

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”



**UNIDAD ACADÉMICA DE
MATEMÁTICAS**



**INTERACCIONES QUE PROMUEVEN LA
CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE
VARIABLE: UNA EXPERIENCIA DE
DESARROLLO PROFESIONAL**

Tesis que para obtener el grado de
**Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el
Nivel Superior**

Presenta:

Angélica Espino Silva

Directoras de tesis:

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

Dra. Darly Alina Kú Euán

Zacatecas, Zac.,

Junio 2022

AGRADEZCO AL CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CONACYT) POR EL APOYO BRINDADO A TRAVÉS DE UNA BECA NACIONAL, LO CUAL POSIBILITÓ LA REALIZACIÓN DE MIS ESTUDIOS DE MAESTRÍA Y LA CULMINACIÓN DE ESTE TRABAJO DE GRADO.
BECARIA NO. 1000023

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "INTERACCIONES QUE PROMUEVEN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE: UNA EXPERIENCIA DE DESARROLLO PROFESIONAL" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Angélica Espino Silva de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa.** Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 06 de junio del 2022

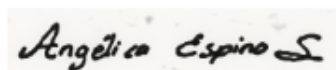

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez
Directora de tesis


Dra. Darty Kú Euán
Directora de tesis

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 06 del mes de junio del año 2022, la que suscribe Angélica Espino Silva egresada del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior con número de matrícula 33146721; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado "Interacciones que promueven la construcción del concepto de variable: una experiencia de desarrollo profesional" bajo la dirección de la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez y la Dra. Darly Alina Kú Euán.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.



Angélica Espino Silva

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme llegar a este momento tan anhelado.

A mis asesoras la Dra. Judith y la Dra. Darly, gracias por sus enseñanzas, su disposición, compromiso, acompañamiento y su entrega en este trabajo.

A mis lectoras, por compartir su experiencia y conocimiento para fortalecer y mejorar este trabajo de grado.

A cada uno de los profesores que formaron parte de esta experiencia de desarrollo profesional, sin su colaboración no se haya logrado.

A la Universidad Autónoma de Zacatecas a través de la Unidad Académica de Matemáticas, por brindarme la oportunidad de vivir este proceso formativo con los mejores docentes.

A mis padres, hermanos y hermanas, gracias infinitas, por su apoyo invaluable, por siempre confiar en mí, por sus ánimos y por tenerme paciencia en mis peores ratos.

A mis amigos y compañeros, por rescatar esa confianza en mí que en momentos había perdido. Por sus palabras de aliento en los momentos difíciles.

A grandes personas que contagiaban su alegría, su compromiso con la vida y consigo mismos, sus ganas de seguir aprendiendo y superarse; que hicieron más llevadero y emotivo este proceso de desarrollo profesional.

A mi yo interior, por no rendirse aún en situaciones poco favorables.

Resumen

El desarrollo profesional de docentes e investigadores es fundamental para la mejora de la educación matemática. Sin embargo, el primero pasa a segundo plano cuando un profesor forma parte de las investigaciones. En consecuencia, se propicia una discordancia entre los resultados que presentan las investigaciones y las posibilidades que el docente tiene de aplicarlos. Dicha discordancia está enmarcada principalmente por la elección de temas de investigación poco relevantes para la práctica docente. Pretendiendo no caer en ello, se justifica la consideración del concepto de variable como el tema matemático sobre el que se propicia la experiencia de desarrollo profesional, dado que cumple con ser cercano y relevante para la práctica docente y de interés desde la investigación. Por tanto, en este trabajo se crea un espacio de desarrollo profesional conformado por profesores de matemáticas de bachillerato, una investigadora en formación y dos investigadoras, donde se promueven interacciones que propician la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable. El objetivo general es describir las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable en esta experiencia de desarrollo profesional. Para ello, se adopta un enfoque sociocultural teniendo como constructos teóricos centrales el *desarrollo profesional*, *las interacciones* y *la construcción social del conocimiento*. La finalidad es establecer un modelo de análisis de las interacciones para explorar la construcción social del conocimiento en torno al concepto de variable. La metodología es de corte cualitativo y de tipo descriptiva, pues se especifican cómo son y se manifiestan las interacciones que promueven conocimiento profesional sobre el concepto de variable en esta experiencia de desarrollo profesional. Entre los resultados, se propició que las interacciones promovieron la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable, teniendo como resultado que los profesores usaran el modelo 3uv para el diseño de tareas matemáticas para potenciar la comprensión de los usos de la variable. Las principales interacciones que se hicieron presentes son las de P-G e I-G (tipo de interacción); las de AI e ICu (nivel de interacción) y lo que corresponde a los apoyos de interacción su presencia fue variada. Sin embargo, las principales interacciones que promovieron la construcción de conocimiento son del tipo P-P e I-P; del nivel AI, ICu, IDi, IyACo, IyADi y lo que corresponde a los apoyos en realidad todos aportan a la construcción de conocimiento.

Palabras clave: *conocimiento profesional, colaboración, profesor de matemáticas, modelo 3uv.*

Abstract

The professional development of teachers and researchers is essential for the improvement of mathematics education. However, the former takes a backseat when a professor is part of the investigations. Consequently, there is a discrepancy between the results presented by the research and the possibilities that the teacher has to apply them. This discrepancy is mainly framed by the choice of research topics that are not very relevant to teaching practice. Pretending not to fall into it, the consideration of the concept of variable as the mathematical subject on which the professional development experience is promoted is justified, since it complies with being close and relevant to teaching practice and of interest from research. Therefore, in this work a professional development space is created made up of high school mathematics teachers, a researcher in training and two researchers, where interactions are promoted that foster the construction of professional knowledge around the concept of variable. The general objective is to describe the interactions that promote the construction of professional knowledge around the concept of variable in this professional development experience. To do this, a sociocultural approach is adopted, with professional development, interactions and the social construction of knowledge as central theoretical constructs. The purpose is to establish an analysis model of interactions to explore the social construction of knowledge around the concept of variable. The methodology is qualitative and descriptive, since the interactions that promote professional knowledge about the concept of variable in this professional development experience are specified and manifested. Among the results, it was suggested that the interactions promoted the construction of professional knowledge around the concept of variable, resulting in teachers using the 3uv model for the design of mathematical tasks to enhance the understanding of the uses of the variable. The main interactions that were present are those of P-G and I-G (type of interaction); those of AI and ICu (level of interaction) and what corresponds to the interaction supports, their presence was varied. However, the main interactions that promoted the construction of knowledge are of the P-P and I-P type; AI level, ICu, IDi, IyACo, IyADi and what corresponds to the supports actually all contribute to the construction of knowledge.

Key words: *professional knowledge, collaboration, math teacher, 3uv model.*

Índice de contenido

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES	4
1.1 Impacto que tienen los resultados de la investigación educativa en la práctica de los docentes	4
1.2 Importancia del Desarrollo Profesional del profesor e investigador en la Educación Matemática	7
1.3 Las interacciones como uno de los medios que promueven la construcción de conocimiento profesional.....	10
1.4 El concepto de variable como un tema pertinente para la investigación y cercano a la práctica del profesor	11
CAPÍTULO 2. LA BRECHA ENTRE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN Y SU IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA	16
2.1 Problemática	16
2.2 Problema.....	16
2.3 La elección del concepto de variable	16
2.4 Las interacciones como eje rector	17
2.5 Pregunta de investigación.....	18
2.6 Objetivo General.....	18
2.7 Objetivos específicos.....	18
2.8 Alcances.....	18
CAPÍTULO 3. ENFOQUE TEÓRICO	21
3.1 Desarrollo profesional y cómo promoverlo	21
3.2 Construcción social del conocimiento	23
3.3 Noción de interacción	25
3.4 Modelos para el análisis de las interacciones en la construcción social de conocimiento	27
CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA	38
4.1 Métodos, Técnicas e Instrumentos.....	39
4.2 Fases de la investigación	40
4.2.1 Identificar el papel de las interacciones como un medio para promover una experiencia de desarrollo profesional.....	42
4.2.2 Construcción del modelo.....	42
4.2.3 Diseño de la secuencia.....	46
4.2.4 Experimentación	61
4.2.5 Análisis de las interacciones.....	63

CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS.....	65
5.1 Fase I. Compartir y Comparar Información.....	65
5.1.1 Experiencia en la Fase I.....	66
5.1.2 Interacciones en la Fase I.....	72
5.2 Fase II. Descubrimiento y exploración de disonancias de las inconsistencias entre ideas, conceptos o aseveraciones.....	84
5.2.1 Experiencia de la Fase II.....	85
5.2.2 Interacciones en la Fase II.....	88
5.3 Fase III. Negociación del significado y construcción mutua de conocimiento.....	94
5.3.1 Experiencia de la Fase III.....	94
5.3.2 Interacciones presentes en la Fase III.....	102
5.4 Fase IV. Comprobación y modificación de la síntesis propuesta.....	107
5.4.1 Experiencia de la Fase IV.....	107
5.4.2 Interacciones en la Fase IV.....	111
5.5 Fase V. Aseveración de acuerdo y aplicación del nuevo conocimiento construido.....	114
5.4.3 Experiencia de la Fase V.....	115
5.4.4 Interacciones presentes en la Fase V.....	129
CONCLUSIÓN.....	132
REFLEXIÓN.....	140
REFERENCIAS.....	142
Anexo 1. Motivación.....	146
Anexo 2. Libro de códigos utilizados.....	148
Anexo 3. Resumen del diseño de la secuencia.....	149

Índice de Figuras

<i>Figura 1.</i> Presencia del uso de la variable en el curriculum de matemáticas (SEP, 2017, pp. 110-111).....	15
<i>Figura 2.</i> Modelo de análisis de interacción para examinar la construcción social del conocimiento en conferencias por computadora (Gunawaderna et al., 1997, p. 411).....	32
<i>Figura 3.</i> Esquema metodológico para alcanzar el objetivo general de la presente investigación.....	41
<i>Figura 4.</i> Respuesta de tres estudiantes al problema 1.....	51
<i>Figura 5.</i> Respuesta de un estudiante al problema 2.....	51
<i>Figura 6.</i> Solución de tareas que involucran los tres usos de la variable con algunos de sus respectivos aspectos (Ursini y Trigueros, 2006, p. 13-18).....	55
<i>Figura 7.</i> Presentación de tareas correspondientes a la Fase I del modelo de Gunawardena, et al. (1997)	66
<i>Figura 8.</i> Presentación de la Tarea 1. Problemas desencadenantes	67
<i>Figura 9.</i> Tipos de interacción presentes en la Fase I. Compartir y comparar información. ...	83
<i>Figura 10.</i> Niveles de Interacción presentes en la Fase I. Compartir y comparar información.	84
<i>Figura 11.</i> Apoyos de Interacción presentes en la Fase I.....	84
<i>Figura 12.</i> Presentación de la Tarea 3. Reaseverar lo discutido	86
<i>Figura 13.</i> Tipos de interacción presentes en la Fase II.	92
<i>Figura 14.</i> Niveles de interacción presentes en la Fase II.	93
<i>Figura 15.</i> Apoyos de Interacción presentes en la Fase II.	93
<i>Figura 16.</i> Presentación de Tarea 4. Resolución y análisis de tres problemas donde cada uno implica un uso diferente de la variable.....	95
<i>Figura 17.</i> Tarea 6. Presentación del modelo 3uv	101
<i>Figura 18.</i> Tipos de Interacción presentes en la Fase III.....	105
<i>Figura 19.</i> Niveles de Interacción presentes en la Fase III.....	106
<i>Figura 20.</i> Apoyos de Interacción presentes en la Fase III	106
<i>Figura 21.</i> Presentación de la Tarea 9. Retomar problema desencadenante.....	108
<i>Figura 22.</i> Tipos de interacción presentes en la Fase IV.....	111
<i>Figura 23.</i> Niveles de interacción presentes en la Fase IV.	113
<i>Figura 24.</i> Apoyos de Interacción presentes en la Fase IV	114
<i>Figura 25.</i> Presentación de la Tarea 12. Diseño de tareas	115
<i>Figura 26.</i> Tarea propuesta por la Sala 1. Uso de la variable como incógnita.....	116
<i>Figura 27.</i> Tarea diseñada en la Sala 1.....	123
<i>Figura 28.</i> Tarea diseñada en la Sala 3.....	123
<i>Figura 29.</i> Presentación de la Tarea 14.	124
<i>Figura 30.</i> Presentación de la Tarea 15	128

Índice de Tablas

Tabla 1 Características o aspectos que cumple la interacción.....	26
Tabla 2 Comparación de los modelos de análisis de interacción en entornos virtuales de aprendizaje	27
Tabla 3 Comparación de los modelos de análisis de interacción en entornos virtuales de aprendizaje	28
Tabla 4 Comparación de los modelos de análisis de interacción en entornos virtuales de aprendizaje	29
Tabla 5 Clasificación para analizar el Tipo de Interacción presente en una experiencia de desarrollo profesional.....	34
Tabla 6 Clasificación para analizar el Nivel de Interacción de las participaciones de los profesores y la investigadora en formación en esta experiencia de desarrollo profesional....	35
Tabla 7 Apoyos de Interacción para el análisis e identificación de construcción de conocimiento según el modelo de Gunawardena et al. (1997).....	36
Tabla 8 Métodos, técnicas e instrumentos para alcanzar los objetivos específicos	39
Tabla 9 Códigos Generales utilizados en la presente investigación.....	43
Tabla 10 Códigos para los Tipos de Interacciones	43
Tabla 11 Códigos para Nivel de Interacción o Actividad Cognitiva	44
Tabla 12 Códigos para los apoyos de interacción	44
Tabla 13 Ficha de registro para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional.....	45
Tabla 14 Aspectos cognitivos que posee cada uno de los tres usos de la variable	47
Tabla 15 Descripción general del CT.....	48
Tabla 16 Instrumento para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable	63
Tabla 17 Tipos de interacción presentes en la Tarea 1. Problemas desencadenantes.....	72
Tabla 18 Niveles de interacción presentes en la Tarea 1. Problemas desencadenantes.....	74
Tabla 19 Apoyos de interacción presentes en la Tarea 1. Problemas desencadenantes.....	76
Tabla 20 Tipos de interacción presentes en la Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable.....	77
Tabla 21 Niveles de interacción presentes en la Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable.....	79
Tabla 22 Apoyos de interacción presentes en la Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable.....	82
Tabla 23 Tipos de interacción presentes en la Fase II. Reaseverar lo discutido.....	88
Tabla 24 Niveles de interacción presentes en la Tarea 3. Reaseverar lo discutido.....	89
Tabla 25 Apoyos de interacción presentes en la Tarea 3. Reaseverar lo discutido	91
Tabla 26 Interacciones de la Fase III. Negociación del significado y construcción mutua de conocimiento – Sesión 1.....	102
Tabla 27 Interacciones de la Fase III. Negociación del significado y construcción mutua de conocimiento - Sesión 2.....	103
Tabla 28 Tipos de interacción presentes en la Fase IV. Comprobación o modificación de la síntesis propuesta.....	111
Tabla 29 Niveles de interacción presentes en la Fase IV. Comprobación o modificación de la síntesis propuesta.....	112
Tabla 30 Apoyos de interacción presentes en la Fase IV. Comprobación o modificación de la síntesis propuesta.....	113

Tabla 31 Interacciones presentes en la Fase V. Aseveración de acuerdo y aplicación del nuevo conocimiento construido.....	129
Tabla 32 Porcentajes de interacción en cada fase del modelo de Gunawardena, et al. (1997)	132

INTRODUCCIÓN

Uno de los elementos fundamentales en la educación matemática es el profesor, puesto que funge como un elemento esencial en la mejora de la calidad de aprendizaje de las matemáticas (Lebrija, Flores y Trejos, 2010). Al respecto, Sowder (2007) señala que una de las formas de promover dicha mejora es trabajar en el desarrollo profesional de los profesores. Sin embargo, en las investigaciones éste juega un papel secundario (Lebrija, et al., 2010), lo cual ocasiona discordancias entre los resultados que presentan las investigaciones y la práctica docente (Gómez y Lupiáñez, 2006). En consecuencia, el impacto que tiene la investigación educativa en la práctica de los docentes es escaso (Perines, 2018).

Ante este suceso, profesores sugieren que los investigadores consideren temas cercanos y relevantes para sus prácticas atendiendo las necesidades que realmente se presentan en el aula (Perines y Murillo, 2017). Por su parte, algunos investigadores (Climent & Carrillo, 2003; Solar y Rojas, 2015; Fernández, Molfino y Ochoviet, 2016), sugieren tratar de disminuir la brecha existente entre la investigación y la práctica docente por medio del desarrollo profesional, entendiendo éste como un espacio de colaboración e interacción entre profesores e investigadores donde se generan reflexiones que permiten la construcción de conocimiento profesional de ambos. Entonces, atendiendo ambas sugerencias en esta investigación se pretende promover mediante la interacción entre profesores, una investigadora en formación y dos investigadoras, un espacio de desarrollo profesional, donde todos en colaboración construyan conocimiento profesional en torno al concepto de variable. Lo anterior mediante el diseño de tareas matemáticas que potencien la comprensión de los usos de la variable y que puedan ser llevadas al aula. Se eligió el concepto de variable y sus usos por cumplir con dos características: es un tema cercano a la práctica del profesor y de interés para los investigadores como se evidencia en los antecedentes.

Luego, dado que el desarrollo profesional con y entre profesores e investigadores es considerado como un medio para tratar de disminuir la brecha existente entre la investigación y la práctica docente, se consideró apropiado indagar sobre estrategias que gestionen dicho desarrollo profesional. Una de ellas es promover interacciones que propicien la construcción de conocimiento profesional (Cardeñoso et al., 2001). Es por ello, que el eje rector de la presente investigación es el papel de las interacciones entre profesores de bachillerato y una investigadora en formación; donde ambos, con sus propias experiencias y conocimientos realicen interacciones que les permitan construir conocimiento profesional. Esto con la intencionalidad de diseñar tareas matemáticas que potencien la comprensión del concepto de variable y sus usos *ad hoc* para que los profesores y las investigadoras las apliquen en su práctica. La finalidad es mostrar especificidad sobre los tipos de interacción que promueven la construcción de conocimiento profesional, con la intención de que puedan ser consideradas en otras experiencias o investigaciones para propiciar espacios de desarrollo profesional conformados por profesores e investigadores.

Así, el objetivo general de esta investigación es *describir las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable en una*

experiencia de desarrollo profesional con Profesores de Matemáticas de Bachillerato y una investigadora en formación. La pregunta que guía esta investigación es, *¿Qué interacciones promueven la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable en una experiencia de desarrollo profesional con Profesores de Matemáticas de Bachillerato y una investigadora en formación?*

Para alcanzar el objetivo general y responder la pregunta de investigación, se adopta un enfoque sociocultural, que sustente las interacciones y la construcción social del conocimiento como constructos que norman esta experiencia de desarrollo profesional. Para analizar las interacciones que promueven la construcción de conocimiento se establece un modelo que permite examinar entre quienes, cómo y con qué se da la interacción. Para ello, se utilizan como referentes las investigaciones de Gunawardena et al. (1997), Becerra (2006) y Juárez, Chamoso y González (2020) que indagaron sobre las interacciones desarrolladas en ambientes en línea y su relación con la construcción social del conocimiento. Ahora, encaminado a la parte metodológica, para llevar a cabo esta experiencia de desarrollo profesional, se diseña una secuencia de aprendizaje. Esta secuencia queda diseñada adoptando las fases del modelo de Gunawardena et al. (1997) como un modelo de instrucción que permite reflexionar sobre el tipo de tareas y el orden de las mismas para propiciar interacciones que promuevan la construcción de conocimiento profesional. Otro aporte metodológico para el diseño de instrucción es el modelo 3uv (Tres Usos de la Variable). Pues sirve como apoyo en el diseño de algunas tareas matemáticas para que el profesor comprenda la noción de variable y sus tres usos. También con la intención de que los profesores lo utilicen en el diseño de tareas que potencien la construcción y comprensión del concepto de variable y sus usos y de esta manera el profesor construya conocimiento profesional al respecto.

El enfoque metodológico de la presente investigación es cualitativo y el tipo de investigación es descriptivo. La razón es, que, aunque en diversas investigaciones (Climent y Carrillo, 2003; Solar y Rojas, 2015; Fernández, et al., 2016) se menciona que un medio para propiciar el desarrollo profesional es la interacción, en dichas investigaciones no se especifica qué tipo de interacción es la que promueve la construcción de conocimiento profesional, ni cómo se presenta. Lo cual es de interés para la presente investigación y el tipo de investigación descriptiva es útil (Hernández, et al., 2010). Para esta investigación, se proponen cinco fases que permiten llevar a cabo la experiencia de desarrollo profesional, pretendiendo se logre el objetivo general que se persigue en esta investigación. Las fases son: (1) Identificar el papel de las interacciones como un medio para promover una experiencia de desarrollo profesional; (2) Establecer un modelo que permita analizar las interacciones que promueven la construcción de conocimiento; (3) Diseño de una secuencia que promueva la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes para propiciar la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable; (4) Experimentación y (5) Análisis de las interacciones.

En general, se brinda información sobre las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional y cómo se dieron dichas interacciones. De esta manera, se espera favorecer el interés del trabajo colaborativo, propiciando la interacción entre profesores e investigadores para mejorar el desarrollo profesional de ambos. En relación con lo anterior,

en esta experiencia de desarrollo profesional se presentaron interacciones que promovieron una participación tanto de los docentes como de los investigadores, permitiendo acercar los resultados que presentan las investigaciones a la práctica del profesor y los conocimientos del profesor a las investigaciones. Pues en esta experiencia de desarrollo profesional se promovieron interacciones que pusieron en juego los conocimientos y experiencias de cada uno de los participantes respecto al concepto de variable. Específicamente, conocimientos y experiencias relacionadas con el sustento teórico sobre el concepto de la variable (modelo 3uv) y el currículum de matemáticas del Nivel Medio Superior (NMS). Esto fue posible mediante interacciones que promovieron el: intercambio de información, descubrimiento de disonancias, negociación de significados, acuerdos y aplicación de los significados construidos. Estas intencionalidades de las interacciones son propuestas en las 5 fases del modelo de Gunawardena, et al., (1997) y fueron adaptadas para promover la construcción de conocimiento profesional de los participantes en torno al concepto de variable.

El desarrollo de la presente investigación se organiza en este documento de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presentan los antecedentes que dan fundamento a la problemática y problema de investigación. En el segundo, se muestra el planteamiento del problema, puntualizando la problemática, el problema, justificación, pregunta de investigación, los objetivos que guían la presente investigación, así como los alcances de ésta. El tercer capítulo se centra en abordar los constructos teóricos que permiten establecer un modelo para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional. Donde en efecto, los constructos teóricos centrales son: *las interacciones* y la *construcción de conocimiento profesional*, ambos bajo un enfoque sociocultural. En el capítulo cuatro, se presenta la parte metodológica que permitió llevar a cabo la experiencia de desarrollo profesional a través del diseño de una secuencia de aprendizaje. Para ello, se emplean las fases del modelo de Gunawardena, et al. (1997) como un modelo de instrucción y el modelo 3uv como apoyo para que los profesores construyan conocimiento profesional en torno al concepto de variable a través del diseño de tareas matemáticas que promuevan la construcción y comprensión del concepto de variable y sus usos. En el capítulo cinco, se muestran resultados de esta investigación centrada en la experiencia de desarrollo profesional y las interacciones promovidas. Posteriormente se presenta la conclusión dando respuesta a la pregunta de investigación, rescatando los principales resultados. Enseguida se reflexiona sobre el impacto que tuvo esta tesis en el desarrollo profesional de la autora de este trabajo. Por último, se muestran referencias y anexos.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

En este apartado se exponen algunos aportes de investigaciones realizadas en Matemática Educativa principalmente sobre el impacto que tienen los resultados de la investigación educativa en la práctica docente con la finalidad de evidenciar el escaso impacto que presentan (sección 1.1). Posteriormente, se presentan estudios sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas y del investigador, como una forma de atender la problemática antes identificada y, con ello, disminuir la brecha existente entre los resultados de la investigación y la práctica docente (sección 1.2). Dado que se adopta un enfoque sociocultural, se consideró apropiado indagar sobre las interacciones en las experiencias de desarrollo profesional (sección 1.3). Al respecto, se obtuvo que, aunque las interacciones entre profesores e investigadores son una estrategia para promover la construcción de conocimiento profesional, las investigaciones que analizan estas interacciones en el campo de la Matemática Educativa son escasas. Finalmente, la construcción de conocimiento profesional, abordado en la sección 1.4 está orientada al concepto de variable, su importancia en la enseñanza y aprendizaje del álgebra y como un tema relevante para el profesor de matemáticas. Esto para justificar el por qué se eligió a la variable y sus usos como el tema matemático central de esta investigación.

1.1 Impacto que tienen los resultados de la investigación educativa en la práctica de los docentes

Si bien uno de los objetivos principales de la investigación educativa es tener impacto en la práctica docente para mejorar la educación, éste no se está cumpliendo totalmente. Ejemplo de esto es enunciado en Perines (2018) quien señala “el escaso impacto que tiene la investigación educativa en la práctica real de los docentes” (p.9). Así mismo, Perines y Murillo (2017) reportan que la investigación y la práctica educativa suelen tomar caminos distintos, irreconciliables y casi opuestos, ocasionando que la colaboración entre ambos se torne complicada. Al respecto, y de manera más puntual Ramírez, Suárez y Ortega (2008) señalan esa lejanía existente entre los resultados de la investigación y las oportunidades que el docente tiene de aplicarnos en su práctica, reportando que “muy lejos se encuentran los profesores de considerar el conocimiento generado a partir de los resultados de las investigaciones en Matemática Educativa” (p. 646).

Aunado a lo anterior, Perines y Murillo (2017) rescatan algunas de las justificaciones que propios docentes de primaria y secundaria plantean respecto del por qué no implementan la investigación en su práctica. Una de las principales razones que de forma general se presenta por docentes de primaria y secundaria es que califican el trabajo de los investigadores como demasiado teórico, abstracto y poco cercano a la realidad del docente, señalado que las temáticas que eligen los investigadores suelen ser irrelevantes y poco trascendentes para su práctica diaria. A continuación, se presentan las aseveraciones hechas por los docentes que sustentan lo antes expuesto:

Los investigadores basan sus estudios en teorías que construyen entre cuatro paredes y no mirando directamente la realidad de las aulas, lo que pasa

realmente, dentro de nuestro diario vivir. Entonces estudian temas que interesan a ellos mismos, ¿pero a nosotros?...dudo que nos interesen. (p. 95)

Falta que los investigadores se pongan los zapatos de los profesores y digan: «vamos, ¿qué les interesa saber a estos profesionales?». Y que se acerquen más a nosotros. No pueden estar siempre escribiendo sobre ellos mismos, leyéndose entre unos y otros como si ese fuera su meta central. (p.95)

Está bien que los investigadores hagan y difundan artículos de alto nivel y que publiquen libros complicados y cosas específicas, pero también deben escribir de vez en cuando textos más sencillos y con temas más cercanos a nosotros. Los investigadores deben hacer un esfuerzo, deben intentarlo, de lo contrario seguiremos igual de alejados unos y otros. (p. 96)

Con lo antes expuesto, los docentes sugieren una mejora de la propia investigación y su comunicación, señalando que los investigadores deberían publicar estudios cercanos a sus necesidades, y que, para ello, es importante que sean escuchados por los investigadores (Perines y Murillo, 2017). En el mismo tenor, estos autores presentan evidencia de otras justificaciones hechas por los profesores de su estudio, las cuales, recaen en sugerencias que apuntan en cuatro elementos importantes que se deberían de atender para que los resultados de la investigación sean más cercanos para los docentes:

la necesidad de que los investigadores publiquen estudios cercanos a las necesidades de los catedráticos, el rol de las administraciones educativas en la difusión de la investigación, los cambios en la formación de los docentes en el interior de las universidades y el análisis crítico de las actitudes de los profesores hacia la investigación. (p. 89)

Por su parte, Murillo, Perines y Lomba (2017) con base en la literatura realizada identifican que los docentes tienen una mirada muy crítica hacia la investigación, justificándose básicamente con los siguientes tres argumentos: “a) perciben la investigación como irrelevante, inútil y demasiado teórica; b) muestran dificultades para comprender el lenguaje y las estadísticas de los artículos; y c) desconfían de los resultados de la investigación” (p. 185). De manera puntual en su estudio encuentran que los profesores consideran que el conocimiento que difunden las investigaciones es demasiado teórico y difícil de trasladar a su práctica, puesto que la investigación es construida por expertos universitarios que muchas de las veces no conocen las situaciones y procesos que suceden en el aula, ocasionando que publiquen “artículos basados sólo en teorías y constructos hipotéticos que no se fundamentan en lo que realmente ocurre en las aulas” (p. 193).

Lo expresado con anterioridad en esta sección, permite identificar la problemática sobre el escaso impacto que tienen los resultados de la investigación en la práctica docente, y además algunas de las causas que desde la opinión de profesores de primaria y secundaria se atribuyen a esta problemática. Una de ellas y que recae en los intereses de esta investigación es la poca o nula relación entre los profesores e investigadores al momento de elegir temas de investigación, de desarrollarlos y de presentar los resultados. De esta manera, si queremos que la investigación educativa cumpla su objetivo e impacte en la práctica es necesario reducir la brecha existente entre investigadores y docentes (Perines y

Murillo, 2017). Para identificar otras dificultades que están propiciando esta brecha, a continuación, se da evidencia del papel que el profesor juega en las investigaciones.

En las investigaciones, frecuentemente las experiencias, conocimientos u opiniones del profesor son relegados a un segundo plano cuando no francamente ignoradas. Ello ha ocasionado discordancias entre la investigación y la práctica docente. Ejemplo de esto es enunciado en Gómez y Lupiáñez (2006) quienes señalan la discrepancia existente entre las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que presenta el investigador y el actuar del profesor de matemáticas al diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje; dado que si bien el investigador asume el papel del profesor, dentro de estas investigaciones no hay propuestas de cómo el profesor puede utilizar la noción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en su trabajo diario dentro del aula. Es decir, el investigador presenta trayectorias hipotéticas de aprendizaje para algún tema en particular, pero en ocasiones el profesor no comprende o no sabe cómo implementarlas en su clase.

Entonces, se cuestiona por qué en las investigaciones realmente el profesor juega un papel secundario, si el trabajo en el aula, le permite al profesor adquirir conocimientos y experiencias que pueden ser de gran apoyo en el diseño o rediseño de actividades de enseñanza-aprendizaje, mejorando incluso aquellos propuestos por los investigadores. Evidencia de ello, es el estudio realizado por González (2014) denominado "*Formación inicial de profesores en Geometría con Geogebra*" (cabe mencionar que en este estudio el autor funge como profesor-investigador). Ello se menciona dado que, por una parte, como profesor adquirió conocimiento de sus estudiantes (profesores en formación) al implementar las actividades, pues el enfoque profesional de estos estudiantes arribó al rediseño de una de las actividades propuestas por este autor. Por otra parte, la experiencia adquirida le permitió tener ideas de cómo podría mejorar las actividades que tenía propuestas teniendo su papel como profesor-investigador, reconociendo el aporte del enfoque profesional de sus estudiantes al realizar las actividades.

Para este autor, así, la primera actividad propuesta con Geogebra lo hizo dudar si sería efectiva, pues solo se trataba de que arrastraran un punto y observaran que pasaba con la construcción propuesta en este software (pensó que para los profesores podría ser causa de desmotivación). Sin embargo, sucedió todo lo contrario, pues llegaron con rapidez al resultado y esto motivó a los profesores a entrar en discusión para pensar en otras posibilidades de estructurar esta tarea. Por lo que González (2014) menciona que:

Es bueno destacar que en este ejemplo también se muestra el enfoque profesional, explícito –como ya se expresó antes–, pues el tipo de análisis realizado es de los que propician que los profesores en formación puedan arribar al final con buenos ejemplos de tareas docentes elaboradas por ellos mismos, posibles de ser utilizadas en su ulterior labor docente. (p. 170)

Del estudio de González (2014) se rescata que las experiencias y conocimientos que el profesor adquiere durante su práctica pueden resultar enriquecedoras para mejorar propuestas didácticas hechas por investigadores. En este caso, este autor fungió como docente investigador, pero se considera sería más enriquecedor un trabajo conjunto donde unos participantes tomen el papel de docentes y otros de investigadores, para promover

actividades de enseñanza-aprendizaje bajo los conocimientos de dos expertos en su área y así propiciar que dichas actividades sean factibles de llevar al aula. Esto porque si bien Climent y Carrillo (2003) consideran que tanto la docencia como la investigación poseen su propia teoría y práctica; pero desde esta investigación se considera que no deberían estar del todo alejadas, pues ambas contribuyen en promover mejoras en las actividades de enseñanza y aprendizaje. Por lo que presentar una actitud de superioridad del investigador respecto del profesor o viceversa no se considera adecuado en un ambiente de colaboración. Es decir, se debe reconocer que la visión del profesor podría retroalimentar las propuestas de enseñanza y aprendizaje generadas desde la investigación. Pero también es importante que el profesor tenga un acercamiento a la comprensión de los sustentos teóricos que son utilizados en la investigación y que se propone sean aplicados en la práctica docente. Lo anterior, por los siguientes dos motivos reportados en Fernández et al. (2016):

En primer lugar, el conocimiento emergente de la investigación constituye conocimiento didáctico del contenido que es uno de los conocimientos base para la enseñanza (SHULMAN, 2005) y de ahí que resulte tan relevante lograr su comprensión. En segundo lugar, cuando pensamos en profesores en ejercicio que no son investigadores ni tienen formación en investigación, enfrentamos una dificultad adicional que es la poca o nula familiaridad con los marcos teóricos y metodológicos de la ME, tal como lo reportan Boero y Szendrei (1998). (p. 809-810)

De aquí, la importancia de promover espacios de colaboración donde la interacción entre el profesor de matemáticas y el investigador en matemática educativa fomenten el desarrollo profesional de ambos y con ello un acercamiento entre los resultados de la investigación y la práctica del profesor. Puesto que los espacios de desarrollo profesional que se conforman en aquellos donde se propicia conocimiento profesional de los que participan, se convierte en un factor primordial para la mejora de la Educación Matemática. Por tanto, el promover una experiencia de desarrollo profesional con y entre profesores es de interés para esta investigación, pues se pretende que de forma conjunta se construya conocimiento profesional que permita mejoras en el desarrollo profesional de ambos. Por esta razón, a continuación, se presenta alguna literatura sobre el tema.

1.2 Importancia del Desarrollo Profesional del profesor e investigador en la Educación Matemática

La preocupación por mejorar la Educación Matemática ha sido un movimiento internacional, en el que han reconocido “la necesidad de cambiar la manera en la cual las matemáticas son enseñadas y aprendidas” (Sowder, 2007, p. 159). Ejemplo de ello, son algunos de los hechos suscitados en el año de 1990: cambios curriculares, el establecer estándares para enseñar y evaluar el aprendizaje de matemáticas, y principios para las Matemáticas Escolares. Sin embargo, los reformadores de la educación se percataron que el ofrecer una educación de calidad en la que se mejore el rendimiento académico de todos los estudiantes y una mejora instruccional, va más allá de los cambios antes mencionados. Esto es, reconocer y atender la necesidad del desarrollo profesional de los profesores y

administrativos, para que los objetivos actuales de la educación matemática sean más próximos a lograrse:

Los reformadores de la educación se dieron cuenta de que la mejora instruccional y el incremento de los logros en los estudiantes dependen del desarrollo profesional de los profesores y administrativos. (e.g., Ball & Cohen, 1999; Elmore & Burney, 1999; Nelson & Hammerman, 1996; Sykes, 1999; C.L. Thompson & Zeuli, 1999; citado en Sowder, 2007, p.159)

Por tanto, el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas debe asumirse como un punto importante para la mejora en los procesos de la educación matemática (Cardeñoso et al., 2001; Climent y Carrillo, 2003; Sowder, 2007; Montecinos y Cortez, 2015; Rodríguez, Ligan, Hernández y Alhuay, 2017). La *American Federation of Teachers* (2002; citado en Sowder, 2007, p.1) señalan la importancia del desarrollo profesional del profesor en las siguientes líneas:

Porque la nación puede adoptar estándares rigurosos, pretender un escenario visionario, compilar las mejores investigaciones acerca de cómo aprenden los estudiantes, cambiar libros de texto y evaluaciones, promover estrategias de enseñanza que han sido exitosas con una amplia gama de estudiantes, y cambiar todos los demás elementos involucrados en reforma sistemática—Pero sin desarrollo profesional, la reforma escolar y mejorar el rendimiento de todos los estudiantes no sucederá. A menos que el maestro del salón de clases entienda y se comprometa a la reforma base-estándar y sepa cómo emplearla, el sueño no se realizará. (p. 157)

Por otra parte, la educación está en constantes cambios sociales y culturales; y con ello el contexto en el que se desenvuelve el profesor, así como las estrategias de enseñanza-aprendizaje que promueven las nuevas investigaciones.

Como bien lo mencionan Cardeñoso y compañía:

La docencia está dirigida a alumnos irrepetibles, continuamente cambiantes, por lo que el profesor no puede quedarse estancado poniendo en práctica unas técnicas de actuación, por muy sólidas que sean. [Además que] No es posible pensar que el profesor pasa de ser estudiante a ser profesor por un proceso de formación puntual, sino que se ve sumergido en un proceso de *desarrollo profesional*, continuo en el que va atravesando diversos papeles y momentos. (Cardeñoso et al., 2001, p. 234)

Es por estas razones que, en el campo de la educación, se han propiciado diversas investigaciones en torno a estos hechos y se han realizado estudios sobre formación de profesores y su desarrollo profesional (cf. Cardeñoso et al., 2001; Climent y Carrillo, 2003; Gómez y Lupiáñez, 2006; Lebrija et al., 2010; Montecinos y Cortez, 2015; Solar y Rojas, 2015; Fernández et al., 2016; Rodríguez et al., 2017 y Sosa, 2019).

Por otro lado, en algunas investigaciones (e.g., Gómez y Lupiáñez, 2006; Lebrija et al., 2010 y Rodríguez et al., 2017) se ha demostrado cómo el profesor toma una participación pasiva respecto de su desarrollo profesional; lo cual, desde la perspectiva de esta investigación,

propicia que el crecimiento profesional del mismo se lleve a cabo de una manera poco relevante o meramente superficial.

Con base en las lecturas realizadas sobre desarrollo profesional se observa que una de las posibles causas de este suceso, es la forma de concebir el desarrollo profesional y por tanto cómo es promovido (Sowder, 2007). Por ejemplo, Rodríguez et al. (2017) consideran la *investigación- acción (metodología fuertemente asociada a la mejora continua de las prácticas docentes)* como experiencia de innovación en desarrollo profesional docente, en la que se pretendía fortalecer las habilidades y expectativas que componen la competencia de investigación docente. Sin embargo, los resultados con ese grupo de profesores en servicio, según el autor, sugieren que:

- ✓ La investigación-acción favorece en corto plazo el fortalecimiento de las habilidades, pero no las expectativas sobre el empleo de la investigación en la docencia.
- ✓ La posibilidad de ocurrencia de cambios en las expectativas y las habilidades es mayor si en la capacitación se incluyen espacios para el cuestionamiento de conocimientos y creencias.

Lo anterior sobre la investigación-acción y los resultados que se presentan al respecto muestra que con esta metodología no se fortalece un acercamiento de la investigación con la práctica del profesor, sino más bien se centra en el desarrollo del pensamiento reflexivo del docente con fines de mejora de sus prácticas.

En Cardeñoso et al. (2001) se resumen dos vertientes de problemas que dirigen las investigaciones y que pueden ser ubicadas en la línea de desarrollo profesional:

1. *Problemáticas sobre el conocimiento profesional del profesor*, sus dimensiones, sus relaciones, su estructura. ¿Qué caracteriza al profesor de matemáticas? ¿Cómo se concibe la profesión docente por estos profesores? ¿Y por los formadores? ¿Y por la comunidad escolar? (p. 237).
2. *Problemáticas sobre elaboración del conocimiento profesional*, que tiene que ver con la socialización del profesorado, (¿cómo ayudarlo a incorporarse a la comunidad de educadores matemáticos?), de estrategias, (¿qué métodos emplear en la formación de profesores?), de relación con la práctica, (¿cómo dar significado a los problemas prácticos del profesor?), (p. 237).

Esta investigación está ubicada en la segunda vertiente de la línea de desarrollo profesional, pues se centra en la construcción de conocimiento sobre el concepto de variable teniendo como factores importantes: la socialización del profesorado mediante la interacción; experimentar estrategias para promover espacios de desarrollo profesional dando énfasis en las relaciones que pueden conformarse entre los resultados de la investigación (propuestas didácticas, diseño de tareas, cuadernillos de trabajo, materiales didácticos, por mencionar algunos) y la práctica del profesor. Luego, se considera la socialización del profesorado como fundamental en la presente investigación, pues en Montecino y Cortez (2015) explican que las políticas de desarrollo profesional docente tienen que considerar modelos donde se involucre el aprendizaje entre docentes; de manera que el conocimiento sea compartido por la comunidad escolar y promueva una mejora en los centros escolares y sus aprendizajes. Pues, el desarrollo profesional es “un conocimiento que se construye a través de

interacciones sociales en el contexto en el cual se aplica y que se genera tanto en el mundo académico como en el mundo laboral” (Putnam y Borko, 2000; citado por Montecino y Cortez, 2015, p. 54).

Por tanto, lo expresado en esta sección permite identificar que, así como es importante el desarrollo profesional dentro de la educación matemática, también lo es el impulsar procesos que lo potencien. Una forma de potenciar esta construcción es a través de las interacciones sociales. Con ello, la necesidad de indagar el papel de las interacciones como un medio para promover la construcción social de conocimiento.

1.3 Las interacciones como uno de los medios que promueven la construcción de conocimiento profesional

En su estudio Cardeñoso et al. (2001) consideran el conjunto de interacciones que se producen en un desarrollo profesional, como uno de los medios que promueven la construcción de conocimiento profesional más elaborado; entendiéndolo como “un proceso mediante el cual sus ideas evolucionan hacia nuevas formas de concebir la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas” (p. 237). En esta misma sintonía, Montecinos y Cortez (2015), hacen alusión que a través de interacciones sociales se construye conocimiento que sustenta el trabajo docente. Por su parte, Gunawardena et al. (1997) señala que la interacción que se produce entre los participantes en un espacio de aprendizaje constructivista podría describirse como una construcción colaborativa de conocimiento. En este mismo tenor, Becerra (2006) señala que:

A través de las interacciones las personas ponen a disposición de otros sus saberes, experiencias y habilidades, lo cual les permite enriquecer sus conocimientos; por ello son parte esencial del aprendizaje colaborativo y sobre todo de la construcción social del conocimiento. (p. 66)

Aunado a lo anterior, y considerando que Climent y Carrillo (2003) definen el desarrollo profesional como un espacio donde se construye conocimiento profesional, se considera relevante indagar sobre las interacciones que promuevan dicha construcción.

En este mismo tenor, Rodríguez et al. (2017), propicia la interacción entre docentes donde estos dialogan y reflexionan respecto sus prácticas. En Sowder (2007) se hace alusión a interacciones de colaboración que se producen cuando profesores y otros interesados tratan de desarrollar y mejorar los programas de instrucción matemática de sus escuelas. Al respecto, Fernández et al. (2016) señalan que de la interacción entre integrantes de una comunidad pueden surgir otras interpretaciones que transforman la herramienta (por ejemplo, los resultados de investigación) y nuestro pensamiento. En el caso de Sosa (2019), hace referencia sobre interacción entre profesionales e interacciones sociales. Para la primera, esta autora, cita a Hopwood (2016) quien menciona que las *interacciones entre profesionales* permiten el traspaso de aprendizaje profesional a la práctica; esto es posible, cuestionando y discutiendo colectivamente el conocimiento emergente del aprendizaje, que propicia cambios en el conocimiento relacionados con la acción en la práctica. Respecto a las interacciones sociales, Sosa (2019) señala que propician “el tránsito entre un estado de desarrollo cognitivo a otro estado potencial” (p. 141) y fomentan el “soporte de la relación de interdependencia entre aprendizaje y desarrollo” (p. 53).

De lo descrito anteriormente se llega a la conclusión que la *interacción* es un medio por el cual interesados en los procesos de enseñanza y aprendizaje construyen conocimiento profesional. Este conocimiento profesional propicia tener nuevas formas de concebir, desarrollar, mejorar y sustentar los programas de instrucción matemática, las investigaciones y la práctica docente. Cabe mencionar, que los objetivos, dependen de los integrantes de dicha interacción; algunos pueden ser: profesores, formadores de profesores, investigadores, estudiantes y administrativos. Además, es importante resaltar que en estas investigaciones hacen alusión de interacciones entre profesionales, investigadores, docente, pero no se menciona sobre interacciones entre un tema curricular y el contexto, o entre un tema curricular y la experiencia del docente, por mencionar algunos ejemplos, lo que hace que de cierta forma este concepto de interacción quede algo aún ambiguo. Otra cosa que se rescata es que, si bien se presenta a la interacción como mediador, en realidad en los resultados o en el desarrollo de estas metodologías no se explican los tipos de interacciones ni cómo se lograron.

Finalmente, se quiere justificar la elección del concepto de variable como el tema matemático en el que se centra la construcción del conocimiento profesional mediante las interacciones con y entre los profesores, una investigadora en formación y las dos investigadoras. Por lo que en la siguiente sección se presentan los argumentos desde el interés de la investigación por el concepto de variable y su cercanía con la práctica del profesor.

1.4 El concepto de variable como un tema pertinente para la investigación y cercano a la práctica del profesor

Derivado de las secciones anteriores sobre el impacto que tienen los resultados de la investigación educativa en la práctica docente y la brecha existente, una de las sugerencias para disminuirla es que las investigaciones consideren temas cercanos y relevantes para los docentes. Por tanto, en esta sección se pretende hacer notar que el concepto de variable se torna cercano y relevante para la práctica del profesor y es un tema de interés para la investigación. Para ello, se presenta desde los resultados de la investigación, la importancia del concepto de variable en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Específicamente, se señalan algunas de las dificultades que estudiantes y profesores presentan en torno a este concepto (además de algunas de las causas que se atribuyen a estas dificultades). Esto permite evidenciar que la variable se torna como un concepto relevante para la investigación. Por otro lado, para justificar la cercanía y relevancia de este concepto con la práctica del profesor se señala la presencia de la variable en el curriculum de matemáticas del NMS propuesto por el plan de estudios de la SEP (2017).

Para el caso de la investigación, el problema del aprendizaje del álgebra es un tema relevante dentro del estudio de las matemáticas. Desde el año 1970, en distintas partes del mundo, surgieron grupos de investigación interesados en estudiar las distintas problemáticas referentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dentro de dichas problemáticas, “uno de los temas que desde los inicios despertó mucho interés se refiere a las dificultades que entraña el aprendizaje del álgebra elemental” (Trigueros y Ursini, 2018, p. 262). En la búsqueda de atender dichas dificultades, los procesos de enseñanza y aprendizaje en torno al álgebra han presentado cambios en el transcurso de los años. Rojano (2018) hace referencia a cambios significativos sobre pensamiento algebraico desde

el punto de vista de la investigación, y transformaciones que han influenciado en el diseño curricular de matemáticas de las reformas educativas (educación básica) en México a partir de 1990 hasta el 2018. En estas reformas, señalan que

La concepción del álgebra en la educación básica ha evolucionado desde un repertorio de técnicas del álgebra manipulativa, limitado al programa de la escuela secundaria (versiones previas a 1990), hasta un conjunto de conceptos y aplicaciones (programa de 1990), y de ahí, hacia poner énfasis en los aspectos conceptuales, con enfoque de resolución de problemas y con una reducción importante de los aspectos manipulativos (programa de 2011). Para finalmente, en el programa del año 2017, concebir el álgebra como un conjunto de conceptos, técnicas y métodos que permiten modelar y conocer el mundo, y a partir de ese conocimiento, poder tomar decisiones e incidir en él. (p. 259)

Sin embargo, a pesar de que la concepción del álgebra en la educación básica ha evolucionado y por ende la forma en que ha sido abordada (Rojano, 2018), autores como Trigueros et al. (1996), Trigueros y Ursini (2000), Flores y Auzmendi (2016) dan evidencia de que la problemática con respecto la enseñanza y el aprendizaje del álgebra sigue vigente en el nivel secundaria, bachillerato y superior. Estos autores señalan que aún en estudios universitarios los estudiantes muestran dificultades en la comprensión y manejo de los conceptos elementales del álgebra. Valencia (2015), menciona que algunas de las dificultades que comúnmente reportan las investigaciones, en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, son:

El paso del lenguaje natural al algebraico, la comprensión del concepto de variable en la resolución de problemas, las diferentes interpretaciones de la variable, la comprensión y comunicación del lenguaje simbólico, la transición de la aritmética al álgebra, los signos de agrupación y las ecuaciones lineales, entre otras. (p.6)

Estas dificultades en su mayoría están centradas en el concepto de variable. Por ejemplo, para pasar del lenguaje natural al algebraico fue necesario el uso de letras que ayudaran a traducir ese lenguaje verbal a uno más estructurado y simbólico. Por otra parte, es por medio del uso de letras que se da la transición de la aritmética al álgebra. Respecto a las ecuaciones lineales uno de los usos más comunes que se le da a la variable es como incógnita, puesto que como menciona Marino e Isla (2018) “es muy común escuchar decir a los estudiantes “la x es la incógnita” independientemente del uso que se le esté dando a ese símbolo” (p. 252). Así mismo reportan que en algunos casos los estudiantes “forzaron en sus resoluciones el planteo de ecuaciones para intentar “averiguar la x ”” (p.263). Al respecto, Ursini (2005; citado en Meléndez, 2015) afirma que

Sólo se puede hablar de dominio del álgebra hasta que se comprende a cabalidad el trabajo con la variable y sus distintas formas de uso; por lo tanto es necesario estudiar y conocer a profundidad cómo se desarrolla esta clase de pensamiento algebraico, y cómo se da el paso del pensamiento aritmético a éste. (p.2)

Así mismo, Morales y Díaz (2003) y López y López (2011), reconocen que la comprensión del concepto de variable es fundamental para transitar de la aritmética al álgebra; ya que por

medio de la generalización de la aritmética surge el lenguaje algebraico, lenguaje básico y significativo de toda la matemática avanzada. Además, diversas investigaciones (Morales y Díaz, 2003; Juárez, 2003; Juárez, 2011; Valencia, 2015; Trigueros y Ursini, 2018) señalan que el concepto de variable es fundamental para la enseñanza y aprendizaje del álgebra, así como para el desarrollo y comprensión de cualquier rama de las matemáticas (Trigueros et al., 1996). No obstante, este concepto es considerado de difícil comprensión para los estudiantes (Trigueros et al., 1996; Valencia, 2015; Morales y Díaz, 2003), y funge como uno de los más complejos en el aprendizaje del álgebra (Marino e Isla, 2018). Ejemplo de esto es enunciado en Morales y Díaz (2003), Ursini y Trigueros (2006), Escalante y Cuesta (2012), y en Herrera et al. (2016); quienes reportan que estudiantes de diferentes niveles educativos (secundaria, bachillerato, superior) presentan serias dificultades para comprender los diferentes usos (como incógnita, como número general y como relación funcional) y aspectos que caracterizan la variable.

