conceptos geométricos de ancho y largo, ver 6 y 7. Además, este argumento lo relacionan con el argumento de la Alumna A, el cual incluye un concepto físico matemático que es la velocidad. Ella argumenta que cada gusano se mueve con cierta velocidad, ver ruta 8-9-10.

En la segunda categoría, por entorno, mediante 11 y 12 las alumnas se involucran dos objetos matemáticos, la propiedad matemática del Teorema de Pitágoras y la propiedad de la regla de 3 simple. También llevó a cabo un proceso de particularización ya que emplea el Teorema de Pitágoras general y lo particulariza al contexto que está resolviendo. Lo mismo sucede con la propiedad de la regla de 3 simple.

En la tercera categoría, por requerimiento, en el quinto y sexto argumento realizado por la Alumna A, ver ruta 13-14-15-…-18 y 19-29, se puede observar un proceso de problematización, el cual está relacionado con el concepto de optimización. Específicamente en el argumento 6, ver ruta 19-29, la alumna propone asignar un nuevo punto sobre el árbol, dando ciertas restricciones, y así obtener una segunda pregunta y crear un problema más retador, considerando optimizar en tiempo y espacio.

La figura 30 corresponde al Mapa Híbrido de la práctica 3, la práctica de resolución

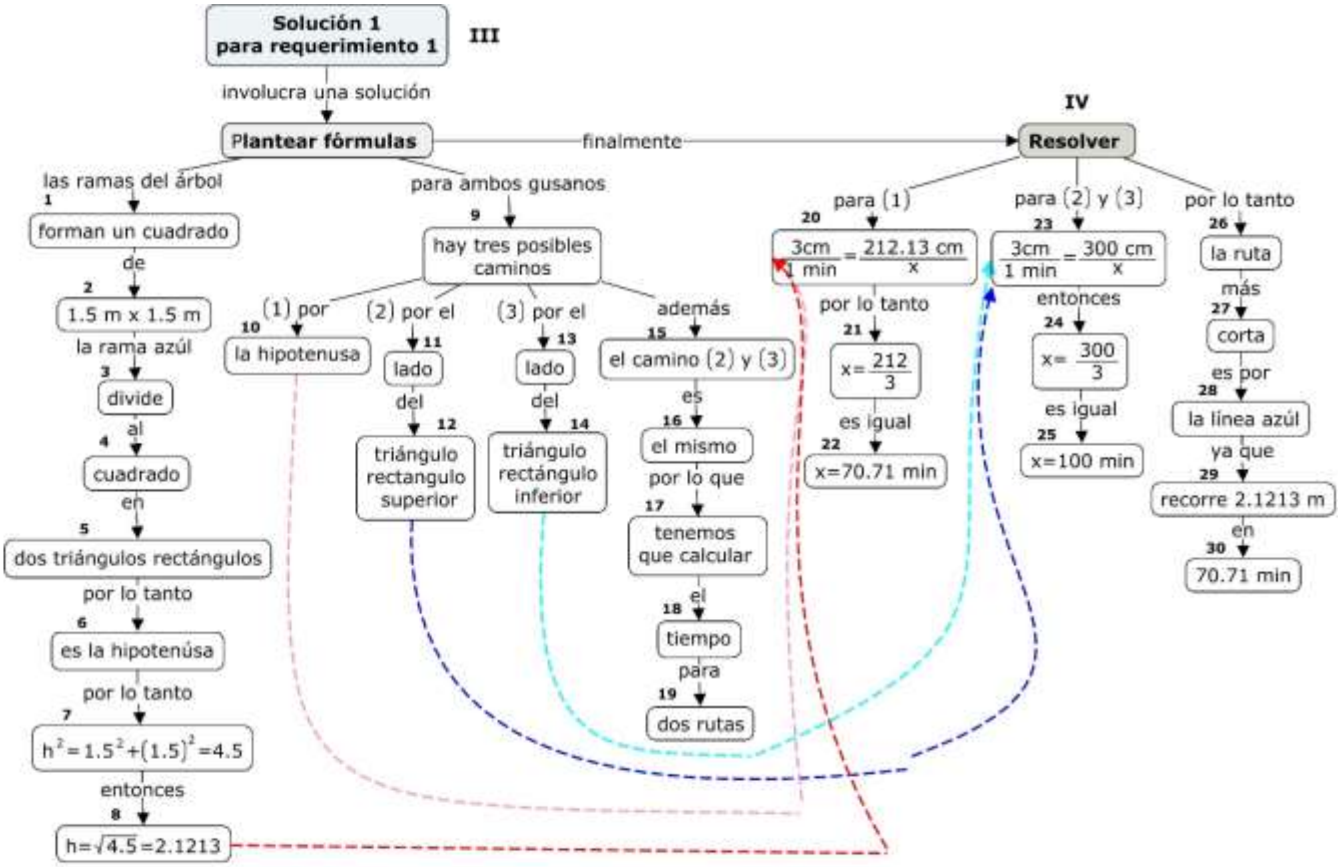


Figura 30. Mapa Híbrido de la práctica III. Resolución del problema variado de manera grupal por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

En esta práctica III de manera general, las alumnas plantea dos categorías que llevan a la resolución del problema, la primera nombrada planteamiento de fórmulas y la segunda resolver el problema.

En la primera categoría, las alumnas inician con la idealización del árbol y su ubicación espacial, ver ruta 1-5, así como la una manera de encontrar uno de los caminos, ver ruta 5-8, los cuales relacionan con los conceptos geométricos de ancho y largo, ver 6 y 7. Asimismo, en 7 y 8, lleva a cabo un proceso de algoritmización e involucran un procedimiento para obtener la hipotenusa. En el segundo argumento de la primera categoría, las alumnas indican las posibles rutas que pueden tomar ambos gusanos, ver 10; 11-12 y 13-14. Asimismo, las alumnas llevan a cabo un proceso de justificación con el argumento 15-19, el cual permite justificar los argumentos 10; 11-12 y 13-14.

Finalmente, en la segunda categoría las alumnas llevan a cabo un proceso de algorimización, aplicando el concepto matemático de la regla de 3 para obtener la ruta más corta dado y el menor tiempo, ver 20-22 y 23-25. Asimismo, el argumento marcado con la ruta 26-30, es un proceso justificativo que permite validar la respuesta dada.

La figura 31 corresponde al Mapa Híbrido de la práctica IV, la práctica de resolución al segundo requerimiento planteado en la variación del problema.

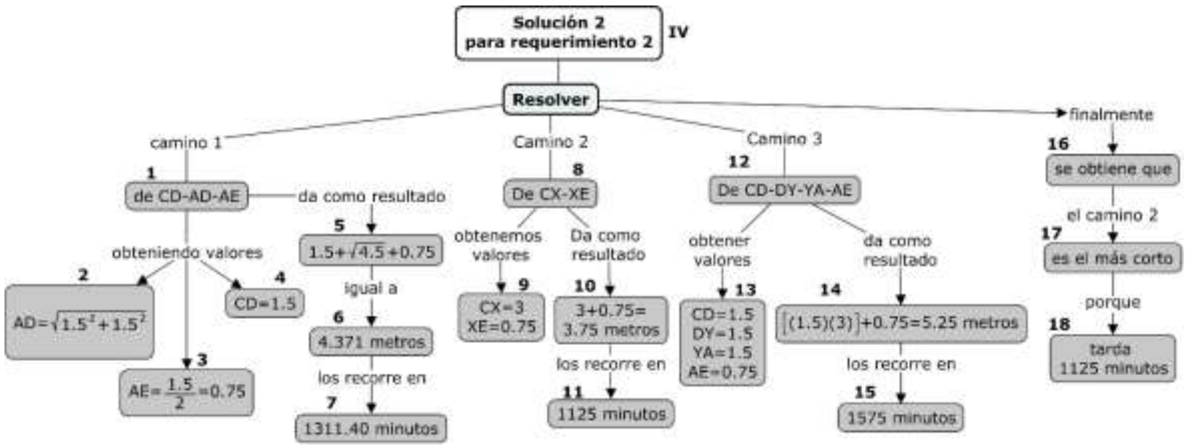


Figura 31. Mapa Híbrido de la práctica IV. Resolución para el requerimiento 2 del problema variado de manera grupal por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

En esta última practica IV, se pueden observar los distintos caminos que pueden seguir los gusanos para llegar a su punto final, ver rutas 1-7; 8-11 y 12-15. Asimismo, la Alumna A quien fue la que resolvió, llevó a cabo un proceso de algorimización, aplicando el concepto matemático de la regla de 3 para obtener el tiempo que tardan los gusanos en llegar al punto E, ver rutas 6-7; 10-11 y 14-15. El argumento marcado con la ruta 16-18 es un proceso justificativo que permite validar la respuesta dada al requerimiento.

De acuerdo con el análisis de los resultados realizado anteriormente con los Mapas Híbridos de la variación del problema de manera individual y grupal, se pudo observar que el significado que la Alumna A asocia a la optimización al momento de variar el problema de manera individual, es la distancia entre dos puntos, llevando a cabo también un proceso de particularización porque emplea el Teorema de Pitágoras general y lo particulariza al contexto que está resolviendo. Por otra parte, cuando varía el problema de manera grupal, asocia la optimización al concepto de distancia más corta. De la misma manera, Alumna A no solo se limita a optimizar en espacio, sino que considera relevante optimizar en tiempo.

