UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Impacto de la relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional: Un estudio de caso.

Tesis para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

Hermes Alfredo Carabali Florez

Directora de Tesis:

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Zacatecas, Zac., Mayo/2022

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 12 del mes de mayo del año 2022, el que suscribe HERMES ALFREDO CARABALI FLOREZ, alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 20206078; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado titulado Impacto de la relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional: Un estudio de caso. Bajo la dirección de la Dra. Leticia Sosa Guerrero.

Por tal motivo, asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad de este. Así mismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Hermes Alfredo Carabali Florez

Nombre y Firma del estudiante

AGRADECIMIENTO AL CONACYT

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Becario No. 1099133

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo Caracterizar el Impacto de la Relación entre los Conocimientos Matemáticos del Profesor y sus Concepciones sobre la Enseñanza-Aprendizaje de la Función Racional. Para alcanzar este objetivo, se identificó el conocimiento del profesor mediante el modelo teórico *Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge* (MTSK). Por su parte, se analizaron las concepciones del profesor empleando el instrumento *Concepciones de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas* (CEAM). En cuanto a la metodología, este estudio es de naturaleza cualitativa, y de corte interpretativo, en el cual se consideró como caso a un profesor de matemáticas del nivel bachillerato. Asimismo, se emplearon entrevistas semiestructuradas, observaciones de clase y cuestionarios de conocimiento matemático como instrumentos para la recolección de información. Finalmente, el análisis de la relación entre los conocimientos matemáticos y sus concepciones sobre la enseñanza aprendizaje de la función racional permitió identificar el impacto que tiene en el logro matemático de sus estudiantes. Además, se logró identificar la importante influencia que tienen las concepciones en la práctica de enseñanza y el quehacer profesional del profesor de matemáticas.

Palabras Clave: Conocimiento Especializado del Profesor, Concepciones de Enseñanza, Funciones Racionales, MTSK.

ABSTRACT

This research aims to Characterize the Impact of the Relationship between the Mathematical Knowledge of the Teacher and his or her Conceptions on the Teaching-Learning of the Rational Function. To achieve this objective, the teacher's knowledge was identified by means of the theoretical model Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). On the other hand, the teacher's conceptions were analyzed using the Conceptions of Mathematics Teaching-Learning (CEAM) instrument. Regarding the methodology, this study is qualitative in nature and interpretative, in which a high school mathematics teacher was considered as a case. Also, semi-structured interviews, classroom observations and questionnaires of mathematical knowledge were used as instruments for the collection of information. Finally, the analysis of the relationship between mathematical knowledge and their conceptions about the teaching and learning of the rational function made it possible to identify the impact it has on the mathematical achievement of their students. In addition, it was possible to identify the important influence that conceptions have on the teaching practice and the professional work of the mathematics teacher.

Key words: Teacher Expertise, Teaching Conceptions, Rational Functions, MTSK.

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO I

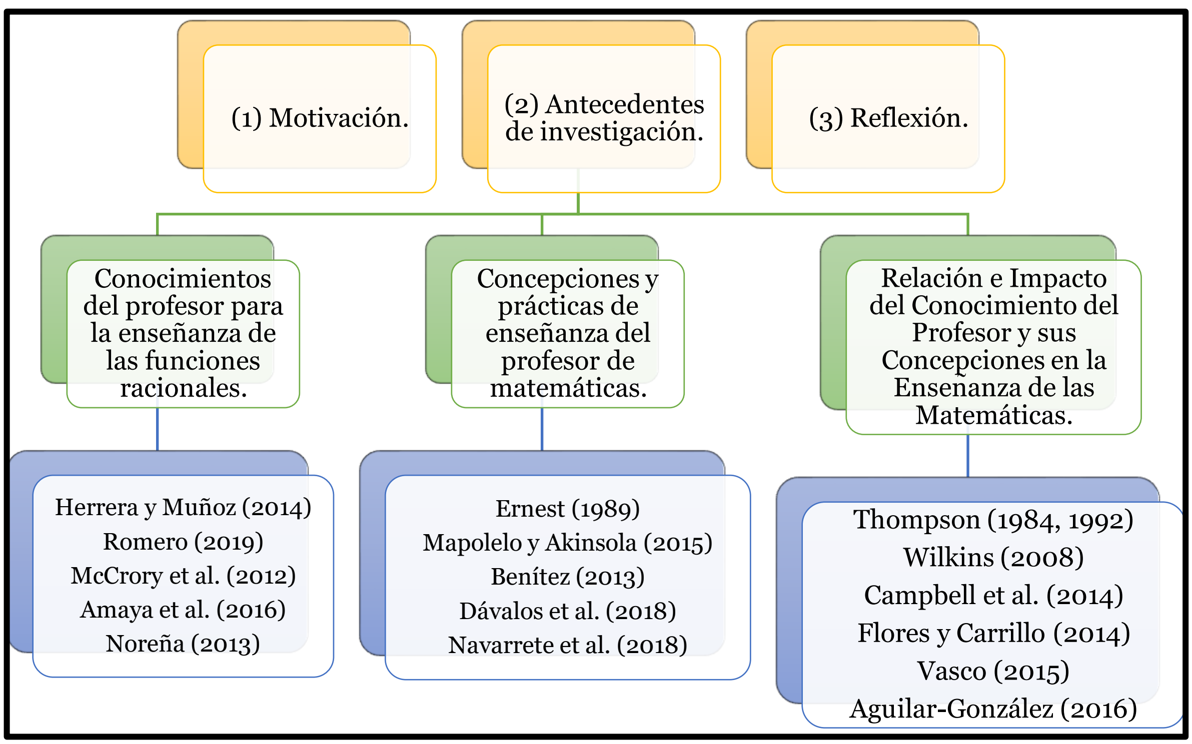
INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se mencionan aspectos introductorios para comprender el problema de investigación. Entre ellos se encuentran la motivación, los antecedentes y la reflexión. Estos elementos pretenden contextualizar el problema de investigación, véase la estructura en la *Figura 1*.

Figura 1.

Estructura del capítulo 1 de investigación.



Fuente: elaboración propia.

1.1 Motivación

El interés que me conlleva a realizar esta investigación proviene de la necesidad personal y profesional de crecer como profesor y formarme como investigador en Matemática Educativa. Mi objetivo es adquirir conocimientos, destrezas y habilidades que me permitan mejorar y comprender profundamente mi práctica de enseñanza. En este sentido, con esta investigación busco contribuir a mi desempeño como docente de matemáticas.

Durante mi formación de pregrado, he estado interesado en comprender qué aspectos del conocimiento matemático considera importantes el profesor para enseñar efectivamente. Los contenidos matemáticos y la profundidad con la que el profesor debe abordarlos están determinados por los currículos de cada país. Desde mi perspectiva, considero que el conocimiento del profesor condiciona su quehacer en el aula. Por ende, me resulta de interés comprender aspectos del conocimiento matemático del profesor para enseñar y cómo estos conocimientos se relacionan con su práctica.

En mi experiencia como profesor, me he percatado de la existencia de diferentes metodologías para la enseñanza de las matemáticas. Éstas han sido condicionadas por el conocimiento y las concepciones del profesor sobre la enseñanza. Asimismo, he podido reconocer que la forma de enseñar y la elección de los recursos didácticos a implementar, son seleccionados con relación al conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En este orden de ideas, considero importante indagar sobre la relación entre el conocimiento especializado del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

Mi interés por las funciones racionales y su enseñanza, deriva de las dificultades evidenciadas al abordarlas en el aula. En ocasiones, la enseñanza de este objeto es reducida a la memorización de procedimientos algebraicos. De esta forma, la comprensión de este objeto puede verse limitada únicamente al uso de técnicas de resolución. Por tal motivo, me he propuesto indagar sobre el impacto que tiene la relación entre los conocimientos especializados del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza de las funciones racionales.

1.2 Antecedentes

En este apartado se describen los antecedentes del problema de investigación. Ellos están presentados en tres grupos: (1) Conocimientos del Profesor para la Enseñanza de las Funciones Racionales, (2) Concepciones y Prácticas de Enseñanza del Profesor de Matemáticas, y (3) Relación e Impacto del Conocimiento Especializado del Profesor y sus Concepciones en la Enseñanza de las Matemáticas.

1.2.1 Conocimientos del Profesor para La Enseñanza de Las Funciones Racionales

La enseñanza de las matemáticas no es un proceso trivial y fácil de desarrollar. En esta convergen los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor (Mapolelo y Akinsola, 2015), además de sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Ortega, 2016). En ese sentido, para contribuir de forma significativa al proceso de enseñanza, es necesario indagar y reflexionar sobre los conocimientos que emplea el profesor para su práctica, así como las concepciones que influencian su quehacer profesional (Campbell et al., 2014; Navarrete et al., 2018).

Escudero (2017) manifiesta que el conocimiento matemático no es el único requerido por los profesores para impartir, éstos también necesitan conocimientos didácticos del contenido a enseñar. En ese sentido, dominar un único tipo de conocimiento no es suficiente para alcanzar una enseñanza efectiva de las matemáticas (Flores y Carrillo, 2014). En concordancia, McCrory et al. (2012) señalan que una enseñanza efectiva de las matemáticas está caracterizada por las habilidades de los profesores para establecer relaciones entre ambos tipos de conocimiento. Por ende, el aprendizaje de los estudiantes depende de la calidad de los conocimientos que tengan los profesores que les enseñan (Wilkins, 2008; Carrillo et al., 2018).

Castro (2012) menciona que, en las matemáticas escolares, el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra es uno de los más complejos. Según este autor, esto se debe a diferentes dificultades en el aprendizaje del álgebra, por ejemplo: la transición de la aritmética al álgebra, la generalización de patrones, las expresiones de generalización, el lenguaje algebraico y la enseñanza de los profesores. Respecto a esto, McCrory et al. (2012) argumentan que algunas dificultades en la enseñanza del álgebra, tienen origen en conocimientos matemáticos y didácticos limitados por parte de los profesores.

Referente a los conceptos del álgebra escolar, Herrera y Muñoz (2014) afirman que uno de los conceptos más importantes es el de función, no solo por sus aplicaciones, sino porque permiten modelar situaciones en diversos contextos. Sin embargo, Romero (2019) indica que dentro de la problemática del aprendizaje matemático, el concepto de función es uno de los más estudiados. Esto se debe a las dificultades de aprendizaje que emergen en el proceso de enseñanza de este objeto matemático (Amaya et al., 2016; Fernández, 2019).

Noreña (2013) diseñó una secuencia didáctica para la enseñanza de las funciones racionales en bachillerato. En esta propuesta, el investigador aborda tres tipos de dificultades asociadas al proceso de enseñanza-aprendizaje de este objeto matemático: primero, el dominio y rango de las funciones racionales; segundo, el comportamiento asintótico; tercero, la equivalencia algebraica de las funciones racionales. Según el autor, las principales dificultades evidenciadas por los estudiantes se asocian a la gráfica de funciones racionales y sus asíntotas. Por tal motivo, Noreña (2013) afirma que para enseñar efectivamente este concepto, es necesario que el profesor conozca y comprenda las dificultades de aprendizaje que pueden surgir durante el proceso de enseñanza.

Scorzo et al. (2014) realizaron un estudio en el cual diseñaron un taller que buscó evaluar los conocimientos de los estudiantes para encontrar las raíces, el dominio y las asíntotas de funciones racionales. Los resultados de esta investigación indican que los alumnos tienen dificultades para calcular las raíces de estas funciones, debido a que éstos igualaban el numerador a cero, y no tenían en cuenta los valores que anulan el denominador. Asimismo, los investigadores argumentan que los estudiantes tienen una idea errónea sobre las raíces del numerador y denominador en una función racional (Scorzo et al., 2014).

En concordancia, Fernández (2019) encuentra, después de analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las asíntotas a través de su representación gráfica, que los estudiantes tienen dificultades para comprender y hallar dominios, rangos e indefiniciones de funciones racionales. La autora asocia estas dificultades a falencias en el discurso del profesor y su metodología de enseñanza (Fernández, 2019). En ese sentido, el aprendizaje de este concepto puede ser afectado por limitaciones en los conocimientos y el discurso que emplea el profesor para enseñarlo (McCrory et al., 2012).

Por su parte, Amaya et al. (2016) realizan un estudio sobre la comprensión matemática que tienen 90 profesores en formación sobre la noción de función en distintos registros de representación. Los hallazgos de esta investigación manifiestan que, los estudiantes para profesor, evidencian dificultades para: identificar elementos, relacionar representaciones, y modelar situaciones problema con funciones. Por ende, la enseñanza de este concepto puede verse afectada por limitaciones en la comprensión matemática (McCrory et al., 2012) de profesores en formación y ejercicio.

Resultados semejantes encuentran Arce y Ortega (2013), quienes llevan a cabo un análisis de las representaciones gráficas de funciones que realizan 29 estudiantes en bachillerato. Los investigadores afirman que los alumnos tienen dificultades asociadas al concepto de función, sus elementos, gráficas y comportamiento asintótico. Por tal motivo, para los autores resulta importante llevar a cabo investigaciones que aporten elementos para una enseñanza efectiva de este contenido matemático.

1.2.2 Concepciones y Prácticas de Enseñanza del Profesor de Matemáticas

En las últimas décadas, las investigaciones en Educación Matemática han evidenciado un interés significativo por comprender el conocimiento y pensamiento del profesor de matemáticas (Mapolelo y Akinsola, 2015). Esto debido a que el conocimiento del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, guarda una significativa relación con sus prácticas de enseñanza (Ernest, 1989). En ese sentido, se presentan a continuación algunas investigaciones sobre la relación entre las concepciones del profesor y su práctica de enseñanza.

Mapolelo y Akinsola (2015) sustentan, después de recopilar y analizar investigaciones sobre el conocimiento y las concepciones del profesor, que pocos profesores desarrollan durante su formación académica una comprensión conceptual de las matemáticas. Debido a esto, los autores afirman que los estudiantes para profesor no cuentan con muchas habilidades para configurar concepciones de enseñanza y, por ello, tienden a imitar las metodologías de enseñanza de formadores (Mapolelo y Akinsola, 2015).

De forma similar, Benítez (2013) argumenta, después de analizar las concepciones de cuatro profesores en formación y seis en ejercicio, que los estudiantes para profesor tienden a imitar las metodologías de enseñanza que emplean sus formadores. A raíz de este análisis, el investigador infiere que los estudiantes para profesor, heredan concepciones de enseñanza de sus docentes. En ese sentido, para Benítez (2013) resulta importante que los profesores sean conscientes de sus concepciones, puesto que éstas se pueden transmitir a través de sus metodologías de enseñanza.

Por su parte, Ortega (2016), a raíz de analizar las concepciones de dos profesoras sobre la naturaleza y enseñanza de las matemáticas, infiere que existe una fuerte relación entre las concepciones epistemológicas y las metodologías de enseñanza que emplean las profesoras. En este sentido, si bien las profesoras tienen concepciones implícitas sobre su práctica, éstas se encuentran fuertemente arraigadas, e inciden en la adopción de su modelo de enseñanza (Ortega, 2016).

Vesga-Bravo y De Losada (2018) encontraron, a raíz de analizar las concepciones de seis profesores en formación y tres en ejercicio, que la experiencia y práctica profesional es un factor determinante en la configuración de concepciones sobre la epistemología y enseñanza de las matemáticas. Para las autoras, los profesores en ejercicio exhiben concepciones más definidas y coherentes con su práctica de enseñanza. Por su parte, los profesores en formación tienen concepciones más ingenuas sobre la epistemología y la enseñanza de las matemáticas (Vesga-Bravo y De Losada, 2018).

De igual manera, Dávalos et al. (2018) señalan, al analizar las creencias, propósitos y acciones de 63 profesores en ejercicio en nivel universitario, que existe congruencia entre lo que conciben como enseñanza-aprendizaje, lo que buscan cuando enseñan y lo que hacen cuando imparten. Esta congruencia se debe a la influencia que tienen las creencias y concepciones en las aptitudes, actitudes, opiniones y actuaciones de los profesores (Dávalos et al, 2018).

Del mismo modo, Navarrete et al. (2018) concluyen, después de identificar las creencias sobre la enseñanza y analizar la práctica de 284 docentes de nivel universitario, que existe coherencia entre lo que el profesor cree, sus intenciones y acciones en el proceso de enseñanza. Por ende, las creencias tienen un rol fundamental en la definición y comprensión de las actuaciones y comportamientos de los profesores (Navarrete et al., 2018).

1.2.3 Relación e Impacto del Conocimiento del Profesor y sus Concepciones en la Enseñanza de las Matemáticas.

Investigaciones como las de Thompson (1984, 1992), Ernest (1989) y Pajares (1992), han señalado que existe una fuerte relación entre el conocimiento del profesor, sus concepciones y metodologías de enseñanza. Para estos investigadores, las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje son elementos importantes para identificar y comprender las actuaciones y metodologías de enseñanza que emplea el profesor en el aula.

Finalizando los años ochenta, Ernest (1989) realizó una investigación sobre la íntima relación entre los conocimientos matemáticos de los profesores y sus concepciones sobre la epistemología de las matemáticas. Los resultados encontrados por el autor, indican que las concepciones que tienen los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas están fuertemente vinculadas con su modelo de enseñanza (Ernest, 1989). El investigador argumenta que esto es debido a que las creencias que tienen los profesores sobre qué son y cómo se originan las matemáticas, incide en la adopción del modelo docente y, por tanto, en las metodologías de enseñanza que emplea (Ernest, 1989).

Resultados semejantes encontró Wilkins (2008), quien después de realizar un estudio sobre el conocimiento matemático y las concepciones sobre la enseñanza efectiva de las matemáticas en 481 profesores en ejercicio, concluyó que las concepciones y el conocimiento del contenido, están fuertemente ligadas con el modelo de enseñanza y la práctica de los maestros. Para esta autora, la relación entre las concepciones y el conocimiento matemático de los profesores tiene notables repercusiones en la efectividad de la instrucción y el aprendizaje de sus alumnos. En consecuencia, comprender las concepciones del profesor sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje puede aportar elementos importantes para entender su quehacer profesional.

Por su parte, Campbell et al. (2014) identificaron una relación significativa entre los conocimientos matemáticos, didácticos, y las concepciones del profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los hallazgos de esta investigación manifiestan que las concepciones de los profesores no afectan únicamente su práctica de enseñanza, también afectan el logro matemático de los alumnos a los que enseña (Campbell et al., 2014). En ese sentido, la relación entre los conocimientos matemáticos de los profesores y sus concepciones de enseñanza, no influyen únicamente en su práctica de enseñanza (Thompson, 1992), también influyen en los aprendizajes que alcanzan los alumnos.

Flores y Carrillo (2014) afirman que es posible establecer relaciones entre las concepciones de enseñanza-aprendizaje y el conocimiento especializado que poseen y manifiestan los profesores de matemáticas. En su investigación, los autores estudiaron los conocimientos que pone en juego una profesora de matemáticas en la planificación y ejecución de una clase de probabilidad. Los investigadores concluyeron que existen consistentes conexiones bidireccionales entre las concepciones y los conocimientos especializados de la profesora (Flores y Carrillo, 2014). En este sentido, las concepciones de la profesora sobre la enseñanza de las matemáticas tienen una fuerte relación con los conocimientos especializados que emplea para planear y desarrollar su práctica de enseñanza (Flores y Carrillo, 2014).

En su tesis doctoral, Vasco (2015) señala, después de realizar un estudio sobre el conocimiento especializado de dos profesores de álgebra lineal, que las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas permiten comprender el conocimiento didáctico que el profesor posee y emplea en su práctica. En ese sentido, identificar las concepciones del profesor permite realizar un análisis más rico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Vasco, 2015).

En el mismo orden de ideas, Aguilar-González (2016) afirma, después de analizar el conocimiento especializado de una maestra de primaria para enseñar a clasificar figuras planas, que para comprender el conocimiento especializado que emplea un profesor es necesario indagar sobre las relaciones entre sus concepciones y prácticas de enseñanza. Esto se debe a que los conocimientos y las concepciones de los profesores forman una amalgama de saberes que influencian su práctica de enseñanza (Carrillo et al., 2018).

La relación entre los conocimientos del profesor y sus concepciones de enseñanza impactan de forma significativa en el aula (Ernest, 1989). Esto debido a que en primera instancia, los profesores con conocimientos matemáticos y didácticos profundos, pueden llevar al aula una enseñanza rica en matemáticas, donde se propicien diversos ambientes de aprendizaje (McCrory et al., 2012); en segunda instancia, las metodologías de enseñanza empleadas por el profesor, influyen en la configuración de concepciones sobre la naturaleza, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se forjan los estudiantes (Benítez, 2013). Por ende, es posible afirmar que el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y sus concepciones de enseñanza, impactan en los aprendizajes que alcanzan sus estudiantes (Campbell et al., 2014).

1.3 Reflexión

A partir de la indagación bibliográfica realizada, hemos encontrado en relación con el conocimiento del profesor para la enseñanza de las funciones racionales, que las investigaciones exhiben que los profesores poseen conocimientos matemáticos y didácticos limitados para impartir este concepto. Los estudios citados manifiestan que tanto profesores en formación como en ejercicio, tienen diversas dificultades para comprender y enseñar este concepto y sus elementos. Los investigadores señalan que esto se debe, en gran parte, a su formación académica. En este sentido, nos es posible afirmar que las limitaciones en la comprensión matemática de los profesores, afecta la enseñanza efectiva del concepto, y por ende, no aporta elementos importantes para alcanzar aprendizajes significativos.

Respecto a las investigaciones sobre la relación entre las concepciones del profesor y sus prácticas, hemos observado que los investigadores coinciden al afirmar que la adopción de metodologías para la enseñanza está determinada por las concepciones de enseñanza-aprendizaje del profesor. Por ende, los recursos y técnicas para la enseñanza que emplea el profesor, están influenciadas por sus concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas y su experiencia formativa y laboral.

En cuanto a la relación e impacto entre las concepciones y los conocimientos del profesor, la indagación bibliográfica exhibe que esta relación es bidireccional y significativa para comprender las actuaciones, comportamientos y prácticas de enseñanza de los profesores. Los estudios citados señalan que identificar las concepciones del profesor complementa y enriquece el análisis, y la comprensión, de los conocimientos matemáticos y didácticos que tiene y emplea en su práctica.

La bibliografía consultada, manifiesta que el impacto de esta relación determina el alcance de aprendizajes significativos en los estudiantes. En ese sentido, los autores coinciden en que los profesores con un profundo dominio matemático y didáctico del contenido, cuentan con mayores herramientas para propiciar ambientes de aprendizaje ricos en matemáticas. Por ende, es importante identificar y comprender los conocimientos y las concepciones del profesor, pues éstos determinan la efectividad de su quehacer profesional.

Los estudios mencionados en los antecedentes nos dan cuenta de que, hasta el momento, existen pocas investigaciones que indiquen la importancia y caractericen el conocimiento del profesor para enseñar funciones racionales. Por ello, consideramos importante indagar sobre la importancia y el impacto de los conocimientos matemáticos y didácticos que tiene y manifiesta el profesor en su práctica de enseñanza.

Por otra parte, hemos notado que las investigaciones sobre las concepciones del profesor son, en su mayoría, de tipo descriptivo. Éstas comparten una tendencia por indagar las relaciones entre las concepciones del profesor y sus prácticas de enseñanza. Por ende, nos resulta importante comprender cómo se da esta relación y examinar el impacto que ésta tiene en la enseñanza efectiva de funciones racionales.

En ese orden de ideas, para poder examinar el impacto que tiene esta relación, se implementará el instrumento metodológico Concepciones de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (CEAM), y el modelo teórico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), para identificar y comprender las concepciones y los conocimientos especializados que el profesor manifiesta en su práctica, respectivamente.

CAPÍTULO II

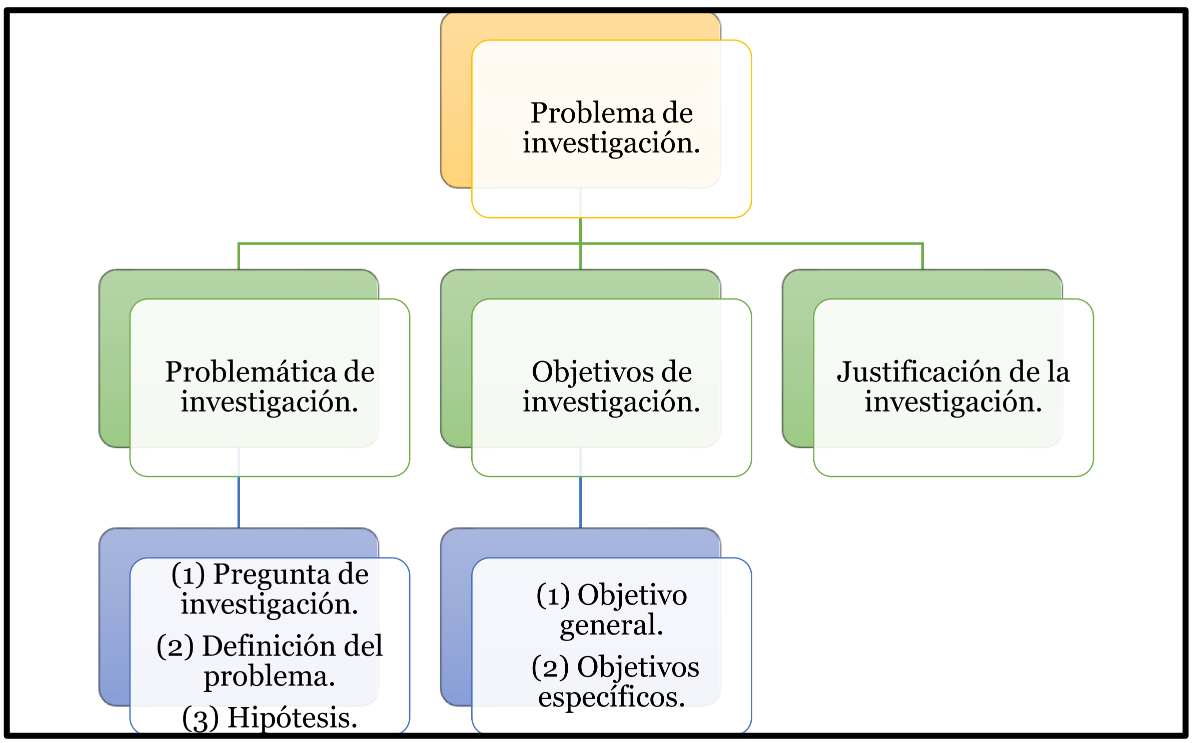
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 2: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se describe el problema de investigación y los elementos que la estructuran. Estos se encuentran en el siguiente orden: problemática, pregunta de investigación, definición del problema, hipótesis, objetivos de investigación y la justificación. Véase la *Figura 2*. Véase la estructura en la *Figura 2*.

Figura 2.

Estructura del capítulo 2 de investigación.



Fuente: elaboración propia.

2 Problemática

En las últimas décadas, el álgebra ha sido catalogada como una de las asignaturas más complejas de aprender en secundaria y bachillerato (Castro, 2012). En cuanto a esto, diversos investigadores (Arce y Ortega, 2013; Noreña, 2013; Fernández, 2019), coinciden al afirmar que gran parte de las dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar están originadas por las prácticas de enseñanza que tienen los profesores de matemáticas.

McCrory et al. (2012) señalan que las dificultades en la enseñanza del álgebra escolar obedecen, en gran medida, a limitaciones en los conocimientos matemáticos y didácticos que poseen profesores para impartir efectivamente. Respecto a esto, Mapolelo y Akinsola (2015) argumentan que una pobre comprensión conceptual de las matemáticas, afectará la práctica de enseñanza de los profesores. Por ende, el aprendizaje de los estudiantes puede verse limitado por el dominio matemático y didáctico de sus maestros (Wilkins, 2018; Carrillo et al., 2018).

En este sentido, la calidad de la formación matemática que reciben los estudiantes, está determinada por los conocimientos del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza (Campbell, et al., 2014). Dicho así, Rodríguez-Flores et al. (2018) indican que en el proceso de aprendizaje el profesor tiene un papel crucial, pues es el encargado de guiar a los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático. Por tal motivo, Carrillo et al. (2018) consideran que el profesor debe tener conocimientos matemáticos y didácticos profundos del contenido a impartir, pues de éstos depende la efectividad de su enseñanza y la calidad en los aprendizajes de sus estudiantes.

Específicamente en el álgebra escolar, el concepto de función es sustancial para los estudiantes, pues permite modelar, describir y explicar situaciones en diversos contextos, además de propiciar elementos para desarrollar el pensamiento variacional (Rodríguez-Flores et al., 2018; Grueso, 2019). Por tal motivo, entidades como el National Council Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), la Secretaría de Educación Pública en México (SEP, 2011) y el Ministerio de Educación Nacional en Colombia (MEN, 1998, 2006), entre otras, han optado por incluir en sus estándares y políticas educativas conceptos vinculados a patrones, relaciones y funciones desde edades tempranas. No obstante, la enseñanza-aprendizaje del concepto de función sigue causando preocupación y es uno los más estudiados, pues tiene gran importancia en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral (Romero, 2019; Gómez et al., 2015).

Respecto a esto, Gonzáles y Grueso (2016) afirman que, a pesar de las diversas propuestas didácticas e investigaciones realizadas, la enseñanza del concepto de función se sigue viendo reducida al de correspondencia entre conjuntos o asignación, privilegiando únicamente su tratamiento algebraico. En ese sentido, Grueso (2019) argumenta que privilegiar esta única representación del concepto no propicia elementos significativos para comprender las funciones desde su carácter dinámico y variacional, afectando las concepciones que los estudiantes configuran sobre el cálculo, las matemáticas y su naturaleza.

En relación con lo anterior, López y Sosa (2008) expresan que “La enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la interacción de este registro con otros, como el gráfico, suele ser limitado a una simple ejemplificación” (p. 317). Al respecto, Noreña (2013) menciona que esta enseñanza tradicional de las funciones racionales, restringe la interacción de los estudiantes con el concepto, privilegiando su representación algebraica y, por ende, limitando la construcción del pensamiento variacional. En ese orden de ideas, consideramos que la enseñanza tradicional de las funciones racionales propicia una percepción estática del concepto, dejando en segundo plano el carácter dinámico del objeto matemático.

Respecto a lo anterior, Mapolelo y Akinsola (2015) mencionan que esta práctica de enseñanza puede deberse a una comprensión matemática limitada del concepto, lo cual implica una concepción de enseñanza tradicional del mismo. En ese sentido, Amaya et al. (2016) manifiestan que los profesores en formación tienen poca comprensión del concepto de función y sus registros de representación. Concordando con Fernández (2019), quien afirma que algunas dificultades en el aprendizaje de las funciones racionales de estudiantes, se originan en los conocimientos, metodologías de enseñanza y discurso empleado por el profesor para impartir. En ese orden de ideas, estos autores consideran que la formación matemática, las concepciones y prácticas de enseñanza del profesor influyen directamente sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Así pues, dada la importancia de las funciones en la formación matemática de los estudiantes, la dificultad en su aprendizaje y el débil manejo de los contenidos relacionados con el tema por parte de los profesores, nos resulta de interés estudiar el conocimiento matemático del profesor en relación con sus concepciones para la enseñanza de las funciones racionales. Por esta razón, nos proponemos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cuál es el impacto de la relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional?

2.1 Definición del problema.

- Las investigaciones que indagan sobre los conocimientos especializados del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza, si bien señalan que existe una relación entre estos elementos, no describen el impacto que éstos tienen en el aula. En ese sentido, es necesario indagar sobre el impacto que tiene esta relación en la enseñanza de la función racional.

2.2 Objetivos de la investigación

2.2.1 Objetivo general.

- Caracterizar el impacto que tiene la relación entre el conocimiento matemático y las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.

2.2.2 Objetivos específicos.

- Identificar el conocimiento matemático del profesor sobre la función racional.
- Analizar las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.
- Caracterizar la relación entre los conocimientos matemáticos del profesor y la selección de metodologías para la enseñanza-aprendizaje de la función racional.
- Examinar el impacto que tiene la relación entre los conocimientos matemáticos y las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.

2.3 JUSTIFICACIÓN

Los profesores en formación y servicio poseen dificultades para comprender y enseñar el concepto de función (Amaya et al., 2016; Fernández, 2019). En ese sentido, la enseñanza de este concepto ha perdido su potencialidad en los procesos de modelación de fenómenos dinámicos y situaciones problema, pues su enseñanza se ha centrado mayoritariamente en su tratamiento algebraico (González y Grueso, 2016). Por tal razón, nosotros consideramos importante desarrollar una investigación enfocada en indagar los conocimientos especializados y las concepciones que poseen los profesores para la enseñanza de las funciones racionales.

Carrillo et al. (2018) argumentan que el profesor de matemáticas ejerce una práctica compleja, en la que se relacionan sus conocimientos matemáticos y didácticos del contenido, con sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Según Ernest (1989), esta relación tiene un fuerte impacto en las metodologías de enseñanza del profesor y sus actuaciones en el aula de clases. En corcondancia, Barrantes y Mora (2008) afirman que:

> Cualquier estrategia a utilizar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas estará sustentada en alguna percepción sobre la naturaleza de las matemáticas. Esta percepción influirá en el tipo de actividades y ambiente de aprendizaje que el profesor proponga a sus estudiantes para inducir en ellos el aprendizaje de los conceptos matemáticos (p. 72).

Respecto a lo anterior, Campbell et al. (2014) indican que esta relación no impacta únicamente en las prácticas de enseñanza, sino, también, en los aprendizajes alcanzados por sus estudiantes en los cursos que imparte. Por ende, consideramos importante indagar sobre el impacto que esta relación tiene en la enseñanza de las funciones racionales.

En las últimas décadas, la preocupación por la formación algebraica que reciben los estudiantes (McCrory et al., 2012; Castro, 2012) y el pensamiento variacional que desarrollan (Grueso, 2019), ha ido en aumento. Por esta razón, entes educativos como el NCTM (2000), SEP (2011) y MEN (1998; 2006), han incluido en sus currículos y estándares educativos, diferentes estrategias para desarrollar el pensamiento algebraico en sus estudiantes desde edades tempranas. Sin embargo, estas reformas no han alcanzado el éxito esperado, pues las investigaciones aún reportan dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar (Arce y Ortega, 2013; Romero, 2019) y, particularmente, en el aprendizaje del concepto de función (Gonzáles y Grueso, 2016; Noreña, 2013).

En ese orden de ideas, consideramos que para alcanzar el éxito de estas reformas es necesario entender qué concibe y conoce el profesor de matemáticas, pues como lo señala Bucci (2002) "una reforma educacional exitosa implica comprender y considerar las concepciones y actuaciones del docente. El docente debería ser considerado como una persona que está aprendiendo activamente y que construye sus propias interpretaciones" (citado en Benítez, 2011, p.10). En este sentido, el éxito de una reforma educativa depende del profesor, sus conocimientos, actuaciones y prácticas de enseñanza (Sowder, 2007). Pues, como lo señala Barrón (2015): "las prácticas de los docentes están determinadas por la institución, por el proyecto educativo, por el conocimiento profesional y por las concepciones epistemológicas formadas a partir de las creencias, los significados y los conocimientos disciplinarios, pedagógicos y didácticos" (p.49).

Por tal razón, consideramos que para alcanzar una formación algebraica significativa en los estudiantes, los profesores deben poseer conocimientos matemáticos y didácticos sólidos de la materia, además de implementar metodologías de enseñanza efectivas, para alcanzar los objetivos esperados.

Por otra parte, es importante señalar que la importancia de los conocimientos del profesor y sus concepciones en la práctica de enseñanza, ha sido mencionada desde los años ochenta por diversos autores como Shulman (1986, 1987), Ernest (1989) y Thompson (1984, 1992). Sin embargo, la bibliografía existente da cuenta de que existen pocas investigaciones que estudien el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza del concepto de función y, particularmente, el de función racional. Por ello, nos resulta importante indagar sobre aspectos que dependen de los conocimientos y concepciones del profesor, además de su relación e impacto al impartir este objeto matemático.

Con esta investigación esperamos contribuir con elementos que den cuenta de la relación e impacto que tienen los conocimientos especializados del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza de las funciones racionales. Por otra parte, también confiamos en que los resultados de esta investigación sean útiles teórica y metodológicamente para robustecer el marco teórico MTSK en la indagación de las concepciones del profesor y sus implicaciones sobre la práctica de enseñanza.