En investigaciones realizadas con estudiantes de bachillerato, se ha encontrado que los estudiantes presentan dificultades para determinar expresiones generales, manipular la variable simbólica, transitar entre diferentes registros de representación (Meléndez, 2015) y para identificar la relación entre las cantidades desconocidas y conocidas (Herrera et al., 2016). Los estudiantes universitarios, muestran tener dificultades para comprender la variable como número generalizado y en relación funcional (Trigueros et al., 1996; Morales y Díaz, 2003). Además, Morales y Díaz (2003) reporta que, a pesar del nivel de escolaridad, los estudiantes universitarios presentan concepciones erróneas y procesos de solución de problemas algebraicos propios de estudiantes con menor escolaridad. Por ejemplo, presentan dificultades para realizar una lectura analítica de los enunciados verbales, para redactar en oración verbal algunas proposiciones y para distinguir entre variables y constantes. Similarmente, Escalante y Cuesta (2012) en un estudio con estudiantes universitarios señalan que “los estudiantes enfrentan dificultades cuando intentan realizar una lectura analítica de los enunciados verbales y serios obstáculos en el proceso de traducción de los lenguajes natural, aritmético y geométrico al lenguaje algebraico” (p. 107).

Aunado a lo anterior, en Juárez (2003) y Juárez (2011) se evidencia que los profesores de secundaria no tienen un buen manejo de los usos de la variable (incógnita, número general, relación funcional), dado que presentan dificultades para resolver problemas algebraicos que involucran estos usos. Por ejemplo, Juárez (2003) señala que conforme aumentaba el grado de complejidad de los problemas algebraicos, ocasionaba que los profesores realizaran generalizaciones inadecuadas y utilizaran procedimientos aritméticos para tratar de llegar a la solución. En consecuencia, este autor considera que los profesores tienen una pobre comprensión del concepto de variable. Este hecho es considerado una de las causas por las cuales los estudiantes presentan dificultades para la comprensión de este concepto, Juárez (2011) señala que:

Los resultados de este estudio sugieren que dichas dificultades podrían ser causadas por la poca comprensión que tiene el profesor de los diferentes aspectos de la variable y que al momento de enseñar los contenidos esta misma incomprensión es transmitida a los alumnos sin que el profesor sea consciente de ello. (p. 101)

Así mismo, Trigueros y Ursini (2000) señalan que, dados los resultados en su estudio, éstos sugieren que las dificultades manifestadas por los estudiantes no son de “naturaleza cognitiva o epistemológica, sino más bien parecen tener su origen en la manera cómo se tratan los distintos usos de la variable en los cursos de álgebra” (p. 47). Al igual que estos autores, Trigueros et al. (1996) y Meléndez (2015) reconocen que en los cursos de álgebra no suelen presentarse de forma explícita los distintos usos de la variable, es decir, no se hace distinción de las características que los hacen diferentes. Aunado a esto, en los cursos de álgebra “se pone énfasis en uno u otro uso de la variable de manera aislada, y no se hace ningún esfuerzo explícito para ayudar a los estudiantes a integrarlos y darse cuenta que se trata de un concepto multifacético” (Trigueros y Ursini, 2000, p. 47). El carácter multifacético que posee el concepto de variable es precisamente otra de las causas atribuidas a las dificultades para su comprensión (Trigueros et al., 1996; Morales y Díaz, 2003; Valencia, 2015; Trigueros y Ursini, 2018).

Lo expresado desde los resultados de la investigación, permite evidenciar que el concepto de la variable es relevante para el desarrollo de la misma matemática y para el desarrollo de nuevas investigaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje de este concepto. Primero, se señala su importancia en el desarrollo del pensamiento algebraico. En segundo lugar, los estudiantes y profesores presentan dificultades para la construcción y comprensión de este concepto; aunque la mayoría de los estudios se centra en los estudiantes. Por lo anterior, desde la investigación se presenta como un área de oportunidad el trabajar el concepto de variable en una experiencia de desarrollo profesional con y entre profesores teniendo como producto una secuencia para el aprendizaje de la variable diseñada de manera conjunta por los profesores y la investigadora en formación.

Finalmente, desde la práctica del profesor se debe justificar el por qué el concepto de variable podría resultar un tema relevante para el profesor de matemáticas del NMS. Rescatando que algunas de las posibles causas ante las dificultades que se pueden presentar para la construcción y comprensión del concepto de variable recaen en la forma en la que se plantean los usos de la variable en el currículum o planes de estudio. Esto dado que dentro de los cursos de álgebra este concepto y sus distintos usos no solían presentarse de forma explícita, por lo que no se hacía distinción de las características que los hacen diferentes (Trigueros et al., 1996; Meléndez, 2015).

Ante esto, el concepto de variable se torna cercano y relevante para la práctica del profesor, principalmente porque en la actualidad está presente de forma explícita en el currículum de matemáticas para el nivel bachillerato (SEP, 2017). Siendo el currículum un punto de partida en la programación y dosificación de temas que imparte el profesor (ver figura 1).

Contenidos específicos	Aprendizajes esperados	Productos esperados
<ul style="list-style-type: none"> • La <i>variable</i> como número generalizado, incógnita y relación de dependencia funcional: ¿cuándo y por qué son diferentes?, ¿qué caracteriza a cada una? Ejemplos concretos y creación de ejemplos. • Tratamiento algebraico de enunciados verbales – “los problemas en palabras”: ¿cómo expreso matemáticamente un problema?, ¿qué tipo de simbolización es pertinente para pasar de la aritmética al álgebra? • Interpretación de las expresiones algebraicas y de su evaluación numérica. Operaciones algebraicas. ¿Por qué la simbolización algebraica es útil en situaciones contextuales? 	<ul style="list-style-type: none"> • Transitan del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico. • Desarrollan un lenguaje algebraico, un sistema simbólico para la generalización y la representación. • Expresan de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: simplificar, sintetizar, expresar, verbalizar, relacionar magnitudes, generalizar patrones, representar mediante símbolos, comunicar ideas, entre otras. • <u>Reconoce la existencia de las variables y distinguen sus usos como número general, como incógnita y como relación funcional.</u> • Interpreta y expresan algebraicamente propiedades de fenómenos de su entorno cotidiano. • Evalúa expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos. 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Abordar situaciones en las que se distinga la variable como incógnita, como número generalizado y como relación de dependencia.</u> • Generalizar comportamientos de fenómenos y construir patrones. • Representar y expresar simbólicamente enunciados verbales de actividades matemáticas.

Figura 1. Presencia del uso de la variable en el currículum de matemáticas (SEP, 2017, pp. 110-111)

Aunada esta sección con las anteriores, nos permite tener un panorama más amplio de antecedentes respecto a nuestro tema de interés y con ello, a puntualizar la problemática, el problema, justificación, pregunta de investigación e hipótesis, objetivos de la presente investigación, así como los alcances de ésta y que a continuación se presentan.

CAPÍTULO 2. LA BRECHA ENTRE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN Y SU IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA

2.1 Problemática

En las investigaciones que incluyen la participación del profesor, éste juega un papel secundario donde su experiencia no es tomada en cuenta (Gómez y Lupiáñez, 2006). Una de las razones que señalan los investigadores es el escaso cumplimiento de los profesores en las tareas de investigación cuando se pretende trabajar de manera colaborativa (Climent y Carrillo, 2003). En contraparte los profesores consideran a la investigación como algo poco relevante y alejado para su práctica docente (Perines y Murillo, 2018). Estas dificultades reportadas en las experiencias de colaboración entre profesores e investigadores, podrían estar propiciando lo evidenciado por autores como Climent y Carrillo (2003), Gómez y Lupiáñez (2006), Fernández et al. (2016) y Rodríguez et al. (2017) sobre la discordancia existente entre las propuestas didácticas para fortalecer contenidos disciplinares y/o metodologías didácticas realizadas por los investigadores y las posibilidades que el docente tiene para emplearlas dentro del aula. De esta manera, la aplicabilidad de las propuestas realizadas por los investigadores es mínima en la práctica docente. Lo anterior, produce una brecha entre los resultados de la investigación y su uso en la práctica del profesor.

2.2 Problema

Una forma de delimitar la problemática relacionada con la colaboración entre investigadores y profesores de matemáticas fue indagar en propuestas de desarrollo profesional; considerándolo como un medio para reducir esta brecha. En Fernández et al. (2016) se identificó que faltan propuestas de desarrollo profesional que consideren un trabajo colaborativo entre profesores de matemáticas e investigadores del campo, cuestión que fue confirmada en la revisión de antecedentes. Aunado a lo anterior se encontraron solo tres investigaciones (Gunawardena, et al., 1997; Juárez, Chamoso y González, 2020; Flores y Miguel, 2014) que describen de manera más detallada las interacciones inmersas en estas colaboraciones y el papel de las mismas en la construcción de conocimiento para el profesor e investigadores participantes; siendo las interacciones según Cardeñoso et al. (2001) un elemento que permite esta construcción.

Para justificar la elección del contenido matemático sobre el que se construyó conocimiento profesional a través de interacciones con y entre profesores se incluyen las siguientes dos secciones para argumentar por qué se elige el tema de variable y sus usos y a las interacciones como elementos centrales de la presente investigación.

2.3 La elección del concepto de variable

Para justificar la elección del contenido matemático en el que se centra la construcción de conocimiento profesional se considera elegir un tema relevante para la práctica del profesor de matemáticas y de interés para la investigación. Esto dado que los profesores consideran que los investigadores tratan temáticas irrelevantes y poco trascendentes para su práctica diaria (Perines y Murillo, 2017). Por tanto, se eligió el concepto de variable por cumplir con

ser cercano a la práctica del profesor y de interés para los investigadores, tal como se evidenció en los antecedentes (sección 1.4).

A forma de resumen, el concepto de variable se consideró cercano a la práctica del profesor por estar presente éste y sus usos de forma explícita en el curriculum de matemáticas del NMS propuesto por el plan de estudios de la SEP (2017), el cual funge como guía para la dosificación de las clases del profesor. Ahora como tema de interés para la investigación, principalmente porque a pesar de ser un concepto fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico y en sí para la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Morales y Díaz, 2003; Juárez, 2003; Juárez, 2011; Valencia, 2015; Trigueros y Ursini, 2018), los estudiantes (Morales y Díaz, 2003; Ursini y Trigueros, 2006; Escalante y Cuesta, 2012; Herrera, Cuesta y Escalante, 2016) y profesores (Juárez, 2003; 2011) presentan dificultades para la comprensión y manejo de este concepto.

Con base en la revisión de literatura nos percatamos que faltan propuestas que involucren al profesor de forma activa, particularmente en el estudio del concepto de variable, por lo que se considera como un área de oportunidad para la investigación realizar estudios del concepto de variable en colaboración con los profesores. A continuación, se justifica más esta parte de la interacción y colaboración con y entre profesores e investigadores siendo el interés general de esta investigación.

2.4 Las interacciones como eje rector

En este apartado se justifica la importancia de las interacciones entre profesores e investigadores como un medio para la construcción de conocimiento profesional.

Si bien, el trabajo colaborativo entre investigador y docente puede ser una tarea compleja para elaborar propuestas didácticas, autores como Solar y Rojas (2015), Climent y Carrillo (2003), Fernández et al. (2016) reportan que la **interacción** y reflexión del profesor con el investigador permite generar nuevas propuestas curriculares que el profesor puede llevar al aula. Solar y Rojas (2015) menciona que, “creemos que los procesos de reflexión de la práctica, en conjunto con los de preparación de la enseñanza, son los que permiten al docente adquirir un conocimiento que sea conducente a la implementación de nuevas propuestas curriculares” (p. 15). En este mismo tenor, Montecinos y Cortez (2015) señalan que:

Las teorías socioculturales de aprendizaje en general, y aprendizaje docente en particular, señalan la necesidad de dejar atrás modelos de formación docente que entregan prescripciones para el desempeño pedagógico (perfeccionamiento docente a cargo de expertos) e ir fortaleciendo modelos que ayudan a los docentes a reflexionar e indagar *sistemáticamente* acerca de sus prácticas pedagógicas. (p.54)

Por tanto, se pretendía promover a través de interacciones una experiencia de desarrollo profesional en la que se tomaran en cuenta los conocimientos obtenidos de la teoría y práctica de la docencia, así como los resultados de la investigación; considerando que ambos son igual de importantes para las nuevas propuestas curriculares que el profesor puede llevar al aula. Es decir, se pretende acercar los resultados de la investigación a la

práctica del profesor y que la investigación se enriquezca con la experiencia de él profesor, y con ello tener como resultado el diseño de tareas matemáticas sobre el concepto de variable enriquecidas por estas dos miradas, así como lo proponen Solar y Rojas (2015), Climent y Carrillo (2003), Fernández et al. (2016) y Sosa (2019).

2.5 Pregunta de investigación

Dado el planteamiento del problema expuesto en la sección 2.2, la pregunta que guió la presente investigación es: *¿Qué interacciones promueven la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable en una experiencia de desarrollo profesional con Profesores de Matemáticas de Bachillerato y una investigadora en formación?*

Para responder la pregunta de investigación se proponen los siguientes objetivos.

2.6 Objetivo General

Describir las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable en una experiencia de desarrollo profesional con Profesores de Matemáticas de Bachillerato y una investigadora en formación.

2.7 Objetivos específicos

- ✓ Identificar el papel de las interacciones como un medio para promover una experiencia de desarrollo profesional entre profesores de matemáticas y una investigadora en formación.
- ✓ Establecer un modelo para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento.
- ✓ Diseñar una secuencia que promueva la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes para propiciar la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable.
- ✓ Identificar el conocimiento profesional sobre el concepto de la variable, construido a partir de las interacciones que se promovieron en la experiencia de desarrollo profesional.

2.8 Alcances

En general, se espera que el describir las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional en una experiencia de desarrollo profesional, pudiera servir para brindar información específica sobre el tipo de interacciones que apoyan la construcción de conocimiento profesional y cómo promoverlas. De esta manera se espera favorecer el interés del trabajo colaborativo entre profesores e investigadores y brindar recursos exitosos para este tipo de experiencias. Aunado a esto, se pretende que dichas interacciones gestionen una participación tanto de los docentes como de los investigadores, permitiendo acercar los resultados que presentan las investigaciones en Matemática Educativa a la práctica docente del profesor y los conocimientos y experiencia del profesor de matemáticas a las investigaciones del campo.

De forma particular y en relación con ese acercamiento entre la investigación y la práctica docente, se espera que las tareas planteadas en la secuencia de aprendizaje propicien interacciones que promuevan la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable. Se considera que este conocimiento se puede ver reflejado en el diseño de tareas matemáticas que tanto los profesores como la investigadora en formación consideren adecuados para llevar al aula, en la modificación del discurso de los profesores al impartir el tema de variable (no evidenciado en esta investigación), así como la modificación en sus planeaciones (no evidenciado en esta investigación). Esto al considerar que en dichas interacciones los participantes pondrían en juego sus conocimientos y experiencias sobre el concepto de variable y sus usos, generando discusiones y reflexiones que propicien la co-construcción de nuevo conocimiento profesional en torno a dicho tema.

Lo anterior, dado que autores como Climent y Carrillo (2003); Solar y Rojas (2015); Fernández et al. (2016) y Sosa (2019), consideran que el trabajo conjunto entre profesores e investigadores genera un espacio de reflexiones que permiten la construcción de conocimiento profesional que promueve el desarrollo profesional de ambos. Por ende, consideramos que la construcción de conocimiento profesional de forma conjunta permitirá obtener el diseño de tareas matemáticas que potencien la construcción y comprensión del concepto de variable y sus usos; tareas que se consideren adecuadas de ser abordadas en el aula. Además de propiciar transformaciones de perspectiva en torno al concepto de variable y sus usos, y en consecuencia respecto su enseñanza y aprendizaje. Puesto que para dicha construcción de conocimiento profesional se ponen en juego las interacciones de los conocimientos que cada uno de los participantes aporten, por ejemplo, los docentes su conocimiento sobre la variable y sus usos y sobre la enseñanza de este tema; la investigadora en formación, su conocimiento sobre la variable y sobre el sustento teórico sobre su enseñanza, construcción y comprensión. Los conocimientos de ambos participantes se complementan, y es de esta forma que se espera que colaborativamente construyan conocimiento profesional en torno al concepto de variable. Esto con el propósito de que en clases futuras los profesores apliquen este conocimiento construido.

En los siguientes dos capítulos se presentan los aspectos teóricos y metodológicos que se utilizan para alcanzar el objetivo general de esta investigación: Describir las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable en una experiencia de desarrollo profesional con Profesores de Matemáticas de Bachillerato y una investigadora en formación. El capítulo 3 se centra en dar sustento sobre el modelo que permitió analizar las interacciones que promuevan la construcción de conocimiento profesional. El capítulo 4 se centra en el diseño de una secuencia que promueva la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes para propiciar la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable.

CAPÍTULO 3. ENFOQUE TEÓRICO

El enfoque teórico que permitió establecer un modelo para el análisis de las interacciones se conforma por los constructos de *interacción* y *construcción social de conocimiento profesional*, desde un enfoque sociocultural. Estos dos constructos según Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001) son centrales en propuestas de desarrollo profesional. Por tal motivo, se pretende establecer un modelo que permita analizar las interacciones. Para ello, se utilizan resultados de investigaciones como las de Gunawardena et al. (1997), Becerra (2006) y Juárez, Chamoso y González (2020) que indagaron sobre las interacciones desarrolladas en ambientes en línea y su relación con la construcción social del conocimiento.

A continuación, se describe a grandes rasgos cómo en el paradigma sociocultural se ligan los dos constructos centrales de la presente investigación que permitieron establecer el modelo para el análisis de las interacciones. Se presenta de manera general, dado que este paradigma se desarrolla en cada sección de este capítulo.

A partir de la década de 1920, emerge un nuevo paradigma para el desarrollo de aplicaciones e implicaciones educativas: **el paradigma sociocultural**. Éste es desarrollado por L. S. Vigotsky y su teoría está enfocada en la construcción de conocimiento mediante orientaciones sociales y culturales (Hernández, 1998). Por tal motivo se considera que dentro de este paradigma se ligan los dos constructos centrales de la presente investigación (interacciones y construcción de conocimiento) con los espacios de desarrollo profesional. Es decir, los espacios de desarrollo profesional tienen como principal indicador la construcción de conocimiento; donde éste se considera como un concepto de carácter esencialmente social e interactivo. Por consiguiente, las interacciones se convierten en uno de los medios para la construcción de conocimiento (Cardeñoso et al., 2001). Es por ello, que en esta sección se abordan estos tres elementos desde un enfoque sociocultural.

Se inicia por presentar una postura sobre desarrollo profesional, para estar en condiciones de relacionarlo con los constructos centrales de la presente investigación. De esta manera, se continúa con el estudio sobre la construcción social del conocimiento, teniendo así que las interacciones son un elemento importante para ello. Entonces, siendo las interacciones un constructo central para el desarrollo de esta investigación se presentan algunas nociones que se han trabajado en la literatura para finalmente adoptar la que más se adecue a los intereses de esta tesis. Enseguida, se presenta el modelo que se propone utilizar para analizar las interacciones que promuevan la construcción social del conocimiento. Esto permite delimitar que en esencia el eje rector de la presente investigación son las interacciones.

3.1 Desarrollo profesional y cómo promoverlo

Para establecer una postura sobre desarrollo profesional que permitiera alcanzar los objetivos que persigue esta investigación, este análisis se enfocó principalmente en autores que consideran al trabajo colaborativo entre profesores e investigadores como importante para mejoras en el desarrollo profesional específico de ambas partes (Climent y Carrillo, 2003; Solar y Rojas, 2015; Fernández et al., 2016).

Climent y Carrillo (2003) consideran el desarrollo profesional como un espacio de construcción de conocimiento profesional en el que el papel de la reflexión y la investigación colaborativa es fundamental. Por lo que hace la siguiente distinción entre cambio y desarrollo profesionales:

Este desarrollo profesional no es un simple modernismo respecto al término *cambio profesional*. Mientras éste encierra una actitud de superioridad del investigador respecto del profesor, aquél da a entender que lo más importante es propiciar espacios de reflexión sobre el propio conocimiento y las propias creencias, siendo esto el eventual punto de partida de un cambio elegido por el profesor. (p. 388)

Además, al igual que Sowder (2007), Climent y Carrillo (2003) consideran el desarrollo profesional como algo personal, pero que también requiere acompañamiento en su proceso. Otro punto importante que trata Climent y Carrillo (2003) es el papel del investigador en este proceso de desarrollo profesional del profesor. Proponiendo “el trabajo conjunto de pequeños grupos de profesores e investigadores-formadores en un proceso común de investigación-desarrollo profesional” (p. 400). Similarmente, Fernández et al. (2016) propone “desarrollar proyectos de trabajo colaborativo entre investigadores y docentes que nutran las prácticas de ambas partes en su desarrollo profesional específico” (p.810). Para ello, Montecinos (2003; citado en Fernández et al., 2016) menciona que trabajar en equipo, la discusión de los participantes y la reflexión son características para que estos programas de desarrollo profesional sean efectivos.

Por su parte, Guskey (2000; 2002, citado en Sosa, 2019) toma como parte del desarrollo profesional el diseño de actividades que promuevan cambios y mejoras en el conocimiento profesional. Este autor menciona que:

El desarrollo profesional involucra a aquellos procesos y actividades diseñados con el propósito de cambiar y mejorar el conocimiento profesional, las prácticas docentes en el aula, las habilidades y actitudes de los profesores y, a su vez, el aprendizaje de los estudiantes. (Citado en Sosa, 2019, p. 1)

Por otra parte, Sosa (2019) particulariza que “el desarrollo profesional docente en matemáticas es un proceso progresivo de *transformación*, tanto en el docente como en sus actividades profesionales, hacia la mejora de la práctica y el aprendizaje matemático de los estudiantes” (p. 61). Putman y Borko (2000; citado por Montecino y Cortez, 2015) mencionan que el desarrollo profesional es “un conocimiento que se construye a través de interacciones sociales en el contexto en el cual se aplica y que se genera tanto en el mundo académico como en el mundo laboral” (p.54).

Con lo expuesto sobre desarrollo profesional hace alusión a palabras o frases como: interacciones sociales, trabajo colaborativo, trabajo en equipo, construcción de conocimiento profesional, reflexión, transformación, diseño de actividades y mejora de la práctica. Por tanto, en esta investigación se entiende por **desarrollo profesional** como un espacio de interacción y colaboración entre profesores e investigadores en el que ambas partes construyen conocimiento profesional. Además, consideramos la reflexión de los participantes y el diseño de las actividades como factores implícitos e importantes en este *desarrollo*

profesional. Puntualizando que las posturas que más se aproximan a lo que se pretende realizar en esta investigación son:

- ✓ Cardeñoso et al. (2001): permite ubicar el estudio que se pretende abordar en esta investigación en la segunda vertiente de la línea de desarrollo profesional, relacionada a problemáticas sobre la elaboración del conocimiento profesional.
- ✓ Climent y Carrillo (2003): adoptamos la idea de desarrollo profesional como un espacio de construcción de conocimiento profesional.
- ✓ Fernández et al. (2016): consideran el trabajo conjunto entre grupos de profesores e investigadores, donde se promueva el desarrollo profesional en ambas partes. Donde toman en cuenta lo importante de la discusión y reflexión.
- ✓ Sosa (2019): da pauta a lo que involucra el desarrollo profesional, y toma en cuenta las actividades diseñadas para promover la mejora de conocimiento profesional.

Lo anterior, dado que una experiencia de desarrollo profesional entre profesores de matemáticas de bachillerato y una investigadora en formación, donde ambos construyan conocimiento profesional norma el desarrollo de esta investigación. Por consiguiente, es de interés retomar parte de la definición de desarrollo profesional lo concerniente a construcción de conocimiento e interacciones, pues las interacciones son uno de los medios que promueven la construcción de conocimiento profesional (Putman y Borko, 2000, citado por Montecino y Cortez, 2015; Cardeñoso et al., 2001) y la construcción de conocimiento es el principal indicador de que se está promoviendo desarrollo profesional (Putman y Borko, 2000, citado por Montecino y Cortez, 2015; Climent y Carrillo, 2003). Por ello, se considera pertinente comenzar por presentar ideas concernientes a la construcción de conocimiento y posteriormente aunar sobre por qué las interacciones son consideraras uno de los medios para promover dicha construcción.

3.2 Construcción social del conocimiento

Es preciso señalar que al hacer referencia sobre construcción de conocimiento de manera implícita el aprendizaje se hace presente, por lo que en esta investigación no se hace distinción de uno hacia otro, sino se consideran como dos nociones que están directamente interrelacionadas. Vigotsky, quien desarrolló el paradigma sociocultural, enfoca su teoría en la construcción de conocimiento mediante orientaciones sociales y culturales. Al respecto, Hernández Rojas afirma que dicho pensador “siempre sostuvo que el aprendizaje específicamente humano es un proceso en esencia interactivo” (Hernández, 1998, p. 237). Este autor, basado en ideas de Vigotsky, señala que uno de los aspectos centrales sobre el aprendizaje es el papel de las interacciones sociales con otros. Sobre este punto, Antunes (2007) hace alusión al aprendizaje que adquiere el sujeto no sólo de modo autónomo, sino también a aquel que se adquiere por medio de una interacción. Además, señala la influencia que tiene el contexto en el que se pretende promover el aprendizaje, haciendo la siguiente analogía: “el aprendizaje, así como una cirugía de riesgo, puede realizarse en cualquier ambiente; sin embargo, la posibilidad de éxito no depende únicamente de la capacidad de quien la realiza, sino también de las circunstancias ambientales” (p. 23).

De manera más puntual, es preciso señalar que el concepto de *conocimiento profesional* varía de acuerdo con los intereses y objetivos de cada investigación. Por ejemplo, en Solar y Rojas (2015) este concepto es relativo al conocimiento matemático para enseñar. Además, señalan que “estos conocimientos del profesor se pueden implementar y evidenciar en diversos momentos de la práctica, tales como el estudio de las matemáticas, la planificación de situación de enseñanza y, en particular, la gestión de estas situaciones en el aula” (p. 21). En Carrillo y Climent (2003), consideran el conocimiento profesional de las maestras como aquellas concepciones, actitudes y capacidades en relación con la materia y su enseñanza.

Por otro lado, a comparación de los autores anteriores es en Fernández et al. (2016) donde se hace alusión al conocimiento del contenido matemático y conocimiento didáctico del contenido, involucrando el papel tanto del profesor como del investigador en estos conocimientos. Reportando que “el conocimiento emergente de la investigación constituye conocimiento didáctico del contenido que es uno de los conocimientos base para la enseñanza (Shulman, 2005)” (p. 809) y que por tanto es importante facilitar la comprensión a los docentes de ello. Al respecto Ponte (2012) señala que, dentro del conocimiento didáctico relativo a la práctica educativa, existe una cuarta dimensión del conocimiento que incluye:

las planificaciones a largo o medio plazo, tales como el plan pensado para cada sesión de clase, la elaboración de las tareas a realizar, y todas aquellas cuestiones relativas a la conducción de la actividad en el aula de matemáticas: formas de organización del trabajo del alumnado, creación de una cultura de aprendizaje en el aula, desarrollo y regulación de los modos de comunicación y evaluación de los aprendizajes del alumnado y de la enseñanza del propio profesorado, etc. (p. 6)

En este sentido y en relación con lo que plantea Linares (2020) en esta investigación se entiende por *conocimiento profesional* como aquel que ayuda al docente a justificar sus decisiones en las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Linares, 2020). Pues se pretende que en esta experiencia de desarrollo el conocimiento construido por los profesores y una investigadora en formación permita diseñar tareas matemáticas que puedan ser aplicadas en el aula. Al respecto, autores como Antunes (2007), Lebrija et al. (2010), Fernández et al. (2016), brindan elementos para pensar en los procesos de aprendizaje desde una perspectiva sociocultural. Antunes (2007) pone énfasis en la importancia de la relación e interacción entre los profesores y los alumnos. Por su parte, Lebrija et al. (2010) cita a McCombs (2001), quien enlista una serie de elementos para lograr un aprendizaje exitoso, menciona que el sujeto será más eficaz “cuando se tiene en cuenta su desarrollo diferenciado dentro y a través de dominios físicos, intelectuales, emocionales y sociales, y cuando tiene oportunidad de interactuar con otros” (p. 35). Finalmente, Pea (1993; citado en Fernández et al., 2016) afirma que: “el aprendizaje se construye a través de conversaciones entre las personas, que involucran la creación de comunicaciones y el esfuerzo para interpretarlas” (p. 811).

Lo expresado anteriormente permite resumir que el conocimiento profesional “siempre tiene como base fundamental la experiencia y la reflexión sobre la experiencia, no solo individual, sino de todo el cuerpo profesional” (Ponte, 2012, p. 4) y con ello deducir que las interacciones son un elemento importante para el aprendizaje y en consecuencia para la construcción social del conocimiento. Por tanto, se prosigue a indagar sobre la noción de interacción.

3.3 Noción de interacción

Las interacciones se han considerado desde dos perspectivas, según Becerra (2006), una teórica enfocada en cómo docentes y estudiantes interactúan con la computadora y otra social, que las reconoce como acciones interconectadas de los miembros de un grupo. La segunda perspectiva se relaciona con las teorías socioculturales del aprendizaje docente, éstas señalan que es necesario dejar atrás modelos de formación docente centrados en el perfeccionamiento docente a cargo de expertos, e ir fortaleciendo modelos que ayuden a los docentes a reflexionar e indagar constantemente acerca de sus prácticas pedagógicas y didácticas (Fullan, 2007; citado por Montecinos y Cortez, 2015). Al respecto, es importante rescatar la idea de dejar atrás el perfeccionamiento docente a cargo de expertos, puesto que como señala Antunes (2007), “las personas que se sitúan en el entorno del que aprende no son objetos estáticos y pasivos, sino compañeros dinámicos que guían, regulan, seleccionan, comparan, analizan y registran desarrollo” (p.26). En consecuencia, da indicios de pensar en un espacio de aprendizaje donde no exista ese sentido de superioridad entre los participantes, sino todo lo contrario donde se promueva una interacción entre iguales. Tudge y Rogoff (1995, citado en Hernández, 1998) señalan que:

Los estudios sobre interacción entre iguales, en el marco de interpretación vigotskyano, se han dirigido a dos situaciones: la coconstrucción o actividad conjunta-colaborativa de tareas entre participantes con similares competencias cognitivas, y las tutorías entre uno que sabe más y otro(s) que sabe(n) menos. (p. 232)

En esta investigación la interacción entre iguales la situamos en la primera situación, donde se valoran las potencialidades de cada uno de los participantes para la co-construcción de conocimiento de forma colaborativa. Puesto que, tanto la docencia como la investigación poseen su teoría y práctica particulares (Climent y Carrillo, 2003), presenciamos la conformación de áreas específicas las cuales reservan, cada una, su propio ámbito de especialización. Es decir, se consideran las potencialidades del profesor en torno a su experiencia frente a grupo, su conocimiento del medio y el contexto; por otro lado, una de las potencialidades del investigador es promover estrategias didácticas con el propósito de que, aquellos temas matemáticos considerados complejos desde el campo de la matemática educativa puedan ser abordados de una manera más fácil pero sustancial en la enseñanza. Es por ello, desde este punto de vista, no existe motivo o razón para arrogarse una actitud de superioridad del investigador respecto del profesor o viceversa, es decir, ambos son importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje (tal como se evidenció en los antecedentes de esta investigación). Por tanto, en este trabajo la participación de los profesores y la investigadora en formación se toma como una interacción equitativa, dado que se pretende, de forma colaborativa, que ambos construyan conocimiento profesional de todas las actividades implicadas en esta interacción.

Para tener claro a que nos referimos cuando mencionamos interacción o colaboración equitativa, adoptamos algunos puntos reportados en Climent y Carrillo (2003). Estas autoras presentan una definición de investigación colaborativa descrita por Feldan (1993):

«una investigación colaborativa “equitativa” es aquella en la que los siguientes aspectos se aplican de igual manera para todos los “actores”: trabajan a la par; asumen la misma responsabilidad en la identificación de los problemas, recogida de datos, análisis, y escritura de los resultados; comparten el mismo conjunto de objetivos; y se aseguran de que sus fines se alcanzan». (p. 394)

Por tanto, adaptando la cita anterior, en esta investigación consideraremos colaboración equitativa aquella en la que se cumplan los siguientes aspectos:

- Los participantes trabajan a la par.
- Existe confianza y respeto entre todos.
- Todos los participantes tienen claro los objetivos en cada acción de esta colaboración.
- Todos asumen la misma responsabilidad en la realización de actividades, según les corresponda.
- Todos los participantes se aseguran de que los objetivos sean alcanzados.
- Todos son partícipes del logro de los objetivos.

Para complementar la noción de interacción se recurre a presentar algunas definiciones o características recuperadas por Padilla y Hernández (2012), citando a los autores principales que las formularon (ver tabla 1).

Tabla 1

Características o aspectos que cumple la interacción

Garrison y Cleveland-Innes consideran la interacción como el eje central de la experiencia educativa, que debe ser sistemática y estructurada si se desea fomentar pensamiento crítico y reflexivo; la interacción constituye la base para el desarrollo del acto educativo, mediante el cual se promueve la relación de los estudiantes entre sí, de los estudiantes con el profesor y de los estudiantes con el contenido.

Shannon y Weaver conciben la interacción vinculada a las teorías clásicas de la comunicación, en la que existe un emisor y un receptor de información, quienes fungen como emisores y receptores a la vez. En este modelo, la comunicación se considera un proceso de transmitir información, en el cual lo que importa es la claridad de la información y la eliminación del ruido u obstáculos del proceso comunicativo.

Moore señala que "la interacción es el concepto que está en el fondo de lo que se denomina distancia transaccional, la cual se entiende como la distancia que existe en las relaciones instruccionales". De acuerdo con esta definición, la distancia está determinada por la cantidad de diálogo que se genera entre el instructor y los estudiantes, así como del nivel de estructura que existe en el diseño del curso. Así, cuando se obtenga más estructura que diálogo entre instructor y estudiantes, se tendrá

una mayor distancia transaccional.

Fuente: Padilla y Hernández (2012, p.3)

A partir de las definiciones presentadas en la Tabla 1, Padilla y Hernández (2012) reportan que “en términos generales, el concepto de interacción remite a los procesos de diálogo entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes entre sí, que favorecen o apoyan el proceso educativo” (p.3). Ante lo cual, para los intereses de la presente investigación, es una definición que no está totalmente relacionada con la construcción de conocimiento profesional. Por tanto, en esta investigación se adopta la definición de *interacción* propuesta por Gunawardena, et al. (1997) como el proceso esencial de unir las piezas en la co-creación del conocimiento. Las piezas a las que hacen referencia estos autores son las contribuciones de los participantes individuales o colectivos basados en la experiencia, la investigación y teoría, por mencionar algunas. Estas piezas se van uniendo a medida que avanza la experiencia de aprendizaje, y en dicho proceso ocurre la negociación de significado y la co-creación de conocimiento. Esta definición hace una relación directa entre las contribuciones de cada individuo y la construcción de conocimiento por lo que se considera la más cercana a los intereses de la presente investigación.

Así, la postura adoptada en esta investigación sobre la noción de interacción, enfatizando el aspecto de la construcción de conocimiento profesional a través de lo que cada individuo aporta al mismo, incide en la necesidad de elaborar un modelo que permita analizar las interacciones que promuevan, de la mejor manera, tal construcción social del conocimiento. Es preciso señalar que, para establecer este modelo, se toma en cuenta lo que proponen Gunawardena, et al. (1997) sintetizado en cinco fases, las cuales permiten examinar dicha construcción social de conocimiento. Asimismo, se toman en cuenta otras propuestas de modelos presentes en diversas investigaciones.

3.4 Modelos para el análisis de las interacciones en la construcción social de conocimiento

Para establecer un modelo que permita analizar las interacciones que promuevan la construcción de conocimiento profesional, se inicia por una revisión teórica de modelos y propuestas de análisis de las interacciones.

De los resultados de Flores y Miguel (2014) se tiene la comparación de cinco modelos que permiten el análisis de las interacciones en entornos virtuales de aprendizaje. Estos modelos están conformados por diversas dimensiones y categorías, tal como se muestra en la Tabla 2. La finalidad de retomar esta comparación es determinar cuál o cuáles de las dimensiones y categorías que plantea cada modelo podrían ser más idóneos para el análisis de las interacciones que promuevan la construcción social de conocimiento, y así poder establecer un modelo acorde a los intereses de la presente investigación.

Tabla 2

Comparación de los modelos de análisis de interacción en entornos virtuales de aprendizaje

Referencia	Dimensiones	Categorías
-------------------	--------------------	-------------------

Henri (1992)	Participativa Social Interactiva Cognitiva Metacognitiva	Número de mensajes y declaraciones. Presentación y apoyo verbal. Flujo de interacciones entre los participantes. Hacer preguntas. Plantear inferencias, Formular hipótesis, Declaraciones de nuevos conocimientos.
Gunawardena, Lowe y Anderson (1997)	Fase I. Compartir y comparar la información	Aseveraciones de observación u opinión. Aseveraciones de acuerdo de parte de uno o más de los participantes. Ejemplos que acuerden provistos por uno o más de los participantes. Plantear y contestar preguntas para clarificar detalles de las aseveraciones. Definición, descripción o identificación del problema.
	Fase II. Descubrimiento y exploración de disonancia de las inconsistencias entre ideas, conceptos o aseveraciones.	Identificación y declaración de las áreas de desacuerdo. Plantear y contestar para clarificar la fuente y el alcance del desacuerdo. Reaseverar la posición del participante.
	Fase III. Negociación del significado y construcción mutua de conocimiento.	Negociación o clarificación del significado de términos. Negociación del peso relativo a asignarse a las clases de argumentos. Identificación de áreas de acuerdo entre los conceptos que choquen. Propuesta y negociación de aseveraciones nuevas, que incorporen términos medios y/o construcción mutua. Propuesta para integrar o acomodar metáforas o analogías.

Fuente: Flores y Miguel (2014, p. 92)

Tabla 3

Comparación de los modelos de análisis de interacción en entornos virtuales de aprendizaje

Referencia	Dimensiones	Categorías
------------	-------------	------------

Gunawardena, Lowe y Anderson (1997)	Fase IV. Comprobación y modificación de la síntesis o construcción propuesta.	Comprobación de la síntesis propuesta. Comprobación con referencia a esquemas cognitivos ya existentes. Comprobación con referencia a la experiencia personal. Comprobación con referencia a los datos formales recogidos. Comprobación con referencia al testimonio contradictorio en la literatura.
	Fase V. Aseveración de acuerdo y aplicación del Conocimiento construido de nuevo.	Resumen de los acuerdos. Aplicación de nuevos conocimientos. Aseveraciones metacognitivas de parte de los participantes que ilustren que hayan cambiado su conocimiento.
Garrison, Anderson y Archer (1999)	Presencia cognitiva	Hecho desencadenante, Exploración Integración, Resolución
	Presencia social	Dimensión afectiva, Comunicación abierta, Cohesión de grupo
	Presencia docente	Diseño y organización Promover y animar la elaboración discursiva Orientación explícita
Rounke, Anderson, Garrison, y Archer (1999)	Expresiones afectivas	Expresiones de emociones, Uso del humor
	Expresiones interactivas	Auto-revelación Continuidad del hilo de discusión Cita de mensajes de otros Referencia explícita a mensaje de otros Realización de preguntas Complemento o expresión de apreciación
	Expresiones cohesivas	Expresión de acuerdo Vocativos, Referencia al grupo. Uso de pronombres inclusivos, Saludos

Fuente: Flores y Miguel (2014, p. 92)

Tabla 4

Comparación de los modelos de análisis de interacción en entornos virtuales de aprendizaje

Referencia	Dimensiones	Categorías
García, y Perera (2007)	Cognitiva	Iniciación, Exploración de ideas, Integración – construcción, Resolución del dilema/problema.
	Social	Afectiva, Interactiva, Ocio, Cohesión

Didáctica

Diseño instruccional y de gestión,
Facilitar el discurso, Tareas, Enseñanza
directa

Perfil

Agentes de la acción formativa

Fuente: Flores y Miguel (2014, p. 92)

De las dimensiones que presenta el modelo de Henry (1992) todas resultan de interés excepto la participativa, pues se está de acuerdo con lo que señala Gunawardena, et al. (1997, p.2):

si bien las técnicas de análisis de participación tienen valor para determinar quién participó, cuán activamente y durante cuánto tiempo, ni el análisis cuantitativo de participación ni los informes de satisfacción particular arrojan información sobre la construcción del conocimiento o la calidad del aprendizaje que tuvo lugar en una conferencia informática. Para evaluar la calidad de las interacciones y la calidad de la experiencia de aprendizaje en un entorno de conferencia mediado por computadora, el análisis de contenido o el análisis de interacción de las transcripciones por computadora es esencial.

Ahora, respecto al resto de las dimensiones (social, interactiva, cognitiva y metacognitiva) y categorías que propone; se considera que el modelo de Gunawardena y colaboradores las contemplan. La categoría de presentación y apoyo verbal correspondiente a la dimensión social se considera está presente en las tres primeras fases del modelo donde los participantes comienzan a compartir sus ideas y a presentar apoyo verbal ante lo que mencionan otros participantes. La dimensión interactiva, referente al flujo de interacciones entre los participantes, se considera está presente en todas las fases, pues en todas se promueve que el participante retome o considere aseveraciones que otro participante ya haya mencionado. La dimensión cognitiva en esencia está considerada dentro de todo el modelo, pues éste se focaliza en “analizar específicamente la dimensión relativa al proceso de construcción social del conocimiento” (Flores y Miguel, 2014, p. 89). Finalmente, se considera que la dimensión metacognitiva está involucrada desde la Fase III hasta la Fase V.

Respecto del modelo que presenta Garrison, Anderson y Archer (1999), las tres dimensiones resultan de interés. Sin embargo, se considera que no todas son pertinentes para el modelo de análisis de las interacciones que promuevan la construcción de conocimiento profesional. La presencia cognitiva tal como se propone en este modelo se considera aporta al diseño de tareas matemáticas para desarrollar la secuencia de aprendizaje que se presenta en el siguiente capítulo, por lo que no se adopta para el modelo de análisis de las interacciones, pues está más enfocada a acciones que se pueden considerar para generar transformaciones cognitivas en los participantes. La presencia social (referente a lo afectivo, la comunicación abierta, cohesión del grupo), si bien se está consiente que en algún momento de la experiencia se presentará y que también influye en la construcción de conocimiento, el interés de la presente investigación se centra en analizar la parte cognitiva. Finalmente, *la dimensión que se adopta de este modelo* es la de presencia docente, pues se

considera estará fuertemente presente al llevar a cabo las tareas matemáticas que promuevan la Fase V del modelo de Gunawardena y colaboradores.

Lo que concierne a las dimensiones que propone el modelo de Rounke, Anderson, Garrison y Archer (1999); las expresiones afectivas como ya se mencionó no son el objetivo de análisis, las expresiones interactivas y cohesivas se considera están presentes dentro del modelo de Gunawardena. Además, por ejemplo, no todas las categorías que se proponen en la dimensión de expresiones cohesivas son de interés analizar, pues se considera que no arrojan información sobre la construcción del conocimiento o la calidad del aprendizaje que se presenta, esto es: uso de pronombres inclusivos y saludos.

Finalmente, respecto del modelo que propone García y Perera (2007), las dimensiones que se considera son distintas a las del resto de los modelos analizados son la dimensión didáctica y la dimensión perfil, por lo que es preciso analizarlas. Respecto la dimensión didáctica si bien se considera que está presente en la Fase V del modelo de Gunawardena y colaboradores, se cae en cuenta que la dimensión didáctica está más relacionada a aplicar en el aula los conocimientos construidos, es decir, a llevar a la práctica docente lo aprendido y ver qué ha pasado. Lo cual en esta investigación se considera no se logrará alcanzar. Ahora, respecto la dimensión perfil, esta se considera es importante, pero en el diseño de la secuencia de aprendizaje como un factor de contextualización para saber a quienes será dirigida la experiencia de desarrollo profesional. Por lo que en específico de este modelo no se adopta ninguna dimensión ni categoría para el modelo de análisis de las interacciones.

Entonces, después de analizar y comparar los modelos presentados en la Tabla 2, para esta investigación se considera pertinente adoptar el modelo de Gunawardena, et al. (1997), conjuntado con la dimensión docente propuesta por Garrison, Anderson y Archer (1999). Esto porque las dimensiones y categorías que contemplan estos modelos, en conjunto permiten valorar la dimensión cognitiva, es decir, indagar sobre la construcción de conocimiento en un conjunto de interacciones. A continuación, se presenta información más detallada sobre el modelo de Gunawardena et al. (1997), pues será central para establecer el modelo para el análisis de las interacciones.

Gunawardena et al. (1997) proponen un modelo para analizar las interacciones que permiten la construcción social del conocimiento en conferencias por computadora. En este modelo consideran cinco fases progresivas con que se puede examinar la construcción social de dicho conocimiento, cada una de estas fases presenta distintos aspectos que permiten examinar con mayor detalle cómo se puede propiciar la construcción de conocimiento en cada una de las fases (ver figura 2).

FASE 1: COMPARTIR / COMPARAR INFORMACIÓN.	
A. Una declaración de observación u opinión	F1/A
B. Una declaración de acuerdo de uno o más participantes.	F1/B
C. Ejemplos de corroboración proporcionados por uno o más participantes	F1/C
D. Hacer y responder preguntas para aclarar detalles de declaraciones	F1/D
E. Definición, descripción o identificación de un problema	F1/E
FASE 2: EL DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN DE DISONANZAS O INCONSISTENCIAS ENTRE IDEAS, CONCEPTOS O DECLARACIONES.	
A. Identificar y señalar áreas de desacuerdo	F2/A
B. Hacer y responder preguntas para aclarar la fuente y el alcance del desacuerdo	F2/B
C. Representar la posición del participante y posiblemente presentar argumentos o consideraciones en su apoyo mediante referencias a la experiencia del participante, literatura, datos formales recopilados o propuesta de metáfora o analogía relevante para ilustrar el punto de vista	F2/C
FASE 3: NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADO / CO-CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO	
A. Negociación o aclaración del significado de los términos	F3/A
B. Negociación del peso relativo que se asignará a los tipos de argumentos	F3/B
C. Identificación de áreas de acuerdo o superposición entre conceptos en conflicto	F3/C
D. Propuesta y negociación de nuevas declaraciones que incorporen compromiso, co-construcción	F3/D
E. Propuesta de integración o acomodación de metáforas o analogías	F3/E
FASE 4: PRUEBA Y MODIFICACIÓN DE LA SÍNTESIS O CO-CONSTRUCCIÓN PROPUESTA	
A. Prueba de la síntesis propuesta contra "hechos recibidos" que comparten los participantes y / o su cultura	F4/A
B. Prueba contra el esquema cognitivo existente	F4/B
C. Prueba contra la experiencia personal	F4/C
D. Pruebas contra datos formales recopilados	F4/D
E. Pruebas contra testimonios contradictorios en la literatura	F4/E
FASE 5: DECLARACIÓN (ES) DE ACUERDO / APLICACIONES DE SIGNIFICADO DE NUEVA CONSTRUCCIÓN	
A. Resumen de acuerdo (s)	F5/A
B. Aplicaciones de nuevos conocimientos	F5/B
C. Declaraciones metacognitivas de los participantes que ilustran su comprensión de que sus conocimientos o formas de pensar (esquema cognitivo) han cambiado como resultado de la interacción de la conferencia.	F5/C

Figura 2. Modelo de análisis de interacción para examinar la construcción social del conocimiento en conferencias por computadora (Gunawardena et al., 1997, p. 411)

En el modelo de Gunawardena y colaboradores (1997) algunos puntos de apoyo que permiten identificar la co-construcción de conocimiento son:

- 1) Tipo de actividad cognitiva realizada por los participantes (cuestionar, aclarar, negociar, sintetizar, etc).
- 2) Tipos de argumentos (abductivos, inductivos, deductivos) presentados a lo largo del debate.
- 3) Recursos aportados por los participantes para explorar sus diferencias y negociar nuevos significados, como relatos de experiencias personales, citas bibliográficas, y datos recopilados.
- 4) Evidencia de cambios en la comprensión o la creación de nuevas construcciones personales de conocimiento como resultado de interacciones dentro del grupo.