Sin embargo, no sucede lo mismo con el resto de los equipos, equipo 2 y 3, ya que el significado que le asocian a la optimización es el criterio de la primera y la segunda derivada. En el caso particular del equipo 2, las integrantes del equipo no variaron de manera correcta dando como resultado un problema mal planteado, el cual no pudieron resolver, por lo que decidieron volver a variar el problema original y crear un segundo problema, pero ahora más sencillo, pero siempre asociando la optimización al criterio de la primera y segunda derivada.

En la siguiente sección se analiza el Mapa Híbrido correspondiente a la resolución del problema planteado por el equipo 2. Dicho problema fue resuelto por el equipo donde colaboró la Alumna A. Cabe mencionar que el problema fue el primero que creó el equipo 2.

6.5 Mapa Híbrido de la resolución del problema creado por otro equipo

En este apartado se muestra el análisis del Mapa Híbrido correspondiente a la resolución del problema variado por el equipo 2, *Se desea construir una pista de hielo que tiene 2000 m2. Está formada por un rectángulo de lados "x" y "y". De los lados "y" están unos medios círculos que tienen la misma medida del radio. El precio de poner el hielo es de $200 pesos por m2, también se pondrá una protección alrededor, en los lados rectos. El costo por metro es de $50 pesos y el precio de los lados curvos es de $60 pesos*. *Calcular el perímetro de la pista para que su costo sea mínimo.*

El problema anterior fue resuelto por el equipo en donde colaboró la Alumna A. La resolución del problema por parte del equipo de la Alumna A se llevó a cabo mediante tres prácticas: práctica I, Interpretación y discusión de la situación; práctica II, variación, y práctica III, Resolución. Por cuestiones de espacio, el sistema de prácticas se presenta de manera separada en las figuras 32, 33 y 34.

La siguiente figura 32 muestra la primera práctica la cual corresponde a la Interpretación y Discusión. Se puede observar que de dicha práctica es netamente discursiva, por un lado inician interpretando y una vez que interpretan presentan argumentos que les permite establecer que el problema está mal planteado al carecer de datos, presentar una inadecuada redacción y no tener claras algunas relaciones.

En esta práctica emergen argumentos que les permite justificar a las alumnas el hecho de que el problema planteado está mal formulado. Por ejemplo el argumento 29-30-31-32 indica que no se tiene claro cuál es la relación entre el costo y la longitud. Asimismo el argumento 33-34-…-45, indica que el problema carece de datos. De la misma manera, se puede observar que emergen algunos conceptos matemáticos, ver 1 y 3.

Con base en el análisis y la discusión realizada en esta práctica por parte de las alumnas, la Alumna A sugirió una modificación del problema, ver 55. En el tercer argumento, correspondiente a la E2, ver ruta 1-2-…-8, la alumna identificó el problema a ser resuelto y advirtió la resolución del problema mediante el argumento 20-21-…-28. Finalmente en el argumento de Alumna A, sugirió algunos cambios a los valores de las dimensiones, ver ruta 60-62.

Se puede observar que el problema variado por el equipo 2, fue un problema convencional. Ya que se destaca a lo largo del Mapa Híbrido, el uso del concepto función perímetro. Es por ello que el equipo de la Alumna A identificó la función que tienen que encontrar, la cual es la función perímetro, ver argumento 1-2-…-8. Las alumnas logran advertir que tienen que encontrar una función y los conceptos relacionados a la función que quieren encontrar, los cuales son el perímetro del rectángulo y el perímetro del círculo. Pero también advierten que carece de datos, por ejemplo la medida del radio.

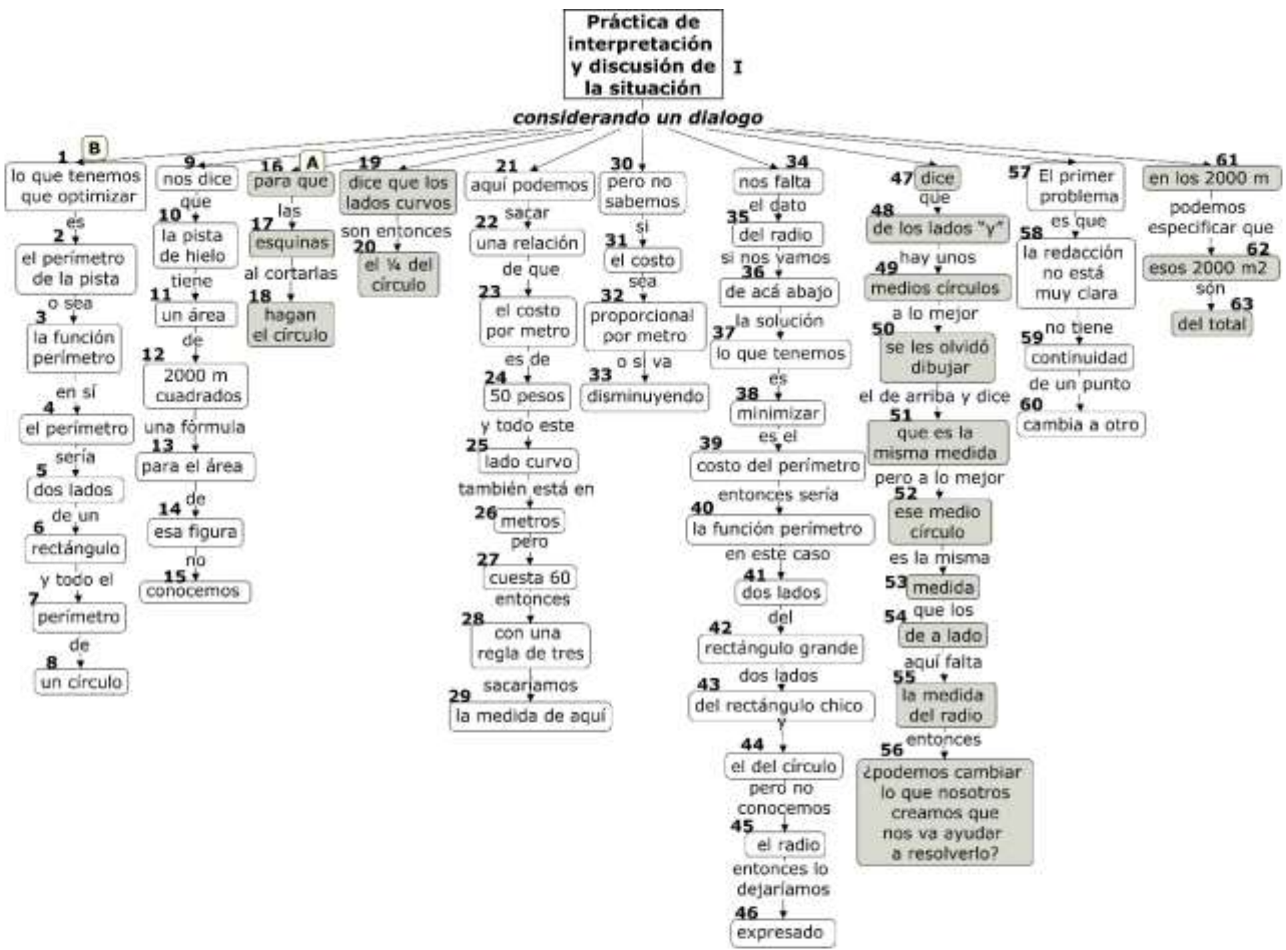


Figura 32. Mapa Híbrido de la práctica I. interpretación y discusión del problema resuelto por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

La figura 33 corresponde al Mapa Híbrido de la práctica II, la práctica de modificación, en donde las alumnas realizan variaciones al problema. En el discurso que las alumnas emplean para variar el problema en la Práctica, hablan de la forma que tienen la pista, en este sentido están empleando un proceso de visualización. En el primer argumento marcado con la ruta 1-7, Alumna A sugiere asignar valores a los lados de la figura. En el argumento 2, correspondiente a la alumna B, ver ruta 8-14, se puede observar un proceso de problematización, el cual está relacionado con el concepto de optimización, ya que considera plantear una función para poder optimizar el costo mínimo, ver 10 -11. Aquí la alumna está asociando el costo mínimo con el concepto de optimización.

Por otra parte, Alumna A lleva a cabo un proceso de idealización del objeto 9 mediante el argumento marcado con la ruta 34-43. Asimismo, la alumna B, lleva a cabo un proceso de problematización, al sugerir plantear ecuaciones con la finalidad de justificar si los datos incluidos ayudarán a resolver el problema, ver 44-53. En el argumento marcado con la ruta 57-67; 68-77, la alumna lleva a cabo una justificación y un proceso de algoritmización.