Asimismo, esperamos que nuestra investigación arroje resultados y conclusiones que sienten precedentes para que se tomen decisiones importantes en la formación docente y las concepciones que éstos se configuran sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

CAPÍTULO III

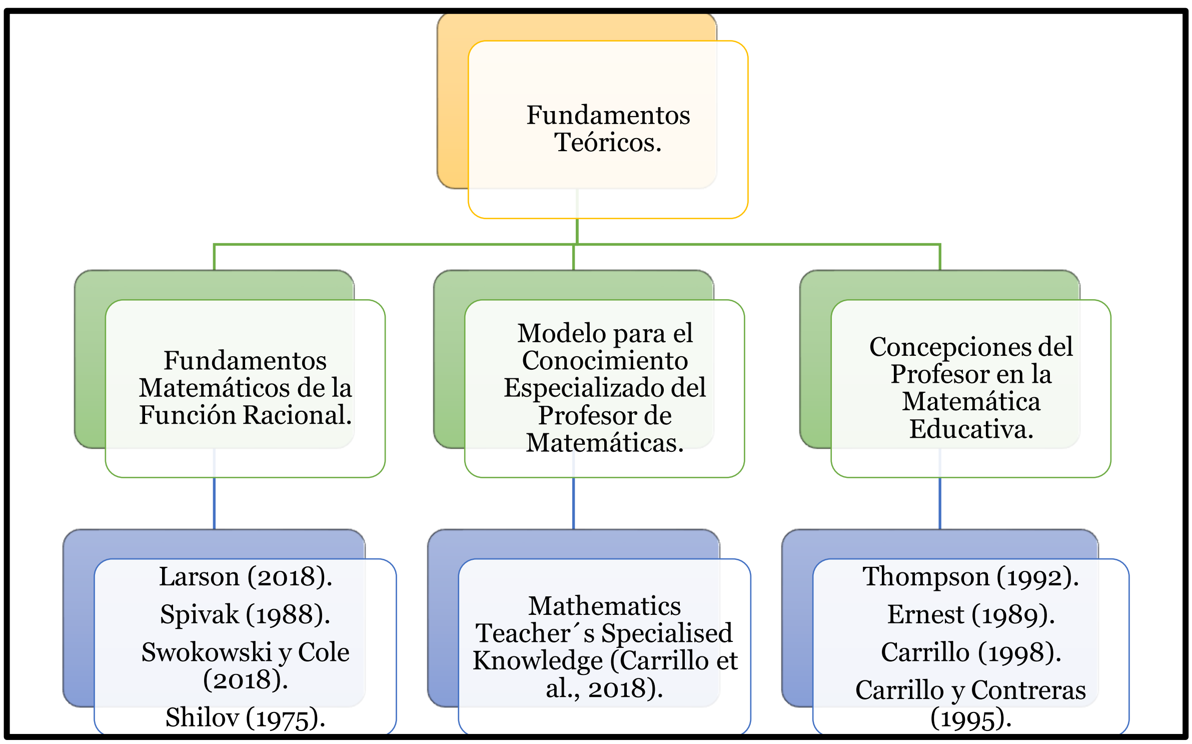
MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO.

En este capítulo se describen elementos del marco teórico. Estos están estructurados en: primero, los fundamentos matemáticos de las funciones racionales; segundo, el Modelo Teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK); tercero, las concepciones y creencias de los profesores en la Matemática Educativa. Véase la estructura en la *Figura 3*.

Figura 3.

Estructura del marco teórico de la investigación.



Fuente: elaboración propia.

3.1 Fundamentos Matemáticos.

En este apartado se mencionan algunos aspectos de los contenidos matemáticos básicos que guardan relación con el concepto de función racional. Estos aparecen de manera directa o indirecta en nuestra investigación. Por ende, consideramos esencial mencionarlos, pues son conceptos matemáticos sobre los cuales se estructura esta investigación.

No obstante, es importante resaltar que no se realiza ninguna definición exhaustiva de los contenidos presentados. Pues, en esta investigación, no se contempla realizar una exposición extensa de los elementos de la teoría de funciones. En ese sentido, el objetivo de esta sección es presentar al lector los conocimientos matemáticos básicos que se abordarán en la investigación.

Definición de Función

El concepto de función es definido por autores como Spivak (1988), Larson (2018), y Swokowski y Cole (2018), como correspondencia f entre dos conjuntos A y B. Por ejemplo, Larson (2018) define función como:

> Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una relación que asigna a cada elemento x del conjunto A exactamente un elemento y del conjunto B. El conjunto A es el dominio (o conjunto de entradas) de la función f, y el conjunto B contiene el rango (o conjunto de salidas) (p. 39).

Definición de Polinomio y Función Polinómica

Un polinomio es una expresión algebraica en la que intervienen varios números y letras, relacionados entre ellos mediante sumas, multiplicaciónes y/o potencias. Swokowski y Cole

(2018) definen polinomio como una suma de la forma: “$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, donde n es un número entero no negativo y cada coeficiente a_n es un número real. Si $a_n \neq 0$, entonces se dice que el polinomio es de grado $\boldsymbol{n}$” (p. 28).

Respecto a esto, Noreña (2013) argumenta que es posible caracterizar las funciones polinómicas como combinaciones lineales de funciones de potencias, con base real x y exponentes n que pertenecen a los enteros no negativos. Estas funciones se caracterizan por ser continuas en todo el conjunto de los números reales. Es decir, su dominio es $Df: \mathbb{R}$ (Larson, 2018).

Definición de Función Racional

Sea f una función, f es una **función racional** si:

$$f = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad q(x) \neq 0$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios (Larson, 2018). Por consiguiente, una función racional es un cociente entre dos polinomios, donde el denominador es diferente a cero (Shilov, 1975, p.23):

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}, q(x) \neq 0.$$

Dominio de una función racional

Sea f una función racional, el **dominio de $\boldsymbol{f}$** es el conjunto de todos los números reales x tal que $q(x) \neq 0$ (Swokowski y Cole, 2018). En ese sentido, Barnett et al. (2000) señalan que:

"Si $x = a$ y $q(a) = 0$, entonces $\boldsymbol{f}$ **no está definida** en $x = a$ y ahí no puede haber ningún punto en la gráfica de f con abcisa $x = a$. Recuerde que no se permite la divisón entre 0. Esto puede demostrar que:

Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y $q(a) = 0$, entonces $\boldsymbol{f}$ **es discontinua** en $x = a$, y la gráfica de f tiene un hueco o corte en $x = a$. " (p. 250)

Por su parte, si $x = a$ está en el dominio y $f(a) = 0$, entonces la gráfica de $\boldsymbol{f}$ cruza el eje x en $x = a$, de manera que:

Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $f(x) = 0$, y $q(x) \neq 0$, entonces $x = a$ es una intersección con el eje x para la gráfica de f (Barnett et al., 2000).

En ese orden de ideas, el dominio de una función racional f se puede especificar como:

$$D_{f(x)} = D_{\frac{p(x)}{q(x)}} = \{x \in D_p \cap D_q : q(x) \neq 0\}$$

Teorema 1 (*Asíntotas verticales de una función racional*)

Las asíntotas en las funciones racionales son implicaciones en el comportamiento de éstas. Swokowski y Cole (2018) señalan tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas. Respecto a las verticales, Barnett et al. (2000) enuncian el teorema de la siguiente forma:

Sea f una función racional definida por:

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x) \neq 0$ son polinomios. Si a es un número real, que $q(x) = 0$ y $p(x) \neq 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $y = f(x)$.

Definición 1 (*Asíntotas verticales y horizontales*)

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de $y = f(x)$, si $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite conforme x se aproxima a a desde la izquierda o desde la derecha (Barnett et al., 2000). De manera simbólica obtenemos que:

$f(x) \rightarrow \infty$ o $f(x) \rightarrow -\infty$ conforme $x \rightarrow a^{+}$ o $x \rightarrow a^{-}$

La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de $y = f(x)$, si $f(x)$ se aproxima a b conforme a x aumenta sin límite o conforme a x disminuye sin límite. De manera simbólica obtenemos que:

$$f(x) \rightarrow b \text{ conforme } x \rightarrow \infty \text{ o } x \rightarrow -\infty$$

Teorema 2 (*Asíntotas horizontales*)

Larson (2018) afirma que la recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$ cuando cumple las siguientes condiciones:

- Si $n < m$, entonces el eje x es la asíntota horizontal, es decir si: $y = 0$.
- Si $n = m$, entonces la asíntota horizontal es la recta igual al cociente entre los coeficientes principales de: $p(x)$ y $q(x)$, dados por a_n y b_n. Es decir, $y = \frac{a_n}{b_n}$.
- Si $n > m$, la gráfica $f(x)$ no tiene asíntota horizontal (Larson, 2018).

Teorema 3 (*Asíntotas Oblícuas)*

Swokowski y Cole (2018) afirman que una *asíntota oblicua* (o inclinada) para la gráfica de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, q(x) \neq 0$ corresponde a una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, tal que la gráfica de $f(x)$ se aproxima a esta cuando $x \rightarrow \infty$ o cuando $x \rightarrow -\infty$.

Larson (2018) indica que para determinar la existencia de una asíntota horizontal en una función racional $f(x)$ es necesario comparar los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$. De manera que, si el grado de $p(x)$ es mayor que el grado del polinomio $q(x)$ en exactamente uno más, la gráfica de $f(x)$ tendrá una asíntota oblicua, en caso contrario no.

En ese orden de ideas, Noreña (2013) indica que "en caso que $f(x)$ presente asíntotas oblicuas, la expresión algebraica que denota el comportamiento de estas, es el cociente $C(x)$ que se obtiene al dividir al polinomio $p(x)$ respecto a $q(x)$" (p.41).

3.2 Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).

Desde principios de los años ochenta, profesores e investigadores de la Educación Matemática han indagado sobre los conocimientos profesionales que deben tener y tienen los profesores de matemáticas para ejercer su función docente (Sosa, 2012). En ese sentido, destacan los estudios realizados por Shulman (1986, 1987), Ball et al. (2008), Godino y colaboradores (Godino, 2009; Godino et al., 2013; Godino y Pino-Fan, 2013), y Carrillo y colaboradores (Carrillo et al., 2013; Carrillo et al., 2018), quienes proponen diversos modelos teóricos para caracterizar el conocimiento que posee y manifiesta el profesor en su quehacer profesional.

Entre estos modelos se destaca el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (en inglés, MTSK) de Carrillo y colaboradores, diseñado para indagar sobre los conocimientos especializados del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018). Reconocemos este modelo porque es una propuesta dual que: en primera instancia, describe y delimita teóricamente el conocimiento profesional del profesor; y en segunda instancia, posibilita en términos metodológicos examinar y analizar las prácticas de enseñanza mediante sus categorías de análisis (Flores-Medrano et al., 2013).

Respecto a las bases teóricas, Carrillo et al. (2014) afirman que este modelo cimienta sus bases teóricas en el "Knowledge Quartet (Rowland, Turner, Thwaites y Hucstep, 2009), el Mathematical Proficiency for Teaching (Kilpatrick, Blume y Allen, 2006), y, en especial, el Mathematical Knowledge for Teaching, (Ball, Thames, y Phelps, 2008) …" (p. 16). En ese sentido, Aguilar-González (2016) argumenta que el MTSK es generado para dar respuesta a problemas de delimitación entre los subdominios de conocimiento detectados en modelos teóricos tales como el PCK de Shulman (1986, 1987) y el MKT de Ball, Thames y Phelps (2008). A partir de ello, Flores y Carrillo (2014) señalan que el MTSK se divide en dos grandes dominios: primero, el *Conocimiento Matemático* (MK); segundo, el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK). A su vez, para estos dominios se proponen tres subdominios de conocimiento (Ver Figura 4).

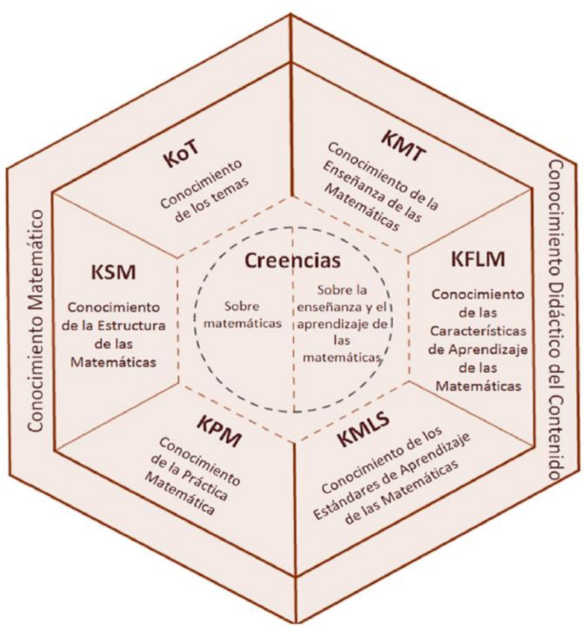


Figura 4. (Sosa et al., 2015, p.175)

3.2.1 Dominio del Conocimiento Matemático (MK)

El profesor de matemáticas debe poseer conocimientos profundos de la asignatura que imparte. En ese sentido, el MTSK, al igual que otros modelos de conocimiento (Ball et al., 2008; Shulman, 1986, 1987), considera que el conocimiento matemático es esencial para el quehacer profesional del profesor. En concordancia, nuestro modelo propone tres subdominios que componen y dan sentido a este dominio: *el conocimiento de los temas (KoT), el conocimiento de la práctica matemática (KPM)* y *el conocimiento de la estructura matemática (KSM).*

3.2.1.1 Conocimiento de los Temas (KoT)

Este subdominio refiere al conocimiento fundamentado que posee el profesor de los contenidos matemáticos y sus significados (Sosa et al., 2015). En ese sentido, el KoT abarca el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica, desde una perspectiva amplia y profunda (Aguilar-González, 2016). En ese orden de ideas, se proponen cinco categorías para caracterizar este subdominio (Vasco, 2015):

1. *Fenomenología y Aplicaciones:* Esta categoría se refiere al conocimiento que el profesor tiene acerca de los modelos aplicables a un tema. Es decir, los modelos que pueden ser útiles para generar conocimiento.
2. *Definiciones, Propiedades y Fundamentos:* Esta categoría refiere al conocimiento que el profesor tiene de las definiciones, propiedades y fundamentos atribuibles a los contenidos matemáticos (Delgado-Robello y Espinoza-Vásques, 2021).
3. *Registros de Representación*: En esta categoría se considera el conocimiento de las diversas formas en que se puede representar un objeto matemático (numérica, gráfica, verbal, analítica, etc) (Carrillo et al., 2018). Asimismo, comprende el conocimiento

de la notación y el vocabulario asociado a sus determinadas representaciones (Vasco, 2015).

4. *Procedimientos*: Esta categoría comprende el conocimiento del profesor sobre los algoritmos convencionales y alternativos, las condiciones suficientes para proceder, los fundamentos de los algoritmos y las características del objeto resultante (Carrillo et al., 2014).

3.2.1.2 Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)

Este subdominio refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de las formas de conocer, crear o producir y proceder en matemáticas (Aguilar-González, 2016). En ese sentido, el KPM destaca la importancia de comprender cómo se desarrollan las matemáticas y, por ende, que el profesor conozca los resultados matemáticos y las formas de proceder para obtenerlos (Carrillo et al., 2018). En concordancia, se proponen dos categorías de análisis para caracterizar este subdominio:

- Prácticas ligadas a la Matemática en General: Esta categoría abarca el conocimiento sobre *cómo* se desarrollan las matemáticas de forma independiente al concepto abordado (Aguilar-González, 2016). En ese orden de ideas, esta categoría refiere al conocimiento que es usado para trabajar matemáticas de forma genérica (Flores-Medrano et al., 2014).
- Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas: Esta categoría se refiere al *cómo* se desarrollan las matemáticas considerando un concepto o temática matemática específica.

3.2.1.3 Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM)

Este subdominio contempla el conocimiento de las relaciones que el profesor establece entre los contenidos matemáticos (Flores-Medrano et al., 2014). En ese sentido, en el KSM se reconocen las conexiones entre los distintos contenidos, estableciendo una red de conceptos y/o procedimientos (Aguilar-González, 2016). En ese orden de ideas, este subdominio reconoce cuatro categorías de análisis:

1. *Conexiones basadas en Complejización:* Esta categoría refiere a las relaciones entre los contenidos impartidos con posteriores (Flores-Medrano et al., 2014). Esta categoría implica ver el contenido matemático en perspectiva. Es decir, las matemáticas elementales desde un punto de vista avanzado (Vasco, 2015).

2. *Conexiones basadas en Simplificación:* Esta categoría se refiere a las conexiones del contenido matemático impartido con los contenidos enseñados en cursos anteriores (Aguilar-González, 2016).

3. *Conexiones Transversales:* Hace referencia a las conexiones que tienen contenidos de diversas disciplinas. En palabras de Vasco (2015) "es la cualidad común que relaciona contenidos matemáticos, y los modos de pensamiento asociados a esos contenidos contemplan esta característica común" (p. 37).

4. *Conexiones Auxiliares:* Esta categoría se refiere a las conexiones entre los conceptos y sus relaciones (Flores-Medrano et al., 2014). Es decir, la cualidad común mediante la cual se relacionan los contenidos matemáticos (Vasco, 2015).

3.2.2 Dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este dominio abarca el conocimiento que tiene el profesor de los contenidos matemáticos vistos como contenidos a enseñar (Carrillo et al., 2014). En ese sentido, el PCK considera aquellos conocimientos para la enseñanza de las matemáticas, incluyendo aquellas formas que resultan útiles para representar ideas, analogías, ilustraciones, explicaciones, ejemplos y demostraciones (Vasco, 2015). El MTSK divide el PCK en tres subdominios de conocimiento: *el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje (KMLS), el Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM)* y *el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT).*

3.2.2.1 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje (KMLS)

En este subdominio se considera el conocimiento que el profesor posee acerca de los aprendizajes que los estudiantes deben y pueden alcanzar en distintos cursos y niveles escolares (Aguilar-González, 2016). En ese sentido, el KMLS abarca el conocimiento de los contenidos propuestos por el currículo de matemáticas y las normativas educativas (Vasco, 2015). Dicho así, en el KMLS se proponen las siguientes categorías:

1. *Resultados de aprendizajes esperados:* Esta categoría refiere al conocimiento del profesor sobre los posibles aprendizajes de un estudiante en un determinado nivel escolar (Aguilar-González, 2016).
2. *Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado:* Esta categoría abarca el conocimiento del profesor sobre el nivel de profundidad con que deben abordarse los contenidos matemáticos, en relación con un ciclo escolar determinado (Aguilar-González, 2016).
3. *Secuenciación de los temas:* Esta categoría refiere al conocimiento del profesor sobre la secuenciación de diversos contenidos matemáticos, ya sea en el mismo curso o en relación con cursos anteriores (Carrillo et al., 2018).

3.2.2.2 Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

Este subdominio refiere al conocimiento sobre cómo se aprende un contenido matemático, teniendo en cuenta que el foco no es el estudiante, sino el conocimiento del profesor sobre el contenido matemático como objeto de aprendizaje (Vasco, 2015). En ese sentido, el KFLM engloba los conocimientos sobre las características de aprendizaje inherentes a los contenidos matemáticos (Carrillo et al., 2014). Así pues, en este subdominio se consideran las siguientes categorías:

1. *Teorías de aprendizaje matemático:* Esta categoría abarca el conocimiento que posee el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión que se asocian a la naturaleza de un contenido matemático (Aguilar-González, 2016). Asimismo, se incluye el conocimiento de estructuras o teorías personales o institucionalizadas sobre la enseñanza de las matemáticas en general o de sus objetos (Carrillo et al., 2018).
2. *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas*: Esta categoría refiere al conocimiento de los errores, obstáculos y dificultades de aprendizaje asociados a la matemática en general y sus objetos en particular (Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018).
3. *Formas en que los estudiantes interactúan con un contenido matemático:* Esta categoría engloba el conocimiento del profesor sobre los procesos y estrategias de los estudiantes, también a los conocimientos sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un contenido matemático.
4. *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas:* Esta categoría refiere al conocimiento de las concepciones, expectativas e intereses de los estudiantes respecto a determinado contenido matemático (Vasco, 2015; Carrillo et al., 2018).

3.2.2.3 Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT)

Este subdominio abarca el conocimiento del profesor sobre las matemáticas y su enseñanza (Vasco, 2015). En ese sentido, el KMT integra el conocimiento de distintas estrategias que le permiten al profesor fomentar las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales (Aguilar-González, 2016). Dicho así, este subdominio está compuesto por tres categorías de análisis, descritas a continuación (Carillo et al., 2014):

1. *Teorías de enseñanza de las matemáticas:* En esta categoría se consideran los conocimientos que tiene el profesor sobre las potencialidades que pueden tener diversas actividades, estrategias, o técnicas didácticas asociadas a determinado contenido matemático (Carrillo et al., 2018). En ese sentido, esta categoría refiere al conocimiento de las teorías de enseñanza específicas de la Educación Matemática (Vasco, 2015).
2. *Recursos y materiales didácticos (digitales o físicos):* En esta categoría se consideran el conocimeinto que tienen los profesores de los recursos para la enseñanza de las matemáticas, tales como: libros de texto, pizarras físicas o electrónicas, software como Cabri, Matlab o Geogebra, entre otros (Vasco, 2015).
3. *Estrategias, técnicas y tareas:* Esta categoría refiere al conocimiento de la potencialidad matemática que pueden tener determinadas secuencias, actividades, estrategias o técnicas didácticas, que el profesor considera potente para abordar determinado contenido matemático (Carrillo et al., 2018).

3.3 Concepciones y Creencias de los Profesores de Matemáticas.

Desde inicios de los ochenta, las investigaciones en Educación Matemática han manifestado un significativo interés por comprender el pensamiento del profesor de matemáticas (Benítez, 2011; Mapolelo y Akinsola, 2015; Ortega, 2016). Respecto a esto, investigadores como Thompson (1992), Ernets (1989), Pajares (1992) y Gascón (2001), han señalado la importancia de indagar sobre las creencias y concepciones del profesor acerca de la naturaleza, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto debido a que, las creencias y concepciones de los profesores, influencian su práctica instruccional (Thompson, 1984).

En ese orden de ideas, existen diversas consideraciones sobre cómo deben entenderse las creencias y las concepciones de los profesores. Esto se debe a la fina relación entre ambos términos (Benítez, 2011). En ese sentido, investigadores como Thompson (1992) y Pajares (1992) argumentan que es necesario distinguir entre sus significados y características para comprender ambos términos.

Para Thompson (1992), la distinción entre creencias y conocimiento, radica en la validez que asigna el método científico. En este orden de ideas, Thompson (1992) afirma que "el conocimiento debe cumplir con criterios que afectan a los cánones de la evidencia" (p. 130) y, por lo tanto, este debe ser validado para ser aceptado entre la comunidad científica. Por su parte, las creencias no necesitan de un método para ser validadas.

Thompson señala que otra diferencia entre estos términos radica en que "las creencias se pueden mantener con mayor o menor convicción" (Thompson, 1992, p. 129), lo que permite que estén profundamente arraigadas en un sujeto, aún y cuando carecen de un método consensuado que permita fundamentarlas y validarlas. Sin embargo, el conocimiento no está pensado de esta manera, pues la comunidad científica ha consensuado un método y una fundamentación teórica para validarlo (Aguilar-González, 2016). En consecuencia, las creencias y el conocimiento difieren entre sí por la necesidad de un método y fundamentación teórica del que dispone el conocimiento y no tienen las creencias.

No obstante, las creencias no son entendidas como elementos aislados (Benítez, 2013). Thompson (1992) argumenta que las creencias se relacionan entre sí, formando *sistemas de creencias* que aportan distintos grados de consistencia y estabilidad; tanto a las prácticas, como a los comportamientos y actuaciones de los profesores de matemáticas (Thompson, 1992). En consecuencia, las creencias y los sistemas que conforman los profesores repercuten directa o indirectamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Thompson, 1984).

Respecto a las concepciones, éstas son entendidas como una estructura mental más general. Thompson (1992) afirma que las concepciones abarcan los sistemas de creencias y diversas representaciones del conocimiento matemático. En ese sentido, las concepciones son concebidas como "una estructura más general, incluyendo creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y similares" (Thompson, 1992, p. 130). De forma similar, Carrillo et al. (2014) argumentan que:

> La diferenciación, por tanto, entre creencia y concepción, puede entenderse, a priori, en base a la implicación de la componente afectiva y emocional en las creencias, frente a la racionalización que suponen las concepciones. Sin embargo, esta relación entre creencias y concepciones, así como su integración en el conocimiento, es una faceta que aún no se ha explorado en la profundidad necesaria como para llegar a puntos de consenso (p. 11).

Por otra parte, Pajares (1992) entiende las creencias del profesor como conocimientos subjetivos y poco elaborados, creadas para explicar, justificar y actuar según su experiencia profesional. En este sentido, afirma que:

> Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema

con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo (Pajares, 1992, p. 310).

En ese orden de ideas, las creencias de los profesores se forman en edades tempranas y se arraigan profundamente (Pajares, 1992). En consecuencia, cuanto más antiguas son las creencias, más difíciles serán los procesos de cambio (Benítez, 2011). Por tal motivo, las actuaciones de los profesores en el aula tienden a ser similares a las que experimentaron durante su formación académica (Ernest, 1989; Ortega, 2016).

Ernest (1989) afirma que las concepciones epistemológicas y de enseñanza están fuertemente vinculadas con las prácticas de enseñanza del profesor. En ese sentido, el autor reconoce tres tipos de concepciones: *la resolución de problemas, la platónica y la instrumentalista*. Además, afirma que éstas son susceptibles de ser ordenadas en función de consideraciones epistemológicas, tales como: *el carácter infalible o falible* de las matemáticas (Ernest, 1989). Por ello, el quehacer docente está determinado por sus concepciones epistemológicas y de enseñanza de las matemáticas (Thompson 1984, 1992; Pajares, 1992).

Asumimos nuestro posicionamiento teórico frente a los términos creencias y concepciones en relación con los propuestos por Thompson (1992), quien afirma que: las creencias están asociadas a ideas personales, se justifican sin rigor alguno y se caracterizan por no tener un acuerdo sobre cómo deben ser evaluadas y juzgadas. Es decir, están asociadas a una naturaleza de carácter afectivo. Por su parte, al término concepción se le asigna una naturaleza de tipo cognitiva, pues forman parte del conocimiento, son organizadores implícitos de conceptos, se agrupan en sistemas de creencias e influyen en los procesos de razonamiento (García et al., 2006).

3.3.1 Concepciones de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas.

Las concepciones de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje impactan en la manera que imparte y desarrolla el proceso educativo (Ernest, 1989). En ese sentido, el actuar de los profesores dentro y fuera del aula de clases está determinado por sus concepciones sobre las matemáticas y sus objetos (Contreras, 2009). Por ende, para comprender la forma en que los profesores manifiestan sus conocimientos al enseñar y las acciones que caracterizan su quehacer profesional, es necesario identificar, analizar y comprender sus concepciones sobre la naturaleza, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Campbell et al., 2014; Mapolelo y Akinsola, 2015).

Diversas investigaciones que indagan sobre las concepciones del profesor respecto a la naturaleza de las matemáticas (Thompson, 1984; Pajares, 1992; Carrillo y Contreras, 1995; Moreno y Azcárate, 2003; Benitez, 2011; Vesga-Bravo y De Losada, 2018) indican que existen diversas percepciones sobre qué son y cómo deben ser enseñadas y, por tanto, aprendidas. Estas percepciones han sido relacionadas con diferentes corrientes filosóficas que explican, de distintas formas, la ontología y epistemología de las matemáticas y sus objetos (Ortega, 2016).

Por ejemplo, la clasificación realizada por Lerman (1983, citado en Thompson, 1992) consistió en la identificación de dos concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas:

- *Absolutista*: esta concepción asume que las matemáticas están estructuradas en fundamentos universales y absolutos. En ese sentido, las matemáticas son un cuerpo de objetos abstractos, objetivos, totalmente ciertos y universales. Por ende, la concepción *absolutista* es de naturaleza *Euclídea*.
- *Falibilista*: bajo esta concepción las matemáticas son producto del quehacer humano. En ese sentido, esta disciplina es inconclusa y se encuentra en

constante construcción. En consecuencia, la concepción falibilista es de naturaleza *Cuasi-Empírica* (Lakatos, 1978).

En relación a lo anterior, Gascón (2001) identificó una correspondencia entre tres paradigmas epistemológicos[1] de las matemáticas y tres modelos de docente[2] de los profesores. En ese sentido, el investigador afirma que los modelos docentes: *Tradicionalista*, *Modernista* y *Constructivista*, corresponden con los paradigmas epistemológicos: *Euclídeo, Cuasi-Empírico* y *Constructivista*, respectivamente. Por ende, para este autor las concepciones epistemológicas de los profesores determinan el modelo docente que adoptan y, por tanto, influyen en su práctica de enseñanza.

De forma similar, Ernest (1989) reconoce tres concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas que están directamente relacionadas con los modelos de enseñanza que usan los profesores para impartir. *Véase la Tabla 1*:

Tabla 1.

Caracterización de las concepciones sobre naturaleza y enseñanza de las matemáticas.

Caracterización vs Concepción	Platónica	Instrumentalista	Resolución de problemas
Naturaleza de las matemáticas.	Las matemáticas son un cuerpo estático, pero unificado, de un conocimiento totalmente seguro. Bajo esta concepción no hay posibilidad de que las matemáticas sean creadas,	Esta concepción defiende la idea de que las matemáticas son una acumulación de reglas, hechos y habilidades que se utilizan con el objetivo de conseguir un producto externo. En ese orden de ideas, las	Esta visión defiende la idea de que las matemáticas son un campo dinámico, en continua expansión y producto cultural. Es decir, una creación humana. Bajo esta concepción las matemáticas provienen de

[1] Entiéndase éstos como el cúmulo de concepciones creadas e impuestas por las escuelas filosóficas de pensamiento. D' Amore (2008) define *concepción epistemológica* como "un conjunto de convicciones, de conocimientos, y de saberes científicos que tienden a decir cuáles son los conocimientos de los individuos o grupos de personas, su funcionamiento, las formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto de enseñarlas y aprenderlas" (p. 2).

[2] Se entiende *modelo docente* como el conjunto de *prácticas docentes* que permite organizar, sistematizar y gestionar el proceso de enseñanza de las matemáticas en una institución educativa (Gascón, 2001).

		únicamente pueden ser descubiertas.	matemáticas son un conjunto de reglas y hechos que no guardan relación pero son útiles.	un proceso de indagación y, por tanto, no son un producto estático o terminado.
Enseñanza	Rol del profesor	Bajo la concepción platónica, el profesor cumple el rol de *expositor*. Por tal motivo, su papel en el aula es el de *recitar*.	El profesor es percibido como un instructor que debe desarrollar en sus estudiantes habilidades con una ejecución correcta.	Bajo esta concepción el profesor es visto como un facilitador. En ese sentido, este tiene el papel de plantear problemas convincentes y exponer diferentes casos de resolución.
	Aprendizaje esperado	Se espera que los estudiantes desarrollen una comprensión unificada del conocimiento matemático.	Se espera que los estudiantes puedan proponer y resolver problemas con un determinado nivel de confianza.	Se espera que los estudiantes dominen diferentes habilidades para la resolución de problemas con un desempeño correcto.
	Uso de materiales curriculares (libro de texto).	Es posible utilizar modificar la propuesta del libro de texto enriqueciendo con problemas y actividades adicionales.	Se debe seguir de forma estricta el libro de texto y el esquema que este proponga.	Se propone una construcción del currículo de matemáticas por parte del profesor o la escuela.
Aprendizaje de las matemáticas.		Bajo esta concepción las matemáticas deben ser aprendidas mediante la imitación. En ese sentido, el estudiante cumple el papel de receptor de conocimiento y los esquemas propuestos por su profesor.	Esta concepción afirma que el estudiante tiene un papel dócil, que aprende mediante la imitación y ejercitación algorítmica. En ese sentido, las actividades de aprendizaje giran en torno a dominar un modelo utilitario de las matemáticas.	Bajo esta concepción se defiende el aprendizaje de las matemáticas como una construcción activa del conocimiento. En ese sentido, sus actividades están enfocadas en la exploración y seguimiento de los intereses de los estudiantes.

Nota: Fuente Ernest (1989).

En esta clasificación, Ernest (1989) establece una jerarquía entre las concepciones según sus consideraciones epistemológicas. En ese orden de ideas, estas concepciones se ordenan conforme a su carácter *falible*, en el que se considera que el conocimiento es dinámico y proviene de prácticas culturales; o *infalible*, en el que se considera que el conocimiento es independiente de la experiencia y prácticas humanas. En consecuencia, y bajo este criterio, para este investigador las concepciones sobre la naturaleza y enseñanza de las matemáticas se ordenan en: primero, *la resolución de problemas*; segundo, *platónica*; tercero, *instrumentalista*.

3.3.2 Concepciones de los profesores sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Carrillo y Contretas (1998) afirman que las concepciones "pueden considerarse como operadores que actúan en el proceso de transformación del conocimiento a la situación didáctica, y en el propio control de la interacción alumno-situación" (p. 80). Bajo esta noción, clasificaron las concepciones de los profesores sobre la naturaleza y enseñanza de las matemáticas de acuerdo a cuatro tendencias: *tradicional (TR)*, *tecnológica (TE)*, *espontaneísta (E) e investigativa (I)*, y las organizaron conforme a seis categorías: *la metodología*, *la concepción de la matemática escolar, la concepción de aprendizaje, el papel del estudiante,* y *el papel del profesor*. En ese orden de ideas, en la *Tabla 2,* se propone la siguiente caracterización:

Tabla 2.

Caracterización de las tendencias didácticas de enseñanza del profesor de matemáticas.

Concepción	Caracterización
Tradicional (TR)	• Bajo esta tendencia, la metodología de enseñanza está caracterizada por la repetición reiterada de ejercicios. En ese sentido, impartir consiste en la exposición magistral de las matemáticas como un producto acabado y se considera el libro de texto como el único material curricular para el desarrollo de los cursos. • El estudiante es concebido como el responsable de sus aprendizajes y la evaluación de su proceso de aprendizaje consiste en medir la capacidad de éste para retener información.

Tecnológica (TE)	• La metodología de enseñanza está concebida como la reproducción de procesos lógicos en la que el profesor no expone los contenidos en su fase final, pues simula su proceso de construcción apoyado en medios técnicos. • Bajo esta tendencia prevalece el carácter práctico de la asignatura. Es decir, su aplicación en otras disciplinas. Además, se considera que el estudiante es el responsable de su aprendizaje, el cual proviene de la memorización tanto de los conceptos, como de los procesos lógicos que les proceden.
Espontaneísta (E)	• En esta tendencia la metodología de enseñanza tiende a poner en práctica diferentes métodos y recursos que suelen funcionar en otras aulas. En ese sentido, se sustituyen los ejercicios por actividades experimentales no reflexivas y el profesor propone actividades en las que se manipulan modelos mediante los cuales se produce un conocimiento no organizado. • Se concibe la matemática escolar con un sentido formativo, pues se espera cambiar la actitud del estudiante respecto al aprendizaje matemático bajo la dinámica de grupos. En ese orden de ideas, el profesor tiende a ser humanista.
Investigativa (I)	• En esta tendencia se considera que el profesor encauza al estudiante a la adquisición de determinados conocimientos mediante su investigación. En ese sentido, el profesor dispone de una propuesta organizada que contiene los elementos del programa, pero no tiene una vinculación a un recorrido completo. • El objetivo es que los estudiantes otorguen significado a lo que aprenden y desarrollen actitudes positivas. Por ende, se privilegian aprendizajes que puedan ser aplicados en diferentes contextos.

Nota: Fuente Carrillo y Contreras (1995).

3.4 Síntesis

En este capítulo se revisan los fundamentos matemáticos de las funciones racionales y sus elementos, se presentan los elementos teóricos del modelo para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), y se presentan estudios sobre los términos: creencia, concepción, concepción epistemológica y concepción de enseñanza. Estos tópicos han sido ampliamente estudiados por diferentes investigadores a lo largo de las últimas tres décadas, y actualmente siguen siendo objeto de estudio por su fuerte injerencia en las prácticas de enseñanza del profesor.