Respecto estos apoyos de interacción de forma particular en esta investigación la *actividad matemática* se entiende como aquella que tiene una dimensión social dentro del entorno de aprendizaje. Pues Font, Planas y Godino (2010) señalan que “la actividad matemática en el aula tiene una dimensión social ya que la clase es una micro-sociedad donde tiene lugar la difusión y construcción de conocimiento matemático a través de la interacción social entre alumnos y profesor” (p. 100). Respecto los *tipos de argumentos*, se consideran tres; los inductivos y abductivos que tienen base empírica y los deductivos que tienen su base en la

formalidad (Molina y Samper, 2019). Ahora, los *tipos de recursos* a considerar son: humanos y sociales y materiales; los dos primeros incluyen el desarrollo de los entornos de aprendizaje y el aumento de los conocimientos de los participantes, por su parte, los recursos materiales incluyen planes curriculares y recursos adicionales que se podrían utilizar para facilitar el trabajo de los docentes en el aula (Sowder, 2007). Finalmente, la *creación de conocimiento* se entiende como un proceso de síntesis a través del cual la organización interactúa con las personas y el medio ambiente de forma dinámica e interrelacionada desde un nivel individual a social (Nonaka y Toyama, 2003). Cabe mencionar que algunos de estos apoyos de interacción forman parte de las categorías del modelo de análisis de las interacciones, por lo que más adelante se describen con mayor detalle.

Por otra parte, Gunawardena et al. (1997) señalan que algunas de las principales ventajas de su modelo son (p.428):

- Su definición de “interacción en un contexto de Comunicación Medida por Computadora (CMC)” como vehículo para la co-construcción del conocimiento.
- Su enfoque en el patrón general de construcción del conocimiento que surge de una conferencia.
- Su idoneidad para su uso en contextos de aprendizaje constructivistas y colaborativos, centrados en el alumno.
- Su sencillez y sencillez de uso.
- Su adaptabilidad a diferentes propósitos de evaluación.

Finalmente se considera que se puede conjuntar con la dimensión docente presentada por Garrison, Anderson y Archer (1999), pues se piensa estará fuertemente presente al llevar a cabo las tareas matemáticas que promuevan la Fase V del modelo de Gunawardena y colaboradores.

Ahora, algo importante de aclarar: si se analiza con mayor detalle las fases que propone el modelo de Gunawardena, et al. (1997) se cae en cuenta que estas fases están muy ligadas a un modelo de instrucción que permite orientar el desarrollo de una secuencia de aprendizaje centrada en interacciones que promueven la construcción de conocimiento, por lo que como modelo de instrucción éste sirvió del todo. Por otro lado, si bien brinda criterios para analizar las interacciones, se tuvo que complementar con otros modelos para determinar categorías que permitan realizar un análisis más completo de las interacciones.

Para complementar las categorías que integraran el modelo de análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional, éstas se van a caracterizar considerando tres categorías:

- **Categoría 1: Tipo de interacciones** según la clasificación propuesta en Becerra (2006). Esta caracterización permite clasificar entre cuáles participantes se puede presentar una interacción en esta experiencia de desarrollo profesional, estas son: profesor-profesor; profesor-investigador; profesor-grupo; investigador-grupo; investigador-aprendiz (ver tabla 3). Cabe mencionar que la adaptación que se hace

es modificar el nombre del participante, pues en la presente investigación será una experiencia con y entre profesores y una investigadora en formación.

Tabla 5

Clasificación para analizar el Tipo de Interacción presente en una experiencia de desarrollo profesional

Clasificación	Descripción
Profesor – Profesor (P - P)	En este tipo de interacción un profesor envía un mensaje a otro u otros profesores y éstos responden. Esta interacción permite observar el grado en que los profesores interactúan entre sí, a través de una relación entre iguales y una comunicación bidireccional, lo cual es fundamental en la negociación de significados y la construcción social del conocimiento.
Profesor – Investigador (P - I)	Tipo de interacción en que el profesor envía un mensaje específicamente al investigador. Esta interacción permite observar, principalmente, el grado en que el profesor solicitó orientación y apoyo de manera directa al investigador.
Profesor – Grupo (P - G)	En este tipo de interacción un profesor publica mensajes sin un destinatario específico. Esta interacción permite analizar en qué medida los profesores se abocaron a la exposición general de comentarios. Esta interacción, si bien es necesaria en un proceso educativo, no es la apropiada para la negociación de significados, donde se requiere de la comunicación directa con los participantes.
Investigador – Grupo (I - G)	En este tipo de interacción el investigador publica mensajes que son dirigidos a todos los participantes del curso-taller. A través de esta interacción se examina el apoyo y motivación que ofrece la investigadora de manera general.
Investigador – Profesor (I - P)	En este tipo de interacción el investigador publica mensajes que son dirigidos a uno o varios profesores específicos. Con esta interacción se precisa el grado en que la asesora ofrece apoyo y motivación de manera individual con los profesores , a través de una comunicación directa.

Fuente: Adaptado de Becerra (2006, p. 67-68)

Becerra (2006) reporta que existe una estrecha relación entre la forma como se construye el conocimiento en los foros y la técnica pedagógica empleada y que ésta norma la forma como se presentan las interacciones. Por ello, se considera importante analizar entre quienes se da la interacción, y a partir de ello indagar el qué se obtiene de dicha interacción en relación con la construcción de conocimiento y cómo se da la interacción.

- **Categoría 2: Niveles de interacción** según la propuesta de Juárez, Chamoso y González (2020). Esta caracterización permite clasificar la forma en que los

participantes pueden interactuar en esta experiencia de desarrollo profesional, esto es: *aporta información, interactúa, interactúa y amplía* (ver tabla 4).

Tabla 6

Clasificación para analizar el Nivel de Interacción de las participaciones de los profesores y la investigadora en formación en esta experiencia de desarrollo profesional

<i>Nivel</i>	<i>Descripción</i>	<i>Ejemplos</i>
Aporta información (1)	Aporta ideas o preguntas que no se han considerado previamente.	<<El único ejercicio que es un problema de valores iniciales es el primero de la lista ya que tiene condiciones>>.
Interactúa (2)	Menciona ideas que han surgido de una aportación previa, ya sea aclarando, coincidiendo o discrepando.	<<Pues sí, se podría utilizar la transformada de Laplace porque las condiciones iniciales están en cero, pero el procedimiento es más largo >>. <<Coincido contigo en que este problema se debe resolver con el sistema masa-resorte>>.
Interactúa y amplía (3)	Amplia aspectos que han surgido en una aportación previa, ya sea coincidiendo o discrepando.	<<De acuerdo, mi planteamiento está bien, no es necesario usar variación de parámetros ya que es una ecuación homogénea y lineal>> <<No sé, creo que el problema de equilibrio de Karen puede servir más porque la condición inicial está dada en cero>>.

Fuente: Juárez et al. (2020, p. 167)

Dentro del modelo de Gunawardena et al. (1997) uno de los indicadores que se pretenden analizar en las transcripciones para identificar la co-construcción de conocimiento es el tipo de actividad cognitiva que realicen los participantes, entre las cuales están: cuestionar, aclarar, negociar, sintetizar. Por ello, se considera importante analizar cómo se da la interacción entre los participantes, y clasificarlos por Nivel de Interacción de acuerdo con lo presentado por Juárez et al. (2020).

- **Categoría 3: Apoyos en la interacción** según el modelo de Gunawardena et al. (1997). Esta caracterización está conformada por los argumentos y recursos que los participantes pueden emplear al interactuar, considerando ambos apoyos como importantes de analizar en las transcripciones para identificar de dónde surgen los sustentos utilizados por los participantes y que conllevan a la construcción de conocimiento. Pues los argumentos y recursos que utilicen los participantes incitarán a la exploración de diferencias y negociación de nuevos significados. Estos apoyos en la interacción son presentados en la Tabla 5.

Tabla 7

Apoyos de Interacción para el análisis e identificación de construcción de conocimiento según el modelo de Gunawardena et al. (1997)

<i>Indicadores de interacción</i>	<i>Descripción</i>
Argumentos	Abductivos, inductivos o deductivos. Los inductivos y abductivos tienen su base en las experiencias personales de las participantes relacionadas con el tema y los deductivos en artículos, citas bibliográficas, libros, y todo aquello que tenga su base en la formalidad (Molina y Samper, 2019).
Recursos	Humanos y sociales y/o materiales. Los dos primeros incluyen el desarrollo de los entornos de aprendizaje y el aumento del conocimiento de los participantes. Los recursos materiales incluyen planes curriculares y recursos adicionales que se podrían utilizar para facilitar el trabajo de los docentes en el aula (Sowder, 2007).

Fuente: Gunawardena et al. (1997)

La argumentación es otro de los indicadores que este modelo considera como importante analizar en las transcripciones para identificar la construcción de conocimiento, al igual que analizar los recursos y la evidencia de cambios en la comprensión o la creación de nuevas construcciones personales de conocimiento como resultado de las interacciones dentro del grupo.

No obstante que los conceptos de ‘abducción’, ‘inducción’ y ‘deducción’ podrían ser definidos en su sentido enteramente lógico, es decir, como ciertos razonamientos relacionados con premisas y conclusiones en un sentido de validez formal y lógica (el primero, como un proceso a través del cual la probabilidad es el resultado del procedimiento de razonamiento lógico, el segundo, donde las generalizaciones parten de instancias específicas y, el tercero, como aquel en el que se obtiene un resultado a partir de ciertos axiomas y reglas de inferencia preestablecidas y que, por lo tanto, dan a las conclusiones o resultados de la derivación un carácter de necesidad lógica y formal), es importante traer a colación los debates en los que esas nociones pueden entenderse más allá de su sentido formal y/o meramente lógico. Así, por ejemplo, Audi rescata en su diccionario filosófico algunas

discusiones en las que esos términos han ido interpretándose desde un punto de vista menos rigorista, es decir, que podemos extender su significado a ciertos razonamientos o inferencias “naturales” (cf. Audi, 2004. p. 234) en las que, a pesar de no formalizarse los axiomas, el hablante les da un carácter de inferencia pues advierte que las conclusiones se siguen necesariamente de ciertas premisas. De este modo, dichos términos se entenderán - para los fines de esta investigación- en un sentido amplio como el contenido en la tabla 7, pues se intenta, precisamente, recuperar y enfatizar el sentido amplio o natural que dichas nociones pueden tener y ser útiles para describir procesos cognitivos y conductuales en campos como la educación.

Por otro lado, el concepto de argumento (y su vocablo de acción ‘argumentación’) es otro que puede escudriñarse desde distintas perspectivas. Sin embargo, bástenos tomar aquí su sentido más amplio -por las mismas razones expuestas- pues más allá de su definición dogmática o doctrinal, lo que interesa aquí es referirse a su esencia como aquellos razonamientos mediante los cuales se intenta probar la verdad o falsedad de ciertos enunciados declarativos los cuales, por lo demás, pueden tener o no en primera instancia la intención de convencer o persuadir a otros.

Así, para finalizar, recapitulando lo presentado en esta sección, se concluye que el modelo para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional en una experiencia de desarrollo profesional, queda conformado por tres categorías: *tipos de interacción* que permite analizar entre quiénes se da la interacción; el *Nivel de interacción* que permite analizar cómo se da y la categoría de *Apoyos para la interacción*, que permite analizar con qué se da la interacción.

Ya que se ha establecido un modelo para analizar las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional, se prosigue a presentar la parte metodológica que permitió llevar a cabo la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes para propiciar la construcción de conocimiento profesional entorno al concepto de variable.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

El enfoque de esta investigación es de corte cualitativo. Los datos que interesa recolectar son los mensajes de los participantes durante la experiencia de desarrollo profesional y las actividades realizadas durante y después de la misma; los mensajes con la intención de ser categorizados de acuerdo con las interacciones que se evidencian en cada mensaje y posteriormente cuantificados para dar cuenta sobre qué interacciones se evidenciaron con mayor frecuencia en cada una de las fases del modelo de Gunawardena y colaboradores. La información recabada fue: entre cuáles participantes se dio la interacción, cómo se presentó y qué apoyos de interacción presentaron. Esto permitió describir las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional sobre el concepto de variable en un escenario de experiencia de desarrollo profesional entre profesores y una investigadora en formación. Dicho escenario se convirtió en el medio para propiciar la información de interés cuya naturaleza es cualitativa. La adopción de este enfoque está respaldada por lo expuesto en Patton (1980, 1990; citado por Hernández, Fernández y Baptista, 2010) quien señala la naturaleza de los datos cualitativos como “descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones” (p. 9). Además, su meta de investigación es “describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (Hernández, et al., 2010, p. 11).

Así mismo, se considera que esta investigación es de tipo descriptiva pues se especifican cómo son y se manifiestan las interacciones que promueven conocimiento profesional sobre el concepto de variable en esta experiencia de desarrollo profesional, para lo cual este tipo de investigación es útil (Hernández, et al., 2010). Al respecto, y de acuerdo a la revisión de la literatura sobre desarrollo profesional y el cómo promoverlo, se ha encontrado que un medio para ello es a través de las interacciones; sin embargo, poco se ha descrito sobre cómo son y se presentan las interacciones en los procesos de desarrollo profesional en el campo de la educación matemática, siendo de interés para esta investigación el indagar sobre éstas. Otro aspecto por el cual se considera que es una investigación descriptiva se debe a que a través de la literatura se han detectado y definido ciertas categorías sobre las interacciones, las cuales ayudan a fundamentar el estudio, pero no limitan a que existan otras categorías. En estos casos “la investigación puede iniciarse como descriptiva” (Hernández, et al., 2010, p. 86).

Finalmente, la contribución de esta investigación es práctica y teórica. Práctica porque esta experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes contribuyó en la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable, mediante el diseño de tareas matemáticas que de acuerdo a los criterios y experiencias de cada profesor y las investigadoras estas tareas podían ser llevadas al aula para potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos. Teórica porque permitió brindar mayor precisión respecto cómo son y se presentan las interacciones que promueven la construcción de conocimiento, donde profesores e investigadores en colaboración propiciaron un acercamiento entre los resultados que presentan las investigaciones y la práctica docente.

En los siguientes apartados se presenta información sobre cómo se llevó a cabo esta experiencia de desarrollo profesional. Se inicia por describir los métodos, técnicas e instrumentos empleados para alcanzar los objetivos específicos. Posteriormente se muestra un esquema metodológico sobre las fases de la presente investigación y se explica lo que concierne a cada una de éstas.

4.1 Métodos, Técnicas e Instrumentos

En la tabla 6 se enuncian los métodos, técnicas e instrumentos utilizados en esta investigación, para alcanzar el objetivo general a través de los objetivos específicos.

Tabla 8

Métodos, técnicas e instrumentos para alcanzar los objetivos específicos

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	MÉTODOS	TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
Identificar el papel de las interacciones como un medio para promover una experiencia de desarrollo profesional entre profesores de matemáticas y una investigadora en formación.	Análisis documental	Análisis de contenido	Fragmentos en la tesis (antecedentes y enfoque teórico).
Establecer un modelo para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento.	Análisis documental	Análisis de contenido	Modelo para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento. Ficha de registro para levantar información sobre las interacciones.
Diseñar una secuencia que promueva la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes para propiciar la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable.	Método didáctico Interrogativo	Adopción del modelo de instrucción de Gunawardena et al. (1997) y utilizar el modelo 3uv	Secuencia de aprendizaje

Identificar el conocimiento profesional sobre el concepto de la variable, construido a partir de las interacciones que se promovieron en la experiencia de desarrollo profesional.	Análisis de las interacciones que se presentaron en la experiencia de desarrollo profesional presentes en los videos.	Video-grabación Análisis de contenido Codificación de datos	Fragmentos en la tesis respecto las interacciones que promovieron la construcción de conocimiento profesional sobre el concepto de la variable y sus usos (Análisis y resultados)
		Interpretación de categorías	

4.2 Fases de la investigación

Enunciados los métodos, técnicas e instrumentos utilizados para alcanzar los objetivos específicos, se prosigue a presentar un esquema metodológico que refleja el procedimiento realizado para lograr el objetivo general de esta investigación (ver figura 3).

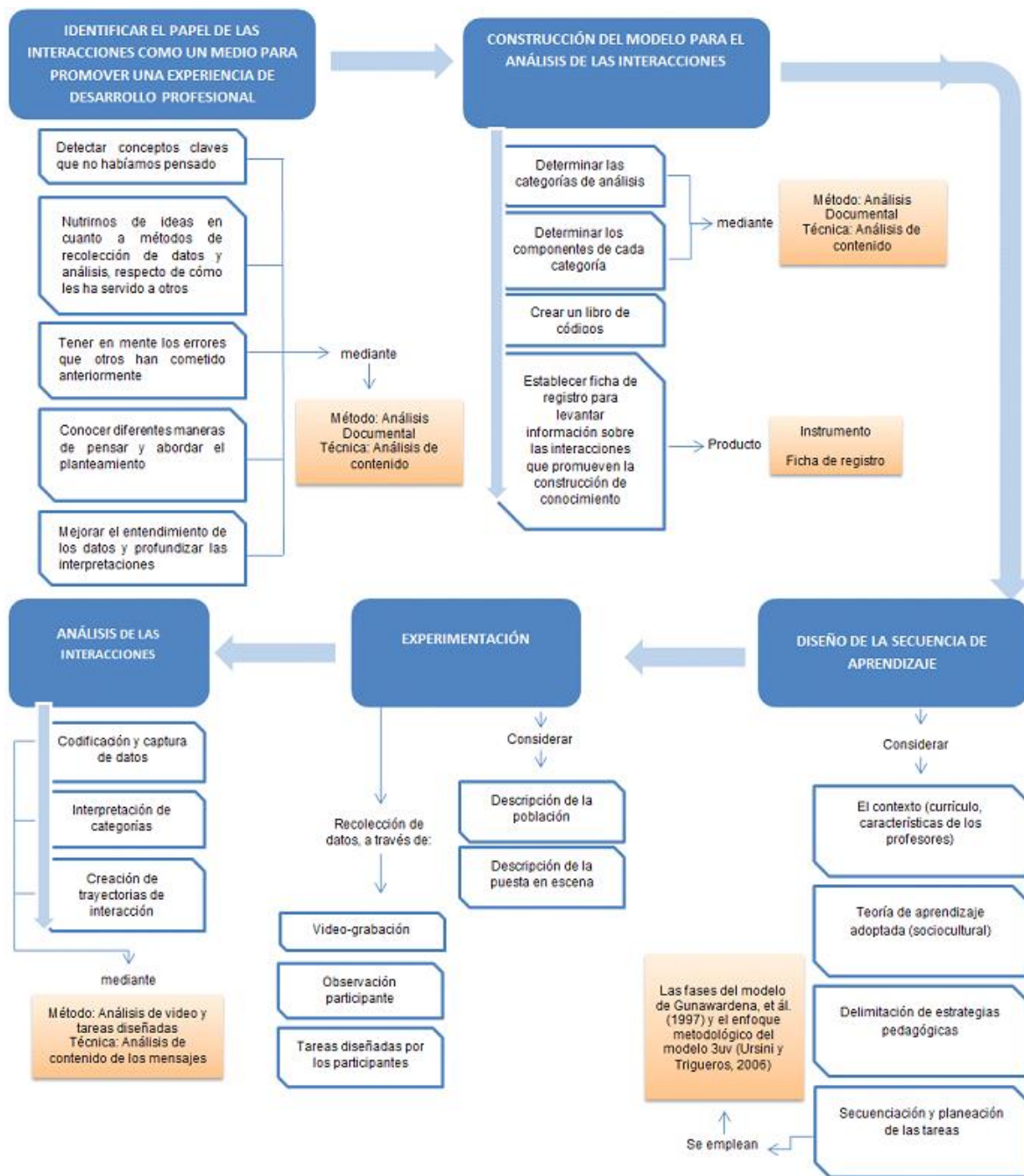


Figura 3. Esquema metodológico para alcanzar el objetivo general de la presente investigación

Como se hace explícito en la figura 3, el esquema metodológico propuesto consta de cinco fases que en esencia están ligadas con cada uno de los objetivos específicos. Las fases son: (1) Identificar el papel de las interacciones como un medio para promover una experiencia de desarrollo profesional; (2) Establecer un modelo que permita analizar las interacciones que promueven la construcción de conocimiento; (3) Diseño de una secuencia que promueva la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes para

propiciar la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable; (4) Experimentación y (5) Análisis de las interacciones. A continuación se explica lo que concierne a cada una de estas fases.

4.2.1 Identificar el papel de las interacciones como un medio para promover una experiencia de desarrollo profesional

Esta fase de identificar el papel que juegan las interacciones en los procesos de desarrollo profesional se considera como primordial para iniciar con el desarrollo de la presente investigación, pues, tiene como intencionalidad que el investigador tenga un primer acercamiento al problema de investigación en la realidad y que pueda de manera crítica y reflexiva tomar decisiones sobre qué considerar para desarrollar la experiencia de desarrollo profesional y cómo llevarla a cabo. Para lograrlo se utilizó el método de análisis documental (revisión de literatura), dado que Hernández et al. (2010) señala que la revisión de la literatura es útil para:

1. Detectar conceptos claves.
2. Nutrirnos de ideas en cuanto a métodos de recolección de datos y análisis, respecto de cómo les han servido a otros.
3. Tener en mente los errores que otros han cometido anteriormente.
4. Conocer diferentes maneras de pensar y abordar el planteamiento.
5. Mejorar el entendimiento de los datos y profundizar las interpretaciones.

De lo cual, si bien todos los puntos señalados fueron útiles, los puntos 2 y 5 se consideran centrales para el desarrollo de esta investigación. Puesto que el segundo hace referencia a obtener información sobre métodos que permitan recolectar y analizar los datos, en este caso indagar sobre las interacciones que promueven la construcción de conocimiento en espacios de desarrollo profesional y además cómo analizarlas. El paso cinco señala el adquirir un mejor entendimiento sobre las interacciones que se presentaron en esta experiencia, así como la interpretación de éstas.

Aunado a lo anterior, Kothari (2004) y López (2002) describen la técnica de análisis de contenido como perteneciente al método de análisis documental. Al respecto, López (2002) señala que el “interés del análisis de contenido no reside sólo en la descripción de los contenidos, sino en lo que éstos, una vez tratados, podrían enseñarnos relativo a <<otras cosas>>” (p. 175). Finalmente, como instrumento se consideran fragmentos en la tesis, dado que el análisis de contenido está reflejado en la presentación de los antecedentes y enfoque teórico de la presente investigación.

4.2.2 Construcción del modelo

Esta fase se centra en establecer un modelo que permita analizar las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional. Para ello se continúa en la misma línea del análisis documental y el análisis de contenido, para poder determinar las categorías de análisis, determinar los componentes de cada categoría, crear un libro de códigos y finalmente obtener como instrumento una ficha de registro para levantar la información de interés en esta fase.

Después de una revisión crítica de modelos de análisis de las interacciones actualmente disponibles y propuestas de análisis de las interacciones desarrolladas en ambientes en línea y su relación con la construcción social del conocimiento, se establecen tres categorías para el análisis:

- **Categoría 1: Tipo de interacciones** según la clasificación propuesta en Becerra (2006). Esta caracterización permite clasificar entre cuáles participantes se puede presentar una interacción en esta experiencia de desarrollo profesional, adaptadas a la presente investigación estas son: profesor-profesor; profesor-investigador; profesor-grupo; investigador-grupo; investigador-aprendiz.
- **Categoría 2: Niveles de interacción** según la propuesta de Juárez, Chamoso y González (2020). Esta caracterización permite clasificar la forma en que los participantes pueden interactuar en esta experiencia de desarrollo profesional, esto es: *aporta información, interactúa, interactúa y amplía*.
- **Categoría 3: Apoyos en la interacción** según el modelo de Gunawardena et al. (1997). Esta caracterización está conformada por los argumentos y recursos que los participantes pueden emplear al interactuar, considerando ambos apoyos como importantes de analizar en las transcripciones para identificar de dónde surgen los sustentos utilizados por los participantes y que conllevan a la construcción de conocimiento. Pues los argumentos y recursos que utilicen los participantes incitaran a la exploración de diferencias y negociación de nuevos significados.

Ahora, con la finalidad de capturar la información de una manera precisa y sintetizada que permita realizar un análisis detallado sobre las interacciones, se establece un libro de códigos presentado por apartados en las tablas 9, 10, 11 y 12:

Tabla 9

Códigos Generales utilizados en la presente investigación

Significado	Código
Profesor	P
Investigadora en formación	IF
Investigadora A	IA
Investigadora B	IB

Tabla 10

Códigos para los Tipos de Interacciones

Profesor – Profesor	P – P
---------------------	-------

Profesor – Investigador	P – I
Profesor – Grupo	P – G
Investigador – Grupo	I – G
Investigador – Profesor	I – P

Tabla 11
Códigos para Nivel de Interacción o Actividad Cognitiva

Actividad	
Aporta Información	AI
Actividad	I_
Interactúa aclarando	IAC
Interactúa coincidiendo	ICo
Interactúa discrepando	IDi
Interactúa sintetizando	IS
Interactúa negociando	IN
Interactúa cuestionando	ICu
Actividad	IyA_
Interactúa y amplia	

Tabla 12
Códigos para los apoyos de interacción

Tipos de argumentos	Argumento	ArInd
	Inductivo	

Recursos	Argumento	ArAbd
	Abductivo	
	Argumento	ArDed
	Deductivo	
	Recurso	RS
	Social	
	Recurso	RM
	Material	

A partir de las categorías presentadas con sus respectivos códigos, se prosigue a mostrar el producto de esta fase: la ficha de registro para analizar las interacciones que promuevan la construcción de conocimiento (ver tabla 13). Esta ficha está conformada por la *Imagen o el fragmento de la participación* (unidad de análisis), por las categorías de análisis que permitan responder entre quienes se da la interacción, cómo se da y con qué, y otras dos columnas que permitan dar evidencia de si hubo o no un cambio o creación de conocimiento profesional y cómo fue la trayectoria de interacciones para que ocurriera dicho cambio.

Tabla 13

Ficha de registro para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional

Imagen o el fragmento de la participación / Unidad de análisis:	<i>Entre quienes se da la interacción</i>		<i>Cómo se da la interacción</i>		<i>Con qué se da la interacción</i>			<i>Construcción de conocimiento</i>	
	Tipos de interacción	Nivel de Interacción/ Actividad Cognitiva	Apoyos de interacción		Cambio o creación	Trayectoria de Interacción			
			Argumento	Recurso					
P -P I P	P-G I-G I-P	A C A I	Acl_ AclyA	ArI nd	ArAbd ArgDed	RS	RM		

<p>P1C10: Ya entendí por qué no se incluye el uso de la variable como relación funcional</p>	<p>P – G</p>	<p>Interactúa Sintetizar</p>	<p>Cambio sobre el uvRF</p>	<p>TIn1(FIC15Acl A-P1C10AclS)</p>
<p>FIC25: Podrías explicarnos cómo fue que llegaste a esa conclusión</p>	<p>I – D</p>	<p>Interactúa Aclarar</p>		

Fuente: elaboración propia

Ya que se ha establecido un modelo para analizar las interacciones, se prosigue a presentar el diseño de una secuencia que permita llevar a cabo la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes.

4.2.3 Diseño de la secuencia

Esta fase corresponde al diseño de una secuencia que promueve la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes para propiciar la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable. Para ello se consideran algunos aspectos contextuales que se tomaron en cuenta, tales como: la presencia del tema de la variable y sus usos en el curriculum de matemáticas del Nivel Medio Superior (NMS) propuesto por el plan de estudios de la SEP (2017); características generales de los profesores con quien se desarrolló la experiencia (considerar que son profesores de NMS, los años de experiencia que tienen, grado académico, sujetos activos, profesión). También se tomó en cuenta la teoría de aprendizaje adoptada en esta investigación, pues esta enmarca la forma en que los individuos adquieren, organizan y utilizan sus habilidades y conocimientos, y a partir de ello se crean los ambientes de aprendizaje (España, 2017). En el caso particular de esta investigación se adopta la teoría de aprendizaje desde un enfoque sociocultural, tal como se ha señalado en el capítulo de enfoque teórico. Otro aspecto que se considero fue delimitar estrategias pedagógicas para lograr el aprendizaje deseado en esta experiencia. En este mismo tenor y de manera general se utilizó como método didáctico el interrogativo. Pues éste se emplea en acciones formativas donde los participantes se convierten en agentes de su propia formación, a través de la investigación personal, el contacto con la realidad objeto de estudio y las experiencias del grupo de trabajo. Además, es en este tipo de método donde el profesor e investigador intervienen activamente en la construcción de aprendizaje.

Finalmente, para la secuenciación y planeación de las tareas como último proceso de esta fase, se adoptan las fases del modelo de Gunawardena et al. (1997) como un modelo de instrucción que permea en el planteamiento de las tareas y la aparición de las mismas dentro

de la secuencia. Además, se toma como referente el enfoque metodológico del modelo 3uv (Ursini y Trigueros, 2006) *ad hoc* para estudiar el concepto de variable y diseñar tareas que promuevan la construcción de conocimiento profesional sobre el concepto de variable, así como para analizar qué cambio o creación se está construyendo sobre este concepto. Pues, Ursini y Trigueros (2006) señalan que el modelo 3uv les “ha permitido entender a mayor profundidad el papel que juega un manejo flexible e integrado del concepto de variable en el aprendizaje del álgebra, así como diseñar instrumentos diagnósticos y estrategias didácticas” (p. 265). Al respecto, cabe mencionar que la parte esencial a considerar del modelo 3uv son los aspectos cognitivos que posee cada uso de la variable (ver tabla 14), pues Ursini y Trigueros (2006) consideran son necesarios para trabajar exitosamente con cada uno de los tres usos de la variable.

Tabla 14

Aspectos cognitivos que posee cada uno de los tres usos de la variable

<i>La variable como incógnita</i>	<i>La variable como número general</i>	<i>La variable como relación funcional</i>
I_1 Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.	G_1 Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.	F_1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
I_2 Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.	G_2 Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.	F_2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
I_3 Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.	G_3 Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.	F_3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
I_4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.	G_4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.	F_4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
I_5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y	G_5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.	F_5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de

utilizarlas para plantear ecuaciones.

variación de la otra.

F_6 Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema.

Fuente: Ursini y Trigueros (2006, pp. 7-8)

Conviene precisar algunos puntos importantes respecto los aspectos de este modelo. En principio que el orden en que se enlistan no implica un orden de importancia, de dificultad o temporal (Trigueros y Ursini, 2018). Además, que estos aspectos corresponden a distintos niveles de abstracción (Ursini y Trigueros, 2006). Finalmente, que “la solución competente de los problemas algebraicos requiere un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan a cada uno de ellos” (Ursini et al., 2005; citado en Ursini y Trigueros, 2006, p. 7).

Entonces, considerando lo antes expuesto sobre el modelo 3uv y el modelo de Gunawardena y colaboradores (1997), se prosigue a presentar el diseño de la secuencia aplicada en un curso-taller (CT). Ésta a grandes rasgos consta de plantear el objetivo del CT, los recursos tecnológicos utilizados, las tareas matemáticas a desarrollar, establecer objetivos específicos de cada tarea, tiempo estimado para realizar las tareas y organización de las mismas de acuerdo a las intencionalidades de las fases del modelo de Gunawardena et al. (1997). Se inicia por presentar una descripción general del CT donde se implementó la secuencia de aprendizaje (ver tabla 15) para posteriormente centrar la atención en la secuenciación y planeación de las tareas de aprendizaje que la constituyen.

Tabla 15

Descripción general del CT

Nombre del evento		DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS PARA LA COMPRESIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIABLE EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR
Tipo de evento		Curso-Taller virtual
Requisitos de infraestructura	de	Contar con internet para sesiones mediante <i>zoom</i>
Periodo		1 semana
Fechas y Horarios		Dos sesiones de 3 horas el 12 y 19 de marzo en un horario de 4:30 a 7:30 pm
Responsable Coordinador(a)	o	-
Nombre de instructores		-
Dirigido a		Profesores de matemáticas del Nivel Medio Superior
Competencia		Al terminar el curso-taller, los profesores serán capaces de identificar los tres usos de la variable y las estructuras matemáticas asociadas para el diseño de tareas matemáticas que promuevan los diferentes aprendizajes esperados asociados a la noción de variable.
Contenido temático		<ul style="list-style-type: none"> ▪ Introducción a la noción de variable ▪ Reconocimiento de la noción de variable en el currículum de matemáticas del nivel medio superior. ▪ El modelo 3uv

		<ul style="list-style-type: none"> ▪ Diseño de tareas que promuevan aprendizajes esperados asociados a los tres usos de la variable
Duración curricular)	(valor	6 horas virtuales sincrónicas teórico-práctico 14 horas de trabajo independiente Total: 20 horas (1 crédito)
Cupo mínimo		10 profesores
Cupo máximo		50 profesores
Evaluación		80 % asistencia. 20% entrega de tareas desarrolladas en el taller
Acreditación		Se requiere asistir a las dos sesiones virtuales sincrónicas
Costo por persona		Sin costo
Mayores informes con		Dra. - Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Campus II UAZ-SIGLO XXI teléfono: -
Correo electrónico		-

4.2.3.1 *Secuenciación, planeación y temporalización de las tareas*

Como se hace explícito en la tabla 15 la secuencia de aprendizaje se desarrolló en dos sesiones, las cuales están conformadas por tres momentos: apertura, desarrollo y cierre. En cada uno de los momentos se plantea un conjunto de tareas orientadas por las fases del modelo de Gunawardena et al. (1997) y por el enfoque metodológico del modelo 3uv (Ursini y Trigueros, 2006). Esto para que dichas tareas propicien interacciones que promuevan la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable y sus usos. Por tal motivo, se especifica cuáles tareas corresponden a cada fase del modelo, los objetivos específicos de cada tarea, así como el tiempo designado para llevarse a cabo.

4.2.3.1.1 Sesión 1

En la primera sesión se implementaron tareas correspondientes a las primeras cuatro fases del modelo de Gunawardena, et al. (1997), distribuidas por momentos.

En el momento de **apertura**, además de iniciar formalmente con el CT y la presentación de las responsables del mismo, se considera importante comenzar por escuchar las expectativas que tienen los profesores sobre éste. Pues esto permitiría delimitar cuáles de esas expectativas se está en condiciones de cumplir y cuáles no, además de hacer sentir a los profesores que son escuchados e importantes en esta experiencia de desarrollo profesional. Posteriormente, se realizó la presentación del CT, en donde se establece el objetivo general, calendario y organización, así como los convenios del mismo.

Presentación del CT: es un CT dirigido a profesionales de la docencia con la intención de que éste les permita enriquecer su conocimiento sobre el tema a abordar y que pueda ser utilizado para su práctica. Al terminar el CT, los profesores serán capaces de identificar los tres usos de la variable y las estructuras matemáticas asociadas para el diseño de tareas matemáticas que promuevan los diferentes aprendizajes esperados asociados a la noción de variable.

El CT se desarrolló en 2 sesiones de 3 horas virtuales sincrónicas (teórico-práctico) y 14 horas de trabajo independiente. Estas sesiones se llevaron a cabo los días 12 y 16 de marzo

en un horario de 4:30 a 7:30 pm (se les solicitó puntualidad para acceder a la plataforma en el lapso de las 4:20 a las 4:30 pm).

Para aprobar el taller se requiere principalmente asistir a las dos sesiones virtuales sincrónicas (se realizará pase de lista), pues la evaluación corresponde a un 80% de asistencia (elementos a considerar: participación y pase de lista) y 20% entrega de tareas desarrolladas durante el taller y fuera del mismo. Cabe señalar que al finalizar la primera sesión se les dejará una tarea para entregar, con la finalidad de cerrar de la mejor manera la sesión y evidenciar parte del conocimiento construido.

Finalmente, se les mencionará que la forma de participar será mediante el *chat* o bien por el micrófono (en cualquier otro momento tener el micrófono cerrado). Agradecer por estar colaborando con nosotras y mencionar que es un gusto estar impartiendo este CT, el cual esperamos al menos cumpla con sus expectativas.

Tiempo estimado: 7 minutos

Posterior a la presentación del CT se proseguirá con el desarrollo de las tareas.

Tarea 0. Romper el hielo (Tiempo estimado: 8 minutos)

Objetivos específicos:

- Generar confianza y participación en los profesores al iniciar con algo que ellos ya han leído.
- Delimitar que el curso-taller está centrado en la noción de variable.

Descripción de la tarea: rescatar ideas sobre el artículo de Ursini y Trigueros (2006), presentadas en la interacción de *WhatsApp*.

Cabe mencionar que el artículo fue proporcionado a los profesores dos semanas antes de la fecha de esta sesión. Se les solicitó que lo leyeran y que utilizaran como medio el correo o el *WhatsApp* para discutir las dudas o inquietudes que les resultaran de la lectura del artículo.

Tiempo acumulado: 15 minutos

Entonces, después de romper el hielo se considera oportuno iniciar con el desarrollo de cada una de las fases correspondientes a esta sesión (I, II, III, IV), explicitando las acciones que se presentarán en cada fase con las tareas que se proponen.

▪ FASE I: COMPARTIR Y COMPARAR INFORMACIÓN

Tarea 1. Problemas desencadenantes (Tiempo estimado: 20 minutos)

Acciones de la Fase I

- Aseveraciones de observación sobre la tarea propuesta.

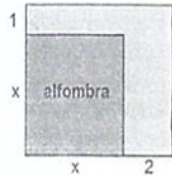
De acuerdo con las respuestas de los participantes se podría presentar la siguiente acción:

- Plantear y contestar preguntas para clarificar detalles de las aseveraciones.

Objetivo específico: compartir y comparar información sobre las dificultades que presentó cada estudiante al resolver los problemas planteados y posibles causas.

Descripción de la tarea: los profesores analizarán dos problemas resueltos por estudiantes de secundaria, en los cuales se evidencian errores sobre el manejo del concepto de variable (ver figura 4 y 5). El problema de la figura 4 relacionado con el uso de variable como número general y el problema de la figura 5 relacionado con los tres usos de la variable (número general, incógnita y relación funcional). Posterior a la presentación de cada respuesta de los estudiantes se les cuestionará:

- a) ¿Qué dificultades consideran se le presentaron a cada estudiante?
- b) Desde su experiencia, ¿Qué creen que origina esas dificultades?



Expresa el área del piso de la habitación en forma algebraica.

$$x^2 + 2 = 0$$

Estudiante 1

$$x(2) + x(1) = x^2 + 3$$

$$x = 9$$

Estudiante 2

$$(x-1)(x-1)$$

$$x=2 \quad x=1$$

$$x=4 \quad x=2$$

Estudiante 3

Figura 4. Respuesta de tres estudiantes al problema 1.

1. ¿Cuánto es $7 + (6x)$ Si $x = 1$? $13x$

¿Cuánto es $7 + (6x)$ Si $x = 3$? $25x$

¿Cuánto es $7 + (6x)$ Si $x = 4$? $31x$

¿Qué procedimiento utilizaste para responder, cuánto es $7 + (6x)$ si $x = 4$?

multiplique 6×4 puesto $6x$ / $x=4$ / al final le sume 7 pues al multiplicar 6×4 saque el valor total de x

Propón al menos 5 valores más cuyo resultado de la expresión $7 + (6x)$ sea mayor que 31.

que $x=5, x=6, x=7, x=8, x=9$

¿Podríamos saber cuántos valores más puede tomar la letra "x" en la expresión $7 + (6x)$ para que el resultado sea mayor que 31? ¿Por qué si o por qué no?

Si porque no dice cual es el valor de x pues x puede valer un numero mayor que al hacer la operacion salga mayor que $x=31$

Figura 5. Respuesta de un estudiante al problema 2.

Tiempo acumulado: 35 minutos

Tarea 2. Cuestionamientos sobre el tema (Tiempo estimado: 25 minutos)

Esta tarea en particular tiene dos intencionalidades: detectar coincidencias e inconsistencias de ideas sobre lo discutido. Por ello, se contemplan la Fase I y la Fase II con sus respectivas acciones para desarrollarla.

FASE I. COMPARTIR Y COMPARAR INFORMACIÓN

- Aseveraciones de opinión al plantear cada una de las preguntas en torno a la noción de variable.
- Aseveraciones de acuerdo por parte de uno o más de los participantes, al momento de solicitar establecer acuerdos sobre lo discutido.

FASE II. DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN DE DISONANCIAS O INCONSISTENCIAS ENTRE IDEAS, CONCEPTOS O ASEVERACIONES

- Identificación y declaración de las áreas de desacuerdo, al momento de solicitar nos mencionen en qué de lo discutido no están de acuerdo o difieren un poco.

De acuerdo con las respuestas de los participantes se puede presentar la siguiente acción:

- Plantear y contestar preguntas para clarificar la fuente y el alcance del desacuerdo.

Pues, por ejemplo, los profesores pueden notar que entre ellos hay diferentes concepciones sobre el concepto de variable a pesar de pertenecer al mismo nivel educativo, entonces podríamos cuestionarles ¿por qué creen que sea así? Esto para orientar un poco a que se den cuenta que el concepto de variable es multifacético y, así, retomarlo en las tareas posteriores.

Objetivo específico: detectar acuerdos (fase I) y desacuerdos (fase II) al compartir y comparar información (fase I) sobre las concepciones que tienen los participantes sobre el concepto de variable, sus usos y sobre los temas en los que se presenta este concepto.

Descripción de la tarea: se les cuestionará: ¿qué entienden o qué ideas tienen sobre el concepto de variable? ¿en qué temas han empleado este concepto de manera explícita o implícita? ¿qué entienden por los usos de la variable?

Tiempo acumulado: 60 minutos

Finalmente, para cerrar el momento de apertura se presentará la tarea 3:

Tarea 3. Reaseverar lo discutido (Tiempo estimado: 10 minutos)

Esta tarea aún corresponde a la Fase II, pero con la acción de:

- Reaseverar la posición del participante y posiblemente presentar argumentos o consideraciones en su apoyo mediante referencias a la experiencia del participante, literatura, datos formales recopilados o propuesta de metáfora o analogía relevante para ilustrar el punto de vista.

Objetivo específico: reaseverar la posición de los participantes en torno al concepto de variable después de lo discutido.

Descripción de la tarea: se planteará lo siguiente:

Después de lo discutido y con base en su experiencia como profesores, su formación académica, artículos que hayan leído, etcétera. ¿qué ideas en torno al concepto de variable mantienen? ¿por qué?

Tiempo acumulado: 70 minutos

FASE III. NEGOCIACIÓN DEL SIGNIFICADO Y CONSTRUCCIÓN MUTUA DE CONOCIMIENTO

El momento de **desarrollo** se iniciará con la Fase III, pues es en esta fase donde después de discutir y compartir ideas sobre el concepto de variable se prosigue a negociar el significado de variable y construir conocimiento sobre ello, de manera mutua. Para ello se proponen las siguientes tareas:

Tarea 4. Resolución y análisis de tres problemas donde cada uno implica un uso diferente de la variable (Tiempo estimado: 15 minutos)

Acción de la Fase III, involucrada:

- Negociación del significado de los términos, en este caso negociación del significado del concepto de variable y sus usos.

Objetivo específico: identificar similitudes y diferencias en el uso que se le da al concepto de variable en cada uno de los problemas propuestos, para llegar a acuerdos sobre la noción de variable y sobre los usos que ellos identifican (negociar y construir mutuamente el concepto de variable y sus tres usos).

De manera concreta se pretende que por medio de los problemas propuestos (1, 2 y 3) los profesores sean capaces de identificar los tres usos de la variable y las estructuras matemáticas asociadas a éstos, por ejemplo: en el problema uno identificar la variable como número general y relacionar este uso con la estructura de expresión; en el problema dos identificar la variable como incógnita y relacionar este uso con la estructura de ecuación; finalmente en el tercer problema identificar la variable como relación funcional y relacionar este uso con la estructura de función.

Descripción de la tarea: se les solicitará que resuelvan cada uno de los problemas que a continuación se presentan y que identifiquen qué los hace diferentes. Esto es, que identifiquen los usos de la variable y las estructuras matemáticas asociadas a los mismos.

1. Escribe una fórmula que exprese: a un número desconocido sumándole 5 y al resultado se le divide por 8
2. Escribe los valores que puede tomar x si $(x - 3) = -7$
3. Considera que $y = 3 + x$. Si queremos que los valores de y sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar x ?

Posterior a que los resuelvan, se les cuestionará: ¿la variable tiene el mismo uso o significado?, ¿qué los hace diferentes? ¿cuáles son las estructuras matemáticas involucradas en cada problema?

Tarea 5: Negociación y clarificación sobre los usos de la variable (Tiempo estimado: 10 minutos)

Acciones involucradas de la Fase III:

- Negociación del significado de los términos, en este caso negociación del significado del concepto de variable y sus usos.
- Identificación de áreas de acuerdo sobre el concepto en conflicto.

Objetivo específico: negociar y clarificar ideas sobre los usos de la variable que los profesores identifican al resolver los problemas.

Descripción de la tarea: después de lo discutido sobre los problemas identificar los mismos usos de la variable que sus compañeros o identificar otros. ¿Cuáles y por qué son diferentes?

Tarea 6. Propuesta sobre los tres usos de la variable (Tiempo estimado: 5 minutos)

Acción involucrada de la Fase III:

- Propuesta y negociación de aseveraciones nuevas, que incorporen términos medios y/o construcción mutua de conocimiento.

Objetivo específico: negociar aseveraciones nuevas sobre los usos del concepto de variable para incorporar términos medios y/o construir mutuamente conocimiento al respecto.

Descripción de la tarea: se retomarán algunas de las propuestas que planteen los profesores sobre los usos de la variable y las asociaremos a lo que proponen Ursini y Trigueros (2006), teniendo la aseveración que esencialmente se trata de tres usos de la variable. Sin embargo, esto aún se deja en debate para ver si los profesores identifican otro uso distinto y negociar al respecto.

Posterior al debate se presentará conocimiento sobre los distintos aspectos que posee cada uso de la variable, los cuales se consideran necesarios para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucren el concepto de variable (Ursini y Trigueros, 2006).

Tiempo acumulado: 100 minutos

Tarea 7. Propuesta de tareas matemáticas donde se presenten los usos de la variable (Tiempo estimado: 30 minutos).

Acción de la Fase III, involucrada:

- Propuesta para integrar o acomodar metáforas o analogías.

Objetivo específico: integrar el conocimiento construido hasta el momento sobre los usos de la variable y sus respectivos aspectos.

Descripción de la tarea: se les solicitará a los profesores que propongan tareas matemáticas donde se presenten los usos de la variable. De manera paralela se discutirán dichas tareas.

Posteriormente, de acuerdo con las tareas propuestas por los profesores se considerará si es necesario o no la integración de dos tareas como ejemplo de que en una misma tarea se pueden presentar más de un uso de la variable y consiga diversos aspectos (ver figura 6).


<p>Pregunta 1 para secundaria</p> <p>¿Para cuáles valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288? Si el valor de x aumenta o decrece, ¿qué pasa con el área?</p>  <p>The diagram shows a rectangle with a height of 6. A vertical line segment inside the rectangle is labeled x^2 and extends from the bottom-left corner to the top. To the right of this segment, there is a gap of width 12, and then the rest of the rectangle extends to the right edge.</p>	<p>Análisis</p> <p>La respuesta a este problema requiere la identificación de dos intervalos no contiguos. Para ello, la variable x debe ser reconocida en primer lugar como un número general (G2), que debe ser manipulado y utilizado para obtener una expresión (G4). Posteriormente, es necesario reconocer a x como una cantidad desconocida cuyo valor puede determinarse (I1, I4). Se requiere, además, reconocer la correspondencia (F1) entre los valores de x y del área, y la variación conjunta de esas dos variables (F4) para determinar los intervalos (F5) en los que la variable toma los valores deseados. Es posible utilizar otras estrategias de solución para este problema.</p>
<p>Pregunta 4 para secundaria</p> <p>Un hortelano vende el kilogramo de tomate a \$12.00 y le cuesta \$240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar \$4 500.00?</p>	<p>Análisis</p> <p>En este problema se requiere identificar la relación funcional entre el número de kilogramos de tomate que se venden y la ganancia obtenida, tomando en consideración el costo de la cosecha (F1). Simbolizar la relación funcional (F6). Sustituir el dato proporcionado (F2) para obtener una ecuación en la que es necesario interpretar una de las variables como incógnita (I1), manipularla (G2, G4) y encontrar su valor (I4). Este problema también puede resolverse utilizando una estrategia de graficación de funciones.</p>

Figura 6. Solución de tareas que involucran los tres usos de la variable con algunos de sus respectivos aspectos (Ursini y Trigueros, 2006, p. 13-18)

Tarea 8. Reintegración del conocimiento construido (Tiempo estimado: 10 minutos)

Acción de la Fase III, involucrada:

- Propuesta para reintegrar o acomodar metáforas o analogías.

Objetivo específico: reintegrar el conocimiento construido hasta el momento sobre los usos de la variable y sus respectivos aspectos, después de lo discutido.

Descripción de la tarea: se planteará lo siguiente:

Después de la interacción: ¿qué conocimiento mantienen o acomodan sobre el concepto de variable y sus usos?

FASE IV. COMPROBACIÓN Y MODIFICACIÓN DE LA SÍNTESIS PROPUESTA

Para **cerrar** con esta sesión, se implementará la Fase IV, pues esta se centra en comprobar o modificar el conocimiento construido durante esta sesión. Para ello se proponen las siguientes tareas.

Tarea 9. Retomar uno de los problemas desencadenante presentados al inicio de la sesión, el cual se muestra en la Figura 4 (Tiempo estimado: 20 minutos)

Acciones de la Fase IV, involucradas:

- Comprobación con referencia a esquemas cognitivos ya existentes.
- Comprobación con referencia a la experiencia personal.
- Comprobación con referencia a los datos formales recogidos.
- Comprobación con referencia al testimonio contradictorio en la literatura.

Objetivo específico: comprobar el conocimiento construido sobre los usos de la variable y los aspectos que posee cada uso.

Descripción de la tarea: volvamos a ver la tarea y las respuestas, ¿observan algo distinto que al inicio del taller? ¿qué otras cosas nos pueden decir respecto a las respuestas de los estudiantes?

Tiempo acumulado: 160 minutos

Tarea 10 para realizar en casa.

Acción de la Fase IV, involucrada:

- Aplicación de nuevos conocimientos.