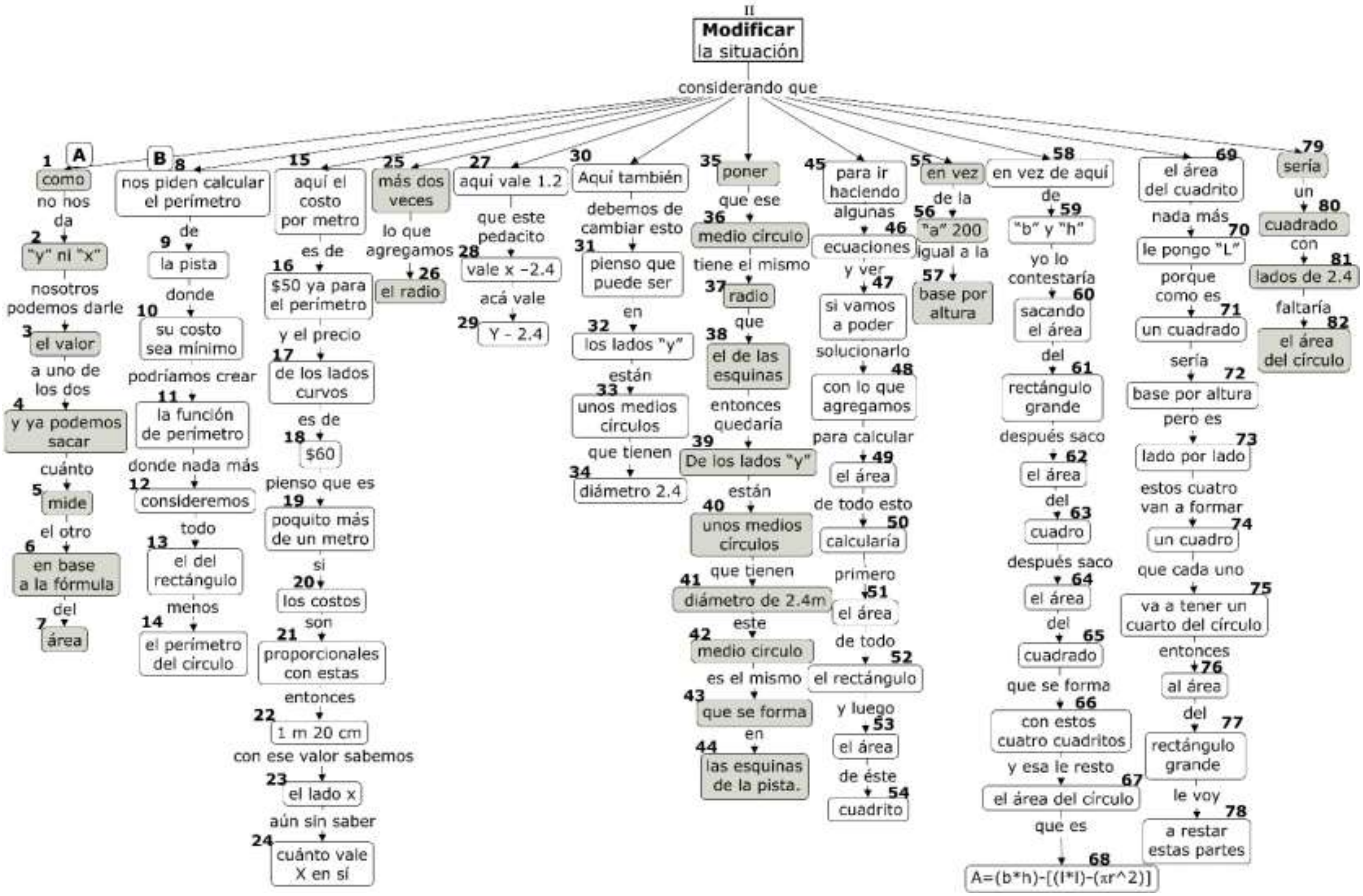


Figura 33. Mapa Híbrido de la práctica II. Modificación de problema resuelto por parte del equipo 1 donde colaboró la Alumna A.

La figura 34 muestra la Práctica III, la cual es la resolución del problema variado por las alumnas.

La alumna B, marcado como B, inicia con una significación de la optimización, mediante el argumento marcado con la ruta 1-6. Específicamente en el concepto 12 y 13, se puede apreciar el significado que ella asocia. Mediante el argumento marcado con la ruta 7-18, las alumnas identifican el problema a ser resuelto, y a partir del argumento 21-26, se muestra un proceso de algoritmización que permite establecer la función que optimizarán. Asimismo, en la ruta 27-31, se puede observar la relación que establecen entre los conceptos 38 y 39. Los conceptos marcados con la ruta 43-85, muestran la realización de un proceso de algoritmización, advierten una resolución mediante los conceptos 45-57, en donde aplicaron la propiedad del criterio de la primera y la segunda derivada, advirtiendo una restricción en 72.

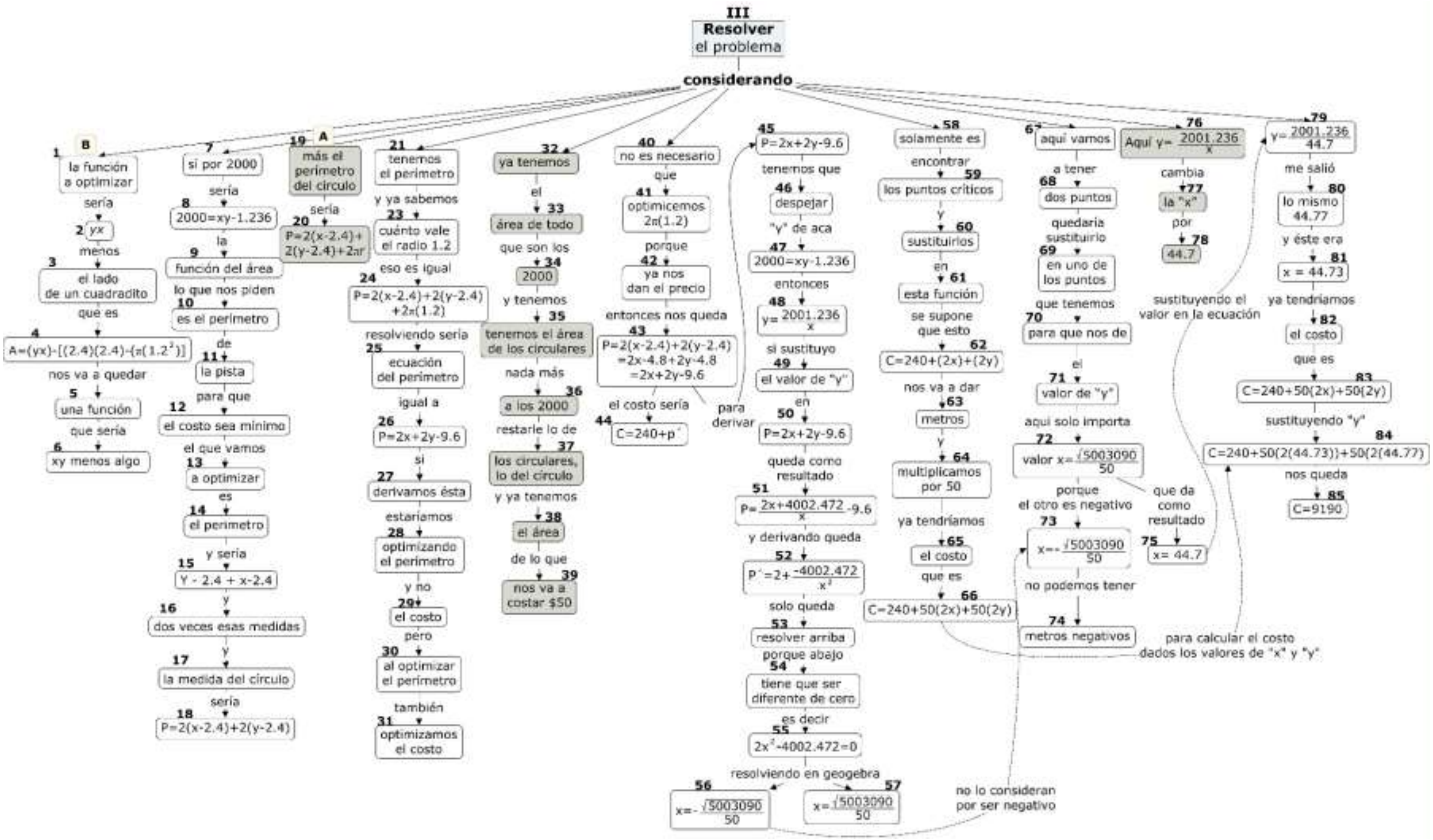


Figura 34. Mapa Híbrido de la práctica III. Resolución del problema creado por el equipo 2 y resuelto por parte del equipo 1 donde colaboró Alumna A.

El significado que atribuye el equipo de la Alumna A a la optimización al resolver el problema que varió el equipo 2, está ligado a un proceso de algoritmización asociado al criterio de la primera y segunda derivada, el cual consiste en identificar una función, derivarla, encontrar sus raíces y calcular la segunda derivada. Una vez calculada la segunda derivada, sustituye las raíces en la segunda derivada y observa si el resultado es positivo o negativo, si es positivo es mínimo y si es negativo es máximo.

Por otra parte, el significado que dio el equipo 1 donde colaboró la Alumna A a la optimización en la etapa anterior (variación de manera grupal), no tenía que ver con un proceso de algoritmización, ya que no buscaban encontrar una función que derivar, sino más bien, lo que se buscaba era identificar las distintas formas de llegar al mismo punto y encontrar la distancia más corta, y esta optimización no solo se llevó a cabo en espacio sino también en tiempo. En cambio, cuando las alumnas resolvieron el problema creado por el equipo 2, manejaron el significado clásico de optimización en esta última etapa debido a que la variación que realizaron del problema del equipo 2, se apoyó en lo que ellas creían que los integrantes de ese equipo tenían en mente. Es decir, con base en los elementos que encontraron del problema, comprendieron lo que las alumnas del equipo 2 querían hacer. Y esto se confirmó en la última etapa de la socialización, cuando el equipo de la Alumna A expuso la resolución del problema.