Los fundamentos matemáticos presentados en los apartados anteriores están organizados según los conocimientos previos para definir las funciones racionales (tales como las definiciones de *polinomio*, *función* y *función polinómica*), seguidamente se presenta la definición de *función racional* y su *dominio*, y posteriormente sus teoremas fundamentales (tales como los teoremas de *asíntotas verticales, horizontales* y *oblicuas*). Respecto a esto, consideramos que el estudio de los fundamentos matemáticos que subyacen a las funciones racionales nos permite tener un acercamiento al conocimiento matemático (conceptual y procedimental) que tiene y manifiesta el profesor de matemáticas. Por ende, representa una fuente importante de información para la estructuración de indicadores de conocimiento especializado del profesor.

Por otra parte, resaltamos el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) por su naturaleza bivalente, debido a que permite clasificar teóricamente los conocimientos del profesor mediante dos dominios (conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido) y nos sirve como herramienta metodológica en la identificación, análisis y comprensión de estos conocimientos. En ese orden de ideas, justificamos la elección de este modelo por su amplio desarrollo de subdominios del conocimiento del profesor, estableciendo mediante categorías una distinción precisa de los conocimientos que tiene y emplea el profesor de matemáticas en su práctica.

En concordancia, para esta investigación se considerarán todos los elementos que constituyen el MTSK. Sin embargo, haremos énfasis en los subdominios *KoT, KPM* y *KSM* del conocimiento matemático, y las categorías: *fortalezas y dificultades de aprendizaje de las matemáticas* y *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas* del subdominio

KFLM; *teorías de enseñanza de las matemáticas, recursos didácticos (digitales o materiales)* y *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* del subdominio *KMT*.

En apartados anteriores ya hemos argumentado sobre la relación que tienen los conocimientos del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas. Además, presentamos nuestra postura teórica frente al término de concepción, inclinandonos por la propuesta de Thompson (1992). No obstante, y para efectos metodológicos, añadiremos a esta noción la presentada por Climent (2005) quien define las concepciones de enseñanza-aprendizaje como “el conjunto de creencias y posicionamientos que el investigador interpreta posee el individuo, a partir del análisis de sus opiniones, respuestas a preguntas sobre y su descripción de su práctica, su acción y los documentos que produce en torno a ésta” (p. 23).

Asimismo, nuestra postura respecto a las concepciones del profesor sobre epistemología de las matemáticas corresponde con la propuesta realizada por Ernest (1989). Por su parte, y en cuanto a las concepciones del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas, nuestro posicionamiento es a través de la propuesta de Carrillo (1998) y Carrillo y Contreras (1995).

En concordancia, consideramos que las concepciones sobre el proceso de enseñanza cumplen un papel fundamental para impartir las funciones racionales, debido a que cualquier estrategia a utilizar en este proceso estará sustentada bajo alguna percepción del profesor sobre las matemáticas (Barrantes y Mora, 2008), y sus conocimientos matemáticos y didácticos del contenido (Flores y Carrillo, 2014).

CAPÍTULO IV

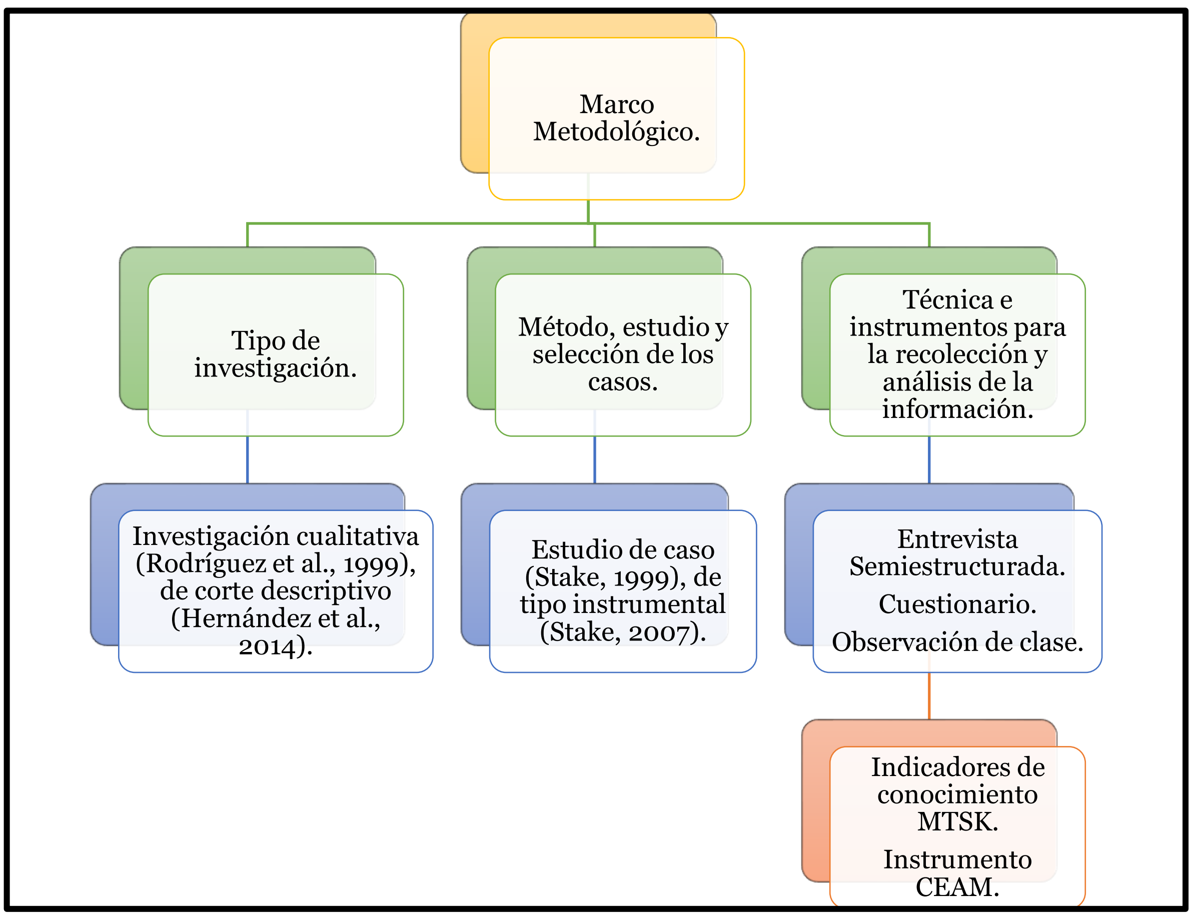
MARCO METODOLÓGICO

CAPÍTULO 4: MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describen los fundamentos metodológicos que se consideraron para el desarrollo de la investigación. Estos están presentados en el siguiente orden: primero, la naturaleza de la investigación; segundo, el método; tercero, la técnica. En este apartado se encuentran los instrumentos para la recolección de información (tales como las entrevistas, el cuestionario de conocimientos y el análisis de clase) y los instrumentos para el análisis de la información (tales como el MTSK para los conocimientos y el instrumento CEAM para las concepciones) Véase la estructura del capítulo en la *Figura 5*.

Figura 5.

Estructura del marco metodológico de la investigación.



Fuente: elaboración propia.

4.1 Tipo de Investigación

Nuestra investigación tiene como objetivo general *caracterizar el impacto que tiene la relación entre el conocimiento matemático y las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones racionales*. En ese sentido, y para alcanzar este objetivo, para nosotros es imperativo estudiar la práctica de enseñanza que ejerce el profesor y los conocimientos manifestados durante este proceso. Por ende, contemplamos que el paradigma interpretativo es el más apropiado para el desarrollo de nuestra investigación, debido a que se busca comprender la relación entre los elementos anteriormente nombrados y su impacto. Asimismo, y dado por esta razón, consideramos que nuestro estudio es de *naturaleza cualitativa*, pues la finalidad es comprender e interpretar el conocimiento especializado empleado por el profesor y las concepciones de enseñanza que matizan su quehacer profesional.

En concordancia con esto, Rodríguez et al. (2002) afirman que las investigaciones de naturaleza cualitativa tienen el objetivo de estudiar el mundo y sus fenómenos desde su contexto natural. En ese orden de ideas, nuestra investigación se plantea estudiar el proceso de enseñanza que es ejercido por un profesor de matemáticas en su contexto natural que para este estudio corresponde con el aula de clases. Respecto a este tipo de investigación, los autores afirman que:

> Estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. La investigación cualitativa implica la utilización y recogida de una gran variedad de materiales—entrevista, experiencia personal, historias de vida, observaciones, textos históricos, imágenes, sonidos – que describen la rutina y las

situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas (Rodríguez et al., 2002, p. 1).

En cuanto al corte de la investigación, consideramos que es *descriptivo*. Respecto a este tipo de estudio, Hernández et al. (2014) señalan que las investigaciones descriptivas tienen como objetivo “especificar las propiedades, las características, y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (p. 92). En ese sentido, y dado que nuestra investigación tiene la finalidad de explorar y especificar *el impacto que tienen los conocimientos matemáticos y concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones racionales*, asumimos el desarrollo de la investigación desde el *corte descriptivo*.

4.2 Método, Estudio y Selección de los Casos.

En la investigación cualitativa, el método es un elemento esencial para su desarrollo, pues este determina el camino a seguir para llevar a cabo la investigación (Schmelkes y Elizondo, 2010). En ese sentido, nosotros entendemos el método como la forma característica de investigar, que está determinada por la intención y el enfoque que la orienta (Rodríguez et al., 1999). Por ende, para el desarrollo de nuestra investigación, hemos determinado que el método a seguir será el estudio de caso, debido a que es el que nos resulta de mayor utilidad.

El estudio de caso es definido por Stake (1999) como “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11). En ese sentido, Stake (2007) reconoce tres tipos de estudios de caso:

1. **Intrínseco**: Este estudio de caso tiene como objetivo conseguir una amplia comprensión de un caso particular. Éste no se realiza porque se pretenda entender un

constructo abstracto o fenómeno genérico, sino porque la particularidad del caso resulta de interés.

2. **Instrumental**: Es aquel que examina un caso particular con el objetivo de propiciar más información sobre un tema específico. Asimismo, este estudio sirve para formular generalizaciones que permitan comprender otros temas o fenómenos de interés.
3. **Colectivo**: Este estudio tiene como objetivo comprender de forma conjunta o colectiva determinados temas, fenómenos o condiciones generales de una población. En ese sentido, este tipo de estudio se trata de un estudio instrumental que puede expandirse a diversos casos.

Respecto a esto, nuestra investigación se enmarca en un estudio de caso de tipo *instrumental*, pues nuestro objetivo es el de comprender e interpretar el conocimiento especializado del profesor sobre las funciones racionales y sus concepciones de enseñanza-aprendizaje. Por ende, pretendemos alcanzar este objetivo mediante la observación de la práctica del profesor, entrevistas semiestructuradas y cuestionarios de conocimiento.

4.2.1 Selección de casos.

El desarrollo de esta investigación se contempla según dos fases: la primera refiere al estudio de la relación entre los conocimientos matemáticos del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones racionales; la segunda está enfocada en la caracterización del impacto (de entre los elementos anteriormente nombrados) en el aprendizaje alcanzado por los estudiantes. En ese sentido, se consideran imperativos dos casos según el desarrollo cada fases:

- En la primera fase se contempla como caso el profesor de matemáticas, pues éste proveerá, mediante su práctica de enseñanza, la información necesaria para poder determinar la relación entre sus conocimientos matemáticos y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones racionales.
- En la segunda fase el estudio se enfoca tanto en el profesor como en los estudiantes, pues éstos son quienes proveerán la información necesaria para identificar el aprendizaje alcanzado. En ese sentido, los estudiantes nos permitirán comprender cuál fue el impacto que tuvo la práctica de enseñanza del profesor.

En concordancia con lo anterior, se consideró oportuno seleccionar como caso un profesor de matemáticas (en servicio frente a grupo) en el nivel de bachillerato. Añadido a esto, otro criterio imperativo fue que éste impartiera el contenido de funcional racional. En cuanto a la formación académica del docente, contemplamos profesionales que se dedicarán a la docencia de las matemáticas tales como: matemáticos, licenciados en matemáticas, licenciados en educación básica con énfasis en matemáticas e ingenieros, entre otras.

Respecto a la segunda fase, consideramos oportuno seleccionar la totalidad, o en su defecto, una muestra representativa de los estudiantes que estuvieron durante el proceso de enseñanza que ejerció el profesor seleccionado. A estos estudiantes se les aplicó un cuestionario de conocimientos matemáticos sobre la función racional y sus elementos, pues el objetivo fue identificar los conocimientos adquiridos durante el proceso de instrucción del profesor.

4.2.1.1 Respecto al caso seleccionado (el profesor William)

Al profesor seleccionado como caso de esta investigación se le designó el seudónimo de "William". A continuación, con el objetivo de contextualizar el porqué de su selección, presentamos una corta descripción.

William es un profesor de matemáticas frente a grupo que cuenta con una experiencia de 13 años impartiendo en los niveles de secundaria y bachillerato. Su formación de pregrado fue como *Ingeniero en Electrónica* y realizó una *Maestría en Innovación Educativa*. Añadido a esto, ha realizado cursos de corta duración tales como: diplomados en didáctica de las matemáticas empleando software de geometría dinámica como geogebra y cabri, además de diferentes cursos de actualización docente promovidos por entidades públicas y privadas, como las Secretarías de Educación Municipales, Gubernamentales y el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Actualmente, este docente imparte los cursos de Cálculo Diferencial y Álgebra en una institución educativa pública en Colombia. En cuanto al grupo seleccionado para la segunda fase de la investigación, estos son estudiantes de grado 11° a los que William les impartió el contenido de función racional. Sus edades están entre los 17 y los 19 años.

4.3 Técnica: instrumentos para recoger y analizar la información.

4.3.1 Instrumentos para recoger información:

El objetivo de las investigaciones con carácter cualitativo es la obtención de información acerca de personas, comunidades o situaciones en diferentes contextos. Para esta investigación, y al tratarse de humanos (profesor y estudiantes) los casos de estudio, los datos de interés son, como lo indica Hernández et al. (2014): conceptos, percepciones, imágenes mentales, emociones, creencias, pensamientos, experiencias y vivencias. Estos se recolectan con la intención de identificarlos, analizarlos y comprenderlos, pues el fin último es alcanzar los objetivos propuestos y responder la pregunta de investigación, generando así conocimiento científico.

En ese orden de ideas, esta información puede obtenerse de distintos instrumentos para la recolección de información, tales como: guías de análisis de documentos, encuestas, guías de observación, entrevistas y cuestionarios (Stake, 2007). Para nuestra investigación, emplearemos observaciones de clase, entrevistas y cuestionarios.

4.3.1.1 Entrevista Semiestructurada.

Investigadores como Rodríguez et al. (1999) consideran la entrevista como "una técnica en la que una persona (entrevistador) solicita información de otra o de un grupo (entrevistador, informantes), para obtener datos sobre un problema determinado" (p. 165). Respecto a esto, Stake (1999) afirma que las entrevistas representan una valiosa fuente de información en las investigaciones cualitativas, pues constituyen un medio potente y directo para descubrir y reflejar las múltiples versiones y realidades del caso a investigar. Asimismo, Bizquera (2004) argumenta que esta técnica tiene una naturaleza propia, pero se complementa con otras técnicas de recolección de datos, tales como los cuestionarios y las observaciones en el ambiente del caso.

Sin embargo, es tarea del investigador emplear esta técnica en un contexto adecuado, pues su objetivo debe ser recabar la mayor cantidad de información posible, y que ésta sea válida. En ese sentido, Ballester (2001) indica que el entrevistador debe establecer una relación amena con el entrevistado, pues debe mantener un ambiente interpersonal cálido para asegurar veracidad y calidad en los datos.

Dado que el objetivo de esta investigación es indagar de forma profunda sobre los conocimientos matemáticos del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones racionales, consideramos necesario emplear entrevistas semiestructuradas. Esto debido a que, en caso de ser necesario, la flexibilidad de este tipo de entrevistas nos permite hacer modificaciones sobre su ejecución, posibilitandonos profundizar sobre elementos que enriquezcan nuestra investigación (Bizquerra, 2004).

En consecuencia, a continuación presentamos los temarios del cuál derivan las preguntas y su justificación. Posteriormente, exponemos el guión de las entrevistas semiestructuradas que desarrollamos para obtener la mayor cantidad de información válida sobre las concepciones de enseñanza-aprendizaje que tiene el profesor sobre las funciones racionales. A continuación, exponemos el temario en la Tabla 3.

4.3.1.1.1 Temas y justificación para el desarrollo del guión en las entrevistas semiestructuradas 1 y 2.

Tabla 3.

Temática de preguntas y su justificación.

Tema	Justificación
T1. *Formación académica, experiencia profesional y expectativas del profesor.*	El objetivo de este tema es obtener información del profesor sobre: su formación académica; su experiencia profesional como profesor de matemáticas e impartiendo el curso de Álgebra en Bachillerato; y las expectativas del profesor al impartir el curso. En ese orden de ideas, esperamos obtener información valiosa sobre aspectos que influyen en el quehacer profesional del profesor de matemáticas.
T2. *Concepción del profesor sobre el papel del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.*	Este tema tiene como finalidad identificar las concepciones del profesor sobre el papel que tiene el estudiante en el proceso de enseñanza aprendizaje. En consecuencia, buscamos identificar qué rol cumple el estudiante en el quehacer profesional del profesor de matemáticas.
T3. *Concepción de aprendizaje del profesor.*	El objetivo de este tema es identificar qué concepción tiene el profesor sobre el aprendizaje de las matemáticas. En ese sentido, nuestro objetivo es comprender qué concepción tiene el profesor sobre cómo se gesta el aprendizaje de los estudiantes en su aula de clases, y qué elementos considera indispensables para que sea significativo.
T4. *Concepción del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas.*	Este tema tiene como finalidad identificar y comprender las concepciones del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas. En consecuencia, pretendemos indagar sobre qué concibe el profesor por

	enseñar matemática, además de identificar elementos que den cuenta sobre la metodología de enseñanza que emplea el profesor.
T5. *Conocimiento Matemático del profesor sobre las Funciones Racionales.*	El objetivo de este tema es determinar conocimientos matemáticos del profesor sobre las funciones racionales. En ese sentido, pretendemos identificar el conocimiento del profesor sobre el tema, las conexiones y las prácticas matemáticas asociadas a las funciones racionales.
T6. *Conocimiento del profesor sobre los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas.*	La finalidad de este tema es comprender el conocimiento que tiene el profesor sobre los estándares de aprendizaje y la ubicación curricular que tiene el contenido de función racional.

Fuente: Elaboración propia.

4.3.1.1.2 Preguntas de la entrevista semiestructurada 1.

La entrevista semiestructurada 1 la consideramos como introductoria, y se realizó previo a la práctica de enseñanza del profesor de matemáticas. El objetivo de ésta fue obtener información general sobre el profesor. En ese sentido, pretendimos identificar información sobre la formación académica, la experiencia profesional y las expectativas que tiene el profesor al impartir funciones racionales. Asimismo, recabamos información acerca de las concepciones del profesor sobre el aprendizaje, el proceso de enseñanza-aprendizaje y el papel del alumno en el aula de clase. A continuación, exponemos en la Tabla 4 el guión de la entrevista 1.

Tabla 4.

Guión de la entrevista semiestructurada 1.

Guión: Entrevista Semiestructurada 1.		
Tema	**Pregunta**	**Objetivo**
T1. *Formación académica, experiencia profesional y expectativas del profesor.*	1. ¿Cuál es su titulación de licenciatura? 2. ¿Cuenta con algún título de postgrado? En caso de ser afirmativa su respuesta, ¿cuál es el título que tiene? 3. ¿Ha realizado cursos asociados con la didáctica de las matemáticas? En caso de ser afirmativa su respuesta, ¿cuáles son? 4. ¿Qué le hizo decidirse por la docencia en matemáticas? 5. ¿Cuántos años tiene de experiencia impartiendo matemáticas en bachillerato?	Estas preguntas tienen el objetivo de recabar información sobre la formación académica, la experiencia profesional, y las expectativas del profesor al impartir funciones racionales.

	6. ¿Qué expectativas tiene sobre el desempeño académico y los aprendizajes que pueden alcanzar sus estudiantes?	
T2. *Concepción del profesor sobre el papel del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.*	7. Según su percepción, ¿cuál es el papel del estudiante en el proceso de enseñanza aprendizaje?	Determinar la concepción del profesor sobre el rol del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
	8. Para usted, ¿qué tan responsable es el estudiante en el proceso de aprendizaje? 9. En cuanto a su planeación y diseño de clase ¿Qué rol juega el estudiante?	
T3. *Concepción de aprendizaje del profesor.*	10. Según su percepción, ¿qué es aprender? y ¿Cómo se gesta el aprendizaje matemático en los estudiantes?	Determinar la concepción del profesor sobre qué es aprender y cómo aprende.
	11. ¿Cómo y cuándo es posible saber que un estudiante aprendió lo impartido en clase?	Determinar las concepción del profesor sobre el aprendizaje de un estudiante y la evaluación de ese aprendizaje.
	12. ¿Qué importancia tiene la interacción entre el profesor y los estudiantes en el aula de clases para el aprendizaje?	Determinar la concepción del profesor sobre la importancia de la relación entre él y los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.
T4. *Concepción del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas.*	13. Para usted, ¿qué atributos tiene un buen profesor de matemáticas? 14. ¿Cuál es su papel en el proceso de enseñanza?	Determinar la concepción del profesor sobre qué papel tiene en el proceso de enseñanza.
	15. ¿Usted cómo organiza su práctica de enseñanza?, ¿Por qué lo hace de esa forma? 16. En su percepción, ¿qué elementos debería tener una clase para ser efectiva?	Determinar la concepción del profesor sobre los elementos que considera necesarios para que su práctica de enseñanza sea efectiva.
	17. ¿En su práctica de enseñanza utiliza libros físicos o digitales?, ¿Por qué?	Determinar la concepción del profesor sobre la importancia de los materiales didácticos (físicos o digitales) en su práctica de enseñanza.
T5. *Conocimiento del profesor sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas.*	18. ¿Qué resultados de aprendizaje se esperan, según el currículo, al impartir el contenido de función racional?	Identificar el conocimiento que tiene el profesor acerca de los resultados de aprendizaje esperados y propuestos por el currículo de matemáticas en bachillerato.
	19. ¿Cómo estan organizados los contenidos o qué secuencia tienen los temas asociados a la función racional?	Identificar el conocimiento que tiene el profesor acerca de la secuenciación de diversos temas matemáticos asociados a la

		función racional en el nivel de bachillerato.

Fuente: elaboración propia.

4.3.1.1.3 Preguntas de la entrevista semiestructurada 2.

La entrevista semiestructurada 2 se consideró como una entrevista de cierre, y se realizó posterior a la práctica de enseñanza del profesor. El objetivo de esta entrevista fue obtener información adicional registrada de las observaciones de clase. Por otra parte, también se puntualiza sobre algunos conocimientos especializados del profesor para la enseñaza de las funciones racionales. En consecuencia, esta entrevista nos permitió triangular información para dar validez y enriquecer el análisis de la información obtenida. A continuación, exponemos en la Tabla 5 el guión de la entrevista 2.

Tabla 5.

Guión de la entrevista semiestructurada 2.

Guión: Entrevista Semiestructurada 2.		
Tema	**Pregunta**	**Objetivo**
T4. *Concepción del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.*	1. Al momento de diseñar su clase, ¿qué elementos toma en cuenta?, ¿Por qué? 2. ¿Para enseñar *funciones racionales* qué criterios tuvo en cuenta?	Identificar las concepciones del profesor sobre qué elementos son importantes para diseñar su clase.
	3. ¿Qué dificultades pudo evidenciar de sus estudiantes para aprender funciones racionales?	Obtener información acerca del conocimiento del profesor sobre *las dificultades y fortalezas asociadas al aprendizaje de las matemáticas*.
T3. *Concepción de aprendizaje del profesor.*	4. ¿Usted cómo definiría una oportunidad de aprendizaje?	Determinar la concepción del profesor sobre el aprendizaje.
T2. Concepción del profesor sobre el papel del estudiante en el proceso de	5. ¿Usted considera que los estudiantes pueden alcanzar aprendizajes significativos si ellos mismos preparan su contenido matemático?, ¿Por qué?	Identificar la concepción del profesor sobre el papel del estudiante en el proceso de aprendizaje.

enseñanza-aprendizaje.	6. Para que un estudiante tenga aprendizajes significativos, ¿qué debe hacer?, ¿Por qué?	
	7. ¿Qué características debe tener un estudiante para ser considerado como "bueno" en matemáticas? 8. Durante las clases de matemáticas, y a su parecer, ¿cómo debe actuar un estudiante para aprender?, ¿Por qué?	Determinar la concepción del profesor sobre el rol del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Fuente: elaboración propia.

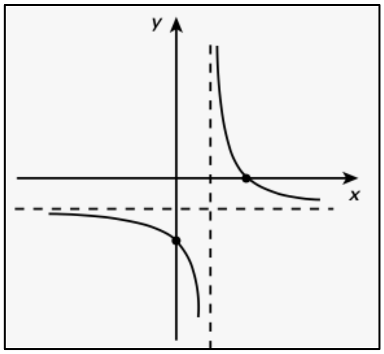
4.3.1.2 Cuestionarios de Conocimiento Matemático.

Investigadores como Meneses y Rodríguez (2011) definen los cuestionarios como "el instrumento estandarizado que utilizamos para la recogida de datos durante el trabajo de campo de algunas investigaciones cuantitativas, fundamentalmente, las que se llevan a cabo con metodologías de encuestas" (p. 9). Asimismo, estos autores afirman que este instrumento le permite al científico social indagar, mediante un cúmulo de preguntas abiertas, sobre aspectos característicos del conocimiento de los individuos.

Respecto a esto, consideramos necesario emplear los cuestionarios pues nos permite recolectar, de forma profunda, información sobre el conocimiento matemático que posee el profesor de matemáticas sobre las funciones racionales. En concordancia, diseñaremos y aplicaremos un cuestionario con el objetivo de identificar y comprender el conocimiento matemático del profesor sobre las funciones racionales.

4.3.1.2.1 Cuestionario de conocimiento matemático: Tarea 1.

Tarea 1.	Intersección con el eje x
	Intersección con el eje y

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Dada la siguiente función racional $r(x) = \frac{2-x}{x-1}$ y su gráfica, determine las intersecciones con los ejes y las asíntotas. Realice, sin saltar ningún paso, todos los procedimientos que emplee en la resolución de este ejercicio.:


Fuente: Jiménez (2011, p. 131).</td>
<td>Asíntotas verticales</td>
</tr>
<tr>
<td>Asíntotas horizontales</td>
</tr>
</table>

El objetivo de esta tarea es identificar el conocimiento matemático que tiene el profesor acerca de los procedimientos para hallar las intersecciones de una función racional con los ejes y sus posibles asíntotas verticales y horizontales.

Solución esperada:

- La función racional $r(x)$ tiene intersección con los ejes x y y en $x = 2$ y $y = -2$, respectivamente.
- La función racional $r(x)$ tiene asíntotas verticales y horizontales en $x = 1$ y $y = -1$, respectivamente.

4.3.1.2.2 Cuestionario de conocimiento matemático: Tarea 2.

Tarea 2.   Sean $g(x) = x^3 - x^2 - 7x - 6$, $h(x) = x - 2$ y $m(x) = x^2 + 3x + 2$ polinomios.   ***1.*** Haciendo uso de estos polinomios, defina una función racional $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones: a. No tenga asíntotas horizontales.   b. No tenga asíntotas oblicuas.   c. Tenga una asíntota vertical en $x = 2$.

2. Construya una estrategia para realizar un bosquejo gráfico de la función e indique los procedimientos empleados.

El objetivo de esta situación es evaluar el conocimiento matemático que tiene el profesor para: primero, emplear la *definición* de función racional; segundo, emplear los *criterios* y *procedimientos* para determinar existencia de asíntotas en una función racional; tercero, representar gráficamente una función racional.

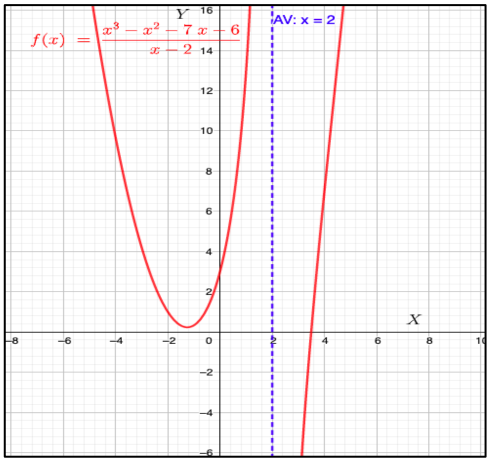
En relación con lo anterior, y dado que los profesores en formación y ejercicio tienen dificultades para identificar los elementos del concepto de función y relacionar sus diversas representaciones (Amaya et al., 2016), con esta tarea pretendemos determinar los conocimientos que moviliza el profesor acerca de la función racional, su comportamiento asintótico y representación gráfica (Arce y Ortega, 2013). Respecto a esto, Cantoral et al. (2016) afirman que en este tipo de tarea se espera que el profesor construya una estrategia para la graficación de la función, tomando en cuenta su comportamiento en diferentes intervalos, raíces y posibles asíntotas.

Solución esperada:

Respuesta a la pregunta 1.

- La función solicitada es $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Es decir, $f(x) = \frac{x^3-x^2-7x-6}{x-2}$.
- Esto se debe a que el único denominador que cumple la condición, para que la función tenga una indefinición en $x = 2$, es $h(x)$.
- Por otra parte, al dividir $g(x)$ entre $h(x)$, obtenemos que $f(x) = \frac{x^3-x^2-7x-6}{x-2} = (x+5) + \frac{12}{x-2}$. Por ende, $y = x + 5$ es una asíntota oblicua en la función $f(x)$.

Respuesta a la pregunta 2.

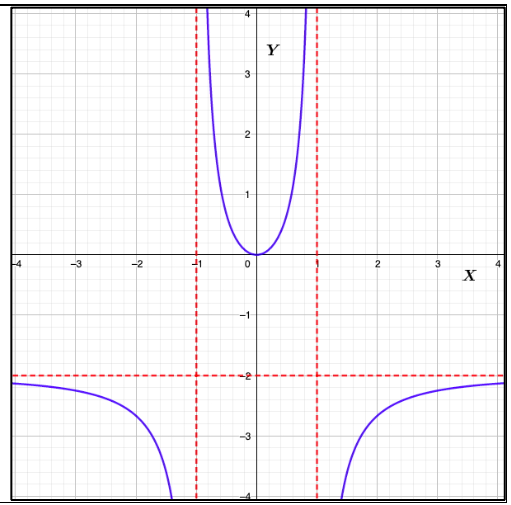


4.3.1.2.3 Cuestionario de conocimiento matemático: Tarea 3.

Tarea 3.

Véase la *figura 1* y resuelva los siguientes ítems:

a. Determine la representación algebraica de la función graficada en la *figura 1*.
b. Determine el dominio de la función e indique qué procedimientos se deben realizar.
c. Enuncie una situación problema en la cual se emplee, al menos, tres representaciones semióticas de esta función.



El propósito de esta tarea es evaluar los conocimientos matemáticos del profesor para transitar y articular los registros de representación gráfico, algebraico y verbal de una función. En ese sentido, Cantoral et al. (2016) indican que en este tipo de tareas se evalúa conocimiento del profesor para proponer la expresión analítica dada la gráfica de una función racional, analizando su comportamiento según diferentes intervalos. Por otra parte, pretendemos que el profesor determine el dominio de la función, pues éste le permite comprender su comportamiento (Noreña, 2013).

Solución esperada:

- La función solicitada está dada por la expresión: $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2-1}$.
- El dominio de la función $f(x)$ es: $D_{f(x)}: \mathbb{R} - \{-1,1\}$.

4.3.1.2.4 Cuestionario de conocimiento matemático: Tarea 4.

> ***Tarea 4.***
> Lea el siguiente enunciado y determine los posibles razonamientos de los estudiantes en los casos a y b. Posteriormente, describa qué explicación/retroalimentación podría emplear con estos estudiantes.
> **Enunciado:** Durante el desarrollo de la clase, el profesor William les pide a sus estudiantes que determinen las asíntotas y el dominio de la siguiente función:
> $$f(x) = \frac{5x^2 - 13x - 6}{x^2 - 2x - 3}$$
> Al resolver este ejercicio, los estudiantes dan las siguientes respuestas:
> a. El estudiante Víctor afirma que el dominio de la función $f(x)$ es: $D_{f(x)}: \mathbb{R} - \left\{\frac{-2}{5}, 3\right\}$ y que la función tiene asíntotas verticales en $x_1 = \frac{-2}{5}$ y en $x_2 = -3$.
> b. Por su parte, el estudiante Juan afirma que el dominio de $f(x)$ es $D_{f(x)}: \mathbb{R} - \{-1, 3\}$. Y, por esta razón, $f(x)$ tiene asíntotas verticales en $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$.

El objetivo de esta tarea es determinar el conocimiento matemático del profesor. No obstante, esta evaluación se enfoca específicamente en dos subdominios de conocimiento especializado que son: el conocimiento de los temas (Carrillo et al., 2018), y el conocimiento de la práctica matemática (Zakaryan y Sosa, 2021). Sin embargo, no descartamos que el profesor pueda manifestar conocimientos de la estructura matemática.

En ese orden de ideas, pretendemos evaluar el conocimiento del profesor para resolver una situación problema, validar y refutar resultados y/o producciones matemáticas que, en esta situación hipotética, son de sus estudiantes. En consecuencia, analizamos las respuestas de los estudiantes de la siguiente forma:

Respuesta del estudiante Victor:

a. El estudiante Víctor afirma que el dominio de la función $f(x)$ es: $D_{f(x)}: \mathbb{R} - \left\{\frac{-2}{5}, 3\right\}$ y que la función tiene asíntotas verticales en $x_1 = \frac{-2}{5}$ y en $x_2 = -3$.

En esta respuesta, el estudiante Víctor manifiesta un error común en la resolución de problemas que emplean funciones racionales. Este error se refiere a "la idea de que las raíces de una función racional son iguales a las raíces del polinomio del numerador" (Scorzo et al., 2014, p. 9). En concordancia, pretendemos que el profesor identifique este error y, posteriormente, emplee prácticas matemáticas para refutar o validar la producción matemática del estudiante.

En relación con lo anterior, y tomando como referencia los indicadores de conocimiento de práctica la práctica matemática desarrollados por Zakaryan y Sosa (2021), proponemos, a modo de ejemplo, el siguiente indicador como una posible práctica que puede emplear el profesor:

- **KPM1**. *El conocimiento del método de prueba por contraejemplo para refutar la veracidad de un argumento o producción matemática.*

Este indicador le puede permitir al profesor emplear, basado en la respuesta del estudiante, un contraejemplo para demostrar que su respuesta es falsa. En ese orden de ideas, el profesor puede evaluar $x_1 = \frac{-2}{5}$ (resultado encontrado por Víctor) en la función $f(x) = \frac{5x^2-13x-6}{x^2-2x-3}$, y corroborar que este valor pertenece al dominio de la función y, por tanto, no representa una asíntota vertical o un valor que indefina la función.

Respuesta del estudiante Juan:

b. Por su parte, el estudiante Juan afirma que el dominio de $f(x)$ es $D_{f(x)}: \mathbb{R} - \{-1, 3\}$. Y, por esta razón, $f(x)$ tiene asíntotas verticales en $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$.

En esta respuesta, el estudiante Juan manifiesta un error señalado por Sánchez (1998) que consiste en asociar los valores que están restringidos en el dominio e indefinen la función racional, con posibles asíntotas verticales. En concordancia, nuestro estudiante hipotético logra determinar el dominio de la función. No obstante, y dado que no emplea un registro gráfico, encuentra en $x_2 = 3$ una asíntota inexistente.