Objetivo específico: aplicar lo aprendido durante la primera sesión del curso-taller, apoyado del conocimiento que cada participante ya tenía

Descripción de la tarea: se les cuestionará si ¿consideran que las siguientes tareas podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos? Justifique su respuesta.

1. En una construcción trabajan 3 obreros, los cuales pueden finalizar una obra en 12 días. El dueño necesita que terminen más rápido y decide contratar a 6 obreros más. ¿Cuánto tardarán en finalizar la obra 9 obreros?
2. Un joven acude a un estadio de fútbol a comprar dos boletos, uno de palco y otro de grada general, y termina pagando \$200 por ambos boletos. Posteriormente regresa, para comprar 2 boletos de palco y 3 de grada general y paga \$460. ¿Cuál es el valor del boleto de palco y del boleto de grada?

Los 20 minutos restantes correspondientes a la primera sesión se utilizarán para cerrar la sesión y plantear la tarea.

4.2.3.1.2 Sesión 2

Esta sesión se centró básicamente en retomar algunos acuerdos discutidos en la sesión 1 y en aplicar el conocimiento que se ha construido durante el desarrollo del CT. En esencia consiste en la implementación de la Fase V del modelo de Gunawardena, et al. (1997).

En el momento de apertura, se inició formalmente con la segunda sesión del CT presentando nuevamente el calendario y organización del mismo. Posteriormente se proseguiría con el desarrollo de las tareas correspondientes a la Fase V.

FASE V. ASEVERACIÓN DE ACUERDO Y APLICACIÓN DEL NUEVO CONOCIMIENTO CONSTRUIDO

Tarea 11. Ideas generales sobre el diseño de tareas que ayuden al estudiante a superar los errores y dificultades que se le pudiesen presentar al trabajar con el concepto de variable y sus usos.

Acciones de la Fase V, involucradas:

- Resumen de acuerdos

Objetivos específicos:

Establecer acuerdos sobre el concepto de variable y sus tres usos (discutido en la primera sesión).

Establecer acuerdos sobre tareas que podrían ayudar al estudiante a superar los errores y dificultades que se le pudiesen presentar al trabajar con el concepto de variable y sus usos.

Descripción de la tarea:

Primero se retomarán acuerdos generales sobre el concepto de variable y sus tres usos, cuestionando ¿qué vamos a entender por el concepto de variable? y si estamos de acuerdo que son tres usos de la variable o si consideran o encuentran otro uso distinto a los que presentan Ursini y Trigueros (2006).

Posteriormente se les cuestionará sobre ¿qué tareas consideran podrían ayudar al estudiante a superar los errores y dificultades determinados en el problema anterior (problema desencadenante de la figura 4)?, esto con la finalidad de relacionarlo con las respuestas que los profesores den a la tarea 10, sobre si las tareas que se proponen podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos, y con ello de cierta forma considerarlas como tareas que podrían ayudar al estudiante a superar los errores y dificultades que se le pudiesen presentar al trabajar con el concepto de variable y sus usos.

Finalmente y para cerrar el momento de apertura, se solicitará a los profesores que propongan ideas generales (por ejemplo, qué uso de la variable recomiendan es preferible enseñar primero, qué tan adecuados considera han sido los problemas presentados para propiciar la construcción de la noción de variable y sus tres usos, qué aspectos toman en cuenta al plantear un ejercicio, entre otras cosas) sobre tareas que consideren podrían

ayudar al estudiante a superar los errores y dificultades comentadas en la sesión anterior o algunas otras que ellos han detectado en su práctica.

Tiempo estimado: 7 minutos

Después se proseguirá con el diseño de tareas matemáticas que potencien la comprensión del concepto de variable, esto dará inicio al **momento de desarrollo** de esta sesión. Para ello se propondrá la siguiente tarea:

Tarea 12. Diseño de tareas matemáticas que potencien la comprensión del concepto de variable

Acción de la Fase V, involucrada:

- Aplicación de nuevos conocimientos.

Objetivo específico: aplicar lo aprendido durante el curso-taller sobre el concepto de variable y sus tres usos, apoyado del conocimiento que cada participante ya posea.

Descripción de la tarea:

Para llevar a cabo la implementación de las siguientes consignas, los profesores trabajarán en equipos. Los equipos serán conformados utilizando la comunicación por medio del grupo de *WhatsApp* creado específicamente para tratar cuestiones del CT.

- Diseñar una tarea para cada uso de la variable, ligada a su práctica docente, eligiendo al menos un aspecto (Tabla diapositiva 18) de cada uso. Hay que especificar el uso, el aspecto y el aprendizaje esperado.
- Diseñar una tarea que permita al estudiante diferenciar cada uso de la variable y que pueda transitar de un uso a otro.

Para la entrega de esta tarea se les solicitará a los profesores que cada 10 minutos envíen sus evidencias (diseño de la tarea con el uso de la variable como incógnita, diseño de la tarea con el uso de la variable como número general, diseño de la tarea con el uso de la variable como relación funcional, diseño de la tarea con los tres usos de la variable diferenciados y transitados) en el grupo de *WhatsApp* especificando en cada archivo enviado el equipo al que corresponden. Cabe señalar que el orden en que realicen sus tareas y las manden no importa, lo que importa es tenerlas completas.

Tiempo estimado: aproximadamente de 38 a 48 minutos. Aquí ya se está considerando el tiempo que se tardarían en ingresar a los subgrupos y reingresar a la sala principal.

Tiempo acumulado: 55 minutos

Tarea 13. Presentación de algunas de las tareas diseñadas.

Acción de la Fase V, involucrada:

- Resumen de acuerdos.

Objetivo específico: discutir sobre las tareas diseñadas en la tarea 12 para establecer acuerdos sobre si son tareas que realmente podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos.

Descripción de la tarea:

Durante el tiempo que los profesores estén trabajando en equipo y enviando sus evidencias en el grupo de *WhatsApp*, las responsables del taller elegirán aquellas tareas que desde su perspectiva serán interesantes de analizar y discutir de manera grupal. De igual manera se dará oportunidad a que los profesores revisen las tareas que han sido enviadas por sus colegas y decidan cuál o cuáles a parte de las que hayan elegido las responsables del CT consideran interesantes para analizar y discutir.

Tiempo estimado: 30 minutos

Tiempo acumulado: 85 minutos

Tarea 14. Reflexionemos sobre las tareas diseñadas y su aplicación en el aula

Acciones involucradas de la Fase V:

- Resumen de acuerdos
- Aplicación de nuevos conocimientos

Objetivo de la tarea: establecer acuerdos sobre la aplicación del conocimiento profesional construido en torno al concepto de variable y sus usos, en su práctica docente.

Descripción de la tarea:

Después de establecer acuerdos sobre si las tareas diseñadas realmente podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos, reflexionaremos si éstas pudieran ser implementadas en el aula. Para ello, se formularon los siguientes cuestionamientos:

- ¿es posible que las tareas diseñadas sean implementadas en el aula?
- ¿qué les hace falta para que sean *ad hoc* de ser implementadas en el aula?
- ¿qué ventajas y desventajas observan en las tareas diseñadas?

Cabe señalar que, si bien se pretende reflexionar en unos minutos sobre las tareas diseñadas y su posible aplicación en el aula, se considera que no será suficiente, por lo que se realizará la invitación a los profesores para que reflexionen de manera más profunda y analítica sobre estas tareas y, si consideran pertinente aplicarlas en su aula, nos lo comenten y compartan con nosotras su experiencia.

Tiempo estimado: 15 minutos

Tiempo acumulado: 100 minutos

Finalmente, en el **momento de cierre** de esta sesión se discutirá sobre qué les pareció el taller a los profesores y sobre si realmente consideran hubo transformaciones en su conocimiento respecto el tema discutido. Para ello, se propone la siguiente y última tarea del taller.

Tarea 15. Aseveraciones metacognitivas y evaluación del curso-taller por parte de los profesores

Acción involucrada de la Fase V:

- Aseveraciones metacognitivas de parte de los participantes que ilustren su comprensión de que sus conocimientos o formas de pensar (esquema cognitivo) han cambiado como resultado de la interacción de la conferencia.

Objetivo específico: identificar aseveraciones metacognitivas que indiquen cambios o transformaciones en sus conocimientos o formas de pensar sobre el tema discutido, como resultado de la interacción en este CT.

Descripción de la tarea: declarar cambios de perspectiva sobre el concepto de variable, sus usos y en general su enseñanza y aprendizaje (todos). Para ello, se les plantearán a los profesores los siguientes cuestionamientos:

- ¿Construyeron conocimiento nuevo o cambio su perspectiva en torno a la noción de variable?
- ¿Consideran que este conocimiento podría ser aplicado en su práctica docente (planeación, desarrollo y evaluación)?

Finalmente, se les cuestionará qué les pareció el CT, en qué factores se fijan para aplicar una metodología que ha sido propuesta por la investigación, cómo se sintieron, entre otros cuestionamientos que resulten con la experiencia del CT. Asimismo, mencionarles que se les enviará un cuestionario anónimo para la evaluación del CT y que les agradeceremos lo contesten.

Tiempo estimado: 20 minutos

Tiempo acumulado: 120 minutos

Ahora, como en la realidad los tiempos establecidos para cada tarea pueden ser cambiantes, se tiene como plan b) concluir la Sesión I con la fase III (hasta la tarea 8). Esto dependiendo de cómo se vayan presentando las interacciones y si vale la pena alargar los tiempos. Ahora, como tarea para realizar en casa se dejará la misma, solo brincaríamos la tarea 9 para la segunda sesión, iniciando entonces con la presentación del mismo problema desencadenante que se planteará al inicio de la Sesión I pero ya con otra perspectiva. El tiempo asignado en la Sesión I para la presentación de la tarea y cierre de la sesión se empleará para discutir las respuestas que ellos enviaran sobre la tarea que realizarán en casa. De esta forma quedarían 30 minutos libres en cada sesión, para cualquier imprevisto.

En el anexo 2 se presenta un resumen de lo que se propone anteriormente, y además el para qué de las tareas, cómo se pretenden llevar a cabo y observaciones que se considerarían en el desarrollo de la experiencia.

Finalmente, al tener el diseño de la secuencia se prosigue a presentar la fase de experimentación.

4.2.4 Experimentación

4.2.4.1 Población y puesta en escena

Para obtener la población, se ofertó un curso - taller (CT) a dos subsistemas educativos del NMS en el estado de Zacatecas, el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Zacatecas (CECyTEZ) y el de la Educación Media Superior a Distancia (EMSAD). En este CT hubo un registro de 32 profesores de matemáticas (19 hombres y 13 mujeres), sin embargo, solo asistieron 23 (13 hombres y 10 mujeres), por lo que este apartado se dedica a presentar una descripción de los que asistieron. La primera de ella y que se considera importante para la presente investigación es que los profesores que asistieron al CT estaban interesados por aprender sobre el tema a discutir, pues la inscripción fue libre y voluntaria. De los 23 profesores, 12 pertenecen al EMSAD, 10 al CECyTEZ y 1 de la UAZ (quien se enteró del taller por medio de otra profesora y solicitó unirse a éste). Entre estos profesores se presentan distintos años de experiencia docente que oscilan entre los 1 y 25 años, lo que hace interesantes las aportaciones que cada uno de ellos brindaron en el CT. La mayoría (10) cuenta con grado académico de maestría, 9 con licenciatura y una profesora con doctorado. Los profesores que realizaron un posgrado lo hicieron en áreas de la educación (Educación Secundaria con Especialidad en Física, Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas), en áreas de la ingeniería (Industrial (2), Agrónoma (1), Electromecánica (1), Mecatrónica (1), Química Farmacéutico Biólogo (1), Sistemas Computacionales) y en el área de las matemáticas (Doctorado en Matemáticas (1), Matemáticas con terminación en Estadísticas (1)). Finalmente, algunas de las ingenierías y licenciaturas que se presentan entre los profesores son: Ingeniería Mecánica (1), Ingeniería Civil (2), Licenciatura en Arquitectura (1), Licenciatura en Matemática Educativa (1), Licenciatura en Matemáticas (2), Licenciatura en Contaduría (1), Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas (1). Lo anterior hace notar la riqueza de esta población, pues se cuenta con diversos perfiles que sin duda hacen enriquecedora esta experiencia de desarrollo profesional.

Para promocionar el CT se brindó información general sobre el mismo: tipo de evento, requisitos de infraestructura para asistir, periodo de duración, fechas y horarios, nombre de la responsable o coordinadora, nombre de los instructores, a quién va dirigido, competencia a lograr, contenido temático, el cupo mínimo y máximo de profesores, criterios de evaluación y acreditación, formulario de Google para el registro, información sobre la inscripción (libre y sin costo), un breve resumen del CT, reseña de los expositores y finalmente información para contactarse en caso de tener dudas.

En el transcurso del CT se utilizó como recurso de apoyo una presentación en PowerPoint en la que se presentaron las preguntas y problemas que implicaba cada una de las tareas propuestas en la secuencia.

Ahora, respecto la puesta en escena se llevó a cabo esta experiencia de desarrollo profesional a través de un CT en un contexto lo más real posible, no como un escenario de investigación, ya que en esta experiencia no todas las variables se tuvieron controladas. Este CT se llevó a cabo a través de un CT virtual en *Zoom*, esto debido a las condiciones de confinamiento provocadas por el Covid-19 y porque el modelo y la naturaleza de recolección

de datos lo permite. Por tanto, uno de los requerimientos de infraestructura que se les solicita a los participantes es contar con internet. El objetivo planteado en el CT es que al finalizar los profesores serán capaces de identificar los tres usos de la variable y las estructuras matemáticas asociadas para el diseño de tareas matemáticas que promuevan los diferentes aprendizajes esperados asociados a la noción de variable. Este CT se planeó con una duración de 20 horas; dos sesiones virtuales sincrónicas teórico-práctico con una duración de 3 horas cada una y 14 horas de trabajo independiente. Las sesiones se realizarán el 12 y 19 de marzo en un horario de 4:30 a 7:30 pm. El contenido temático que se desarrollará en estas sesiones es: introducción a la noción de variable, reconocimiento de la noción de variable en el currículum de matemáticas del nivel medio superior, presentación del modelo 3uv y diseño de tareas que promuevan aprendizajes esperados asociados a los tres usos de la variable.

Dado el objetivo de la tesis los datos resultantes de este CT se centrarán en las 6 horas presenciales y en las tareas diseñadas durante las horas de trabajo independiente. Pues en las horas presenciales se rescatarán los mensajes de los participantes que evidenciarán si hubo o no interacción y cómo ésta promovió la construcción de conocimiento. Por su parte el diseño de tareas durante las horas de trabajo independiente servirá como apoyo para analizar si realmente se ha construido conocimiento profesional en torno al concepto de variable y sus usos. De manera general, se considera que el análisis de los datos permitirá reconocer cuáles aspectos de los considerados en la propuesta permiten el logro del objetivo y cuáles deben revisarse y/o algunos que se pudiesen proponer, lo cual es bueno, porque sería un aporte para la investigación.

4.2.4.2 Recolección de los datos

Video grabación

La videograbación se entiende aquí como la acción y efecto de grabar en video una serie de imágenes que constituyan evidencia de los hechos acontecidos durante la puesta en práctica de la experimentación descrita en esta investigación.

Observación participante

De acuerdo con Taylor y Bogdan la 'observación participante' se entiende como "la investigación que involucra la interacción social entre el investigador y los informantes en el *milieu* [medio] de los últimos, y durante la cual se recogen datos de modo sistemático y no intrusivo" (Taylor y Bogdan, 1994. p. 31); y tal es el sentido que cobra este término en esta investigación.

Tareas diseñadas por los participantes

Se entienden, de manera general, como aquellas tareas elaboradas por los participantes en esta investigación, las cuales, podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos, así como atender las dificultades que pudiesen presentar los estudiantes al resolver problemas que involucren el concepto de variable y sus diferentes aplicaciones.

4.2.5 Análisis de las interacciones

Esta fase corresponde al último proceso para lograr el objetivo general que persigue esta investigación. Dicha fase, consta del análisis de las interacciones que se presentaron en la experiencia de desarrollo profesional evidenciadas en los videos. Para ello, la técnica empleada fue el análisis de contenido de los mensajes, la cual consta del siguiente procedimiento: establecer una unidad de análisis (todo el mensaje), codificar y capturar los datos, interpretar las categorías y crear trayectorias de interacción que permitan describir las interacciones que promuevan la construcción de conocimiento profesional sobre el concepto de variable y sus usos. Como instrumento se tienen fragmentos en la tesis (análisis y resultados) respecto las interacciones que promovieron la construcción de dicho conocimiento.

Ahora, al tener el diseño de la secuencia y un modelo que permite analizar las interacciones se prosigue a presentar el instrumento general que permitió identificar el conocimiento profesional sobre el concepto de la variable, construido a partir de las interacciones que se promovieron en la experiencia de desarrollo profesional. Para ello, se incluyen dos columnas más a la ficha de registro antes presentada; una de ellas es sobre el cambio o creación construido en torno al concepto de variable y otra qué tarea hizo posible dicha construcción (ver tabla 16).

Tabla 16

Instrumento para el análisis de las interacciones que promueven la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable

Imagen o el fragmento de la participación / Unidad de análisis:	Entre quienes se da la interacción		Cómo se da la interacción		Con qué se da la interacción			Construcción de conocimiento									
	Tipos de interacción		Nivel de Interacción / Actividad Cognitiva		Apoyos de interacción		Argumento		Recurso		Cambio o creación en general		Tarea matemática que propicio el cambio o creación		Trayectoria de Interacción		
	P-P-P-FI FI	AC	AcI	AcI	ArI	ArA	ArgD	R	RM								
	PFI G-G-P	AI	_	yA	nd	bd	ed	S									
																	TIn1(FIC15 AcIA- P1C10AcIS)

CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este capítulo se presenta el análisis de la experimentación haciendo énfasis en el modelo de implementación guiado por las fases establecidas en Gunawardena et al. (1997), seguido del análisis de los datos centrado en las interacciones a través del modelo de análisis establecido por las tres categorías expuestas en la sección 3.4.

El análisis de la experimentación, se enfoca en evidenciar si las tareas propuestas en el diseño de la secuencia propiciaron el logro del objetivo planteado en cada una de las fases del modelo de Gunawardena, et al. (1997); las cuales se centran en promover las interacciones y la construcción de conocimiento profesional. Por ello se muestran las tareas que se desarrollaron en cada fase, captura de las diapositivas utilizadas para presentar las tareas a los profesores, fragmentos del diálogo empleado por la investigadora en formación o las investigadoras para desarrollar la tarea, así como fragmentos donde se evidencian las interacciones de los profesores.

Respecto al análisis de las interacciones, éste se enfoca en analizar tres categorías que permiten determinar el *tipo, el nivel y los apoyos de interacción*, que se presentaron en cada una de las fases; describiendo estas categorías de interacción tanto de forma cuantitativa como cualitativa, donde la parte cualitativa se centra en la identificación del conocimiento construido en torno al concepto de variable a partir de las interacciones.

De esta manera se describen las interacciones que promovieron la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable en esta experiencia de desarrollo profesional con y entre Profesores de Matemáticas de Bachillerato, una investigadora en formación y dos investigadoras. Cabe mencionar que, si bien la experiencia se realizó con la participación de dos investigadoras, el análisis se centrará en las interacciones de los profesores y la investigadora en formación. Lo anterior, dado que la presente investigación se planteó como prioridad la construcción de conocimiento profesional de los antes mencionados.

Por tal motivo, para cada fase del modelo de Gunawardena, et al. (1997) se presentan dos secciones, una dedicada a la experimentación y la segunda al análisis de las interacciones.

5.1 Fase I. Compartir y Comparar Información

La Fase I propone que los participantes compartan y comparen información relativa a la noción de variable y sus usos. Esto mediante algunas de las siguientes acciones:

- **F1/A:** Aseveraciones de observación u opinión.
- **F1/B:** Aseveraciones de acuerdo de parte de uno o más de los participantes.
- **F1/C:** Ejemplos que acuerden provistos por uno o más de los participantes.
- **F1/D:** Plantear y contestar preguntas para clarificar detalles de las aseveraciones.
- **F1/E:** Definición, descripción o identificación del problema.

La presencia de estas acciones dependió, principalmente, de las tareas que fueron propuestas para desarrollar esta fase. Ésta se llevó a cabo en un tiempo de aproximadamente 32 minutos (desde las 17:00 hrs a las 17:32 hrs) y mediante la propuesta

de dos tareas. Para el desarrollo de estas tareas se utilizaron las diapositivas que se presentan en la figura 7:

Figura 7. Presentación de tareas correspondientes a la Fase I del modelo de Gunawardena, et al. (1997)

A continuación, se explica más a detalle en qué consistió cada tarea planteada en esta Fase I del modelo y los resultados, respecto al logro de los objetivos propuestos principalmente en cada tarea y globalmente.


5.1.1 Experiencia en la Fase I

Esta fase se comienza con la presentación de la **Tarea 1. Problemas desencadenantes**, la cual tiene como objetivo compartir y comparar información sobre las dificultades que presentó cada estudiante al resolver los problemas expuestos en las diapositivas que se presentan en la Figura 8, y posibles causas de esas dificultades:

Respuesta de tres estudiantes a un problema de álgebra

a) ¿Qué dificultades consideran se le presentaron a cada estudiante?

b) Desde su experiencia, ¿Qué creen que origina esas dificultades?



Exprese el área del piso de la habitación en forma algebraica.

Estudiante 1: $x^2 + 2 = 0$

Estudiante 2: $x(2) + x(1) = x^2 + 2$
 $x = 9$

Estudiante 3: $(x-1)(x-1)$
 $x=2, x=1$
 $x=-4, x=-2$

1. ¿Cuánto es $7 + (6x)$ si $x = 1$? $13x$

¿Cuánto es $7 + (6x)$ si $x = 3$? $25x$

¿Cuánto es $7 + (6x)$ si $x = 4$? $31x$

¿Qué procedimiento utilizaste para responder, cuánto es $7 + (6x)$ si $x = 4$?
multiplico 6×4 porque $6x$ y $x=4$ y al final le sumo 7 por el multiplicar 6×4 da que el valor total de x

Propón al menos 5 valores más cuyo resultado de la expresión $7 + (6x)$ sea mayor que 31.
que $x=5, x=6, x=7, x=8, x=9$

¿Podríamos saber cuántos valores más puede tomar la letra "x" en la expresión $7 + (6x)$ para que el resultado sea mayor que 31? ¿Por qué si o por qué no?
Si porque no dice cual es el valor de x pero x puede valer un número mayor que al hacer la operación salga mayor que $x=31$

Figura 8. Presentación de la Tarea 1. Problemas desencadenantes

La Tarea 1, involucra las siguientes acciones de la Fase I:

- **F1/A:** Aseveraciones de observación sobre los problemas presentados en la Tarea 1

De acuerdo a las respuestas de los participantes se podría presentar la siguiente acción:

- **F1/D:** Plantear y contestar preguntas para clarificar detalles de las aseveraciones.

Para el desarrollo de esta tarea se utilizó la diapositiva 9 presentada en la Figura 8, donde la IF inicia solicitando a los profesores que analicen la respuesta que dan los estudiantes al problema que ahí se muestra, para que posteriormente compartan su opinión sobre qué dificultades consideran se le presentaron a cada estudiante, promoviendo así que se logrará la acción **F1/A** de la Fase I.

Ahora, si bien las opiniones de los profesores estuvieron más enfocadas en describir los procedimientos que emplearon los estudiantes para dar esas respuestas y los errores que cometieron, en lugar de centrarse en las dificultades que presentaron; se considera que independientemente de eso la acción **F1/A** de la Fase I se presentó con éxito, pues los profesores plantearon aseveraciones de lo que ellos observaban en esas respuestas de los estudiantes. Algunas de estas aseveraciones tienen que ver con la noción de variable y su relación con sus usos, que era lo que se buscaba. A continuación, se presentan algunos fragmentos que dan evidencia de ello:

PM6.S1.26:29: el estudiante 1 utiliza la incógnita como suma, cuando en realidad debemos utilizar la multiplicación, porque nos está pidiendo el área.

PM6.S1.27:40: el estudiante 3 ... también utiliza el cuadrado, (...) pone que es el resultado de x es -4 .

PM1.S1.17:01:19: Buenas tardes, mi observación es que la pregunta es expresar el área, y todos los estudiantes intentan buscar el valor de x .

PM3.S1.17:03:28: Buenas tardes, al parecer los estudiantes aún no identifican la diferencia entre expresión y ecuación, en donde en cada caso el uso de la variable es diferente.

En estas aseveraciones, la **PM6** se centra básicamente en describir lo que el estudiante realizó, es decir, se centra en los procedimientos, pero haciendo alusión a la incógnita, como el uso de la variable que interviene. Por su parte la **PM1** centra su atención en diferenciar lo que pedía el problema relacionado con una expresión y lo que el estudiante realiza relacionado con la búsqueda de un valor. Finalmente, la **PM3** plantea una dificultad relacionada con el uso de la variable, la cual considera fue la que impidió que los estudiantes contestaran correctamente el problema. Lo interesante en estas aseveraciones es que los profesores comienzan a utilizar términos relacionados con el concepto de variable y sus usos, tales como: variable, incógnita (encontrar un valor, buscar el valor de x), usos de la variable; propiciando que desde esta tarea los profesores de manera implícita fueran mostrando sus concepciones respecto la noción de variable y sus usos. Por ejemplo, la **PM6** parece confundir al igual que los estudiantes el problema asociándolo a la búsqueda de una incógnita; la **PM1** hace una distinción entre la expresión que es lo que pide el problema y señala que lo que los estudiantes hacen es asociarlo a la incógnita; por su parte la **PM3** parece dejar en claro que tiene cierta comprensión sobre dos de los tres usos de la variable y lo asocia a las respuestas erróneas de los estudiantes.

Por otra parte, la acción **F1/D** de la Fase I, se fue desarrollando conforme los profesores, la investigadora en formación (IF) y las investigadoras (IA e IB) fueron participando. Ejemplo de ello, es la siguiente participación donde la **IA** plantea un cuestionamiento para clarificar la aseveración realizada por la **PM3** respecto la diferencia entre expresión y ecuación, tal como se evidencia:

PM3.S1.17:03:28: Buenas tardes, al parecer los estudiantes aún no identifican la diferencia entre expresión y ecuación, en donde en cada caso el uso de la variable es diferente.

IA.S1.17:04:43: Muy bien [**PM3**], pero le pregunto a todos los colegas, qué diferencias hay entre expresión y ecuación y por qué éste es un problema para los estudiantes.

Entonces, con lo presentado hasta el momento en esta subsección se da evidencia que las dos acciones (**F1/A Y F1/D**) de la Fase I que se plantearon en un comienzo, se lograron con éxito a través de la propuesta de la Tarea I. Ahora, centrados en el objetivo de esta tarea, se considera que se cumplió parcialmente, pues si bien hubo discusión sobre las dificultades que presentó cada estudiante al resolver el primer problema desencadenante y las posibles causas, la discusión se enfocó más a describir procedimientos que realizó el estudiante que en identificar que los estudiantes confundieron los usos de la variable como número general con el de la variable como incógnita. Ante este suceso, se podría considerar que los argumentos dados por los docentes están normados por lo que hacen cotidianamente en sus aulas; realizan una revisión de los procedimientos hechos por los estudiantes al resolver un problema, para así poder identificar el o los errores que comenten y solicitar que los corrijan,

y se piensa que pocas veces dentro del aula la revisión transita en indagar cuáles son las causas o las dificultades conceptuales que están presentes detrás de esos errores que cometen los estudiantes.

Ahora, para dar continuación al desarrollo de la Fase I e introducción a la Fase II se planteó la **Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable**, la cual tiene como objetivo detectar acuerdos (fase I) y desacuerdos (fase II) al compartir y comparar información (fase I) sobre las concepciones que tienen los participantes respecto el concepto de variable, sus usos y sobre los temas en los que se presenta este concepto. Para ello, se consideraron acciones particulares de cada una de estas Fases:

De la Fase I. Compartir y comparar información.

- **F1/A:** Aseveraciones de opinión al plantear cada una de las preguntas en torno a la noción de variable
- **F1/B:** Aseveraciones de acuerdo de parte de uno o más de los participantes, al momento de solicitar establecer acuerdos sobre lo discutido

De la Fase II. Descubrimiento y exploración de disonancias o inconsistencias entre ideas, conceptos o aseveraciones.

- **F2/A:** Identificación y declaración de las áreas de desacuerdo, al momento de solicitar nos mencionen en qué de lo discutido no están de acuerdo o difieren un poco

De acuerdo con las respuestas de los participantes se podría presentar la siguiente acción:

- **F2/B:** Plantear y contestar preguntas para clarificar la fuente y el alcance del desacuerdo

Para abordar la **Tarea 2**, se utilizaron las diapositivas 11, 12 y 13 presentadas en la Figura 7, en las cuales la IF planteaba cuestionamientos sobre ¿qué entienden o qué ideas tienen sobre el concepto de variable? ¿en qué temas han empleado este concepto de manera explícita o implícita? ¿qué entienden por los usos de la variable? y al final de cada cuestionamiento, la IF solicitó a los profesores que mencionarán en qué de lo discutido y de las aportaciones previas realizadas por los participantes estaban de acuerdo o en desacuerdo. Esto para promover que se lograrán las dos acciones (**F1/A y F1/B**) de la Fase I propuestas y la primera acción (**F2/A**) de la Fase II, mientras que la segunda acción de la Fase II (**F2/B**) se pretendía evidenciar durante el desarrollo de esta tarea.

Como resultados de la implementación de la **Tarea 2**, se considera que la acción **F1/A** se presentó con éxito, pues los profesores expresaron sus opiniones respecto cada uno de los cuestionamientos en torno a la noción de variable que se les plantearon. A continuación, se muestran algunas transcripciones que dan evidencia de ello:

Respuestas a la pregunta realizada por la IF: ¿qué entienden o qué ideas tienen sobre el concepto de variable?

PH8.S1.44:31: (...) para mí el concepto de variable es vamos el mismo nombre lo dice, no? algo que varía, algo que va cambiando, algo que está sujeto a vamos a cambios frecuentes o a ciertas probabilidades (...)

PH2.S1.46:26: Variable es cualquier número que satisface una ecuación, en determinado problema.

Respuestas a la pregunta realizada por la IF: ¿en qué temas han empleado este concepto de manera explícita o implícita?

PM1.S1.55:39: En Álgebra

PH13.S1.55:42: Funciones, expresiones, Datos de tendencia central, Ecuaciones (cuadrática),

Respuesta a la pregunta realizada por la IF: ¿qué entienden por los usos de la variable?

PM1.S1.59:28: Sobre los usos de la variable, puede ser dependiendo el contexto o el problema, puede representar una expresión algebraica, o satisfacer una ecuación o una igualdad.

En estas aseveraciones, las participaciones del **PH8** y **PH2** corresponden a su opinión sobre la noción de variable; la cual al igual que la mayoría de los demás profesores recae en dos de los tres usos de la variable; al considerar que la variable simplemente es algo que varía, algo que cambia o bien la asocian directamente con aquella que satisface una ecuación (asociada al uso como incógnita). Ninguno lo asoció a la variable como número general.

Las participaciones de la **PM1** y el **PH13** corresponden al cuestionamiento sobre los temas donde se encuentra de forma implícita o explícita el concepto de variable; en este caso se notó una gran diversidad de temas y asignaturas donde los profesores identifican este concepto, temas que van desde el nivel de secundaria hasta el nivel superior.

Finalmente, la aseveración de la **PM1** corresponde a su noción sobre los usos de la variable, con la cual parece dejar en claro que tiene cierta comprensión sobre los tres usos de la variable, pues hace referencia a estructuras matemáticas muy particulares que están asociadas a la variable como número general y a la variable como incógnita, además, menciona que los usos dependen del contexto o del problema mismo. Con esto último se consideran dos posibles ideas que pensó la **PM1**: la primera es que el uso de la variable estará determinado o totalmente definido de acuerdo a lo que solicite el problema, la segunda es que al mencionar sobre el contexto la profesora ya está pensando en la aplicación de este concepto en diferentes áreas como la matemática, la ingeniería, la estadística, entre otras. Esta segunda opción se presentó con frecuencia en las respuestas de otros profesores.

Respecto la acción **F1/B** (aseveraciones de acuerdo) de la Fase I Tarea 2, se considera que, si bien no se presentó de manera frecuente, sí se plantearon algunas aseveraciones que dan evidencia de que uno o más de los profesores o la investigadora en formación estaban de acuerdo con alguna aportación previa. Tal es el caso del **PH3** quien en su aseveración muestra que está de acuerdo con otro profesor respecto a su pensar sobre la noción de

variable; y en el caso de la **IF** su aseveración es para expresar un acuerdo detectado a partir de las participaciones previas de los profesores. Esto se evidencia con las siguientes transcripciones:

PH3.S1.48:46: pues yo considero que como lo expresaba el compañero es que la variable en ocasiones puede ser ya este un número, digo un valor determinado pero también puede cambiar, puede variar...

IF.S1.55:36: (...) Muy bien, entonces aquí ya se llega a un acuerdo entre algunos profesores- Pues que definitivamente este concepto de la variable es transversal.

Ahora, respecto a la acción **F2/A** (identificación y declaración de las áreas de desacuerdo) de la Fase II, al analizar todas las participaciones en esta Tarea 2, se pueden detectar inconsistencias entre ideas que expresaron los profesores respecto la noción de variable y los usos de la variable. No obstante, solo uno de los profesores (**PH5**) declara no estar de acuerdo o no coincidir con todo lo que había mencionado otro profesor (**PH8**) respecto la noción de variable, tal como se evidencia en el siguiente hilo de transcripciones:

PH8.S1.44:31: (...) para mí el concepto de variable es vamos el mismo nombre lo dice, no? algo que varía algo que va cambiando algo que está sujeto a vamos a cambios frecuentes o a ciertas probabilidades (...)

IF.S1.44:47: Gracias, maestro. Alguien más?

PH5.S1.45:00: Si me permiten... este ampliando lo que acaba de decir el maestro, eh para mi variable no siempre varía, válgame la redundancia, a veces esas variables cuando toman en cuenta como incógnitas pudieran tomar un solo valor, verdad? entonces no está cambiando no sé está variando mucho que digamos, (...) en algunos casos cuando la variable se toma como una relación funcional pues sí puede variar, puede cambiar, verdad?

Entonces, lo interesante aquí es que el profesor **PH5** está construyendo la noción de variable, pues con esta declaración de desacuerdo hace una distinción entre dos usos de la variable: como incógnita y como relación funcional, relacionándolos con esa idea de variar y cambiar. Sin embargo, falta por parte de la **IF** darle seguimiento a esta declaración de desacuerdo, ya que al final se perdió en nuevas ideas que fueron aportando los demás profesores. Finalmente, tomando como referencia la única declaración de desacuerdo planteada por el **PH5** y que hizo falta dar seguimiento a esa declaración a través de cuestionamientos que permitieran clarificar el origen y el alcance del desacuerdo, se considera que la acción **F2/B** de la Fase II no se cumplió con éxito.

Los resultados de la implementación de la **Tarea 2**, referente al logro de las acciones de la Fase I y la Fase II, permiten concluir que es necesario promover que los profesores tomen en cuenta las aportaciones del resto de los participantes, haciendo énfasis en qué están de acuerdo y en qué no lo están, esto no solo cuestionando si están de acuerdo o no con las ideas previas que han sido planteadas por otros profesores o en qué están de acuerdo o en desacuerdo, sino, plantear cuestionamientos que permitan aclarar la fuente y el alcance de

esas consistencias o discrepancias que surjan. Lo anterior para que a partir de dialogar y discutir sobre las ideas que difieran entre dos o más participantes se propicie el validar su conocimiento o construir nuevo conocimiento.

5.1.2 Interacciones en la Fase I

Como se explicó anteriormente el desarrollo de la Fase I constó de dos tareas, de las cuales la segunda estaba fundamentada en acciones tanto de la Fase I como de la Fase II. Por lo que en esta subsección en particular se considera conveniente realizar el análisis de las interacciones primero dividido en tareas y posteriormente de manera general.

Tarea 1. Problemas desencadenantes

En esta tarea se hicieron evidentes las tres categorías de las interacciones: tipos de interacción, nivel de interacción y apoyos de interacción, tal como se evidencia en las tablas 17, 18 y 19, respectivamente.

Tabla 17

Tipos de interacción presentes en la Tarea 1. Problemas desencadenantes.

<i>Tipos de interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Evidencia de interacción</i>
Profesor – Profesor	No se presenta	
Profesor – Investigador	17	<p>IF.S1.37:42: ¿Qué diríamos del siguiente problema? Son las mismas preguntas, ¿qué dificultades observan y cuál es la causa de las mismas?</p> <p>PM8.S1.38:41: Maestra disculpe nada más para corroborar la pregunta, es en ese problema 1 a lo que da respuesta 13x, 25x y 31x, la propuesta es qué observó yo que tuvo el alumno como, bueno que tuvo a bien pensar para dar esa respuesta? A eso se refiere?</p> <p>Nota: Aquí la PM8 realiza un cuestionamiento directo a la IF, para aclarar la indicación que la IF les había planteado (IF.S1.37:42).</p>
Profesor – Grupo	28	<p>PM1.S1.31:19: Buenas tardes, mi observación es que la pregunta es expresar el área, y todos los estudiantes intentan buscar el valor de x.</p>
Investigador – Grupo	13	<p>IF.S1.25:02: el problema les pide: exprese el área del piso de la habitación en forma algebraica y los estudiantes dan esta respuesta... entonces que conforme al análisis de esta respuesta me respondieran. ¿Qué dificultades consideran se le presentaron a cada estudiante?</p>

Investigador –
Profesor

29

IA.S1.31:54: Muy bien [PM9], en efecto se van los estudiantes a encontrar el valor, pero en esto dónde radica la dificultad.

Nota: La IA interactúa con la PM9, tomando la participación

PM9.S1.30:56: Los estudiantes, se van directamente a buscar el valor de la variable.

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Como se hace evidente en la Tabla 17 el tipo de interacción P-P no se hizo presente en esta Tarea 1, pues los profesores se centraron más en dar su punto de vista y no a cuestionar lo que el resto de sus compañeros mencionaban.

Los tipos de interacción P-I en su mayoría (10 de 17) se emplearon para responder cuestionamientos hechos por las investigadoras o por la investigadora en formación. Ejemplo de ello se evidencia en las siguientes transcripciones, donde la PM8 realiza un cuestionamiento directo a la IF, para aclarar la indicación que la IF les había planteado (IF.S1.37:42):

IF.S1.37:42: Gracias a usted. Okay. (...) ¿Qué diríamos del siguiente problema? Son las mismas preguntas, ¿qué dificultades observan y cuál es la causa de las mismas? (...) ¿Qué observan ustedes?

PM8.S1.38:41: Maestra disculpe nada más para corroborar la pregunta, es en ese problema 1 a lo que da respuesta 13x, 25x y 31x, la propuesta es qué observó yo que tuvo el alumno como, bueno que tuvo a bien pensar para dar esa respuesta? A eso se refiere?

El resto se distribuyó entre solicitar participar (3 de 17, por ejemplo el PH13), agradecer (2 de 17, por ejemplo la PM10) y aclarar los cuestionamientos hechos por la o las investigadoras (2 de 17, por ejemplo la PM7), como se muestra a continuación:

PH13.S1.31:14: si me permite maestra.

PM10.S1.37:41: Gracias

La PM7 da respuesta al cuestionamiento de la IB, para aclarar una idea previa.

IB.S1.37:35: Maestra [PM7], ¿a qué se refiere con el manejo abstracto o en forma general?

PM7.S1.39:04: Me refiero a que en las primeras etapas del álgebra utilizan la variable para encontrar un valor constante.

Los tipos de interacción I-P se presentaron de distintas maneras; 6 participaciones donde el investigador hace referencia a lo que menciona el profesor, 7 que corresponden a agradecer la participación del profesor, 7 donde el investigador cede la palabra al profesor, 4 donde el investigador hace referencia a un "Okey" o "muy bien" sobre lo que el profesor ha expresado, 5 donde a partir de la intervención que hace el profesor e investigador realiza uno o varios

cuestionamientos. A continuación, se evidencia con un ejemplo cada una de estas maneras en que se presentó la interacción I-P, respectivamente:

La IF hace referencia a lo que la profesora PM6 ha mencionado previamente.

IF.S1.26:46: Okey, aquí menciona que el estudiante uno utiliza la incógnita como suma.

La IF agradece la participación del PH5.

IF.S1.34:08: gracias maestro **PH5**.

La IA cede la palabra al PH12, para que exprese su opinión en torno al análisis de la Tarea 1.

IA.S1.29:19: Sí, **[PH12]** adelante, te escuchamos...

Aquí la IF simplemente responde con la locución “okay” en el sentido de haber escuchado la participación previa del profesor y puede que esté <<de acuerdo>> con lo dicho o simplemente quiera decir <<está bien>>, esto de acuerdo con la interpretación que se hace de dicha palabra.

IF.S1.28:00: Okay

A partir de una intervención que hace la PM6 respecto el análisis de la Tarea 1, la IF plantea el siguiente cuestionamiento:

IF.S1.28:13: Okey. Y Bueno usted que observa en común de estos tres estudiantes?

Finalmente, los tipos de interacción I-G y P-G, no se clasifican con otras características más específicas, dado que en este tipo de interacciones tanto el profesor como el investigador publican mensajes sin un destinatario específico.

Entonces en términos generales, se cumplió lo previsto sobre que todos los tipos de interacción podrían presentarse en esta tarea, excepto o de menor manera la de profesor-profesor.

Tabla 18

Niveles de interacción presentes en la Tarea 1. Problemas desencadenantes

<i>Nivel de interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Evidencia de Interacción</i>
Aporta información	27	PM6.S1.28:47: tiene conocimiento de que es una variable y él está... están utilizando a su modo el tratar de resolverla.
Interactúa Aclarando	7	<p>PM6.S1.26:55: okay, no ah espérame.</p> <p>PM6.S1.27:00: Más bien le falta agregar un dato porque nada más tiene el dos y le faltaría agregar el uno...</p> <p>Nota: la PM6 conforme participa va recapitulando y aclarando lo que quiere decir,</p>

			al momento de que la IF retoma lo que esta profesora va diciendo.
	Coincidiendo	5	IA.S1.31:54: Muy bien [PM9], en efecto se van los estudiantes a encontrar el valor, (...)
	Discrepando	0	
	Sintetizando	2	PM9.S1.30:56: Los estudiantes, se van directamente a buscar el valor de la variable. Nota: Sintetiza la idea que plasma el PH12
	Negociando	0	
	Cuestionando	15	IF.S1.28:13: Okey. Y ... Bueno usted que observa en común de estos tres estudiantes?
Interactúa y amplia	Interactúa y amplia	1	PM6.S1.28:01: y el resultado de x_1 es -4 y x_2 es -2 como que utiliza otra.... Como que la quiere resolver con otra ecuación.
	Coincidiendo	6	IF.S1.32:22: comparto su opinión de que muchas veces al simple hecho de ver la x o una letra ya como que se frustran, o como que dicen (...) Nota: La IF coincide con la participación del PH13.S1.31:18.
	Discrepando	0	
	TOTAL	63	

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Como se evidencia en la tabla 18, los *niveles de interacción* que se presentaron con mayor frecuencia en la Tarea 1, fueron: el de Aporta Información (27/63) y el de Interactúa Cuestionando (15/63). Una transcripción que evidencia que se aporta información es cuando la **IF** cuestiona a los profesores qué observan en común en la respuesta que dan los tres estudiantes al problema de la Tarea 1 y la **PM6** responde:

PM6.S1.28:47: tiene conocimiento de que es una variable y él está... están utilizando a su modo el tratar de resolverla.

Ante esta respuesta se considera que la **PM6** asocia implícitamente el concepto de variable con el uso de la variable como incógnita, pues señala el hecho de resolverla. Considerando que se refiere al hecho de resolver una ecuación donde se presenta la incógnita.

Por otra parte, algunas de las transcripciones en las que se evidencia un nivel de interacción de Interactúa Cuestionando son:

IA.S1.31:54: Muy bien [PM9], en efecto se van los estudiantes a encontrar el valor, pero en esto donde radica la dificultad.

IA.S1.33:04: De acuerdo Mtra. [PM1], entonces con base en las respuestas de sus compañeros en qué está de acuerdo.

IA.S1.34:43: Muy bien [PM3], pero le pregunto a todos los colegas, qué diferencias hay entre expresión y ecuación y por qué éste es un problema para los estudiantes.

Ante lo suscitado respecto este análisis de las interacciones, se considera que el hecho de que los niveles de interacción presentados con mayor frecuencia hayan sido el de aporta información e interactúa cuestionando, tiene que ver con la naturaleza de la Tarea 1 y de las acciones de la Fase I que se consideraron propiciaría dicha tarea, pues estas estaban enfocadas a presentar aseveraciones de observación y plantear y contestar cuestionamientos que ayudaran a clarificar detalles de las aseveraciones.

Tabla 19

Apoyos de interacción presentes en la Tarea 1. Problemas desencadenantes

Apoyos de interacción		Frecuencia	Ejemplos de transcripción
Tipo de argumentos	Inductivo	2	PM7.S1.44:42: Ese error es algo que comúnmente veo en mis clases, realizan las operaciones con las constantes (valores conocidos) pero no se sienten seguros al no poner una respuesta con x qué es la variable que se está trabajando.
	Abductivo	4	PH12.S1.36:56: yo pienso que el principal problema es que en muchas situaciones de alguna manera inculcamos como docentes que al ver una variable siempre debe de haber un valor que cumpla con lo que nos están pidiendo.
	Deductivo	1	PM7.S1.39:04: Me refiero a que en las primeras etapas del álgebra utilizan la variable para encontrar un valor constante.
Recursos	Recurso Social	0	
	Recurso Material	0	

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Como se expone en la tabla 19, los apoyos de interacción que se presentaron con mayor frecuencia fueron los argumentos inductivos y abductivos relacionados con la experiencia docente, tal como se había considerado previamente. Se considera que esto ocurre porque los profesores principalmente asocian las situaciones con acontecimientos cercanos a su práctica.

Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable

En esta tarea se hicieron evidentes las tres categorías de las interacciones: tipos de interacción, nivel de interacción y apoyos de interacción, tal como se evidencia en las tablas 20, 21 y 22, respectivamente.

Tabla 20

Tipos de interacción presentes en la Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable

Tipos de interacción	Frecuencia	Evidencia de Interacción
Profesor – Profesor	No se presenta	
Profesor – Investigador	9	<p>PM7.S1.49:04: Yo les he preguntado porque la vuelven a escribir si ya están sustituyendo su valor y me dicen que por qué no están seguros de que esté bien, así que mejor la colocan. Y solo suman lo que si conocen.</p> <p>Nota: Aquí la PM7 da respuesta al cuestionamiento de la IA:</p> <p>IA.S1.47:18: Y por qué crees [PM7] que no se sientan seguros los estudiantes de poner una respuesta al no poner x.</p>
Profesor – Grupo	39	<p>PH4.S1.46:03: VARIABLE: cambiante,</p> <p>PM1.S1.46:20: Yo entiendo por variable un número que puede cambiar o tomar cualquier valor.</p> <p>PM7.S1.56:57: Definitivamente es transversal</p> <p>PM1.S1.59:28: Sobre los usos de la variable, puede ser dependiendo el contexto o el problema, puede representar una expresión algebraica, o satisfacer una ecuación o una igualdad.</p>

Investigador – Grupo	19	<p>IA.S1.55:50: Gracias, podrían mencionar algunos temas específicos.</p> <p>IA.S1.56:36: Excelente entonces considerando la respuesta del profesor [PH4] que la noción de variable podría ser transversal...</p>
Investigador – Profesor	13	<p>IF.S1.57:13: con situación, hace referencia no se a algún problema en contexto o simplemente alguna situación de un problema matemático?</p> <p>Nota: La IF interactúa con el PH8, tomando la participación:</p> <p>PH8.S1.56:40: la variable básicamente pues se usa para representar alguna situación (...) concreta.</p>

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Como se hace evidente en la Tabla 20 el tipo de interacción P-P tampoco se presentó en esta Tarea 2, pues al igual que en la Tarea 1 los profesores se centraron en dar su opinión respecto lo que se les estaba planteando, sin cuestionarse o reflexionar sobre las ideas que el resto de los profesores mencionaban. En consecuencia, el tipo de interacción que se presentó con mayor frecuencia es el P-G, pues básicamente las ideas que cada profesor expresaba no estaban dirigidas hacia alguien en particular. Los casos en que se presentó el tipo de interacción P-I, fueron prácticamente porque el profesor respondía a un cuestionamiento realizado por la IF o bien las dos investigadoras (IA e IB). Como evidencia de ello (e implícitamente evidencia el tipo de interacción I-P), se presenta el siguiente hilo de transcripciones, además del presentado en la Tabla 20.

La IF, externa el compartir más ideas respecto qué entienden por los usos de la variable y el PH?, responde:

PH?.S1.57:46: (...) el uso de la variable pues está relacionado en la solución de cualquier tipo de problemática en donde nosotros necesitamos de por medio de un planteamiento de la problemática; determinar una ecuación y en base a esa ecuación, pues va a estar inmersa lo desconocido, lo que es la variable y es lo que nosotros queremos obviamente darle solución, encontrar el valor a esa variable para darle solución a la problemática.

Ante esto la IF cuestiona:

IF.S1.58:18: Asocia un uso usted profesor como encontrar el valor en una ecuación por ejemplo y a partir de ahí, éste entender la situación algo así mencionó? o estoy entendiendo mal?

El PH? responde:

PH?.S1.58:33: No, desde un principio debe uno de tener el conocimiento de la situación problema, que esto lo conlleve a uno o lo lleve a hacer un planteamiento de

una ecuación matemática y basada en esto tratar de encontrar la solución, verdad? que es el valor de la variable.