Esta última etapa que plantea Malaspina cuando resuelven un problema de otro equipo, podría resultar nociva para la construcción del conocimiento que se quiere, en este caso de la optimización no clásica. Ya que el equipo 2 varió el problema dándole el significado clásico a la optimización asociado a la primera y segunda derivada. En consecuencia, cuando el equipo de la Alumna A resolvió el problema variado del equipo 2, lo que les provocó fue que regresaran al uso clásico de la optimización, sabiendo que en la etapa anterior (Etapa 4) el equipo de la Alumna A no hizo un uso clásico de la optimización.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

7.1 Introducción

En este capítulo se presenta en un primer momento, sección 7.2, la respuesta a la primera pregunta de investigación correspondiente a la concepción de optimización construida mediante la Creación de Problemas. Posteriormente, en la sección 7.3, se responde a la segunda pregunta de investigación acerca de cómo se construye dicho conocimiento. Finalmente, en la sección 7.4, se presentan algunos señalamientos referentes al uso de la técnica de Mapas Híbridos para analizar la construcción de conocimiento en la Creación de Problemas, así como también algunas perspectivas futuras de esta investigación en la sección 7.5.

Con base en el análisis llevado a cabo en el capítulo anterior, es posible llegar al planteamiento de las conclusiones. Las conclusiones a las que se llegaron en este trabajo, en general son de dos tipos. El primer tipo tiene que ver con la construcción del conocimiento de la optimización y, el segundo, relacionada con la metodología de Creación de Problemas de Malaspina (2017).

La optimización clásica que se enseña en el aula, el significado que le asocian es el del criterio de la primera y segunda derivada, en donde lo que hace el alumno es buscar una función y, ya que se obtiene la derivada, después se iguala a cero dicha función derivada para posteriormente obtener las raíces y calcular la segunda derivada. Una vez calculada la segunda derivada, se sustituyen las raíces en la segunda derivada y observa si el resultado es positivo o negativo, si es positivo es mínimo y si es negativo es máximo. En cambio, con la implementación de la metodología de Malaspina (2017), se pretendía que los estudiantes asociaran a la optimización un significado distinto al clásico.

Como conclusión general de este trabajo puede aseverarse que la metodología de Creación de Problemas por variación sí permite construir conocimiento matemático relacionado con la optimización. Esta conclusión fue validada a través de las respuestas a las dos preguntas de investigación planteadas inicialmente.

7.2 Concepción de la optimización mediante la Creación de Problemas

En la literatura se encuentra que la metodología de Creación de Problemas ayuda al alumno en la construcción del conocimiento, en este sentido, en la primer pregunta de investigación se planteó la necesidad de conocer cuáles son los significados que los estudiantes desarrollan cuando se les solicita crear un problema de optimización por variación. De esta manera se planteó el cuestionamiento ¿Qué concepción construyen los estudiantes acerca de la optimización a partir de la Creación de Problemas?, como respuesta a esta pregunta, se puede decir que el equipo representativo, equipo 1 donde colaboró la Alumna A, se percató que para la optimización no es necesario la búsqueda de una función a ser derivada, sino más bien, la optimización está ligada a distintos caminos o posibilidades a seguir, entre los cuales existe alguno que maximiza o minimiza alguna variable, por ejemplo, máxima o minimiza la longitud, tiempo, dinero, entre otras. Sin embargo, es preciso señalar que, dicha concepción, no se presentó en el resto de los equipos, equipos 2 y 3, ya que el significado que estos últimos le asociaron a la optimización fue el significado clásico.

En la última etapa, nos percatamos de que las alumnas del equipo representativo, equipo 1, trataron de encontrar la idea del equipo 2, y al encontrar la idea lo que siguieron fue la ruta clásica de la optimización, la cual está asociada al criterio de la primera y segunda derivada. En realidad esa etapa no fue de gran utilidad para las alumnas pertenecientes al equipo 1, ya que el equipo 2 varió el problema dándole el significado clásico a la optimización asociado a la primera y segunda derivada. En consecuencia, cuando el equipo de la Alumna A resolvió el problema variado del equipo 2, lo que les provocó fue que regresaran al uso clásico de la optimización, sabiendo que en la etapa anterior (Etapa 4) el equipo de la Alumna A no hizo un uso clásico de la optimización.

7.3 Cómo se construye el conocimiento de optimización mediante la Creación de Problemas y aspectos a considerar sobre la Creación de Problemas

Si bien, la metodología de Creación de Problemas ayuda a la construcción de conocimiento de un concepto, la segunda pregunta de investigación se planteó con la finalidad de conocer el impacto que tiene dicha metodología y cómo se construye el conocimiento con base en ésta. Esto motivó el planteamiento de la segunda pregunta de investigación ¿Cómo se construye el conocimiento de optimización con universitarios mediante la Creación de Problemas?, como respuesta a esta pregunta se tiene que el problema que se plantea en la primera etapa es determinante para orientar la construcción del conocimiento de optimización. Ya que ese problema le mostrará al alumno qué es lo que se quiere que construya. Por ejemplo, si se le plantea un problema convencional, el alumno ratificará lo que ya sabe, sin embargo, si se le presenta un problema de tipo no convencional, se le mostrará otra manera de ver el concepto que se desea que aprenda, como en el caso del problema del gusano, el cual fue un problema de tipo no convencional. Esto fue lo que sucedió con el equipo donde colaboró la Alumna A, se percataron de que la optimización no estaba ligada a la búsqueda de una función. Con base en la experiencia lograda en esa etapa, en la segunda etapa las estudiantes trataron de replicar dicho sentido de la optimización.

En general, la metodología de Malaspina (2017) sí ayudó a la construcción de un conocimiento sobre la optimización, sin embargo es necesario realizar unas precisiones respecto a cómo se llevan a cabo cada una de las etapas. Una de esta son las restricciones que es necesario imponer, por ejemplo acerca de cómo se deben de variar los problemas, y una manera de encontrar estas restricciones es a partir de la revisión bibliográfica y de la literatura. Ya que por el contrario, si no se lleva a cabo dichas restricciones, sucederá lo que pasó con el equipo 1 en la etapa de socialización. Es decir, las alumnas del equipo 2 y 3, variaron de manera incorrecta el problema, pero las alumnas del equipo 1, al resolver el problema creado por el equipo 2, lograron identificar que el problema carecía de datos y presentaba una inadecuada redacción. Con base en ello, las alumnas del equipo de la Alumna A volvieron a variar por información, agregando algunos datos al problema para poder llevar a cabo la resolución del problema, pero siguiendo el significado que le habían dado a la optimización el equipo autor, el cual era el criterio de la primera y la segunda derivada. En este caso, el equipo de la Alumna A lo que hizo fue retomar dicha idea, no tanto en trabajar en el uso que le había dado a la optimización en la etapa anterior. El producto de la segunda etapa, en lugar de apoyar, lo que hizo fue que las alumnas del equipo de la Alumna A retomaran el significado clásico de la optimización. Otra restricción es la selección de un problema adecuado, el cual será planteado a los estudiantes, ya que dicho problema es determinante para la Creación de Problemas.

7.4 Análisis de la construcción de conocimiento mediante Mapas Híbridos

Por otra parte, la herramienta de los Mapas Híbridos fue de gran ayuda para analizar la producción de conocimiento relacionado con la optimización. Aunque las producciones fueron muy grandes, y con base en ello, se obtuvieron Mapas Híbridos demasiado grandes, se decidió prescindir de algunos elementos que no fueron tan relevantes, es por ello que se consideró necesario presentar Mapas Híbridos simplificados. Sin embargo, esto no les resta utilidad a los Mapas Híbridos, puesto que únicamente se presentaron los objetos y las relaciones de estos objetos más relevantes de la actividad matemática, es decir, los Mapas Híbridos nos permitieron observar detalladamente qué fue lo que el alumno pensó al momento de variar el problema, y cómo se relacionaban los objetos de una misma práctica y entre las distintas prácticas, así como observar los objetos y argumentos que emergen de las distintas prácticas.

7.5 Aportes y perspectivas futuras de investigación

En síntesis, este trabajo de investigación nos permite realizar contribuciones al campo de la Matemática Educativa a través de los siguientes hallazgos: (i) en la primera etapa, no solo se plantean la variación de cualquier problema, el problema debe apoyarse en un estudio de la literatura para establecer qué conocimiento se quiere que el alumno construya, en particular, en esta investigación el planteamiento de un problema no convencional llevó al equipo de la Alumna A, al construir una noción de optimización distinta a la clásica; (ii) Restricciones que se deben emplear en la metodología (los alumnos deben crear problemas bien formulados, entre otras); (iii) El empleo de la técnica del Mapa Híbrido para describir la construcción de conocimiento mediante la Creación de Problemas por variación; (iv) La práctica de Discusión e interpretación, la cual consiste en un dialogo el cual permite sugerir los elementos que variará del problema, la cual permite tener un panorama amplio de lo que se quiere en el problema, así como identificar los requerimientos y las soluciones; (iv) La adaptación de la metodología de Creación de Problemas al contexto virtual.

Se pretende seguir con la línea de investigación empleando la metodología de Creación de Problemas por variación, pero considerando las restricciones mencionadas en párrafos anteriores. Resultaría interesante emplear la otra estrategia de la metodología, la cual es la Creación de Problemas por Elaboración pero en otros temas matemáticos que han sido poco estudiados desde la Matemática Educativa como lo son los Multiplicadores de Lagrange.