Respecto a esto, inferimos que una posible práctica matemática asociada a una temática específica que puede emplear el profesor para resolver esta situación, está dada por el siguiente indicador:

- **KPM2.** *Conocimiento de las condiciones necesarias y suficientes para validar o refutar la existencia de una asíntota vertical.*

Este indicador le puede permitir al profesor validar o refutar la producción matemática de Juan, empleando su conocimiento sobre las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de una asíntota vertical en una función racional. En ese orden de ideas, realizamos análisis de esta respuesta bajo los siguientes criterios:

1. ***Condición necesaria***. Para que un valor $x = a$ sea una posible asíntota de la función racional $f(x)$, a no debe pertenecer al dominio de $f(x)$ (Shilov, 1975). Es decir: $x = a \notin Dom\, f(x)$. No obstante, esta no es una condición suficiente para determinar si $x = a$ es una asíntota vertical de la función, sólo es una condición suficiente para afirmar que $x = a$ no pertenece al dominio.
2. ***Condición suficiente***. Para que un valor $x = a$, con $a \notin Dom\, f(x)$, sea una asíntota vertical de la función racional $f(x)$, es necesario que los polinomios del numerador y denominador de $f(x)$ *no tengan factores comunes* (Swokoski y Cole, 2018). Por ende, las asíntotas verticales de $f(x)$ están dadas por los ceros

del denominador, siempre que no exista un factor común entre el numerador y denominador de los polinomios de la función racional. En otras palabras, en caso de que el numerador y denominador de $f(x)$ tengan un factor común, $x = a$ podría representar un “salto” en la función.

En relación con las condiciones anteriores, el profesor puede emplear estos criterios para determinar que la respuesta dada por su estudiante es parcialmente verdadera. Pues, en el ejercicio propuesto, $f(x) = \frac{5x^2-13x-6}{x^2-2x-3}$, es posible factorizar los polinomios del numerador y denominador, para reescribirlo como $f(x) = \frac{(5x+2)(x-3)}{(x-3)(x+1)}$, que simplificado sería: $f(x) = \frac{(5x+2)}{(x+1)}$.

Por ende, para este caso en $x = -1$ la función tendría una asíntota vertical, pues el numerador y denominador de $f(x)$ no tienen factores comunes. Sin embargo, y aunque en $x = 3$ la función no está definida, $f(x)$ no tendría una asíntota en este valor, únicamente tendría un “salto” o discontinuidad evitable (si se analizará el problema empleando el concepto de límite).

4.3.1.3 Cuestionario de conocimientos matemáticos para los estudiantes.

Como se ha mencionado en párrafos anteriores, el conocimiento y las concepciones del profesor no solo impactan en sus prácticas de enseñanza (Martin y Farias, 2016), también influyen en el logro matemático de sus estudiantes (Campbell et al., 2014) y las concepciones que éstos se configuran acerca de las matemáticas y sus objetos (Benítez, 2013). En ese sentido, consideramos necesario caracterizar el impacto que tiene la relación entre estos elementos, sobre el aprendizaje matemático alcanzado por los estudiantes.

La premisa de que el conocimiento del profesor influye de forma directa en su práctica de enseñanza, y en el aprendizaje de los estudiantes, es defendida por Smith y Esch (2012) y corroborada por Campbell et al. (2014), quienes aplicaron una prueba matemática estandarizada, tanto a estudiantes como a profesores de nivel primaria, y encontraron una significativa relación entre los conocimientos manifestados por los profesores y el logro matemático de sus estudiantes. Similarmente, el estudio realizado por Campbell y Malkus (2011) confirmó que los conocimientos de profesores de matemática elemental impactan, de forma significativa, y positiva, en los logros alcanzados por los estudiantes.

En concordancia, estas investigaciones nos sirven como referente para diseñar un cuestionario de conocimientos matemáticos que nos permitirá establecer la relación e impacto entre el conocimiento que posee el profesor sobre el concepto de función racional y los logros matemáticos alcanzados por sus estudiantes. Para tal fin, y basados en libros de, álgebra (Shilov, 1975), precálculo (Barnett et al., 2000; Jiménez, 2011; Larson, 2018; Sowkosky y Cole, 2018), cálculo (Spivak, 1988), y el currículo de matemáticas (SEP, 2018; MEM, 2006), diseñamos la prueba para los estudiantes según los siguientes elementos:

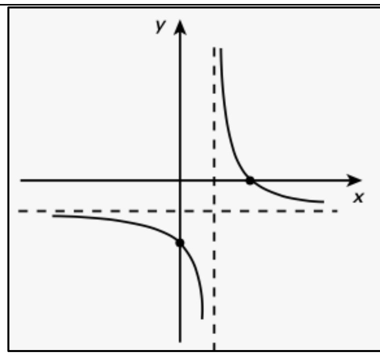
Tabla 6.

Habilidades, competencias y resultados de aprendizaje esperados.	
H1. *El estudiante sabe caracterizar funciones racionales considerando sus características* (SEP, 2018).	
Tareas	**Objetivos.**
Tarea 1. En sus propias palabras, responda las siguientes preguntas: a. ¿Qué es una función racional? b. ¿Qué es una asíntota? c. ¿Qué características tiene una función racional y la hacen distintiva de otras funciones?	El objetivo de esta tarea es identificar las concepciones que se forman los estudiantes acerca del concepto de función, función racional, sus asíntotas y características. En ese sentido, esperamos caracterizar, en las respuestas de los estudiantes, las

<table>
<tr><td></td><td>concepciones que éstos manifiestan.</td></tr>
<tr><td>Tarea 2. Sean $g(x) = x - 1$, $h(x) = x^2 - 1$, y $m(x) = x$ polinomios.
1. Haciendo uso de estos polinomios, defina una función racional $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:
a. Tenga asíntota horizontal en $y = 1$.
b. No tenga asíntotas oblicuas.

Solución esperada:
• Las respuestas que cumple las condiciones anteriormente descritas es:
$$f(x) = \frac{x-1}{x}; l(x) = \frac{x}{x-1}$$</td><td>La finalidad de esta tarea es determinar el conocimiento matemático que posee el estudiante para definir una función racional considerando características específicas de éstas, tales como su dominio y asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
Por ende, esperamos determinar qué habilidades manifiestan los estudiantes para caracterizar, a partir de ciertas condiciones, una función racional.</td></tr>
<tr><td colspan="2">H2. El estudiante sabe como hallar el dominio de una función racional (Larson, 2018).</td></tr>
<tr><td>Tarea 3. Empleando la respuesta del punto anterior, halle el dominio y rango de dicha función racional.

Solución esperada:
El dominio de la función $f(x)$ es: $Domf_{(x)} = \mathbb{R} - \{0\}$.</td><td>El objetivo de esta tarea es identificar el conocimiento matemático que emplean los estudiantes para determinar el dominio de una función racional. En ese sentido, buscamos caracterizar los conocimientos manifestados para determinar qué puntos</td></tr>
<tr><td colspan="2">H3. El estudiante sabe hallar asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función racional (Barnett et al., 2000).</td></tr>
<tr><td>Tarea 4.
1. Dada la siguiente función racional $r(x) = \frac{2-x}{x-1}$ y su gráfica, determine las intersecciones con los ejes y las asíntotas.
2. Indique cual es el dominio de la función racional $r(x)$.
3. Luego, señale en la gráfica las asíntotas e intersecciones que halló de la función $r(x)$.</td><td>Con esta tarea buscamos identificar el conocimiento matemático que tienen los estudiantes para determinar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función racional.
Asimismo, con esta tarea pretendemos que el estudiante pueda identificar, en un registro gráfico, las asíntotas que encontró anteriormente de forma algebraica.</td></tr>
</table>



Fuente: Jiménez (2011, p. 131).

Solución esperada:

- La función racional $r(x)$ tiene intersección con los ejes x y y en $x = 2$ y $y = -2$, respectivamente.
- El dominio de la función racional $r(x)$ es: $Domr_{(x)} = \mathbb{R} - \{1\}$.
- La función racional $r(x)$ tiene asíntotas verticales y horizontales en $x = -1$ y $y = -1$, respectivamente.

H4. *El estudiante sabe cómo graficar funciones racionales en el plano cartesiano* (Jiménez, 2011).

Tarea 5. Empleando la función $g(x) = \frac{1}{x+2}$, complete y conteste las siguientes preguntas:

a. Complete la siguiente tabla:

x	-4	-3	-2	-1	0
$g(x)$					

b. ¿Qué sucede evaluamos la función en $x = -2$? Trata de explicar porqué sucede.

c. Grafique en el plano cartesiano la función $g(x)$ y sus asíntotas.

Respuestas esperadas:

a. Al completar la información de la tabla, se esperan los siguientes resultados:

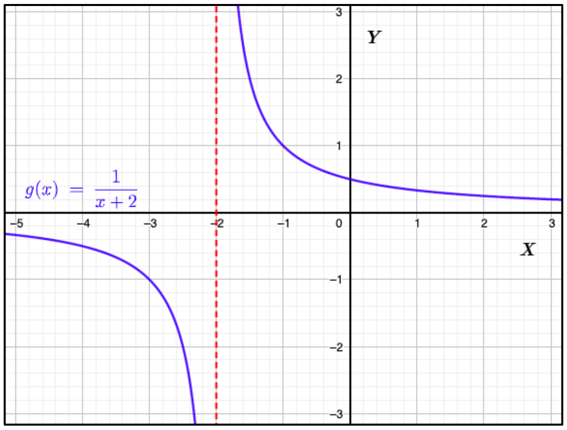
x	-4	-3	-2	-1	0
$g(x)$	$\frac{-1}{2}$	-1	indeterminado	1	$\frac{1}{2}$

El objetivo de esta tarea es identificar el conocimiento matemático que manifiestan el estudiante para bosquejar, de forma gráfica, una función racional.

<table>
<tr>
<td>

b. Se indetermina la función, dado que en $x = -2$, no pertenece al dominio de la función.

c. Gráfica de la función $g(x)$.



</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

H5. *El estudiante resuelve situaciones problema modeladas por funciones racionales* (MEM, 2006).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Tarea 6. *Situación problema*

La empresa *ENERGÍAS DEL SUROCCIDENTE*, es generadora de energía eléctrica y eólica, y opera en los municipios de Puerto Tejada y Villarica, Cauca. El gerente afirma que el costo C (en pesos colombianos) de eliminar $p\%$ de contaminantes está dada por:

$$C = \frac{200000p}{100 - p}, con\ 0 \leq p \leq 100.$$

Ahora bien, asuma que usted hace parte del comité ambiental de su municipio, y gestiona una ley para que la empresa deba eliminar el 90% de los contaminantes que produce.

La ley actual requiere que la empresa elimine solo el 80% de sus contaminantes.

- ¿Cuánto deberá adicionar la empresa a lo que paga actualmente para poder acatar la ley que usted gestionará?

Respuesta esperada:

</td>
<td>

La finalidad de esta tarea es identificar el conocimiento matemático que tiene el estudiante para resolver una situación problema que esté modelada mediante una función racional.

</td>
</tr>
</table>

• La ley actual requiere que se elimine el 80% de los contaminantes, por tal razón el costo será de: $$C = \frac{200000(80)}{100-80} = \$800.000$$ • La nueva ley propone que la empresa elimine el 90% de los contaminantes, por tal razón el costo será de: $$C = \frac{200000(90)}{100-10} = \$1.800.000$$ • Por tanto, para acatar la nueva ley la empresa tendrá que aportar un adicional de: $$C_{90\%} - C_{80\%} =$$ $$= \$1.800.000 - \$800.000$$ $$= \$1.000.000$$ La empresa deberá adicionar \$1.000.000 de pesos colombianos.	

Fuente: Elaboración propia.

4.3.1.4 Observación y Videograbación de clase.

La observación le permite al investigador comprender, a profundidad, el caso de estudio y sus atributos característicos (Stake, 2007). En ese sentido, consideramos pertinente realizar observaciones de clase, dado que nuestro objetivo de estudio es obtener información que nos permita identificar y comprender los conocimientos especializados que manifiesta el profesor durante su práctica de enseñanza y las concepciones que matizan este proceso.

Asimismo, consideramos pertinente videograbar las clases que imparte el profesor, pues nos permitirá hacer un análisis más detallado de la práctica del profesor, evitando dejar por fuera de nuestro estudio posibles elementos que puedan enriquecer nuestra comprensión del conocimiento y las concepciones del profesor. En consecuencia, empleamos la Tabla 7 para clasificar las clases del profesor y realizar las transcripciones necesarias:

Tabla 7.

Matriz para la clasificación de información de clase.

Fecha de observación	**Tema de clase**	**Número de la clase**	**Tiempo de duración**	**Indicador de conocimiento observado**

Fuente: elaboración propia.

4.3.2 Instrumento para el análisis de la información:

4.3.2.1 Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Para analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, emplearemos los subdominios, y categorías del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018). Asimismo, estructuramos una lista de indicadores que nos servirán de referencia para identificar los conocimientos especializados que pueda manifestar el profesor al impartir funciones racionales.

En consecuencia, a continuación exponemos la Tabla 7 que contiene los dominios y categorías de conocimiento correspondientes a nuestro modelo teórico, que estarán consideradas en el análisis del conocimiento especializado del profesor para impartir funciones racionales.

Tabla 8.

Dominios, subdominios y categorías del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Dominios y Subdominios		**Categorías de Conocimiento**
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Definiciones, propiedades y sus fundamentos Procedimientos Registros de representación Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	Conexiones de simplifcación Conexiones de complejización Conexiones transversales Conexiones auxiliares
	Conocimiento de la práctia matemática (KPM)	La práctica de demostrar La práctica de definir

		La práctica de resolver problemas El papel del lenguaje matemático
Conoocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas Formas de interacción con un contenido matemático Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Expectativas de aprendizaje Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado Secuenciación de temas
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de las matemáticas Recursos de enseñanza Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

Fuente: Delgado-Robello y Espinoza-Vásques (2021).

4.3.2.1.1 Indicadores de referencia para identificar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre la función racional.

En este apartado se presentan, a modo de referencia, algunos indicadores de conocimiento especializado del profesor de matemáticas para impartir el contenido matemático de función racional. Estos indicadores servirán, a modo de guía, para identificar el conocimiento que puede manifestar el profesor durante su práctica de enseñanza. Sin embargo, no descartamos que durante la práctica del profesor puedan manifestarse otros. En ese orden de ideas, presentamos a continuación la Tabla 9:

Tabla 9.

Indicadores de conocimiento especializado para la enseñanza de las funciones racionales.

Conocimiento Matemático (MK)		
Subdominio	**Categoría**	**Indicador**
KoT	**Definiciones**	**KoT1. Conocer** que una *función racional* se puede definir como el cociente entre dos polinomios, con denominador distinto a cero (e.g., Shilov, 1975; Barnett, et al., 2000).
		KoT2. Saber que la definición de *función racional* emplea el término *polinomio* y, por tanto, resulta conveniente saber su significado.

	Fenomenología y aplicaciones	**KoT3. Conocer** que la función racional puede emplearse en la modelación de problemas físicos o ambientales de tipo costo beneficio (e.g., Swokowski y Cole, 2018).
	Registros de representación	**Kot4. Conocer** que una función racional se puede representar mediante diversos registros de representación, tales como: tabular, pictórico, gráfico y analítico (algebraico) (e.g., Noreña, 2013).
	Procedimientos	**KoT5. Saber** que para determinar las asíntotas verticales de una *función racional* es necesario emplear un *procedimiento* o *algoritmo* de factorización en el polinomio del denominador y encontrar sus ceros (e.g., Larson, 2018). **KoT6. Saber** que para encontrar las asíntotas horizontales de una función racional es necesario emplear *el teorema sobre las asíntotas horizontales* (e.g., Swokowski y Cole, 2018) y sus tres criterios. **KoT7. Saber** que para determinar la existencia de las asíntotas oblicuas de una *función racional* es necesario que el grado de su numerador exceda exactamente en una unidad al del denominador (Ibíd., p. 231).
	Propiedades y sus fundamentos	**KoT8. Conocer** que una propiedad de *la función racional* consiste en que si sus polinomios (numerador y denominador) no tienen factores comunes entre sí, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal de dicha función (e.g., Larson, 2018).
KSM	**Conexión de complejización**	**KSM1. Conocer** que una conexión de complejización de *la función racional* se establece con el concepto de *límite* a través de la aproximación a un valor que indefine la función.
	Conexión de simplificación	**KSM2. Saber** que *la función racional* puede pensarse como la *relación* especial (*cociente y uno a uno*) entre dos conjuntos A y B.
	Conexiones transversales	**KSM3. Conocer** que un tipo de indeterminación de un límite e indefinición de una función se da a través del cociente entre dos *polinomios* de una *función racional*.
	Conexiones auxiliares	**KSM4. Saber** una *las funciones racionales* son necesarias o útiles para resolver *integrales impropias*.
KPM	**Prácticas ligadas a la matemática en general**	**KPM1. Conocer** el papel de la generalización en matemáticas (Zakaryan y Sosa, 2021).
		KPM2. Conocer el papel de la prueba por contraejemplo para refutar la veracidad de un argumento o producción matemática.
		KPM3. Saber las condiciones *necesarias* y *suficientes* para determinar la existencia de una asíntota vertical.
		KPM4. Conocer alguna estrategia para representar gráficamente una *función racional* y sus elementos (e.g., Larson, 2018; Swokowski y Cole, 2018).
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)		
KFLM	**Teorías de aprendizaje de las matemáticas**	**KFLM1. Saber** que una teoría que puede emplear para el aprendizaje de las funciones racionales en sus estudiantes es la teoría APOS (e.g., Dubinsky y McDonald, 2001).
	Fortalezas y dificultades en el	**KFLM2. Saber** que una posible dificultad de los estudiantes consiste en determinar el dominio de una función racional (Scorzo et al., 2014).

	aprendizaje de las matemáticas	**KFLM3. Conocer** que los estudiantes pueden tener dificultades para determinar la existencia de asíntotas verticales en una función racional (Sánchez, 1998).
		KFLM4. Conocer los estudiantes pueden tener dificultades para determinar las asíntotas horizontales de una función racional (e.g., Arce y Ortega, 2013).
		KFLM5. Saber que los estudiantes pueden tener dificultades al simplificar los polinomios de una función racional (Noreña, 2013).
		KFLM6. Conocer que los estudiantes, al emplear únicamente el registro algebraico, pueden relacionar erroneamente el dominio de la función con sus asíntotas verticales (Sánchez, 1998).
	Formas de interacción con un contenido matemático	**KFLM6. Saber** que los estudiantes necesitan hallar el dominio de la función racional para predecir su comportamiento gráfico.
		KFLM7. Saber que los estudiantes necesitan comprender qué es una función racional e identificar cuáles son sus elementos (Spivak, 1988) para poder realizar su gráfica.
	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	**KFLM8. Conocer** que los estudiantes se configuran una concepción de asíntota como una línea horizontal que no puede ser atravesada por la función (García, 2014).
KMLS	**Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado**	**KMLS1. Conocer** que, al finalizar el curso, los estudiantes deben ser capaces de analizar y determinar el comportamiento de las funciones racionales en un sistema coordenado (e.g., MEM, 2006).
		KMLS2. Conocer que, al finalizar el curso, los estudiantes deben haber adquirido habilidades para analizar las relaciones y las propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones racionales (Ibíd., p. 89).
	Expectativas de aprendizaje	**KMLS3. Saber** que uno de los aprendizajes esperados al impartir *función racional* es que los estudiantes sean capaces de construir la gráfica y modelar situaciones problema que representen fenómenos sociales o naturales de su contexto (e.g., SEP, 2018). **KMLS4. Saber** que uno de los aprendizajes esperados es que los estudiantes cuenten con habilidades para emplear modelos de funciones racionales, favoreciendo el pensamiento crítico para realizar predicciones e interpretaciones de situaciones en su entorno (SEP, 2018).
	Secuenciación de temas	**KMLS5. Conocer** que el contenido de función racional se ubica, desde el grado noveno hasta undécimo, en el bloque de Pensamiento Variacional y Geométrico de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).
KMT	**Teorías de enseñanza de las matemáticas**	**KMT1. Conocer** que una teoría, para la enseñanza del contenido de función racional, puede ser la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1986). **KMT2. Saber** que, para impartir el contenido de función racional, puede articular TSD (Brousseau, 1986) con la ingeniería didáctica (Artigue, 1995).

		KMT3. Conocer que la práctica de enseñanza, para el contenido de función racional, puede estructurarse mediante la teoría *FLIPPED CLASSROOM* o aula invertida (Fernández, 2019).
	Recursos de enseñanza	**KMT4. Conocer** que las calculadoras gráficas pueden ser un potente recurso para la enseñanza de la función racional (Sánchez, 1998). **KMT5. Saber** que Geogebra es un recurso didáctico potente para la enseñanza de las funciones racionales.
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	**KMT6. Saber** la potencialidad del ejemplo como medio para destacar o recalcar los aspectos singulares del contenido matemático que pretende enseñarse (Sosa et al., 2016). **KMT 7. Conocer** que una estrategia para la enseñanza de la función racional es a través de la modelación de problemas en contextos físicos o naturales.

Fuente: elaboración propia.

4.3.2.2 Las Concepciones del profesor sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Para analizar las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, emplearemos el instrumento de *Concepciones sobre la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas* (CEAM), diseñado por Carrillo (1998) y adaptado por Climent (2005). En ese orden de ideas, presentamos un resumen sobre las tendencias didácticas que se consideran en este instrumento, además del concentrado donde se contemplan los aspectos a analizar adaptados por Climent (2005).

A. Metodología.

- ***Praxis (1)***

1) **TR1:** La actividad del aula se caracteriza por la repetición iterada de ejercicios tipo.

2) **TE1:** La actividad en el aula se caracteriza por la repetición de ejercicios que pretenden simular los procesos lógicos y, coherentemente, el estudio de los errores por parte de los alumnos.

3) **E1:** Los ejercicios son sustituidos por una actividad experimental no reflexiva. Hay cierta tendencia a poner en práctica métodos, recursos, etc., que parecen funcionar en otras aulas.

4) **I1:** Los alumnos se enfrentan habitualmente a situaciones para las que no poseen procesos de resolución establecidos.

- ***Praxis (2)***

1) **TR2:** El profesor expone los contenidos en su fase final, apoyado en estrategias expositivas.

2) **TE2:** El profesor no expone los contenidos en su fase final, simula su proceso de construcción, apoyado en estrategias expositivas.

3) **E2:** El profesor propone actividades de manipulación de modelos, a través de los cuales se producirá, eventualmente, un conocimiento no organizado.

4) **I2:** El profesor tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos conocimientos determinados, a través de su investigación.

- ***Objetivos (3)***

1) **TR3:** Los contenidos se identifican con los conceptos, enunciados como objetivos de carácter terminal.

2) **TE3:** Al carácter terminal de los objetivos se añade su funcionalidad.

3) **E3:** Los objetivos solo definen un marco genérico de actuación (carácter orientativo) y están sujetos a eventuales modificaciones en cuanto al grado de consecución (flexibles).
4) **I3:** Los objetivos marcan claramente las intenciones educativas, pero están sujetos a reformulaciones debidamente fundamentadas.

- ***Programación (4)***

1) **TR4:** El profesor sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades (temas).
2) **TE4:** Para el profesor, la programación es un documento cerrado, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina.
3) **E4:** La programación es un documento vivo, que por basarse en los intereses que, en cada momento, manifiestan los alumnos y en la negociación con ellos, no dispone de una organización inicial.
4) **I4:** El profesor dispone de una propuesta organizativa de los elementos del programa, pero no está vinculado a un recorrido concreto. Existe una trama que vincula y organiza el conocimiento por la que el docente se mueve dependiendo de los intereses, nivel de los alumnos.

B. Sentido de la asignatura.

- ***Orientación (5)***

1) **TR5:** La asignatura está orientada, exclusivamente hacia la adquisición de conceptos y reglas.
2) **TE5:** Interesan tanto los conceptos y reglas como los procesos lógicos que los sustentan por su eventual reproductibilidad.

3) **E5:** No interesan tanto los conceptos, sino los procedimientos y el fomento de las actitudes positivas hacia el trabajo escolar.
4) **I5:** Interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar en general, siendo éstos los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas.

- ***Contenido (6)***

1) **TR6:** El contenido matemático (Funciones Racionales) a movilizar en el aula no se diferencia en estructura, aunque sí en nivel de abstracción, del conocimiento matemático formal.
2) **TE6:** El álgebra escolar trata de dar una explicación, con los cánones de la matemática formal, a las situaciones provenientes de la problemática real.
3) **E6:** El álgebra escolar inmersa en la problemática real es el único referente de los conocimientos a movilizar en el aula.
4) **I6:** El álgebra escolar tiene su punto de partida en la etnomatemática de los alumnos y recoge las necesidades socio-políticas, culturales. “Hacer matemáticas” con un carácter más formal proviene del análisis de lo concreto.

- ***Finalidad (7)***

1) **TR7:** La asignatura tiene una finalidad exclusivamente informativa, es decir, poner en conocimiento de los alumnos un cierto “panorama matemático” que se espera que aprendan y dotarles de las destrezas básicas para la vida profesional.

2) **TE7:** La asignatura no sólo ha de tener una finalidad informativa, sino también un carácter práctico que permita su aplicación en la propia matemática, para el estudio de otras disciplinas o en la vida cotidiana.
3) **E7:** La asignatura posee un carácter formativo, con objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del alumno (con respecto al aprendizaje y la vida), así como para la adquisición de los valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos.
4) **I7:** La finalidad última de la asignatura es dotar al alumno de unos instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo.

C. Concepción del aprendizaje.

- ***Aprendizaje (8)***

1) **TR8:** Se presupone que el aprendizaje se realiza, utilizando la memoria como principal recurso, por superposición de unidades de información.
2) **TE8:** El aprendizaje se sigue concibiendo como memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la disciplina.
3) **E8:** Se aprende cuando el objeto de aprendizaje, que surge aleatoriamente del contexto, posee un significado para el alumno.
4) **I8:** Los objetos de aprendizaje no solo tienen significado, sino también la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos, adquiriendo así un carácter móvil a través de una malla conceptual.

- ***Tipo y forma (procesos) (9)***

1) **TR9:** El único aprendizaje efectivo y correcto es el que proviene de un proceso deductivo.
2) **TE9:** Aunque el aprendizaje pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo, el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo.
3) **E9:** El aprendizaje se produce a partir de la participación activa del estudiante en procesos inductivos.
4) **I9:** El aprendizaje comienza, normalmente, por la observación de regularidades que permiten aflorar una conjetura; pero a esta ha de seguir una comprobación razonable y, en la medida de lo posible, una generalización adecuada.

- ***Tipo y forma (procesos) (10)***

1) **TR10:** El alumno se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el docente se los presente.
2) **TE10:** Para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que viene del exterior.
3) **E10:** El aprendizaje se produce de manera espontánea, cuando el alumno está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento.
4) **I10:** El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesor.

- ***Importancia de la argumentación (10)***

1) **TR10:** El profesor desea que el alumno explicite lo aprendido con la expresión usada por él. No le interesa la idea sino la mecánica. De ahí que no conceda especial importancia a que el alumno argumente sus conclusiones.

2) **TE10:** Es importante que el alumno explicite la comprensión de los contenidos (se trata de una verbalización para comprobar que se está produciendo el aprendizaje deseado). La expresión de lo aprendido, con las palabras del alumno, muestra el resultado del aprendizaje.
3) **E10:** Es importante que el alumno comunique (más que argumente de un modo más o menos justificado) sus conclusiones.
4) **I10:** La expresión de lo que aprende por parte del alumno es una parte importante del propio proceso de aprendizaje. Es importante, además, que el alumno argumente sus conclusiones.

- ***Interacción maestro-estudiante-materia (10)***

1) **TR/TE10:** El alumno interactúa con la asignatura y el profesor, siendo el último el intermediario entre ésta y el alumno. La interacción que se produce entre el profesor y el alumno no es equilibrada, siendo más fuerte el flujo en la dirección profesor alumno que a la inversa.
2) **E10:** El alumno interactúa con la asignatura, el profesor y sus compañeros, pero el énfasis se coloca en la interacción con los compañeros y el profesor.
3) **I10:** Los principales elementos del entorno de aprendizaje interactúan entre sí (el alumno interactúa con la asignatura, el profesor y sus compañeros) de manera equilibrada.

- **Tipo de agrupamiento (11)**

1) **TR11/TE11:** La única forma de agrupamiento que permite un verdadero aprendizaje es el trabajo individual.
2) **E11:** La forma ideal de agrupamiento que propicia el aprendizaje es el trabajo en grupo, con sus correspondientes debates.

3) **I11:** La forma de agrupamiento aconsejable para la producción de aprendizaje depende de la actividad a desarrollar.

- **Dinamizador (12)**

1) **TR12:** La estructura de la propia asignatura, plasmada en la programación, es el dinamizador ideal del aprendizaje.
2) **TE12:** El dinamizador ideal del aprendizaje es la lógica de construcción de la propia matemática.
3) **E12:** El motor del aprendizaje son los intereses de los alumnos.
4) **I12:** El dinamizador ideal del aprendizaje es el equilibrio entre los intereses y estructura mental de los alumnos y los del álgebra escolar.

- ***Aptitud (13)***

1) **TR13/TE13:** La capacitación del alumno es inalterable y justifica en gran medida los resultados del aprendizaje.
2) **E13/I13:** La capacitación del alumno puede ser modificada.

- **Actitud (14)**

1) **TR14:** La actitud del alumno hacia el aprendizaje es raramente transformable.
2) **TE14:** En la actitud del alumno hacia el aprendizaje hay aspectos que pueden sufrir cambios.
3) **E14/I14:** La actitud del alumno puede ser modificada.

D. Papel del alumno

- **Participación en diseño didáctico (15)**

1) **TR15/TE15:** El alumno no participa ni activa ni pasivamente en el diseño de las actividades, programación, etc.
2) **E15:** El alumno participa indirectamente en el diseño didáctico (a través de sus intervenciones en el quehacer del aula).
3) **I15:** El alumno participa directa o indirectamente en el diseño didáctico.

- **Clave de transferencia E-A (16)**

1) **TR16:** En los casos en que exista una "buena enseñanza", la responsabilidad de los resultados del aprendizaje (que dependen del grado de sumisión) es exclusiva del alumno.
2) **TE16:** Cuando los procesos de enseñanza se realizan en un contexto adecuado, la responsabilidad del aprendizaje recae en el alumno.
3) **E16:** La motivación proveniente de la propia acción es la clave de los buenos resultados del aprendizaje.
4) **I16:** Para que se de aprendizaje es necesario que el alumno otorgue significado a lo que aprende, siendo consciente de su propio proceso de aprendizaje.

- **¿Qué hace? (17)**

1) **TR17:** Hay una sobrevaloración implícita de los apuntes. El alumno se esfuerza, por ello, en recoger en sus papeles todo aquello que proviene del profesor.
2) **TE17:** El alumno, al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor; imitando así su estilo cognitivo.

3) **E17:** El alumno pasa de actividad en actividad, participando intensamente en cada una de ellas.
4) **I17:** La actividad del alumno está organizada (interna o externamente) hacia la búsqueda de respuestas a determinados interrogantes.

- **¿Qué hace? (18)**

1) **TR18/TE18:** Al ser el profesor el que proporciona la clave para la repetición/reproducción posterior, es fundamental la atención a éste (fuente de información fundamental).
2) **E18:** La actividad del alumno no incluye un tiempo para la reflexión sobre su propia acción.
3) **I18:** El estudiante toma conciencia de qué hace y para qué lo hace.

- **¿Qué hace? (19)**

1) **TR19:** El alumno no se plantea procesar la información que proviene del docente, ni en forma ni en fondo.
2) **TE19:** La confianza del alumno en lo expuesto por el profesor, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido.
3) **E19:** El ambiente dinámico que se propicia en la clase, permite que el alumno comunique sus experiencias y sentimientos con el profesor y los demás compañeros.
4) **I19:** El alumno mantiene una actitud crítica ante las informaciones que se movilizan en el aula.

E. Papel del profesor

- **¿Qué hace?, ¿Cómo hace?, Justificación (20-23)**

  1) **TR20-23:** El profesor transmite verbalmente los contenidos de aprendizaje, mediante el dictado de sus apuntes o alusión a un libro de texto, realizando, por su caracterización como especialista en contenidos, una reproducción literal de los citados documentos.
  2) **TE20-23:** El profesor actúa como un técnico del contenido y del diseño didáctico, organiza los contenidos de aprendizaje, los cuales transmite mediante exposición, utilizando estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas.
  3) **E20-23:** Por su marcado carácter humanista y especialista en dinámica de grupos, induce al alumno a participar en las actividades que promueve, analizando las reacciones y respuestas a sus propuestas.
  4) **I20-23:** El profesor provoca la curiosidad del alumno conduciendo su investigación hacia la consecución de aprendizajes. Su carácter de experimentador interactivo del contenido y de los métodos le obliga a analizar los procesos en el contexto de aula (investigación- acción).

- **Coordinador (24)**

  1) **TR24:** El profesor cifra la utilidad de coordinación con otros profesores, a lo sumo, a nivel de negociación sobre los contenidos mínimos de su área.
  2) **TE24:** La coordinación con otros profesores se refiere a la selección de contenidos (con un criterio de utilidad) o a su organización.
  3) **E24:** El foco de la coordinación es la metodología, buscando uniformidad en la caracterización de las actividades.

4) **I24:** El profesor considera necesaria una coordinación sobre todos los aspectos que caracterizan el diseño didáctico.

- ***Validación de la información (24)***

1) **TR24:** El profesor es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, corrigiendo a los alumnos en caso de errores y aportando él mismo la información correcta.

2) **TE24:** El profesor es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, planteando interrogantes a los alumnos cuyas respuestas llevan a la "autocorrección".

3) **E24:** La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo (grupo clase o pequeños grupos de trabajo). En ocasiones se sustituye el papel de la corrección que en TR/TE juega el profesor por los compañeros, pero no se potencia a los alumnos sobre sus ideas ni que desarrollen estrategias de autovalidación de las mismas.

4) **I24:** La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, por el profesor o por el propio alumno. En cualquier caso, se potencia la reflexión de los alumnos y el desarrollo de estrategias para su autocorrección, propiciándose que los estudiantes asuman responsabilidad a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas.

A continuación, en las *Tablas 10, 11, 12, 13 y 14* presentamos la adaptación del instrumento CEAM realizada por Climent(2005). En éstas se cruza la información entre las categorías de análisis y las tendencias sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas presentadas en los apartados anteriores.

Tabla 10.

Instrumento CEAM, Parametro 1: Metodología de Enseñanza.

Metodología de Enseñanza.					
Categoría / Tendencia		Tradicional (TR)	Tecnológica (TE)	Espontaeísta (E)	Investigativa (I)
Praxis	1	Ejercitación repetitiva (ejercicios tipo).	Ejercitación reproductiva (procedimientos lógicos).	Experimentación (énfasis en el método).	Resolución de situaciones problemáticas.
	2	Exposición magistral (libro de texto).	Exposición Inductiva. Simulación puntual de investigación (estrategias expositivas y/o equipo informático).	Descubrimiento aleatorio, manipulación de modelos.	Investigación planificada.
Fuentes de información (2.1)		Profesor y libros de texto (únicos referentes).	Profesor y material "especializado" (referentes básicos).	Diversas.	Diversas.
Diferenciación individual (2.2)		No se realiza.	No se realiza.	Atención implícita.	Atención implícita.
Uso matemático manipulativo (2.3)		No se usa.	Puntual. Para reforzar teoría.	Asiduo. Para fomentar motivación y comunicación de alumnos.	Como apoyo y detonante de investigación del alumno.
Objetivos (3)		Conceptuales de carácter terminal.	Terminales operativos (procedimentales).	Flexibles y orientativos.	Flexibles y revisables.
Programación (4)		Oficial, prescriptiva, rígida (unidades aisladas).	Secuencial, estructurada y cerrada.	Aleatoria, contenidos negociados.	Redes conceptuales organizadas.

Fuente Climent (2005).

Tabla 11.

Instrumento CEAM, Parametro 1: Concepción de la Matemática Escolar.

Concepción de la Matemática Escolar.				
Categoría / Tendencia	Tradicional (TR)	Tecnológica (TE)	Espontaeísta (E)	Investigativa (I)
Orientación (5)	Énfasis conceptual.	Aplicabilidad (proceso-producto).	Énfasis procedimental y actitudinal.	Procedimientos, conceptos y actitudes.
¿Cuál es su contenido? (6)	Función Racional (Formal).	Exacta y acabada.	Inexacta y en construcción.	Síntesis de Matemática formal y Matemática cotidiana. Importancia de la Resolución de Problemas (RP) como contenido.
¿Cómo es? (6.1)	Exacta y acabada.	Exacta y acabada.	Inexacta y en construcción.	Doble perspectiva: exacta/inexacta en función del contexto. En construcción.
Finalidad (7)	Informativa, utilitaria e instrumental (conceptual).	Informativa, utilitaria e instrumental (razonamiento).	Formativa (actitudes y valores racionales).	Formativa (aprender a aprender).