Con lo anterior y en relación al conocimiento que muestra el profesor en torno a la variable, se considera que el PH? relaciona los usos de la variable básicamente con situaciones donde esté involucrada la solución de una ecuación, esto es, relaciona los usos de la variable con un solo uso, el de la incógnita. Esto se menciona para tener en consideración si en las fases posteriores el profesor presenta cambios de pensamiento en torno a esto, y qué interacciones lo promovieron.

Entonces en términos generales, se tenía previsto que en esta tarea se presentarían todos los tipos de interacción, sin embargo, el de P-P no se evidenció, por las razones ya mencionadas.

Tabla 21

Niveles de interacción presentes en la Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable

<i>Nivel de interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Evidencia de Interacción</i>
Aporta información	25	PH2.S1.46:26: Variable es cualquier número que satisface una ecuación, en determinado problema.
Interactúa Aclarando	6	PH8.S1.57:20: eh pues en ambos... puede ser algún problema matemático puede ser algún contexto diferente a lo que es el área de matemáticas... eh la variable, la verdad es que tiene muchos usos. Nota: El PH8 responde al cuestionamiento que le plantea la IF sobre a qué se refiere con situación.
Coincidiendo	6	PM3.S1.46:22: la variable hace referencia a cambios por o que no permanece fijo. Nota: La PM3 comparte la idea con PH4, PH8 y PM1, aunque no lo señala de manera explícita.
Discrepando	0	
Sintetizando	3	IF.S1.47:44: (...) Entonces aquí se habla ya de valores cambiantes, no cambiantes en esta discusión sobre la noción de variable... (...)
Negociando	4	PH8.S1.49:41: Este bueno no sé qué tan acertado o equivocado esté en esta participación sobre (...) que no necesariamente tiene que cambiar no necesariamente va a variar como

			<p>dice la palabra, verdad?</p> <p>Entonces siguiendo ese razonamiento no podemos decir, llamar a esa representación de algo que no va a cambiar, no podemos llamarlo variable. Tendríamos que llamarlo de otra manera, desde ahí, yo pienso que pues habría un error, no ahorita, sino desde mucho tiempo atrás de que algo que no va a cambiar lo estamos llamando como variable y variables lo vemos en el sentido estricto de lo que dice la Real Academia de la Lengua, pues es algo que va a cambiar, verdad?</p> <p>Nota: Se considera que el profesor está negociando dado que ya había participado previamente aportando su opinión respecto la noción de variable, y en esta participación después de diversas aportaciones hechas por otros profesores, nuevamente recurre a presentar su punto de vista pero justificándose con base a la definición planteada en la Real Academia de la Lengua sobre variable.</p>
	Cuestionando	17	<p>IF.S1.53:54: ¿En qué temas han utilizado este concepto?.</p> <p>IF.S1.57:36: muy bien, muchas gracias alguien más que guste compartir su opinión sobre qué entienden por los usos de la variable.</p>
Interactúa y amplia	Interactúa y amplia	1	<p>PH5.S1.50:55: Si puedo complementar, este miren lo que pasa es que la variable se toma en cuenta desde tres ámbitos como dicen las autoras, (...)</p>
	Coincidiendo	8	<p>PH13.S1.49:11: Variable es aquel número representado con una literal, y que por sus características puede representar un valor de acuerdo al contexto.</p> <p>Nota: Si bien el PH13 no señala que coincide con la aportación de la PM5, con respecto a ver la variable como una representación mediante una literal, si nos regresamos un poco a dicha aportación, en efecto tienen esa coincidencia.</p> <p>PM5.S1.48:27: Un algo representado mediante alguna letra, que puede tomar diferentes valores,</p>

de ahí el nombre, variable.

Ahora el PH13 amplía la idea mencionando que ese valor que pueda tomar dicha literal dependerá del contexto, se supone, que del contexto del problema.

Discrepando

PH5.S1.45:00: Si me permiten... este ampliando lo que acaba de decir el maestro, eh para mi variable no siempre varía, válgame la redundancia, a veces esas variables cuando toman en cuenta como incógnitas pudieran tomar un solo valor, verdad? entonces no está cambiando no sé está variando mucho que digamos, (...) en algunos casos cuando la variable se toma como una relación funcional pues sí puede variar, puede cambiar, verdad?

1

Nota: El **PH5** no coincide en su totalidad con lo que mencionó el **PH8**, respecto que variable hace referencia a algo que siempre varia (cambia, sujeto a probabilidades), ante lo cual él amplía esta idea señalando que variable no siempre varía, que depende de la interpretación que se le esté dando a la variable, según lo que reportan Ursini y Trigueros (2006).

PH8.S1.44:31: (...) para mí el concepto de variable es vamos el mismo nombre lo dice, no? algo que varía algo que va cambiando algo que está sujeto a vamos a cambios frecuentes o a ciertas probabilidades (...)

TOTAL

71

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Al igual que en la Tarea 1, los *niveles de interacción* que se presentaron con mayor frecuencia en la Tarea 2 son: aporta información (AI) e interactúa cuestionando (ICu). Ante este hecho, se considera que el nivel de AI se presentó con mayor frecuencia debido a la naturaleza de la tarea y de la acción F1/A referente a la realización de aseveraciones en torno a la noción de variable y sus usos. En este mismo tenor, se esperaba que los niveles de Interactúa coincidiendo (ICo) Interactúa discrepando (IDi) e Interactúa y amplia discrepando (IyADi) se hicieran evidentes con mayor frecuencia, debido a las acciones F1/B (aseveraciones de acuerdo) y F2/A (identificación y declaración de las áreas de desacuerdo). Sin embargo, no sucedió así, por ejemplo, la presencia del nivel IDi fue nula, y la del nivel IyADi solo se presentó una vez, tal como se evidencia en la Tabla 21.

Tabla 22

Apoyos de interacción presentes en la Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable

<i>Apoyos de interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Ejemplos de transcripción</i>
Tipo de argumentos	Inductivo	PM7.S1.49:04: Yo les he preguntado porque la vuelven a escribir si ya están sustituyendo su valor y me dicen que por qué no están seguros de que esté bien, así que mejor la colocan. Y solo suman lo que si conocen.
		1 Nota: La PM7 con base a su experiencia da respuesta al cuestionamiento de la IA IA.S1.47:18: Y por qué crees [PM7] que no se sientan seguros los estudiantes de poner una respuesta al no poner x.
Recursos	Abductivo	0
	Deductivo	3 PH5.S1.50:55: Si puedo complementar este miren lo que pasa es que la variable se toma en cuenta desde tres ámbitos como dicen las autoras (Ursini y Trigueros), cuando se considera que es una incógnita se entiende que es algo que tengo que adivinar algo que tengo que decir su valor, (...)
	Recurso Social	0
	Recurso Material	0

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Respecto los apoyos de interacción en la Tarea 2, se presentó con mayor frecuencia el argumento deductivo, pues los profesores justificaban sus opiniones respecto los usos de la variable tomando como base el artículo de Ursini y Trigueros (2006), es decir, sus argumentos no estaban centrados puramente en sus experiencias docentes, sino ya en datos formales.

Ahora de manera general, en la Fase I el tipo de interacción que se presentó con mayor frecuencia fue el de Profesor-Grupo (se evidencia en la figura 9), por lo que se concluye que

en esta fase el profesor opta por compartir sus ideas de manera general sin considerar o contrastar sus ideas con las opiniones de los demás profesores y/o las investigadoras.

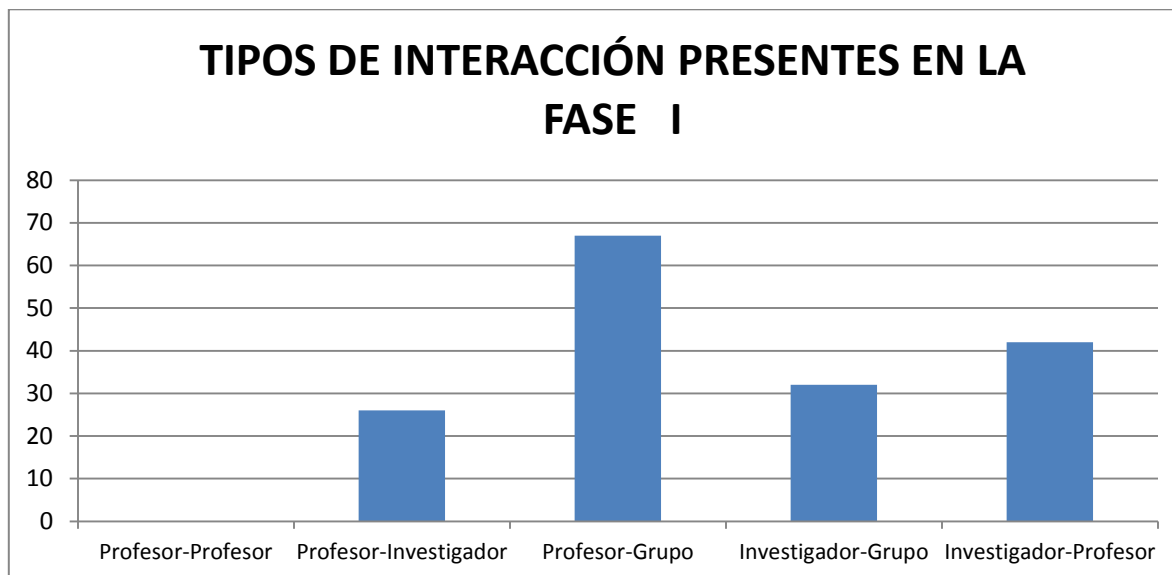


Figura 9. Tipos de interacción presentes en la Fase I. Compartir y comparar información.

Por otra parte, los niveles de interacción que se presentaron con mayor frecuencia en esta fase fueron el de *Aporta Información (AI)* e *Interactúa Cuestionando (ICu)*, tal como se evidencia en la figura 10. Se considera que el de *AI* se presentó con mayor frecuencia por dos razones: una por la naturaleza de las tareas propuestas en esta fase y otra debido a que los profesores tienden a dar su punto de vista sin necesariamente prestar atención a lo que digan otros profesores para evitar que sus ideas se vean influenciadas o interrumpidas con lo que otros profesores ya plantearon o por el simple hecho de no querer repetir ideas o no atreverse a expresar que difiere con lo que otro profesor o investigador ya mencionó; dejando en su mente ese “¡ah! yo coincidí con el profesor”, “¡ah! se me ocurrió lo mismo” “pienso que no todo lo que dijo el profesor es correcto, yo tengo una idea distinta”, entre otras ideas. Ahora, si bien el nivel de interacción *ICu* se presenta como el segundo nivel con mayor frecuencia, es importante señalar que existe poco cuestionamiento por parte del profesor hacia el investigador, teniendo que mayormente es el investigador que pone en cuestionamiento y eso es algo que aún es difícil romper como contrato desde esta experiencia de desarrollo profesional. Cuesta aún propiciar que el profesor se empodere de hacer crítica y reflexión en conjunto con el investigador, en esta nueva postura de aprender de la relación profesor-investigador.

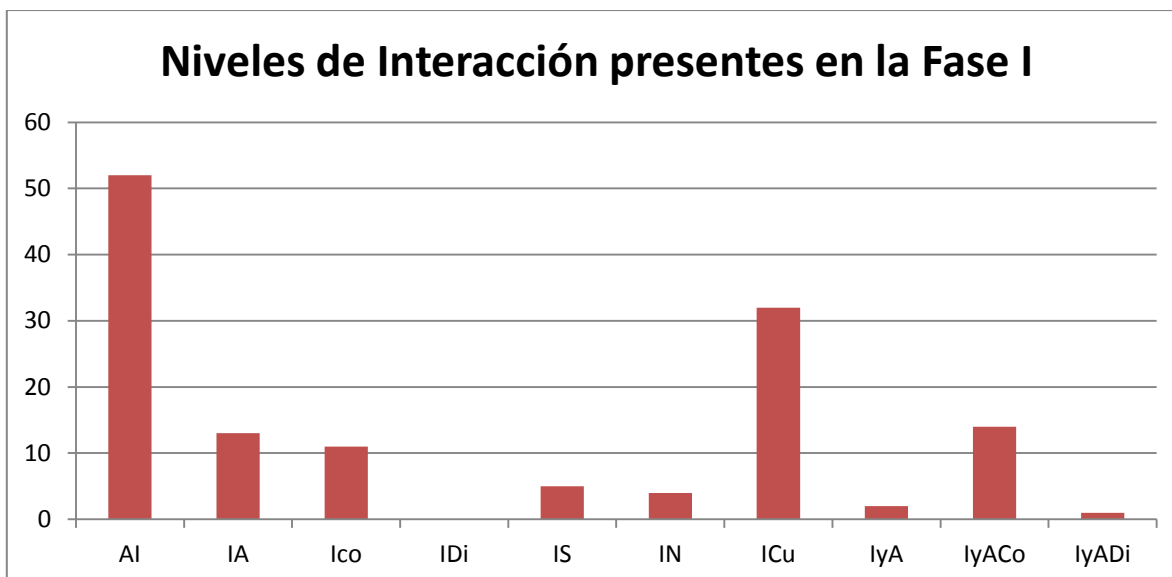


Figura 10. Niveles de Interacción presentes en la Fase I. Compartir y comparar información.

Finalmente, en esta Fase, 8 participaciones evidenciaron que los profesores apoyaron su interacción con argumentos abductivos y deductivos (ver figura 11), pues básicamente se enfocaban en justificar lo que mencionaban con base en su experiencia docente.

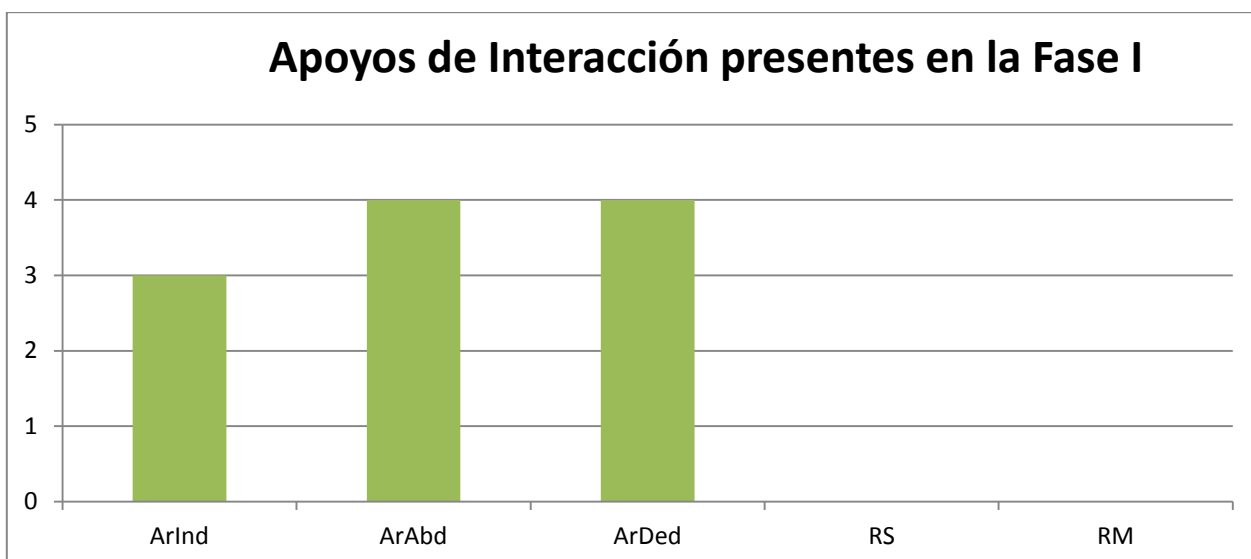


Figura 11. Apoyos de Interacción presentes en la Fase I

5.2 Fase II. Descubrimiento y exploración de disonancias de las inconsistencias entre ideas, conceptos o aseveraciones

La Fase II propone que los participantes identifiquen desacuerdos entre ideas, conceptos o aseveraciones respecto la noción de variable y sus usos. Realicen preguntas y respuestas

para aclarar el origen y el alcance del desacuerdo. Además, reafirmen su postura por medio de citas bibliográficas, experiencias, literatura o propuesta de metáforas.

A continuación, se explica cómo se desarrolló esta fase, describiendo las tareas que se involucraron, las acciones de la Fase II implicadas en cada una de las tareas propuestas y si se tuvo éxito o no, en el logro de dichas acciones.

5.2.1 Experiencia de la Fase II

Para dar inicio a la Fase II, se utilizó la **Tarea 2. Cuestionamientos en torno al concepto de variable**, enfocada en las siguientes acciones:

- **F2/A:** Identificación y declaración de las áreas de desacuerdo, al momento de solicitar a los profesores que mencionen en qué de lo discutido no están de acuerdo o difieren un poco

De acuerdo con las respuestas de los participantes se podría presentar la siguiente acción:

- **F2/B:** Plantear y contestar preguntas para clarificar la fuente y el alcance del desacuerdo

Esta **Tarea 2**, tal como se señaló en el apartado de experiencia de la Fase I, sirvió para desarrollar de manera simultánea acciones de la Fase I como de la Fase II. Lo que respecta a la Fase II se evidenció que la primera acción de esta Fase se presentó con éxito, pues se detectaron inconsistencias entre ideas que plantearon los profesores respecto la noción de variable y los usos de la variable. Para algunos profesores la noción de variable es simplemente algo que varía, para otros algo que cambia, otros asociaban a la variable con algo desconocido, la representación de una literal, el resolver una ecuación, entre otras ideas que enseguida se presentan:

PH8.S1.44:31: (...) para mí el concepto de variable es vamos el mismo nombre lo dice, no? algo que varía algo que va cambiando (...)

PH?.S1.46:16: (...) considero que una variable está supeditada a una situación en un problema, en un planteamiento o en una ecuación, pero esa ecuación también, pues obviamente va a resolver una situación, es cuando toma el sentido de variable porque, o sea va a variar, pero en determinado rango de valores (...)

PM1.S1.46:20: Yo entiendo por variable un número que puede cambiar o tomar cualquier valor.

PH2.S1.46:26: Variable es cualquier número que satisface una ecuación, en determinado problema.

Con lo antes expuesto se da evidencia de las inconsistencias encontradas al tratar de definir el concepto de variable. Aunado a esto, el **PH5** ante las primeras aseveraciones declara no estar de acuerdo o no coincidir con todo lo que había mencionado el **PH8** respecto la noción de variable y justifica por qué:

PH5.S1.45:00: Si me permiten... este ampliando lo que acaba de decir el maestro (PH8), eh para mi variable no siempre varía, válgame la redundancia, a veces esas variables cuando toman en cuenta como incógnitas pudieran tomar un solo valor, verdad? entonces no está cambiando no sé está variando mucho que digamos, (...) nos lo explican por ahí Ursini y Trigueros, verdad? Depende de qué interpretación le esté dando yo a la variable, y entonces en algunos casos cuando la variable se toma como una relación funcional pues sí puede variar, puede cambiar, verdad?

Con lo anterior queda evidenciado que la acción **F2/A** se logró con éxito. No obstante, la segunda acción (**F2/B**) no se presentó con éxito, pues faltó que la **IF** diera seguimiento a esta declaración de desacuerdo para clarificar la fuente y el alcance del mismo.

Para continuar con el desarrollo de la Fase II, se propuso la **Tarea 3. Reaseverar lo discutido**. Esta tarea se presenta en la figura 12 y tiene como objetivo reaseverar la posición de los participantes en torno al concepto de variable después de las ideas planteadas y discutidas en la **Tarea 2**.

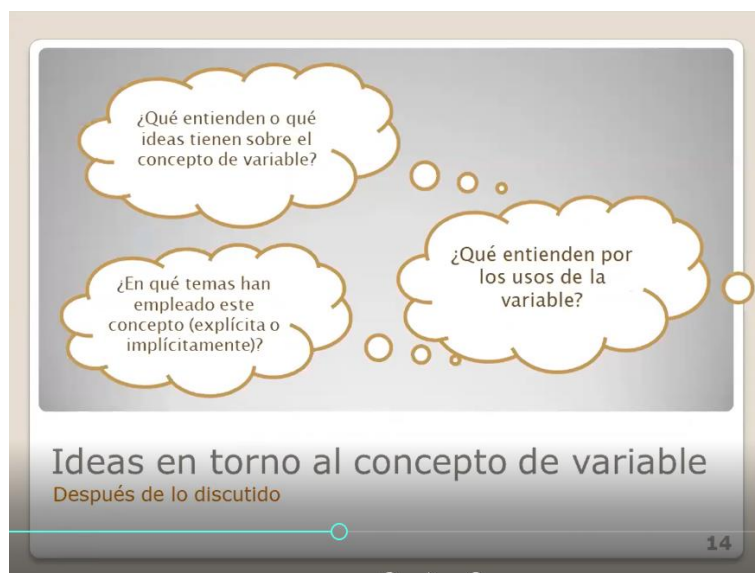


Figura 12. Presentación de la Tarea 3. Reaseverar lo discutido

Como se evidencia en la figura 12, se les solicitó a los profesores que después de lo discutido y con base en su experiencia como profesores, su formación académica, artículos que hayan leído, etcétera., expusieran ¿qué ideas en torno al concepto de variable mantienen? y ¿por qué?, teniendo entonces que se promueve la acción **F2/C** de esta fase, la cual se espera haber alcanzado con esta tarea:

- **F2/C:** Reaseverar la posición del participante y posiblemente presentar argumentos o consideraciones en su apoyo mediante referencias a la experiencia del participante, literatura, datos formales recopilados o propuesta de metáfora o analogía relevante para ilustrar el punto de vista.

Antes de solicitar a los profesores que reafirmaran sus ideas en torno a su noción sobre el concepto de variable, los usos de la variable y en qué temas se presenta de manera implícita e implícita este concepto, la **IA** y la **IB** retomaron algunas aseveraciones previas que plantearon los participantes en tareas anteriores a la **Tarea 3**, identificando y declarando áreas de acuerdo como de desacuerdo. A continuación, se presentan algunas transcripciones que dan evidencia de ello:

IA.S1.1:06:00: fíjense que lo que podemos rescatar es que en realidad no tenemos un acuerdo en torno a lo qué es una variable a lo qué es el concepto de variable.

IB.S1.1:08:02: en efecto o sea no tenemos como esta idea de ¿qué es la variable? , o sea, si la definimos podemos encontrar diferentes acepciones que hacen del concepto de variable.

IB.S1.1:11:52: Entonces, igual rescató que en efecto yo también coincido que un acuerdo en lo que creo que todos estamos de acuerdo es esta idea de que la variable es un concepto transversal.

Ante estas aseveraciones una de las cuestiones en las que se evidenciaron discordancias fue en torno a la noción que tenían los profesores sobre el concepto de variable, pues para algunos significaba algo que varía, una incógnita, una literal o algo que cambia. Aunado a esto, uno de los acuerdos fue que la variable es un concepto transversal. Ahora, posterior a que las investigadoras plantearan los acuerdos y desacuerdos que habían identificado y ampliaran algunas ideas, la **IA** solicitó a los profesores que indicaran en qué de lo mencionado estaban de acuerdo o en qué no, promoviendo que los profesores reafirmaran sus ideas y propusieran nuevas tal como fue el caso de las siguientes participaciones:

PH12.S1.1:01:59: los usos de la variable se refiere a las diferentes maneras de como implementamos o como ponemos en práctica el concepto de variable.

PM3.S1.1:04:59: La variable al ser incógnita en el planteamiento nos permitiría encontrar un valor concreto que satisfaga la relación dada. En el caso de número general es cuando por lo regular se refleja en reducción de expresiones pero sin que se especifique algo más. En cuestión de relación funcional como variable una variable respecto a otra u otras.

PH6.S1.1:17:27: estoy de acuerdo en que la variable va más allá de una ecuación.

Estas tres aseveraciones dan evidencia de que los profesores ampliaron su noción sobre el concepto de variable y sus usos, más no de que hayan reafirmado su idea, pues antes no opinaban lo mismo o no opinaban nada. Tal es el caso del **PH6**, quien antes no había expresado su opinión respecto la noción de variable y el caso de la **PM3** que antes había mencionado algo distinto sobre la noción de variable:

PM3.S1.46:22: la variable hace referencia a cambios por o que no permanece fijo.

Finalmente, la única idea que se reafirmó fue que la variable es un concepto transversal y esto fue hecho por las investigadoras y no por los profesores, por lo que se considera que

la acción F2/C no se logró con total éxito, pues se pretendía que los profesores retomaran sus ideas y las de sus compañeros y reflexionaran si las mantenían o ya había un cambio. Al respecto, solamente la **PM3** sintetiza ideas de lo que se ha discutido, permitiéndole expresar nuevas ideas sobre el concepto de variable, tal como se expuso anteriormente (**PM3.S1.1:04:59**).

5.2.2 Interacciones en la Fase II

Para el análisis de las interacciones correspondientes a la Fase II, se presentarán los resultados que arrojó el desarrollo de la **Tarea 3**. En esta tarea se hicieron evidentes las tres categorías de las interacciones consideradas en esta investigación, tal como se evidencia en las tablas 23, 24 y 25, respectivamente.

Tabla 23

Tipos de interacción presentes en la Fase II. Reaseverar lo discutido

<i>Tipos de interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Evidencia de Interacción</i>
Profesor – Profesor	No se presenta	
Profesor – Investigador	2	<p>PH12.S1.1:01:59: los usos de la variable se refiere a las diferentes maneras de como implementamos o como ponemos en práctica el concepto de variable.</p> <p>IA.S1.1:02:22: Bien [PH12] y cuáles serían esas formas de implementar.</p> <p>PH12.S1.1:12:40: respondiendo a la pregunta maestra [IA], pues las formas de implementarlo serian con la resolución de problemas en los que se vayan planteando de tal manera que se analice esos diferentes usos y que los problemas si se pudiera tuvieran relación con lo que viven cotidianamente.</p> <p>Nota: Aquí el PH12 responde directamente ante un cuestionamiento que le plantea la IA, para aclarar la aseveración que previamente había hecho el PH12.</p>
Profesor – Grupo	8	<p>PM4.S1.1:17:13: No se contextualiza el concepto en el ámbito matemático.</p>
Investigador – Grupo	9	<p>IF.S1.1:18:47: podrían mencionar con qué de lo discutido están de acuerdo o en desacuerdo, referenciando a lo que mencionan sus compañer@s.</p>
Investigador – Profesor	4	<p>IA.S1.1:13:35: [PH13], a quién te refieres respecto a que quieren darle significado a su entorno.</p>

Nota: La **IA** interactúa con el **PH13**, tomando la participación:

PH13.S1.1:06:06: Porque quieren darle un significado de su entorno.

Total 23

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Como se hace evidente en la Tabla 23, al igual que en las tareas 1 y 2, el tipo de interacción P-P no se presentó en la tarea 3, correspondiente a la Fase II. Nuevamente los profesores se centran en expresar su punto de vista de manera general o a responder cuestionamientos hechos por las investigadoras o la investigadora en formación. No cuestionan lo que el resto de los profesores mencionan. Los tipos de interacción P-I, básicamente se centraron en dar respuesta a un cuestionamiento que la **IA** les planteó debido a una aseveración previa que los profesores habían expuesto. Los tipos de interacción I-G y P-G, básicamente se presentaron para expresar nuevas ideas, coincidir en algunas, realizar aclaraciones y formular cuestionamientos; está última solamente fue realizada por las investigadoras y no por los profesores. Finalmente, las interacciones del tipo I-P se centraron en cuestionar y sintetizar ideas.

Aunado a lo anterior, sobre entre quienes se presentaron las interacciones y el hecho de adelantar información sobre las formas en cómo se presentaron éstas, a continuación, se expone a detalle los niveles de interacción presentes en la Tarea 3 (ver la tabla 24).

Tabla 24

Niveles de interacción presentes en la Tarea 3. Reaseverar lo discutido

<i>Nivel de interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Evidencia de Interacción</i>
Aporta información	8	PH13.S1.1:16:40: A los jóvenes se les dificulta adoptar el uso de las variables, ya que normalmente, los ejercicios que se plantean son abstractos y de difícil aplicación para problemas de su vida cotidiana.
Interactúa Aclarando	5	IA.S1.1:01:28: Queremos aclarar, que aquí no hay respuestas erróneas, en realidad todas nos enriquecen y nos hacen ver formas diferentes de ver la enseñanza de las matemáticas.
Coincidiendo	6	IB.S1.1:11:52: Entonces, igual rescató que en efecto yo también coincidí que un acuerdo en lo que creo que todos estamos de acuerdo es esta idea de que la variable es un concepto transversal.
Discrepando	0	Nota: hubo participaciones donde simplemente se identificaron desacuerdos, más no implicaba que él o la participante estuviera manifestando

			un desacuerdo, por lo que no se considera que pertenezca a este nivel de interacción.
	Sintetizando	7	IB.S1.1:10:45: Entonces en ese sentido me gustó mucho como por ejemplo todos tenemos como una acepción diferente de la variable, pero podemos llegar a acuerdos que tienen que ver por ejemplo con esta idea de la comprensión que se tiene sobre la variable.
	Negociando	4	IA.S1.1:02:43: si no están de acuerdo me dicen.
	Cuestionando	6	IA.S1.1:04:19: lo que sí me queda claro es que dicen: es que sí- los estudiantes están acostumbrados a que x , siempre es un valor real y la pregunta, sería: ¿por qué pasará esto? ¿por qué nuestros estudiantes siempre creen que x es un valor real?
Interactúa y amplia	Interactúa y amplia	1	IA.S1.1:06:38: fíjense cuando yo -a mí me presentaron por primera vez esta cuestión de la noción de variable, pues inmediatamente fíjense yo pensé en álgebra, yo pensé en álgebra, y dije ah pues álgebra la variable, pero { 66:55 } cuando te pones a identificar empiezas a descubrir que en efecto la variables es algo mucho más complejo y que se hace evidente, no solamente en álgebra y bueno, por eso les preguntaba ahí a algunos de ustedes ¿si consideraban que entonces la noción de variable podría ser un tema transversal?
	Coincidiendo	6	IA.S1.1:15:16: El maestro [PH4]: Estamos de acuerdo en el caso de mis asignaturas las variables sí tienen relación directa con algo material y tangible. De acuerdísimo, es decir, cuando se presenta la noción de variable de alguna manera este la forma en la que se presenta, sí tienen una relación directa con algo que los estudiantes pueden ver. Nota: la IA coincide con lo que menciona el maestro PH4 en el <i>chat</i> , pero no solo lo deja como una coincidencia, sino que amplía su idea explicando a qué se refiere este profesor con que el concepto de variable pueda ser tangible para el estudiante.
	Discrepando	1	IA.S1.1.06:08: Y entonces es por eso que yo me

refería a esta cuestión de que esto va más allá en los estudiantes, si nosotros como profesores no nos podemos poner de acuerdo en lo que es una variable, pues imagínense nuestros estudiantes, por eso va más allá de la comprensión lectora, es decir, ¿Qué es una variable?

Total 37

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Como se muestra en la Tabla 24, en la Fase II los Niveles de Interacción que se presentaron con mayor frecuencia fueron los de *Aporta Información* (8), *Interactúa Coincidiendo* (6), *Interactúa Sintetizando* (7), *Interactúa Cuestionando* (6) e *Interactúa y Amplía Coincidiendo* (6). Caso contrario con los niveles que tienen que ver con evidenciar discrepancias, tales como el de *Interactúa Discrepando* (0) e *Interactúa y Amplía Discrepando* (1). Ante estos resultados, se puede concluir que la Tarea 3 tal como se planteó no propició que los profesores por sí mismos declararan discrepancias entre sus ideas y las de sus compañeros, y en consecuencia tampoco reafirmaran si tenían las mismas concepciones sobre el concepto de variable, sus usos y los temas donde éste se hace presente o si esas ideas ya habían sido transformadas.

Por otra parte, los apoyos de interacción que se presentaron con mayor frecuencia en esta Fase II, fueron el Argumento Inductivo y el Recurso Social (ver tabla 25), pues básicamente las aseveraciones se justificaron con base en experiencias docentes y personales y con lo que se había discutido hasta el momento en el espacio de desarrollo profesional.

Tabla 25

Apoyos de interacción presentes en la Tarea 3. Reaseverar lo discutido

<i>Apoyos de interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Ejemplos de transcripción</i>
Inductivo	6	IA.S1.1.06:08: Y entonces es por eso que yo me refería a esta cuestión de que esto va más allá en los estudiantes, si nosotros como profesores no nos podemos poner de acuerdo en lo que es una variable, pues imagínense nuestros estudiantes, por eso va más allá de la comprensión lectora, es decir, ¿Qué es una variable?
Tipo de argumentos		
Abductivo	1	IB.S1.1:08:38: (...) y en efecto, o sea todos, por ejemplo, en algún momento nos topamos con la variable y decimos es algo que varía, es algo que tiene que estar por ejemplo, a lo mejor en las funciones, a lo mejor tiene que estar solamente en el Cálculo, no lo sé, pero siempre es como que esa {68:59} idea coloquial de definir a la variable con

esta idea de varia- variable, no?

Deductivo	1	IB.S1.1:09:31: (...) por ejemplo hay un estudio que se hace sobre el concepto de variable para mirar cómo se define la variable, no? Entonces se hace un estudio con 99 libros de texto y en esos 99 libros de texto encuentran diferentes acepciones de la variable, no?
Recurso Social	4	IB.S1.1:08:02: en efecto o sea no tenemos como esta idea de ¿qué es la variable? , o sea, si la definimos podemos encontrar diferentes acepciones que hacen del concepto de variable.
Recursos		
Recurso Material	0	

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

De manera general y coincidiendo con algunos de los resultados expuestos en la Fase I, el Tipo de Interacción que no se presenta en la Fase II es el de P-P (tal como se muestra en la gráfica de la Figura 13), evidenciando que no se ha logrado propiciar una interacción entre los profesores con las tareas que se han propuesto. Ante lo cual se considera que se debe buscar la manera de generar esta interacción, pues es sumamente importante para la construcción de conocimiento.

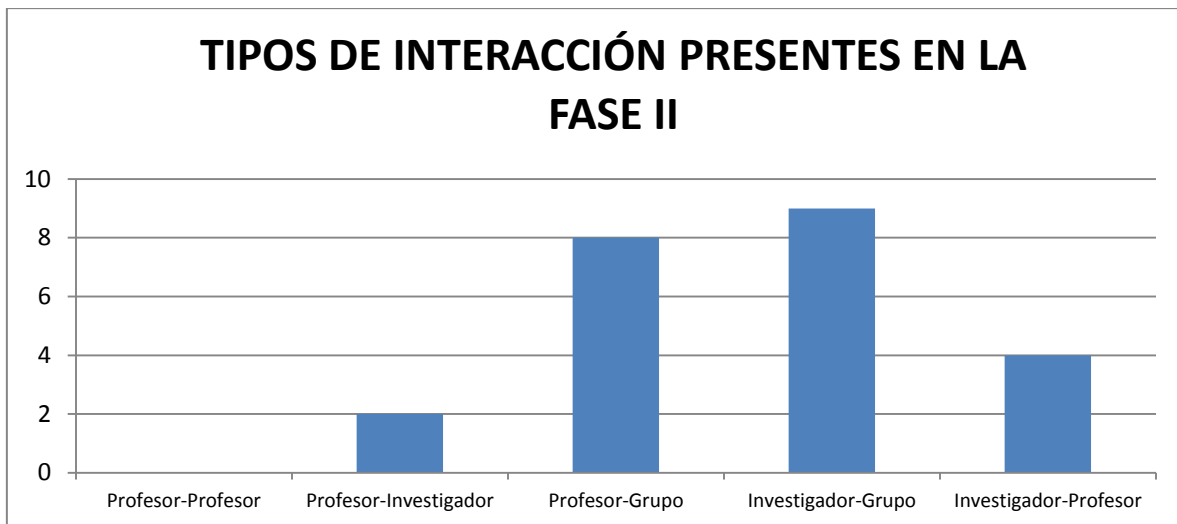


Figura 13. Tipos de interacción presentes en la Fase II.

Por otra parte respecto los *Niveles de Interacción* en ambas Fases (I y II) el que se presenta con mayor frecuencia es el de Aporta Información evidenciando que la mayoría de los participantes están en disposición de plantear sus ideas ante otros compañeros; sin

embargo, no a contrastar sus ideas con las de otros compañeros, o bien a cuestionar las ideas expuestas. Lo anterior, dado que el Nivel de Interacción referente a declarar inconsistencias o discrepancias es el que con menor frecuencia se evidencia, tal como se muestra en la gráfica de la figura 14.

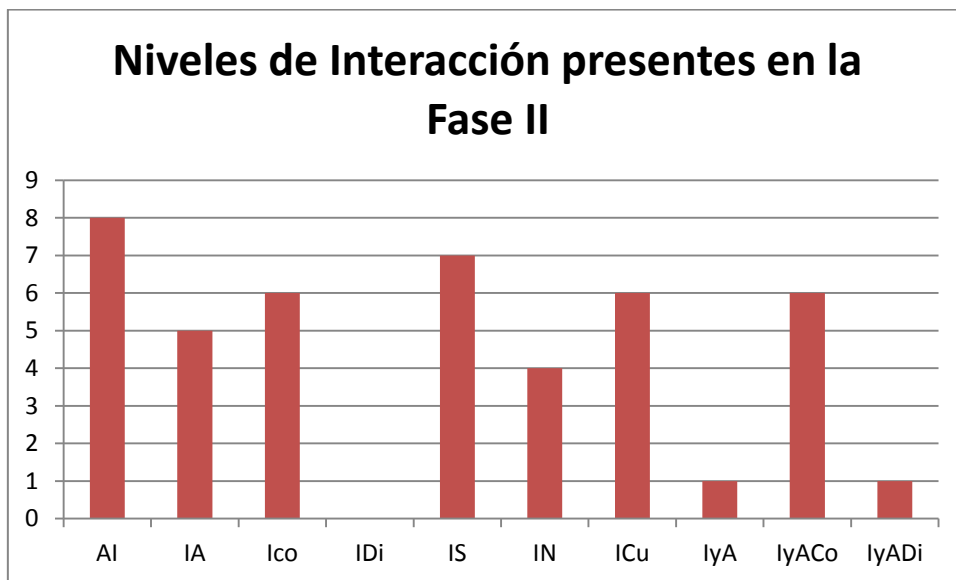


Figura 14. Niveles de interacción presentes en la Fase II.

Finalmente, sobre los apoyos de interacción presentes en esta fase, se puede notar que hay una evolución en cuanto a los argumentos y recursos que los profesores emplean para justificar o explicar sus ideas. Pues en esta fase se muestra mayor diversidad (ver la gráfica de la figura 15) en cuestión de justificaciones basadas en experiencias docentes y personales y con lo que se había discutido hasta el momento en el espacio de desarrollo profesional (recurso social).

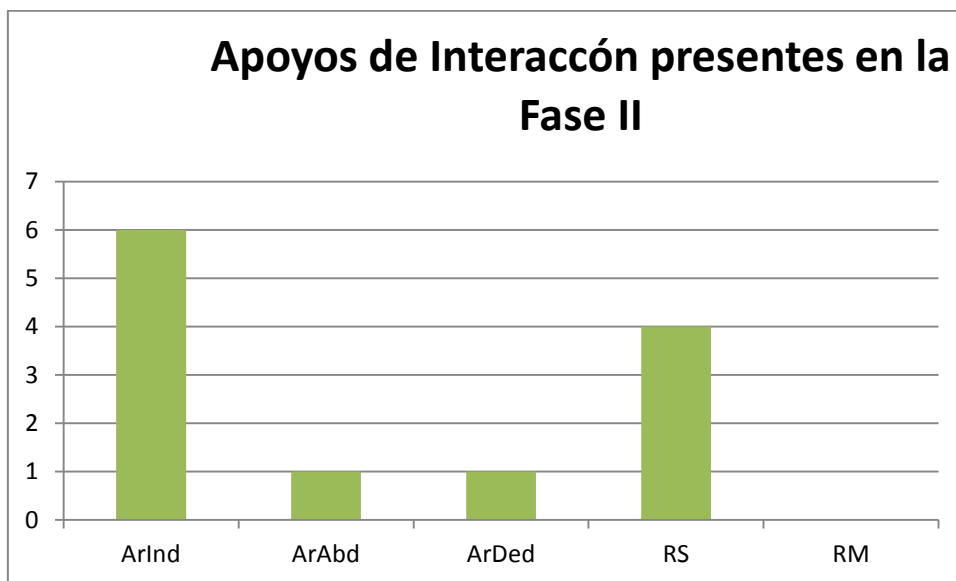


Figura 15. Apoyos de Interacción presentes en la Fase II.

5.3 Fase III. Negociación del significado y construcción mutua de conocimiento

Después de compartir, comparar y discutir ideas sobre el concepto de variable y sus usos, es en la Fase III donde se prosigue a negociar el significado de la variable y sus usos para construir mutuamente conocimiento al respecto. Para ello se recomienda plantear tareas que promuevan el logro de las siguientes acciones (según el modelo de Gunawardena y colaboradores, 1997):

- **FIII/A:** negociación o aclaración del significado de los términos.
- **FIII/B:** negociación del peso relativo que se asignará a los tipos de argumentos.
- **FIII/C:** identificación de áreas de acuerdo o superposición entre conceptos en conflicto.
- **FIII/D:** propuesta y negociación de nuevas declaraciones que incorporen compromiso o co-construcción.
- **FIII/E:** propuesta de integración o acomodación de metáforas o analogías.

En esta fase se propusieron cinco tareas con las que se pretendía lograr cada una de las acciones antes presentadas y así cumplir con el objetivo propuesto en esta fase. A continuación, se explica a detalle en qué consistió cada una de las tareas, cómo se llevaron a cabo y si se logró el objetivo de esta fase.

5.3.1 Experiencia de la Fase III

La Fase III se llevó a cabo en las dos sesiones del C-T. En la primera sesión se contemplaron cuatro tareas, cada tarea con respectivas acciones de esta fase. Se comenzó con la **Tarea 4. Resolución y análisis de tres problemas donde cada uno implica un uso diferente de la variable**. La acción involucrada en esta tarea es la FIII/A, ya que se pretendía negociar o aclarar el significado del concepto de variable y sus usos; esto al momento de que los profesores resolvieran los problemas propuestos en la diapositiva 15 (figura 16) e identificaran similitudes y diferencias en el uso que se le da al concepto de variable en cada uno de esos problemas. Se esperaba que por medio del análisis a las respuestas a esos tres problemas los profesores identificaran los tres usos de la variable y las estructuras matemáticas asociadas a éstos.

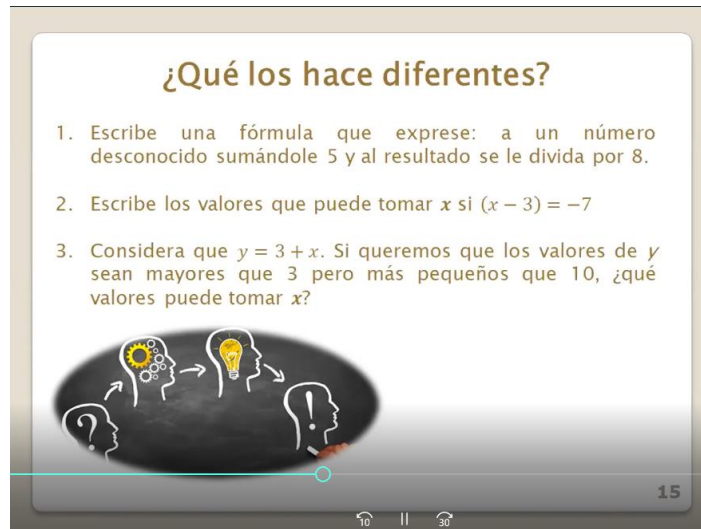


Figura 16. Presentación de Tarea 4. Resolución y análisis de tres problemas donde cada uno implica un uso diferente de la variable

Para desarrollar esta tarea la IF solicitó a los profesores que de manera simultánea respondieran esos tres problemas y se cuestionaran ¿qué los hace diferentes a cada uno de ellos? Mencionando que posteriormente se discutirían sus respuestas. Para ello se les dio un tiempo aproximado de 15 minutos y se les solicitó que sus respuestas las enviaran vía el *chat* de *WhatsApp* o en el *chat* de *Zoom*. Como resultado, las soluciones que dieron los profesores al problema 2 fueron iguales y al problema 3 en su mayoría fueron equivalentes (tal como se evidencia en los próximos fragmentos), por lo que no se propició una discusión para llegar a acuerdos sobre qué respuesta era la correcta.

Respuestas del problema 2. Escribe los valores que puede tomar x si $(x - 3) = -7$.

PM3.S1.1:29:12: 2. $x = -4$

PH13.S1.1:32:31: Los hace diferentes la forma en que mencionan a la variable: *En la segunda: Como incógnita. $x = -4$.

Respuestas del problema 3. Considera que $y = 3 + x$. Si queremos que los valores de y sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar x ?

PM3.S1.1:29:12: 3. y pertenece al intervalo $(3,10)$ y x pertenece al intervalo $(0,7)$

PH13.S1.1:32:31: Los hace diferentes la forma en que mencionan a la variable: *En la tercera: Como relación funcional. $\{0 < x < 7\}$

PM10.S1.1:32:36: $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

PH2.S1.1:33:15: x toma valores de 1 a 6.

Caso contrario ocurrió con el primer problema, pues se plantearon tres respuestas diferentes, dos de ellas asociadas a la estructura de ecuación y una de ellas a la estructura de expresión, lo cual generó incertidumbre y se discutió para aclarar cuál de esas respuestas era la correcta. Esto permitió que se comenzara a negociar y aclarar sobre los usos de la variable y cómo las estructuras matemáticas de expresión, ecuación y función podrían estar

asociadas directamente a cada uno de los tres usos de la variable. Con ello, se concluye que la acción FIII/A se logró. A continuación, se da evidencia de algunas respuestas dadas por los profesores al problema 1 y algunas participaciones donde se comienza a negociar o aclarar dudas sobre los usos de la variable presentes en cada problema.

Respuestas del problema 1. Escribe una fórmula que exprese: a un número desconocido sumándole 5 y al resultado se le divide por 8.

- Respuestas asociadas a la estructura de ecuación:

PH2.S1.1:30:09: La ecuación es $X + 5 = Y/8$

Respuesta dada en el chat de WhatsApp por varios profesores: $\frac{x+5}{8} = y$

- Respuesta asociada a la estructura de expresión:

PM3.S1.1:29:12: 1. $(x + 5)/8$

PH13.S1.1:32:31: Los hace diferentes la forma en que mencionan a la variable: *En la primera: Como número general. $(x + 5)/8$

El haber notado que las respuestas dadas al primer problema son diferentes, las investigadoras y la IF solicitaron a los profesores que compararan sus respuestas con las del resto de sus compañeros y determinararan si había coincidencias o no entre éstas. Además que fueran pensando qué hace diferente a cada uno de los problemas planteados, pues no todos los profesores habían respondido esa parte.

Algunos profesores al comparar sus respuestas optaron por cambiar su respuesta inicial por otra, dada por otro u otros profesores, justificando, que después de revisar otras respuestas y analizar nuevamente lo que pide el problema se daban cuenta que la de ellos no era correcta. Tal es el caso de la PM10 quien expresa lo siguiente:

PM10.S1.1:43:46: Bueno yo ahí puse como respuesta $x + 5$ entre 8 pero ya revisando los trabajos de mis compañeros y viéndolo y volviendo a leer el enunciado, pues yo cometí un error (...)

Por su parte el PH2 también presento un cambio de respuesta; inicialmente respondió que la ecuación es $X + 5 = Y/8$ y después de varias participaciones donde la mayoría de los profesores daban como respuesta $(x + 5)/8$ (al menos en el chat de Zoom) optó por mencionar lo siguiente:

PH2.S1.1:35:11: Perdón en el problema 1, la ecuación es $(x + 5)/8$

Entonces, ante estos cambios de respuesta, la diferencia entre las mismas y el hecho de que los profesores ya hayan comparado sus respuestas con las de sus compañeros, la IF prosiguió con el desarrollo de la etapa de negociación y clarificación de ideas respecto el significado del concepto de la variable y sus usos; esto al identificar similitudes y diferencias en el uso que se le da al concepto de variable en cada uno de los tres problemas propuestos y al analizar qué estructuras matemáticas están asociadas a cada problema. Cabe

mencionar que la discusión se focalizó en el primer problema, pues fue donde se identificaron mayores discrepancias.

La IF inicia esta etapa de negociación y clarificación expresando:

IF.S1.1:43:15: (...) ya entramos en la etapa de que vamos a negociar y clarificar entre todos de manera conjunta lo que se ha discutido sobre estos tres problemas-bueno más bien, las respuestas que se han dado ante estos tres problemas. Quisiera que alguno de los profesores primero me diera la respuesta del primer problema y me dijera en qué se hace diferente del resto de los demás.

Ante esto, se presentó una participación donde la profesora señala haber cambiado su respuesta y justifica por qué (PM10.S1.1:43:46). Su justificación y en general su aportación propició que muchos más docentes manifestaran sus dudas e inquietudes, no solo ante las respuestas dadas a este problema 1, sino ante la redacción del mismo. También, propició que algunos profesores cambiaran sus respuestas, pero también se cuestionaran realmente cuál respuesta es la correcta. A continuación se muestra evidencia de algunas de las participaciones de los profesores que dan evidencia de lo antes mencionado:

PM10.S1.1:43:46: Bueno yo ahí puse como respuesta este $x + 5$ entre 8 pero ya revisando los trabajos de mis compañeros y viéndolo y volviendo a leer el enunciado, pues yo cometí un error, se supone que dice escribe una fórmula que exprese- entonces sabemos que una fórmula pues es una ecuación y la ecuación tiene términos tanto del lado derecho como el lado izquierdo de la igualdad. Entonces yo nunca lo iguale a ninguna variable que fue algo que sí hicieron mis compañeros, algunos pusieron $y = x + 5$ sobre 8, (...). Yo creo que sí, el trabajo que tienen mis compañeros donde ponen $y = x + 5$ sobre 8 es el correcto (...).

PM6.S1.1:46:41: yo también me equivoque en la primera respuesta.