REFERENCIAS

Aguilar, M. F. (2006). El mapa conceptual una herramienta para aprender y enseñar. *Plasticidad y Restauración Neurológica, 5*(1), 11.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En R. D. Michèle Artigue, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (págs. 33-59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M., Douady, R. y Gómez P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática.* Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ed. Grupo editorial Iberoamericano, S.A. pp. 33-59.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E. y Bosch, D. (1996): *Cálculo Diferencial e Integral*, (ed.): Madrid: Síntesis.

Baccelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S., y Prieto, G. (2014). Problemas de optimización: un análisis en la construcción de significados. *Actas Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Obtenido de www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1119.pdf

Balcaza, T. (2018). *Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica* (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén, Jaén, España.

Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017) Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. *Bolema, Rio Claro (SP), 31*(59), 1061-1081.

Camacho, M. y González, A. (2001). Una aproximación a los problemas de optimización en los libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. *Revista de pedagogía de la Universidad de Salamanca. 10*(13), 137-152.

Canedo, S. (2009). *Contribución al estudio del aprendizaje de las ciencias experimentales en la educación infantil: cambio conceptual y construcción de modelos científicos precursores* (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona, Barcelona, España.

Chamoso, J. y Cáceres, M. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 14*(18), 59-69.

D'Amore, B., y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 191-218.

Dawkins, P. (2007). Calculus I. Lamar University. Recuperado de: https://bit.ly/2V9w74O

Fonseca, C., Casas, J., Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM.* Santander. Obtenido de https://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/dmdc/Fonseca_Casas_Bosch_Gascon_R.pdf

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática, 19*(2), 95–128.

Font, V. M., Godino, J. D., y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics, 27*(2), 3-9.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., & Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Obtenido de enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. (2002). Un enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2.3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Obtenido de Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325 – 355.

Godino, J. D. y Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The international Journal on Mathematics Education,* 39, 127–135.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2009). Sistemas de Prácticas y Configuraciones de Objetos y Procesos como Herramientas para el Análisis Semiótico en Educación Matemática. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education*. 3ed Meeting. Aristotle University of Thessaloniki. July 16-17.

González, E., Kú, D. y Briceño, E. (2015). Recorrido de estudio e investigación: una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de los problemas de optimización en cálculo diferencial. En Rodríguez, Flor; Rodríguez, Ruth (Eds.). *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 239-244). *Red Cimates.* Oaxaca

Hernandez-Sampieri, R., Fernandez-Collado. C., & Baptista-Lucio. P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill Education.

Kothari, C. R. (2004). *Research Methodology. Methods and Thechniques*. New Delhi: New Age International Publishers.

Luna, J., Ruíz, O., Loera, E., Barrón, J., y Salazar, M. (2013). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *Revista Cultura Científica y Tecnológica*, *51*(10), 1-10.

Macias, F. D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana De Educación*, *42*(4), 1-17.

Malaspina, J. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática* (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *15*(1), 43- 48. México: CLAME.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(3), 365-399.

Malaspina, U. (2012). Enseñanza de las matemáticas: retos en un contexto global y aportes en una retrospectiva histórica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *18* (32). 9-27.

Malaspina, U. (2013). Creación y resolución de problemas para el aprendizaje de Matemáticas. En *Actas VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, *35*(2), 331-336.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15), 321-331.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Obtenido de enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Malaspina, U. y Font, V. (2015). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 107–130.

Malaspina, U. y Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En Departamento Académico de Ciencias, Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, *Reflexiones y propuestas en educación matemática*, (pp.7- 17). Lima: Editorial Moshera S.R.L.

Malaspina, U., Mallart, A., y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (2861-2866). Praga: Charles University in Prague and ERME. Obtenido de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289630

Martínez, C. (2015). *Estrategias para estimular la creación de problemas de adición y sustracción de números naturales con profesores de educación primaria.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.

Merriam, S. (1998). *Investigaciones cualitativas y aplicación de estudio de casos en la educación.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Moreno, M. y Azcárate, G. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(2), 265-280.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.). *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM.* Córdoba. Obtenido de https://www.seiem.es/docs/actas/09/Actas09SEIEM.pdf

Moreno, N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en cálculo diferencial. *Investigación en la escuela*, (92), 60-95. Obtenido de http://www.investigacionenlaescuela.es/articulos/R92/R92-5.pdf

Moreno, N. (2019). Mapas Conceptuales Híbridos, una herramienta para la investigación en la matemática escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), 93-101.

Moreno, N., Aguilar, M. y Villanueva, M. (2017). Descripción gráfica de la práctica de resolución de problemas de modelación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Moreno, N., Angulo, R. y Reducindo, I. (2018a). Mapas Conceptuales Híbridos para la enseñanza de la física y matemática en el aula. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 3*(1), 113-130.

Moreno, N., Angulo, R., Reducindo, I. y Aguilar, R. (2018b). Enseñanza de la física mediante *fislets* que incorporan mapas conceptuales híbridos. *Apertura. Revista de innovación educativa, 10*(2), 20-35.

Moreno, N., Hernández, L. y Briceño, E. (En prensa). Análisis de la resolución de un problema de cinemática mediante el mapa conceptual híbrido. *Enseñanza de las Ciencias*, 1-20.

Moreno, N., Ramírez, B., y Torres, R. (2021). Los mapas híbridos en la química escolar. *Educación Química*, *32*(3), 117-129.

Moreno, N., Zúñiga, S., y Tovar, A. (2018). Una herramienta gráfica para la enseñanza de la cinemática mediante la resolución de problemas. *Latin American Journal of Physics Education*, *12*(4), 4307.

Portillo, H., Ávila, M., Cruz, M. y López, C. (2019). Geogebra y Problemas de Optimización. *Cultura Científica y Tecnológica*, *16*(15), 5-11.

Purcell, E.J. (2007). Cálculo diferencial e Integral. En *Cálculo Aplicaciones de la derivada* (pp. 167-178). México: Pearson Educación.

Ramos, A., Vitoriano, B., Linares, P. Barquin, J. y Baillo, A. (2001). Modelos matemáticos de optimización. *Revista Comillas*, *15*(3), 1-51.

Rojas, L., Báez, J., y Corona, M. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *9*(3), 52 – 63.

Salazar, L. (2015). Creación de problemas: un método alternativo para introducir y reafirmar el concepto de grupo. *Revista Digital Matemática*, *15*(1), 1-35.

Sautu, R., Boniolo, P., Dalle, P., y Elbert, R. (2005). *Manual de metodología: construcción del marco teórico, formulación de los objetivos y elección de la metodología*. Buenos Aires: CLACSO. Obtenido de CLACSO-Consejo Lationamericano de Ciencias Sociales.

Smith, L. (1978). An Evolving Logic of Participation Observation, Educacional Etnography, and other Case Studies. En: L. Shulman (Ed.), *Review of Reseach in Education*. Itasca III: Peacock.

Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable Trascendentes tempranas. En *Cálculo Aplicaciones de la derivada problemas de optimización* (pp. 325-338). México: Cengage Learning.

Thomas, G.B. (2006). Cálculo de una variable. En *Cálculo Problemas de optimización aplicados* (pp. 278-292). México: Pearson Educación.

Torres, C. (2016). *Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico* (Tesis de Maestría). Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Universidad Central del Ecuador. Facultad De Ciencias Administrativas. (2017). *Guía Didáctica*.Ecuador. Obtenido de http://fca.uce.edu.ec/GUIAS/UNID_DIDACTICA_MATEMA%20I_AE_CA_AP-2017.pdf

Universidad Nacional Autónoma De México. Colegio De Ciencias Y Humanidades Secretaría Académica. (2010). *Guía De Estudio Para Presentar El Examen De Conocimientos Y Habilidades Disciplinarias Para La Contratación Temporal De Profesores De Asignatura Interinos*. México. Obtenido de https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/matematicas_i_iv.pdf

APÉNDICE I

- ***Equipo 1 (esquipo de la Alumna A)***

Producción oral

Alumna A: *Pues podría ser cambiar el que te había dicho, primero haciendo una figura para que con esa figura basarnos en qué medida es darle y hacia dónde va a ir un gusano no sé.*
Alumna B: *¿Y vamos a hacer ese del árbol? Cómo le llamamos ¿a, b, c?. Entonces le pongo letras aquí*
Alumna A: *Si para que sea más fácil*
Alumna B: ¿N*ada más a los tres de aquí?*
Alumna A: *pues ya ves que iría como desde ahí para el para el centro y luego del centro hacia la otra esquina.*
Alumna B: *Entonces si quieres le pongo las medidas de una vez o primero le escrib*
Alumna A: *¿A ti cómo se te hace más fácil?, o sea, si te hace más fácil primero escribirlo y luego ya tantearle las medidas o sobre las medidas para hacer el problema*
Alumna B: *Es que igual es hipotético, entonces ya nada más como teniendo el contexto para ver si le ponemos, no sé en vez de m que sean cm y cosas así.*
Alumna A: *ok*
Alumna B: *A mí se me ocurre eso mira "un gusano se encuentra en un árbol" Una disculpa donde se va hacer el gusanito, se me olvidó, ¿Cómo era?*
Alumna A: *Es que ya ves que va creciendo como verticales en diagonal, y se supone que van creciendo*
Alumna B: *Esto, ¿no? "un gusano se encuentra en un árbol representado por la línea azul de la figura"*
Alumna A: *La línea azul de abajo o sea, de C a D*
Alumna B: *Es que todo es azul, entonces como que todo es el árbol, de C a D, de D a A y de A a B.*
Alumna A: *Ok*
Alumna B: *Le pongo aquí "un gusano se encuentra en un árbol (dos ramas y un tronco) representado por la línea azul de la figura". Así vamos bien*
Alumna A: *Entonces a ver, según esto vamos a buscar, que cada año, se supone que crecen las líneas azules*
Alumna B: *Pues sí, el tronco se hace más alto y las ramas salen más, entonces si quieres para variarlo por la información, podemos poner que las medidas son de 3 m de ancho que sería pues de A a B, y 3 m de largo, seria de A a C. Si, te gusta? Esto parece más un rectángulo que un cuadrado con cuatro cuadros, pero ahí dice que son cuatro. Entonces, ¿qué más le podemos poner?*
Alumna A: *Bueno se supone que tenemos que encontrar,*
Alumna B: *Falta poner que crece cada año, ¿verdad?*