Fuente: Climent (2005).

Tabla 12.

Instrumento CEAM, Parametro 1: Concepción del Aprendizaje.

Concepción del Aprendizaje.				
Categoría / Tendencia	Tradicional (TR)	Tecnológica (TE)	Espontaeísta (E)	Investigativa (I)

Aprendizaje (8)		Memorístico acumulativo.	Memorístico secuencial.	Significativo aleatorio.	Significativo relevante (redes semánticas).
Tipo y forma (procesos)	9	Deductivos.	Inductivos simulados y deductivos.	Deductivos e/o inductivos.	Inducción-Deducción.
	10	Por apropiación.	Por asimilación.	Por construcción espontánea.	Por construcción dirigida. Institucionalización del aprendizaje.
Importancia de la argumentación (10.1).		No se enfatiza.	Importancia explicación de comprensión del contenido.	Importancia comunicación de ideas.	Importancia argumentación (medio y fin).
Interacción profesor-estudiantes-matemáticas (10.2).		Profesor Mat. → Estudiante.	Profesor Mat. → Estudiante.	Profesor Mat. Estudiantes	Mat. Profesor. Estudiantes.
Tipo de argumentación (11).		Trabajo individual.	Trabajo individual.	Trabajo en grupo y debates.	Diversidad de agrupamientos y puestas en común.
Dinamizador (12).		Lógica de la asignatura.	Lógica de la disciplina.	Intereses del grupo de estudiantes.	Intereses de los estudiantes y de la disciplina.
Aptitud (13).		Predeterminada.	Predeterminada.	Transformable.	Transformable.
Actitud (14).		Predeterminada.	Prácticamente transformable.	Transformable.	Transformable.

Fuente: Climent (2005).

Tabla 13.

Instrumento CEAM, Parametro 1: Papel del Estudiante.

Papel del Estudiante.				
Categoría / Tendencia	Tradicional (TR)	Tecnológica (TE)	Espontaeísta (E)	Investigativa (I)

Participación en diseño didáctico.		No participa.	No participa.	Indirectamente a través de sus reacciones.	Participa directa o indirecmente.
Clave de transferencia Enseñanza-Aprendizaje (EA).		Único responsable (sumisión).	Responsable principal (motivación por el contexto).	Motivación por la acción.	El proceso (motivación por los significados.
¿Qué hace?	1	Escucha.	Reproduce e imita.	Actúa.	Investiga.
	2	Atiende.	Atiende.	Práctica.	Reflexiona.
	3	Acepta.	Cree.	Dialoga.	Cuestiona.

Fuente: Climent (2005).

Tabla 14.

Instrumento CEAM, Parametro 1: Papel del Profesor.

Papel del Profesor.				
Categoría / Tendencia	Tradicional (TR)	Tecnológica (TE)	Espontaeísta (E)	Investigativa (I)
¿Qué hace? (20)	Transmite verbalmente.	Transmite por procesos tecnológicos.	Induce.	Provoca.
¿Cómo hace? (21)	Dicta (explica).	Expone.	Promueve.	Conduce.
¿Qué hace? (22)	Reproduce.	Organiza.	Analiza respuestas y reacciones a sus propuestas.	Investiga en y sobre la acción.
Justificación (23).	Especialista en contenido.	Técnico del contenido y del diseño didáctico.	Humanista, especialista en dinámica de grupo.	Experimentador interactivo del contenido y los métodos.
Coordinador (24)	En su caso, sobre contenidos mínimos.	En su caso, sobre selección (utilidad)	Caracterización de las actividades.	A nivel de caracterización del diseño didáctico.

		y/u organización de contenidos.		
Validación de la información (24.1)	Valida el profesor aportando información explícitamente.	Valida el profesor aportando información implícitamente.	Valida el grupo-clase, el estudiante, sin que se potente toma de conciencia.	Se potencia el desarrollo de elementos de autoevaluación.

Fuente: Climent (2005).

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LOS DATOS

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se exponen los análisis de la investigación. En ese sentido, primero se presentan los análisis de las grabaciones de clase divididos en episodios de clase. Seguidamente, se analizan los cuestionarios de conocimiento matemático y las entrevistas semiestructuradas, empleando el instrumento CEAM. Al final del capítulo, exponemos la relación entre el conocimiento matemático y las concepciones del profesor, además del impacto que ésta tuvo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función racional.

Para presentar los análisis a la información recabada, se exponen tres tipos de evidencia: primero, aquellas que tienen relación con el conocimiento matemático que manifiesta el profesor, es decir, el evidenciado durante la práctica de enseñanza de William. Segundo, aquellas que se relacionan con el conocimiento que posee el profesor acerca de las funciones racionales. Tercero, las concepciones que matizan su práctica de enseñanza, es decir, las que afirma poseer y las que realmente manifiesta durante su quehacer profesional.

En cuanto a la clasificación de la información, se empleó una notación alfanumérica en la que utilizamos la inicial del instrumento, seguido del episodio o pregunta a citar: Sesión (S_i), Episodio (Ep_i), Entrevista (E_i), Estudiante (Est_i), Tarea (T_i), con i números correspondientes al instrumento o sujeto citado. Por ejemplo, para la sesión de clase 1, episodio 1, la notación es: S1Ep1. Por su parte, la codificación para la entrevista 1 pregunta 1 es: E1P1. Asimismo, para el Estudiante 1 (Est1), la Respuesta 1 (R1) y Tarea 1 (T1).

5.1 Conocimiento evidenciado por William sobre la función racional durante su práctica de enseñanza.

En la Tabla 15 exponemos las categorías de conocimiento especializado evidenciado por William al impartir funciones racionales. En esta tabla, se presentan indicadores alusivos a algunas categorías de conocimiento como: *el conocimiento de los temas (KoT), el conocimiento de la práctica matemática (KPM), el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), y el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)*.

Tabla 15

Evidencias e Indicios Indicadores de conocimiento especializado.

Fecha de observación	**Tema de clase**	**Número de sesión**	**Tiempo de duración**	**Indicador de conocimiento observado**
22 de noviembre, 2021.	• Definición de Función Racional, Dominio y Asíntotas.	1	23 minutos.	KoT1. KoT4. KoT5. KMLS5. KMT5.
24 de noviembre, 2021.	• Asíntotas Verticales, Horizontales y Oblicuas. • Gráfica de funciones racionales.	2	50 minutos.	KPM3. KPM4. KSM1. KMT6. KoT4. KoT6. KFLM3. KMLS1.

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, citamos las unidades de información de las sesiones de clase impartidas por William, el análisis realizado y el indicador de conocimiento matemático evidenciado.

Episodio	***S1Ep1.***

William:
Una función racional es aquella función formada por el cociente de dos polinomios, es decir, una función racional es una fracción que tiene un polinomio en el numerador y otro polinomio en el denominador. $f(x)=\frac{a}{b}=\frac{p(x)}{q(x)}$. Las funciones racionales se caracterizan por tener singularidades en aquellos puntos en los que se anula el denominador. Bueno, expliquemos un poco eso de que se anula el denominador: ¿Qué significa que el denominador se anule? Es decir, qué, como es un polinomio tiene variables, cuando las variables asumen algunos valores se hace la operación aritmética y en el denominador aparece un cero. Cuando aparece un cero, se configura una cosa que se llama la indeterminación. *Una indeterminación simplemente es la inexistencia de la función como tal, no existe la función en ese punto*. Todos sabemos que existen algunos casos como cero sobre un número, cero sobre un número es cero. Pero, un número sobre cero, no existe o también es una indeterminación.

Al analizar las líneas 1, 2 y 3 del **S1Ep1**, podemos evidenciar que William ***conoce que una función racional se puede definir como el cociente entre dos polinomios (KoT)***. Por otra parte, también se evidencia que William ***sabe que una función racional se puede representar a través del registro gráfico y verbal (KoT)***, pues en la línea 4 presenta la función racional como: $f(x)=\frac{a}{b}=\frac{p(x)}{q(x)}$, con $a, b, p(x), q(x)$ polinomios.

Añadido a esto, encontramos que William, *al definir la función racional no indica a sus alumnos, de forma explícita, que el denominador debe ser diferente a cero*. Además, cuando trata de explicar a sus alumnos qué sucede cuando el denominador de la función es cero, entre las líneas 7 y 16, emplea como semejantes, los términos ***indeterminación*** e ***indefinición.***

Resultados	• **KoT:** *Sabe que una función racional se puede definir como el cociente entre dos polinomios.*

	• **KoT:** *Conoce que una función racional se puede representar a través del registro gráfico y verbal.*

<table>
<tr><th>Episodio</th><th>S1Ep2.</th></tr>
<tr><td colspan="2">William:
El dominio de una función son todos los valores de equis para los cuales la
función existe. Y el rango es la correspondencia de esos valores.
Es decir, que por lo general, nosotros entendemos el dominio
de una función como un intervalo.
Porque una función puede existir desde, por ejemplo, menos infinito a
infinito, osea, todos los reales. Y eso quiere decir que esa función va a ser
continua durante toda su trayectoria.
Tanto en los equis positivos como en los equis negativos.
Pero hay funciones que existen entre un valor y otro
es decir, no van a existir para todos los reales. Y el rango, como le dije
es evaluar en la función, el dominio y encontrar el codominio.
Podemos decir que son los valores de y para los cuales la función existe.
Para que luego de la aproximación conceptual, realicemos un ejercicio.
$f(x) = \frac{1}{x+1}$
El dominio de una función racional, son todos los números reales
excepto aquellos valores que anulan el denominador.
Entonces, decir que son aquellos valores que anulan el denominador
implica encontrar los valores que hacen que en esa función racional
aparezca un cero, acá en el denominador.
Entonces, la forma más práctica de entender el dominio de la función que
son los valores para los cuales existe, sacando pues aquellos en los que
aparezca el cero, es coger la expresión o polinomio que está en el
denominador, igualarla a cero y despejar.
Entonces cuando yo, por ejemplo, digo: $x + 1 = 0$,
estoy automáticamente intentando encontrar un valor
para el cual esto da cero.
Entonces yo despejo:
$x + 1 = 0, x = -1$
Uno está sumando, lo pasamos a restar, ¿entonces queda equis igual a que?
Estudiante 1:
Cero.
William:</td></tr>
</table>

31	Entonces queda aparecería un cero aquí, que anularía la función.
32	Entonces, ya con esto, yo puedo decir que, el dominio de esa función son
33	todos los reales, menos, menos 1 o excepto menos 1.
34	Esa función va a tener valores reales que existan para cualquier valor desde
35	menos infinito, hasta infinito positivo,
36	¿Pero no puede ser? menos, menos 1.
37	En ese punto, ahí hay un salto en la función.
38	Para encontrar el dominio de la función tengo que coger el denominador,
39	igualarlo a cero, y despejar. Si el polinomio es de segundo grado,
40	tengo que factorizarlo, e igualar a cero.

En la ***S1Ep2*** encontramos que el William ***sabe la definición de dominio y rango de una función (KoT)***. Esto se evidencia al analizar las líneas 1, 2, 3 y 4, en las que William dicta la definición a sus estudiantes. Por su parte, en las líneas 20, 21, 22 y 23, William enfatiza en que, para determinar el dominio de una función racional $f(x)$, es necesario encontrar los ceros del polinomio que están el denominador. Por ende, podemos afirmar que William ***conoce que para determinar el dominio de una función racional, es necesario emplear un procedimiento o algoritmo que permita determinar los ceros del polinomio del denominador (KoT)***.

Por otra parte, en ***S1Ep2***, también encontramos que William ***conoce la potencialidad del ejemplo para comprender cómo determinar el dominio de una función racional (KMT)***. Esto se debe a que, en las líneas 13 y 14 William le propone a sus alumnos encontrar el dominio de una función racional y, en las líneas 24, 25, 26 y 27, determina cuál es el valor que indefine la función. Posteriormente, en las líneas 32 y 33 puntualiza, en términos matemáticos, el dominio de la función $f(x)$.

En concordancia con lo anterior, William propone a sus estudiantes realizar otro ejercicio, quizá con un poco más de dificultad que el anterior, pero que tiene el objetivo de reforzar y enfatizar sobre la necesidad de igualar el denominador de la función racional a cero para poder determinar el dominio. A continuación la evidencia ***S1Ep3***:

Episodio	***S1Ep3.***
William:	
1	Hagamos el siguiente ejemplo muchachos
2	Tengamos la función $g(x) = \frac{2+x}{3x-5}$
3	Para encontrar el dominio de la función
4	lo primero que nos toca hacer es igualar a cero el polinomio
5	del denominador
6	Entonces nos va a quedar que $3x - 5 = 0$
7	Ahora, despejamos y encontramos el valor de x, nos va a quedar que
8	El cinco que esta restando, lo pasamos a sumar $3x = 5$
9	Luego tres está multiplicando a la x, ¿qué hacemos?
Estudiante 2:	
10	¡Lo pasamos a dividir!
William:	
11	Entonces el resultado es equis igual a cinco tercios: $x = \frac{5}{3}$
12	Ya después decimos que el dominio de la función $f(x)$
13	es todos los reales menos el número que indetermina la función.
14	Es decir $x = \frac{5}{3}$.

En ese orden de ideas, podemos afirmar que de los episodios de clase, ***S1Ep2*** y ***S1Ep3***, obtuvimos los siguientes resultados:

Resultados	• **KoT:** *Sabe una definición de dominio y rango de una función racional.* • **KoT:** *Conoce un procedimiento, o algoritmo, para determinar el dominio de una función racional.* • **KMT:** *Sabe acerca de la potencialidad del ejemplo para comprender cómo determinar el dominio de una función racional.* • **KFLM:** *Sabe que una posible dificultad de sus estudiantes para encontrar el dominio de una función racional es determinar los ceros del polinomio del denominador.*

Posteriormente, en ***S2Ep1***, William propone a sus estudiantes otro ejemplo. En éste, evidenciamos que William ***conoce las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de una asíntota vertical (KPM)***. Asimismo, podemos afirmar que William ***sabe que un ejemplo potente para enseñar estas condiciones es a través de una función racional con factores comunes (KMT)***. A continuación presentamos el episodio de clase analizado:

Episodio	***S2Ep1.***
William:	
1	Hagamos el siguiente ejemplo:
2	La función es $h(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-3}$
3	¡Muchachos! Lo primero que hacemos es factorizar toda la expresión por
4	si acaso podemos simplificarla más
5	Entonces, si nos fijamos en el numerador, es un polinomio de grado uno,
6	por lo tanto ya no podemos simplificar más
7	En el denominador hay un polinomio de grado dos.
8	Entonces debemos factorizar. Utilicemos fórmula cuadrática
9	$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, a = 2, b = -1\ y\ c = -3$
10	$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}$
11	$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -1$
12	Entonces la factorización nos queda $(2x-3)(x+1)$
13	Reescribimos $h(x)$ como $h(x) = \frac{x+1}{(2x-3)(x+1)}$
14	Ahora simplificamos. Si nos fijamos nos quedo un polinomio
15	igual en numerador y denominador, entonces nos queda:
16	$h(x) = \frac{x+1}{(2x-3)(x+1)}$
17	$h(x) = \frac{1}{(2x-3)}, con\ x \neq -1$
18	¿Saben por qué? Porque si la función es $x = -1$,
19	la función se nos va a indeterminar porque
20	nos queda un cero en el denominador
21	Ahora como $h(x)$ no podemos simplificarla más, igualamos a cero el
22	denominador y encontramos que hay un cero en $x = \frac{3}{2} = 1.5$.
23	Entonces, el dominio de la función $h(x)$ van a ser todos los reales,
24	menos 1.5 y -1, porque cuando el denominador toma estos valores,
25	se indetermina
26	$Domh(x) = \mathbb{R} - \{1.5, -1\}$
27	¡Muchachos! Este punto es importante y lo deben tener en cuenta porque
28	no todos los valores que están por fuera del dominio hacen que la función
29	tenga asíntotas en esos puntos
30	Es decir, puede que no esté definido para ciertos puntos,
31	como los que encontramos aquí,
32	pero no significa que siempre tengamos asíntotas en esos puntos
33	Siempre, para saber si tenemos asíntota
34	es porque la función no se puede simplificar más
35	Entonces, si es irreductible, tendremos asíntota,
36	En caso contrario, no tendremos asíntota en ese punto.

En este ejemplo, se evidencia que William ***conoce las condiciones necesarias y suficientes para que en una función racional existan, o no, asíntotas verticales (KPM)***. William afirmó que, si bien la función no está definida (*condición necesaria*) para los valores $x = 1.5$ y $x = -1$, esto no es argumento suficiente para determinar si existen asíntotas en estos puntos. En ese sentido, William señala que la expresión algebraica debe ser irreductible (*condición suficiente*) para que existan asíntotas verticales. Seguidamente, en las líneas 33, 34, 35 y 36, William enuncia, aunque de manera informal, las condiciones anteriormente nombradas. Por ende, afirmamos que, ***en este episodio, se evidencia el conocimiento que William tiene sobre la práctica matemática***.

Asimismo, en ***S2Ep1***, también podemos identificar que William ***sabe que un ejemplo potente para determinar la existencia de asíntotas en una función racional, es empleando polinomios*** $p(x)$ ***y q(x) con factores comunes (KMT)***. En la línea 2, William expone a sus estudiantes un caso en el qué, pareciese, existieran dos asíntotas verticales para $f(x)$. No obstante, al resolverlo, argumenta sobre los criterios que permiten determinar cuando existen estas asíntotas.

Resultados	• **KPM:** *Conoce las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de asíntotas verticales de una función racional.* • **KMT:** *Sabe que un ejemplo potente para determinar la existencia de asíntotas verticales en una función racional, es cuando ésta tiene polinomios* $p(x)$ *y q(x) con factores comunes.*

En cuanto a la gráfica de funciones racionales, encontramos evidencia de que William ***conoce, al menos, una estrategia para representar gráficamente una función racional y sus asíntotas en el plano cartesiano (KPM)***. En ese sentido, en ***S2Ep2***, William expone a sus alumnos un método para graficar una función racional:

Episodio	***S2Ep2.***
William:	
1	Bueno muchachos, para que podamos graficar una función racional
2	Ejemplo $f(x) = \frac{1}{x+1}$, debemos tener en cuenta lo siguiente:
3	primero, encontramos los valores que hacen cero el denominador
4	Como les decía, los valores que indeterminan la función.
5	Como lo vimos en éste ejemplo, cuando $x = -1$,
6	La función se indetermina, por eso menos uno es un cero de la función.
7	Como en la parte de arriba, ahí en el numerador, no hay ningún número,
8	pues no sucede nada. Tengamos en cuenta este cero de la función,
9	que es de grado uno.
10	Muchachos, ahora lo que tenemos que hacer es encontrar el punto en que
11	se corta con el eje y. Eso sucede cuando $x = 0$.
12	Evaluenlo y me dicen cuanto les da.
Estudiante 3:	
13	¿Profe da 1?
William:	
14	Sí. El resultado es uno porque si evaluamos equis igual a cero nos queda:
15	$f(0) = \frac{1}{0+1}$
16	$f(0) = \frac{1}{1} = 1$
17	Eso nos quiere decir que hay un corte en el eje y y es cuando $y = 1$,
18	en el punto $(0,1)$.
19	Ahora encontramos las asíntotas.
20	Una asíntota es una recta a la cual la función no toca.
21	Es imposible tocarla.
22	Por ejemplo, la asíntota vertical ya la tenemos, porque encontramos una
23	indeterminación en la función. Es decir, $x = -1$.
24	En este caso no vamos a tener asíntotas horizontales muchachos.
25	Aunque después, en cálculo, vamos a poder calcularlas con algo llamado
26	límites.
27	Esperen hago un plano cartesiano. Y con tabulación, encontramos los
28	puntos y hacemos la gráfica de funciones.

En este episodio observamos que William ***conoce una estrategia para graficar funciones racionales es encontrando los interceptos con los ejes, posteriormente las asíntotas y al final, mediante tabulación, graficar en el plano cartesiano (KPM)***. No obstante, es importante señalar que William no profundiza en elementos significativos del contenido para construir una representación gráfica de estas funciones, *tales como un método para encontrar las asíntotas horizontales*.

Seguidamente, William afirma que, para el ejercicio que están realizando, la función racional no tendrá asíntotas horizontales, pero no explica el porqué. En las líneas 24, 25 y 26, William menciona que *estas asíntotas serán calculadas empleando límites en un curso posterior*, y no por los criterios establecidos para el nivel académico y el contenido asociado con función racional. Por ende, la evidencia nos otorga indicios que pueden asociarse al conocimiento de William sobre la estructura matemática de la función racional.

En concordancia con lo anterior, teniendo en cuenta que la próxima asignatura que cursarán los estudiantes es Cálculo Diferencial, podemos inferir que ***William sabe que una posible conexión entre la función racional y el concepto de límite es a través del cálculo de las asíntotas horizontales de la función (KSM).*** Asimismo, inferimos que William ***sabe que los estudiantes podrán calcular las asíntotas horizontales de una función racional empleando el concepto de límite en el curso de cálculo (KMLS)***. Por ende, en S2Ep2, encontramos indicios del conocimiento de la estructura matemática y del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado que posee William sobre la función racional.

Resultados	• **KPM:** *Sabe que una estrategia para graficar funciones racionales es: primero, hallar los interceptos con los ejes x y y; segundo, determinar las asíntotas; tercero, mediante tabulación, graficar en el plano cartesiano.* • **Indicios de KSM:** *Sabe que una posible conexión entre la función racional y el concepto de límite es a través del cálculo de sus asíntotas horizontales.* • **Indicios de KMLS*:*** *Sabe que un resultado esperado de próximos cursos es que calculen las asíntotas de una función racional empleando el concepto de límite.*

Por otra parte, en la presentación (Figura 6) y planeación empleada por William para impartir función racional, encontramos que William presenta a sus estudiantes la ubicación curricular del contenido, el grado y pensamientos matemáticos que se estimulan durante la práctica de enseñanza-aprendizaje. En ese sentido, podemos afirmar que William ***sabe la ubicación curricular, y la secuenciación de los temas, que tiene el contenido de función racional (KMLS)***. Véase la siguiente figura 6:

Guía N°1	Fecha: 03/02/2021
Grado: 11°	Tema: Funciones Matemáticas
Unidad: Funciones	Pensamientos Incluidos: Variacional y espacial

Figura 6. Evidencia de William sobre la secuenciación de los temas.

Resultados	• **KMLS:** *Sabe la ubicación curricular y la secuenciación de los temas asociados al contenido de función racional.*

Otro indicio relevante que encontramos es sobre el conocimiento de los recursos de enseñanza que posee William. En su presentación, William empleó geogebra para modelar una función cuadrática. Sin embargo, este fue el único ejemplo que expuso empleando este recurso. Por ende, entendemos que el profesor concibe Geogebra como una herramienta valiosa. Véase la Figura 7 como evidencia.

Resultados	• **KMT:** *Sabe que geogebra es un recurso de enseñanza potente para modelar funciones racionales y exponer el carácter dinámico de la función y sus elementos.*

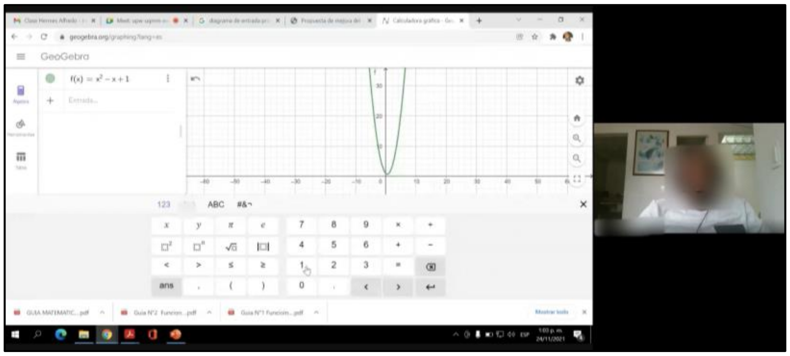


Figura 7. Evidencia de William sobre el uso de Geogebra.

5.2 Conocimiento Matemático evidenciado por William en el cuestionario de conocimiento.

En la Tabla 16 se presentan los desempeños de William durante el cuestionario de conocimiento matemático. Respecto a las tareas 1 y 3, el profesor tuvo respuestas acertadas a todas las preguntas propuestas. Por su parte, para las tareas 2 y 4, encontramos respuestas parcialmente correctas, y esto se debe a justificaciones parcialmente correctas en la resolución de problemas propuestos. A continuación, analizamos las evidencias más significativas que resultaron de la aplicación del cuestionario.

Tabla 16.

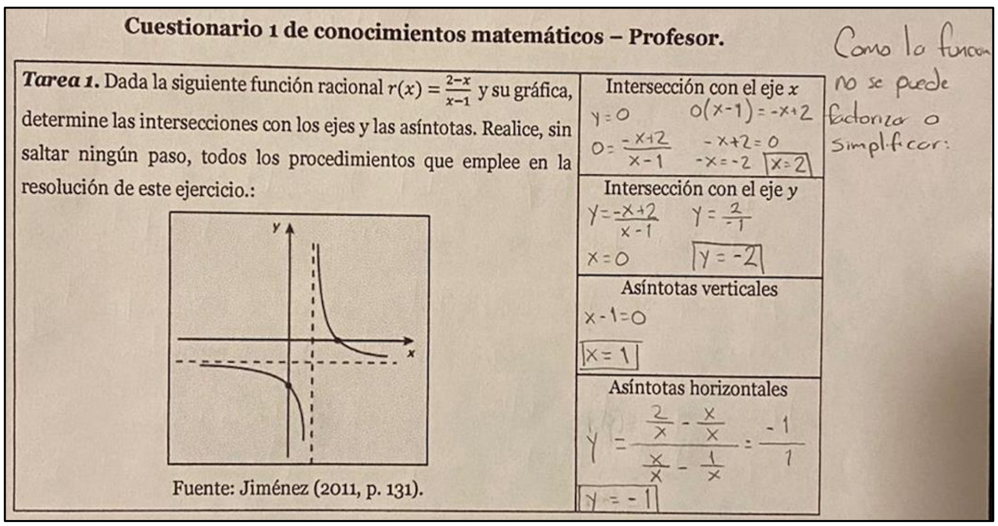
Desempeños de Wiliam en las cuatro tareas del Cuestionario.

	Cuestionario de Conocimiento Matemático - Profesor		
	Totalmente Correcta	Parcialmente Correcta	Incorrecta
Tarea 1	(X)		
Tarea 2		(X)	
Tarea 3	(X)		
Tarea 4		(X)	

Fuente: Elaboración propia.

5.2.1 Análisis de la Tarea 1.

El objetivo propuesto para la tarea 1 consistió en identificar el conocimiento matemático que tiene William acerca de los procedimientos para hallar las intersecciones de una función racional con los ejes, y sus posibles asíntotas verticales y horizontales. En ese sentido, propusimos una situación problema en la que William pudiese encontrar las intersecciones con los ejes y las respectivas asíntotas de una función racional $r(x) = \frac{2-x}{x-1}$, como se observa en la figura 8.


Cuestionario 1 de conocimientos matemáticos – Profesor.

Tarea 1. Dada la siguiente función racional $r(x) = \frac{2-x}{x-1}$ y su gráfica, determine las intersecciones con los ejes y las asíntotas. Realice, sin saltar ningún paso, todos los procedimientos que emplee en la resolución de este ejercicio.:

Fuente: Jiménez (2011, p. 131).

Intersección con el eje x

$y=0$ $\quad 0 = \frac{-x+2}{x-1}$ $\quad 0(x-1) = -x+2$ $\quad -x+2=0$ $\quad -x=-2$ $\quad \boxed{x=2}$

Intersección con el eje y

$y = \frac{-x+2}{x-1}$ $\quad x=0$ $\quad y = \frac{2}{-1}$ $\quad \boxed{y=-2}$

Asíntotas verticales

$x-1=0$

$\boxed{x=1}$

Asíntotas horizontales

$y = \frac{\frac{2}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{-1}{1}$

$\boxed{y=-1}$

Como la función no se puede factorizar o simplificar:

Figura 8. Evidencia de las respuestas de William al Cuestionario.

En la evidencia anterior (Figura 8), identificamos que William, sin mayor dificultad, encontró las intersecciones de la función $r(x)$ con los ejes x y y. Sin embargo, para determinar las asíntotas horizontales de la función, la respuesta del profesor nos proporciona indicios de que empleó un procedimiento asociado al concepto de *límites al infinito*, y no el teorema sobre las asíntotas horizontales. No obstante, en la justificación de esta tarea, William nos proporcionó evidencia del conocimiento que tiene sobre dicho teorema. Veamos la Figura 9:

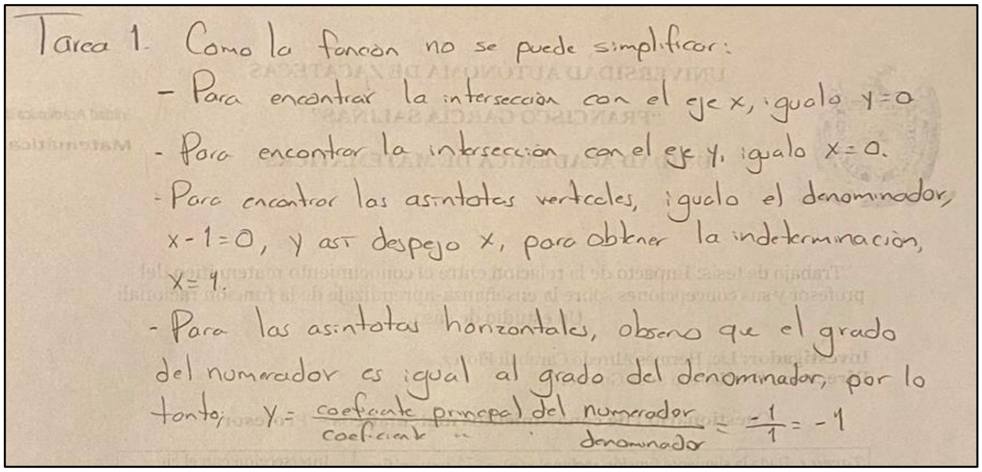

Tarea 1. Como la funcion no se puede simplificar:
- Para encontrar la intersección con el eje x, igualo y=0
- Para encontrar la intersección con el eje y, igualo x=0.
- Para encontrar las asintotas verticales, igualo el denominador, x-1=0, y así despejo x, para obtener la indeterminación, x=1.
- Para las asintotas horizontales, observo que el grado del numerador es igual al grado del denominador, por lo tanto, $y = \frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{-1}{1} = -1$

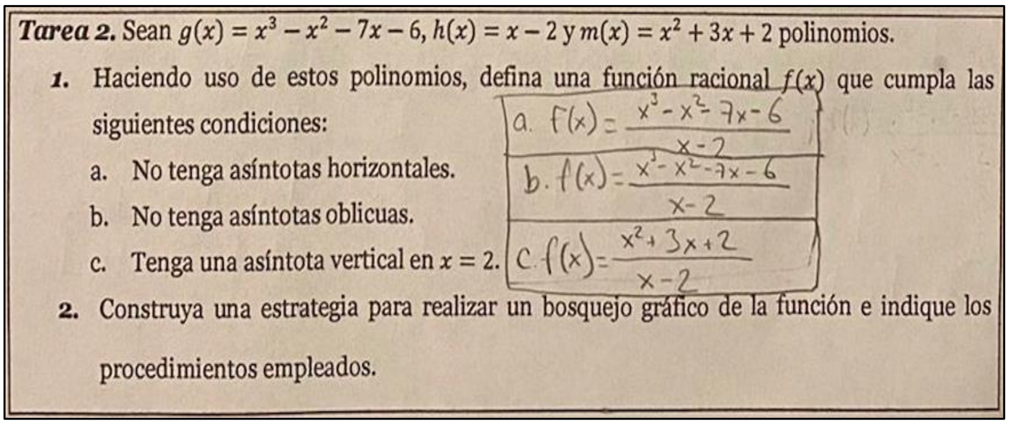
Figura 9. Evidencia de las respuestas de William al Cuestionario.

Resultados	• **KoT:** *Conoce un procedimiento para hallar las intersecciones de la función con los ejes coordenados.* • **KoT:** *Sabe que para determinar las asíntotas de una función racional es necesario encontrar los ceros del polinomio del denominador.* • **KoT:** *Conoce que una forma de encontrar las asíntotas horizontales de una función racional es empleando límites.* • **KoT**: *Conoce los criterios para determinar las asíntotas horizontales de una función racional.*

5.2.2 Análisis la Tarea 2.

Con el diseño de esta situación problema pretendimos evaluar el conocimiento matemático que tiene William para emplear la definición de función racional en una situación problema, utilizar los criterios y procedimientos para determinar existencia de asíntotas en una función racional y representar gráficamente una función racional. En ese orden de ideas, esta tarea se diseñó teniendo en cuenta los problemas que tienen profesores en ejercicio para identificar elementos asociados al concepto de función, relacionar sus representaciones (Amaya et al., 2016), y determinar el comportamiento asintótico que tiene la función racional (Arce y Ortega, 2013).

Para lograr tal objetivo, se le presentó a William una situación problema en la que debía definir una función racional empleando los polinomios $g(x) = x^3 - x^2 - 7x - 6$, $h(x) = x - 2$ y $m(x) = x^2 + 3x + 2$, y cumpliera con las siguientes condiciones: primero, no tener asíntotas horizontales; segundo, no tener asíntotas oblicuas; y tercero, tener una asíntota vertical en $x = 2$. En la Figura 10, presentamos la evidencia aportada por William:



Tarea 2. Sean $g(x) = x^3 - x^2 - 7x - 6$, $h(x) = x - 2$ y $m(x) = x^2 + 3x + 2$ polinomios.

1. Haciendo uso de estos polinomios, defina una función racional $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:
   a. No tenga asíntotas horizontales.
   b. No tenga asíntotas oblicuas.
   c. Tenga una asíntota vertical en $x = 2$.

a. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 7x - 6}{x - 2}$

b. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 7x - 6}{x - 2}$

c. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}$

2. Construya una estrategia para realizar un bosquejo gráfico de la función e indique los procedimientos empleados.

Figura 10. Evidencia de las respuestas de William al Cuestionario.

La respuesta que presentó William al primer punto de la tarea evidencia que realizó una construcción de la función racional con los polinomios y condiciones proporcionadas. Sin embargo, el profesor no afirmó cuál era la respuesta al problema. Por tal razón, analizaremos las tres respuestas.

En cuanto a las primeras dos respuestas, las funciones en a y b son iguales, y hacen parte de la respuesta esperada para esta tarea. Respecto a la respuesta c, donde $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$, observamos que cumple con la primera condición: *no tener asíntotas horizontales*; y tercera la condición: *tener una asíntota vertical en* $x = 2$. No obstante, al fijarnos en la segunda condición, ésta no se cumple. Esto se debe a que el grado del polinomio del denominador excede en una unidad al del denominador y, por tanto, existe una asíntota oblicua a la función en $y = x + 5$. Por ende, afirmamos que la tarea 2 está parcialmente correcta.

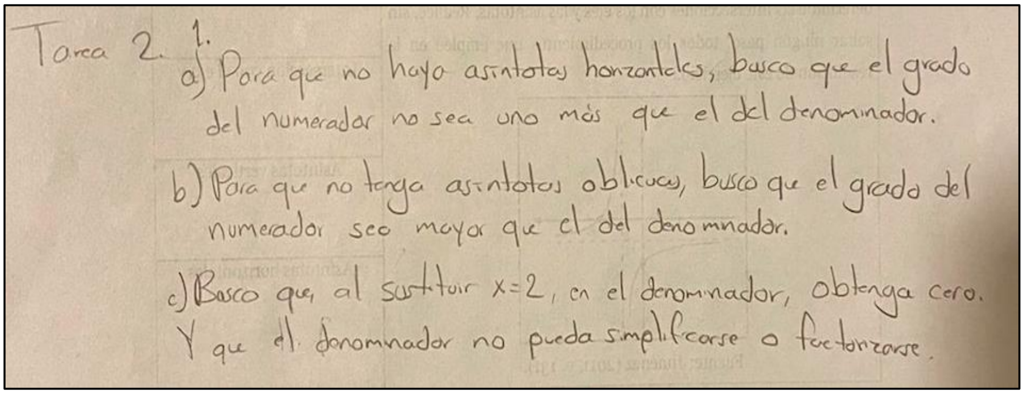

Tarea 2. 1.
a) Para que no haya asíntotas horizontales, busco que el grado del numerador no sea uno más que el del denominador.
b) Para que no tenga asíntotas oblicuas, busco que el grado del numerador sea mayor que el del denominador.
c) Busco que, al sustituir $x=2$, en el denominador, obtenga cero. Y que el denominador no pueda simplificarse o factorizarse.