PM6.S1.1:49:13: porque puse $x + 5/8$

PM6.S1.1:49:37: y me faltó la $y =$

PH2.S1.1:48:30: (...) a lo que comentaba la maestra que se había equivocado, que escribía $x + 5$ dividido entre 8, aquí podemos nosotros al ver una fórmula pues obviamente lo estamos leyendo de un modo matemático y podemos entrar en una controversia, (...) otra manera de entenderlo es: $x + 5$ me va a dar un resultado y ese resultado yo puedo expresarlo con una igualdad y decir es igual a y , y a esa y lo puedo dividir entre 8, no? aquí podemos nosotros entablar, o sea, diferentes formas de expresar esa ecuación, pero lo más correcto, bueno en mi parecer es: escribir $x + 5$ agrupado entre paréntesis dividido entre 8, no? (...) esa es mi opinión.

PH8.S1.1:50:03: Aquí lo que causa controversia es nada más la palabra fórmula, el enunciado está mal planteado, ahí no debe decir fórmula, verdad? Porque

así como- considero que los dos tanto la maestra [PM10] como el maestro que acabo de participar [PH2], los dos tienen razón, verdad? Aquí la controversia es la palabra fórmula, pero si leemos el texto lo que está después de los dos puntos, pues sí tiene toda la razón el maestro [PH2].

Con las participaciones antes expuestas (PM10, PM6, PH2 y PH8) se puede notar que los profesores intentan justificar el por qué cambiaron su respuesta o cuál para ellos es la respuesta correcta; dada la redacción del problema o haciendo referencia a lo que otros profesores han aportado. Con ello se puede concluir que estos profesores en conjunto con las investigadoras y el resto de los profesores que también estuvieron aportando sus opiniones al respecto, han negociado su conocimiento principalmente sobre qué respuesta es la correcta e implícitamente sobre qué estructura matemática está asociada con el problema 1 y por ende sobre qué uso de la variable está implícito.

Ahora, para clarificar algunas de las ideas que se propiciaron en la etapa de negociación, la IA plantea algunos cuestionamientos que fueron detonantes:

IA.S1.1:50:31: Es lo mismo $(x + 5)/8$ que $y = (x + 5)/8$

IA.S1.1:51:14: ¿Qué diferencias hay y entonces cuál es la correcta?

IA.S1.1:52:03: (...) Entonces mi pregunta, sería ¿qué es una expresión?, ya nos dieron la de fórmula.

Ante estos cuestionamientos y conforme se fueron desarrollando las interacciones entre todos los participantes, surgieron aportaciones importantes que poco a poco permitieron clarificar qué respuesta sería la correcta y todo lo que conlleva. Dado que la discusión fue amplia, para fines de esta investigación se toma el atrevimiento de presentar un resumen de los resultados.

Principalmente varios de los profesores al igual que la IF coincidieron en que una de las controversias del problema 1 recae en la palabra Fórmula, pues se presentaron diversas concepciones de esta palabra: relacionada con igualdad (PH1.S1.2:05:38), una ecuación (PM10.S1.1:43:46) o con algo que involucra más de una variable (PH8.S1.1:45:25). Además, a pesar de que la PM7 a través del chat de WhatsApp compartiera una definición de "Fórmula" la controversia no seso. Pues, de ello surgió otra inquietud, ¿qué se entiende por expresión?, dado que en dicha definición se empleaba esta palabra. En este mismo tenor, con participaciones posteriores, se planteó como reflexión ¿entendemos realmente qué es una ecuación, qué es una función y qué es una expresión? Esto dado que la IA expresa que con el último fragmento de la definición de fórmula "interpretación consistente" se hace referencia o significa que eso que entendamos ya sea como fórmula, expresión o función toma sentido con lo que está solicitando el problema y es ahí donde entran los usos de la variable.

Aunado a lo anterior, de forma conjunta se determinó que algo estaba mal en la redacción del problema, comenzando en que la palabra fórmula se podría omitir y que lo de "un número desconocido" podría modificarse, pues tanto los profesores como las investigadoras y la IF

coincidieron en que con ello se podría pensar que se trata del uso de la variable como una incógnita y por ende relacionar el problema inmediatamente con una ecuación. Ahora, para de cierta forma establecer una respuesta correcta se acordó que retomando el enunciado del problema a partir de los dos puntos (“a un número desconocido sumándole 5 y al resultado se le divide por 8”) y utilizar el paréntesis para hacer referencia a “un número desconocido sumándole 5” y que quede agrupado como un resultado y así poder dividir dicho resultado entre 8, entonces la respuesta correcta sería: $(x + 5)/8$

Otras de las aportaciones que se considera importante mostrar son aquellas donde los profesores reconocen cómo es que los conocimientos que ellos poseen para enseñar el tema de la variable en particular, repercute en su práctica docente. A continuación se presentan algunas de estas aportaciones:

PM10.S1.2:01:42: (...) Entonces quizás los conceptos que tenemos nosotros como como docentes del área de matemáticas a lo mejor pues aún nos falta un poquito más de ver eso que usted (IA) nos acaba de explicar que en cuanto a la definición cumplen ambas, yo tenía ese concepto de que una fórmula es una ecuación (...) Entonces yo llego a la siguiente conclusión maestra [IA] que muchas veces -hablo por mí- nosotros transmitimos o yo transmito el conocimiento de acuerdo a lo que yo conozco y posiblemente yo no tenga un panorama tan amplio para verlo desde todos los puntos de vista que usted ahorita nos hace reflexionar, entonces, pues aquí yo ya llevo algo positivo hacia mis clases, este a mi práctica.

PH8.S1.1:45:25: Si esté bueno, yo pienso que a varios de nosotros nos ocurrió lo mismo, yo también cometí un error en el último, me di cuenta que puse un 1 y era 0 en el último, bueno el intervalo debió de haber dicho 0 menor que x menor que siete, así debería de haber sido la expresión; pero por querer hacer las cosas rápido, por no leer a detalle, pues se cometen este tipo de errores (...)

PM6.S1.2:04:50: de inmediato pensamos nosotros en la incógnita, en la letra x , porque de hecho pues podemos utilizar cualquier otra letra, que ya sabemos que es de la a hasta la z , pero siempre pensamos en la x ; la incógnita siempre como la x , y no otra letra.

PH5.S1.2:05:43: (...) yo creo que un problema grave con nuestros estudiantes y con nosotros es desde el estudio de las cantidades, por ejemplo, ahorita que mencionan que la mayoría pusieron x , en mi caso no, yo puse una a , porque para mí entender ahí está hablando de un número general. Y por último, pues las variables que de manera funcional sí las representamos con las últimas letras del alfabeto x , y , z etcétera. Entonces creo que ese es un gran problema porque independientemente de cómo plantee el problema el alumno, al momento de encontrar la solución no sabe qué interpretación darle, no sabe, hay ecuaciones que tienen una solución, pero no numérica determinada, por ejemplo, en una ecuación, el resultado puede ser $2a$, $3b$,

verdad? Y entonces necesitamos aclarar bien eso con nuestros muchachos y necesitamos para ellos nosotros primeramente tenerlo bien claro, gracias.

Además se considera que estas aportaciones dan evidencia de que los profesores están en el proceso de construcción de conocimiento profesional, pues están transformando su forma de pensar en torno al concepto de variable, tanto en qué estructuras matemáticas se pueden relacionar a este concepto y cómo se definen dichas estructuras (función, ecuación, expresión), así como la manera más adecuada de representarla, haciendo referencia a las literales.

Finalmente como parte de la clarificación de ideas respecto qué hace diferente a cada uno de los tres problemas planteados en la tarea 4 y después de presentar un panorama general respecto la discusión y análisis en torno al problema 1, la participación que a continuación se presenta engloba las coincidencias que presentaron la mayoría de los profesores:

PM3.S1.1:48:32: En el primer problema es un número general pues no se especifican más condiciones. En el segundo problema como incógnita pues ahí si hay una igualdad y existe una sola variable. En el tercer problema una relación funcional pues ambas variables son dependientes entre si y para dar la solución se requiere que se cumplan las condiciones que se especifican.


Entonces, con lo antes expuesto referente a la etapa de negociación y clarificación se puede concluir que las acciones FIII/A y FIII/C se lograron, pues la primera hace referencia a la negociación y la segunda a la identificación de áreas de acuerdo respecto los usos de la variable. Esto para poder clarificar ideas en torno a la variable y sus usos. Estas acciones, engloban la Tarea 5, la cual se desarrolló con éxito, pues consistió en negociar y clarificar ideas sobre los usos de la variable que los profesores hayan identificado al resolver y analizar los tres problemas de la tarea anterior. Esto se logró al momento de revisar entre todos las respuestas dadas a los problemas y cuestionarse si identificaron los mismos usos de la variable que sus compañeros o identificaron otros y si sus respuestas coincidían o no.

Después de negociar y clarificar ideas sobre el uso que realmente está presente en cada uno de los tres problemas propuestos en la Tarea 4, se prosiguió con el desarrollo de la Tarea 6. Esta consistió en la presentación del modelo 3uv, específicamente, en proponer que esencialmente el concepto de variable es multifacético y que consta de tres usos (como incógnita, como número general y como relación funcional), donde cada uso posee diversos aspectos que permiten trabajar con el concepto de variable. Además consistió en negociar esta nueva aseveración sobre el concepto de variable, para saber si la aceptaban los profesores o si por el contrario identificaban algún otro uso de la variable. Por tanto, la acción involucrada en esta tarea es:

- **FIII/D:** propuesta y negociación de nuevas declaraciones que incorporen compromiso o co-construcción.

Para el desarrollo de esta tarea la IB se apoyó de las diapositivas 17 y 18 presentes en la figura 17:


Los tres usos de la variable (Ursini y Trigueros, 2006)



Número General

↓


$8xy(x+y)$



Incógnita específica

↓

$x + 4 = 7$
↓
 $x + \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = 7 - 4$



Relación Funcional

↓

$y = 2x + 3$
 $y = 5x - 1$
 $y = 3x + 7$

Aspectos para comprender la Variable como...

Incógnita	Número General	Relación funcional
I_1 Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.	G_1 Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.	F_1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
I_2 Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.	G_2 Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.	F_2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
I_3 Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.	G_3 Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.	F_3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
I_4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.	G_4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.	F_4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
I_5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.	G_5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.	F_5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
		F_6 Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema.

(Ursini y Trigueros, 2006)

Figura 17. Tarea 6. Presentación del modelo 3uv

La IB retoma información reportada en el artículo de Ursini y Trigueros (2006) respecto el modelo 3uv; presenta de una manera sintetizada los usos de la variable y los aspectos que están involucrados en cada uso y explica de qué trata cada uno de ellos. También retoma ideas que han surgido en el desarrollo del CT, mencionando que no se ha logrado establecer una definición exacta del concepto de variable y es aquí donde la IB trae como propuesta el modelo 3uv; expresando que las autoras de este modelo proponen que las diferentes acepciones de la noción de variable se pueden clasificar de tres maneras, dependiendo de su uso: como número general, como incógnita específica y como relación funcional. Ante esta propuesta y con la finalidad de que se logre la acción FIII/D centrada en la negociación de nuevas declaraciones que incorporen compromiso o co-construcción, la IB cuestiona si consideran que puede haber otro u otros usos distintos a los que propone el modelo 3uv o están de acuerdo con estos que se presentan.

Como respuesta al cuestionamiento hecho por la IB se presentaron diversas opiniones: sobre la falta de claridad respecto el uso como número general (PH5.S1.2:24:24); el cómo desde estudiantes y aun siendo profesores se dan cuenta que han visto el concepto de variable prácticamente como el uso de incógnita, o bien es el uso más arraigado que se asocia al concepto de variable (PH3.S1.2:26:18); el trabajar el uso de la variable como número general será algo complicado, dado que los alumnos al trabajar con el tema de funciones se confunden mucho (PH3.S1.2:26:18); algunos simplemente señalan estar de acuerdo con esos tres usos de la variable (PM7.S1.2:26:51).

Aunado a lo anterior, posterior a la presentación de los aspectos que cada uno de los tres usos de la variable posee y de las diversas participaciones en torno a lo mismo, a la existencia de esos tres usos, de cómo se presentan, de si hay algunos otros usos de la variable que el modelo 3uv no este contemplando, entre otras cuestiones; surge la participación del PH8 (PH8.S1.2:36:12), quién aporta una nueva idea, una nueva pregunta en torno a los usos de la variable, esta idea relacionada con el área de estadística. A partir de esta idea se generan nuevas y diversas participaciones para determinar si el ejemplo estadístico planteado a partir de diversas interacciones, pertenece o no a uno de los tres usos de la variable. Cabe mencionar que esta discusión fue amplia en tiempo y en

interacciones, lo que generó que realmente se logrará una negociación respecto la determinación de un nuevo uso de la variable o no (realmente ampliar su conocimiento respecto los tres usos de la variable), y con ello se puede concluir que la acción FIII/D se logró con éxito.

Para terminar con la experiencia de esta Fase III, se desarrollaron las tareas 7 y 8, ambas relacionadas, pues la acción involucrada en estas tareas es la **FIII/E** (propuesta de integración o acomodación de metáforas o analogías). La tarea 7 consistió en solicitar a los profesores que propusieran tareas matemáticas donde se presentaran los tres usos de la variable; una tarea para cada uso y haciendo evidente algunos de los aspectos que se están trabajando en cada uso. Esto según los conocimientos adquiridos en la primera sesión del CT en conjunto con su experiencia docente. Cabe mencionar que se les brindo una semana para la realización de esta tarea. La tarea 8 consistió en seleccionar algunas de las tareas enviadas por los profesores para compartirlas en la sesión 2 del CT y así de forma conjunta analizar si realmente los usos y aspectos propuestos por los profesores en cada una de las tareas son correctos y si se podrían agregar otros usos en caso de que los profesores no los hayan considerado. En esta tarea se logró una buena participación por parte de los profesores y la mayoría utilizó la tabla donde se presentaron los tres usos de la variable con sus respectivos aspectos para justificar sus respuestas. Con ello, se concluye que la acción FIII/E se logró con éxito pues con estas tareas los profesores comenzaron a integrar su conocimiento respecto los usos de la variable y sus respectivos aspectos, en tareas ya particulares donde se presenta el concepto de variable en su forma multifacética y no solo eso, sino que también han logrado cambiar su lenguaje a un lenguaje más formal y amplio, donde la noción de variable ya no se encuentra arraigada solamente al uso de variable como incógnita.

5.3.2 Interacciones presentes en la Fase III

Para el análisis de las interacciones correspondientes a la Fase III, se presentan los resultados divididos por sesión, dado que las tareas asignadas para desarrollar esta fase se ejecutaron al final de la sesión 1 y se retomaron al inicio de la sesión 2.

En la Tabla 26 se muestran las frecuencias con las que se presentaron las tres categorías de interacciones correspondientes a la Fase III-Sesión 1.

Tabla 26

Interacciones de la Fase III. Negociación del significado y construcción mutua de conocimiento – Sesión 1

<i>Categorías de interacción</i>	<i>Clasificación de categorías</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Categoría con mayor frecuencia/ Evidencia de Interacción.</i>
Tipos de Interacción	P-P	10	P-I I-G
	P-I	61	

	P-G		57		
	I-G		61		
	I-P		51		
Niveles de interacción	Aporta Información	AI		AI IAc	
			53		
		IAc	54		
	Interactúa		ICo	28	
			IDi	1	
			IS	21	
			IN	22	
			ICu	44	
			IyA	25	
			IyACo	20	
Apoyos de interacción	Interactúa y Amplía	IyADi	0		
		ArInd	3	RS	
		ArAbd	6		
	ArDed	9			
	Recursos	RS	20		
	RM	7			

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Por consiguiente, en la Tabla 27 se muestran las frecuencias con las que se presentaron las tres categorías de interacciones consideradas en esta investigación, éstas correspondientes a la Fase III-Sesión 2.

Tabla 27

Interacciones de la Fase III. Negociación del significado y construcción mutua de conocimiento - Sesión 2

Categorías de interacción	Clasificación de categorías	Frecuencia	Categoría con mayor frecuencia/ Evidencia de Interacción.
Tipos de Interacción	P-P	9	I-P
	P-I	55	

		P-G	74	
		I-G	38	
		I-P	83	
Niveles de interacción	Aporta Información	AI	41	ICu
		IAC	44	
		ICo	30	
	Interactúa	IDi	3	
		IS	15	
		IN	19	
		ICu	63	
	Interactúa y Amplía	IyA	12	
		IyACo	17	
		IyADi	2	
Apoyos de interacción	Argumentos	ArInd	0	RM
		ArAbd	0	
	Recursos	ArDed	3	
		RS	14	
		RM	56	

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Ahora de manera general, en la Fase III los tipos de interacción que se presentan con mayor frecuencia son el de P-G, P-I e I-P, respectivamente (se evidencia en la gráfica de la figura 18). Esto muestra que en esta fase se ha promovido un cambio respecto entre quienes se dan las interacciones, pues en las fases anteriores predominaron las interacciones I-G y P-G, es decir, prácticamente la mayoría de los mensajes tanto de las investigadoras, la investigadora en formación, así como de los profesores estaban dirigidos a todos los participantes en general. En este caso, si bien la interacción P-G sigue predominando con respecto a los demás, su diferencia es mínima, y además las frecuencias de P-I e I-P son relativamente próximas (116 y 110, respectivamente), por lo que se puede notar que en esta fase las interacciones se presentaron de una forma más recíproca y bidireccional, al menos entre investigador-profesor y viceversa. En este mismo tenor, otra de las interacciones que se ha presentado por primera vez hasta esta fase es la de P-P, esto da indicios que los profesores en esta fase comenzaron a considerar más las opiniones de sus compañeros y a reflexionar sobre ellas.

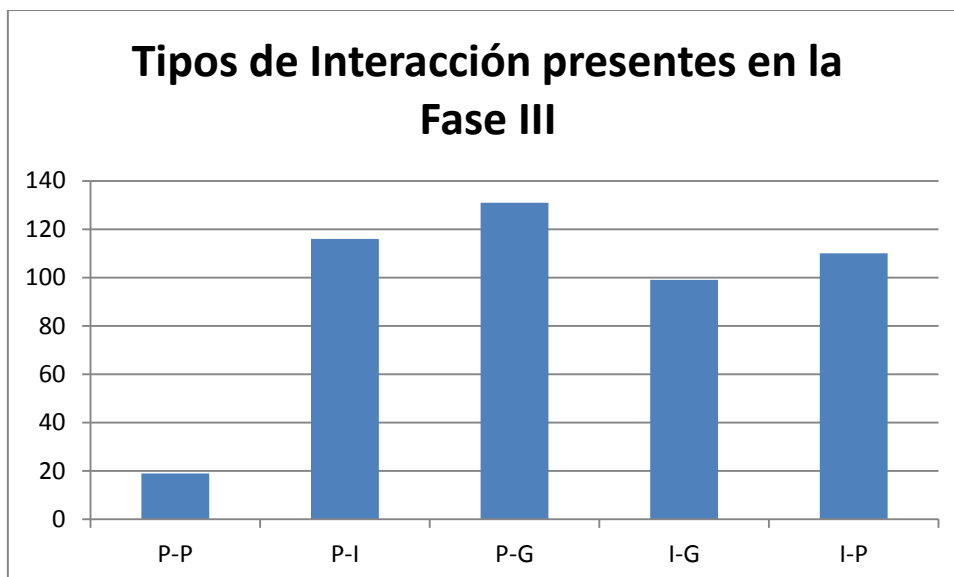


Figura 18. Tipos de Interacción presentes en la Fase III

Respecto la forma en que se presentaron las interacciones, los *niveles de interacción* que se evidenciaron con mayor frecuencia fueron el de ICu y el de AI (evidencia en la gráfica de la figura 19). Similarmente, como ha sucedido en las fases anteriores, en esta fase el *Nivel de Interacción* ICu predomina en la dirección I-G (104/107), pues en la dirección P-G solo se presentan tres cuestionamientos (dos por el PH8 y una por el PH5). Entonces, se puede concluir que aun en esta fase con las tareas que se presentaron no se promovió que los profesores se sintieran con toda la confianza de cuestionar tanto al investigador, a los demás profesores y sus propias dudas e ideas que le surjan. Otro de los niveles que se ha presentado entre los primeros con mayor frecuencia es el de AI, de lo cual se puede decir que es algo positivo, pues al menos los participantes tienen la iniciativa y confianza de plantear sus ideas, opiniones e información respecto el tema estudiado.

Aunado a lo anterior, un dato relevante es que en esta fase los niveles de *IDi* e *lyADi*, aumentaron su frecuencia a comparación con las fases anteriores. En la Fase I y en la Fase II, se presentó una vez el de *lyADi*, mientras que en esta fase se presentó dos veces y el de *IDi* cuatro veces.

Con lo expuesto sobre los niveles de interacción (ICu, IDi e lyADi) se puede decir que esta fase dio pauta a que algunos profesores iniciaran por forjar seguridad para realizar cuestionamientos y declarar no estar de acuerdo con todo lo que se opina. Esto sin duda, enriquece el desarrollo del CT, pues aquí los profesores toman un papel más activo respecto su desarrollo profesional, tal como se quería.

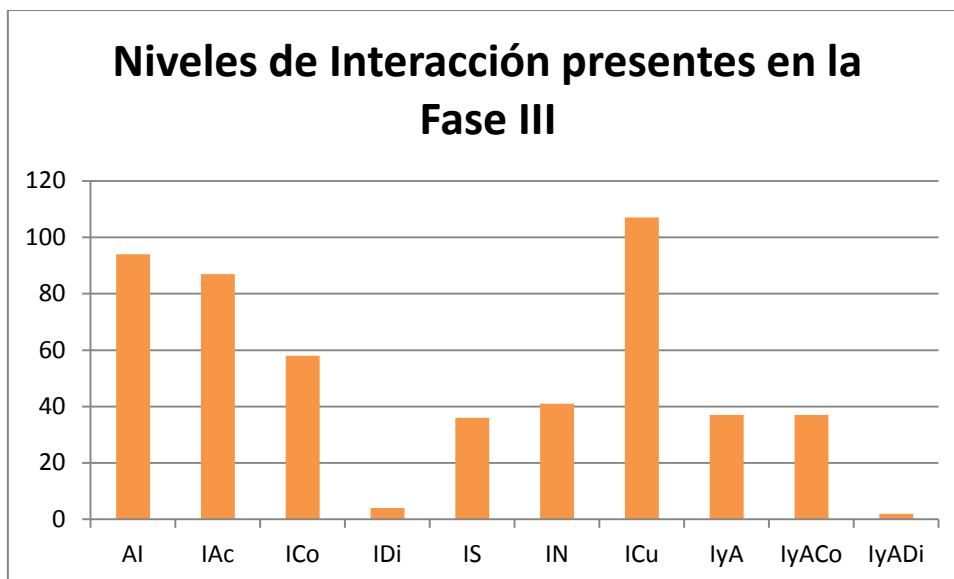


Figura 19. Niveles de Interacción presentes en la Fase III

Finalmente, los apoyos de interacción más empleados fueron los recursos materiales y recursos sociales (se evidencia en la gráfica de la figura 20). Los recursos materiales al utilizar la tabla donde se presentaron los tres usos de la variable con sus respectivos aspectos (propuestos por Ursini y Trigueros, 2006), esto para justificar si en realidad podría existir otro uso de la variable que las autoras del modelo 3uv no hayan considerado y para determinar los usos y aspectos que están presentes en las tareas que diseñaron en esta fase. Los recursos sociales, cuando los profesores para ampliar su idea, coincidir o discernir, hacen referencia a ideas, opiniones o información previa que los demás profesores han planteado.

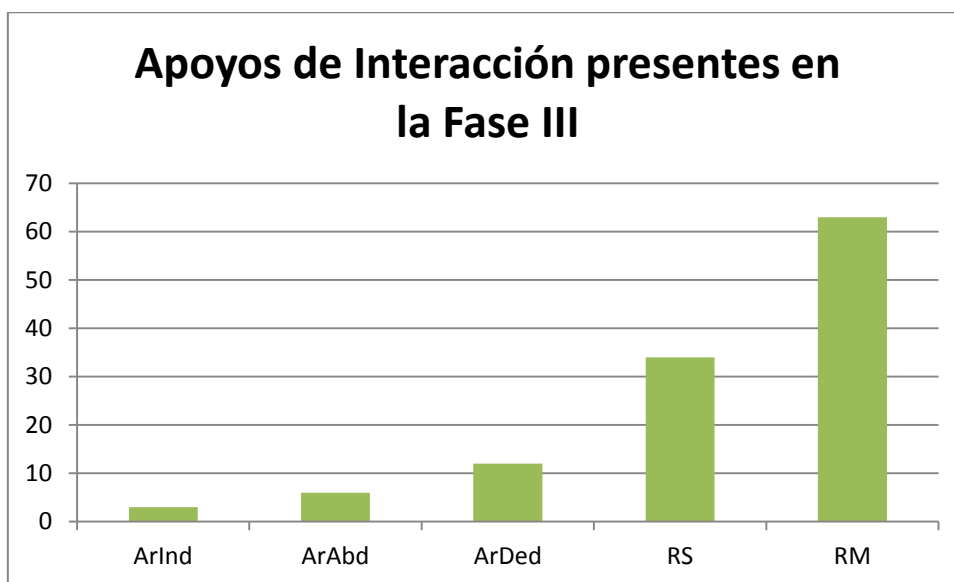


Figura 20. Apoyos de Interacción presentes en la Fase III

5.4 Fase IV. Comprobación y modificación de la síntesis propuesta

La Fase IV se centra en comprobar o modificar el conocimiento en torno al concepto de variable y sus usos, que los participantes han construido durante el desarrollo de este CT. Esto a través de algunas de las siguientes acciones de la Fase IV del modelo propuesto por Gunawardena y colaboradores:

- **FIV/A:** Prueba de la síntesis propuesta contra “hechos recibidos” que compartan los participantes y/o su cultura.
- **FIV/B:** Prueba contra el esquema cognitivo existente.
- **FIV/C:** Prueba contra la experiencia personal.
- **FIV/D:** Pruebas contra datos formales recopilados.
- **FIV/E:** Pruebas contra testimonios contradictorios en la literatura.

La elección de las acciones dependió básicamente de la tarea propuesta para desarrollar esta fase. A continuación, se explica a detalle en qué consistió dicha tarea, cómo se llevó a cabo esta fase y si se logró el objetivo de la misma.

5.4.1 Experiencia de la Fase IV

Como el objetivo de esta fase es comprobar o modificar el conocimiento que han construido los participantes durante el desarrollo de este curso-taller, se propuso la **Tarea 9. Retomar uno de los problemas desencadenantes presentados al inicio del CT**. La intención de retomar uno de los problemas desencadenantes fue para comprobar si los profesores construyeron conocimiento en torno a la noción de variable, sus tres usos y lo aspectos que cada uso posee. Esto al momento de que los profesores cambiaran o ampliaran su punto de vista sobre las posibles dificultades que pudieron presentar los estudiantes al resolver el problema desencadenante; asociando estas dificultades con algún uso de la variable o con la comprensión de la misma, contrario a lo que hicieron al enfrentarse con este problema inicialmente. Es por ello, que se consideró que la tarea 9, propiciaría el logro de las siguientes acciones de la Fase IV:

- **FIV/B:** Comprobación con referencia a esquemas cognitivos ya existentes.
- **FIV/C:** Comprobación con referencia a la experiencia personal.
- **FIV/D:** Comprobación con referencia a los datos formales recogidos.
- **FIV/E:** Comprobación con referencia al testimonio contradictorio en la literatura.

Para el desarrollo de la tarea 9 se utilizó la diapositiva 13 (sesión 2) presentada en la Figura 21. Aquí la IA, menciona que se trata del mismo problema desencadenante que se planteó al inicio del taller en la Tarea 1, sin embargo, que esta vez la intención es analizar la tarea bajo la visión del modelo 3uv, y cuestionarse si ven otras cosas que antes no veían respecto las respuestas que plantean los estudiantes a ese problema desencadenante y las dificultades que se les pudieron presentar. O bien, también menciona que es válido expresar que su

perspectiva no ha cambiado respecto lo antes mencionado. Esto se evidencia en el fragmento **IA.S2.1:28:33** que se presenta a continuación:

IA.S2.1:28:33: (...) se acuerdan de este problemita que lo pusimos al inicio, si ahora lo vemos con los ojos del modelo 3v, me gustaría preguntarles qué ven ahora, que antes no veían o si siguen viendo lo mismo es válido. Si ahora les preguntáramos ¿Qué pasó con estos estudiantes? ¿Dónde estuvo el conflicto? ¿Qué me dirían?

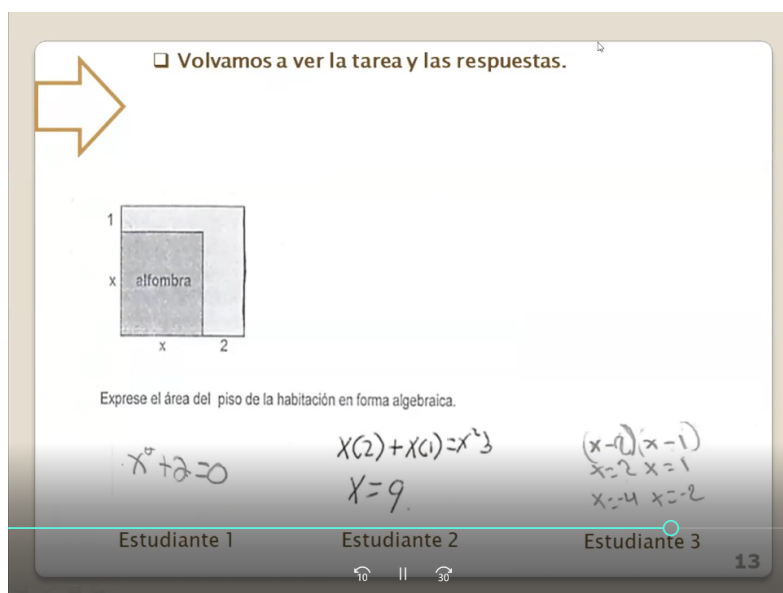


Figura 21. Presentación de la Tarea 9. Retomar problema desencadenante.

Ante estos cuestionamientos planteados por la IA y otras intervenciones posteriores, surgen diversas aportaciones que dan evidencia que las acciones de comprobación referentes al esquema cognitivo existente (**FIV/B**) y la experiencia personal (**FIV/C**) de los participantes se lograron mediante el desarrollo de la tarea 9, caso contrario, con las acciones de comprobación referentes a la recolección de datos formales recopilados o contra testimonios contradictorios encontrados en la literatura. Pues los participantes en ningún momento hicieron referencia a cuestiones contradictorias sobre lo que se estaba discutiendo, que ellos hayan encontrado en la literatura, ni a datos formales.

Al hacer una comparación con las respuestas que plantearon los profesores en la Tarea 1 respecto las posibles dificultades que se le presentaron al estudiante al resolver el primer problema desencadenante y con las respuestas que en esta Tarea 9 plantean sobre el mismo problema, se evidencia que los profesores mostraron cambios cognitivos en torno a las dificultades que presentaron los estudiantes al resolver ese problema. Pues en la Fase I que fue donde se presentó por primera vez este problema desencadenante, la mayoría de los profesores centraron sus respuestas en describir los procedimientos que habían realizado los estudiantes, en considerar que las dificultades se debían a una mala comprensión lectora, a que muchas de las veces los estudiantes trabajan de forma mecanizada los problemas, algunos llegaron a mencionar que el estudiante tenía

conocimiento sobre la variable y que a su manera trato de resolverla, un solo profesor en particular (**PH12**) sí hizo alusión a que una de las dificultades era que los estudiantes estaban viendo a la x como incógnita, mientras que otros profesores de manera general se referían a la variable como una incógnita sin ver ningún otro uso. Por el contrario, al presentarles nuevamente el mismo problema en esta Fase IV algunos profesores al responder sobre las dificultades que posiblemente presentaron los estudiantes ya hacían alusión a los usos de la variable que el estudiante utilizó y a cuáles debió de haber utilizado, y otros respondían sobre los aspectos que ellos visualizaban estaban presentes en ese problema o los que utilizaron los estudiantes. Por ejemplo, la **PM3** en la Fase I había respondido que los estudiantes no identificaban la diferencia entre expresión y ecuación, señalando que en cada caso el uso de la variable es diferente, sin embargo, su participación en ese momento no se amplió pese a que la **IA** cuestiono qué diferencias había entre expresión y ecuación. Es hasta esta Fase IV cuando la **PM3** responde de manera más específica y se considera que con su participación aclara a qué se refería con que en el caso de una expresión y una ecuación el uso de la variable es diferente, pues ahora identifica que la dificultad que presentaron los estudiantes está en el uso de la variable que tomaron para resolver el problema, pues éste fue incorrecto. A continuación, se muestran fragmentos que dan evidencia del ejemplo antes mencionado:

En la Fase I.

PM3.S1.33:28: Buenas tardes, al parecer los estudiantes aún no identifican la diferencia entre expresión y ecuación, en donde en cada caso no el uso de la variable es diferente.

IA.S1.34:43: Muy bien [**PM3**], pero le pregunto a todos los colegas, qué diferencias hay entre expresión y ecuación y porqué éste es un problema para los estudiantes.

En la Fase IV.

PM3.S2.1:29:27: bajo mi perspectiva se toma a la variable como una incógnita o tratan de buscarla como si fuera una incógnita.

IA.S2.1:29:37: Okay, [sic] y ¿cuál es el uso [**PM3**]? que en realidad está ahí.

PM3.S2.1:29:46: como número general similar al otro problema.

Otro ejemplo, es cuando el **PH7** identifica los aspectos del uso de la variable como incógnita que están presentes en los procedimientos planteados por los estudiantes al dar respuesta al problema desencadenante (Figura 21). Entonces lo interesante en esto es que da evidencia de que el profesor ya no solo describe los procedimientos que el estudiante realizó sino que va más allá al identificar qué aspecto y qué uso está empleando el estudiante en su respuesta. A continuación, se muestra el fragmento que da evidencia de lo antes descrito:

PH7.S2.1:32:38: este el aspecto de incógnita, el aspecto I5 como que lo veo un poco que se quiere asomar aquí en este problema no sé si esté equivocado o –

De manera similar ocurre con la **PM10** y la **PM3** quienes retoman comentarios previos de otros participantes, la **PM10** por su parte retoma la participación **PH7.S2.1:32:38** del **PH7** antes presentada e identifica los aspectos del uso de la variable que están presentes en las respuestas de los estudiantes y explica por qué lo considera:

PM10.S2.1:34:20: eh con lo que decía el profe [**PH7**] de I5, que dice simbolizar cantidades desconocidas, yo creo que todos los niños lo cumplieron esa partecita simbolizar las cantidades desconocidas porque todos utilizan una variable. Dice después en el I5 dice simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica, ellos también bueno o al menos uno de ellos sí logra identificar lo que es la fórmula del cuadrado, que es base por altura; él hace una multiplicación que es el estudiante 3 [IA: aja], pero el 1 y el 2 no logran identificar esa situación específica del cálculo del área. Y por último ahí en la I5 dice simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear una ecuación- que una ecuación si la plantean el estudiante 1 y 2 [IA: aja] pero el 3 en la principal no maestra [IA: exacto], porque pone $x - 2$ por $x - 1$ [IA: aja]

PM3.S2.1:37:52: respecto a lo que contestan los muchachos, también estaría - podría estar el I1 en donde se reconoce e identifica en una situación problemática la presencia de algo desconocido y ellos sugieren que podrían determinarlo considerando las restricciones del problema.

Entonces con los ejemplos antes presentados se da evidencia que se mostraron cambios cognitivos en los profesores respecto las dificultades que presentaron los estudiantes al responder el problema desencadenante, y no solo sobre eso, sino sobre la noción que tenían sobre el concepto de variable, pues en esta Fase IV dan cuenta que reconocen a la variable como un concepto multifacético que tiene tres usos y que cada uso consta de diferentes aspectos. Con ello se concluye que la acción **FIV/B** respecto la comprobación contra esquemas cognitivos existentes se ha logrado.

Por otra parte, respecto la acción **FIV/C** referente a la comprobación sobre la experiencia personal también se logró, esto al explicar las posibles causas atribuidas a las dificultades que presentaban los estudiantes al resolver el problema desencadenante. Ejemplo de ello, es la participación de la **PM10** que continúa su participación **PM10.S2.1:34:20** (antes mostrada) expresando:

PM10.S2.1:36:03: Entonces algunos cumplen con una parte y otros cumplen con otra, entonces de repente a lo mejor nosotros en clase cuando empezamos a ver álgebra el alumno como que de manera automática dice: el profe quiere letras y quiere que yo encuentre un número y ahí es donde ellos empiezan a querer tratar de resolverlo y dejan de lado a lo mejor el leer bien el enunciado, porque allí nada más decía exprese el área pero nunca la pedía este con un resultado lo que hace el niño del estudiante 2 y el estudiante 3, y ya le dan un valor a la a la variable. Entonces muchas veces nosotros ponemos también ese tipo de ejercicios (...) y también confundimos a nuestros estudiantes

Con ello, se da evidencia que se logró la acción FIV/C de la Fase IV.

5.4.2 Interacciones en la Fase IV

Para el análisis de las interacciones correspondientes a la Fase IV, se presentan los resultados que arrojó el desarrollo de la **Tarea 9**. En esta tarea se hicieron evidentes las tres categorías de las interacciones consideradas en esta investigación, tal como se muestra en las tablas 28, 29 y 30 y sus respectivas gráficas (presentes en las figuras 22, 23 y 24).

Tabla 28

Tipos de interacción presentes en la Fase IV. Comprobación o modificación de la síntesis propuesta

<i>Tipos de Interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Categoría con mayor frecuencia/ Evidencia de Interacción.</i>
P-P	3	I-P
P-I	10	IA.S2.1:29:37: Okay, y ¿cuál es el uso [PM3]? que en realidad está ahí.
P-G	7	
I-G	15	La IA plantea un cuestionamiento a la PM3, ante una aportación previa de esta profesora:
I-P	16	PM3.S2.1:29:27: (...) se toma a la variable como una incógnita o tratan de buscarla como si fuera una incógnita.
Total	51	

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

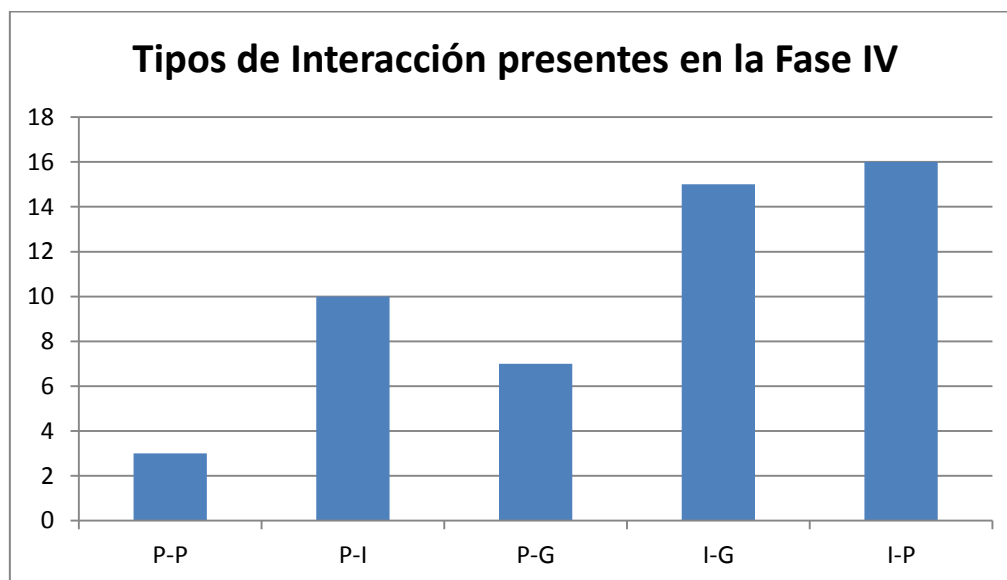


Figura 22. Tipos de interacción presentes en la Fase IV.

Como se hace explícito en la Tabla 28 y en la gráfica de la figura 22, el tipo de interacción que se evidenció con mayor frecuencia en esta Fase IV fue el de **I-P**, el cual se presentó de diferentes maneras; la mayoría (7/16) fueron coincidencias que el investigador manifestó respecto las ideas de los profesores, el resto de estas interacciones se enfocaron en realizar cuestionamientos (3/16), en agradecer la participación del profesor (3/16), en ceder la palabra al profesor (2/16) y en aclarar una duda a uno de los profesores (1/16).

En este mismo tenor en relación con la forma en que se presentaron las interacciones, los *niveles de interacción* que se evidenciaron con mayor frecuencia fueron el ICu y el de IyACo, tal como se exhibe en la Tabla 29 y en la gráfica de la figura 23. Como ha sucedido en las fases anteriores, en esta Fase IV el *Nivel de Interacción* ICu es presentado en la dirección I-G (7/10) y la I-P (3/10), esto es, básicamente quien cuestiona es el investigador, dejando en evidencia que falta fortalecer que el profesor se sienta con la confianza de cuestionar tanto al investigador, a los demás profesores y también sus dudas e ideas que tenga. Respecto el nivel de interacción IyACo, fue variado, el investigador coincidía y ampliaba algunas ideas planteadas por los profesores (5/9), los profesores ampliaban ideas previas presentadas por otros profesores (2/9), por los investigadores (1/9) y de manera general retomaban ideas grupales y las ampliaban (1/9).

Tabla 29

Niveles de interacción presentes en la Fase IV. Comprobación o modificación de la síntesis propuesta

<i>Nivel de Interacción</i>		<i>Frecuencia</i>	<i>Categoría con mayor frecuencia/ Evidencia de Interacción.</i>
Aporta Información	AI	12	AI PM10.S2.1:34:20: (...) Entonces algunos cumplen con una parte y otros cumplen con otra, entonces de repente a lo mejor nosotros en clase cuando empezamos a ver álgebra el alumno como que de manera automática dice: el profe quiere letras y quiere que yo encuentre un número y ahí es donde ellos empiezan a querer tratar de resolverlo y dejan de lado a lo mejor el leer bien el enunciado, (...)
	IAC	6	
Interactúa	ICo	4	
	IDi	0	
	IS	1	
	IN	0	
	ICu	10	
Interactúa y Amplía	IyA	1	
	IyACo	9	
	IyADi	0	
Total		43	

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

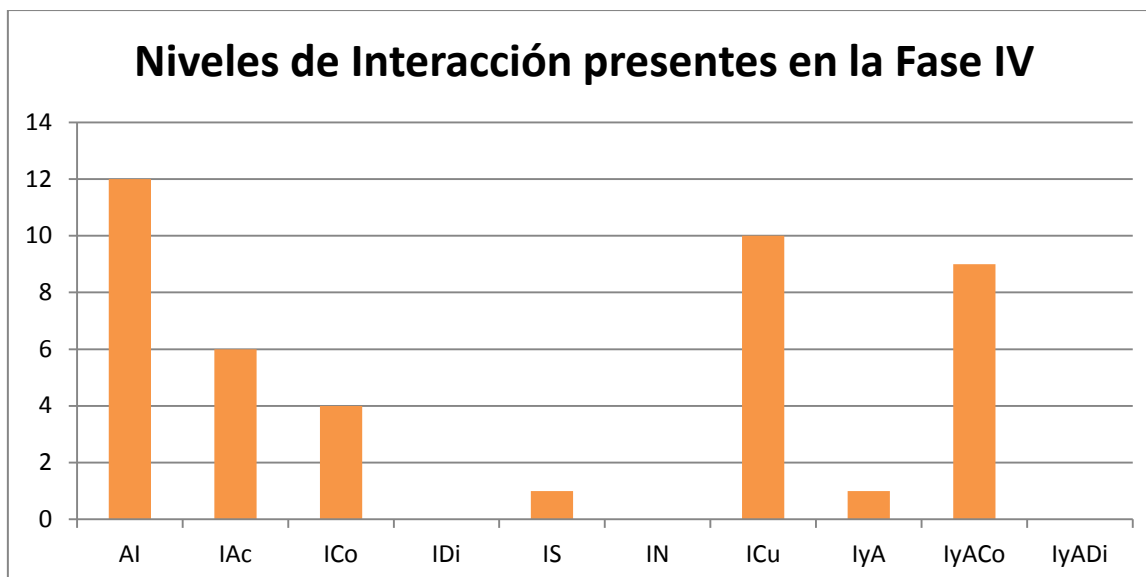


Figura 23. Niveles de interacción presentes en la Fase IV.

Finalmente, los apoyos de interacción más empleados fueron los recursos materiales y el argumento abductivo (ver tabla 30 y la gráfica de la figura 24). El recurso material al utilizar la tabla donde se presentaron los usos y aspectos de la variable propuestos por Ursini y Trigueros (2006) para identificar los aspectos y usos tanto en las respuestas que dieron los estudiantes al problema desencadenante, así como los que los profesores identificaban deberían estar presentes al resolver dicho problema. Respecto el argumento abductivo se presenció cuando los profesores reconocían que muchas veces ellos con su práctica promueven que los estudiantes cometan ese tipo de errores (presenciados en las respuestas dadas al problema desencadenante) o bien cuando reconocían que sin querer ellos cayeron en los mismos errores que los estudiantes cometieron al resolver el problema desencadenante.

Tabla 30

Apoyos de interacción presentes en la Fase IV. Comprobación o modificación de la síntesis propuesta

<i>Apoyo de Interacción</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Categoría con mayor frecuencia/ Evidencia de Interacción.</i>
Argumentos	ArInd 2	ArAbd PH7.S2.1:33:20: Yo estoy cayendo en lo mismo que cayeron los alumnos entonces, porque yo lo veía también aplicable ese aspecto I5 maestra.
	ArAbd 3	
	ArDed 1	
Recursos	RS 2	RM PH7.S2.1:32:53: simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica
	RM 3	

y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Aquí el profesor PH7 responde al cuestionamiento que le plantea la IA (IA.S2.1:32:50: me recuerda cuál es el I5) para tener claro qué contempla el aspecto I5. Para ello el PH7 hace uso del modelo 3uv.

Total 11

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

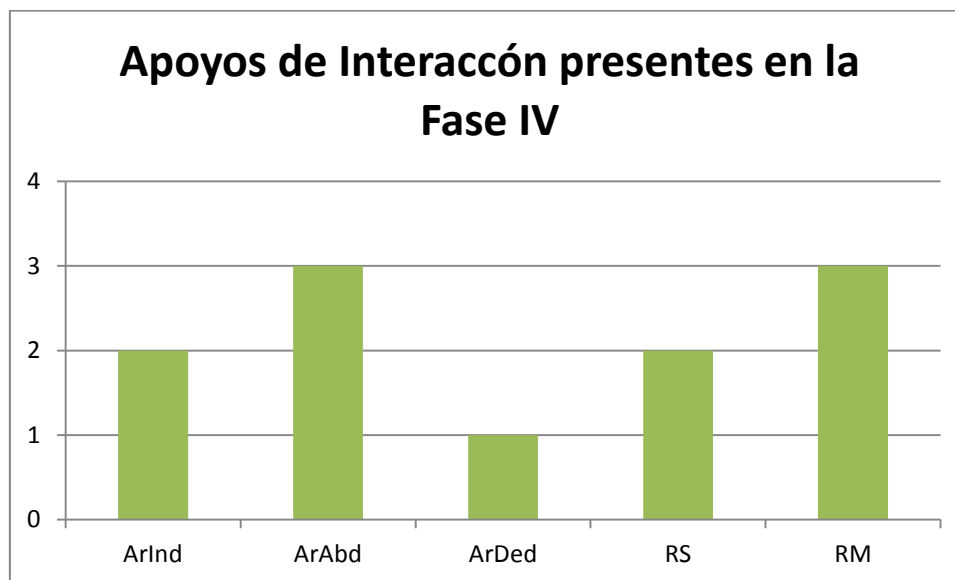


Figura 24. Apoyos de Interacción presentes en la Fase IV

5.5 Fase V. Aseveración de acuerdo y aplicación del nuevo conocimiento construido

La Fase V se centra en sintetizar acuerdos, aplicar los nuevos conocimientos construidos y realizar reflexiones que ilustren el entendimiento y el cambio de las formas de pensamiento en torno al concepto de variable y sus usos, esto como resultado de las interacciones que se presentaron en el curso-taller. Para ello se propone considerar algunas de las siguientes acciones de la Fase V del modelo establecido por Gunawardena y colaboradores:

- **FV/A:** Resumen de acuerdos.
- **FV/B:** Aplicación de nuevos conocimientos.
- **FV/C:** Declaraciones metacognitivas de los participantes que ilustran su comprensión de que sus conocimientos o formas de pensar (esquema cognitivo) han cambiado como resultado de la interacción del curso-taller.

A continuación, se explica a detalle en qué consistió cada una de las tareas que se ejecutaron en esta fase, cómo fue que se desarrollaron y la evidencia de que dichas tareas permitieron lograr el objetivo de esta fase.

5.4.3 Experiencia de la Fase V

Como el objetivo de esta fase está directamente ligado con cada una de las acciones propuestas (**FV/A**; **FV/B**; **FV/C**) se ejecutaron tres tareas para lograrlo. La primera de ellas (**Tarea 12**) fue solicitar a los profesores diseñar tareas matemáticas que potenciaran la comprensión del concepto de variable y sus usos. La intención de dicha tarea era que los profesores aplicaran los nuevos conocimientos construidos durante el curso-taller, y con ello promover que se lograra la acción **FV/B**. Para el desarrollo de esta tarea se utilizaron las diapositivas 16 y 17 (sesión 2) presentadas en la Figura 25.

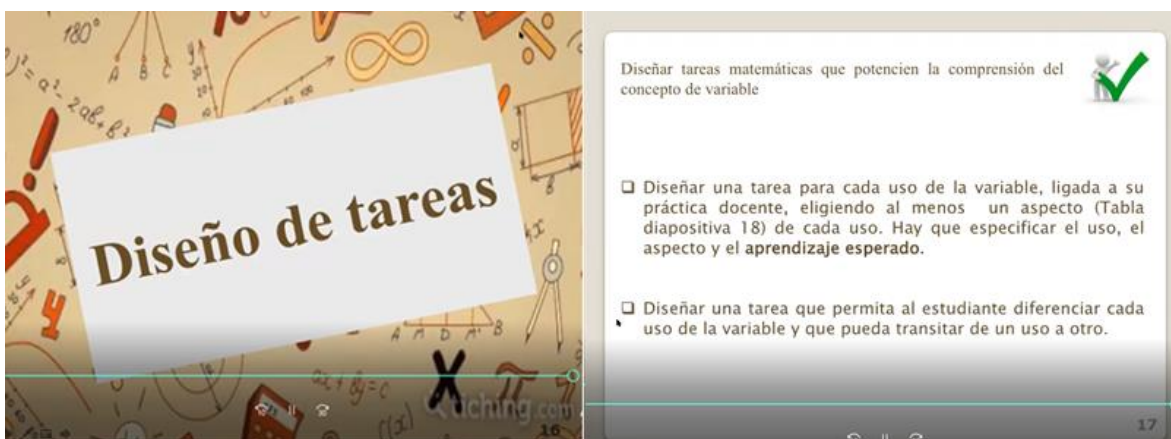


Figura 25. Presentación de la Tarea 12. Diseño de tareas

Aquí la IB, explica de qué se trata la tarea, el objetivo de la misma y la forma en que se va a desarrollar, tal como se evidencia en los fragmentos (**IB.S2.1:40:42**; **IB.S2.1:42:49**; **IB.S2.1:43:16**):

IB.S2.1:40:42: (...) vamos a pasar ahorita a la actividad de diseño de tareas y en esta actividad vamos a dividirnos en grupos. En un momento la maestra [IA] va a asignar los grupos (...) lo que nosotros vamos a hacer en los grupos es diseñar esas tareas matemáticas que puedan potenciar la comprensión del concepto de variable.

IB.S2.1:42:49: (...) en la primera es diseñar una tarea para cada uso de la variable, ¡jojo! y en la segunda es diseñar una tarea que permita al estudiante diferenciar cada uso de la variable, sí? y que además pueda permitirle transitar de un uso a otro.

IB.S2.1:43:16: Entonces en un momento vamos a pasar a los grupos, sí? en un segundo les va a aparecer una leyenda en donde dice: aceptar pasar al grupo y ustedes van a aceptar, sale? entonces también quiero comentarles que les vamos a dar un tiempo aproximadamente de 30 a 40 minutos para las tareas y posterior a ese tiempo va aparecer una leyenda que va a decir que

van abandonar la sala. Entonces se va a cerrar la sesión y vamos a regresar otra vez a la sala común en donde estamos todos, si?, entonces aquí es importante de que el trabajo pues lo hagan en conjunto. Entonces no sé si tienen alguna duda o ya podemos pasar a la sala [IA]

Como resultado de esta tarea, se presenta un panorama general de lo ocurrido en cada una de las salas:

- **Experiencia en la Sala 1**

En esta sala se mostró, principalmente una buena comunicación entre los participantes que les permitió organizarse sobre qué hacer primero, qué después; establecer estrategias para cuidar el tiempo asignado para realizar la tarea; escuchar los puntos de vista de cada uno de los participantes para poder establecer acuerdos que les permitieron lograr el diseño y presentación de sus tareas. También, los participantes mostraron prontamente tener iniciativa al plantear varias sugerencias de cómo podían comenzar con el diseño de las tareas: una de estas sugerencias fue presentar las tareas que anteriormente habían enviado a las investigadoras y entre todos debatir o discutir para decidir cuál estaría bien para ser presentada en el grupo de WhatsApp; otra de las sugerencias fue plantear una tarea diferente a las que ya tenían, iniciando con la idea de un problema de cálculo de velocidades. Ambas sugerencias se aceptaron por todos los participantes y se desarrollaron de manera conjunta.

Ahora, después de exponer de manera general el ambiente que se presentó en la Sala 1, se centra la atención en lo referente a la aplicación de nuevos conocimientos, evidenciando que se logró la acción **FV/B**. Algunos puntos que dan evidencia de que los profesores lograron aplicar nuevo conocimiento construido en el desarrollo del CT fueron: el uso de un lenguaje formal respecto la noción de variable y sus usos; esto es, ya no se referían a la variable como algo muy general, sino que especificaban si se trataba de la variable como número general, como incógnita o como relación funcional; también al momento de discutir y decidir sobre qué usos de la variable y por ende qué aspectos podrían estar presentes en cada tarea que estaban proponiendo, expresan recordar que en el CT se acordó que lo que identifica o determina el uso de la variable es lo que pide el problema. Evidencia de ello, se presenta en la transcripción (**PHB.SALA1:10:10**), donde un profesor explica y justifica por qué en el problema de la Figura 26 estaría presente solo el uso de la variable como incógnita y no como número general, como lo había sugerido previamente otro de los profesores (ver transcripción **PHA.SALA1.08:48**).

En este primer problema considero que utiliza la variable como una INCÓGNITA, ya que se presenta como un elemento desconocido que requiere ser determinado a partir de los datos y las restricciones del problema.

Aspectos que se presentan: I_1 , I_2 , I_4 , I_5 .

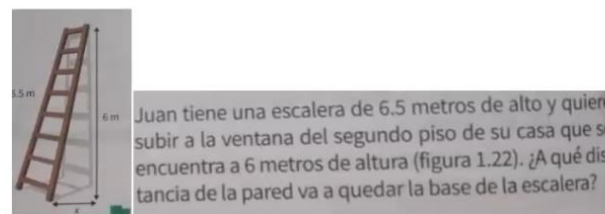


Figura 26. Tarea propuesta por la Sala 1. Uso de la variable como incógnita

PHB.SALA1.10:10: recuerden que lo que identificaba o lo que nos decía el uso de la variable era lo que pedía el problema; el problema aquí dice a qué distancia de la pared va a quedar la base de la escalera, entonces exclusivamente el uso aquí es incógnita nada más, porque no nos está pidiendo a lo mejor que modelemos la expresión que representa ese problema u otra cosa, aquí lo que nos pide es la distancia y nada más, entonces el uso exclusivamente aquí es incógnita y se acabó.

PHA.SALA1.08:48: yo considero que aquí nada más habría que agregarle que también puede ser representada como un número general al momento de que desconocemos la incógnita, ya cuando le da un valor pues ya es una incógnita.

Aunado a lo anterior, otra de las aportaciones que da evidencia de que se está aplicando un nuevo conocimiento, es cuando una profesora ante la sugerencia del profesor PHA expresa estar confundida, mencionando que:

PMA.SALA1.09:17: yo tenía entendido que por ejemplo será general si la respuesta aún queda como incógnita, es decir, que por ejemplo la respuesta fuera, la respuesta es $x + a$ o algo así, o no? o estoy confundida?

Con ello la **PMA** manifiesta que ella construyó conocimiento respecto la variable como número general y éste no estaba coincidiendo con la idea que planteó el **PHA**, por lo que optó por cuestionar al resto de sus compañeros para conocer qué idea tenían respecto este uso de la variable. Ante esto uno de los profesores sugirió analizar los aspectos de la variable como número general que se les presentaron en el taller y así pudieron determinar que en efecto el uso como número general no estaba presente en este problema (ver figura 26).

Finalmente, se evidencia que los profesores aplicaron el nuevo conocimiento construido en el CT al tener como resultado dos tareas que se lograron dialogando, discutiendo, negociando y justificando el por qué se presentaba alguno o algunos de los tres usos de la variable en cada una de las tareas.

- **Experiencia en la Sala 2**

Los profesores de esta sala presentaron algunas dificultades para ponerse de acuerdo en cómo le harían para diseñar las tareas, pues la mayoría optó por exponer uno de los problemas que ya tenía y proponerlo como opción a analizar para poder añadirlo como uno de los diseños de las tareas que les fueron solicitados. Esto ocasionó que al final les quedará poco tiempo para centrarse en una sola tarea y ya de ahí analizar y razonar qué usos y aspectos estaban presentes y por qué. Cabe mencionar que una de las profesoras **PMB** de esta sala insistió en que lo más factible para optimizar tiempo era que se analizará uno de los problemas que el **PHC** y el **PHD** habían propuesto, dado que según ambos profesores y la profesora **PMB** coincidían en que en dichos problemas estaban presentes los tres usos de la variable. Por lo que, ya solo les faltaría analizar cuáles aspectos de cada uso de la variable estaban presentes. Ante esta sugerencia hecha por la **PMB**, la mayoría de los profesores manifestaron estar de acuerdo, sin embargo, en lugar de explicar por qué consideraban que los tres usos de la variable estaban presentes en esos problemas,

optaban por proponer otras nuevas tareas como opción y así se repitió esta situación varias veces, ocasionando que les resultara difícil establecer acuerdos para terminar en tiempo y forma con la actividad solicitada.

Por otra parte, centrados en la aplicación de nuevo conocimiento matemático se tiene que en esta sala también se logró la acción **FV/B**. Una de las evidencias es que al igual que en la Sala 1 los profesores para justificar o exponer sus problemas utilizaron un lenguaje formal al referirse a la variable y sus usos, tal como se muestra en los fragmentos **PHC.SALA2.08:40** y **PMB.SALA2.09:54**:

PHC.SALA2.08:40: aquí tengo otro problemita, en donde dice: les doy las dimensiones de un abrevadero para ganado de forma rectangular, entonces les doy los valores en donde lo alto mide x , lo largo mide raíz de $7 + x$ y lo ancho mide raíz de 27 menos x . Entonces aquí el problema dice: determina el modelo que permite calcular el volumen del abrevadero, determina sus raíces, les pide graficar dicho modelo y les dice ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que producen el volumen máximo? ¿Cuál es ese valor del volumen? Entonces ahí de alguna manera está relacionando lo que es el volumen y está relacionando lo que es la dimensión del abrevadero, obviamente a lo mejor ya de este varía la altura con respecto a lo ancho y varía con respecto a lo largo; son de acuerdo a las condiciones del problema. Esto yo lo estoy relacionando como F6 que es una relación funcional, dice simboliza una relación funcional basada en el análisis de los datos de un problema, verdad?

Ante la propuesta del PHC la profesora PMB responde:

PMB.SALA2.09:54: profe y en ese ejercicio no cabe la posibilidad de meter los tres, porque tú hablas de encontrar una de las dimensiones porque pones x , entonces caería como incógnita también aparte de lo de la relación que tú lo identificaste. Aquí nada más sería el número general profe, esté dónde caería?

Entonces, de ambos fragmentos se evidencia que al menos los profesores (**PHC y PMB**) están intentando relacionar lo que pide el problema con los tres usos de la variable que pudieran o no estar presentes; por ejemplo, el **PHC** identificó específicamente el uso de la variable como relación funcional, señalando que el aspecto F6 estaba presente al referirse que dicho aspecto se trata de simbolizar una relación funcional basada en el análisis de los datos del problema. Aquí se considera que el profesor lo relacionó con la parte del problema que dice “¿Cuáles son las dimensiones de la caja que producen el volumen máximo?”, pues para encontrar dichas dimensiones primero tenía que simbolizar la relación funcional existente entre el volumen y las dimensiones del abrevadero, para que el volumen sea máximo. Por su parte, la **PMB** señala que también puede estar presente el uso de la variable como incógnita, y lo relaciona con el hecho de que en el problema se pide encontrar el valor de x para determinar las dimensiones de la caja. Aunado a esto, la **PMB** cuestiona si podría estar presente en este mismo problema el uso de la variable como número general y dónde se podría identificar, a lo cual el profesor **PHC** responde:

PHC.SALA2.10:31: de acuerdo a mi concepto de número general es en el momento en donde el muchacho ya una vez que estableció la ecuación que es la relación funcional y va a encontrar un valor determinado en este caso, la incógnita, el tener ya el valor del volumen, el tener ya resuelto el problema para mí eso ya sería como una especie de valor general, bueno en este caso lo que es el valor general, no? o cómo lo ven ustedes?

Ante esto, la **PMB** expresa que también identifica el uso de la variable como número general tal cual lo identifica el **PHC** y concluye que en este problema están presentes los tres usos de la variable. Finaliza cuestionando qué opinan los demás y el **PHD** coincide con que en efecto están presentes los tres usos de la variable, sin justificar por qué. Caso contrario sucede con el **PHE** quien expresa coincidir en que están presentes los tres usos de la variable, pero discrepa en la forma en que los demás profesores los están identificando, tal como se evidencia en el fragmento **PHE.SALA2.13:30:**

PHE.SALA2.13:30: si me permiten profe **PHC**, miren a mí también me parece problema adecuado para los tres usos de la variable, pero acuérdense lo que decía la maestra **IA** depende el trato que le estemos dando, primeramente para tratarlo como número general ahí no se va a obtener ningún valor, ahí va a ser algo similar a lo que plantea el profe **PHD**, nada más pedirle al chavo que establezca la expresión, verdad? o la fórmula que me va a permitir obtener el volumen, después dándole algún valor por ahí, a la incógnita que interviene en las dimensiones se le pide obtener el volumen, ese ya sería como la incógnita, sí?, como resolver una ecuación o evaluar una expresión algebraica simplemente y por último para tratarlo como relación funcional pues se manejan los intervalos de valores, es decir, se pide más o menos que el volumen este entre 2 cantidades y al mismo tiempo que determine cómo varía la incógnita que interviene en las dimensiones vamos a dicha caja, no sé si sí me entiendan.

Con esta intervención del **PHE**, el profesor **PHC** reformula su idea respecto el uso de la variable como número general pues menciona que lo entiende como el hecho de encontrar la expresión matemática (fragmento **PHC.SALA2.14:47**), mientras que anteriormente lo relacionaba con encontrar un valor determinado o tener ya resuelto el problema.

PHC.SALA2.14:47: sí claro, si a lo que yo le estoy entendiendo vamos; el número general es encontrar la expresión matemática.

Con la trayectoria de interacciones que se han presentado en este apartado de la Sala 2 se evidencia que el **PHE** aplicó asertivamente los nuevos conocimientos construidos en este CT en torno al concepto de variable y sus usos. Esto le permitió exponer ciertas aclaraciones que promovieron que el **PHC** transformara sus ideas respecto la noción de variable como incógnita y como número general. También se evidencia que en este caso el tiempo influyó para que algunos de los profesores no se pusieran a analizar si realmente los usos y aspectos que proponían sus colegas al exponer sus problemas, estaban o no presentes en dicho problema. Con lo anterior, se evidencia que la acción **FV/B** se logró y que la acción **FV/C** referente a que los conocimientos o formas de pensar de los profesores

han cambiado como producto de la interacción se hace presente al momento de que el profesor **PHC** refleja cambiar su idea respecto el uso de la variable como número general.

- **Experiencia en la Sala 3**

En esta sala el contexto fue muy similar al de la Sala 1, pues se presentó una buena comunicación entre los profesores lo que les permitió organizarse sobre cómo desarrollarían la actividad; tomando en cuenta el tiempo asignado, las tareas que les solicitaron, escuchar los puntos de vista de cada uno de sus colegas y establecer acuerdos. El primero de los acuerdos que establecieron fue que cada uno de los profesores rápidamente presentaría lo que mandó de tarea en la sesión 1 del CT y entre todos analizarían esas tareas para elegir la que les pareciera más adecuada para mostrar como resultado de esta actividad, tal como lo sugirió el **PHF**:

PHF.SALA3.04:00: Si bueno, yo como propuesta nos quedan 25 minutos - eh rapidísimo en un minuto dos minutos que cada quien presente lo que mandó de tarea y elegimos el que nos parezca más adecuado cómo ven?

Ante este acuerdo, los profesores mostraron rápidamente iniciativa para exponer sus tareas y conforme fueron avanzando iban determinando qué tareas a criterio de cada uno de los profesores podrían ser las adecuadas para enviar al grupo de WhatsApp. Cabe mencionar que en esta sala algunos inconvenientes que afectaron el desarrollo en el diseño de tareas fueron: el no estar familiarizados con el manejo del programa *Zoom*, pues propició que algunos profesores tuvieran dificultades para compartir pantalla; también se considera faltaron proponer más estrategias para aprovechar el máximo tiempo posible.

Por otra parte, centrados en la aplicación de nuevo conocimiento matemático en esta sala no se encontró evidencia de que se haya logrado, ya que básicamente los profesores compartieron sus problemas y eligieron los más sencillos que para ellos les resultó de entender y comprender, pero realmente no hubo una discusión respecto los usos y aspectos que pudieron estar presente o no en cada uno de los problemas que propusieron. Esto se atribuye a que los profesores optaron por la sugerencia de elegir las tareas de las ya diseñadas y no de diseñar nuevas tareas, tal como se evidencia en el siguiente flujo de participaciones:

PHG.SALA3.23:41: nada más es mandarlo? O hay que dialogar, hay que llegar a acuerdos en qué tipo de...

PMC.SALA3.23:46: es que ahorita se va a discutir en- ya en conjunto.

PHG.SALA3.23:49: ah okey, nada más era elegirlos entre nosotros de los que teníamos.

PMD.SALA3:23:53: Así es.

PMC.SALA3.23:54: o sea, era elegirlo o crearlo, pero era más fácil la elección.

PHG.SALA3.23:59: sí, de hecho sí.

Es importante mencionar que con lo anterior no se está especulando que los profesores no hayan construido conocimiento en el CT respecto los usos de la variable y sus aspectos, sino simplemente que en el desarrollo de esta tarea 12 no se hace evidente explícitamente que hayan aplicado su conocimiento en torno a los tres usos de la variable y sus aspectos.

- **Experiencia en la Sala 4**

En esta sala se mostró una buena comunicación entre los participantes que les permitió organizarse sobre qué les convenía realizar primero para optimizar el tiempo y diseñar lo mejor posible sus tareas. Los profesores escucharon las ideas y sugerencias de cada uno de sus compañeros, las analizaron y así pudieron establecer acuerdos que les permitieron lograr el diseño y presentación de sus tareas. Otra cosa relevante que sucedió en esta sala es que constantemente los profesores se planteaban nuevas sugerencias para poder optimizar el tiempo y para poder diseñar sus tareas de la mejor manera, considerando los usos y aspectos que pudieran estar presentes. Algunas de las sugerencias que se presentaron fueron las que se muestran a continuación:

PM11.S2C.0:18: que alguien escriba en una hoja o en la libreta, el planteamiento del problema, porque ya ven que se va a mandar, o todos escribimos?

PM6.S2C.0:00:33: pues yo pienso que una persona- así justo como dice, lo vaya escribiendo y los demás vayamos aportando algo, verdad? (...) les parece?

PM9.S2C.0:03:28: igual, podemos hacer uso de lo que nosotros ya realizamos, no?, o sea, puede ser de los problemas o tareas que nosotros mandamos, podemos analizar una de ellas.

PM6.S2C.0:03:54: Bueno podría escogerse nada más de un sólo compañero, no? para no poner todos, un solo compañero que nos diga las tareas que envió (...).

PM9.S2C.0:04:31: primero sería definir si lo vamos a hacer con una incógnita o con número general o con relación funcional o que tenga los tres, o cómo?

PM3.S2C.0:05:23: Okay entonces, por separado. La sugerencia es que cada quien trabaje una propuesta, un aspecto y luego ya se elija una.

PM9.S2C.0:05:33: No consideran que nos tardaríamos más, y si lo analizamos todos juntos pues terminaríamos más rápido?.

PM9.S2C.0:07:50: Les parece si- bueno no se la maestra [PM6] si le parece si proyecto un Word y lo voy escribiendo, y ya ustedes van aportando y lo voy escribiendo y escribiendo.

Ante estas sugerencias los profesores acordaron que alguien escribiría en una hoja el planteamiento del problema y en conjunto con el resto de los profesores se irían plasmando ideas respecto qué uso o usos de la variable estaban presentes en dicha tarea, así como los aspectos de estos usos y el aprendizaje esperado que se promueve con la tarea. También se acordó que primero alguien propondría un problema y ya de manera conjunta lo analizarían para poder terminar más rápido.

Ahora, centrados en la aplicación de nuevo conocimiento matemático se tiene que en esta sala también se logró la acción **FV/B**. Una de las evidencias es que al igual que en la Sala 1 y 2 los profesores para justificar o exponer sus problemas utilizaron un lenguaje formal al referirse a la variable y sus usos. La forma en que se desarrolló el diseño de la primera tarea que propusieron da evidencia de ello, a continuación, se muestra parte de la trayectoria de interacciones que se fueron presentando:

PH1.S2C.0:06:38: Ok, dice. Si el complemento de un ángulo x es $2x$ ¿Cuál es el valor de ese ángulo?

PM3.S2C.0:07:04: Okay entonces, pues sería analizar este problemita y ver en cuáles-qué uso de la variable estaría, primero que nada, [**PH1:** Aja] que yo creo que usted sugirió que era incógnita, no sé, verdad? a ver que [**PH1:** sí] dicen-okee, los demás, compañeros.

PH11.S2C.0:07:23: Sí, porque vamos a encontrar un valor, o sea, no puede ser ni mayor ni menor, es una incógnita nada más.

PM6.S2C.0:07:29: Sí yo también creo que es una incógnita.

PHN.S2C.0:07:34: Sí pues yo también con ese análisis.

Hasta aquí se evidencia que a partir de la tarea que propone el **PH1**, algunos profesores (**PM3**, **PH11**, **PM6** Y **PHN**) plasman ideas del uso que pudiera estar presente y todos coinciden en que el profesor **PH1** sugiere que el uso de la variable que está presente es el de incógnita. Posteriormente la **PM3** cuestiona que entonces cuáles aspectos del uso de la variable como incógnita estarían presentes en ese problema. Ante esto, las profesoras **PM9**, **PM6**, **PM3** y los profesores **PH11**, **PH1** respondieron:

PM9.S2C.0:10:34: entonces I1. Dejen busco yo mi tabla para verla, mhmm.

PM6.S2C.0:10:44: I2, I3, ¿también no quedaría implícito? sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero?

PM3.S2C.0:11:01: podría ser y podría anexarse al problema, bueno no sé qué sugieran, que nada más corrobore si el resultado es correcto para que esté incluido ya el I3.

PH11.S2C.0:11:12: exacto, sí ya con una comprobación, verdad? [**PM6.S2C.0:11:13:** sí] [**PM3: S2C.0:11:13:** ¡Aja!]

PH11.S2C.0:12:00: El I4 también entraría verdad?

PH1.S2C.0:12:02: Sí el I4, que es determinar una cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.

PM9.S2C.0:12:16: ¿el I5? simbolizar las cantidades [**PM6:** las cantidades], también verdad?

PM6.S2C.0:12:22: sí también entra.

Con lo anterior se demuestra que los profesores aplicaron el conocimiento que construyeron en el CT respecto los aspectos del uso de la variable como incógnita. Cabe mencionar que faltó por parte de los profesores una explicación más explícita de en qué parte del problema se presentaba cada uno de los aspectos de la variable como incógnita que ellos propusieron estaban implícitos en ese problema, pues básicamente la mayoría se centró en mencionar el aspecto y a lo que ese aspecto hace referencia.

Ahora, de manera general se puede concluir que en cada una de las salas se suscitó el dialogo entre los profesores para organizarse y así poder diseñar y presentar sus tareas. Si bien el dialogo y la organización en cada una de las salas fue diferente, de manera general se concluye que los profesores centraron toda su atención en diseñar tareas que cumplieran con tener presente el o los usos de la variable solicitados, así como los aspectos que estaban involucrados en cada uso de la variable, desenfocando su atención en cuestionarse si dichas tareas podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos. Ahora, pese a que no se cuestionaron si esas tareas pudieran ser factibles para potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos, se evidencia que los profesores aplicaron nuevos conocimientos construidos durante el CT. La primera forma en que se evidencia es porque los profesores reconocen que son tres usos de la variable y además hacen uso de un lenguaje formal al mencionar los aspectos que cada uso de la variable contempla, tal como se evidencia en las figuras 27 y 28.

En este primer problema considero que utiliza la variable como una INCÓGNITA, ya que se presenta como un elemento desconocido que requiere ser determinado a partir de los datos y las restricciones del problema.

Aspectos que se presentan: I_1, I_2, I_4, I_5 .

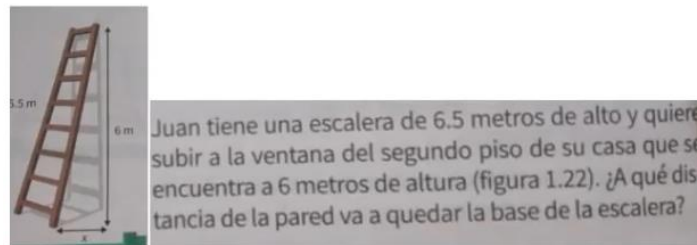


Figura 27. Tarea diseñada en la Sala 1

1. La incógnita específica

Determina tres números enteros consecutivos cuya suma sea 105.

Aspectos:

- I1. Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
- I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.
- I5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

2. El numero general

Realiza la reducción de términos semejantes.

Figura 28. Tarea diseñada en la Sala 3

Cabe señalar que los profesores para establecer los aspectos de cada uno de los tres usos de la variable, dialogaron y discutieron para determinar si dichos aspectos estaban presentes

o no de acuerdo a lo que pedía el problema. De esta manera también se evidencia que los profesores aplicaron el nuevo conocimiento que construyeron en torno al concepto de variable, y así se puede afirmar que se logró la acción **FV/B**.

Aunado a lo anterior, otra de las tareas que se propuso para el logro de la acción **FV/B** y la acción **FV/A** referente a resumir acuerdos fue la **Tarea 14**. Esta tarea consistió en reflexionar sobre las tareas diseñadas en las salas y su aplicación en el aula, para establecer acuerdos concernientes a la aplicación del conocimiento profesional construido en torno al concepto de variable y sus usos, en su práctica docente. Para ello, se formularon los cuestionamientos presentes en la diapositiva 20, utilizada en la segunda sesión del CT, tal como se muestra en la figura 29:

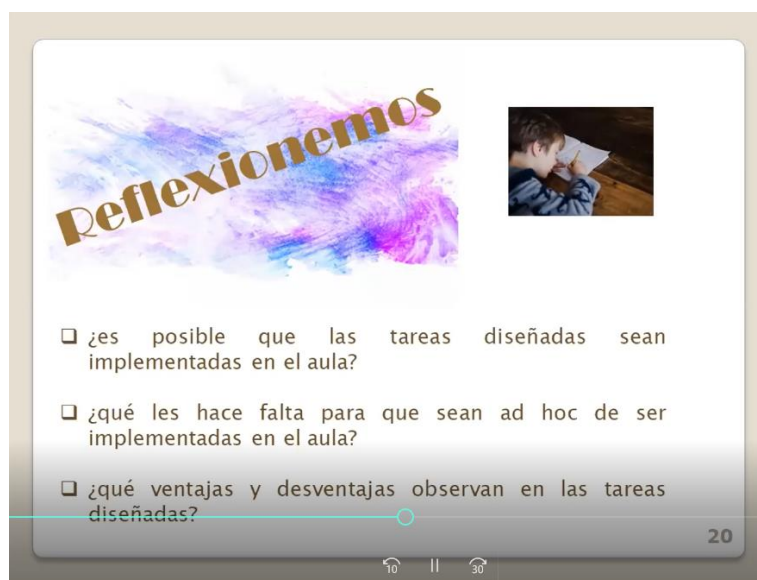


Figura 29. Presentación de la Tarea 14.

Aquí la **IF** expone los primeros dos cuestionamientos propuestos para el desarrollo de esta tarea (Figura 23), tal como se muestra en el fragmento **IF.S2C.0:33:37**:

IF.S2C.0:33:37: (...) Entonces quisiéramos ya como que reflexionar en cuestión de que si estas tareas que han diseñado ¿consideran pueden ser pertinentes de implementarlas en el aula? o si ¿consideran que aún les falta algunas modificaciones?, qué nos podrán compartir sobre esto. Quisiera primero que contesten quizá la primera pregunta dice que si ¿es posible que puedan ser llevadas al aula o no es posible? No sé si alguno de ustedes quisiera compartir su experiencia con lo que ha pasado en este diseño de tareas.

Ante este planteamiento, surgen varias participaciones, a continuación, se presentan fragmentos de algunas de éstas:

PH3.S2C.0:34:31: Yo considero que si es posible llevarlas al aula, este lo único que tenemos que hacer es una previa planeación bien de lo qué son los usos de la variable, (...) considero que sí se puede llevar a cabo a la práctica docente.

PM7.S2C.0:35:11: (...) esa línea tan digamos casi imperceptible entre una cosa y otra, entre una incógnita y una variable, entre el uso de la variable de los tres tipos, ¿qué tan factibles será que en el caso de preparatoria que es en el que trabajamos, tengan la madurez suficiente para hacer esto? Claro que nosotros como maestros debemos de tratar de que ellos lo logren entender, pero ¿será, será, será factible?

PH12.S2C.0:36:42: yo pienso que sí, porque en mi experiencia particular de cuando estudié la licenciatura en matemáticas, cuando ve uno el cambio tan drástico de bachillerato a universidad, a nivel licenciatura en matemáticas, que no sabes por ejemplo, ni qué es una demostración o cómo demostrar un problema, o sea, ni verificar algo, ni cómo hacer el contexto a un entorno cotidiano o algo así, se vuelve todo un caos, es algo muy complicado. Entonces si nosotros vamos introduciendo de poco a poco aunque sea gradualmente, o sea, no de la noche a la mañana vamos a introducir estos usos o varias herramientas que les puedan ayudar a los muchachos, yo pienso que se lograría bastante.

PH10.S2C.0:37:00: De hecho, ya las llevamos al aula, pero no diferenciando los tipos de la variable y sus aspectos. Recuerden que nosotros mismos trajimos las tareas de los libros utilizados en el aula.

PH4.S2C.0:38:46: sí yo también estoy de acuerdo con mi compañero [PH12], (...) porque yo cuando estudié la licenciatura me hubiera encantado que me hubieran dicho todos estos cursos, todas estas palabras, me hubiera encantado, hubiera sido otra historia.

PM10.S2C.0:39:43: (...) con respecto a las preguntas que nos hacen y qué si es posible el diseño de tareas, sí, ya lo vimos, las utilizamos, les ponemos los ejercicios a los muchachos o nosotros también podemos inventar una o de acuerdo a lo que queramos extraer. Lo que a mí se me hace muy padre es que al alumno le damos a conocer esa tabla y quizás a lo mejor en un primer momento que él lea el enunciado y traté de identificarlo, leyendo y diciendo ¡ah no el I1, no!, el G2 no, no lo pide, y eso es algo muy importante para él, porque va a ir descubriendo. Y si lo ponemos a trabajar en equipo, (...) eso les va ayudando a ellos a ir analizando, porque yo creo que sí de pronto para ellos también es muy complicado, este distinguir entre la incógnita, número general y lo de relación; y yo considero que esa sería una estrategia y una ventaja el que el alumno conozca esa tabla como la acabamos -bueno yo no la conocía esa parte se me hace importante llevarla al aula con el alumno, a lo mejor nada más para un análisis de principio y ya después para resolver los ejercicios que les estamos solicitando.

PM4.S2C.0:41:16: Las tareas matemáticas ahí están; pero considero que realmente esa diferencia del uso de la variable sería algo nuevo y creo que como lo plantea la maestra [PM10] sería un buen inicio.

PM7.S2C.0:44:37: Si estoy de acuerdo, y así lo mencioné, debemos tratar de introducirlos y lo podemos poner en nuestras planeaciones poco a poco.

Solo me preocupa el factor tiempo para esperar a que lo asimilen para pasar a los siguientes temas.

PM8.S2C.0:44:59: Pienso que el empleo de una tarea, en gran medida depende de que nosotr@s mismos la comprendamos a cabalidad; es decir que sepamos precisarles de manera correcta un uso en específico de por ejemplo la variable como número general que sí se hace pero no se precisa el por qué cae por ejemplo una reducción de términos semejantes en este uso, específico, por mencionarlo.

PH3.S2C.0:45:04: (...) mantengo mi postura que sí podemos este llevarlo al aula con los alumnos. Este yo considero que son procesos, procesos los que debemos de estar llevando o los que llevamos con nuestros muchachos, es como lo que trabajábamos aquí en este taller, o sea, primero se nos presentó un problema y luego ya ahí se fueron dando así diferentes procesos hasta que llegamos a lo que viene siendo las definiciones de lo que es en realidad, los aspectos para comprender la variable, sí? Entonces es lo mismo trabajar con los muchachos (...) trabajarlo de diferentes procesos que vayan ellos este construyendo el propio conocimiento no tanto llegar y dárselo; miren esto es esto y esto es lo otro.

PH6.S2C.0:47:25: si, gracias. Bueno pues consideró que sí podemos trabajar con esto de las variables del uso de la variable y también por qué no decirlo, quizá sí lo hemos estado trabajando desde hace mucho tiempo pero no hemos sabido delimitar o conocer esos elementos del uso de la variable. Consideró que eso es lo que nos ha hecho falta, pero sí se puede trabajar con ello.

PM4.S2C.0:48:31: el uso de la variable en sus tres aspectos como tal; quizás de manera inconsciente se trabaja y no lo hemos institucionalizado así como ahora.

Se toma el atrevimiento de presentar varias de las participaciones suscitadas ante los cuestionamientos de la IF, respecto la pertinencia o no de implementar en el aula las tareas diseñadas en las salas o bien qué modificarían para poder implementarlas, esto para poder evidenciar algunas de las coincidencias que se pudieron identificar al respecto: una de ellas es que los profesores concuerdan en que sí es posible aplicar dichas tareas en el aula y otra es que ciertamente las tareas ya las han llevado al aula pero sin diferenciar los tres usos de la variable y sus aspectos. Por otra parte, los fragmentos antes presentados dan evidencia de que los profesores comienzan a plantear ideas de cómo podrían aplicar en su práctica docente el conocimiento profesional en torno al concepto de variable y sus usos que han construido o reconstruido en este curso taller. A continuación, se presentan algunas ideas al respecto:

- El profesor PH3 sugiere realizar una buena planeación de los usos de la variable.
- El profesor PH12 sugiere introducir poco a poco los usos de la variable, relacionándolo con su práctica en el nivel bachillerato. El profesor PH4, coincide con ello.

- La profesora PM10 sugiere que al alumno se le dé a conocer la tabla donde se presentan los aspectos de cada uno de los tres usos de la variable. La profesora PM4 está de acuerdo con esto.
- La profesora PM7 al igual que el PH12 sugiere introducir poco a poco el tema de la variable y ponerlo en sus planeaciones. Algo relevante que señala le preocupa es el tiempo que se pueden tardar los alumnos en asimilar los conceptos.
- La profesora PM8 menciona que para emplear una tarea hay que comprenderla a cabalidad, en este caso, para poder precisarles a los alumnos de manera correcta cada uso específico de la variable y por qué dicho uso o usos le corresponde a ciertos problemas.
- El profesor PH3 propone trabajar con sus estudiantes de una manera similar a como las investigadoras desarrollaron el CT, para que los alumnos vayan construyendo su propio conocimiento y no solo como docente llegar y dárselo como algo terminado.
- El profesor PH6 expresa que hace falta delimitar o conocer esos elementos del uso de la variable (se considera que hace referencia a los tres usos de la variable).
- La profesora PM4 señala que los tres usos de la variable se han trabajado, pero ha faltado institucionalizarlo. Por tanto, se toma como sugerencia que se debe institucionalizar en el aula cada uno de los tres usos de la variable.

Con las ideas antes presentadas, se evidencia que los profesores han construido conocimiento profesional en torno al concepto de variable, pues su conocimiento además de enfocarse en el diseño de tareas matemáticas que potencien la comprensión del concepto de variable y sus usos, también se enfoca en plantear sugerencias de cómo llevarían ese conocimiento al aula y justificar por qué lo harían de cierta manera, tal es el caso de la profesora PM8 y el PH3. Con lo anterior queda demostrado que se cumplió el objetivo de la Tarea 14 y por ende las acciones de la Fase V que se propusieron (**FV/A** y **FV/B**).

Finalmente, para el logro de la acción **FV/C** referente a declaraciones metacognitivas de los participantes que ilustren la comprensión de que sus conocimientos o formas de pensar han cambiado como resultado de la interacción del CT, se propuso la **Tarea 15**. Esta tarea consistió en que los profesores declararan cambios de perspectiva sobre el concepto de variable, sus usos y en general su enseñanza y aprendizaje. Para ello, la IB expuso los cuestionamientos presentes en la diapositiva 21, utilizada en la segunda sesión del CT, tal como se muestra en la figura 30:

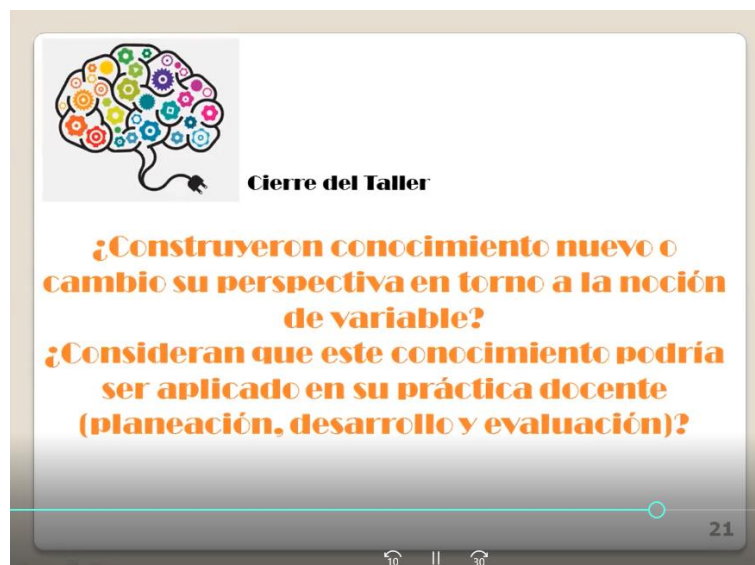


Figura 30. Presentación de la Tarea 15

Ante estos cuestionamientos se presentaron diversas participaciones donde los profesores expresan que hubo cambios en su forma de pensar en torno al concepto de variable y que construyeron nuevo conocimiento referente a la noción de variable, señalando que antes no reconocían esa diferenciación de los tres usos de la variable: como número general, como incógnita y como relación funcional. A continuación, se presentan algunos fragmentos de dichas participaciones:

PH8.S2C.0:49:47: si, bueno la verdad es que la variable pues la manejaba en mi ámbito la manejaba pues así como una variable, pero nunca la llegué a clasificar digámoslo así verdad? como lo vimos en este taller. (...). Este la verdad es que sí fue muy constructivo este taller, sí me llevó conceptos nuevos, procesos nuevos también que se pueden aplicar en el aula, en el nivel que estamos. (...) ahora si puede aplicarse en lo que es nuestra práctica docente, desde la planeación, el desarrollo y la evaluación, (...)

PM4.S2C.0:50:29: Construcción de un nuevo conocimiento en la clasificación de los usos de las variables.

PH5.S2C.0:51:32: (...) coincido con la mayoría, definitivamente me cambia la noción de variable, muchas gracias por el taller... y nada más pedir un favor a los compañeros; yo sé que todo esto se puede llevar al aula, pero hay que estar conscientes de los niveles de abstracción, verdad? (...) Esto es algo que comentaban por ahí las autoras del material que nos pasaron, ¿verdad?, aparte de los usos de la variable, hay que ver el nivel de abstracción que manejamos en nuestras actividades, en nuestras tareas.

PM3.S2C.0:52:17: a lo mejor a nosotros como maestros nos falta formarnos más, profesionalizarnos siempre más, porque el conocimiento es vasto, nunca terminamos, (...)

PH7.S2C.0:57:13: (...) Este con respecto a la otra vez del curso eh como que yo sí, o sea, sí me quedó claro más o menos el uso de las variables, pero como que no me atreví mucho a manejar esto ya como práctica en mis grupos y ahorita siento que sí, ya lo puedo manipular un poco más al grado de si ya entrar a manejarlo.

PH5.S2C.0:59:48: Gracias Profe [PH8]...me sirvió mucho el primer debate sobre la definición de variable... mi reconocimiento a su argumentación... Saludos

De manera particular, con las participaciones de los profesores **PH8**, **PH5** y la profesora **PM4** se muestra que ellos reconocen que han construido conocimiento en torno al concepto de variable, específicamente respecto sus tres usos. Pues antes manejaban a la variable como algo muy general y nunca la habían clasificado. Por otra parte, en relación a la segunda pregunta referente a la aplicación del conocimiento construido en torno a la variable en su práctica, el profesor **PH8** expresa que se lleva conocimientos nuevos que puede aplicar en su práctica docente, desde la planeación, el desarrollo y la evaluación; el **PH5** menciona que si bien todo se puede llevar al aula, es necesario ser conscientes de los niveles de abstracción que manejen en sus actividades y tareas, considerando el nivel educativo al que se esté aplicando este conocimiento. Por su parte, el profesor **PH7** expresa que con este taller se siente más seguro de poder manipular este tema al grado de aplicarlo en sus clases. Finalmente, la **PM10**, señala que lo aprendido en el CT le servirá mucho para trabajarlo de manera conjunta con sus alumnos, tal como se muestra en el fragmento **PH10.S2C.0:58:32**:

PM10.S2C.0:58:32: esto servirá mucho para trabajar de manera conjunta con nuestros alumnos e ir identificando el uso de las variables, y permitirles diseñar a ellos sus problemas y analizarlos de forma grupal y aprender todos.

Con lo expuesto en torno a la **Tarea 15**, se concluye que se logró la acción **FVIC**, pues se presentaron participaciones donde los profesores exponen algunos cambios en su forma de pensar en torno a la noción de variable y su aplicación en el aula, y en su práctica docente.

5.4.4 Interacciones presentes en la Fase V

Para el análisis de las interacciones correspondientes a la Fase V, se presentan los resultados que arrojaron el desarrollo de las **Tareas 12, 14 y 15**. En estas tareas se hicieron evidentes las tres categorías de las interacciones consideradas en esta investigación, tal como se evidencia en la tabla 31.

Tabla 31

Interacciones presentes en la Fase V. Aseveración de acuerdo y aplicación del nuevo conocimiento construido

<i>Categorías de interacción</i>	<i>Clasificación de categorías</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Categoría con mayor frecuencia/Evidencia de interacción.</i>
Tipos de	P-P	5	I-G

Interacción	P-I		22	IA.S2C.0:38:32: De acuerdo, ya los usos se hacen presentes en el aula de matemáticas, simplemente ahora los hacemos explícitos. Pero entiendo la preocupación de la [PM7], no es fácil.
	P-G		49	
	I-G		51	
	I-P		35	
Niveles de interacción	Aporta Información	AI	53	AI PH3.S2C.0:34:31: Yo considero que si es posible llevarlas al aula, este lo único que tenemos que hacer es hacer una previa planeación bien de lo que son los usos de la variable, en lo que trabajamos todos los días son los usos de la variable, pero yo considero que sí se puede llevar a cabo a la práctica, a la práctica docente.
		IAC	13	
	Interactúa	ICo	13	
		IDi	0	
		IS	7	
		IN	2	
		ICu	27	
		IyA	3	
	Interactúa y Amplía	IyACo	15	
		IyADi	0	
ArInd		1		
Apoyos de interacción	Argumentos	ArAbd	5	ArDed PH10.S2C.0:37:00: De hecho, ya las llevamos al aula, pero no diferenciando los tipos de la variable y sus aspectos. Recuerden q nosotros mismos trajimos las tareas de los libros utilizados en el aula.
		ArDed	5	
	Recursos	RS	5	
		RM	1	
				RS PH8.S2C.0:49:47: Por ahí uno de los maestros comentaba ya lo hacemos nosotros, inconscientemente ya lo llevamos a cabo la práctica con los alumnos nada más que pues no le ponemos nombre verdad? no lo clasificamos.

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

Como se hace explícito en la Tabla 31, el tipo de interacción que se evidenció con mayor frecuencia en esta Fase V fue el de **I-G**, el cual se presentó de diferentes maneras; la mayoría (7/16) fueron coincidencias que el investigador manifestó respecto las ideas de los profesores, el resto de estas interacciones se enfocaron en realizar cuestionamientos (3/16), en agradecer la participación del profesor (3/16), en ceder la palabra al profesor (2/16) y en aclarar una duda a uno de los profesores (1/16). En este mismo tenor en relación con la forma en que se presentaron las interacciones, los *niveles de interacción* que se evidenciaron con mayor frecuencia fueron el ICu y el de IyACo. Como ha sucedido en las fases anteriores, en esta Fase V el *Nivel de Interacción* ICu es presentado en la dirección I-G (7/10) y la I-P (3/10), esto es, básicamente quien cuestiona es el investigador, dejando en evidencia que falta fortalecer que el profesor se sienta con la confianza de cuestionar tanto al investigador, a los demás profesores y también sus dudas e ideas que tenga. Respecto al nivel de interacción IyACo, fue variado, el investigador coincidía y ampliaba algunas ideas planteadas por los profesores (5/9), los profesores ampliaban ideas previas presentadas por otros profesores (2/9), por los investigadores (1/9) y de manera general retomaban ideas grupales y las ampliaban (1/9).

Finalmente, los apoyos de interacción más empleados fueron los recursos materiales, al utilizar la Tabla donde se presentaron los usos y aspectos de la variable propuestos por Ursini y Trigueros (2006) para identificar los aspectos y usos tanto en las respuestas que dieron los estudiantes al problema desencadenante, así como los que los profesores identificaban deberían estar presentes al resolver dicho problema.

CONCLUSIÓN

En la tabla 32 se presenta un panorama general de las interacciones que se evidenciaron en cada una de las fases del modelo de Gunawardena, et al. (1997). Teniendo que los tipos de interacción que se presentaron con mayor frecuencia en esta experiencia de desarrollo profesional son: P-G (Fase I y Fase III), I-G (Fase II y Fase V) e I-P (Fase IV). Respecto los niveles de interacción, el de AI e ICu fueron los que presentaron las frecuencias más altas en todas las fases. Finalmente, las frecuencias respecto los apoyos de interacción se presentaron de forma diversa en cada una de las fases.

Lo anterior, simplemente da a conocer de forma cuantitativa cómo se presentaron las interacciones en cada fase y si hubo interacciones que predominaron en ciertas fases. Sin embargo, tal como lo reportan Gunawardena, et al. (1997), la cantidad o frecuencia en que se presenten estas interacciones no da evidencia de la construcción de conocimiento. Es por ello, que a continuación se expone por fases si se evidenció o no construcción de conocimiento en torno al concepto de variable, en caso afirmativo, se describen cuáles son las interacciones que promovieron dicha construcción.

Tabla 32

Porcentajes de interacción en cada fase del modelo de Gunawardena, et al. (1997)

		<i>FASE I</i>	<i>FASE II</i>	<i>FASE III</i>	<i>FASE IV</i>	<i>FASE V</i>
Tipo de Interacción	P – P	0%	0%	4%	6%	3%
	P – I	16%	9%	24%	20%	14%
	P – G	40%	35%	28%	14%	30%
	I – G	19%	39%	21%	29%	31%
	I – P	25%	17%	23%	31%	22%
		100%	100%	100%	100%	100%
FRECUENCIA TOTAL		167.00	23.00	475.00	51.00	162.00
Nivel de Interacción	AI	39%	18%	19%	28%	40%
	IAC	10%	11%	17%	14%	10%
	ICo	8%	14%	12%	9%	10%
	IDi	0%	0%	1%	0%	0%
	IS	4%	16%	7%	2%	5%
	IN	3%	9%	8%	0%	2%
	ICu	24%	14%	21%	23%	20%
	IyA	1%	2%	7%	2%	2%
	IyACo	10%	14%	7%	21%	11%
	IyADi	1%	2%	0%	0%	0%
	100%	100%	100%	100%	100%	
FRECUENCIA TOTAL		134	44	503	43	133

	ArInd	27%	50%	3%	18%	6%
	ArAbd	36%	8%	5%	27%	29%
Apoyo de Interacción	ArDed	36%	8%	10%	9%	29%
	RS	0%	33%	29%	18%	29%
	RM	0%	0%	53%	27%	6%
		100%	100%	100%	100%	100%
FRECUENCIA TOTAL		11	12	118	11	17

Fuente: elaboración propia a partir de los resultados de las interacciones.

En la Fase I la acción de comparar información se hace poco evidente y el conocimiento expuesto se queda simplemente como parte del proceso de compartir información. Es decir, el hecho de que los profesores y las investigadoras compartan información de manera explícita y que el proceso de comparar y contrastar sus ideas no ocurra de la misma forma, limita de alguna manera el determinar si el profesor valida su propio conocimiento o construye nuevo conocimiento. Por lo tanto, la necesidad de promover de manera explícita los procesos de contrastación y comparación es un elemento que se debe considerar en futuras experiencias de desarrollo profesional.

Aunado a lo anterior, haciendo énfasis a la construcción de conocimiento en torno a la noción de variable, se destaca que en esta fase las interacciones que promovieron el iniciar con dicha construcción de conocimiento son:

Tipos de interacción: I-P e I-G. Cuando el investigador se dirige directamente con algún profesor, ya sea cuestionando la idea que planteo o referenciando lo que dijo otro profesor para indagar si están de acuerdo o no, se genera que el profesor tenga que cuestionarse sus propias ideas de lo que ha dicho o las de sus compañeros y de esta forma propiciar cambios o transformaciones en sus pensamientos. De igual forma cuando el investigador envía mensajes directamente al grupo (principalmente cuestionamientos, puntos de vista, acuerdos y desacuerdos) se promueve que surjan más interacciones que aportan en la construcción y/o validación de conocimiento.

Niveles de interacción: AI, ICu e IyADi. Se evidencio que el *aportar información* es algo fundamental para promover la construcción de conocimiento, pues si no hay aportaciones por parte de los profesores y de los investigadores, entonces no habría nada de que poder discutir, indagar, sintetizar, reflexionar, en sí, nada de que poder aprender. Ahora, el *interactuar cuestionando* propicia que los profesores o las investigadoras al responder amplíen sus ideas respecto lo que se les está preguntando o bien reflexionen si mantienen lo dicho previamente o si hay cambios en su forma de pensar y esto ocasiona que de cierta forma estén construyendo conocimiento. Cabe mencionar que las preguntas tienen que ser detonantes, significativas, preguntas que realmente inciten a pensar y reflexionar sobre lo que se está cuestionando. Finalmente, el *Interactuar y Ampliar Discrepando* genera que los participantes se den la oportunidad de contrastar sus ideas con otros y en esa contrastación se promueve de alguna manera el validar su propio conocimiento o construir nuevo.

Apoyos de interacción: todos, pues son los que apoyan a validar el conocimiento que cada profesor e investigador expone.

A continuación se describen algunos hechos donde se hicieron presentes las interacciones (antes mencionadas) que promovieron la iniciación de construcción de conocimiento, en la Fase I.

- La IF plantea un cuestionamiento que surgió de ideas previas, y que propició nuevas interacciones. Cuando cuestiono a los profesores respecto que veían en común en las respuestas que daban los estudiantes (Tarea 1), esto ocasiono, que los profesores visualizaran más allá de los procedimientos y errores que presentaron los estudiantes y empezaran a asociar las respuestas ya con conceptos más específicos como la incógnita, una ecuación, una expresión, entre otros.
- Al cuestionar la IF sobre qué entienden o qué noción tienen respecto la variable, los profesores empezaron a reflexionar sobre lo que ellos conocen sobre este concepto y cómo lo enseñan.
- Cuando uno de los profesores declara no estar del todo de acuerdo respecto cómo se define la variable, propició que los profesores que antes habían planteado su idea respecto la noción de variable también se cuestionaran y de cierta forma manifestaran estar de acuerdo o no con lo que expresaba este profesor. Ante esto surgen dos nociones de la variable: varía o no siempre varía. También surge la opinión de que cambiar no es lo mismo que variar. Con ello, los profesores comienzan a presentar cambios o transformaciones en su forma de pensar respecto al tema, y con ello, conocimiento nuevo.

De acuerdo a los resultados presentes en la Fase II, se puede concluir que las interacciones presentadas en esta fase no promovieron la construcción de conocimiento profesional en torno a la noción de variable y sus usos. Pues si bien se logró identificar y declarar por las investigadoras algunas discordancias y acuerdos entre ideas, no se evidenciaron interacciones que propiciaran el aclarar la fuente y alcance del desacuerdo o de acuerdo, y con ello, se limitó a que realmente los profesores y la investigadora en formación construyeran conocimiento en esta fase. A continuación se explica a detalle por qué se considera que en esta fase no hubo realmente construcción de conocimiento.

En la Fase II se pretendía que entre todos los participantes determinaran acuerdos y desacuerdos respecto lo discutido en la Fase I, para después poder contrastar sus ideas con otros y permitir de alguna manera validar su propio conocimiento o construir conocimiento nuevo. Sin embargo, fueron las investigadoras quienes mencionaron los acuerdos y desacuerdos que ellas identificaron según lo presentado previamente, mientras que por parte de los docentes no hubo declaraciones de acuerdos o desacuerdos que ellos notaran, o bien, que hayan surgido después de lo expuesto por las investigadoras. Algo relevante de mencionar es que a pesar de que la IA intento promover a través de cuestionamientos esta identificación y declaración de desacuerdos o acuerdos por parte de los docentes, no se logró gran participación por parte de los docentes. Es decir, se reusaron a manifestar sus opiniones de desacuerdo o de acuerdo.

Aunado a lo anterior, faltó plantear y contestar diversas preguntas para clarificar la fuente y el alcance del desacuerdo, pues solo se quedó en la identificación y declaración del mismo. Por ejemplo, dadas las aseveraciones en torno a la noción de variable, se les pudo haber cuestionado a los profesores, cuál podría ser una tarea en donde la variable varía, cuál en donde cambia y cuál en donde no varía, o bien, en los libros de texto ¿Cómo definen la variable?, ¿ha encontrado alguna definición formal de variable?, por mencionar algunas ideas. En consecuencia, no se propició una contrastación de ideas que incitara a que los participantes validaran ese conocimiento planteado sobre la variable o construyeran nuevo conocimiento.

Un caso particular del que se podría decir hay indicios de construcción de conocimiento respecto la noción de variable es el de la **PM3**, pues en esta fase la PM3 expuso una idea ampliada de su noción de variable a comparación de lo que exteriorizó en la Fase I. Las interacciones involucradas en esta construcción son:

- **(I-G) conjunta con IAc e IS.** Dada la discusión y las ideas presentadas en la Fase I, la IA interactúa aclarando que dada la diversidad de ideas expuestas en torno a la noción de variable se puede decir que entonces no se tiene un acuerdo al respecto. A continuación se da evidencia de ello:

IA.S1.1:01:15: (...) fíjense que lo que podemos rescatar es que en realidad no tenemos un acuerdo en torno a lo qué es una variable a lo qué es el concepto de variable.

- **(P-G) conjunta con AI y (I-P) conjunta con ICu.** El PH12 participa respondiendo al cuestionamiento sobre qué entienden por los usos de la variable y ante esta aseveración la IA plantea una pregunta. A continuación se evidencian estas interacciones:

PH12.S1.1:01:59: los usos de la variable se refiere a las diferentes maneras de como implementamos o como ponemos en práctica el concepto de variable.

IA.S1.1:02:22: Bien [PH12] y cuáles serían esas formas de implementar.

- **(P-G) conjunta con AI e IS.** Posterior a la pregunta anterior que plantea la IA, en el chat se presenta la participación de la **PM3 (PM3.S1.1:04:59)**, por lo que se considera que las interacciones que se describen con anterioridad son las que principalmente promovieron que esta profesora construyera conocimiento. A continuación se presenta lo que la profesora expuso en la Fase I y en la Fase II, respectivamente, respecto su noción de la variable:

PM3.S1.46:22: la variable hace referencia a cambios por o que no permanece fijo.

PM3.S1.1:04:59: La variable al ser incógnita en el planteamiento nos permitiría encontrar un valor concreto que satisfaga la relación dada. En el caso de número general es cuando por lo regular se refleja en reducción de expresiones pero sin que se especifique algo más. En cuestión de relación funcional como variable una variable respecto a otra u otras.

Es en la Fase III, donde la construcción de conocimiento en torno al concepto de variable y sus usos se enriqueció (a comparación de la Fase I y la Fase II). Sin embargo, dada la cantidad de interacciones que se presentaron en esta fase, fue difícil presentar explícitamente evidencia de qué interacciones promovieron dicha construcción. Por lo que se optó por describir en la parte de resultados algunas de las participaciones (sin especificar qué interacciones estaban implícitas) donde se mostraba cierta construcción de conocimiento respecto el tema. Ahora, si se retoman ideas generales de cómo se desarrolló esta fase y de las tareas que se propusieron, se tiene que las interacciones que promovieron la construcción de conocimiento se dieron: cuando los profesores interactuaban directamente entre ellos y con el grupo, para ampliar alguna información que otro profesor ya había planteado, discernir sobre ello, aclarar su punto de vista, cuestionar sobre sus propias ideas si estaban correctas o no ante los saberes del resto de sus compañeros y comparar sus ideas con las del resto del grupo. Con ello, se hacen presentes el tipo de interacción P-P y P-G, los niveles de interacción AI, IDi, IAc, ICu, IyACo e IyADi. Ahora, respecto las investigadoras y la investigadora en formación las interacciones de I-P e I-G, en conjunto con los niveles de interacción de ICu, IyACo, AI e IN, son los que promovieron principalmente que los profesores continuaran con una interacción activa y también construyeran conocimiento. Pues a través de los cuestionamientos los profesores reflexionaban sobre su propio conocimiento para poder responder; el hecho de que las investigadoras ampliaran sus ideas y además coincidieran con algunas aportaciones de los profesores generó confianza en los profesores para continuar participando y transformando su conocimiento; el aportar información en esta fase siempre fue motivo de enriquecimiento pues permitió tener un panorama más amplio de qué poder discutir y con ello aprender; finalmente el interactuar negociando permitió de cierta forma que las investigadoras tuvieran ese acercamiento entre iguales con los profesores, ya que el negociar algún significado, implicaba que no necesariamente la investigadora tenía que tener la razón y con ello daba pauta a que los profesores pudieran discernir y dar su punto de vista. Finalmente respecto los apoyos de interacción en esta fase, todos formaron parte de esta construcción, pero principalmente los RM y el ArgDed.

Otra cosa importante de mencionar, es que en esta Fase III la naturaleza de las tareas y el cómo fueron desarrolladas por las investigadoras y la IF propició que se presentaran las diversas interacciones (antes mencionadas) que promovieron la construcción de conocimiento.

Ahora, de acuerdo a las interacciones que se presenciaron en esta Fase IV, la construcción de conocimiento se promovió por las siguientes interacciones:

- Aporta Información. Con los tipos de interacción I-G; P-G; P-P e I-P.
- ICu. Con los tipos de interacción I-G e I-P.
- ICo. Este nivel de interacción genera confianza entre los profesores y motiva a que sigan participando y dando sus ideas, y por ende a generar conocimiento.
- IyACo. Ampliar ideas promueve construcción de conocimiento tanto de la persona que la amplía, así como del que escucha y retoma esas ideas para dar nuevas o ampliar las de sí mismo.

En la Fase V se logró que los profesores aplicaran los nuevos conocimientos construidos durante el CT en torno al concepto de variable y sus usos. Esto se hace evidente cuando en el diseño de tareas matemáticas los profesores emplean un lenguaje más específico para dirigirse al concepto de variable, iniciando por reconocer que son tres usos de la variable y que cada uso contempla diversos aspectos para su comprensión. A esto se añade, que los profesores dialogaron y discutieron de forma conjunta (en la mayoría de las salas) para decidir qué uso (o usos) de la variable y qué aspectos estaban presentes en cada problema que ellos proponían. Aquí es importante mencionar que su apoyo principal para argumentar sus ideas y/o opiniones fue la tabla que se les proporcionó en el CT respecto los tres usos de la variable con sus respectivos aspectos (ver figura 17).

Aunado a lo anterior, en esta fase no solo se aplicaron nuevos conocimientos, sino que se evidenció que algunos profesores seguían en el proceso de construcción de conocimiento; particularmente sobre el uso de la variable como número general, pues en la Sala 2 se plantearon algunas inquietudes y opiniones (diversas) respecto qué significado se le podría dar a este uso. Después de algunas interacciones entre los profesores de esta sala, se consensó que la noción de la variable como número general está relacionada con la estructura de expresión. Sin embargo, por la falta de tiempo (en la sala) fue algo que no se discutió a detalle. Es por ello y porque el uso de la variable como número general presente en las diferentes tareas del CT fue el que causó mayor dificultad para que los profesores lo identificaran o comprendieran, se sugiere que en futuras investigaciones o talleres se le dé mayor énfasis a la construcción de conocimiento en torno a este uso.

Ahora, seguido de un proceso de construcción de conocimiento, en esta fase, se evidencia que los profesores han construido conocimiento profesional en torno al concepto de variable y sus usos. Pues, además de lo mencionado respecto el diseño de tareas y de los cambios en la forma de pensar respecto la noción de variable, los profesores logran plantear sugerencias de cómo llevarían este conocimiento matemático de la noción de variable al aula y justifican por qué lo harían de dicha manera. También plantearon opiniones respecto qué tan difícil y apropiado sería llevar este conocimiento en cierto nivel educativo, dada la abstracción que se requiere para su comprensión. Con ello, se hace evidente que lo aprendido en este CT en conjunto con las experiencias que cada docente posee, toma sentido en relación a su práctica docente.

Ahora, haciendo énfasis en las interacciones que promovieron la construcción de conocimiento en esta Fase V, se tiene que:

- En las salas: el tipo de interacción P-P tal como se presentó fue enriquecedor, pues generó entre los profesores un diálogo fluido donde si un profesor opinaba, preguntaba, aclaraba o sugería algo de inmediato otro profesor atendía dicha participación y con ello se propiciaron niveles de interacción que influyeron en la construcción de conocimiento. Estos niveles de interacción son: *AI*, *IAC*, *IyADi*, *ICo*, *IN*, *ICu*, *IyACo*. El de *AI* principalmente, permitió que los profesores al plantear sus ideas, sugerencias e información respecto alguna tarea, tuvieran un panorama amplio de qué poder discutir de forma conjunta y también el poder tomar ideas e información nueva que para otro profesor generó conocimiento. El interactuar aclarando (*IAC*),

coincidiendo (*ICo*), negociando (*IN*) y ampliar y coincidir (*IyACo*) permitió establecer acuerdos sobre ciertas inquietudes que se presentaron, y con ello construir conocimiento sobre algo en particular, pues aquí los profesores aparte de aportar sus ideas, dan argumentos, hacen referencia a algo previo dicho por los profesores y amplían su idea con nuevas aportaciones o participan dando su punto de vista pero dejando como una opinión abierta sobre si están de acuerdo o no el resto de los profesores con lo que se ha opinado. Por su parte, el interactuar y ampliar discrepando (*IyADi*), así como el cuestionar (*ICu*), propició que los profesores reflexionaran sobre su propio conocimiento y ocasiono que algunos transformaran su pensar; por ejemplo, lo ocurrido en la sala 2 respecto la noción del uso de la variable como número general. Finalmente, los apoyos de interacción que formaron parte del proceso de construcción sobre la variable, fueron básicamente el de recurso material (RM) y recurso social (RS). Respecto lo material, los profesores para argumentar sus opiniones utilizaron la tabla donde se presentaron los tres usos de la variable con sus respectivos aspectos. Respecto lo social, con frecuencia hacían alusión a opiniones de otros profesores o cierto conocimiento que habían adquirido en el CT.

- En el cierre del taller: los tipos de interacción P-P e I-G generaron participaciones con un nivel de interacción que promovió la construcción de conocimiento. Estos niveles de interacción son: *AI*, *ICu*, *IyACo*, *IN*, *IyADi*, y básicamente se justifica con lo antes expuesto. Respecto los apoyos de interacción, todos formaron parte de la construcción de conocimiento, pues los profesores hacían alusión a su experiencia personal, a lo aprendido en el CT, al artículo de Ursini y Trigueros (2006), a opiniones previas por parte de los demás profesores que les permitieron reflexionar sobre su propio conocimiento.

Entonces, con lo expuesto de cada una de las fases se puede reportar que en esta investigación las interacciones que promueven la construcción de conocimiento, se hacen más evidentes cuando se dan entre Profesor-Profesor, Profesor-Investigador e Investigador-Profesor, pues estas generan una comunicación directa con cada participante donde van cuestionando, negociando y reflexionando sobre sus propias ideas y al final surge una modificación o reafirmación de los conocimientos, por lo que se considera que, en efecto, se promueve construcción de conocimiento. Respecto el cómo se dan dichas interacciones, se considera que, si bien todos los *niveles de interacción* forman parte del proceso de construcción de conocimiento, en los que se evidencia una mayor potencialidad para promover la construcción de conocimiento son: Aporta información (*AI*), Interactúa discrepando (*IDi*), Interactúa Cuestionando (*ICu*), Interactúa negociando (*IN*) e Interactúa y Amplia Discrepando o Coincidiendo (*IyADi* o *IyACo*). Finalmente, los *apoyos de interacción* que se consideran permiten sustentar la participación de los profesores e investigadores sobre la construcción de conocimiento son tanto los argumentos como los recursos. Pues los argumentos y recursos que utilizaron los participantes incitaron a la exploración de diferencias y negociación de nuevos significados, tal como lo señala Gunawardena et al. 1997, sobre estos apoyos de interacción.

Aunado a lo anterior, los datos dan evidencia de que a la mayoría de los profesores les cuesta trabajo ser críticos ante los conocimientos de los demás profesores y de las

investigadoras, pues cuando es posible evitan expresar discordancias entre ideas, aún y cuando se les solicita llegar a acuerdos o desacuerdos de lo discutido. Esto dado que el tipo de interacción P-P no se presentó en las primeras dos fases, aun y cuando era en estas fases cuando se pretendía que los profesores declararan o identificaran acuerdos o desacuerdos entre ellos. Es a partir de la Fase III cuando este tipo de interacción se presenta, sin embargo, con una frecuencia mínima a comparación de los otros tipos de interacción.

Entonces, como bien se reportó en esta investigación las interacciones juegan un papel importante para la construcción de conocimiento, pero es relevante mencionar que el logro de que se presenten interacciones que promuevan la construcción de conocimiento profesional también depende básicamente del diseño de tareas que se planteen en la experiencia de Desarrollo Profesional y del dialogo que emplea el investigador para promover la participación, reflexión y colaboración de los profesores. En este mismo tenor, falta promover y mejorar las propuestas de espacios de desarrollo profesional donde los profesores e investigadores se apropien de su conocimiento y sean reflexivos con sus ideas y críticos con las de los demás, independientemente de si es investigador, profesor, formador de profesores o profesional con un grado académico más avanzado. Es decir, fortalecer esa confianza principalmente en el profesor y seguir trabajando para que los investigadores, formadores de profesores, directivos, profesores noveles, etc., tengan un acercamiento más igualitario ante los profesores para que deje de potenciarse ese sentido de superioridad entre los participantes de un espacio de desarrollo profesional.

Respecto el modelo para el análisis de las interacciones, en general resulto apropiado. Sin embargo, se considera aún se puede trabajar en mejorar el hacer más explícito y descriptivo la categoría de apoyos de interacción, pues fue un aspecto que faltó fortalecer.

REFLEXIÓN

En el año 2018 cuando egresé de la Licenciatura en Matemáticas (con opción terminal en Matemática Educativa) decidí esperarme un año para después continuar con una maestría, con la intención y deseos de ingresar al mundo laboral para adquirir experiencia y conocimientos que me ayudaran a tomar mejores decisiones profesionales. Como resultado de esta experiencia surgen tres aspectos importantes que me orientaron a elegir una maestría e influyeron en la elección del tema de investigación de esta tesis.

El primero fue sentir la necesidad de seguir preparándome, pues al reflexionar sobre mi práctica me di cuenta que algunas de las dificultades que mis estudiantes presentaban para comprender cierto tema estaban relacionadas con lo didáctico. Un tema en particular con el que experimente mayores dificultades fue el tema de la Variable, siendo este un aspecto que influyo en la elección del tema matemático trabajado en esta investigación. Aunado a esto, el hecho de querer trabajar con profesores, surge con base en mi experiencia con los Consejos Técnicos entre Escuelas, pues tuve la oportunidad de en esos espacios compartir experiencias respecto mi práctica y escuchar las experiencias enriquecedoras de otros profesores. Con ello, en mi mente surgió la idea de que trabajar de forma colaborativa con otros profesores propiciaría en mi un crecimiento profesional.

Aunado a lo anterior, con el desarrollo de esta tesis amplió mi panorama respecto el trabajo colaborativo y el crecimiento profesional, pues aprendí que para que realmente haya un crecimiento profesional en los espacios de colaboración, se deben promover interacciones entre todos los participantes, que les permita una participación activa, una reflexión introspectiva sobre sí mismos, sobre sus ideas, conocimientos, experiencias y que promueva el compartir y contrastar sus ideas con el resto de sus compañeros. Con ello, dejo en mí la importancia de en cursos y/o talleres que me toque dirigir tratar de promover dichas interacciones. Por el contrario en cursos y/o talleres en los que me toque ser asistente intentar realmente formar parte de mi propio desarrollo profesional.

Ahora, algo que me costó trabajo pero de lo cual obtuve aprendizaje es que al inicio de esta investigación me resulto difícil pensar en el diseño de una secuencia para desarrollar el CT donde realmente a los profesores se les considerara como partícipes de su propio desarrollo profesional así como parte importante para mi desarrollo profesional, pues en ciertas ideas sobre la secuencia recaía a ver al profesor como objeto de estudio. En un principio me fue complicado comprenderlo y más que comprenderlo, saber o determinar qué acciones me permitirían lograr realmente que el profesor formara parte de su desarrollo profesional o bien, al menos, qué acciones evitar para no caer en lo mismo (ver al profesor como objeto de estudio). El mantener un dialogo con mis asesoras, el discernir en ideas, el ampliar otras y compartir mis pensamientos, me permitió de cierta forma lograr un cambio de pensamiento y construir ideas para involucrar activamente a los profesores en estos procesos de desarrollo profesional y con ello considero he construido conocimiento sobre estos espacios de desarrollo profesional.

Por otra parte, esta experiencia de desarrollo profesional con los profesores y las investigadoras, me permitió ampliar mi conocimiento profesional en torno al concepto de

variable, pues me percaté que mi conocimiento respecto la variable estaba más enfocado en el álgebra, es decir, que de manera automática relacionaba principalmente a la variable con la asignatura de álgebra y en mi mente dejaba de lado otras asignaturas donde también predomina su presencia, tales como el cálculo, la estadística y la física. Este conocimiento ocurrió cuando los profesores compartieron su experiencia respecto en qué temas se hace presente el concepto de variable de manera explícita e implícita, realmente me sorprendí de la diversidad de temas que ellos propusieron. Aquí fue uno de los momentos donde construí conocimiento gracias a las aportaciones de los profesores. Otro de los momentos donde construí conocimiento fue en la Fase V, pues aquí los profesores de acuerdo a su experiencia docente y lo aprendido en el CT plantearon diversas sugerencias y opiniones sobre cómo se podría implementar este conocimiento del tema de la Variable en su práctica.

Por otra parte, en el sentido de investigadora en formación, esta tesis me hizo reflexionar sobre el arduo trabajo que se requiere para ser una investigadora. Principalmente, la dedicación de tiempo, el forjar un análisis crítico y reflexivo sobre la lectura, cuestionarse constantemente hacia dónde vamos y qué queremos obtener, qué debemos cambiar, estar en disposición de aprender cosas nuevas y compartir con otros colegas.

También, en esta investigación me di cuenta que el querer acercar los resultados de la investigación a la práctica docente no es una tarea sencilla y aún hay mucho por hacer. Pues los docentes al leer un artículo muchas de las veces se quedan con un panorama limitado sobre cómo aplicar los resultados que se presentan en dicho artículo a su práctica docente. Caso contrario sucede si se trabaja de forma conjunta (puede ser entre profesores y profesores, profesores e investigadores) los aportes de este artículo, el aprendizaje es más enriquecedor.

Finalmente me permito mencionar que esta tesis no solo contribuyo a un crecimiento profesional, sino también propicio un crecimiento personal, en el sentido de que en los últimos semestre fue una lucha interna para poder concluir, pues se me dificultaba plasmar mis ideas en papel, ocasionando inseguridades, frustraciones y estrés por no lograr avanzar y terminar mi tesis. Con ello, aprendí por experiencia propia que se debe ser persistente y constante desde el inicio hasta el final de un trabajo de investigación. También, aprendí que el ser inseguro incita al miedo por retomar la escritura de una tesis y el miedo en mi caso propicio el estancamiento, y ese estancamiento estrés y frustración por no concluir en tiempo y forma. Este aprendizaje no lo dejo solo en esta tesis, sino lo dejo como una experiencia para mejorar en mi ámbito personal y profesional.

Aún tengo mucho que aprender e involucrarme en realizar una investigación de mi propia práctica, reflexionar sobre qué sí me ha ayudado a crecer y que cosas debo cambiar para seguir mejorando.

REFERENCIAS

- Antunes, C. (2007). *Vigotsky en el aula... ¿Quién diría?* (pp. 15-30). Buenos Aires, Argentina: Editorial Sb.
- Audi, R. (Ed). (2004) *Diccionario Akal de Filosofía*. Trad. Huberto Marraud y Enrique Alonso. Madrid: Akal.
- Becerra, A. (2006). Interacciones y construcción social del conocimiento en educación en línea. *Revista de la Educación Superior*, 138(2), 65-77.
- Cardeñoso, J. M., Flores, P., y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada, España: Universidad de Granada.
- Climent, N., y Carrillo, J. (2003). El Dominio Compartido de la Investigación y el Desarrollo Profesional. Una Experiencia en Matemáticas con Maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 384-404.
- Escalante, J. E., y Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24(1), 107-132.
- Fernández, J., Molfino, V., y Ochoviet, C. (2016). Rol Docente del Investigador en Matemática Educativa: un Ejemplo en un Curso de Posgrado para Profesores del Nivel Superior. *Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 808-829.
- Flores, J. M., y Miguel, V. C. (2014). Modelos para el análisis de la construcción social del conocimiento en foros de discusión académicos en línea. *Docencia Universitaria*, 15(1), 79-104.
- Flores, W. O., y Auzmendi, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Ciencia e Interculturalidad*, 19(2), 54-64.
- Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (2006). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2), 79-98.
- González, J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación*, 65(1), 161-172.
- Gunawardena, C., Lowe, C., & Anderson, T. *Analysis of a global online debate and the development of an interaction analysis model for examining the social construction of knowledge in computer conferencing*. J Educ C Res. 1997;17:397---431 [consultado 4 Ene2017]. Disponible en <http://bit.ly/2pWDi0j>.
- Hernández, G. (1998). *Paradigmas en la psicología de la educación* (pp. 211-245). México: Paidós.

- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ta ed.). México: McGraw-Hill Editores.
- Herrera, H., Cuesta, A., y Escalante, J. E. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación Matemática*, 28(3), 217-240.
- Hirumi, A. (2002). The Design and Sequencing of eLearning Interactions: A Grounded Approach. *International Journal on E-Learning*, 1(1), 19-27.
- Juárez, J. A. (2003). La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 472-478.
- Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números*, 76(2), 83-103.
- Juárez, J. A., Chamoso, J. M., y González, M.T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(3), 161-178.
- Kleinner, I. (2007). History of classical algebra. En I. Klinner. (Ed), *A history of abstract algebra* (1-14). Boston: Burkhäuser.
- Kothari, C. R. (2004). *Research Methodology. Methods and Techniques* (Traductora Hernández, J. A. pp. 2-9). New Delhi: New Age International Publishers.
- Lebrija, A., Flores, R. C., y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación Matemática*, 22(1), 31-55.
- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, 4, 167-179. Universidad de Huelva: Servicios de Publicaciones.
- López, D. N. LL. y López, A. L. (2011). *Empleo del modelo 3UV en álgebra temprana*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Universidad Autónoma de Querétaro. México.
- Marino, T. e Isla, D. (2018). Usos de la variable, sentido simbólico y metacognición: una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra elemental. *Revista Paradigma*, 39(1), 246-266.
- Meléndez, A. E. (2015). *Dificultades en la comprensión del álgebra: El uso de la variable en el nivel medio superior*. 3er Coloquio de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México.
- Molina, O., y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema*, 33(63), 109-134.
- Montecinos, C., y Cortez, M. (2015). Experiencias de desarrollo y aprendizaje profesional entre pares en Chile: Implicaciones para el diseño de una política de desarrollo docente. *Revista Docencia*, 1(55), 52-61.

- Morales, L., y Díaz, J. L. (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos*, 11(1), 109-114.
- Morales, L., y Díaz, J. L. (2008). Un estudio del concepto de variable en los libros de texto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21(1), 201-211.
- Murillo, F. J., Perines, H. A., y Lomba, L. (2017). La comunicación de la investigación educativa. Una aproximación a la relación entre la investigación, su difusión y la práctica docente. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 21(3), 183-200.
- Padilla, S., Ortiz, L. J., y López, C. (2015). Comunidades de aprendizaje en línea. Análisis de las interacciones cognitivas, docentes y afectivas. *Revista de Innovación Educativa*, 7(1), 1-18.
- Perines, H. (2018). ¿Por qué la investigación educativa no impacta en la práctica docente? *Estudios sobre Educación*, 34(1), 9-27.
- Perines, H. A., y Murillo, F. J. (2017). ¿Cómo mejorar la investigación educativa? Sugerencias de los docentes. *Revista de la Educación Superior*, 46(181), 89-104.
- Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.
- Ramírez, M. E., Suárez, L., y Ortega, P. (2008). El diálogo asíncrono docente-investigador, como proceso de construcción colaborativa del conocimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21(1), 646-655.
- Rodríguez, J., Ligan, S.K., Hernández, R. M., y Alhuay, J. (2017). Experiencia de Innovación en Desarrollo Profesional Docente. *Revista Interdisciplinaria*, 34(2), 407-424.
- Rojano, T. (2018). La investigación y el álgebra en el currículo de la educación básica: de los tiempos de la modernización educativa al presente. En A. Ávila. (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 247-261). Ciudad de México: SOMIDEM.
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior*. México.
- Solar, H., y Rojas, F. (2015). Elaboración de orientaciones didácticas desde la reflexión docente: el caso del enfoque funcional del álgebra escolar. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 10(1), 14-33.
- Sosa, L. E. (2019). *Razonamiento Inductivo en Profesores de Matemáticas. Un estudio sobre cambio Cognitivo y Sensibilidad Didáctica* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo de los Bravos, Guerrero.
- Sowder, J. (2007). The Mathematical Education and Development of Teachers [La Educación Matemática y Desarrollo de los Maestros]. En J. Lester *Second Handbook of Research on Mathematics teaching an Learning* (pp. 157-223).
- Taylor, S.J. y Bogdan, R. (1994). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados*. Trad. Jorge Piatigorsky. Barcelona: Paidós.

- Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, 14(3), 351-363.
- Trigueros, M., y Ursini, S. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática*, 12(2), 27-48.
- Trigueros, M., y Ursini, S. (2018). La importancia de la variable en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra. En A. Ávila. (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 262-279). Ciudad de México: SOMIDEM.
- Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.
- Valencia, P. A. (2015). *Propuesta para la enseñanza del concepto de variable algebraica a través de situaciones problema* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Anexo 1. Motivación

Mi interés por trabajar el concepto de variable nace después de realizar algunas lecturas sobre el tema; en las que reportan que a pesar de que los estudiantes han dedicado varios años en el estudio del álgebra, cuando ingresan a la universidad aún presentan serias dificultades al enfrentarse con problemas algebraicos. Lo anterior, da indicios de que los estudiantes no han comprendido el concepto de variable, puesto que éste forma parte fundamental para promover el desarrollo del pensamiento algebraico que les permitirá resolver los problemas algebraicos.

Por otra parte, con base en mi experiencia por un año como maestra en el nivel secundaria, tuve la oportunidad de detectar que en los libros proporcionados para los distintos grados de secundaria el concepto de variable no se presenta de forma explícita. Sin embargo, el acoplarme a un temario específico y secuenciado de contenidos, no me permitió reflexionar sobre este hecho; a pesar de que notaba que para los estudiantes de los tres grados era complicado entender las distintas formas en que se presenta este concepto. Es decir, el uso de la variable como incógnita y como número general desde el primer grado de secundaria, mientras que el de relación funcional se presenta hasta tercer grado de secundaria. Ahora que me doy cuenta de que en el nuevo currículum (2017) de matemáticas de bachillerato la noción de variable y el modelo 3uv se presentan de manera explícita, con más razón considero relevante abordar este tema, puesto que lo anterior da indicios de que los reformadores se percataron que este cambio en el currículum era importante para atender la enseñanza y aprendizaje del concepto de variable.

Por mi parte, honestamente es hasta que entré a la maestría en Matemática Educativa que me di cuenta de qué es lo que realmente estaba pasando con este concepto, tanto en su aprendizaje como en su enseñanza. Puesto que reflexioné de cómo impartía mis clases cuando se trataba de abordar los distintos usos de la variable, y me di cuenta que en ese momento tampoco tenía claro que había tres usos de la variable, de acuerdo a cómo expresaba mi discurso.

También a través de la experiencia con profesores de matemáticas que tuve en el primer semestre de la maestría, por medio de un taller donde también se abordaron usos y aspectos de la variable, me di cuenta de que la mayoría de los profesores no tenían del todo claro este concepto al igual que yo, situación que atrajo por completo mi atención. Fue entonces, que reflexioné y me di cuenta de que muchas de las veces como docente, se cree tener los conceptos claros y con toda seguridad de ello los imparte; sin embargo, no siempre es así, y en la mayoría de los casos nos cuesta aceptar que aún falta mucho que aprender y que mejorar; y darnos cuenta que somos nosotros mismos como docentes una solución a muchos de los problemas que se presentan dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por tanto, con mayor razón considero importante y necesario indagar sobre dicho concepto enfocado a un estudio con profesores; ya que por una parte los profesores son parte fundamental en la enseñanza de las matemáticas, y por otra la comprensión del concepto de variable forma parte fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, y en particular del álgebra.

Anexo 2. Libro de códigos utilizados

IF.S1.00:00- Investigadora en formación. Sesión 1. Tiempo

IA.S1.00:00- Investigadora A. Sesión 1. Tiempo

IB.S1.00:00- Investigadora B. Sesión 1. Tiempo

PM#.S1.00:00- Profesora#. Sesión 1. Tiempo

PH#.S1.00:00- Profesor#. Sesión 1. Tiempo

Anexo 3. Resumen del diseño de la secuencia

Resumen del diseño de la secuencia que permitió llevar a cabo la experiencia de desarrollo profesional centrada en las interacciones de los participantes para propiciar la construcción de conocimiento profesional en torno al concepto de variable.

Fase I: Compartir/ Comparar la información Se refiere a dar una declaración de observación u opinión, acuerdo con uno o más participantes, corroborar ejemplos propuestos por uno o más participantes, preguntas y respuestas para aclarar detalles de declaraciones, definición, descripción o identificación de un problema.

Tarea 1	
Se presentará un hecho desencadenante.	
¿Para qué?	Este hecho desencadenante es para motivar a la participación del grupo, despertar el interés y enfocar el aprendizaje hacia el objetivo del taller.
¿Cómo?	Se les solicitará que escriban en el <i>chat</i> sus opiniones y si algunos comparten las mismas ideas que otro u otro de los participantes lo señalan, o bien, si es posible y pertinente complementen la respuesta de su compañero. También quienes sean gustosos de tomar la palabra lo señalen por medio del <i>chat</i> , para activar su audio.
Comentarios	Propongo plantear dos problemas para iniciar con el hecho desencadenante, lo dejo a su consideración si es más pertinente sólo uno.
Tipo de interacción	Todas, excepto o mínimamente la de profesor- profesor.
Nivel de interacción	Todos, pero con mayor frecuencia se considera se presentará el nivel 1: aporta información.
Apoyos en la Interacción	Con mayor frecuencia los argumentos inductivos y abductivos

Fase I: Compartir/ Comparar la información y Fase II: Descubrimiento y exploración de disonancia de las inconsistencias entre ideas, conceptos o aseveraciones.

Tarea 2	
Se les cuestionará: ¿qué entienden o qué ideas tienen sobre el concepto de variable? ¿en qué temas han empleado este concepto de manera explícita o implícita? ¿qué entienden por los usos de la variable?	
¿Para qué?	Estas preguntas son para detectar acuerdos (fase I) y desacuerdos (fase II) al compartir y comparar información (fase I) sobre las

	<p>concepciones que tienen los participantes sobre el concepto de variable, sus usos y sobre los temas en los que se presenta este concepto.</p> <p>De esta manera posteriormente saber si hubo construcción de conocimiento sobre el tema discutido.</p>
¿Cómo?	La misma indicación que en la tarea anterior
Comentarios	En espera de que en la tarea anterior algunos de los participantes asocien las dificultades que presenta el estudiante con el concepto de variable o al menos mencionen el concepto, entonces nosotras introduciríamos las preguntas señaladas en la tarea 2.
Tipo de interacción	Todos los posibles tipos de interacciones propuestos.
Nivel de interacción	<p>Todos los niveles de interacción, pues al considerar el hecho de compartir información se liga con el nivel de <i>aporta información</i>, el detectar acuerdos y/o desacuerdos, se liga con el nivel de <i>Interactúa</i>, ya sea aclarando, coincidiendo o discrepando.</p> <p>El nivel de <i>Interactúa y amplía</i>, se considera puede estar presente por default al hacer referencia sobre algo que ya se haya mencionado, pero querer ampliar su opinión.</p>
Apoyos en la Interacción	Ambos, los correspondientes a argumentos y todos los correspondientes a recursos pueden ser posibles.

Fase II: Descubrimiento y exploración de disonancia de las inconsistencias entre ideas, conceptos o aseveraciones.

Se refiere a la identificación de desacuerdo, preguntas y respuestas para aclarar el origen y el alcance del desacuerdo, reafirmar su postura por medio de citas bibliográficas, experiencia, propuesta para apoyar argumentos.

<p>Tarea 3</p> <p>Reaseverar lo discutido</p> <p>Después de lo discutido y con base en su experiencia como profesores, su formación académica, artículos que hayan leído, etcétera. ¿qué ideas en torno al concepto de variable mantienen? ¿por qué?</p>	
¿Para qué?	Para que los profesores puedan reafirmar su posición en torno al concepto de variable centrándose en las ideas discutidas hasta el momento en el CT o bien, reafirmando sus nociones en torno al concepto de variable con base en su experiencia docente, documentos que ha leído, experiencias en otros cursos, etc.

¿Cómo?	Se propiciará un dialogo con y entre los participantes.
Comentarios	
Tipo de interacción	Con mayores probabilidades: Investigador- Grupo; Investigador- Profesor; Profesor-Grupo
Nivel de interacción	Con mayores probabilidades, los niveles: <i>Interactúa</i> , al momento de que los profesores hagan referencia a las ideas previas discutidas en la tarea 2. <i>Interactúa y amplía</i> : de igual manera los profesores pueden hacer referencia a comentarios previos pero ampliar su punto de vista al respecto para reafirmar sus ideas.
Apoyos en la Interacción	Todos los recursos, la misma tarea lo promueve.

Fase III: Negociación del significado y construcción mutua de conocimiento.

Abarca la clarificación y negociación de significados, da importancia a los tipos de argumentos, identificación de áreas de acuerdos o superposición entre conflictos, propuesta y negociaciones (nuevas) de declaraciones que encierran compromiso y co-construcción del conocimiento y/o propuesta de integración de metáforas o analogía.

Tarea 4

Se les presentará a los profesores tres problemas para que los resuelvan y de manera paralela identifiquen qué los hace diferentes.

Posterior a que los resuelvan, cuestionarles: ¿la variable tiene el mismo uso o significado?, ¿qué los hace diferentes? ¿Cuáles son las estructuras matemáticas involucradas en cada problema?

Tarea 5

Después de lo discutido sobre los problemas, identifican los mismos usos de la variable que sus compañeros o identifican otros. ¿Cuáles y por qué son diferentes?

Tarea 6

Se retomarán algunas de las propuestas que planteen los profesores sobre los usos de la variable y las asociaremos a lo que proponen Ursini y Trigueros (2006), teniendo la aseveración que esencialmente se trata de tres usos de la variable. Sin embargo, esto aún se deja en debate para ver si los profesores identifican otro uso distinto y negociar al respecto.

Posterior al debate se presentará conocimiento sobre los distintos aspectos que posee cada uso de la variable, los cuales se consideran necesarios para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucren el concepto de variable (Ursini y Trigueros, 2006).

Tarea 7

Se les solicitará a los profesores que propongan tareas matemáticas donde se presenten los usos de la variable. De manera paralela se discutirán dichas tareas.

Posteriormente, de acuerdo a las tareas propuestas por los profesores se considerará si es necesario o no la integración de dos tareas como ejemplo de que en una misma tarea se pueden presentar más de un uso de la variable y consigo diversos aspectos.

Tarea 8

Reintegración del conocimiento construido

Después de la interacción qué conocimiento mantienen o acomodan sobre el concepto de variable y sus usos.

<p>¿Para qué?</p>	<p>Tarea 4: Para que al resolver los problemas se percaten que la variable toma otro sentido dependiendo de lo que pide el problema, es decir, toma otro uso, y así promover que los profesores de manera conjunta construyan conocimiento sobre el concepto de variable y sus tres usos, antes de que les presentemos el modelo 3uv de manera detallada.</p> <p>Tarea 5: Para propiciar que de manera colaborativa los participantes reflexionen y sean críticos sobre lo que otros participantes plantean respecto los usos de la variable que están presentes en los problemas y así negociar y clarificar las ideas discutidas al respecto.</p> <p>Tarea 6: Para que al momento de que las responsables del taller presenten su aseveración sobre el concepto de variable y sus tres usos al referenciar a Ursini y Trigueros (2006), y además haciendo alusión a lo que los profesores opinan y dejando abierto al diálogo las diversas opiniones, propicie que realmente se negocie el significado sobre la variable y sus tres usos y así incorporar términos medios y/o construir mutuamente conocimiento al respecto.</p> <p>Tarea 7: Para recapitular lo que se ha discutido hasta el momento en el CT y así de comenzar a integrar el conocimiento construido hasta el momento sobre los usos de la variable y sus respectivos aspectos.</p> <p>Tarea 8: Para que después de todo lo que se ha realizado en el CT todos hagamos una introspección sobre qué realmente estamos entendiendo por el concepto y cuáles de los usos que se han propuesto realmente se pueden aceptar como parte del concepto de variable y cuáles se considera podrían faltar.</p>
<p>¿Cómo?</p>	<p>A través de la resolución individual de los tres problemas planteados en la tarea 5, y posteriormente a través de su interacción en el <i>chat</i></p>

	<p>donde plantearan sus opiniones, propiciado de manera conjunta la negociación de los tres usos de la variable y la construcción de conocimiento al respecto.</p> <p>Las interacciones se presentarán a través del <i>chat</i> o activando su micrófono.</p>
Comentarios	
Tipo de interacción	<p>Se esperaría que en las tareas 4, 5 y 8 se presenten todos los tipos de interacción con frecuencia.</p> <p>Excepto en la tarea 6, en esta se considera la interacción profesor-profesor se podría presentar con menor frecuencia.</p> <p>Se considera que las interacciones Profesor-Grupo; Investigador-Profesor; Investigador-Grupo se presentarán con más frecuencia.</p>
Nivel de interacción	<p>Se esperaría que en las tareas 4, 5 y 8 se presenten todos los niveles de interacción con frecuencia.</p>
Apoyos en la Interacción	<p>Ambos apoyos pueden ser utilizados, pues podrían hacer referencia al artículo de Ursini y Trigueros (2006) o bien centrarse en su experiencia docente y/o su formación académica.</p> <p>Se considera que en la tarea 7, se presentaran ambos apoyos de interacción.</p>

Fase IV: Comprobación y modificación de la síntesis o construcción propuesta. Es la comprobación de la síntesis propuesta, comprobación para un esquema cognitivo existente, comprobación contra experiencias personales, datos formales recopilados de la síntesis propuesta, también contra testimonios contradictorios dentro de la literatura.

Tarea 9	
<p>Se presentará nuevamente el primer problema desencadenante propuesto en la Sesión I, se les indicará:</p> <p>Volvamos a ver la tarea y las respuestas, ¿observan algo distinto que al inicio del taller? ¿qué otras cosas nos pueden decir respecto las respuestas de los estudiantes?</p>	
¿Para qué?	<p>Para comprobar si los profesores han construido conocimiento sobre los tres usos de la variable, esto al cambiar o ampliar su punto de vista sobre las posibles dificultades que pudieron presentar los estudiantes al resolver el problema, y que estas dificultades las puedan asociar con algún uso de la variable o con la comprensión de la misma.</p>

¿Cómo?	Presentación en PowerPoint
Comentarios	
Tipo de interacción	Todos los posibles tipos de interacciones propuestos.
Nivel de interacción	Todos los niveles de interacción, pues es probable que el hecho de que se esté retomando el mismo problema de la sesión I, los profesores hagan referencia sobre algo que ya se haya mencionado, pero quieran ampliar su opinión, o bien, mencionen algo diferente o de igual manera coincidan o discrepen con lo que pudiesen mencionar los demás profesores o las responsables del CT.
Apoyos en la Interacción	Ambos, los correspondientes a argumentos y todos los correspondientes a recursos pueden ser posibles.

Tarea 10. PARA REALIZAR EN CASA	
¿Para qué?	Para aplicar lo aprendido durante la primera sesión del curso-taller, apoyado del conocimiento que cada participante ya tenía.
¿Cómo?	Se les solicitará envíen por correo esta tarea
Comentarios	
Tipo de interacción	Investigador-Grupo; Investigador-Profesor; Profesor-Investigador Esto, ya que se podrían presentar algunas dudas respecto la tarea.
Nivel de interacción	Se considera que no aplica.
Apoyos en la Interacción	Ambos, los correspondientes a argumentos y todos los correspondientes a recursos pueden ser posibles.

PRESENTACIÓN DE LA TAREA PARA CASA Y CIERRE DE SESIÓN

SESIÓN 2

Fase V: Aseveración de Acuerdo y Aplicación del Conocimiento Construido de Nuevo. Se sintetizan los acuerdos, aplicación de nuevos conocimientos y que se hagan reflexiones metacognitivas que ilustran el entendimiento y el cambio de las formas de pensamiento como resultado de la interacción.

--

Tarea 11

Ideas generales sobre el diseño de tareas que ayuden al estudiante a superar los errores y dificultades que se le pudiesen presentar al trabajar con el concepto de variable y sus usos.

Tarea 11

Antes de iniciar con esta tarea se considera apropiado preguntar si hay dudas de lo que se ha trabajado hasta el momento.

Después, solicitar a los participantes que propongan ideas generales sobre tareas que consideren podría ayudar al estudiante a superar los errores y dificultades comentadas en la sesión anterior o algunas otras que ellos han detectado en su práctica.

¿Para qué?	<p>Para comenzar a generar ideas sobre el diseño de tareas que podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos y así tratar las dificultades que pudiesen presentar los estudiantes al resolver problemas que involucren el concepto de variable y sus usos.</p> <p>Para que los profesores se percaten que para propiciar que los estudiantes superen sus dificultades se requiere que éstos comprendan los tres usos de la variable y por ende es importante para ellos como profesores comprender el modelo 3uv.</p>
¿Cómo?	<p>Retomar las respuestas que darán los profesores a la tarea 10 y las ideas que han sido discutidas en la sesión 1 en torno a la noción de variable y sus usos. Esto para resumir acuerdos sobre la tarea 11 propuesta.</p> <p>Se les solicitará que escriban en el <i>chat</i> sus opiniones y si algunos comparten las mismas ideas que otro u otros de los participantes; posteriormente lo señalan, o bien, si es posible y pertinente, complementen la respuesta de su compañero.</p> <p>También quienes sean gustosos de tomar la palabra lo señalen por medio del <i>chat</i>, para activar su audio.</p>
Comentarios	
Tipo de interacción	Todos los posibles tipos de interacciones propuestos
Nivel de interacción	Todos los niveles de interacción, pues es probable que el hecho de que se estén retomando las respuestas dadas a la tarea 10, los profesores hagan referencia sobre alguna respuesta de otro profesor, pero quieran ampliar su opinión, o bien, mencionen algo diferente o de igual manera coincidan o discrepen con lo que pudiesen mencionar los demás profesores o las responsables del CT.
Apoyos en la Interacción	Ambos, los correspondientes a argumentos y todos los correspondientes a recursos pueden ser posibles.

Tarea 12	
Diseñar tareas matemáticas que potencien la comprensión del concepto de variable.	
¿Para qué?	Para que de forma colaborativa los profesores apliquen el conocimiento profesional construido sobre el concepto de variable.
¿Cómo?	Dos opciones: dividiendo en equipos o bien de manera grupal todos mediante la plataforma <i>Zoom</i> compartirán sus tareas, e igual se les solicitará enviarlas al correo al final de la sesión y por el grupo de <i>WhatsApp</i> durante la sesión.
Comentarios	Depende si se pueden grabar los subgrupos o no. Lo ideal sería que se pudiera grabar y dividirlos en subgrupos.
Tipo de interacción	Todos los posibles tipos de interacciones propuestos en caso de que se haga grupal. En caso de que se haga por medio de subgrupos, la que más se potenciaría sería la de profesor-profesor.
Nivel de interacción	Todos los niveles de interacción, pues en esta tarea en particular es de suma importancia que los profesores rescaten las ideas de sus compañeros y discutan si están de acuerdo o no, aporten información para el diseño de la tarea o indiquen que coinciden con lo que otro profesor opine, pero quiera ampliar lo que ha dicho el otro profesor.
Apoyos en la Interacción	Ambos, los correspondientes a argumentos y todos los correspondientes a recursos pueden ser posibles.

Tarea 13	
Presentación de algunas tareas diseñadas, para establecer acuerdos sobre éstas.	
¿Para qué?	Para que de forma conjunta se establezcan acuerdos sobre si son tareas que realmente podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos
¿Cómo?	Se presentará en plenaria alguna de las tareas diseñadas por los participantes y se discutirá sobre éstas. La elección de las tareas será en principio por las responsables del taller, y posterior por los profesores en caso de que haya otra tarea que consideren se debe analizar y discutir.
Comentarios	
Tipo de interacción	Todos los posibles tipos de interacciones propuestos.

Nivel de interacción	Todos los niveles de interacción.
Apoyos en la Interacción	Ambos, los correspondientes a argumentos y todos los correspondientes a recursos pueden ser posibles.

Tarea 14	
Reflexionemos sobre las tareas diseñadas y su aplicación en el aula	
¿Para qué?	Para establecer acuerdos sobre si las tareas diseñadas realmente podrían potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos, reflexionaremos si éstas podrían ser implementadas en el aula. Para ello, se plantearán los siguientes cuestionamientos
¿Cómo?	
Comentarios	
Tipo de interacción	Todos los posibles tipos de interacciones propuestos.
Nivel de interacción	Todos los niveles de interacción.
Apoyos en la Interacción	Ambos, los correspondientes a argumentos y todos los correspondientes a recursos pueden ser posibles.

Tarea 15	
Declarar cambios de perspectiva sobre el concepto de variable, sus usos y en general su enseñanza y aprendizaje (todos)	
¿Para qué?	Para que de cierta forma se detecte el tipo de conocimiento que cada participante ha construido.
¿Cómo?	Prioritariamente mediante el <i>chat</i> o si hay voluntarios de forma verbal.
Comentarios	
Tipo de interacción	Todos los posibles tipos de interacciones propuestos.
Nivel de interacción	Todos los niveles de interacción.
Apoyos en la Interacción	Ambos, los correspondientes a argumentos y todos los correspondientes a recursos pueden ser posibles.