Alumna A: *Aja*

Alumna B: *"un gusano se encuentra en un árbol (dos ramas y un tronco) representado por la línea azul de la figura, las medidas del árbol son de 3 m de ancho y 3 m de largo. Se observa que el árbol crece 1 m por año en la dirección que marcas". ¿Pongo las flechitas?, iba a poner que en dirección que marcan las flechitas*

Alumna A: *Sí así.*

Alumna B: *Y luego que va a ser el gusano*

Alumna A: *Era lo que estaba pensando. A mí se me ocurría que más bien el árbol no crezca, sino que el gusano avanza en vez de un año cada minuto, tal vez. En vez de que el árbol crezca el gusano avancé desde dónde está la flecha de C a D, porque ahí dice que en qué momento la flecha se va a llegar a unir con D. Podría ser que en vez de que el árbol crezca, que esas flechas sea que tres gusanos avancen.*

Alumna B: *Ah pues si podemos tener uno aquí, otra acá y otro acá y que lleguen a B*

Alumna A: *O sea, que los gusanos avancen así cómo estaban las flechas y que en vez de que el árbol crezca un metro por año, que los gusanos avancen 3 cm por minuto.*

Alumna B: *Pues sí puede ser entonces aquí le pongo tres gusanos se encuentran en un árbol en los puntos. ¿Si esta cada uno en A, B, y C verdad? O que desde C salgan todos salgan todos.*

Alumna A: *No, cómo estaban las flechas, no?*

Alumna B: P*or eso, pero sí están así como están las flechas, una estaba aquí que iba para arriba, otra iba para allá y otra iba acá. Entonces un gusanito tendría que empezar en C para ir para arriba y los otros dos en D, para ir uno para allá y uno para acá.*

Alumna A: *Aja. Y unos van a la dirección de B y otro a la de A.*

Alumna B: *"Tres gusanos se encuentra en un árbol (dos ramas y un tronco) representado por la línea azul de la figura. Uno de los gusanos se encuentra en el punto C, mientras que los otros dos se encuentran en el punto D. Las medidas del árbol son de 3 m de ancho y 3 m de largo. Sabiendo que los gusanos avanzan de acuerdo a la dirección de las flechas". ¿Sí verdad?*

Alumna A: *Nos falta anotar cuanto avanza, la velocidad.*

Alumna B: *O ponemos una velocidad para todos los gusanos, no pero es que tendríamos que ponerles nombre a los gusanos entonces.*

Alumna A: *Si la misma, son la misma raza*

Alumna B: *¿Cuánto era? ¿3cm por minuto?*

Alumna A: *Si*

Alumna B: *Entonces aquí un primer punto, ¿cómo sería? ¿Que habías dicho? ¿en cuánto tiempo?*

Alumna A: *o sea, ahí primero tendríamos que sacar, entonces cuánto mide de A a D, y ya lo que mide lo dividimos, si ¿no?*

Alumna B: *Si, nada más para saber cuánto tiempo. Si mira por ejemplo, aquí tenemos que 3 cm por minuto. Es como una regla de tres, no, entonces tenemos 3 cm 1 minuto. ¿Cuántos centímetros hay en 3 m?, serían 300. Nada más seria sacar esa regla de tres.*

Alumna A: *Aja. Solo que tengo una duda. Vamos a hacer que el gusano qué parte de C, hasta que llegue a D o hasta que llegue a también a B.*

Alumna B: *a B, no?*

Alumna A: *Okay*

Alumna B: *Pero eso es lo que te iba a decir. Entonces como planteamos la pregunta ¿Cuánto tiempo tarda el gusano de C en llegar a D?*

Alumna A: *más bien, ya especificamos de dónde parten los gusanos, más bien sería llegar a cualquier borde. O al primer borde, no lo sé.*

Alumna B: *Es que no sé, ¿al borde más próximo? No es que no. "¿Cuánto tiempo tardaran los gusanos en llegar al punto final del árbol marcado por los puntos correspondientes?". No creo que alcancemos a solucionar ¿o sí?*

Alumna A: *No, pero a ver, que alcanzamos a hacer*

Alumna B: *Mira es que por ejemplo aquí, ya tendríamos como que nada más sacar*

Alumna A: *la distancia de D a B*

Alumna B: *aja y de D a A y de D a B, y esta pues ya la sabemos (C a D). Y ya pues solo esa distancia hacer la regla de tres con lo con la velocidad de los gusanos. Entonces hay que poner otra pregunta, o sea, como también agregarle eso de la optimización de que es suponiendo que el árbol también tiene esta rama, estás naranjas y está verdecita ¿Cuál será la ruta más corta para llegar a los puntos A y B?*

Alumna A: *Sí o sea, pero es que la respuesta sería la que ya sacamos, o sea la respuesta, o sea, sí, por dónde están las flechas. Okay*

Alumna B: *no pero sí cierto, si era la más corta esa que dices pues.*

Alumna A: *más bien sería*

Alumna B: *Es que aquí estamos usando, no estamos usando, pues como tal la optimización y la derivada, o sea si estamos sacando distancias y ver quién tarda más, pero no, no tenemos esa función, pues*

Alumna A: *cierto, más bien, sería quitar esas flechas, o sea que no pasen por esas flechas, o sea, por dónde se irían, pero es un cuadrado, verdad? Entonces sería la misma*

Alumna B: *pues es un árbol cuadrado. Imagínate que nada más sean dos gusanos que están en D y que tenga que llegar al punto A y al punto B, uno a cada lado. Entonces también la rayita naranja, o sea que todas estas rayitas también fueran parte del árbol. O sea que el árbol fuera como una raya o un rectángulo y ya pues nada más sacar la distancia más corta.*

Alumna A: *Sí, o podría ser más bien, ¿cuál sería la ruta más corta para el gusano de C, no? para que recorra más, para llegar a A o B*

Alumna B: *Pero es que aquí nada más puede subir porque éste es el tronquito,*

Alumna A: *Cierto*

Alumna B: *Es que si quito éste y pongo otras rayitas, O sea que aquí sea otra rama, por ejemplo aquí, cómo estaba el cuadro y que ese sea el árbol, si me entiendes, que todas estas sean ramitas.*

Alumna A: *sí.*

Alumna B: *¿Entonces ya nada más tenemos dos gusanitos?*

Alumna A: *¿pero cuáles serían los dos? Hay que dejar hay que dejar los tres y que la pregunta de optimización sea cuál de los tres llega primero a su punto, no?*
Alumna B: *Sí, ¿entonces aquí quito esto de sabiendo que los gusanos avanzan de acuerdo a la dirección? ¿No, verdad? Entonces aquí tendría que poner flechitas ¿no? porque no necesariamente se tienen que ir por aquí pueden irse por aquí, y luego por aquí. Si las quito estas dos y nada más le pongo que sabiendo que los gusanos tienen que llegar al punto A y B.*
Alumna A: *ahí le tienes que poner que el par de gusanos son los que van a A y B, porque C va de D*
Alumna B: *Pues es que no tiene caso que calculemos de C a D, ¿o si?, porque ya sabemos que es la mitad de árbol, o sea que es 1.5.*
Alumna A: *Sí, sí cierto*
Alumna B: *Por eso te decía que si quitábamos un gusano y nada más que los dos partan de aquí de D, tengan que llegar a B*
Alumna A: *y decir que uno toma las rayas rojas y el otro la azul para saber cuál llega primero.*
Alumna B: *tenemos los dos gusanitos de aquí en D, entonces los gusanos, tienen que llegar uno a A y uno a B. entonces la pregunta va a ser ¿Cuál es la distancia más corta?, ¿no? O sea que, pues es lo menos que pueden hacer de B a D y de B a A*
Alumna A: *O sea nada más serían dos caminos, los naranjas y el azul.*
Alumna B: ¿*Entonces si le cambió? es que entonces si no entendí para que nos sirve la velocidad*
Alumna A: *Es que yo creí que íbamos a poner que un gusano, tómala la ruta de las rayas naranjas y el otro la azul para saber cuánto se tarda uno por las naranjas y otro por la azul. Pero es que ya si vamos a tener nada más dos gusanos para que nos va a servir de C a D*
Alumna B: *Si pues ese lo quitamos, el otro era para ver cual lleva más rápido a cada punto, a su punto. Pues ya no tiene caso que nada más calculemos de C a D porque pues ya sabemos, el mismo largo del árbol lo dice. Yo pensaba que estando los dos gusanos en D, después ya sabiendo esto de las medidas de lo largo y lo ancho del árbol, con eso podríamos hacer la pregunta de ¿Cuál es el camino más corto para los gusanos para llegar a A y a B?*
Alumna A: *O sea dar la medida también de D a B, o sea las rayas Azules*
Alumna B: *Eso se puede omitir. Pero no sé porque siento que no estamos poniendo el problema de optimización si me entiendes*
Alumna A: *Sí, y sacar las dos rutas y ya nada más multiplicarlo para sacar cuánto se tarda, cuántos minutos,*
Alumna B: *Y ya de ahí sale el tiempo y c es la ruta es la más corta*
Alumna A: *Okay*
Alumna B: ¿*Quieres preguntar otra cosa?*
Alumna A: *Estaría bien, ¿no? y si otra pregunta es que se agrega otro punto en donde está entre A y B.*
Alumna B: ¿*Y así la Alumna A y la otra pregunta la pongo desde C hasta E?*