Figura 11. Evidencia de las respuestas de William al Cuestionario.

En la evidencia anterior (Figura 11), se identifica que William manifiesta, a modo de justificación, su conocimiento matemático respecto la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Específicamente, reconocemos que William sabe los criterios para determinar la existencia de asíntotas en una función racional.

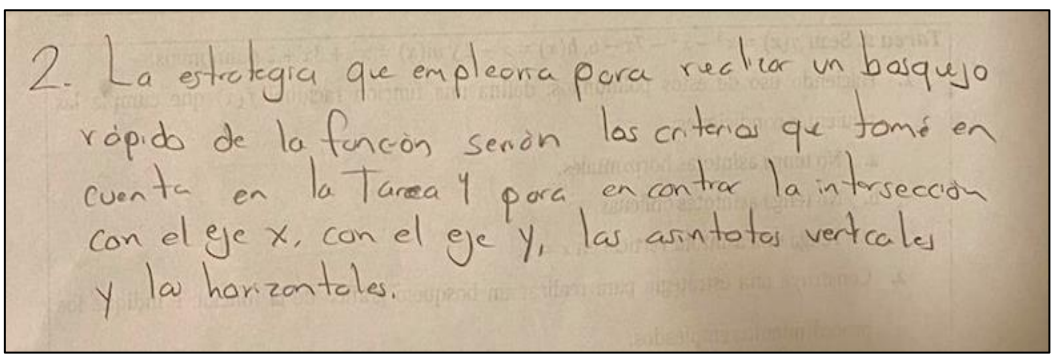

2. La estrategia que emplearía para realizar un bosquejo rápido de la función serían los criterios que tomé en cuenta en la Tarea y para encontrar la intersección con el eje x, con el eje y, las asíntotas verticales y las horizontales.

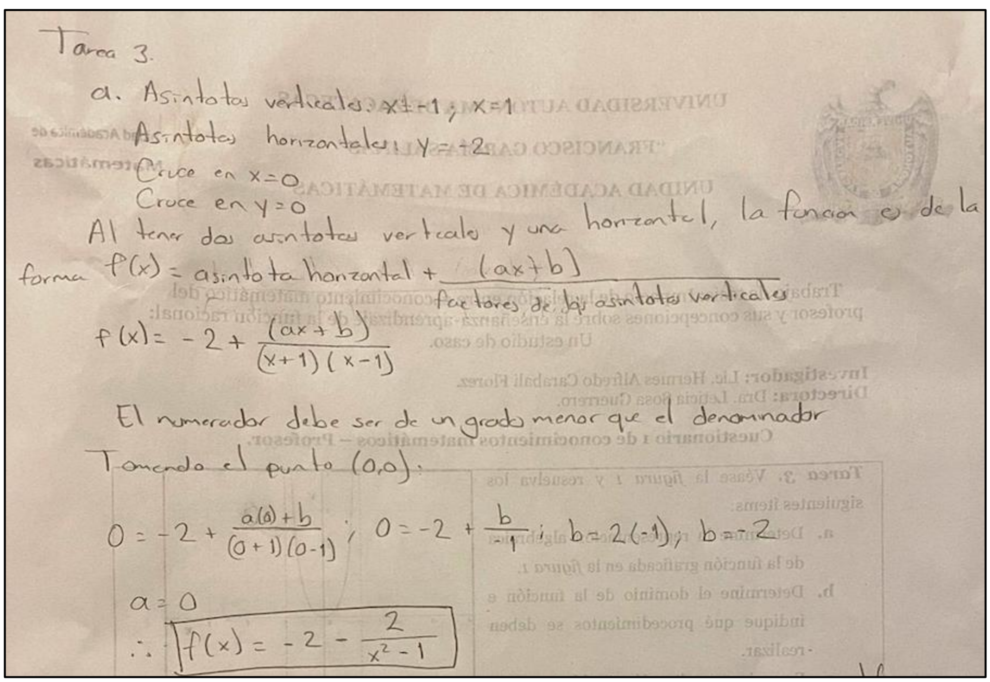
Figura 12. Evidencia de las respuestas de William al Cuestionario.

Respecto a la segunda parte de esta tarea, nuestro objetivo fue identificar si William conocía una estrategia para bosquejar gráficamente una función racional. En la respuesta, nuestro caso argumenta que, primero, se deben encontrar las intersecciones de la función con los ejes del plano cartesiano; y segundo, encontrar las asíntotas verticales y horizontales de la función. Nosotros encontramos esta respuesta como incompleta, debido a que William no argumenta sobre evaluar la función para determinar los puntos a graficar y el respectivo trazado de curva. Por ende, la respuesta está parcialmente correcta.

Resultados	• **KoT:** *Conoce los criterios para determinar la existencia de una asíntota oblicua en una función racional.* • **KoT:** *Conoce que una estrategia para representar gráficamente una función racional es encontrando sus intersecciones con los ejes coordenados, determinando sus asíntotas y, posteriormente, tabular y graficar en el plano cartesiano.*

5.2.3 Análisis de la Tarea 3.

Nuestro propósito con esta situación problema fue identificar los conocimientos matemáticos de William para transitar entre los registros: gráfico, verbal y algebraico de una función racional (Noreña, 2013). En ese sentido, el objetivo fue evaluar el conocimiento de William para proponer la expresión algebraica de una función racional a partir de su gráfica. Asimismo, que William determinara el dominio de la función, pues éste le permite comprender el comportamiento de la función.


Tarea 3.

a. Asintotas verticales: $x=-1$, $x=1$

Asintotas horizontales: $y=-2$

Cruce en $x=0$

Cruce en $y=0$

Al tener dos asintotas verticales y una horizontal, la funcion es de la forma $f(x) = \text{asintota horizontal} + \dfrac{(ax+b)}{\text{factores de las asintotas verticales}}$

$$f(x) = -2 + \frac{(ax+b)}{(x+1)(x-1)}$$

El numerador debe ser de un grado menor que el denominador

Tomando el punto $(0,0)$:

$$0 = -2 + \frac{a(0)+b}{(0+1)(0-1)};\quad 0 = -2 + \frac{b}{-1};\ b = 2(-1);\ b = -2$$

$a = 0$

$$\therefore \boxed{f(x) = -2 - \frac{2}{x^2-1}}$$

Figura 13. Evidencia de las respuestas de William al Cuestionario.

En esta evidencia (Figura 13) nosotros identificamos que William transita entre el registro de representación gráfico y algebraico. En esta situación, nuestro caso diseñó una estrategia empleando las asíntotas verticales y horizontales de la función. Además, afirmó que, al tener dos asíntotas, la función racional es de la forma $f(x) = h(x) + \frac{ax+b}{p(x)}$, donde $h(x)$ es la asíntota horizontal, y $p(x)$ son los factores de las asíntotas verticales. Dicho así, en esta respuesta identificamos el conocimiento matemático de William para encontrar la expresión analítica de una función racional a partir de su gráfica (Cantoral et al., 2016).

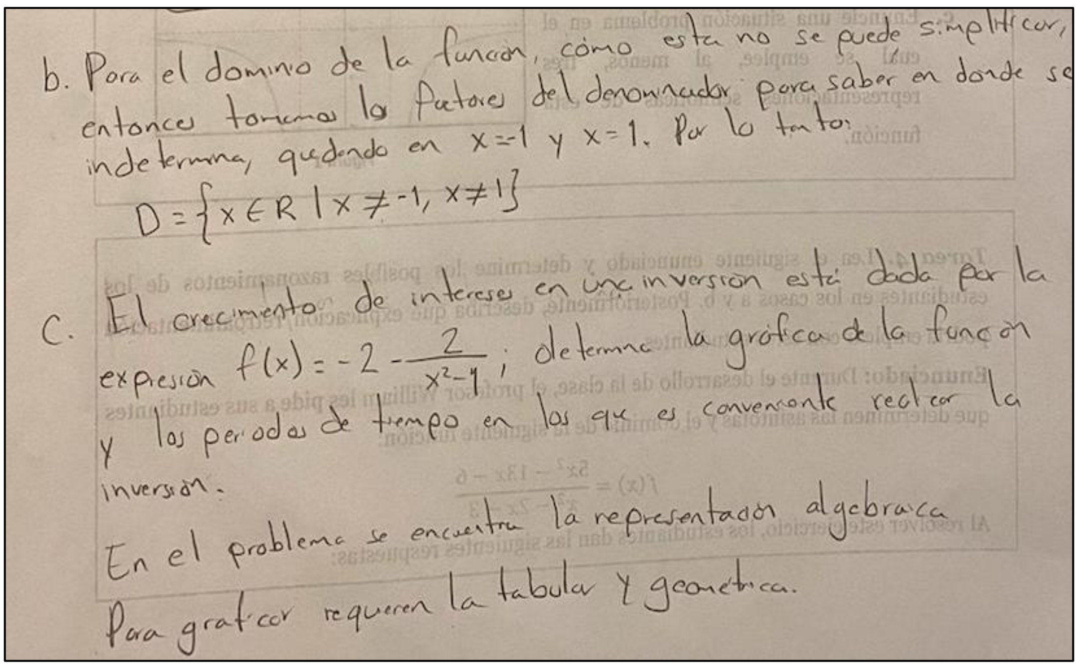

b. Para el dominio de la función, cómo esta no se puede simplificar, entonces tomamos los factores del denominador para saber en donde se indetermina, quedando en $x=-1$ y $x=1$. Por lo tanto:
$D = \{x \in R \mid x \neq -1, x \neq 1\}$
c. El crecimiento de intereses en una inversión está dada por la expresión $f(x) = -2 - \frac{2}{x^2-1}$; determina la gráfica de la función y los periodos de tiempo en los que es conveniente realizar la inversión.
En el problema se encuentra la representación algebraica
Para graficar requieren la tabular y geométrica.

Figura 14. Evidencia de las respuestas de William al Cuestionario.

En cuanto a los ítems a y b de esta tarea, consideramos que la evidencia anterior (Figura 14), William manifiesta el conocimiento matemático que posee para determinar el dominio de una función racional. En ese orden de ideas, reconocemos que nuestro caso tuvo total acierto en la resolución de esta tarea.

Resultados	• **KoT:** *Conoce diversos registros de representación para una función racional.*

	• **KoT:** *Conoce un algoritmo para determinar el dominio de una función racional.*

5.2.4 Análisis de la Tarea 4.

Esta situación hipotética se diseñó con el objetivo de identificar el conocimiento de los temas (Carrillo et al., 2018), y de la práctica matemática (Zakaryan y Sosa, 2021) que posee William sobre las funciones racionales. En ese sentido, se pretendió, a partir de una situación problema, identificar las habilidades de William para validar y/o refutar producciones matemáticas de sus estudiantes. En consecuencia, analizamos las respuestas en la siguiente Figura 15:

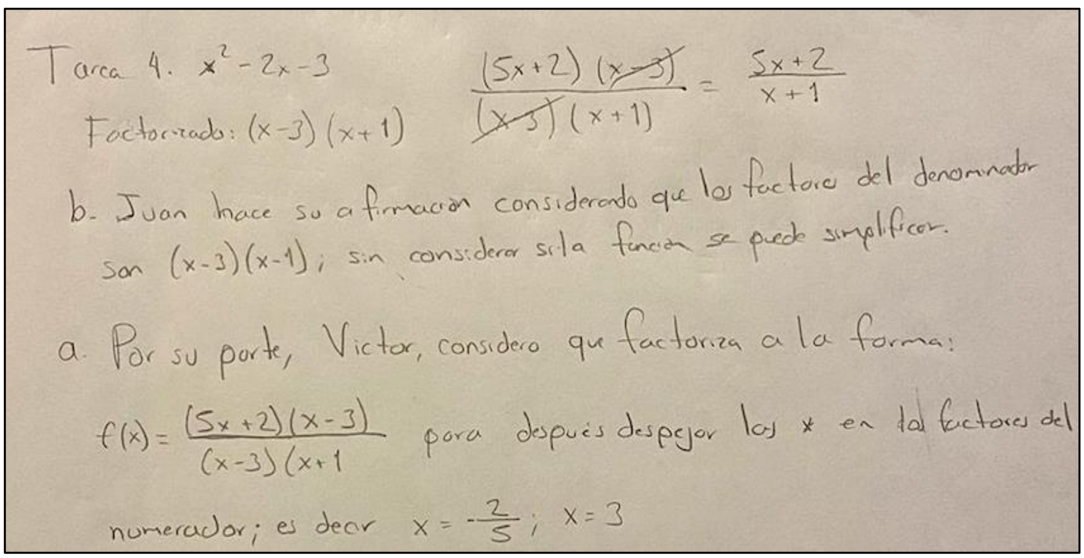


Figura 15. Respuesta de William a la Tarea 4.

Respecto a la respuesta del ítem a, en esta evidencia (Figura 15), William manifiesta que el razonamiento del estudiante *Víctor* fue: primero, factorizar la función y encontrar los ceros del polinomio del denominador, y segundo: encontrar los puntos de indefinición en $f(x)$. No obstante, William no argumenta respecto a la afirmación errónea del estudiante sobre la existencia de asíntotas verticales en los puntos $x = -\frac{2}{5}$ y $x = -1$. Por ende, consideramos que esta respuesta no es concluyente.

En cuanto a la respuesta del ítem b, en la Figura 15 se evidencia el conocimiento que tiene William sobre las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de asíntotas verticales. William argumenta que, el estudiante *Juan* al afirmar que la función tiene asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = -3$, no considera que la función se pueda simplificar. Es decir, que su numerador y denominador no tengan factores comunes. Por tal razón, consideramos que en esta respuesta se evidencia el conocimiento de William sobre este indicador.

Resultados	• **KPM:** *Sabe las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de asíntotas verticales en una función racional.*

5.3 Concepciones que posee y manifiesta William sobre la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas y la Función Racional.

La entrevista semiestructurada es uno de los instrumentos más importantes de la investigación. Al emplearla, buscamos identificar y cotejar, junto al análisis de clase, las concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que tiene el profesor. Por tal razón, describimos algunas de las evidencias más significativas que resultaron de la aplicación de este instrumento.

En concordancia, la organización de este análisis está dividida en dos partes. En la primera parte, se analizan las entrevistas semiestructuradas 1 y 2 respecto a las categorías del instrumento CEAM. En la segunda parte, se establece la relación entre los episodios de clase que se analizaron en los apartados anteriores, y los resultados de estas entrevistas. Dicho así, el objetivo de esta sección es identificar las concepciones del profesor y caracterizar la relación que éstas tienen con su práctica de enseñanza.

A. Metodología de Enseñanza

a. *Praxis*

En la práctica de William, ***la actividad en el aula se caracteriza por la repetición reiterada de ejercicios*** **(TR1)**. William presenta a sus estudiantes el contenido matemático y, posteriormente, les proporciona ejercicios para que reproduzcan lo enseñado. Obtenemos evidencia de esto, en los episodios de clase 2 y 3 de la sesión de clase 1 (S1Ep2 y S1Ep3):

Episodio	***S1Ep2.***
William:	
1	El dominio de una función son todos los valores de equis para los cuales la
2	función existe. Y el rango es la correspondencia de esos valores.
3	Es decir, que por lo general, nosotros entendemos el dominio
4	de una función como un intervalo.
5	Porque una función puede existir desde, por ejemplo, menos infinito a
6	infinito, osea, todos los reales. Y eso quiere decir que esa función va a ser
7	continua durante toda su trayectoria.
8	Tanto en los equis positivos como en los equis negativos.
9	Pero hay funciones que existen entre un valor y otro
10	es decir, no van a existir para todos los reales. Y el rango, como le dije
11	es evaluar en la función, el dominio y encontrar el codominio.
12	Podemos decir que son los valores de y para los cuales la función existe.
13	Para que luego de la aproximación conceptual, realicemos un ejercicio.
14	$f(x) = \frac{1}{x+1}$
15	El dominio de una función racional, son todos los números reales
16	excepto aquellos valores que anulan el denominador.
17	Entonces, decir que son aquellos valores que anulan el denominador
18	implica encontrar los valores que hacen que en esa función racional
19	aparezca un cero, acá en el denominador.
20	Entonces, la forma más práctica de entender el dominio de la función que
21	son los valores para los cuales existe, sacando pues aquellos en los que
22	aparezca el cero, es coger la expresión o polinomio que está en el
23	denominador, igualarla a cero y despejar.
24	Entonces cuando yo, por ejemplo, digo: $x + 1 = 0$,

25	estoy automáticamente intentando encontrar un valor
26	para el cual esto da cero.
27	Entonces yo despejo:
28	$x + 1 = 0, x = -1$
29	Uno está sumando, lo pasamos a restar, ¿entonces queda equis igual a que?
Estudiante 1:	
30	Cero.
William:	
31	Entonces queda aparecería un cero aquí, que anularía la función.
32	Entonces, ya con esto, yo puedo decir que, el dominio de esa función son
33	todos los reales, menos, menos 1 o excepto menos 1.
34	Esa función va a tener valores reales que existan para cualquier valor desde
35	menos infinito, hasta infinito positivo,
36	¿Pero no puede ser? menos, menos 1.
37	En ese punto, ahí hay un salto en la función.
38	Para encontrar el dominio de la función tengo que coger el denominador,
39	igualarlo a cero, y despejar. Si el polinomio es de segundo grado,
40	tengo que factorizarlo, e igualar a cero.
Episodio	***S1Ep3.***
William:	
1	Hagamos el siguiente ejemplo muchachos
2	Tengamos la función $g(x) = \frac{2+x}{3x-5}$
3	Para encontrar el dominio de la función
4	lo primero que nos toca hacer es igualar a cero el polinomio
5	del denominador
6	Entonces nos va a quedar que $3x - 5 = 0$
7	Ahora, despejamos y encontramos el valor de x, nos va a quedar que
8	El cinco que esta restando, lo pasamos a sumar $3x = 5$
9	Luego tres está multiplicando a la x, ¿qué hacemos?
Estudiante 2:	
10	¡Lo pasamos a dividir!
William:	
11	Entonces el resultado es equis igual a cinco tercios: $x = \frac{5}{3}$
12	Ya después decimos que el dominio de la función $f(x)$
13	es todos los reales menos el número que indetermina la función.
14	Es decir $x = \frac{5}{3}$.

Si nos fijamos en estos episodios, ***William presenta el contenido a sus estudiantes en su fase final, apoyado en estrategias expositivas*** **(TR2).** Durante su práctica, William presentó el contenido de forma magistral, añadiendo un par de preguntas acerca del procedimiento a sus estudiantes, para captar su atención.

Resultado	
Concepción sobre la enseñanza.	William sigue una **tendencia tradicional** respecto a su práctica de enseñanza. Esto se debe a que, la actividad en el **aula consiste en la repetición reiterada de ejercicios** y, en sus clases, **el contenido se expone en su fase final**, apoyandose en estrategias expositivas.

b. ***Fuentes de Información***

En cuanto a las fuentes de información, la respuesta de William a la entrevista (E1P17), nos brinda indicios de que éste concibe los libros de texto como una fuente importante de conocimiento para impartir matemáticas. En ese sentido, nuestro caso afirma que el libro de texto es importante para su planeación, debido a que de éste extrae ejemplos y ejercicios que expone a sus estudiantes. Asimismo, nos indica que emplea más de un libro para diseñar sus clases.

Entrevista	***1***	**Respuesta**
Pregunta	***17***	
¿En su práctica de enseñanza utiliza libros físicos o digitales?, ¿Por qué?		Para mi el libro es muy importante. Sobre todo si es físico. De este extraigo ejemplos, ejercicios y problemas para realizar con mis estudiantes en el aula. Mi planeación no contiene elementos de un solo libro, contiene elementos de varios, y así los llevo a mis clases. Para mi el libro es una herramienta para procesar el conocimiento, porque todo esta escrito. No llego a improvisar a mi clase, por eso me gusta emplear el libro.

Al profundizar sobre la pregunta, e indagar sobre qué libros emplea para impartir funciones racionales, Wiliiam nos indica que utiliza libros de precálculo, álgebra y trigonometría analítica. Por ende, afirmamos que **Wiliiam sigue una tendencia tecnológica respecto a las fuentes de información que usa para impartir, pues la fuentes son él *y el material especializado (referentes básicos)*.**

Resultado	
Concepción sobre las fuentes de información	Wiliiam sigue una ***tendencia tecnológica*** respecto a las fuentes de información que usa para impartir, debido a que **él y el material especializado**, constituyen las fuentes de conocimiento dentro del aula de clases.

c. Objetivos

Según las respuestas a la entrevista, los objetivos que pretende William están relacionados con las actitudes y expectativas de los estudiantes, antes que con el contenido (E1P5). En ese sentido, la evidencia indica que nuestro caso pretende que sus alumnos empleen lo enseñado en el curso de álgebra, en su vida diaria. Por ende, **la concepción que William manifiesta poseer se asocia con que, en su práctica, *al carácter terminal de los objetivos se le añade el carácter funcional* (TE3).**

Entrevista	***1***	**Respuesta**
Pregunta	***6***	
¿Qué expectativas tiene sobre el desempeño académico y los aprendizajes que pueden alcanzar sus estudiantes?		Mis expectativas son altas. Mi expectativa es enseñar matemáticas de una forma en que se enamoren los estudiantes, que no "sientan" que es matemática, porque la matemática es el "coco" para todos. Entonces, siempre trato de ser minucioso y mostrar las matemáticas con analogías, con el día a día. Hacerles ver la importancia de las matemáticas en el día a día. Primero es que ellos puedan entender o darle un uso a los aprendizajes que adquieren. Es decir, que los puedan visualizar como algo útil en su vida diaria.

Resultado	
Concepción sobre los objetivos al impartir	Wiliiam sigue una ***tendencia tecnológica*** respecto a los objetivos que persigue al imprtir. En este sentido, al **carácter terminal** de los objetivos, William añade el **carácter funcional**.

No obstante, al analizar las clases de William (S1Ep1, S1Ep2 y S2Ep1), evidenciamos que ésta está organizada de acuerdo a los resultados de aprendizaje esperados en el currículo para este contenido matemático. Al preguntarle a William sobre los aprendizajes que sus estudiantes deben alcanzar para este contenido (E1P18), el profesor afirma que:

Entrevista	***1***	**Respuesta**
Pregunta	***6***	
¿Qué resultados de aprendizaje se esperan, según el currículo, al impartir el contenido de función racional?		Creo que para este tema de función racional se espera que los estudiantes sepan factorizar, graficar, definir conjuntos para el dominio de las funciones racionales. Es decir, que sepan modelar un problema o fenómeno con una función racional.

En ese orden de ideas, encontramos que, **para William*, los contenidos se identifican con los conceptos, enunciados como objetivos de carácter terminal*** **(TR3).** Por ende, lo enunciado por el profesor en la entrevista, no concuerda con lo manifestado durante su práctica de enseñanza.

Resultado	
Observación	La concepción que Willian indica poseer sobre los **objetivos** que persigue al impartir no son coherentes con los evidenciados durante su práctica de enseñanza.

d. Programación

La concepción respecto a la programación manifestada por el profesor Willian podemos asociarla a una tendencia investigativa (I4). Esto se debe a que afirma no tener una propuesta organizativa única. Es decir que, de ser necesario, retoma contenidos matemáticos que pueden facilitar su práctica de enseñanza. Por ende, el profesor dispone de una propuesta organizativa de los elementos del programa, pero no está vinculado a un recorrido concreto. Existe una trama que vincula y organiza el conocimiento por la que el docente se mueve dependiendo de los intereses, nivel, de los alumnos.

Entrevista	***1***	**Respuesta**
Pregunta	***15***	
¿Usted cómo organiza su práctica de enseñanza?, ¿Por qué lo hace de esa forma?		Mis clases las organizo, primero, con la planeación. Muchas veces pongo cosas que pienso se pueden dar, y luego me toca cambiarlas. Muchas veces las clases se acortan por alguna razón, entonces me gusta tener tiempo extra por si pasa algo que no consideré. También tengo en cuenta lo que propone el currículo y los objetivos que tengo que alcanzar, con eso ya organizo el tema, los ejemplos y los ejercicios. Lo hago de esta forma porque me queda más fácil para plantear ejercicios que los hagan pensar. Pero de ser necesario, agrego o elimino contenido. Lo más importante para mi es que mis estudiantes aprendan.

De acuerdo a la respuesta obtenida, William asume tener la libertad para cambiar, a su conveniencia, los contenidos y el orden en que los imparte. Además, manifiesta que, dependiendo del desarrollo de la clase, agrega o elimina contenido. Por ende, podemos afirmar que la práctica de William se desarrolla de acuerdo al nivel del conocimiento matemático de sus estudiantes.

Resultado	
Concepción sobre la programación del contenido a impartir	William sigue una **tendencia investigativa** en cuanto a la programación establecida para impartir función racional, debido a que organiza el contenido según sus intereses y las necesidades de sus estudiantes.

B. Concepción de Aprendizaje

a. Aprendizaje

La información recabada en las entrevistas respecto al tema 3 (E1P10 y E1P11), *Concepción de Aprendizaje*, nos indica que **William concibe que *los objetos de aprendizaje no solo tienen significado, sino también la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos, adquiriendo así un carácter móvil a través de una malla conceptual* (I8).** Asimismo, William afirma que un estudiante aprendió cuando es capaz de extraer y aplicar, en un contexto diferente al meramente matemático, el conocimiento nuevo.

Entrevista	***1***	**Respuesta**
Pregunta	***10***	
Según su percepción, ¿qué es aprender? y ¿Cómo se gesta el aprendizaje matemático en los estudiantes?		Podría decir que aprender es asociar un conocimiento que no tenías o, bien, un conocimiento que considerabas correcto, y luego te das cuenta que es erróneo, o que no te funciona. Aprender es adquirir un conocimiento y asociarlo a algo que antes no tenías. Yo creo que el aprendizaje matemático se gesta con las situaciones particulares, como los gustos, las actividades que les resultan interesantes o los motivas. Cuando les presentas una situación o algo que pueda resolver, eso que le motiva, y lo resuelve con lo que uno le enseña, ahí se está gestando el aprendizaje. Cuando le encuentra utilidad.
Entrevista	***1***	**Respuesta**
Pregunta	***11***	
¿Cómo y cuándo es posible saber que un estudiante aprendió lo impartido en clase?		Cuando lo saca del contexto meramente matemático y lo puede poner en práctica en diferentes situaciones. Cuando pasa eso, ya me doy cuenta. Porque si puede llevarlo a otras situaciones distintas de las meramente escolares, o de las que se presenta comúnmente, ya lo aprendió.

Por otra parte, al preguntarle a William sobre cómo definiría él una oportunidad de aprendizaje, éste menciona que es necesario establecer analogías entre el contenido que se impartirá y experiencias que puedan vivir (E2P4). Esta respuesta refuerza la concepción de aprendizaje que manifiesta poseer.

<table>
<tr><td>Entrevista</td><td>2</td><td rowspan="2">Respuesta</td></tr>
<tr><td>Pregunta</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Usted cómo definiría una oportunidad de aprendizaje?</td><td>Cuando se capta la motivación del estudiante, no entrar directamente en el tema sino iniciar con un contexto, me ayudo hablándoles un poco acerca de las creencias que hay en las matemáticas relacionadas con los temas que a ellos les interesa así logro enseñarles cómo las creencias matemáticas se van desarrollando a partir de las experiencias previas. Otra oportunidad es relacionar el tema con experiencias vividas. También el hecho de cambiar el hecho de evaluar (no mencionar la palabra examen) es importante. Independiente de como sea el grupo es importante verlos como seres humanos antes que como estudiantes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resultado</td></tr>
<tr><td colspan="2">Concepción sobre el aprendizaje</td><td>William sigue una tendencia investigativa en cuanto al aprendizaje de las matemáticas.</td></tr>
</table>

b. Tipos y formas-procesos

Respecto al proceso de aprendizaje, la evidencia indica que **William concibe que aunque el aprendizaje pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo, el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo (TE9)** y que, para aprender, **el alumno se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el docente se los presente (TR10).**

Al analizar la práctica de William (S1EP2), encontramos que, en ambas clases William presenta a sus estudiantes un proceso lógico-deductivo que consiste en exponer primero, la regla general y, posteriormente, realizar ejercicios donde sus estudiantes puedan reproducir lo enseñado. Dicho así, los estudiantes deben asimilar los conocimientos que presenta William y, de forma repetitiva, ponerlos en práctica.

Por ejemplo, William propone a sus estudiantes realizar un ejercicio donde encuentren el dominio una función racional. En este ejercicio, William afirma que, primero, es necesario encontrar el polinomio del denominador; segundo, igualarlo a cero; y tercero, factorizar. Posteriormente, en **S1Ep3**, propone un ejemplo similar, para que los estudiantes realicen lo que él realizó en el ejercicio anterior.

<table>
<tr><th>Fragmento del Episodio:</th><th>S2Ep2.</th></tr>
<tr><td colspan="2">William:
11 $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x+1}}$
12 El dominio de una función racional, son todos los números reales, excepto aquellos valores que anulan el denominador.
13 Entonces, decir que son aquellos valores que anulan el denominador, implica encontrar los valores que hacen que en esa función racional, aparezca un cero, acá en el denominador.
14 Entonces, la forma más práctica de entender el dominio de la función que son los valores para los cuales existe, sacando pues aquellos en los que aparezca el cero, es coger la expresión o polinomio que está en el denominador, igualarla a cero y despejar.
15 Entonces cuando yo, por ejemplo, digo: $\boldsymbol{x + 1 = 0}$, estoy automáticamente intentando encontrar un valor para el cual esto da cero.
16 Entonces yo despejo:
17 $\boldsymbol{x + 1 = 0, x = -1}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Resultado</th></tr>
<tr><td>Concepción sobre los tipos y formas-procesos de aprendizaje</td><td>William sigue una tendencia tecnológica en cuanto a los tipos, formas-procesos de aprendizaje de la función racional, pues concibe que el verdadero aprendizaje es mediante un proceso deductivo, en el que los estudiantes aprenden solo de observar su proceso de enseñanza.</td></tr>
</table>

C. Papel del Alumno

a. *Participación en el diseño didáctico*

Para William, *el alumno participa indirectamente en el diseño didáctico (a través de sus intervenciones en el quehacer en el aula) (E15)*. Según la información recabada de la entrevista 2, para William, el alumno juega un papel importante en el diseño didáctico pues la organización del contenido gira en torno a problemas que se relacionen con su contexto.

Entrevista	**2**	**Respuesta**
Pregunta	***9***	
En cuanto a su planeación y diseño de clase ¿Qué rol juega el estudiante?		Yo trato de que la planeación sea: darles algún problema relacionado con su contexto, y que puedan resolverlo de manera colaborativa, o individual. Que puedan ir descubriendo, de cierta forma, el aprendizaje o el conocimiento que se pretende.
Entrevista	***2***	**Respuesta**
Pregunta	***7***	
Según su percepción, ¿cuál es el papel del estudiante en el proceso de enseñanza aprendizaje?		Creo que el estudiante debe participar activamente en descubrir ese conocimiento y no solo ser como un "escucha", es decir como pasivo. Debe sentirse en confianza de expresarse académica y personalmente, y aportarle a la clase.

b. *¿Qué hace?*

En cuanto a qué hace el estudiante, hay indicios de que el William concibe que hay una sobrevaloración implícita en los apuntes. El alumno se esfuerza, por ello, en recoger en sus papeles todo aquello que proviene de William (TR17). En ese sentido, William es quien proporciona la clave para la repetición posterior y, por tanto, es fundamental la atención a éste (como fuente de información fundamental) (TR18). Asociamos estos indicadores, a los análisis de clase donde los estudiantes juegan el papel de pasivos, reciben la información del profesor y reproducen los procedimientos que éste impartió.

Resultado	
Concepción sobre el papel del alumno en el diseño didáctico de la clase.	William sigue una **tendencia espontaneísta** en cuanto al papel que ocupa el estudiante en el diseño de clase, pues sus estudiantes ocupan un papel indirecto en la planeación de la clase.
Concepción sobre qué debe hacer el estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje	En cuanto a qué debe hacer el estudiante durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, William sigue una **tendencia tradicional.** Esto se debe a que el estudiante debe recopilar, en sus notas, todo lo que el profesor dice y escribe en la pizarra.

D. Papel del Profesor

a. ¿Qué hace?¿Cómo hace?, Justificación

En la práctica de enseñanza, William actúa como aquel que transmite verbalmente los contenidos de aprendizaje, mediante el dictado de sus apuntes o alusión a un libro de texto, realizando, por su caracterización como especialista en contenidos, una reproducción literal de los citados en documentos (TR20-23). Esta estrategia consiste en la exposición de algunos ejemplos donde los estudiantes reproducen lo que el profesor impartió durante la clase.

Su papel consistió en presentar ejemplos y realizar ejercicios, de forma que sus estudiantes pudieran imitar las técnicas de resolución y análisis que éste emplea durante su clase (S1Ep1, S1Ep2, S2Ep2). No obstante, no evidenciamos que se propusieran espacios para socializar y corregir errores de los estudiantes.

Por su parte, la concepción que William manifiesta sobre su papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje no dista de la evidenciada en su práctica de enseñanza. En ese sentido, lo recabado en la entrevista (E1P14) nos da indicios de que **William se concibe como un técnico del contenido y del diseño didáctico, organiza los contenidos de aprendizaje, los**

cuales transmite mediante exposición, utilizando estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas (TE20-23).

Entrevista	**1**	**Respuesta**
Pregunta	***14***	
¿Cuál es su papel en el proceso de enseñanza?		Es lo que te decía. Siento que mi papel es, primero, hacer una planeación, una buena planeación de clase. Después, ejecutar esa planeación y también estar atento, ser un profesional en el aula de clases. Yo me siento muy comprometido con ver la parte emocional de los estudiantes, sobre todo por el entorno en el que nos encontramos, y todo lo que pasa en nuestra pequeña sociedad afecta el aprendizaje y, por ende, el de enseñanza. Yo creo que cargo con $\frac{2}{3}$ de la responsabilidad y ellos $\frac{1}{3}$.

Estas respuestas nos dan indicios de que el profesor concibe, en el aula de clase, una responsabilidad compartida, donde él cuenta con la mayor parte de ésta. En ese sentido, William reconoce que, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el interés de sus estudiantes por aprender determina un factor importante, que debe tener en cuenta en su organización, programación y ejecución de clase.

Resultado	
Concepción sobre el papel del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje	William sigue una **tendencia investigativa** en cuanto a su rol en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe a que **se concibe como un técnico del contenido** que tiene una responsabilidad compartida con sus estudiantes en el aula.

5.4 Síntesis de las Concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional evidencias por William.

Como se ha mencionado en apartados anteriores, nuestro interés no es clasificar, dentro de las tendencias definidas por Carrillo (1998), al profesor. Nuestro objetivo es describir las concepciones de enseñanza-aprendizaje que permean su práctica de enseñanza, para entablar posibles relaciones con el conocimiento especializado que posee y manifiesta al impartir. En orden de ideas, a continuación describimos las posibles concepciones de William sobre la enseñanza de las matemáticas y su metodología, el aprendizaje de las matemáticas y el rol que desempeña él y sus estudiantes en el aula de clases.

Las concepciones evidenciadas por William sobre la **enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la función racional** apuntan, en su mayoría, a **una tendencia Tradicional y Tecnológica**. En ese orden de ideas, la metodología de enseñanza está caracterizada por la repetición reiterada de ejercicios por parte del profesor a sus alumnos. Dicho así, para William impartir consiste en exponer el contenido de forma magistral, asumiendo las matemáticas como un producto terminado y, empleando el libro de texto, como el material insignia para el desarrollo de los cursos (Carrillo y Contretas, 1995).

Por su parte, **los objetivos** que persigue William al impartir están asociados a aspectos utilitarios de las matemáticas. En ese sentido, **las clases del profesor no solo se caracterizan por presentar el contenido y los conceptos como objetivos de carácter terminal (*concepción tradicional*), a éstos también se les añade su funcionalidad (*concepción tecnológica*)**. Esta tendencia de las matemáticas como herramienta útil, está relacionada con la concepción *Instrumentalista*, descrita por Ernest (1989) como la creencia que defiende la idea de las matemáticas como un conjunto de reglas y hechos que son útiles. Asimismo, **bajo esta concepción el estudiante aprende mediante la imitación y ejercitación algorítmica**.