Alumna A: *Solo que un camino sería desde C hasta la punta y luego hacia E*
Alumna B: *Y el otro pues llega de C a D y luego de D se va a A y luego de A a E*
Alumna A: *Aja*
Alumna B: *Y el otro pues llega de C a D hasta a A. pero es que igual estas distancias ya las conocemos entonces no es tarada*
Alumna A: *¿Pero a los otros puntos que no tienen nombre no les pongo nada solo les pongo C a A?*
Alumna B: *Puedes poner de C a D y luego de D por el borde del cuadrado o triangulo rectángulo que se forme hasta llegar a A. Por ejemplo yo tengo que sacar cuánto tiempo tarda en minutos, pero tú vas a sacar la distancia o también el tiempo, igual se sacan los dos pero para poner las preguntas.*
Alumna A: *Si el tiempo, pues es que la distancia más corto va a ser el tiempo más corto también*
Alumna B: *Pues si*
Alumna A: *Si te sale 2.12?*
Alumna B: *Me sale raíz de 4.5*

APÉNDICE II

Producción oral del equipo de la Alumna A al resolver el problema creado por otro equipo

Alumna B: *Ay es que no sé, no entiendo esta parte de los lados "y" están unos medios círculos que tienen la misma medida del radio, ¿dónde está esa medida del radio?*

Alumna A: *pero la medida del radio que*

Alumna B: *No pues no entiendo ese dato, pero es que mira lo que tenemos que optimizar es el perímetro de la pista, o sea la función perímetro*

Alumna A: *aja*

Alumna B: *En este caso, si no me equivoco yo lo veo como esto, pienso que esto es igual a eso pero no sé si sea correcto, ¿si me entiendes?, porque en si el perímetro sería dos lados de un rectángulo y todo el perímetro de un círculo*

Alumna A: *aja. Sí, o sea como que los medios círculos, o hicieron un circulo a la mitad y los pusieron a los lados, ¿verdad? Pero, es que en la de arriba es como un rectángulo pero nada más curveado de los lados, entonces no sé, no le entiendo.*

Alumna B: *Sí, nada más este si te entiendo que la de arriba es diferente que la de abajo, pero no sé, o sea no.*

Alumna A: *Pero entonces seria sacar nada más el perímetro del rectángulo y luego, no te creas, olvida lo que dije*

Alumna B: *Es que o sea, por ejemplo, aquí nos dice que la pista de hielo tiene un área de 2000 m cuadrados, pero estamos de acuerdo que una fórmula para el área de esta figura pues no la conocemos, entonces la tendríamos que partir en un rectángulo y estas dos partes. Pero estas dos partes a su vez, la podemos partir en, o sea si pasamos una rayita por aquí y otra por aquí se parte otra vez en un rectángulo*

Alumna A: *Para que las esquinas al contarlas se hagan el círculo.*

Alumna B: *Sí, y ya con eso*

Alumna A: *Ya habíamos hecho uno parecido en geometría ¿no?*

Alumna B: *Sí, pero o sea, es que los únicos datos que tenemos son el área de todo esto y se supone que aquí nos debieron de dar un radio, ¿no?*

Alumna A: *Ajá, pero no lo dan*

Alumna B: *Pero nada más dice que están unos medios círculos que tienen la medida del radio, o sea, éste y éste forman medio círculo, pero también este forma otro medio circulo pero no sé cuánto es de aquí a aquí.*

Alumna A: *Es que al principio creía que ese medio circulo era el que está arriba de donde está la Y*

Alumna B: *Si yo también*

Alumna A: *Y luego dice que los lados curvos son, entonces, el ¼ del círculo que dices*

Alumna B: *si, o sea que también no sabemos, por ejemplo aquí podemos sacar una relación de que el costo por metro es de 50 pesos y todo este lado curvo también está en metros pero cuesta 60 entonces con una regla de tres, sacaríamos la medida de aquí, la medida de aquí, la medida de aquí, la medida de aquí.*

Alumna A: aja

Alumna B: *pro no sabemos si el costo sea proporcional por metro, ¿si me entiendes? O si vaya disminuyendo.*

Alumna A: *oye, es que estaba viendo, ya ves que ahí dice el precio por poner el hielo es de 200 metros por metro cuadrado, pero abajo dice que es de 50 pesos y de 60. ¿no será que esos 200 pesos…?*

Alumna B: *No pero esos 200 pesos por metros cuadrados es del hielo, en sí, y lo otro es de la reja, de la protección.*

Alumna A: *No, me equivoqué, pensé que si nos daban los lados*

Alumna B: *Mira es que ahorita, se me ocurrió, según yo, nos falta el dato del radio mira por que por ejemplo, si nos vamos de acá abajo, la solución lo que tenemos, es minimizar es el costo del perímetro. Entonces sería la función perímetro en este caso es dos lados del rectángulo grande, dos lados del rectángulo chico y el del círculo, pero no conocemos el radio. Entonces se lo dejaríamos expresado, supongo.*

Alumna A: *Espérame espérame*

Alumna B: *Sí, Mira es que Bueno yo pienso O sea suponiendo que quitó este lado, o sea, si no estuvieron las curvitas que todos lado fuera "x" y que toda lado fuera "y" lo que le tendríamos que quitar sería la medida de los radios*

Alumna A: *Es que dice que de lado de los lados "y" que hay unos medios círculos que creo que es ése, a lo mejor se les olvidó dibujar el de arriba y dice que es la misma medida pero a lo mejor ese medio círculo es la misma medida que los de a lado.*

Alumna B: *Pues sí, pero es que no tenemos datos que nos ayuden. O sea no tenemos tampoco cuánto vale de aquí.*

Alumna A: *¿Aquí maestra no falta que nos digan el radio?. Pero maestra entonces pasa si falta eso ¿Nosotros le podemos dar valor o nada más poner las críticas?, entonces ¿podemos cambiar lo que nosotros creamos que nos va ayudar a resolverlo?*

Alumna B: *El primer problema que le veo es que o sea la redacción no está muy claro, o sea, cómo que no tiene continuidad o sea como que de un punto a otro cambia, pues sí está muy cortado*

Alumna A: *si le falta algo, por ejemplo ahí en los 2000 m podemos especificar que esos 2000 m2 son del total, eso no lo dice.*

Alumna B: *Deja lo copio y si lo vamos a modificar, verdad?*

Alumna A: *Sí, dijo que lo pusiéramos como crítica y corrigiéramos*

Alumna B: *Bueno para ponerlo luego para copiarlo y ponerla abajo y con lo que le cambiamos, pues y a las críticas los estoy escribiendo*

Alumna A: *Okay okay, Lo que cambiamos lo ponemos de otro color, no? De área, no?*

Alumna B: *o sea, se desea construir una pista de que tiene 2000 metros cuadrados de área, verdad?*

Alumna A: *aja*

Alumna B: *2000 m2 de área entonces aquí lo que sigue para mí que necesito de datos es de que de los lados "y" están unos medios círculos que tienen la misma medida de radio. Yo pienso que son éstos*

Alumna A: *aja*

Alumna B: *O sea el radio sería este pedacito y Estamos de acuerdo que es igual que este otro*

Alumna A: *aja. Pero entonces no va en dos lados lleva en las esquinas*

Alumna B: *Pues es que también, Pues sí o sea, es que está curioso. O sea se entiende que está Medio círculo en el lado "y" pero también hay medio círculo en el lado de "x". Entonces sería poquito indiferente no*

Alumna A: *Okay entonces y ya después, o sea como no nos da ni "y" ni "x", entonces nosotros podemos darle el valor a uno de los dos y con esos con uno de esos ya podemos sacar cuánto mide el otro en base a la fórmula del área*

Alumna B: *pero nos piden calcular el perímetro de la pista donde su costo sea mínimo ahí podríamos hacerlo, osea, podríamos crear la función de perímetro donde nada más consideremos todo el del rectángulo menos el perímetro del círculo.*

Alumna A: *Si*

Alumna B: *okay, Entonces de qué valor le damos el radio*

Alumna A: *yo digo Ay no sé*

Alumna B: *pues si él mira, por ejemplo aquí el costo por metro es de $50 ya para el perímetro y el precio de los lados curvos es de 60, pienso que ese poquito más de un metro si los costos pues son proporcionales contestas. Entonces que, un metro 20?*

Alumna A: *Sí, metro y cachito*

Alumna B: *1.2 Entonces ahora sí, O sea ya sabemos que con ese valor que dimos, sabemos que por ejemplo lado x aún sin saber cuánto vale X en Sí, este pedacito o sea de aquí de aquí*

Alumna A: *más dos veces lo que le agregamos el radio*

Alumna B: *menos, o sea, este o sea sí, aquí vale 1.2. Yo digo, O sea que este pedacito esté vale x –*

Alumna A: *2.4*

Alumna B: *Aja y acá, vale Y - 2.4. Entonces, deja voy poniendo acá esta cosa*

Alumna A: *Oye pero entonces "x" es la raya roja y "y" la raya azul que tú pusiste*

Alumna B: *sí, Según yo sí, Aquí también debemos de cambiar esto no? Por qué dices de lado "y" están unos medios círculos que tienen la misma medida del radio. Me imagino que como dices, ha de ser este, y este y éste, pero si lo que nos están pidiendo es calcular el perímetro para que el costo sea mínimo, de nada nos sirve esto*

Alumna A*: Más bien es una trampa*

Alumna B: *si mejor ver entonces cómo le escribimos acá abajo*

Alumna A: *o ponerlo como como remarcado en otro color, como si fuera de que borramos esto.*

Alumna B: *Ah, no sí, pero yo decía como de la redacción. Yo pienso que puede ser de que de los lados "y" están unos medios círculos que tienen diámetro 2.4.*
Alumna A: *Ah okay, okay, Sí, y luego poner que entonces que ese medio círculo tiene la misma, bueno, el radio es el mismo que el de las esquinas, ya ves que dijimos que ese medio círculo, su radio es el mismo que el de las esquinas. Entonces eso también ponerlo en el problema porque no dice.*
Alumna B: *Si es que mira por ejemplo para ir haciendo algunas ecuaciones y ver, o sea, si vamos a poderlo solucionar con lo que le estamos agregando, podríamos hacer o sea para calcular el área de todo esto yo calcularía primero el área de todo el rectángulo, Y luego el área de este cuadradito*
Alumna A*: Entonces no sería más bien, en vez de la "a" 200 igual a lo de base por altura,*
Alumna B: *Si ahorita también voy a poner en vez de aquí de "b" y "h", voy a poner nada más que estoy viendo cómo sería O sea si todo esto tuviera datos, yo lo contestaría así sacando el área del rectángulo grande y después sacó el área del cuadro que se forma con estos cuatro cuadritos, y a esa le restó el área del círculo.*
Alumna A: *Porque les gusta el perímetro*
Alumna B: *Tienes razón. No es el perímetro es el área del cuadrito, nada más que le pongo "L" porque como es un cuadrado, sería base por altura, pero es lado por lado, que sería este y éste serían un lado. Sí mira estos cuatro van a formar un cuadro que cada uno va a tener un cuarto del círculo. Si, no? algo así. Entonces al área del rectángulo grande le voy a restar estas partes. Pero para sacar cuánto vale esa parte tengo que sacar el área del cuadrado y restarle la del círculo, Sí?*
Alumna A: *pero no sería mejor sacar la del círculo porque ya de sabemos su radio*
Alumna B: *Sí pero o sea, si sacamos el círculo nos estaría faltando estas partes. Sí, decía si tomamos como el perímetro el área del círculo más el área del rectángulo nos estaría faltando esto, si?*
Alumna A: *No, porque ya sería ahí ya sería x menos el diámetro del círculo. De un lado y del otro es el radio del círculo para sacar, el área*
Alumna B: *No te entiendo de dónde*
Alumna A: *o sea los rectángulos de los lados, ahí dices tú verdad? tú dices que lo que escribiste para sacar cuánto mide cuánto es el área de este verdad,*
Alumna B: *No yo lo que escribí es para sacar como una fórmula de cómo sacaríamos esta area azúl, que ya no la dieron que es 2000 m2 pero ósea si todo tuviera numeritos como yo la sacaría? Pues sería así como te digo, sin tener en cuenta todavía "x" y "y" porque ahorita lo vamos a sustituir ya con lo que tenemos*
Alumna A: *Okay ya te entendí*
Alumna B*: entonces por eso te decía que si sacamos el área del rectángulo todo grande y luego le restamos le restamos el área del cuadrado, menos el área del círculo ya vamos a tener todo el reto del rectángulo menos estás partecitas, estas*
Alumna A: *si ya te entendí. Okay entonces ya sería un cuadrado con lados de 2.4, faltaría el área del círculo.*

Alumna B: *Y ahora sí, Según yo esto sería la función a optimizar. si ya la pasamos a terminó de problema, nos queda que yx- menos el lado de un cuadradito que es 2.4 * 2.4 - pi por el radio que es 1.2 al cuadrado y ya nos va a quedar una función que sería xy menos algo*
Alumna A*: y ahí ya cambia el a, no?*
Alumna B: *sí por 2000. Y eso Pues sería lo del área, sería la función del área y ya ahora lo que nos piden es el perímetro de la pista para que el costo sea mínimo. El que vamos a optimizar es el perímetro, entonces el perímetro sería, el perímetro del círculo + x - 2.4 más, no perdón, Y - 2.4 + x-2.4, dos veces esas medidas y la medida del círculo, si no?*
Alumna A: *Aja, más el perímetro del círculo*
Alumna B: *Es así no? Entonces tenemos el perímetro sería éste y ya sabemos cuánto vale el radio. Entonces eso es = 2x - 3.8, + 2y-*
Alumna A: *Ahí es 7.54*
Alumna B: *ese sería la ecuación del perímetro. Pero según yo, ahora lo que sigue, si derivamos esto estaríamos optimizando el perímetro y no el costo, pero según yo al optimizar el perímetro también optimizamos el costo, no? O no sé.*
Alumna A: *es que has de cuenta que yo pensaba que lo circular lo redondo, pues ya nada más el área del círculo multiplicarlo por lo por los $60 curvos,*
Alumna B: *o hasta sin multiplicarlo sale el área? O sea, si dice que 60 de los metros curvos, o sea, sería 60 por 4*
Alumna A: *aja*
Alumna B: *entonces el costo que va de cajón, que sería el de los lados curvos, es de 240 los metros que hay aquí y los metros que hay aquí y los metros que hay aquí los metros que hay aquí*
Alumna A*: aja*
Alumna B: *entonces si quieres aquí desde el perímetro*
Alumna A: *ya tenemos el area de todo verdad que son los 2000 y tenemos el área de los circulares, nada más a los 2000 restarle lo de los circulares, lo del círculo y ya tenemos el área de lo que nos va a costar $50.*
Alumna B: *Pero es que lo que nos cuesta $50 es un metro de alrededor. Si mira porque el metro cuadrado de hielo cuesta $200 para eso no hay problema o sea para para el precio del hielo seria multiplicar los $200 por los 2000, pero lo que nos cuesta $50 es un metro de cada orillita un metro de aquí un metro de 2 metros de aquí nos cuestan 50 y todo esto nos cuesta 60. Entonces lo que te digo que va de cajón son $240 y lo que tendríamos que sumarle sería el perímetro pero estoy viendo que ya no es necesario éste, optimizar éste. Porque ya nos dan el precio. Entonces si quieres así le dejamos aquí y nos queda 9.6, y aquí el costo sería los 240 + p prima, ah no, más lo que nos salga de optimización. Le voy a poner…*
Alumna A: *P2*
Alumna B: *Entonces ahora sí, para derivar esta tenemos que despejar "y" de acá, sí? Entonces y=   y ahora sí sí, yo sustituya aquí P = 2x +.*
Alumna A*: Dos veces*

Alumna B: *Entonces ya para derivar tendríamos. Este sería 0 y luego aquí sería dos más y la derivada de eso es igual el de arriba por la derivada del de abajo, que sería el mismo de arriba, o el de abajo por el de arriba, entonces ahí sería 0 serían. X por la derivada el de arriba, el de arriba es una constante, entonces queda cero o menos todo ese asunto por la derivada del de abajo que sería 1 entonces queda así. Sí, verdad? Pues ya según yo solamente es encontrar los puntos críticos y sustituirlos en esta función, nada más que aquí tengo que modificar, se supone que esto nos va a dar metros, y multiplicamos por 50 y ya tendríamos el costo. Solamente resolvemos esta ecuación porque abajo tiene que ser diferente de cero.*

Alumna A: *Si*

Alumna B: *Entonces me sale un número muy feo, la hice en Geogebra, para más rápido. Aquí vamos a tener dos puntos, o sea que quedaría sustituirlo en uno de los puntos que tenemos para que nos del valor de "y"*

Alumna A: *Si*

Alumna B: *Aquí yo creo solo importa un valor porque el otro es negativo y no podemos tener metros negativos, es 44.7 según yo. Entonces solamente ya*

Alumna A: *Aquí nada más cambia la "x" en donde está la "x" por 44.7*

Alumna B: *¿En cuál dices?*

Alumna A: *En la de arriba*

Alumna B: *Me salió lo mismo 44.77 y este era .73*

Alumna A: *Achis si esta medio cuadradona*

Alumna B: *Completa cuadradona es un cuadro. Ya nada más aquí y ya tendríamos el costo y seria pues es el único valor que nos dio, no sé si hicimos algo mal, no se si no checamos algún número, pero bueno.*

Alumna A: *Me dejas ver algo arriba. Estaba viendo a ver si nos equivocamos arriba*

Alumna B: *Ya sustituyendo en la del área con los valores nos da una diferencia de 1.32 m2*