En consecuencia, el aprendizaje se asocia con dominar un modelo utilitario de las matemáticas.

Respecto a la programación, la evidencia indica que William tiende a una concepción investigativa, pues emplea la libertad que le confiere la institución, para diseñar y adecuar su práctica de enseñanza a los intereses y nivel matemático de sus estudiantes. Por ende, para el profesor la organización de su clase responde, tanto al currículo de matemáticas, como al nivel conceptual que alcanzan sus estudiantes al estar en sus clases.

Las concepciones de William **sobre el aprendizaje** de las matemáticas y la función racional responden a una tendencia investigativa. Esto se debe a que, para William, los estudiantes deben poseer la capacidad de aplicar el contenido aprendido en diversos contextos y situaciones problema. No obstante, en las sesiones de clase analizadas, encontramos que en la práctica de enseñanza, William potencia en sus estudiantes el aprendizaje memorístico y procedimental de la función racional y sus elementos. Por ende, afirmamos que **existe poca congruencia entre lo que el profesor concibe por aprendizaje y lo que desarrolla en su aula de clases**.

Respecto a los tipos y procesos-formas de aprendizaje, la evidencia indica que William **concibe el aprendizaje como el producto de un proceso deductivo, donde él es quien los transmite**. En consecuencia, para William el aprendizaje se desarrolla mediante la imitación y, por tanto, el estudiante desempeña el papel de receptor de conocimiento y esquemas propuestos por el profesor durante su práctica de enseñanza (Ortega, 2016).

En cuanto al estudiante, éste es concebido por William como un participante indirecto en el diseño didáctico. Esto se debe a que, según las respuestas indicadas por William, el diseño de clase se enfoca en resolver problemas matemáticos que se relacionen con el contexto del estudiante. Por su parte, para William, las acciones del estudiante durante el proceso de enseñanza-aprendizaje deben estar enfocadas en apuntar todo lo que se imparte durante la clase, pues el estudiante debe reproducir los procedimientos a problemas similares.

De esta manera, en la Figura 16, presentamos un balance respecto a las concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje que se hallaron al analizar las sesiones de clase y las entrevistas aplicadas a William:

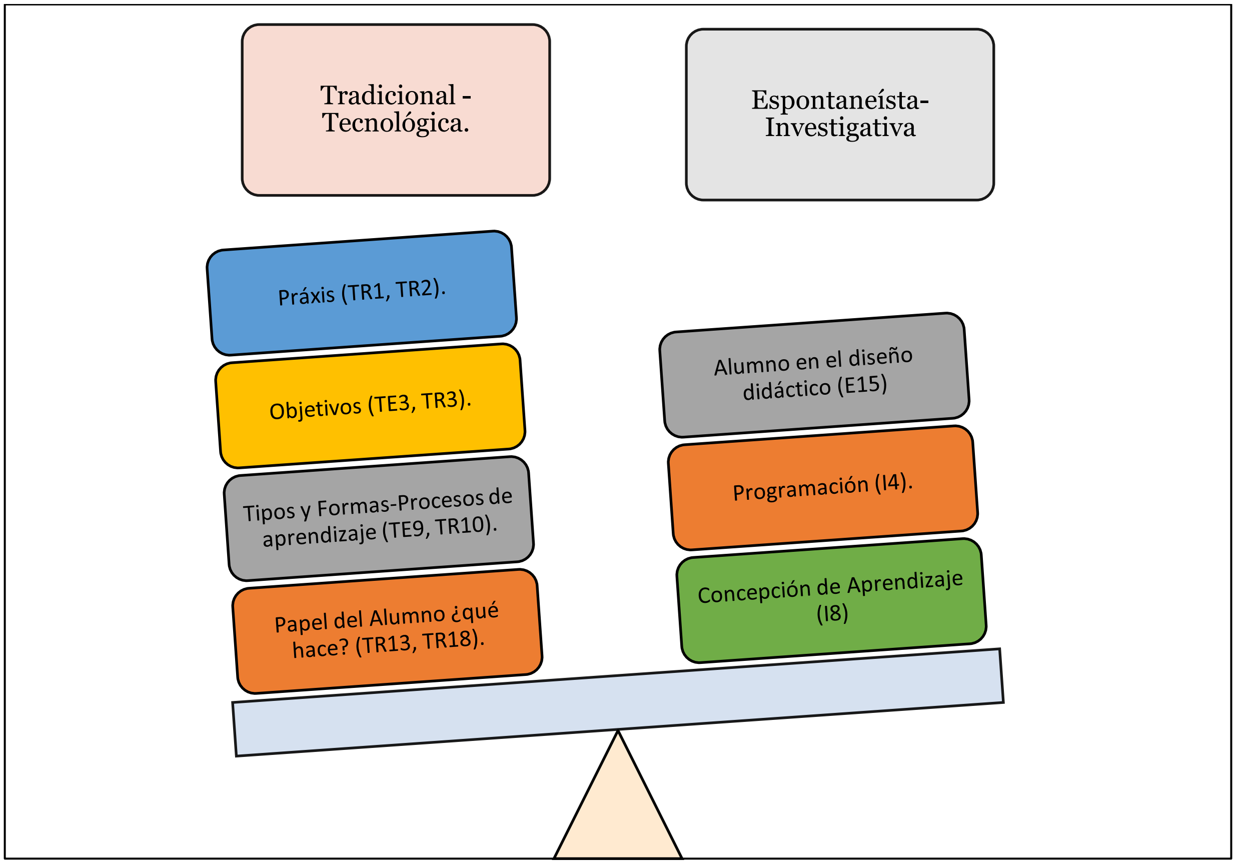


Figura 16. Concepciones de William sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.

5.5 Resultados del cuestionario aplicado a los estudiantes de William.

En la Tabla 17 se presentan las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas de los estudiantes participantes en la aplicación del cuestionario de conocimiento matemático acerca de la función racional. Posteriormente, analizamos las respuestas más significativas a las tareas entregadas por los estudiantes.

Tabla 17

Cualificación de las respuestas de los estudiantes de William.

Estudiante	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6
E1	Concepciones de los estudiantes acerca de qué es una función racional, qué es una asíntota y cuáles son las características que tienen estas funciones.	C	C	C	C	I
E2		C	C	C	C	I
E3		C	C	C	C	I
E4		PC	I	PC	PC	I
E5		C	C	C	C	I
E6		C	C	C	C	I
E7		I	I	PC	PC	C

Fuente: Elaboración propia.

5.5.1 Tarea 1.

Los estudiantes de William, en su mayoría, manifiestan concebir una función racional como el cociente entre polinomios. Sin embargo, encontramos que algunos estudiantes no hacen explícita esta condición y, además, afirman que el polinomio del denominador es de, al menos, grado 1.

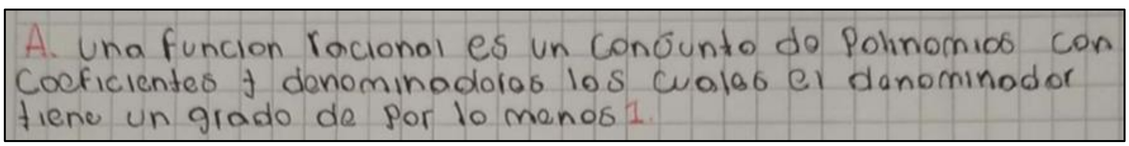


Figura 17. Respuesta de E2 a T1.

En cuanto a esta evidencia (Figura 17), podemos afirmar que E2 ***concibe una función racional como un cociente entre polinomios***, sin embargo no lo hace explícito. Asimismo, constatamos que, para E2, no es claro que *el denominador de una función racional puede ser de grado* 0 *y, por tanto, cualquier función polinómica es, a su vez, racional*. Respecto a la concepción que se forman los estudiantes sobre qué es una asíntota, encontramos que, en su mayoría, estos conciben la asíntota como ***"una recta prolongada cerca de la gráfica de una función pero que nunca la toca"***.

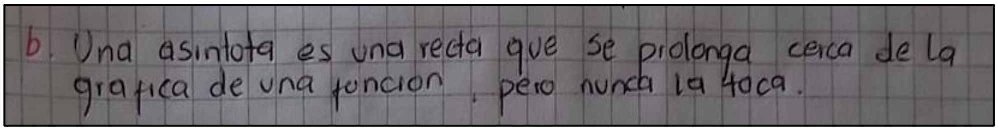


Figura 18. Respuesta de E1 a P2 de la Tarea 1.

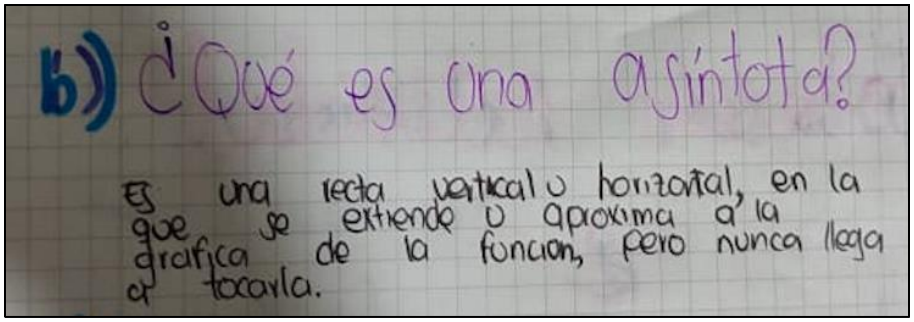


Figura 19. Respuesta de E5 a P2 de la tarea 1.

Por su parte, al indagar sobre las características de la función racional que reconocían los estudiantes, evidenciamos que reconocen algunas propiedades de este objeto matemático. Por ejemplo, ***los estudiantes identificaron que el dominio de una función racional son todos los reales menos los valores que indefinen la función***. En ese sentido, estudiantes como E1, afirman que ***la función es continua en todo su dominio***.

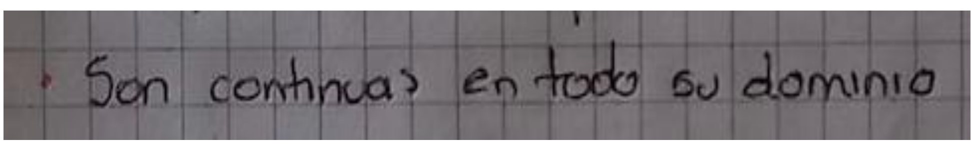


Figura 20. Respuesta de E1 a P1 de la Tarea 1.

En cuanto al rango de la función racional, ***los estudiantes afirman que éste contiene a todos los números reales, exceptuando los valores en que existen asíntotas horizontales.*** En ese sentido, en esta evidencia Figura 21, se evidencia conocimiento de las propiedades de la función racional. Veamos las Figuras 21 y 22, que corresponden a evidencias de los estudiantes E2 y E3, respectivamente.

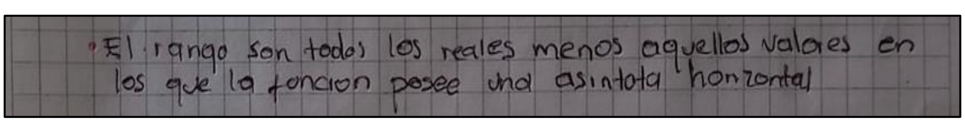
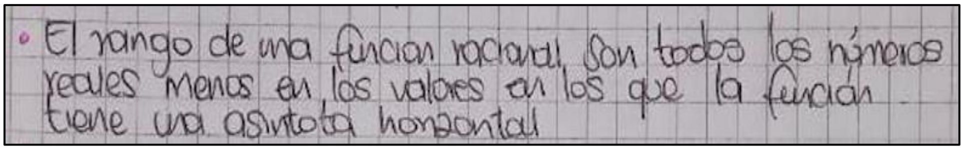


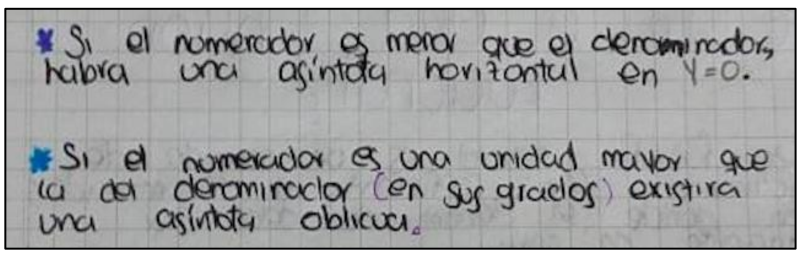
Figura 21. Respuesta de E2 a P3 de la Tarea 1.



• El rango de una funcion racional son todos los números reales menos en los valores en los que la función tiene una asintota horizontal

Figura 22. Respuesta de E3 a P3 de la Tarea 1.

Otra evidencia (Figura 22) acerca del conocimiento que poseen los estudiantes sobre de las propiedades que tiene la función racional refiere a la existencia de asíntotas horizontales y oblicuas. En ese sentido, ***los estudiantes manifiestan que: "si el numerador es menor que el denominador, habrá una asíntota horizontal en*** $y = 0$***" y que "si el numerador es una unidad mayor que la del denominador (en sus grados) existirá una asíntota oblicua".***

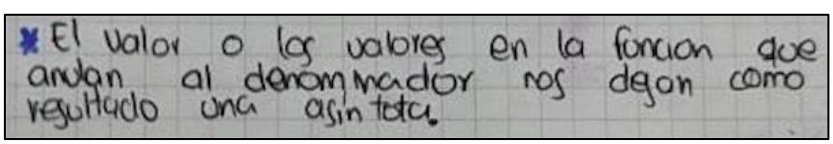


* Si el numerador es menor que el denominador, habra una asíntota horizontal en Y=0.

* Si el numerador es una unidad mayor que la del denominador (en sus grados) existira una asíntota oblicua.

Figura 23. Respuesta de E5 a P3 de la Tarea 1.

No obstante, en cuanto al conocimiento de la práctica matemática que poseen los estudiantes, encontramos que algunos ***estudiantes no identifican las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de las asíntotas verticales de una función***. Por ejemplo, E5 afirma que en todos los valores que una función racional se indefine, existen asíntotas verticales.



* El valor o los valores en la funcion que anulan al denominador nos dan como resultado una asintota

Figura 24. Respuesta de E5 a P3 de la Tarea 1.

5.5.2 Tarea 2.

El objetivo de la tarea 2 fue la de identificar el conocimiento matemático que poseen los estudiantes para definir una función racional considerando características específicas de éstas. En ese sentido, la finalidad fue determinar las habilidades que manifiestan los estudiantes para caracterizar, a partir de condiciones específicas, una función racional.

En las respuestas a esta tarea evidenciamos (Figura 25) que, en su mayoría, ***los estudiantes poseen conocimientos matemáticos para definir, a partir de determinadas condiciones, una función racional***. Sin embargo, también *encontramos que estudiantes como E4 y E7 manifiestan* (Figura 26) ***dificultades para definir una función con las condiciones solicitadas***:

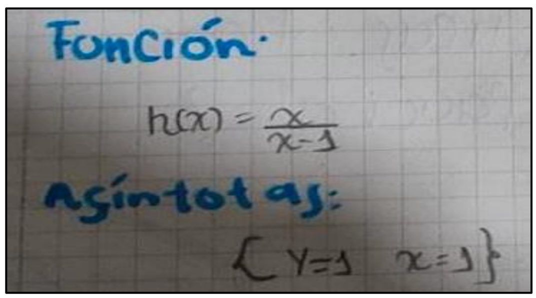


Figura 25. Respuesta de E6 a la Tarea 2.

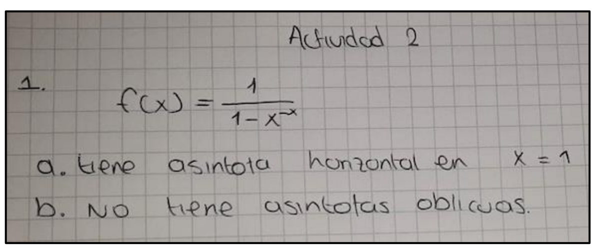


Figura 26. Respuesta de E4 a la Tarea 2.

5.5.3 Tarea 3

La finalidad de esta tarea fue identificar el conocimiento matemático que poseen los estudiantes para determinar el dominio de una función racional. En ese sentido, se propuso a los estudiantes determinar el dominio de la función que anteriormente definieron como:

$f(x) = \frac{x}{x-1}$, de la cual el dominio es: $Dom_{f(x)} = \mathbb{R} - \{1\}$. A continuación, presentamos las evidencias de las respuestas:

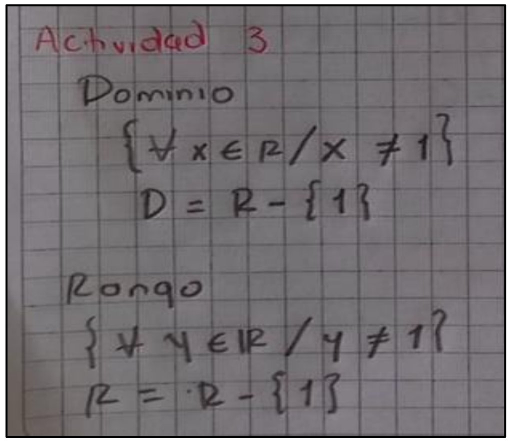


Figura 27. Respuesta de E1 a la Tarea 3.

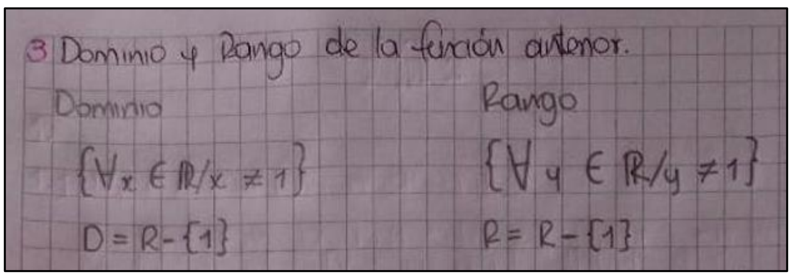


Figura 28. Respuesta de E3 a la Tarea 3.

Estas evidencias (Figura 27 y Figura 28) no nos permiten afirmar que los estudiantes poseen conocimiento matemático acerca de los procedimientos, o algoritmos, que pueden emplearse para determinar el dominio de una función racional. No obstante, las respuestas dan evidencia de que sí pudieron hallar el dominio de dicha función. Por ende, afirmamos que ***encontramos indicios del conocimiento que poseen los estudiantes para determinar el dominio de una función racional***.

5.5.4 Tarea 4

Nuestro objetivo con esta tarea fue identificar el conocimiento matemático que poseen los estudiantes para encontrar las asíntotas verticales y horizontales de una función racional, además de sus intersecciones con los ejes x y y. En orden de ideas, propusimos la función $r(x) = \frac{2-x}{x-1}$ y obtuvimos las siguientes evidencias:

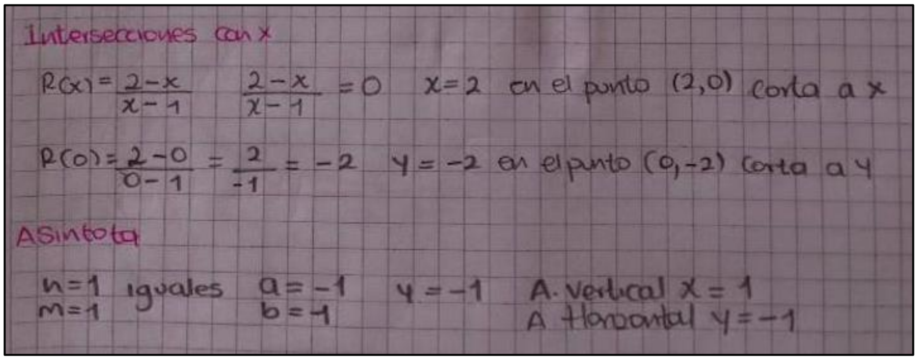


Figura 29. Respuesta de E3 a P1 y P2 de la Tarea 4

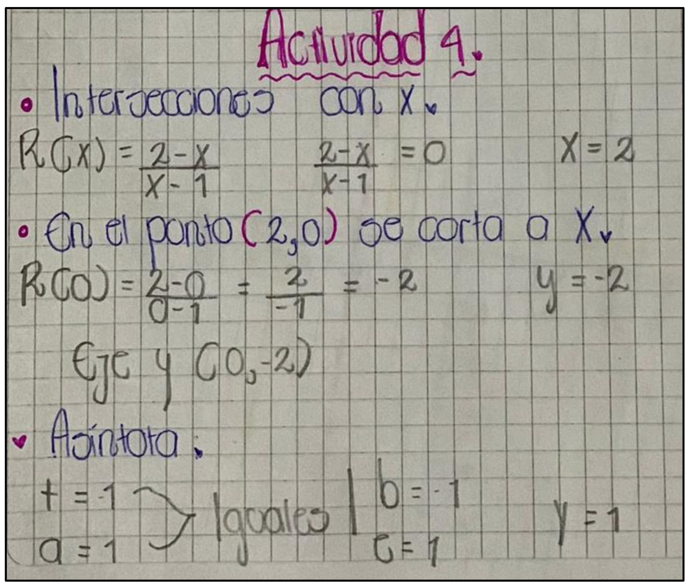


Figura 30. Respuesta de E6 a P1 y P2 de la Tarea 4.

En las respuestas de los estudiantes ***identificamos indicios de conocimiento matemático para encontrar intersecciones entre los ejes, y asíntotas verticales y horizontales.*** Asimismo, **encontramos conocimiento para identificar puntos de corte y asíntotas en la gráfica de una función racional**. A continuación, presentamos la evidencia:

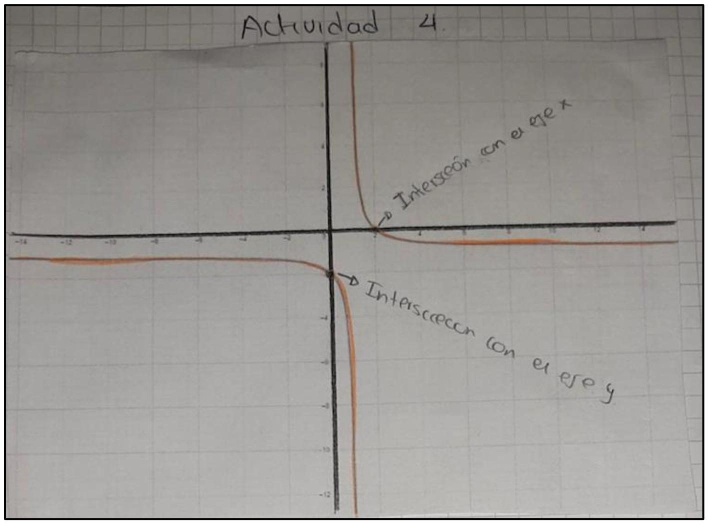


Figura 31. Respuesta de E4 a P3 de la Tarea 4.

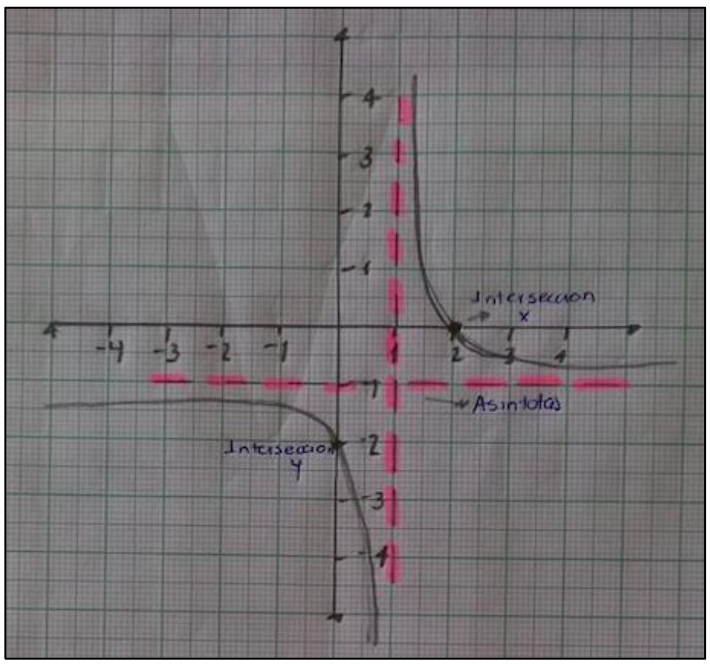


Figura 32. Respuesta de E2 a P3 de la Tarea 4.

5.5.5 Tarea 5

El objetivo de esta tarea fue identificar el conocimiento matemático que poseen los estudiantes para graficar, en un plano cartesiano, una función racional. En ese sentido, se les solicitó a los estudiantes tabular algunos puntos de la función, encontrar las asíntotas verticales, horizontales y determinar los puntos de corte con los ejes x y y. Respecto a esto,

encontramos que los estudiantes poseen conocimientos matemáticos para graficar una función racional y su estrategia para construir esta representación es similar a la empleada por William durante la clase:

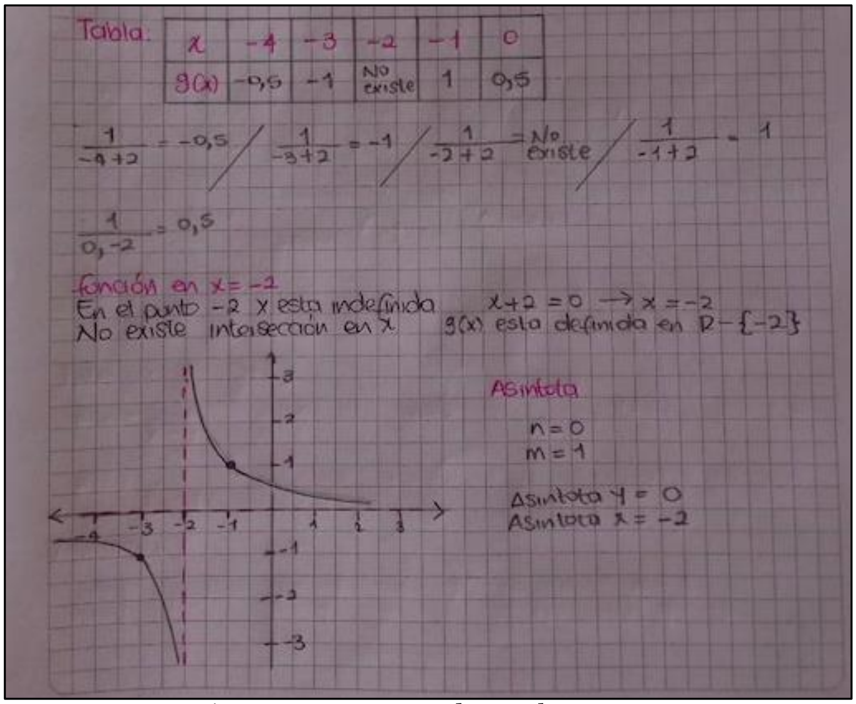


Figura 33. Respuesta de E1 a la Tarea 5.

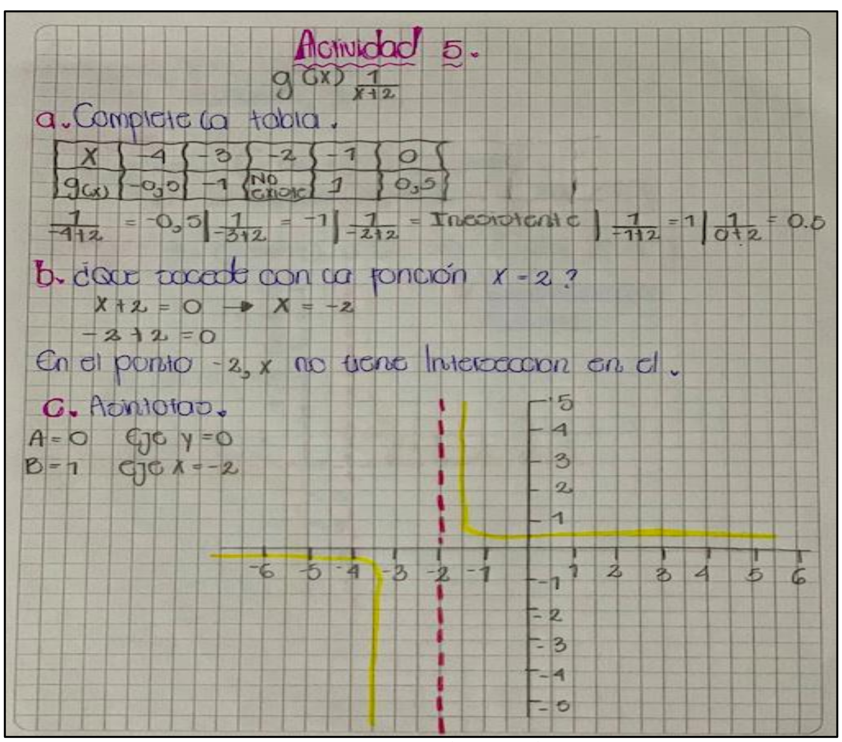


Figura 34. Respuesta de E6 a la Tarea 5.

5.5.6 Tarea 6

Nuestra finalidad con esta actividad fue identificar el conocimiento matemático que tiene el estudiante para resolver una situación problema modelada mediante una función racional. En ese sentido, las evidencias nos brindan ***indicios de que los estudiantes pueden emplear su conocimiento matemático para resolver situaciones problemas que estén modeladas mediante funciones racionales***. Véase la evidencia en las Figuras 35 y 36.

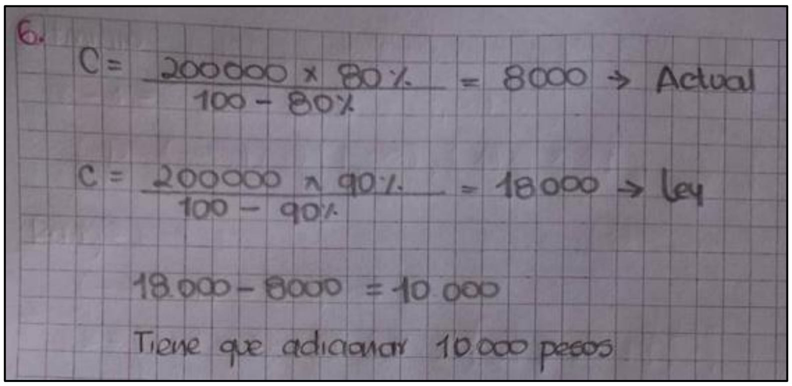


Figura 35. Respuestas de E3 a la Tarea 6.

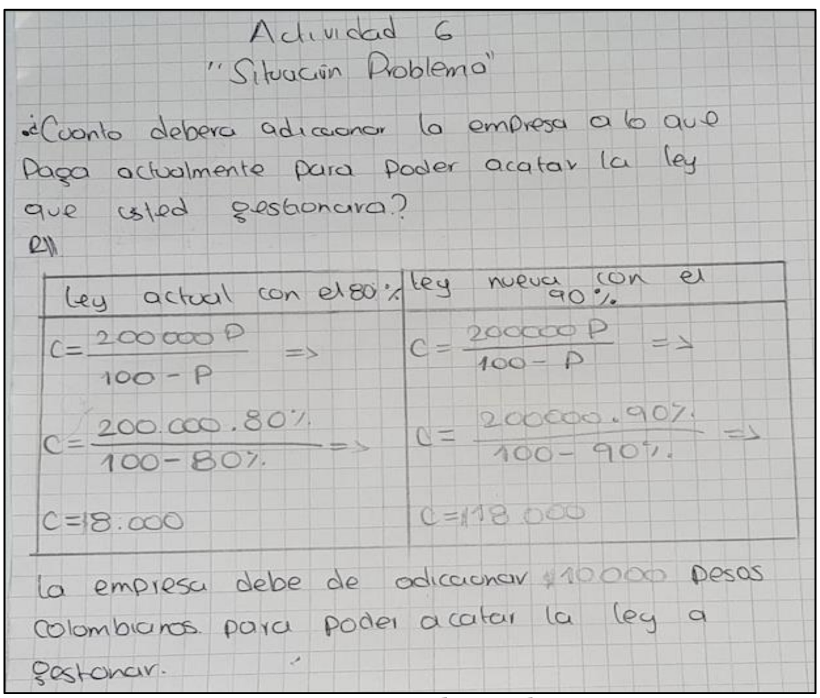


Figura 36. Respuestas de E4 a la Tarea 6.

A partir de los análisis realizados a las tareas en los apartados anteriores, presentamos, a modo de síntesis, los resultados que se obtuvieron de la aplicación de los cuestionarios de conocimiento matemático sobre las funciones racionales a los estudiantes:

<table>
<tr><th colspan="2">Indicadores de Conocimiento Evidenciado por los Estudiantes.</th></tr>
<tr><td>Conocimientos Evidenciados</td><td>Conocimiento en cuanto al contenido matemático:
• El estudiantes sabe que una definición de función racional es el cociente entre dos polinomios.
• El estudiante sabe que el dominio de una función racional son todos los reales menos los números que indefinen la función racional.
o El estudiante sabe que una función racional es continua en todo su dominio.
• El estudiante sabe que el rango de una función racional son todos los reales, exceptuando los valores en que existen asíntotas horizontales.
• El estudiante conoce los criterios que le permiten encontrar asíntotas horizontales de una función racional.
• El estudiante sabe los criterios que le permiten determinar la existencia de una asíntota oblicua.
• El estudiante sabe cómo definir una función racional a partir de condiciones particulares.
Conocimiento en cuanto a la práctica de hacer matemática:
• El estudiante conoce una estrategia para representar una función racional en el plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td>Indicios de Conocimientos Evidenciados</td><td>Conocimiento en cuanto al contenido matemático:
• El estudiante conoce que un procedimiento para determinar el dominio de una función racional es encontrando los ceros del polinomio del denominador.
• El estudiante sabe un procedimiento para determinar las intersecciones de la función racional con los ejes coordenados.</td></tr>
</table>

	• *El estudiante **conoce** procedimientos para determinar las asíntotas verticales y horizontales de una función racional.* • *El estudiante **sabe** cómo evaluar la función racional para resolver situaciones problema.*
Concepción evidenciada	• *Los estudiantes **conciben** que una asíntota es una recta que se prolonga cerca de una curva pero no la toca.*

CAPÍTULO VI

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 6: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.

La observación y el análisis de la información recabada mediante las entrevistas semiestructuradas, y las sesiones de clase, nos permitió identificar, y caracterizar bajo el instrumento CEAM, algunas concepciones sobre la enseñaza-aprendizaje de las matemáticas que William manifiesta al impartir función racional. Asimismo, la información obtenida de los cuestionarios, nos facilitó reconocer algunos indicadores del conocimiento especializado que posee William acerca este objeto matemático. Esta información nos permitió acercarnos hacia una caracterización del impacto que tuvo la práctica del profesor en el logro matemático de sus estudiantes.

A continuación, se exponen los resultados de la investigación, los cuales están divididos en dos secciones: (1) La relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional. (2) El impacto que tuvo esta relación en el logro matemático de sus estudiantes.

6.1 Relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.

William, durante su práctica de enseñanza, manifestó conocimientos matemáticos acerca de la definición de función racional **(KoT1)**, sus representaciones **(KoT2)** y procedimientos para encontrar sus asíntotas **(KoT4)** e interceptos con el eje coordenado. William asoció este conocimiento con su conocimiento didáctico del contenido, y esto le permitió anteceder, posiblemente, a dificultades en el aprendizaje de sus estudiantes **(KFLM1)** y proponer diversos ejemplos **(KMT1)**, para resaltar características y propiedades de la función racional. Creemos que durante su práctica de enseñaza, la concepción evidenciada por William fue tradicional **(TR2)**, pues consistió en presentar el contenido a sus estudiantes de forma magistral y con poca participación de sus estudiantes.

En concordancia con lo anterior, el rol del William consistió en organizar y transmitir el contenido a sus estudiantes mediante estrategias expositivas **(TE20-TE23)**. Por su parte, el papel de los estudiantes fue el de apuntar, constantemente, lo que el profesor explicaba y escribía en su pizarra **(E20)**. Por ende, el rol de los alumnos siguió una tendencia tradicional.

Otro resultado importante, refiere a las relaciones establecidas entre subdominios del conocimiento especializado y las concepciones evidenciadas por William durante su práctica. Por ejemplo, William conoce las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de asíntotas verticales en una función racional **(KPM1)**, este conocimiento se manifestó a través de un ejemplo desarrollado en clase **(KMT1)**, donde la función racional tenía factores comúnes. La relación entre subdominios es entre el conocimiento matemático **(MK-KPM)** y el conocimiento didáctico del contenido **(PCK-KMT)**. Esta relación estuvo matizada por la concepción de William sobre la enseñanza y el aprendizaje de la función racional, pues para él enseñar consiste en exponer el contendio de forma magistral **(TR2)** y aprender se gesta a través de proceso deductivo **(TE9)**.

Otro caso similar, es referente a la gráfica de funciones racionales en el plano cartesiano. Esto se debe a que, William conoce una estrategia para graficar funciones racionales **(KPM2)** y lo manifestó al dictar a sus estudiantes un paso a paso para realizar una gráfica. No obstante, William propuso a sus estudiantes construir la gráfica a través de la herramienta Geogebra **(KMT2)**. Por ende, concebimos que se establece relación entre el conocimiento de la práctica matemática y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas asociadas al contenido de función racional.

Por otra parte, encontramos indicios del conocimiento de la estructura matemática de William y el conocimiento de los estándares de aprendizaje. En ese orden de ideas, William afirmó a sus estudiantes que las asíntotas horizontales de una función racional se pueden calcular a través del concepto de límite **(KSM1)**, añadiendo que este es un resultado de aprendizaje esperado de próximos cursos **(KMLS1)**. Todos los ejemplos nombrados anteriormente, estuvieron matizados por las concepciones de William sobre qué y cómo se debe enseñar y aprender matemáticas y, particularmente, función racional.

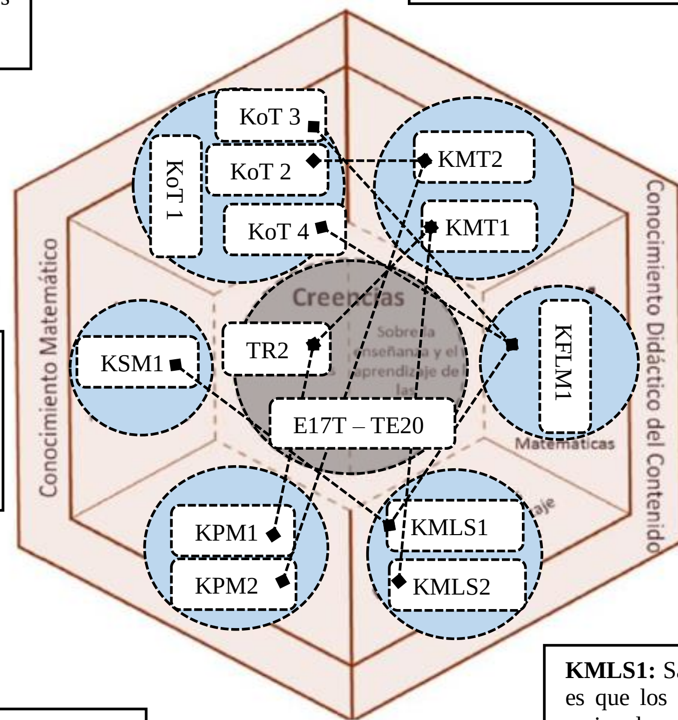
A continuación, en la Figura 37, exponemos las relaciones entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional:

KoT1: Sabe que una función racional se puede definir como el cociente entre dos polinomios.
KoT2: Conoce que una función racional se puede representar a través del registro gráfico y verbal.
KoT3: Sabe una definición de dominio y rango de una función racional.
KoT4: Sabe que un algoritmo para determinar el dominio de una función racional es igualando el polinomio del denominador a cero, factorizarlo y encontrar sus ceros.

KMT1: Sabe que un ejemplo potente para determinar la existencia de asíntotas en una función racional es cuando ésta tiene polinomios p(x) y q(x) con factores comunes.
KMT2: Sabe que Geogebra es un recurso de enseñanza potente para modelar funciones racionales y exponer el carácter dinámico de la función y sus elementos.

KSM1: Sabe que una posible conexión entre la función racional y el concepto de límite es a través del cálculo de sus asíntotas horizontales.

KPM1: Conoce las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de asíntotas verticales de una función racional.
KPM2: Sabe que una estrategia para graficar funciones racionales es: primero, hallar los interceptos con los ejes x y y; segundo, determinar las asíntotas; tercero, mediante tabulación, graficar en el plano cartesiano.



KFlM1: Sabe que una posible dificultad de sus estudiantes para encontrar el dominio de una función racional es determinar los ceros del polinomio del denominador.

KMLS1: Sabe que un resultado esperado de próximos cursos es que los estudiantes calculen las asíntotas de una función racional empleando límites.
KMLS2: Sabe la ubicación curricular y la secuenciación de los temas asociados al contenido de función racional.

Concepciones

Metodología de Enseñanza:

- TR2: La enseñanza consiste en presentar el contenido a los estudiantes en su fase final, apoyado en estrategias expositivas.

Objetivos:

- TE3: Al carácter terminal de los objetivos se le añade el carácter funcional.

Programación del contenido:

- I4: La programación establecida es susceptible de cambios según lo disponga el docente.

Concepción de aprendizaje:

- TE9, TE10: Se desarrolla a partir de un proceso inductivo, pero el proceso inductivo tiene mayor importancia. -El alumno se hace de los conocimientos por el simple hecho de que los presenta el profesor-.

Papel del estudiante:

- E17: Prevalece apuntar, constantemente, lo que escribe el profesor en la pizarra para aprender.

Papel del profesor:

- TE20-23: Importa la organización y trasmisión del contenido didáctico mediante la exposición.

Figura 37. *Relación entre el Conocimiento Especializado y las Concepciones de William sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.*

6.2 Impacto de la relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.

El impacto de esta relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional se analiza bajo dos criterios: primero, ***el impacto en la práctica de enseñanza*** (e.g., Ernest, 1989; Benítez, 2013; Ortega, 2016; Navarrete et al., 2018; Dávalos et al., 2018); segundo, ***el impacto en el logro matemático de los estudiantes*** (e.g., Wilkins, 2008; Campbell et al., 2014).

Respecto a la práctica de enseñanza, encontramos que la concepción de William sobre la enseñanza de las matemáticas no es congruente con la metodología de enseñanza empleada para impartir función racional. Los resultados nos indican que la concepción dominante, que permea el quehacer docente de William, tiende a ser *tradicional*. Por ende, afirmamos que existe poca coherencia entre lo que William concibe por enseñar y sus acciones en el aula de clase.

Resultados similares encontramos en cuanto a la concepción de aprendizaje que William afirmó poseer en la entrevista y la que manifestó durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función racional. En ese orden de ideas, la concepción manifestada por el profesor durante la entrevista tiende a ser *investigativa*, pues para él los estudiantes deben participar activamente durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. No obstante, en las sesiones de clase se priorizaron aspectos como los apuntes del estudiante y la repetición de ejercicios, donde los estudiantes imitan los procesos empleados por el profesor para resolver un problema. Por ende, la concepción dominante respecto al aprendizaje de los estudiantes tiende a ser tradicional.

En consecuencia, el impacto que tiene esta ***relación*** sobre la práctica de enseñanza nos indica que, aunque el profesor posee conocimientos matemáticos sólidos sobre el contenido de función racional, sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje hacen que sus actuaciones en el aula de clases sean de corte ***tradicional*** y, a lo sumo, **tecnológica.** Por consiguiente, la concepción dominante, posiblemente inconsciente en el profesor, es la que determina cómo se organiza y desarrolla la práctica de enseñanza.

En cuanto al logro matemático de los estudiantes, los resultados indican que, en su mayoría, los alumnos participantes alcanzaron un aprendizaje procedimental significativo respecto al contenido de función racional. Es decir, los alumnos aprendieron sobre los procedimientos que les permiten encontrar determinados elementos de la función racional, como el dominio y las asíntotas verticales. En consecuencia, el logro matemático alcanzado por los estudiantes corresponde, en gran medida, con el conocimiento manifestado por William sobre el **KoT** asociado al contenido de función racional.

El **impacto** de esta **relación**, respecto al aprendizaje de los estudiantes, consistió en desarrollar el proceso de aprendizaje como una imitación a lo escrito por William en la pizarra durante las sesiones de clase. En ese sentido, esta relación asumió la repetición de ejercicios, como sinónimo de aprendizaje. Por ende, la reflexión de los estudiantes en cuanto al concepto y las características propias de este objeto matemático estuvieron en segundo plano, pues la concepción dominante sobre el aprendizaje al impartir fue **tradicional**. A continuación, en la Figura 38, se presenta el impacto de esta relación en el logro matemático de los estudiantes:

Concepciones

Metodología de Enseñanza:

- TR2: La enseñanza consiste en presentar el contenido a los estudiantes en su fase final, apoyado en estrategias expositivas.

Objetivos:

- TE3: Al carácter terminal de los objetivos se le añade el carácter funcional.

Programación del contenido:

- I4: La programación establecida es susceptible de cambios según lo disponga el docente.

Concepción de aprendizaje:

- TE9, TE10: Se desarrolla a partir de un proceso inductivo, pero el proceso inductivo tiene mayor importancia. -El alumno se hace de los conocimientos por el simple hecho de que los presenta el profesor-.

Papel del estudiante:

- E17: Prevalece apuntar, constantemente, lo que escribe el profesor en la pizarra para aprender.

Papel del profesor:

- TE20-23: Importa la organización y trasmisión del contenido didáctico mediante la exposición.

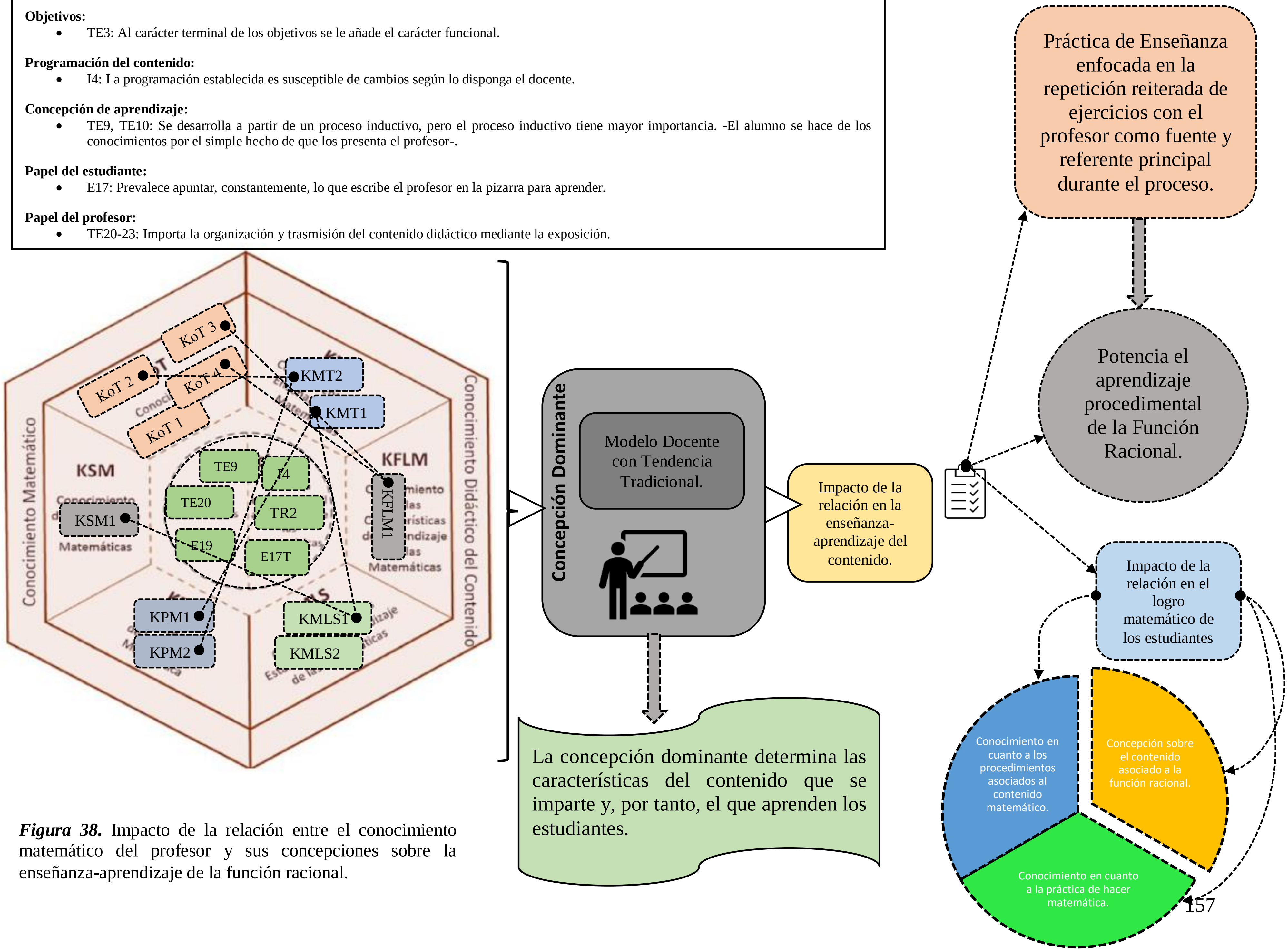


Figura 38. Impacto de la relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES Y

REFLEXIONES FINALES

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES.

En este capítulo se exponen las conclusiones del trabajo de investigación. Estas se estructuran en el siguiente orden: primero, las inferencias en cuanto al alcance de los objetivos específicos de la investigación; segundo, en cuanto a la congruencia entre las concepciones del docente y su práctica de enseñanza; tercero, las limitaciones y aportes de la investigación; cuarto, reflexiones finales.

7.1 Respecto a los objetivos de investigación.

- **Identificar el Conocimiento Matemático (MTSK) del profesor sobre la función racional.**

Respecto al conocimiento matemático que manifestó el docente sobre la función racional, identificamos que éste consideró el Conocimiento de los Temas (KoT) como un elemento importante de su quehacer profesional, pues fue el subdominio del cual encontramos mayor evidencia. En ese sentido, los resultados nos permiten afirmar que, para el docente, este subdominio de conocimiento determina los objetivos a alcanzar en su práctica de enseñanza y, por tanto, guían la estructura y el diseño de sus clases.

Por otra parte, durante las sesiones de clase, el profesor manifestó conocer *definiciones*, procedimientos, *registros de representación* y *propiedades* inherentes a la función racional. En ese sentido, expuso a sus estudiantes -mediante ejemplos- cómo y en qué condiciones es posible y necesario emplear determinados *procedimientos* y *propiedades*. Por ende, podemos concluir que el docente posee un KoT sólido y amplio respecto al contenido de función racional.

No obstante, la evidencia que encontramos respecto al KPM y KSM que posee el profesor sobre la función racional es menor, en comparación, con el KoT identificado. En ese sentido, durante la práctica de enseñanza el profesor manifestó, en menor cantidad, conocimientos asociados a la práctica y estructura matemática, abordando únicamente las *condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de asíntotas verticales*, y una *conexión auxiliar* de la función racional.

Por su parte, las respuestas del docente en el cuestionario nos permitieron identificar mayor riqueza en el conocimiento matemático que éste posee sobre el contenido a impartir. En ese orden de ideas, podemos afirmar que el conocimiento que posee el profesor dista, en gran medida, del puesto en acción durante la enseñanza de función racional en el nivel de bachillerato y, posiblemente, esto afectó la calidad del logro matemático (Campbell et al., 2014) alcanzado por sus estudiantes.

- **Analizar las concepciones (CEAM) del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.**

Las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional permitieron comprender el porqué de sus actuaciones en el aula de clases. En ese sentido, verificamos que las concepciones del docente matizan su práctica de enseñanza (Barrón, 2015). No obstante, en el profesor identificamos dos tipos de concepciones que podemos clasificar, según Gascón (2001), como ingenua y dominante.

En ese orden de ideas, la concepción que afirma poseer el docente sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional tiende a ser tecnológica y espontaneísta (CEAM). Sin embargo, al analizar la práctica de enseñanza del profesor, pudimos constatar que esta concepción es ingenua, pues la concepción que rige y matiza las actuaciones del docente en el aula tiende a ser tradicional. Por tal motivo, la concepción dominante inclinó la metodología de enseñanza *(praxis, fuentes de información y programación de la clase)* a una práctica de enseñanza rutinaria, en la que el profesor tiene el rol principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referente a la concepción de aprendizaje, los resultados nos permiten afirmar que, para el profesor, el aprendizaje se gesta mediante la asimilación del contenido y la imitación de los procedimientos expuestos por el docente durante el desarrollo de las sesiones de clase. En ese sentido, la relación en el aula de clases es unidireccional, pues el docente enseña a sus estudiantes el contenido matemático a impartir mediante sus estrategias magistrales y expositivas.

- **Caracterizar la relación entre los conocimientos matemáticos del profesor y la selección de metodologías para la enseñanza de la función racional.**

La relación entre el conocimiento matemático del docente y la selección de metodologías para la enseñanza de la función racional se gestó a través de sus concepciones respecto a cómo se debe impartir y aprender matemáticas. En ese sentido, las concepciones del profesor desempeñaron el papel de organizadores implícitos (Moreno y Azcarate, 2003), pues determinaron el modelo docente (Gascón, 2001) a seguir durante el proceso de enseñanza-aprendizaje y, por tanto, la metodología para enseñar.

Por otra parte, las relaciones entre los subdominios de conocimiento que identificamos se vinculan con las concepciones del docente sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional. En ese orden de ideas, los resultados nos permitieron corroborar que el conocimiento y las concepciones del profesor interactúan (Vasco, 2015) durante el quehacer docente, y nos permiten comprender, con mayor profundidad, el porqué de sus acciones en el aula de clases (Aguilar-González, 2016).

En relación con la selección de metodologías para la enseñanza de las matemáticas, Barrantes y Mora (2008) mencionan que cualquier estrategia a utilizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas estará sustentada en las concepciones epistemológicas e instruccionales que posee el profesor sobre el contenido a impartir. En ese sentido, con base en los hallazgos de esta investigación, nosotros inferimos que la metodología de enseñanza que empleó el profesor responde a su concepción dominante, pues influyó en *la praxis, los objetivos y la programación del contenido* durante la clase, además influyó en las características del contenido aprendido por sus estudiantes.

Asimismo, es importante resaltar que, en la selección de metodologías para la enseñanza de las matemáticas por parte del profesor, no influyen únicamente su conocimiento especializado y concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje. También influyen entes como la institución en que labora, el proyecto educativo y el currículo de matemáticas local (Barrón, 2015). Por ende, las prácticas del docente en el aula no pueden observarse como elementos aislados, sino, como el conjunto de decisiones que son influidas por diferentes factores institucionales y personales.

- **Examinar el impacto que tiene la relación entre los conocimientos matemáticos y las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.**

El impacto de esta relación en la enseñanza-aprendizaje de la función racional se determinó por el logro matemático (Campbell et al., 2014) alcanzado por los estudiantes en el cuestionario de conocimientos matemáticos. En ese sentido, los hallazgos de esta investigación nos permiten inferir que el aprendizaje alcanzado por los estudiantes, a través de la concepción del profesor, fue procedimental.

Respecto a esto, podemos afirmar que la concepción del docente sobre qué y cómo se debe aprender función racional, determinó las características del contenido aprendido por los estudiantes. En ese sentido, los resultados obtenidos evidencian que la práctica de enseñanza *(como un recital magistral del contenido)* y el desarrollo del aprendizaje *(mediante la repetición de ejercicios e imitación del quehacer matemático del profesor en el aula)* deriva en un aprendizaje procedimental del contenido matemático a impartir. En consecuencia, identificar las concepciones del profesor sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas nos permite distinguir su *modelo docente* (Gascón, 2001) y, por tanto, deducir las características del aprendizaje matemático que alcanzarán sus estudiantes.

Por su parte, la relación entre los conocimientos matemáticos (Carrillo et al., 2018) del docente sobre la función racional, y los conocimientos de los estudiantes en cuanto al contenido y la práctica de hacer matemáticas evidenciada, nos permite inferir que los estudiantes no aprenden únicamente las características del contenido impartido por su profesor. Además, éstos también configuran concepciones acerca de qué es y cómo se aprende matemáticas en el nivel de bachillerato. Por tal razón, afirmamos que los estudiantes heredan concepciones (Benítez, 2013) de sus docentes.

7.2 Respecto a la congruencia entre las concepciones (ingenuas y dominantes) y la práctica de enseñanza.

Los resultados obtenidos nos permitieron identificar dos concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función racional que posee y manifiesta el docente durante su práctica de enseñanza. En ese sentido, las concepciones identificadas en las respuestas del profesor durante las entrevistas semi-estructuradas *(ingenuas - en su mayoría tecnológicas y espontaneístas)* distaron de las evidenciadas durante las sesiones de clase *(dominantes - en su mayoría tradicionales).*

En relación con lo anterior, inferimos que esta incongruencia entre las concepciones del docente y sus acciones durante la práctica de enseñanza, puede asociarse con un desarrollo profesional (Sowder, 2007) superfluo que, en consecuencia, no tuvo un cambio efectivo en las concepciones y quehacer profesional del profesor. En concordancia, podemos afirmar que, posiblemente, el docente no es consciente de que las concepciones que permean su práctica de enseñanza tienden a ser tradicionales.

Asimismo, consideramos que la falta de discusión entre los docentes sobre la relación e impacto que tienen las concepciones, y el conocimiento especializado, sobre su quehacer profesional influye en la congruencia de lo concebido y las acciones al impartir. En ese sentido, creemos necesario abrir espacios de discusión que inviten al análisis y la reflexión sobre las concepciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pues contemplamos que una reflexión profunda acerca de este tema, servirá como insumo para la reevaluación y reconfiguración de concepciones.

7.3 Limitaciones de la investigación.

Este trabajo surgió por la motivación de indagar sobre aspectos que, a nuestro parecer, son determinantes en la práctica de enseñanza del profesor. En ese sentido, este interés nos llevó a indagar sobre el conocimiento especializado y las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional en bachillerato. Bajo esta línea, a continuación reflexionamos sobre lo que consideramos como limitaciones en el desarrollo de la investigación.

Consideramos que una limitación en el desarrollo de la investigación refiere a los instrumentos para la recolección de datos. En ese sentido, creemos que las entrevistas semi-estructuradas, debieron abordar, aparte de preguntas enfocadas en la caracterización de las concepciones, conocimientos matemáticos y didácticos del contenido. En consecuencia, las preguntas debieron enfocarse en obtener información sobre subdominios como el KSM, el KPM y el KFLM pues, en comparación con otros, en éstos encontramos menor cantidad de información.

Por otra parte, consideramos que el cuestionario empleado para identificar el conocimiento matemático del profesor sobre el contenido de función racional, debió abordar, a mayor profundidad, el conocimiento de la estructura matemática asociado a la función racional, pues en los resultados solo se obtuvo un indicador de conocimiento de este subdominio. Por ende, creemos conveniente realizar una reflexión profunda acerca del KSM asociado a este objeto matemático y la forma en que podría identificarse empleando un cuestionario de conocimientos matemáticos.

En cuanto a la relación entre el conocimiento especializado y las concepciones de enseñanza-aprendizaje, consideramos que un factor importante para enriquecer la comprensión de esta relación, son las concepciones epistemológicas. En ese sentido, creemos que identificar las concepciones del profesor acerca de la naturaleza de las matemáticas, aportaría más elementos para identificar su modelo docente y comprender el porqué de sus acciones durante su práctica de enseñanza. Por ende, consideramos que indagar sobre las concepciones epistemológicas del profesor, permitirá realizar un análisis más profundo sobre el conocimiento especializado que posee el profesor respecto a un objeto matemático.

7.4 Aportes de la investigación.

El desarrollo de esta investigación permitió identificar relaciones entre *(1) el conocimiento matemático, (2) el conocimiento didáctico del contenido, (3) las concepciones de enseñanza-aprendizaje y (4) las acciones del profesor* al impartir. En ese sentido, un aporte de esta investigación refiere a la comprensión de las relaciones que se gestan entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y sus concepciones en el aula de clases.

Por otra parte, consideramos que nuestra investigación al profundizar sobre el impacto que tiene la relación entre *el conocimiento matemático* y *las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* nos permite comprender, un poco más, las interacciones entre las concepciones y el conocimiento que posee y manifiesta el profesor durante su práctica de enseñanza. Asimismo, creemos que contribuye con la reflexión que se desarrolla en el MTSK sobre la importancia que tienen las creencias que hay sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

Por último, y no menos importante, en esta investigación destacamos la importancia que tuvieron el modelo teórico MTSK y el instrumento CEAM para reconocer los conocimientos especializados del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, respectivamente. En ese sentido, la naturaleza bivalente (teórica y metodológica) del MTSK y la clasificación (mediante tendencias) del CEAM, nos permitieron identificar indicadores de conocimiento en cada subdominio, las relaciones entre éstos y con las concepciones que posee y matiza la práctica de enseñanza del profesor.

7.5 Reflexión.

El desarrollo de este trabajo de investigación me ha generado muchas dudas en cuanto al conocimiento especializado del profesor de matemáticas, las concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, y las prácticas de enseñanza. En ese sentido, considero que este estudio constituye mi primer acercamiento al campo científico y, por ende, contribuye con el desarrollo de la Matemática Educativa.

Un aprendizaje significativo que me ha quedado de realizar esta investigación, refiere a los conocimientos que debe tener un docente de matemáticas para ser considerado como un *profesor profesional*. En ese sentido, considero que el acercamiento al modelo teórico MTSK, contribuyó de manera significativa pues: primero, me permitió alcanzar conocimientos más profundos sobre *el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico del contenido y las creencias* que matizan el quehacer profesional del profesor; segundo, fue una herramienta potente para poder *cambiar mis concepciones* sobre qué significa el *desarrollo profesional del profesor de matemáticas*. Dicho así, ahora me es posible reconocer características del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas y, además, cuento con herramientas para identificar un desarrollo profesional efectivo.

Por su parte, otra enseñanza importante que me queda de realizar esta investigación, refiere a la influencia que tienen las concepciones del profesor sobre el quehacer profesional. Las concepciones, sobre las matemáticas o su enseñanza, determinan las acciones del profesor durante la práctica de enseñanza y el logro matemático que alcanzan los estudiantes. Por esta razón, considero necesario hacer un llamado a la comunidad educativa pues, aunque se han desarrollado múltiples estudios sobre las concepciones del profesor en diferentes ámbitos y contextos socioculturales, es necesario hacer modificaciones en los planes de estudio de las licenciaturas, de forma que se brinde un acompañamiento más fuerte en la configuración de concepciones respecto a la epistemología y enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, creo importante resaltar que este proceso de formación como Maestro en Matemática Educativa, contribuyó tanto en mi desarrollo profesional, como personal. Las bases teóricas y prácticas aprendidas durante estos dos años, aportaron elementos que me harán mejor profesor y, sobre todo, mejor persona. Por otra parte, me veo en la obligación de proseguir con mis estudios, y formarme como Doctor en Matemática Educativa, pues aún tengo cuestionamientos, dudas y planteamientos que espero solucionar a lo largo de un desarrollo profesional contínuo.

BIBLIOGRAFÍA

Aguilar-González, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas*: un estudio de casos. [Tesis Doctoral, Universidad Huelva]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. https://bit.ly/3byg6x2

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, *33*, 60.

Amaya, T., Pino-Fan, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 28(3), 111-144. https://bit.ly/3bEc0Dq

Ball, D. Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Ballester, L. (2001). *Bases metodológicas de la investigación cualitativa*. Palma: Servei de Publicacions.

Barnett, R. A., Ziegler, M. R., & Byleen, K. (2000). *Precálculo: funciones y gráficas*.

Barrantes, H., & Mora, F. (2008). ¿Qué es la matemática? Creencias y Concepciones en la Enseñanza Costarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 71-81.

Barrón, C. (2015). Concepciones epistemológicas y práctica docente. Una revisión. *Revista de docencia Universitaria. REDU.* 35-56.

Benítez, W. (2011). *Concepciones acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: un estudio comparativo entre docentes en ejercicio y docentes en formación*. [Tesis de Maestría, Universidad del Cauca]. Repositorio Institucional de la Universidad del Cauca.

Benítez, W. (2013). Concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje de docentes en formación. *Revista Científica*, 2, 176–180. https://doi.org/10.14483/23448350.6009

Bizquerra, R. (2004). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Brousseau, G. (1986). *Teoría de las situaciones didácticas*. Paris.

Campbell, P. F., & Malkus, N. N. (2011). The impact of elementary mathematics coaches on student achievement. *The Elementary School Journal*, *111*(3), 430-454.

Campbell, P., Nishio, M., Smith, T., Clark, L., Conant, D., Rust, A., DePiper, J., Frank, T. J., Griffin, M. J., & Choi, Y. (2014). The Relationship Between Teachers' Mathematical Content and Pedagogical Knowledge, Teachers' Perceptions, and Student Achievement. *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, 45(4), 419-459. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.4.0419

Cantoral, R., Caballero-Pérez, M. A., & Moreno-Durazo, G. A. (2016). El desarrollo de argumentos visuales. Una experiencia de intervención didáctica con docentes de Oaxaca. *Perfiles educativos*, *38*(SPE), 140-154.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva.

Carrillo, J., Escudero, D. I., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores*, *1*, 16-26.

Carrillo, J., & Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación matemática*, *7* (03), 79-92.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2013). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Universidad de Huelva Publicaciones*.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 136-253.

Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar*. En: Estepa, A., Contreras, A., Deulofeu, J., Penalva, M., García, F., Ordóñez, L. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75-94). Jaén: SEIEM.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. [Tesis Doctoral, Universidad de Michigan]. Repositorio Institucional de la Universidad de Michigan. https://bit.ly/2XQI82t.

Contreras, L. C. (2009). Concepciones, creencias y conocimiento: referentes de la práctica profesional. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*: Universidad de Huelva, 1(1).

D' Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matemática,* 87-106.

Dávalos, M. T., Vital, A. T., & Farfán García, M. del C. (2018). Creencias, propósitos y acciones sobre la enseñanza en docentes de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ). *Psicumex*, 8(1), 22–39. https://doi.org/10.36793/psicumex.v8i1.268

Delgado-Robello, R., Espinoza-Vásques, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? *V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.* https://bit.ly/3Cy9EAX

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level*, 275-282.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs, and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of education for teaching*, 15 (1), 13-34. https://bit.ly/2PxTgNn

Escudero, P. (2017). *Identificación de conocimientos didáctico-matemáticos, en la faceta epistémica, del profesor de educación secundaria, sobre funciones lineales y cuadráticas*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontificia Universidad Católica del Perú. https://bit.ly/3bDvEPP

Fernández, R. (2019). *Análisis del proceso de enseñanza de las asíntotas a través de sus gráficas en bachillerato mediante flipped classroom*. [Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid]. Repositorio Institucional de la Universidad de Valladolid.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Flores-Medrano, E., Escudero, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM. https://bit.ly/3s7T84I

Flores, E., & Carrillo, J. (2014). Connecting a Mathematics Teacher's Conceptions and Specialized Knowledge through Her Practice. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. https://eric.ed.gov/?id=ED599801

García, E. (2014). *HASTA EL INFINITO Y MÁS ALLÁ. Concepciones manifestadas por el alumnado de bachillerato respecto al concepto de asíntota horizontal. Estudio exploratorio.* [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada.

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 85-116.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 129-159. https://bit.ly/3bFTElG

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J., Batanero, C. Rivas, H. & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat*, 8(1), 46-74.

Godino, J. D., & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326). Antalya, Turkey: CERME.

Gómez, E., Hernández, H., & Chaucanés, A. (2015). Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media. *Scientia Et Technica*, 20(3), 278-285.

Gonzáles, G., & Grueso, R. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela*. [Tesis de Maestría, Universidad del Valle]. Repositorio Institucional de la Universidad del Valle.

Grueso, R. (2019). El concepto de función como covariación en la escuela secundaria. *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill Education.

Herrera, Y., & Muñoz, V. (2014). *Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática*. [Trabajo de Grado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional de la Universidad de la Universidad Pedagógica Nacional. https://bit.ly/3rHZsjQ

Jiménez, R. (2011). *Matemáticas Iv-Funciones: Enfoque por competencias*. Pearson Educación de México, SA de CV.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones*. Madrid: Alianza Universidad. Original de 1976.

Larson, R. (2018). *Precálculo*. Reverté.

Lerman, S. (1983). Problem solving or knowledge centred: the influence of philosophy on mathematics teaching. *International Journal of Mathematics and Science Technologic*, *14* (1). 59-66.

López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 308-318.

Mapolelo, D., & Akinsola, M. (2015). Preparation of mathematics teachers: lessons from review of literature on teachers' knowledge, beliefs, and teacher education. *International Journal of Educational Studies*, 2(1), 01-12. https://bit.ly/3laIoRh

Martin, M., & Farias, A. (2016). Redescubrir el impacto de las concepciones de aprendizaje en las prácticas áulicas en la Universidad. *Educación*, *Lenguaje y Sociedad*, *13* (13).

Meneses, J., y Rodríguez, D. (2011). *El cuestionario y la entrevista*. Barcelona, España: Editorial UOC.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(5), 584-615.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas.* Lineamientos curriculares. Serie Lineamientos curriculares: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*. Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: MEN.

Moreno, M. M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 265-280.

Navarrete, E., Farfán García , M. del C., & Castillo De la Rosa , E. (2018). El docente de Educación Superior: su práctica analizada desde las creencias del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Psicumex*, 8(1), 54–66. https://doi.org/10.36793/psicumex.v8i1.270

Noreña, R. (2013). *Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional*. [Trabajo de Grado, Universidad del Valle]. Repositorio Institucional de la Universidad del Valle. https://bit.ly/2PO6rty

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Ortega, M. (2016). *Concepciones de las matemáticas y de su enseñanza en profesores de matemáticas del nivel de educación básica secundaria*. [Tesis de maestría, Universidad del Cauca]. Repositorio Institucional de la Universidad del Cauca. https://bit.ly/3cfZYz7

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332. https://bit.ly/3beR7OT

Rodríguez-Flores, A., Picado-Alfaro, M., Espinoza-González, J., & Rojas-González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: Un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *Uniciencia*, 32(1), 89-107.

Rodríguez, G., Gil, J. & García E. (1999). Metodología de la investigación cualitativa. *PROGRAF*.

Romero, C. (2019). Análisis del concepto de función como relación funcional desde APOE. *Revista Electrónica Amiutem*. 7(1), 1-16. https://bit.ly/3vhS15q

Sánchez, A. (1998). El dominio de definición de una función racional y sus asíntotas verticales. *NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas*, *33*, 52-56.

Schmelkes, C. & Elisondo, N. (2010). *Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación* (tesis) (3ra. edición). Oxford University Press.

Scorzo, R., Favieri, A., & Williner B. (2014). Análisis de una actividad sobre funciones racionales realizada con software matemático. *V Jornada de Educación Matemática y II Jornada de Investigación en Educación Matemática*.

SEP. (2006). *Plan y programas de estudio*. Secundaria. México: Secretaria de Educación Pública.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011*. Educación Básica. México. Secretaría de Educación Pública.

Shilov, G. E. (1975). *Análisis matemático en el campo de funciones racionales (Lecciones populares de matemáticas)*. Editorial MIR.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Smith, P. S., & Esch, R. K. (2012). *Identifying and measuring factors related to student learning: The promise and pitfalls of teacher instructional logs*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, British Columbia, Canada.

Sosa, L. (2012). Conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. Contribución teórica al conocimiento del contenido y estudiantes. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1151-1159.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación matemática*, *28*(2), 151-174.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S.L.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S.L.

Spivak, M. (1988). *Cálculo infinitesimal*. Reverté.

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2018). *Precálculo, algebra y trigonometría con geometría analítica*.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, (pp. 105-127).

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario*. [Tesis Doctoral, Universidad Huelva]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. https://bit.ly/2OEV5rr

Vesga-Bravo, G., & De Losada, M. F. D. (2018). Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en ejercicio sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 243-267. https://bit.ly/3qwbR9h

Wilkins, J. L. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(2), 139-164.

Zakaryn, D., & Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación MatEMática*, *33*(1). https://doi.org/10.24844/EM3301.03

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS