UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Propuesta de enseñanza basada en el conocimiento especializado del profesor y en elementos de una enseñanza para la comprensión robusta del Teorema Fundamental del Cálculo en bachillerato

Tesis

Maestro(a) en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior

Presenta:

Cinthia Azucena Almaraz Loera

Directora de tesis:

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Zacatecas, Zac., 21 de junio de 2022

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "**Propuesta de enseñanza basada en el conocimiento especializado del profesor y en elementos de una enseñanza para la comprensión robusta del Teorema Fundamental del Cálculo en bachillerato**" y que fue realizado bajo mi asesoría por la C. Cinthia Azucena Almaraz Loera, egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior, cumple con los requisitos de calidad académica para ser sometido a su revisión. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquélla establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 21 de junio del 2022

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Nombre y firma del asesor

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 21 del mes de junio del año 2022, la que suscribe Cinthia Azucena Almaraz Loera del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior con número de matrícula 34151239; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado "**Propuesta de enseñanza basada en el conocimiento especializado del profesor y en elementos de una enseñanza para la comprensión robusta del Teorema Fundamental del Cálculo en bachillerato**" bajo la dirección de la Doctora Leticia Sosa Guerrero.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Cinthia Azucena Almaraz Loera

Nombre del tesista

AGRADECIMIENTO AL CONACYT

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de la Maestría en Matemática Educativa.

Becario No. 1079277

RESUMEN

Este trabajo plantea como objetivo el diseño de una propuesta de enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) basada tanto en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas como en elementos para generar comprensión robusta en los estudiantes de nivel bachillerato, se realiza una revisión de investigaciones previas concernientes al tema integrándolas en cuatro apartados principales: dificultades en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo, dificultades en la enseñanza-aprendizaje del TFC, propuestas para la enseñanza del Cálculo y del TFC e importancia del conocimiento del profesor y de una enseñanza que genere comprensión. Para fundamentar teóricamente la investigación, se han tomado como marcos de referencia algunos fundamentos matemáticos del Teorema Fundamental del Cálculo, las categorías del modelo Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) y las dimensiones del Teaching for Robust Understanding (TRU). Después, se presenta la metodología ubicando a la investigación de tipo cualitativo con un alcance exploratorio, ubicada en el paradigma interpretativo; se contempla a la investigación-acción como método y se presentan los instrumentos útiles en la recogida de información, como observación participante, videograbaciones, diario de investigación, concentrados de indicadores, cuestionarios y producciones de los estudiantes. Posteriormente, se presenta el diseño de los instrumentos de recogida de información necesarios previo a la implementación de la propuesta, se realiza el análisis de datos mediante cinco etapas y, por último, se presentan los resultados, conclusiones y consideraciones finales del estudio.

Palabras clave: Propuesta de enseñanza, conocimiento del profesor, MTSK, TRU, Teorema Fundamental del Cálculo

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente muestra un trabajo de investigación cuyo objetivo es diseñar una propuesta de enseñanza basada en el conocimiento especializado del profesor y en elementos para generar comprensión robusta del TFC en bachillerato, se comienza explicando la motivación de la investigadora para realizar este estudio; en seguida, se muestran los antecedentes derivados de una revisión de la literatura relacionados con los intereses del trabajo y, al final del apartado, una reflexión personal de cómo la revisión documental afianza la idea de desarrollar la investigación.

En el Capítulo I se aborda la justificación de la tesis fundamentando su pertinencia y viabilidad a partir de la revisión de la literatura, también se analiza la problemática de la Matemática Educativa que contempla el trabajo para después, con base en ella, plantear como problema de investigación, que hay una carencia de una propuesta de enseñanza que integre elementos de conocimiento especializado del profesor y elementos de una enseñanza para la comprensión del Teorema Fundamental del Calculo en bachillerato; estos dos aspectos corresponden con el rumbo de los fundamentos teóricos que se toman como referencia.

A partir del problema, se plantea como pregunta de investigación: ¿Cómo elaborar una propuesta de enseñanza que esté basada tanto en el conocimiento especializado del profesor como en elementos que apuntan a la comprensión robusta del TFC? y se establece el objetivo de diseñarla.

Luego, en el Capítulo II se detallan los fundamentos teóricos de los cuales se parte para el diseño de la propuesta; se divide el problema en tres aspectos principales que requieren referentes teóricos independientes, pero que se conjuntan durante el desarrollo y ejecución de la investigación: fundamentos matemáticos del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), las categorías del modelo Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas) y las dimensiones del Teaching for Robust Undestanding (TRU) (Enseñanza para la Comprensión Robusta).

Posteriormente, en el Capítulo III, se precisa la metodología que se ha considerado para desarrollar el estudio; partiendo del paradigma interpretativo y de una investigación cualitativa con un alcance exploratorio. Se contempla como método la investigación-acción, con el objetivo de que la propuesta se implemente en el aula de clases y para el aula de clases (profesor, estudiantes y contenido matemático), escenario en el que se pretende valorar y corregir. Se mencionan los instrumentos de recogida de información y de análisis y la manera en que cada uno estará implícito en las etapas de la investigación-acción.

Después, en el Capítulo IV se presentan los instrumentos que se han diseñado y los objetivos que persigue cada uno; estos instrumentos corresponden a los necesarios para la recogida de información, por lo que se requieren de manera previa a la implementación de la propuesta.

Después, en el Capítulo V, se presenta el análisis de los datos a partir de una serie de varios acercamientos que han permitido avanzar por etapas; en el primero se extrae la información recogida en los instrumentos, de manera textual; luego, en el segundo y tercer acercamiento, se triangula dicha información para identificar indicadores de conocimiento especializado y de enseñanza para la comprensión robusta; en el cuarto acercamiento se extrae información que no se pudo clasificar en las dos triangulaciones anteriores y, por último, se hace un comparativo entre los indicadores que se contemplaron antes con los que surgieron a partir de la implementación de la propuesta.

En el Capítulo VI se detallan los resultados obtenidos a partir del análisis y en el Capítulo VII las conclusiones del mismo, partiendo de lo particular a lo general. Por último, en el Capítulo VIII se presentan algunas consideraciones finales detallando los principales aportes de la investigación, las limitaciones y recomendaciones y una reflexión personal a partir del desarrollo y hallazgos del trabajo.

Motivación del estudio

Mi inquietud para realizar este estudio surge de mi experiencia como docente en educación media superior, donde he tenido la oportunidad de impartir clases de Cálculo Integral, siendo testigo de las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de esta materia, en especial, del TFC. Este tópico matemático, me interesa de manera particular porque es una conjunción para que el estudiante relacione la derivada y la integral como procesos inversos; además, considero que su comprensión dota al alumno de elementos necesarios para afrontar contenidos matemáticos en el nivel superior.

Algunas dificultades que se presentan en el aula, de acuerdo con mi experiencia, están relacionadas con la naturaleza misma del tópico. Otras tantas, sin embargo, creo que tienen conexión con un pobre conocimiento, tanto del contenido matemático como conocimiento didáctico del contenido, por parte de los profesores. Realizo esa consideración, con base en mi situación y la de varios compañeros docentes de bachillerato, ya que, de acuerdo con los perfiles que propone la Secretaría de Educación Pública para la admisión de los maestros de matemáticas de nivel medio superior, la mayoría de los profesores no contamos con formación en matemática pura ni en didáctica de las matemáticas.

Debido a lo anterior, me surge el interés del diseño de una propuesta de enseñanza del TFC en bachillerato, tomando en cuenta el conocimiento especializado del profesor y algunos elementos de enseñanza para la comprensión robusta en los estudiantes.

Antecedentes

Esta sección se ha dividido en cuatro partes que abarcan investigaciones previas relacionadas con las dificultades en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo, dificultades en la enseñanza y aprendizaje del TFC, propuestas para la enseñanza de este tópico y la importancia del conocimiento del profesor en la enseñanza. Por medio de estudios previos sobre esas problemáticas, se pretende conocer si el estudio es pertinente.

Dificultades en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo

El cálculo, desde su surgimiento, se ha considerado como una rama esencial de las matemáticas, ya que guarda una estrecha relación con otras áreas de esta disciplina. Sin embargo, su estudio no ha sido una tarea fácil, ya que se caracteriza por su complejidad natural, representando una problemática en la que se requiere profundizar. (Artigue, 1995; Hitt, 2003).

Artigue (1995) señala que la enseñanza de los principios del Cálculo abarca tres tipos de problemas principales: epistemológicos, cognitivos y didácticos. Uno de los problemas que refiere es que los estudiantes operan con objetos de esta disciplina de marera algebraica, lo cual ocasiona errores y obstaculiza la comprensión. Esta transición es retomada por Neira (2013) quien menciona que la desvinculación entre Álgebra y Cálculo no sucede de manera natural, sino que representa un proceso caótico y es necesario que éste sea comprendido para facilitar el paso a los nuevos conceptos. Por lo tanto, se hace la consideración de que es necesario que el profesor esté al tanto de las dificultades que pueden presentarse para que facilite a los estudiantes dicha evolución.

Asimismo, Hitt (2003) muestra que algunas dificultades son ocasionadas por el profesor, en su investigación realiza un análisis donde se observa la falta de dominio y de conocimiento que pueden llegar a tener los profesores cuando enseñan tópicos de la materia; entre ellas, la escaza comprensión conceptual, uso de ejemplos erróneos, contradicciones en el discurso, carencia de distintos registros de representación y el uso irracional de la tecnología. Por lo tanto, determina que, si el profesor no es consciente de sus limitaciones, tendrá pocos elementos para afrontar las dificultades en el aula. También considera que los maestros deben estar al tanto de los conflictos naturales que se presentan al estudiar los tópicos, evitando que se conviertan en obstáculos para el aprendizaje.

Por su parte, Cantoral y Farfán (2004) mencionan que, para que se genere una comprensión conceptual del cálculo, se vuelve necesario el estudio de la historia y la epistemología de los conceptos, así como socializar la educación. Además, sugieren que, si el profesor no tiene una comprensión conceptual del contenido, no conoce sus significados, usos y aplicaciones y sus representaciones, no podrá generar una enseñanza efectiva; lo mismo pasa cuando conoce el contenido, pero desconoce cómo enseñarlo, es decir, carece de herramientas didácticas.

Dificultades en la enseñanza-aprendizaje del TFC

El TFC es un contenido matemático que se encuentra en los planes de estudio tanto de nivel bachillerato como de algunas carreras en el nivel superior, uno de los aspectos importantes de su estudio radica en que los estudiantes puedan comprender la relación entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, además, "sugiere un orden en la construcción final y exposición de estos conceptos" (Ponce, 2007, p. 7) y proporciona un algoritmo para calcular áreas de determinadas regiones de las funciones.

Desde la perspectiva del profesor, la enseñanza del TFC muchas veces se considera suficiente si éste presenta a los estudiantes la demostración analítica, suponiendo que los alumnos entienden la articulación entre la derivada y la integral de manera casi automática (Robles, et al., 2014). Font y Adán (2013) consideran que la falta de representatividad es una característica mejorable en las clases de matemáticas.

Ponce (2006) realizó una compilación de la argumentación de las dos partes del TFC y sugiere que, además de comprenderla profundamente, los profesores de bachillerato deben probar los argumentos matemáticamente para que los estudiantes construyan el conocimiento. La prueba permite mostrar procesos de pensamiento y observar cómo un estudiante llega a una conclusión particular. También funciona como: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento, comunicación de conocimiento matemático, construcción de una teoría empírica, exploración del significado de una definición e incorporación de un hecho bien conocido dentro de un marco de referencia. En su trabajo, Ponce considera que, si el profesor es capaz de dominar estos contenidos, tendrá mejores herramientas para afrontar sus clases. Como recomendaciones finales de su estudio, propone documentar el conocimiento de los educadores y corroborar que realmente conocen lo suficiente para abordar el cálculo diferencial e integral y que tienen un buen manejo de la prueba del TFC.

Por su parte, Valenzuela y Vigo (2018) presentan un estado del arte de las dificultades que se presentan en el aprendizaje y la enseñanza del TFC. En su investigación, realizan una revisión documental de estudios anteriores relacionados con el tema y encuentran seis dificultades principales presentes en su enseñanza y aprendizaje:

1. Mala noción e interpretación de la función $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.
2. Interpretación de la integral definida sólo como el área bajo la curva.
3. Interpretación de la derivada sólo como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función.
4. La noción de continuidad, la cual resulta ser una condición suficiente para aplicar el TFC.
5. No se realiza la interpretación geométrica del TFC.
6. No se muestra la relación que establece el TFC entre el Cálculo Diferencial con el Cálculo Integral.

Los investigadores consideran que las dificultades encontradas están ligadas con la falta de dominio de los contenidos matemáticos previos; también sugieren la contextualización de las actividades y la utilización de herramientas tecnológicas como GeoGebra en el uso de distintos registros de representación. Además, consideran necesario que el profesor conozca las seis dificultades para que tenga oportunidad de realizar mejoras en la enseñanza y aprendizaje de este tópico.

Propuestas para la enseñanza del Cálculo y del TFC

Diversos autores han trabajado en el diseño de propuestas de enseñanza del Cálculo, por lo que se han revisado algunas de ellas y, posteriormente, se analizan otras que se enfocan en el TFC, el cual es el tópico matemático de interés para esta investigación.

Salinas y Alanís (2009) reconocieron un paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo, refiriéndolo como una serie de conceptos y procedimientos que el alumno debe conocer y ejecutar, uno tras otro, casi siempre de manera individual. Ellos realizaron una revisión de diversos estudios que sugieren recomendaciones para hacer un cambio de paradigma; detectaron que algunos de los estudios revisados se enfocan en cambiar la manera de enseñar, es decir, el *cómo* enseñar el contenido matemático; mientras que otras están orientadas en el contenido, el *qué*.

A través de la revisión que llevaron a cabo, situaron la enseñanza del Cálculo en su institución educativa, el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, en un paradigma tradicional que atenta a la innovación. Por lo cual, surgió en ellos la necesidad de crear una propuesta global para la enseñanza del Cálculo desde un cambio de paradigma, enfocándose, principalmente, en recurrir a la historia de la génesis del conocimiento que permita una variación en la forma de apropiarse del contenido matemático y en generar un acercamiento socioepistemológico que problematice el qué enseñar, así como promover una didáctica donde las prácticas favorezcan la necesidad de conceptos.

Más tarde, Salinas et al. (2011) presentan su propuesta para enseñar Cálculo en el nivel universitario basándose en un rediseño curricular, considerando el *qué*, el *cómo* y el *para qué* enseñar. El objetivo de su trabajo es delinear un nuevo paradigma enfocándose en la organización e integración de tres elementos indispensables: la fuente psicopedagógica, la epistemológica y la social del currículo. Su idea es reenfocar la enseñanza buscando que el razonamiento matemático logre tener un significado y sentido para el estudiante y que atienda a la problemática de cambio y variación, conceptos relevantes en el currículo del Cálculo.

Ellos proponen que el conocimiento de cada tema del currículo debe recorrer tres fases:

> …la de interacción inicial con cierta problemática, la de esbozo de la teoría construida para darle solución y la de aplicación a nuevas situaciones problema donde la interacción inicial se vea superada con el conocimiento que ha sido generado durante la segunda fase (p.67).

La primera fase consiste en mostrar a los estudiantes escenarios interactivos que evoquen contenidos previos y motivar para que los alumnos valoren la necesidad de los conocimientos nuevos. En la segunda fase se analizan aspectos teóricos y matemáticos enfocándose en el uso del Cálculo para atender la problemática y en desarrollar habilidades de los procesos y notación matemática. Por último, en la tercera fase se aplica el conocimiento que se ha construido en situaciones de interés para los estudiantes.

Los investigadores consideran que su propuesta provee beneficios adicionales como el desarrollo de competencias transversales, resolución de problemas, trabajo en equipo, razonamiento y capacidad para aprender. Al final, los autores aclaran que la propuesta es mejorable y habrá que realizar adecuaciones de acuerdo con los resultados que se obtengan, pero están seguros de que contribuye a mejores resultados que el paradigma tradicional.

En esta propuesta de Salinas et al. (2011), se observa un interés por incorporar aspectos centrales tanto del conocimiento del contenido (la historia del concepto), como didáctico del contenido (uso de la socialización para favorecer la necesidad de conceptos), sin embargo, no se realiza una precisión de cómo llevar a cabo la instrucción. Asimismo, los investigadores precisan que consideran que su propuesta podrá ser mejorada en cuánto se aplique y evalúe el rediseño curricular.

Por su parte, Morales y Peña (2013), realizaron una propuesta metodológica para la enseñanza del Cálculo en Ingeniería basada en la Modelación Matemática, con el objetivo de que los estudiantes pudieran aplicar el Cálculo en situaciones reales propias de su quehacer profesional.

En su diseño, Morales y Peña consideran el enfoque en el trabajo de los estudiantes mediante la incorporación de modelos pedagógicos novedosos y asumen que es apremiante para lograr tal fin la revisión del currículo, el conocimiento y habilidad en las nuevas tecnologías y contextos de aprendizaje, así como la formación sólida en matemáticas. Tomando en cuenta lo anterior, utilizan la Modelación Matemática como herramienta didáctica, usando como punto de partida el contexto de los estudiantes para la selección de los modelos y siguiendo las fases de Salett y Hein (2004): exposición del tema, delimitación y formulación del problema, desarrollo del contenido programático, presentación de ejemplos análogos, formulación del modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo e interpretación de la solución y validación del modelo.

En las consideraciones finales, los autores refieren que, durante la aplicación de la propuesta, los estudiantes se mantuvieron motivados, y que también surgió interés por parte de los docentes que no participaron, por lo que consideran a la relación de las matemáticas con la realidad de los estudiantes como una ventaja que vale la pena implementar en la enseñanza.

En la propuesta de Morales y Peña, se ha utilizado la Modelación para desarrollarla y se han hecho consideraciones de elementos del conocimiento del contenido y didáctico, se aprecia una preocupación por la incorporación de aspectos novedosos y dominio por la matemática y su relación con la realidad. Se considera que retomar algunos de estos aspectos junto con otros referentes teóricos de conocimiento del profesor y de enseñanza para la comprensión robusta, puede enriquecer la enseñanza en las aulas de bachillerato.

Por otro lado, Peñaloza et al. (2013) realizaron el diseño de tres escenarios construidos con el software dinámico GeoGebra, con el objetivo de que los estudiantes comprendieran el TFC, relacionando la derivada, como pendiente de la recta tangente, y la integral, como el área bajo la curva. En su trabajo resaltan el acercamiento empírico y visual, así como el uso de distintos registros de representación a través del software. Muestran el interés por generar ambientes distintos en el abordaje del TFC por medio de la tecnología que facilite, en el estudiante, la visualización y la comprensión.

Por otra parte, Robles et al. (2014), presentan una propuesta cuyo objetivo es el diseño de una secuencia didáctica de tareas promovidas por ambientes interactivos para la enseñanza del TFC en el nivel universitario. Estos autores intentan propiciar, en los alumnos, la conjetura, la visualización y la argumentación. Asimismo, buscan que el estudiante descubra, intuitivamente, la articulación entre derivada e integral. En su propuesta, destacan dos principales descriptores: la riqueza matemática y la representatividad; además, toman en cuenta los indicadores de los criterios de idoneidad que se proponen en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino et al., 2007): 1. *Idoneidad epistémica,* para evaluar si las matemáticas enseñadas son de calidad. 2. *Idoneidad cognitiva,* para valorar, antes del proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar es razonable distantemente de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes se aproximan a lo que pretendía ser enseñado. 3. *Idoneidad interaccional,* para valorar si las interacciones han resuelto dudas o dificultades de los estudiantes. 4. *Idoneidad mediacional,* para valorar si los recursos materiales y temporales utilizados fueron adecuados. 5. *Idoneidad emocional,* para evaluar la implicación (motivación e interés) de los alumnos en el proceso de instrucción. 6. *Idoneidad ecológica,* para evaluar si el proceso de instrucción es adecuado al proyecto educativo del plantel.

Los investigadores consideran que los principales aportes de su trabajo son: el énfasis en la conceptualización de la integral por encima de la mecanización; la implementación de las representaciones gráfica y geométrica mediante la visualización; el enfoque en una enseñanza constructivista, otorgando mayor responsabilidad al alumno en su proceso de aprendizaje y el uso de recursos tecnológicos. Aunque también mencionan que la secuencia lograda "es una primera fase del proceso de diseño y rediseño de secuencias didácticas" (p.98) usada a priori y que será necesario evaluar los criterios de idoneidad didáctica a posteriori para estimar la instrucción y realizar las adecuaciones pertinentes.

Con esta propuesta, Robles et al. (2014) han considerado aspectos relevantes y novedosos y han ido más allá de lo tradicional, se observa un interés en la matemática, en la incorporación de la motivación de los estudiantes, los recursos, las interacciones y la adecuación al proyecto escolar desde el Enfoque Ontosemiótico; por lo cual, creemos necesaria la implementación de referentes que tengan un énfasis en el conocimiento del profesor para el diseño de la enseñanza, mismo que puede retomar algunos de los aspectos que ya se han considerado, desde un nuevo punto de vista, con el fin de robustecer la instrucción.

Por otro lado, Dávila-Araiza y Grijalva (2019) realizaron una actividad didáctica utilizando la tecnología para generar una reflexión del concepto de integral y de TFC. El diseño de su trabajo se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al, 2008) y los marcos de Douady (1986) para generar desequilibrios que generen aprendizaje. La actividad parte de un problema que beneficia el cambio de la representación algebraica a la gráfica y se busca que el estudiante, a partir de la reflexión sobre los procedimientos en ambos registros, articule los significados de integral y TFC. Asimismo, se trabaja la primera parte del TFC de manera individual y la segunda en equipos. Los investigadores concluyen que una mejora que pueden realizar es el relacionar los problemas con otras disciplinas, ya que se diseñaron en un contexto intramatemático.

Por su parte, Monroy y Riveros (2020) desarrollaron una propuesta didáctica hacia el redescubrimiento del TFC por medio del análisis y descripción de los objetos matemáticos de límite, derivada e integral. Ellos utilizan tres marcos de referencia: un marco matemático, uno tecnológico y uno didáctico. Hacen hincapié en el uso de herramientas tecnológicas para mejorar la comprensión de significados y los sistemas de representación ejecutables; esto motivado a que debieron hacer adecuaciones para que la implementación de la propuesta pudiera llevarse a cabo de manera virtual, debido a la emergencia sanitaria por el COVID-19. Su propuesta consiste en una secuencia de actividades (dos) que lleven a la comprensión del TFC, resaltando la importancia del orden en las mismas.

La actividad 1 tiene el objetivo de desarrollar la primera parte del TFC de manera intuitiva y se espera que, a través de la visualización, el estudiante logre encontrar el área de la región bajo una recta en un intervalo dado, utilizando fórmulas geométricas, con la intención de que realice la integral definida sin evocar su definición. La actividad 2 tiene como objetivo desarrollar la segunda parte del TFC, también de manera intuitiva, proponiendo "procesos algebraicos complejos en los que surge la necesidad de una representación gráfica" (p.54), para lo cual se utilizan herramientas tecnológicas. En cada actividad se generó una instrucción e ítems para responder.

Los investigadores concluyeron que, de manera global, lograron que los estudiantes redescubrieran el TFC e identificaron a la derivada y la integral como procesos inversos. Algunas recomendaciones que hacen al final es dividir las actividades en más momentos, ya que el hecho de hacerlo sólo en dos, resultó extenso y exhaustivo para los estudiantes; por otra parte, sugirieron el uso del software GeoGebra como apoyo. Este estudio y sus recomendaciones pueden ser útiles en el trabajo que se pretende realizar; sin embargo, se retomarán sus ideas desde el punto de vista de teorías matemáticas orientadas en el conocimiento del profesor y en la enseñanza para la comprensión robusta, con el objetivo de complementar y tener una nueva perspectiva de la instrucción.

Importancia Del Conocimiento Del Profesor Y De Una Enseñanza Que Genere Comprensión

Como se mencionó anteriormente en Hitt (2003), el conocimiento que posee el profesor puede impactar en el aula y dificultar la comprensión del contenido matemático. Esta línea de investigación lleva algunos años estudiándose, considerándose a Shulman (1986) como uno de los pioneros, ya que desarrolló un programa de investigación llamado Knowledge Growth in Teaching (Desarrollo del conocimiento en la enseñanza), mostrando que la instrucción, no sólo requiere de *conocimiento del contenido*, sino también necesita de *conocimiento didáctico del contenido* y de *conocimiento curricular*. Además, menciona que enseñar demanda, no solamente los conocimientos, sino la comprensión de los mismos.

A partir del trabajo de Shulman, se han presentado otros referentes que han tratado de describir los componentes que deben estar presentes en el conocimiento del profesor de matemáticas, algunos de ellos son los de Ball et al. (2008) y Carrillo et al. (2018). Respecto a éste último, se considera, además, el carácter especializado del conocimiento dentro de la profesión como docente de matemáticas y se denominan tres dominios principales: el conocimiento del contenido (MK, por sus siglas en inglés), el conocimiento didáctico del contenido (PCK) y las creencias. Es por eso por lo que se contempla el modelo Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas) de Carrillo et al. (2018) como una conveniente base teórica en cuanto al conocimiento profundo que posee el profesor para la enseñanza.

Respecto a investigaciones que refieren al conocimiento del profesor en la enseñanza del TFC, se cuenta con la de Ponce (2007), quien realizó un estudio de casos con ocho profesores, documentando la organización de las ideas y contenidos que llevan a cabo para la instrucción del tópico. Se diseñó y aplicó un instrumento con preguntas y problemas sobre aspectos conceptuales y en los resultados se muestra una falta de dominio en el tema por parte de algunos profesores, ya que interpretan el algoritmo $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ como un teorema, creen que hay funciones continuas sin primitiva y no tienen claro que las primitivas de una función en un intervalo difieren en una constante. Por ello, se considera pertinente indagar en los conocimientos que poseen los profesores respecto a este tópico.

Por otro lado, considerar elementos de una enseñanza que genere comprensión es una tendencia de investigación, ya que este tipo de enseñanza puede llevar al logro de los aprendizajes y resultar "útil como un mecanismo de control sobre los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes" (Hurtado, 2015, p. 21). Hurtado realizó una revisión de 84 publicaciones en Hispanoamérica analizando las estrategias didácticas de enseñanza y el impacto que se produjo en cada una, descubrió que las prácticas didácticas de los maestros impactan en el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Las prácticas que generan comprensión se relacionan, principalmente, con tres aspectos básicos del aprendizaje activo: los conceptos previos de los estudiantes, la auto-reflexión de los alumnos y las metas del aprendizaje que se pretenden alcanzar partiendo de la realidad. La desarticulación de esos tres elementos ocasiona que los estudiantes visualicen el conocimiento escolar como algo aislado de su contexto y lo limita a alcanzar altos niveles de comprensión.

Hurtada toma como referente el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión (EPC) (Teaching for Understanding, en inglés) de Perkins y Blythe (1994), con la intención de realizar actividades didácticas donde el estudiante sea capaz de afrontar y resolver problemáticas de su cotidianidad de manera creativa y crítica. Concluye que el alumno mejorará su comprensión si tiene la oportunidad de expresar y demostrar lo aprendido y explicarlo y representarlo de diferentes y creativas maneras; propone fomentar el trabajo en equipo y afirma que la enseñanza para la comprensión debe ser un proceso dinámico y continuo.

Más específicamente en la disciplina matemática, Schoenfeld et al. (2016) presentan el marco de referencia Teaching for Robust Understanding, donde pretenden mostrar los atributos de un aprendizaje equitativo y sólido en el cual los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar su pensamiento matemático. Para lograr la comprensión robusta aluden a la importancia de la presencia de cinco dimensiones: el contenido, la demanda cognitiva, el acceso equitativo al contenido, la agencia, propiedad e identidad y la evaluación formativa.

Así también, en este marco, los investigadores proporcionan herramientas que los maestros pueden emplear como referentes en el diseño y ejecución de las clases de matemáticas, especificando que no constituyen recetas o una serie de pasos a seguir, sino que muestran atributos que pueden tomarse como base para generar una comprensión robusta en los estudiantes (Schoenfeld et al., 2016).

Uno de los aspectos que interesan a esta investigación es que la propuesta de enseñanza tome en cuenta elementos de enseñanza para la comprensión del TFC, por lo cual, resulta interesante y apropiado el empleo de un marco referencial que tenga este enfoque.

Reflexión

Los trabajos revisados y descritos hasta ahora han dado cuenta de una preocupación por la enseñanza y la instrucción del TFC que genere mejoras en cuanto al aprendizaje de los estudiantes; el objetivo en esas propuestas ha sido generar alternativas a la enseñanza de este tópico desde distintos marcos teóricos, centrándose en aspectos fundamentales tanto del conocimiento del contenido matemático y/o del conocimiento didáctico del contenido. Asimismo, se ha implementado la tecnología con el fin de generar distintos registros de representación y apostar por la visualización como un facilitador del aprendizaje en los estudiantes.

A pesar de los esfuerzos realizados, se observa una carencia de investigaciones enfocadas en una enseñanza del TFC basada en elementos teóricos del conocimiento especializado del profesor y en elementos de enseñanza para la comprensión del TFC en bachillerato, por lo tanto, se afianza la idea de plantear una manera de cómo diseñar dicha propuesta.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se retoman los aspectos previos contenidos en la Introducción, para justificar la pertinencia y viabilidad de la investigación. Asimismo, retomando la revisión de la literatura, se describe la problemática de la Matemática Educativa de la cual se parte para definir el problema, pregunta y objetivos de la investigación.

I.1. Justificación

La revisión de la literatura muestra que los problemas del Cálculo son de distintos tipos y, a pesar de haberse abordado y clasificado desde hace más de dos décadas (Artigue, 1995), siguen estando presentes en las aulas (García, 2013), los profesores y su falta de dominio, suelen propiciar la aparición de algunas dificultades (Hitt, 2003; Ponce, 2007).

Asimismo, se han realizado algunas propuestas para la enseñanza del TFC, como las mencionadas anteriormente (Morales & Peña, 2013; Peñaloza et al., 2013; Robles et al., 2014; Dávila-Araiza & Grijalva, 2019: Monroy & Riveros, 2020) que apuestan por una mejora en la instrucción y que procuran abarcar distintos aspectos del contenido matemático y de la didáctica del contenido.

Al respecto de profundizar en el contenido, algunas de las propuestas han considerado la génesis de los conceptos y de la disciplina en general, ya que se detecta, en la enseñanza tradicional, una ausencia de este conocimiento que puede mejorar la comprensión de cualquier tópico matemático. Anacona (2003) enfatiza que cuando se incluye la historia de un concepto matemático en su enseñanza, "se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de constitución teórica" (p. 30). También Tzanakis et al. (2002) argumentan la importancia del uso de la fuente epistémica, mencionan que los profesores pueden hacer conciencia de los procesos creativos a través del conocimiento histórico de los conceptos que está enseñando. Por su parte, Farmaki y Paschos (2007) consideran que el estudiante pasará de un conocimiento básico a uno complejo si conoce el origen del contenido matemático que está abordando, de esa manera se utilizarían las ideas del pasado con fines educativos.

Jankvist (2009) visualiza a la historia como una herramienta que favorece el aprendizaje cognitivo de conceptos, ya que permite que el estudiante logre ver una cara humana en la matemática, lo cual capta su interés y activa su motivación. Asimismo, Cantoral y Farfán (2003) consideran a la historia matemática como parte de la solución para abordar la problemática que existe en la enseñanza del Cálculo. Ellos plantean un acercamiento epistemológico que permita incorporar cuatro componentes indispensables para construir el conocimiento: "su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los métodos de transmisión vía la enseñanza" (p. 265).

Por otra parte, en las propuestas revisadas no se han encontrado aportes directamente relacionados con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, así como de integrar elementos de una enseñanza para la comprensión robusta desde el enfoque que pretendemos tomar como referente.

Derivado de lo anterior, se deduce que la investigación es pertinente, viable y factible, ya que la propuesta pretendida tiene la intención de realizar un aporte a la Matemática Educativa y al desarrollo profesional de los profesores de media superior y superior.

I.2. Problemática

A partir de la revisión de la literatura, se presenta una problemática de la Matemática Educativa desde diferentes perspectivas: las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, más específicamente, del TFC, la relevancia del conocimiento especializado del profesor en la enseñanza y la carencia de investigaciones relacionadas con la enseñanza del TFC considerando el conocimiento especializado del profesor y enseñanza para la comprensión.

El TFC revela una relación de reciprocidad entre la derivada y la integral, conceptos centrales en el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, respectivamente, por lo que su entendimiento logra afianzar en los estudiantes, el sentido de esos dos conceptos. También sugiere un orden en la construcción de los conceptos y proporciona un algoritmo que permite calcular áreas de funciones en un intervalo dado (Ponce, 2007). Ponce menciona que es común que los profesores confundan el TFC con el significado de integral definida, propiciando un pobre aprendizaje en los estudiantes.

Artigue (1995) dio a conocer que en la enseñanza del Cálculo se presentan diversos tipos de problemas, principalmente tres: epistemológicos, cognitivos y didácticos. Mostró que es difícil lograr una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos en los estudiantes y que la enseñanza del Cálculo está basada en prácticas algebraicas, algorítmicas y mecánicas que se encuentran inmersas en las aulas, tanto en el desarrollo de la clase como en la evaluación. Estos problemas hicieron concluir a la autora que el Cálculo se encontraba, en ese momento, en una situación de crisis, los estudiantes se concentraban en aprender mecánicamente sin comprender. Esta situación sigue prevaleciendo a pesar de los esfuerzos que se han realizado (García, 2013), ya que las cifras de repetición de cursos que se presentan en el nivel medio superior y superior, son indicadores de ese escenario y repercute en la frustración de estudiantes y profesores.

Artigue (2001) señala que la enseñanza del Cálculo está envuelta por una especie de *círculo vicioso conveni*ente donde el profesor ejerce una diferencia en aumento, entre lo que enseña y lo que evalúa; mientras que los alumnos, basados en la acción del profesor, se forman ideas y creencias sobre las matemáticas que no les ayudan a tener un pensamiento matemático adecuado. Lo cual parece concluir en que el *modelo docente tecnicista* (mecanización) es una reacción al *modelo docente teoricista* (abstracción), ya que el primero se vuelve "normal", una vez que el segundo fracasa.

Cantoral et al., (1990) señalaron que la estructura del discurso matemático teórico es la menos conveniente para abordar y comunicar las ideas del Cálculo, pero tampoco creen que utilizar técnicas que lo hagan parecer una rutina y aligeren su comprensión, sea lo más adecuado; ya que no se pretende volver expertos a los estudiantes en el discurso teórico, sino que sean capaz de emplearlo en el futuro en su vida profesional. En una investigación posterior, Cantoral y Mirón (2000), señalan que los estudiantes pueden realizar cálculos sin dar un sentido más amplio que demuestre comprensión en los conceptos, lo cual demuestra una dislexia escolar en la disciplina.

Según García (2013), la enseñanza del Cálculo sigue presentándose de manera descontextualizada, desarticulada y algoritmizada, enfocándose, algunas veces, únicamente en la obtención de respuestas, ojalá correctas, de los ejercicios de libros de texto u otros propuestos por el profesor. Alude que, para tratar de disminuir ese problema, ha surgido la opción de incorporar la génesis de la disciplina. Además, el hecho de la difícil transición entre el Álgebra y el Cálculo, se obstaculiza la comprensión de este último debido a las dificultades intrínsecas de la disciplina sumadas a las propias del Álgebra que arrastran los estudiantes.

De manera específica en el TFC, Valenzuela y Vigo (2018) describen algunas dificultades relacionadas con una mala interpretación de conceptos previos, como derivada e integral y la noción de continuidad, la falta de usos de registros de representación y el no hacer explícita en el aula, la relación de reciprocidad entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Algunas de las dificultades mencionadas están relacionadas con la complejidad misma del contenido. Sin embargo, también pueden ser ocasionadas por el profesor, quien muchas veces no comprende el contenido y lo expone en clase de manera inadecuada (Hitt, 2003).

Cantoral y Farfán (2003) consideran que la problemática de la enseñanza-aprendizaje del Cálculo dio origen al establecimiento de una línea de investigación denominada pensamiento y lenguaje variacional. Ellos proponen estudiar el referente epistemológico, reproducir la historia de las matemáticas en el aula y otorgar un papel protagónico a la socialización. Por lo tanto, es necesario tener un mejor y mayor conocimiento de esos aspectos cuando se desea realizar un diseño de enseñanza-aprendizaje en las aulas.

Kouropatov y Dreyfus (2014) proponen un enfoque del concepto de integral mediante la construcción del conocimiento enfocándose en la idea matemática de acumulación. Por lo que se considera pertinente que este aspecto epistemológico del TFC se encuentre presente en la propuesta, ya sea de forma explícita o implícita.

Asimismo, existen investigaciones que revelan la importancia del conocimiento del profesor en la enseñanza de los tópicos matemáticos (Shulman, 1986; Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018) y de considerar elementos de la enseñanza que generen comprensión (Perkins & Blythe, 1994; Schoenfeld et al., (2016). Sin embargo, la revisión de la literatura revela una carencia de investigaciones sobre la enseñanza del TFC, considerando la conjunción de estos dos aspectos, por lo que el problema de investigación se plantea a partir de esta situación.

I.3. Problema

De acuerdo con los bosquejos anteriores se aprecia que, aunque ha existido una preocupación en mejorar la enseñanza del TFC, existe carencia en una propuesta de enseñanza basada en el conocimiento especializado del profesor y en elementos de enseñanza para la comprensión robusta del TFC en bachillerato. Entendiendo el *conocimiento especializado* en términos de las categorías mencionadas por el modelo MTSK de Carrillo et al. (2018) y la *comprensión robusta* con base en la conjunción de las dimensiones del TRU, propuestas por Schoenfeld et al. (2016). Estos dos términos se detallarán en el Capítulo del Marco Teórico.

I.4. Pregunta de investigación

Derivado del planteamiento del problema, surge la pregunta: ¿Cómo elaborar una propuesta de enseñanza basada en el conocimiento especializado del profesor y en elementos de enseñanza para la comprensión robusta del TFC en bachillerato?

I.5. Objetivo general

Así pues, el objetivo de la investigación es diseñar una propuesta de enseñanza basada en el conocimiento especializado del profesor y en elementos de enseñanza para la comprensión robusta del TFC en el nivel bachillerato.

I.5.1. *Objetivos específicos*

Para lograrlo, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Identificar y sistematizar indicadores del conocimiento especializado del profesor del TFC en bachillerato.
- Identificar y sistematizar indicadores de elementos de una enseñanza para la comprensión robusta del TFC en bachillerato.
- Elaborar actividades y estrategias didácticas que integren los indicadores.

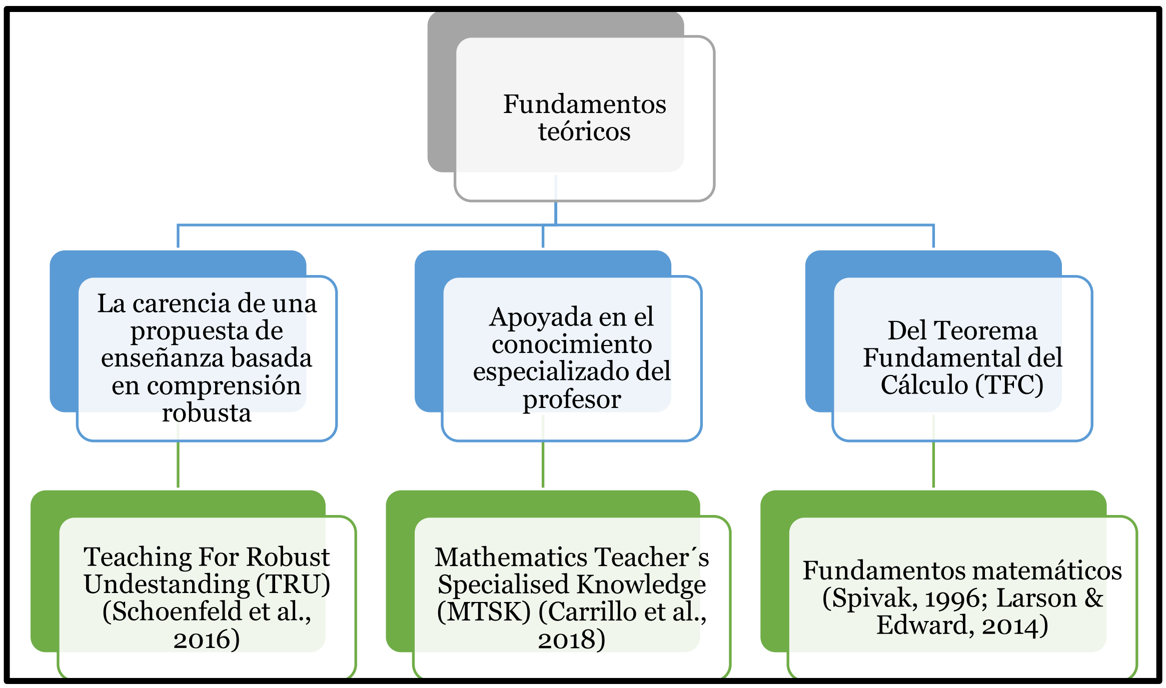
CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

El presente capítulo describe los fundamentos teóricos que se consideran para sustentar el estudio y la manera en que se relacionan con el problema y objetivo de la investigación. Enfatizando en los elementos que se pretenden considerar, de acuerdo con las necesidades que se persiguen.

Para sustentar teóricamente la investigación, se ha dividido el problema en tres aspectos principales; buscando sustentar cada uno con una teoría específica, de acuerdo con lo que se pretende, ver Figura 1.

Figura 1

Fundamentos teóricos que se consideran para cada una de las partes en que se ha dividido el problema



Fuente: elaboración propia.

En seguida se aborda cada uno de los fundamentos teóricos con mayor profundidad.

II.1 Fundamentos matemáticos

En esta investigación se pretende trabajar con un contenido matemático específico, el TFC. Por lo tanto, es indispensable recordar lo que es un teorema, y referir la proposición del TFC.

De acuerdo con Baldor (2017), un teorema:

> Es una proposición que puede ser demostrada. La demostración consta de un conjunto de razonamientos que conducen a la evidencia de la verdad de la

proposición. En el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: la hipótesis, que es lo que se supone, y la tesis, que es lo que se quiere demostrar (p. 8).

Asimismo, dado que el TFC comprende la relación entre derivada e integral, es conveniente que se muestren estas definiciones antes que la proposición del teorema.

II.1.1 *Definición de derivada*

Spivak (1996), define a la derivada como se muestra a continuación:

> La función *f* es **derivable en *a*** si
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ existe.}$$
>
> En este caso el límite se designa por $\boldsymbol{f'(a)}$ y recibe el nombre de **derivada de *f* en *a***. (Decimos también que *f* es **derivable** si *f* es derivable en *a* para todo *a* del dominio de *f*.) (p. 201).

II.1.2. *Definición de integral*

Spivak (1996) define a la integral:

> Una función *f* acotada sobre $[a, b]$ es **integrable** sobre $[a, b]$ si
>
> $$\sup \{L(f, P): P \text{ es una partición de } [a, b]\} =$$
> $$= \inf \{U(f, P): P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$
>
> En este caso, este número común recibe el nombre de integral de *f* sobre $[a, b]$ y se denota por
>
> $$\int_a^b f.$$
>
> (El símbolo $\int$ recibe el nombre de *signo integral* y en su origen era una *s* alargada, por "suma"; los números *a* y *b* reciben el nombre de *límites de integración inferior y superior*.) La integral $\int_a^b f$ recibe el nombre de **área** de $R(f, a, b)$ cuando $f(x) \geq 0$ para todo *x* de $[a, b]$. (p. 355).

II.1.3. *Proposición del TFC y demostración*

El TFC está integrado por dos partes que exploran la conexión entre la derivada y la integral. A continuación, se muestran las proposiciones y demostraciones que realizan Larson y Edward (2014) y Spivak (1996). Cabe señalar que se presentan ambas, debido a que se considera pertinente que, como investigadora, se conozcan varias demostraciones del TFC. La de Spivak (1996), tomando en cuenta la complejidad y abstracción que manifiesta, procurando tener una comprensión de mayor profundidad, y la de Larson y Edward (2014), considerando que se muestra de una manera menos abstracta y que puede ser de mayor utilidad para el nivel educativo en el que se desarrollará la investigación.

Larson y Edward (2014) denotan el TFC, de la siguiente manera:

Primer TFC:

Si una función *f* es continua en el intervalo cerrado [a,b] y F es una antiderivada de f en el intervalo [a, b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. la clave para la demostración consiste en escribir la diferencia F(b)-F(a) en una forma conveniente. Sea Δ cualquier partición de [a,b].

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos semejantes, se obtiene

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio [para integrales], se sabe que existe un número c, en el i-ésimo subintervalo tal que

$$F'(c) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, se puede hacer que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtener

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)\Delta x_i].$$

Esta importante ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio [para integrales], siempre se puede encontrar una colección de c_i tal que la constante $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann de f en [a,b] para cualquier partición. El teorema garantiza que el límite se sumas de Riemann sobre las particiones con $\|\Delta\| \to 0$ existe. Así, el tomar el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ produce

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$. (p. 280)

En cuanto al segundo TFC, Larson y Edward (2014) lo enuncian:

El segundo TFC

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

Demostración. comience definiendo F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, puede escribir

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt\right]. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio [para integrales] (suponiendo que $\Delta x > 0$), sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\Delta x$. además, como $x \leq c \leq x+\Delta x$ se deduce que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. Por tanto, obtiene

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}f(c)\Delta x\right] = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x).$$

Se puede plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$. (p. 284)

Por su parte, Spivak (1996) ofrece las siguientes proposiciones y demostraciones para el TFC.

TEOREMA 1 (primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Sea *f* integrable sobre [*a, b*] y defínase *F* sobre [*a, b*] por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si *f* es continua en *c* de [*a, b*], entonces *F* es derivable en *c*, y

$$F'(c) = f(c).$$

(Si *c*=*a* o *b*, entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de *F*.)

DEMOSTRACIÓN

Supondremos que c está en (a, b); el lector podrá suplir las fáciles modificaciones necesarias para c=a o b. por definición,

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Supongamos primero que $h > 0$. Entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Definamos m_h y M_h como sigue (fig. 1):

$$m_h = inf\ \{f(x): c \leq x \leq c+h\},$$

$$M_h = sup\ \{f(x): c \leq x \leq c+h\}.$$

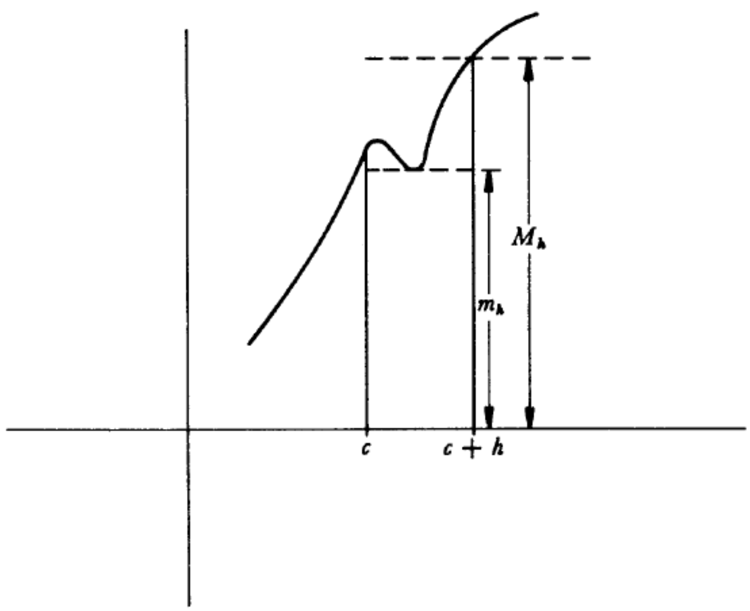


FIGURA 1

Del teorema 13-7 [Ver Figura 2] se sigue que

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h \cdot h.$$

Por lo tanto.

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Si $h \leq 0$, solamente habrá que cambiar unos pocos detalles del razonamiento. Sea

$$m_h = inf\,\{f(x): c + h \leq x \leq c\},$$

$$M_h = sup\,\{f(x): c + h \leq x \leq c\}.$$

Entonces

$$m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h \cdot (-h).$$

Por ser

$$F(c + h) - F(c) = \int_{c}^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f,$$

Se obtiene

$$m_h \cdot h \geq F(c + h) - F(c) \geq M_h \cdot h.$$

Puesto que $h < 0$, la división por h invierte de nuevo la desigualdad, obteniéndose el mismo resultado que antes:

$$m_h \leq \frac{F(c + h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Esta igualdad se cumple para cualquier función integrable, sea o no continua. Sin embargo, puesto que *f* es continua en *c*,

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(c),$$

Y esto demuestra que

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \tfrac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c). \text{ (pp. 399-401)}$$

TEOREMA 2 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Si *f* es integrable sobre [*a, b*] y $f = g'$ para alguna función *g*, entonces

$$\int_{a}^{b} f = g(b) - g(a).$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera de [*a, b*]. Según el teorema del valor medio [para integrales] existe un punto x_i en $[t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Si

$$m_i = inf\,\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$

$$M_i = sup\,\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$

Entonces evidentemente

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}),$$

Es decir,

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}),$$

Sumando estas ecuaciones para $i = 1, \dots, n$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

De manera que

$$L(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f, P)$$

Para toda partición P. Pero esto significa que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f. \text{(pp. 405-406)}$$

Figura 2

Teorema 13-7, utilizado en la demostración del TFC.

TEOREMA 7

Supóngase f integrable sobre $[a, b]$ y que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \text{ de } [a, b]$$

Entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a).$$

Fuente: Spivak (1996, p. 372)

De esta manera, los fundamentos matemáticos pretenden mostrar el desarrollo conceptual matemático que se espera atender en la propuesta de enseñanza que se va a diseñar, por lo cual la importancia de incluirlos en este apartado; cabe señalar que, si bien no se mencionan explícitamente aspectos epistemológicos del TFC, en las definiciones y demostración podemos ver implícitos algunos como el de diferencia, aproximación, acumulación, variación y conexión inversa entre derivada e integral.

II.2. Fundamentos del conocimiento especializado del profesor (MTSK)

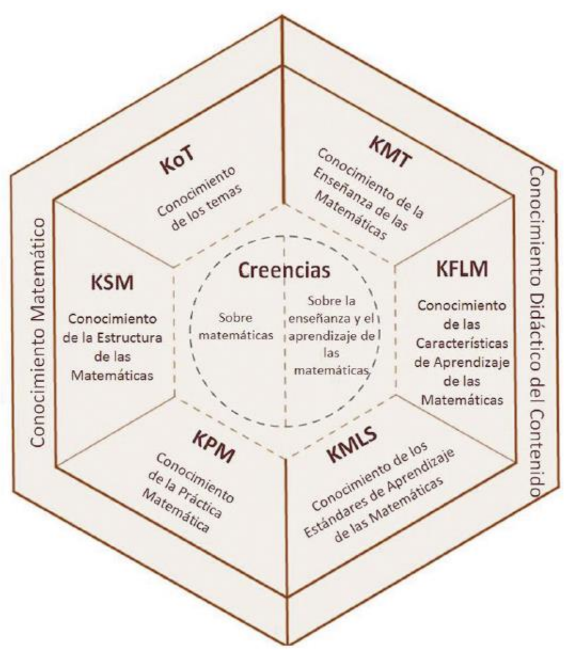
Otro de los fundamentos teóricos que se utiliza en esta investigación es el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) respecto a un tópico matemático, con la intención de que el docente se encuentre mejor preparado para abordar las dificultades que puedan surgir durante la enseñanza.

II.2.1. ***Modelo MSTK***

El modelo MTSK, (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, por sus siglas en inglés), constituye tanto una propuesta teórica como una herramienta metodológica. Para considerar la especialización del conocimiento considera 3 dominios principales. El primer dominio es el de *Conocimiento Matemático* (MK), en él se encuentran los subdominios de *Conocimiento de los Temas* (KoT), *Conocimiento de la Estructura Matemática* (KSM) y *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM). El segundo dominio es el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK), que se divide en los subdominios de *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM), *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT) y el *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las matemáticas* (KMLS). El tercer dominio abarca las creencias del profesor, tanto sobre del contenido matemático como sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la Figura 3 se visualiza la estructura y organización de los dominios y subdominios del MTSK. (Carrillo et al. 2018).

Figura 3

Dominios y subdominios del MTSK



Fuente: Sosa y Flores-Medrano (2015)

Considerando que el problema y objetivo de la investigación están enfocados en generar una propuesta de enseñanza, se pondrá un mayor énfasis en el subdominio del KMT (*Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas*), el cual se ubica en el PCK. Sin embargo, no pueden dejarse de lado los demás, ya que, por ejemplo, para la enseñanza se requiere un contenido matemático que enseñar (MK y sus subdominios). Asimismo, debemos considerar las características del aprendizaje (KFLM) y el conocimiento de los estándares que nos indican el nivel de profundidad en el cual el tema debe ser enseñado (KMLS). Por lo tanto, se tiene considerado contemplar el modelo MTSK en su mayor totalidad posible.

Además de los subdominios, se proponen categorías para algunos de ellos, son esas categorías las que en esta investigación, serán útiles como referencia para generar indicadores del conocimiento especializado del TFC. A continuación, se detallan con mayor profundidad algunos dominios, subdominios y categorías, de acuerdo con Carrillo et al. (2018).

El modelo MTSK tiene sus cimientos en el paradigma teórico del *Pensamiento del Profesor*, mismo que busca "conocer cuáles son los procesos de razonamiento que ocurren en la mente del docente durante su actividad profesional" (Climent et al., 2014). Este paradigma se enfoca en las creencias y conocimientos de los profesores con el fin de comprender los precedentes de los procesos mentales del docente antes, durante y después de su acción en el aula.

II.2.1.1. Dominio conocimiento matemático (MK).

Las matemáticas son entendidas como una red de conocimiento sistémico que siguen sus propias reglas; así pues, es imperante que el profesor conozca esa red relacionada con la creación del conocimiento matemático, pues eso permite que enseñe el contenido de manera conectada y valide su conocimiento y el de sus alumnos. (Carrillo et al., 2018).

El dominio del conocimiento matemático se divide en tres subdominios, mismos que se mencionan a continuación:

II.2.1.1.1. *Conocimiento de los temas (KoT).*

En este subdominio, se describe "el qué y de qué manera el profesor de matemáticas conoce los temas que enseña" (Carrillo et al., 2018, p. 7), se considera a los temas como áreas del conocimiento que conforman los programas de estudio de matemáticas, los cuales pueden variar en cada país e implica que el profesor tenga un conocimiento profundo de ellos. Para caracterizar el contenido de los temas (KOT), se proponen cinco categorías:

1. **Fenomenología y aplicaciones**. Considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de las aplicaciones del contenido, así como el conocimiento de fenómenos del contenido que genere conocimientos, como la creación del concepto, sus significados asociados y contextos.
2. **Propiedades y fundamentos.** Conocimiento de las propiedades pertenecientes a un tema o sus principios subyacentes.

3. **Registros de representación.** El conocimiento del profesor acerca de las distintas formas en que puede representar el tema trabajado, implica también la notación y vocabulario adecuado asociado a dichas representaciones.
4. **Definiciones.** Conocimiento que se tiene de las propiedades que hacen definible a un objeto determinado.
5. **Procedimientos.** Conocimiento de cómo hacer algo (algoritmos), cuándo hacerlo (las condiciones suficientes y necesarias para proceder), por qué hacerlo (fundamentar los algoritmos) y las características que tendría el objeto resultante.

Puede apreciarse que en el KoT se manejan las relaciones intraconceptuales del objeto matemático, ya que considera sus propiedades y fundamentos, así como las relaciones extramatemáticas en lo referente a metodología.

II.2.1.1.2. ***Conocimiento de la estructura matemática (KSM).***

Este subdominio consiste en las conexiones entre temas matemáticos (conexiones interconceptuales), es decir, las relaciones que logra el profesor entre diferentes temas o contenidos matemáticos, al impartir la clase. Se proponen cuatro categorías para el subdominio *KSM* (Carrillo et al., 2018):

1. **Conexiones basadas en complejización.** Conocimiento de la relación que guardan los contenidos que se enseñan con los contenidos que serán aprendidos posteriormente.
2. **Conexiones basadas en simplificación.** Se refieren al conocimiento de la relación que tienen los contenidos enseñados con los contenidos anteriores.
3. **Conexiones transversales.** Conocimiento de la cualidad común en que los contenidos se relacionan, y las formas de pensamiento asociados a dichos temas que contemplan esta característica común.
4. **Conexiones auxiliares.** Conocimiento de las conexiones que subyacen la necesidad de hacer partícipe a un elemento determinado en procesos más extensos.

II.2.1.1.2. ***Conocimiento de la práctica matemática (KPM).***

En este subdominio, se toma en cuenta a la práctica matemática como cualquier actividad matemática que representa un conocimiento sintáctico, es decir: se ajusta a una base lógica para extraer reglas, se realiza de forma sistemática y simboliza un cimiento en las creaciones matemáticas. Por ejemplo, el saber hacer deducciones o inducciones, saber demostrar, saber emplear ejemplos o contraejemplos, saber justificar. También representa los medios de producción y funcionamiento matemático. Carrillo et al. (2018) mencionan que las categorías de este subdominio se encuentran en estudio, aún sin definir. Sin embargo, para efectos de este trabajo, se toman como referentes las categorías que previamente habían descrito Flores-Medrano et al. (2014) para este subdominio:

1. **Prácticas ligadas a la matemática en general.** Incluye el conocimiento de cómo desarrollar matemáticas, independientemente del tema o concepto.
2. **Prácticas ligadas a una temática en matemáticas.** Refiere el conocimiento de hacer una práctica específica que sea útil en el desarrollo de un concepto determinado, como el uso de la inducción al trabajar con alguna propiedad de conjuntos numerables infinitos.

II.2.1.2. Dominio conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Se considera un conocimiento particular de la labor de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo que está implícito en el quehacer del profesor como parte de su práctica, se reconoce la importancia de que el profesor posea conocimientos acerca del contenido matemático (MK), pues su unión y operatividad conjunta ayuda al docente a orientar sus acciones. En el MTSK, el conocimiento didáctico del contenido no se enfoca en el contenido didáctico general, sino al de las matemáticas. A continuación, se detallan los subdominios que lo componen. (Carrillo et al., 2018)

II.2.1.1.2.1. *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM).*

Constituye los conocimientos sobre las características de aprendizaje propio del contenido matemático, no centra su foco en el alumno, sino en las características del aprendizaje. Propone una necesidad de que el docente tome conciencia de la manera en que los estudiantes piensan y construyen el conocimiento ante las actividades que se le asignan. Dentro de este subdominio se consideran cuatro categorías (Carrillo et al., 2018):

1. **Teorías del aprendizaje matemático.** Esta categoría incluye el conocimiento de estructuras y teorías relacionadas con el desarrollo cognitivo del alumno, tanto las personales como las institucionalizadas.
2. **Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.** Conocimiento sobre los errores, obstáculos, dificultades y fortalezas asociados a la matemática en general y a temas concretos.
3. **Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático.** Incluye el conocimiento que tiene el profesor sobre los procedimientos y estrategias de los alumnos y los términos que utilizan para interactuar. Así como el saber cómo resuelven los estudiantes en matemáticas.
4. **Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas.** Considera el conocimiento de los intereses, expectativas y motivaciones de los estudiantes.

II.2.1.2.2. *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).*

Es pertinente, en todos los sentidos, considerar el conocimiento que tiene el profesor sobre la habilidad de comprensión, construcción y uso de las matemáticas, basado en las fuentes curriculares. En este subdominio se consideran tres categorías de conocimiento (Carrillo et al., 2018):

1. **Resultados de aprendizaje esperados.** Conocimiento que el profesor tiene sobre qué contenidos matemáticos requiere enseñar en un determinado nivel educativo.
2. **Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental.** Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental que se espera que el alumno adquiera en cierto momento escolar.
3. **Secuenciación de temas.** Conocimiento de la ubicación de los temas en el currículo, tanto de manera retrospectiva, como prospectiva.

II.2.1.2.3. ***Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT).***

Este subdominio incluye el conocimiento en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. En este subdominio se consideran tres categorías (Carrillo et al., 2018):

1. **Teorías de la enseñanza de las matemáticas.** Considera el conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas, tanto personales como formales, del profesor.
2. **Recursos didácticos (físicos y digitales).** Considera el conocimiento de materiales didácticos y recursos físicos o digitales, no sólo conocer el recurso, sino ser capaz de valorarlo críticamente, es decir, sus potencialidades y limitaciones.
3. **Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.** Se consideran conocimiento de distintas formas de presentar el contenido.

Este último subdominio, el KMT, se considera elemental para generar la propuesta de enseñanza, pero como se mencionó anteriormente, se requiere de los demás subdominios para que tenga sentido. En la Tabla 1 se presentan, de manera agrupada y resumida, las categorías del modelo MTSK, de acuerdo con Carrillo et al., (2018), añadiendo las categorías del KPM definidas en Flores-Medrano (2014).

Tabla 1

Algunos dominios, subdominios y categorías del MTSK

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos
		Definiciones
		Propiedades y fundamentos
		Registros de representación
		Fenomenología y aplicaciones
		Conexiones basadas en simplificación

	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	Conexiones basadas en complejización
		Conexiones auxiliares
		Conexiones transversales
	Conocimiento de las prácticas en matemáticas (KPM)	Prácticas ligadas a la matemática en general
		Prácticas ligadas a una temática en matemáticas
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)	Teorías del aprendizaje matemático
		Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas
		Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático
		Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)	Resultados de aprendizaje esperados
		Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental
		Secuenciación de temas
	Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)	Teorías de la enseñanza de las matemáticas
		Recursos didácticos (físicos y digitales)
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

Nota. La tabla es una adaptación del contenido expuesto por Carrillo et al. (2018) y Flores-Medrano et al. (2014) para las categorías del KPM. Las siglas que aparecen en ella corresponden a la traducción en inglés.

Por otro lado, la enseñanza que se pretende alcanzar es una que esté sustentada en elementos que generen comprensión robusta. Así que se torna necesario complementar con una teoría que nos brinda elementos para lograrlo, la cual se describe a continuación.

II.3. Fundamentos sobre enseñanza para la comprensión robusta

Para completar los fundamentos teóricos, se contempla un marco que precise elementos necesarios para una enseñanza basada en la comprensión robusta, que complemente al KMT y a los demás subdominios del MTSK. Es decir, el MTSK brindará los elementos teóricos para entender qué conocimientos posee el profesor en la enseñanza del TFC, pero hace falta organizar esos conocimientos para la instrucción.

Tratando de resolver esa limitante, pareciera que el TRU (Enseñanza para una Comprensión Robusta, por sus siglas en inglés) (Schoenfeld, 2016) juega un papel metodológico. Sin embargo, teóricamente, también representa un rol importante para la investigación, ya que se toma como base para definir a la comprensión robusta a partir de la conjunción de las cinco dimensiones que han considerado los autores; por lo tanto, para efectos del presente capítulo, se consideran todas las dimensiones del marco referencial, el cual se presenta en seguida.

II.3.1. *Teaching for Robust Undestanding Framework (TRU)*

El TRU es un marco de referencia trabajado por Schoenfeld et al., (2016), en el que, a través de cinco dimensiones (contenido matemático, demanda cognitiva, acceso equitativo a las matemáticas, agencia, propiedad e identidad y evaluación formativa) trata de dar respuesta a la pregunta: "¿Cuáles son los atributos de los entornos de aprendizaje equitativos y sólidos, en los que todos los estudiantes reciben apoyo para convertirse en pensadores disciplinarios informados, flexibles e ingeniosos?" (p. 3).

La búsqueda a la respuesta de esta pregunta llevo a los investigadores a realizar una revisión exhaustiva de literatura sobre los factores que afectan los resultados de los estudiantes, sobre la enseñanza y el aprendizaje y sobre las *cosas buenas* que deberían suceder en las aulas. Es así como se obtuvieron cinco categorías, reconocidas como dimensiones de las aulas sólidas en matemáticas; dichas dimensiones cumplen con propiedades como:

- Ser completas, cada dimensión puede ser un foco de un desarrollo profesional coherente, por medio de las mejoras sistémicas que propongan los departamentos, distritos y escuelas.
- En conjunto, brindan un marco para mejorar la instrucción, pero no pretenden ser una serie de *recetas* sobre qué es lo que deben hacer los maestros, sino brindar una guía de los elementos que pueden llegar a generar comprensión.

En la Tabla 2 se precisan con mayor detalle cada una de las dimensiones que proponen los autores.

TRU considera relevante el enfoque en la manera en que los estudiantes experimentan las matemáticas. Para eso, se han preguntado: ¿Cómo se siente la clase de matemáticas desde el punto de vista de los estudiantes? Y han derivado una serie de cuestionamientos que den cuenta de la respuesta, como se muestra en la Tabla 3 (Schoenfeld et al., 2016).

El contenido de las tablas 2 y 3 se pretende tomar como base en la investigación para proponer indicadores de una enseñanza para la comprensión del TFC. Es así como se considera que el TRU ofrece herramientas teóricas indispensables para efectos de la presente investigación, otorgando elementos en cada una de las dimensiones para considerar a la *comprensión robusta* dentro de la enseñanza. Si bien no define el término de manera explícita, se considera que la instrucción estará encaminada hacia dicha comprensión, a través de la integración de los aspectos que refieren cada una de las dimensiones.

Tabla 2

Las cinco dimensiones de las aulas sólidas de matemáticas.

El contenido matemático	La demanda cognitiva	El acceso equitativo a las matemáticas	Agencia, propiedad e identidad	Evaluación formativa
Hasta qué punto las estructuras de las actividades en el aula brindan oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores matemáticos informados, flexibles e ingeniosos. Las discusiones son enfocadas y coherentes, brindando oportunidades para aprender ideas, técnicas y perspectivas matemáticas, hacer conexiones y desarrollar hábitos matemáticos productivos.	El grado en que los estudiantes tienen oportunidades para lidiar y entender ideas matemáticas importantes y su uso. Los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía de maneras que brindan espacio y apoyo para el crecimiento, con una dificultad de la tarea que va de moderada a exigente. El nivel de desafío debe ser propicio para lo que se ha denominado "lucha productiva".	El grado en que las estructuras de actividades en el aula invitan y apoyan la participación activa de todos los estudiantes en el aula con el contenido matemático básico que está siendo abordado en la clase. Las aulas en las que un pequeño número de estudiantes obtienen la mayor parte del "tiempo de emisión" no son equitativas, no importa qué tan bueno sea el contenido, todos los estudiantes deben participar de manera significativa.	El grado en que los estudiantes tienen oportunidades para "caminar y hablar" -para contribuir en las conversaciones sobre ideas matemáticas, para construir sobre las ideas de otros y hacer que otros construyan sobre las suyas de manera que contribuyan a su desarrollo de agencia (voluntad de participar), su propiedad sobre el contenido y el desarrollo de identidades positivas como pensadores y aprendices.	El grado en que las actividades del aula suscitan el pensamiento de los estudiantes y las interacciones posteriores responden a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos y abordando malentendidos emergentes. La instrucción poderosa llega hasta donde están los estudiantes y les brinda oportunidades para profundizar sus conocimientos.

Fuente: traducción propia del contenido de Schoenfeld et al. (2016, p. 3)

Tabla 3

Observación de la lección desde el punto de vista del estudiante

El contenido matemático	¿Cuál es la idea principal en esta lección? ¿Cómo se conecta con lo que ya conozco?
La demanda cognitiva	¿Cuánto tiempo tengo para pensar y dar sentido a las cosas? ¿Qué pasa cuando me quedo atascado? ¿Me invitan a explicar las cosas o simplemente a dar respuestas?
El acceso equitativo a las matemáticas	¿Puedo participar en un aprendizaje matemático significativo? ¿Puedo esconderme o ser ignorado?
Agencia, propiedad e identidad	¿Puedo explicar o presentar mis dudas? ¿Está construida (la instrucción) sobre ellas? ¿Se me reconoce como un ser capaz y hábil de contribuir de manera significativa?
Evaluación formativa	¿Las discusiones en el aula incluyen mi pensamiento? ¿Responde la instrucción a mi pensamiento y me ayuda a pensar más profundamente?

Fuente: traducción propia del contenido de Schoenfeld et al. (2016, p. 19)

Reflexión del capítulo.

Realizando una síntesis de lo que se ha presentado a lo largo del capítulo, se concluye que, de acuerdo con las necesidades del problema se tomará sólo lo preciso de cada fundamento teórico.

En cuanto a los fundamentos matemáticos, se quiere mostrar lo mínimo básico que debe enseñarse sobre el tópico matemático TFC en la propuesta; su papel es, entonces, mostrar la proposición del teorema y algunas demostraciones, que es parte del contenido matemático de la propuesta. Se analizan demostraciones de dos autores distintos debido a la complejidad que maneja cada uno y la intención es que la investigadora las conozca y pueda decidir cuál podría ser más apropiada para los estudiantes que participarán en el estudio.

Los fundamentos matemáticos se toman porque pretenden mostrar el desarrollo conceptual que se busca lograr en la propuesta de enseñanza: definición de derivada, definición de integral, relación de la derivada y la integral por medio de la proposición del TFC y sus demostraciones. En estos conceptos se encuentran implicados aspectos epistemológicos de diferencia, acumulación, variación y conexión inversa.

Por otra parte, del MTSK (Carrillo et al., 2018), se pretende tomar las categorías que los autores ya han definido en algunos de los subdominios para, a partir de estas, crear indicadores tentativos sobre el conocimiento que el profesor podría poner en práctica durante la planeación y ejecución de la instrucción del TFC. Por tratarse de una propuesta de enseñanza, se considera enfatizar en el KMT, sin embargo, no se descarta dejar de lado los demás subdominios, puesto que, de manera directa o indirecta, intervienen en la propuesta.

La creación de indicadores que se propongan en cada categoría se considera porque se intenta convertir en una base teórica en el diseño de una propuesta de enseñanza sustentada en el conocimiento especializado del profesor sobre el TFC, procurando darles vida a través de actividades y estrategias didácticas que los integren de manera ordenada y conveniente, de acuerdo con el propósito.

Por último, en cuanto al TRU (Schoenfeld et al., 2016), se piensa utilizar en la creación de indicadores con base en las cinco dimensiones que den cuenta de elementos necesarios y suficientes para la creación de una propuesta de enseñanza basada en la comprensión robusta. Por lo tanto, en la parte teórica, el TRU es útil porque permite definir, a través de las dimensiones, las aulas sólidas de matemáticas con las que se logra la comprensión robusta, y, en la parte metodológica, porque se pueden utilizar algunas de las herramientas establecidas en el modelo, como las rúbricas de evaluación, en el diseño de los instrumentos de recogida de datos y la organización de los conocimientos del profesor.

Así pues, puede verse la articulación de los tres fundamentos teóricos en la problemática de investigación y que, por otra parte, también algunos de ellos serán de utilidad en la metodología, misma que se detalla en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

En este capítulo, se mencionan los fundamentos metodológicos que se consideran para desarrollar la investigación, como son el paradigma, tipo y alcance de la misma; también se describe el camino a seguir para llegar al objetivo, el método y las técnicas, en estas últimas haciendo referencia a los instrumentos de recogida de información e instrumentos de análisis.

III.1. Fundamentos metodológicos

III.1.1. *Paradigma, tipo y alcance de la investigación*

En la investigación se busca comprender e interpretar las categorías del MTSK y las dimensiones del TRU para concentrar y sistematizar indicadores que, posteriormente, sean convertidos en actividades y estrategias didácticas; además, se procede al diseño de una propuesta de enseñanza del TFC basada en dichos indicadores, tanto del conocimiento especializado del profesor, como de elementos de la enseñanza para una comprensión robusta, en un contexto natural: el aula de clases. No se busca explicar, controlar o predecir (paradigma positivista) ni emancipar y criticar (paradigma sociocrítico), sino dar significados a través de la subjetividad, así que se inscribe a la investigación en el paradigma interpretativo, de acuerdo con Latorre et al. (2003).

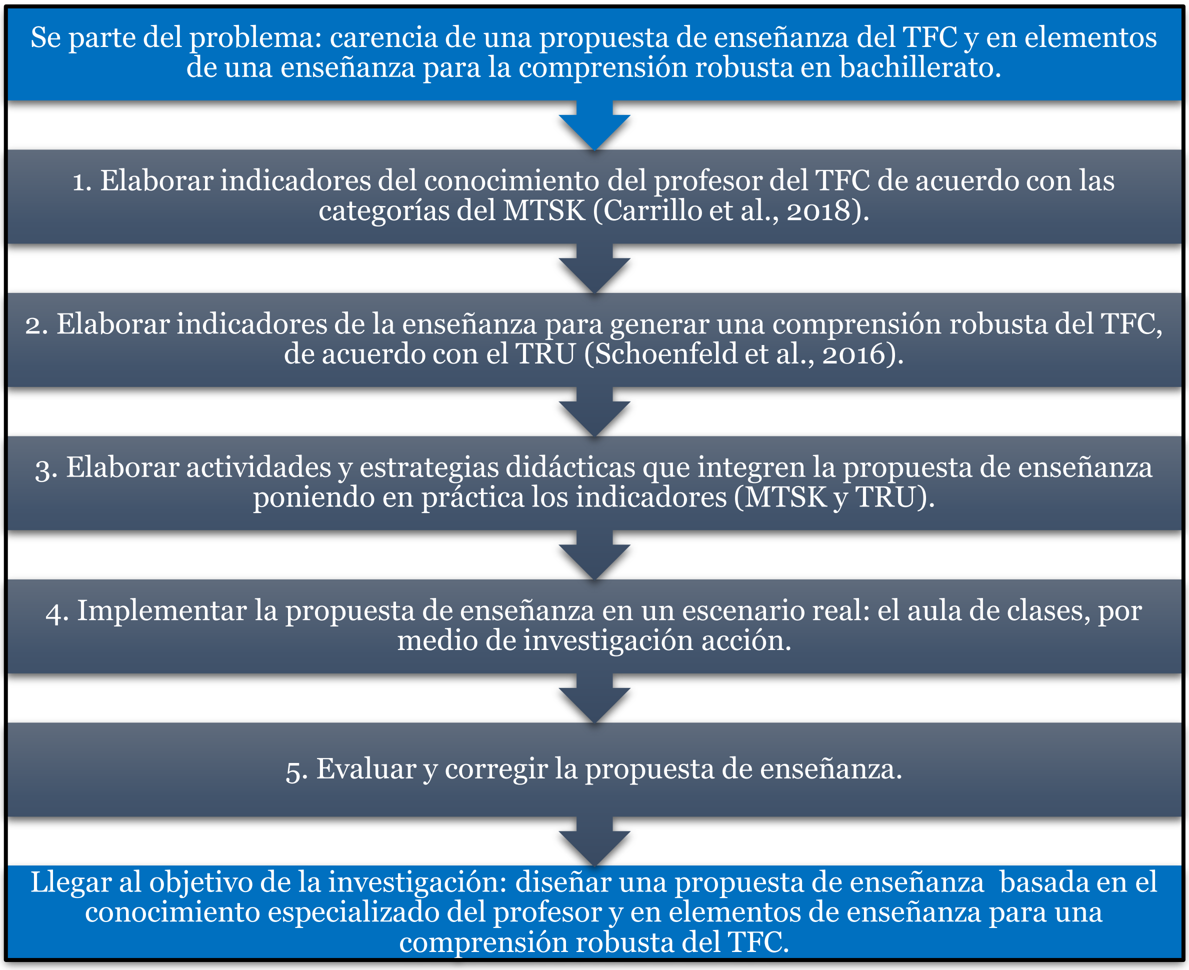
Por otro lado, se considera una investigación de corte cualitativa debido a que se propone una secuencia de acciones para desarrollarla, ver Figura 4; sin embargo, ésta no necesariamente sigue un orden lineal, ya que continuamente se estarán recopilando datos al mismo tiempo que se analizan. Además, la propuesta de enseñanza se pretende implementar en un escenario real como lo es el aula de clases, compilando los datos e información de manera directa, en la manera tal cual ocurren (Hernández et al., 2014).

A pesar de buscar escenarios reales, se es consciente de que el hecho de saber que la práctica será analizada, puede alterar las actitudes y comportamiento de la participante, pero se tratará de evitar, en la medida de lo posible.

Para definir el alcance de la investigación, se toma en cuenta que no se han encontrado investigaciones previas que relacionen los modelos teóricos empleados para el diseño de alguna propuesta de enseñanza, es por eso que se torna pertinente un alcance exploratorio, ya que se propone una secuencia de pasos para llegar al objetivo desde nuevas perspectivas (Hernández et al., 2014).

Figura 4

Secuencia de acciones propuestas para desarrollar la investigación



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la secuencia de acciones propuesta, se pretende identificar y sistematizar indicadores del conocimiento especializado del profesor y en elementos de enseñanza para la comprensión robusta del TFC en bachillerato, con los primeros tres pasos. Es decir, proponiendo indicadores de conocimiento a través de las categorías del MTSK e indicadores de enseñanza para la comprensión robusta a través de las categorías del TRU, para luego integrarlos en el diseño de una propuesta de enseñanza que los contenga. Estos instrumentos son diseñados por las investigadoras y aprobados por los revisores, para integrar perspectivas externas.

Luego, se busca identificar cuáles de esos indicadores no están presentes en las aulas del bachillerato cuando se imparte el TFC, se implementa la propuesta de enseñanza por la profesora investigadora, observando y participando al mismo tiempo y realizando grabaciones de la clase para retomar aspectos que salen de los sentidos, de manera posterior a la ejecución. A la vez que llevará un diario de investigación para plasmar las situaciones, puntos de vista, emociones y resultado de cada sesión, inmediatamente después de la misma.

Por último, se proponen estrategias y actividades que integren los indicadores ausentes en la enseñanza del TFC y conjuntándolos con los que están presentes, para generar una propuesta integrada. Para lograrlo se compara la propuesta planificada con los resultados obtenidos, analizando los indicadores que estuvieron presentes y cuáles no. También se aplica a los alumnos un cuestionario para analizar la sesión desde su punto de vista, sobre las dimensiones del TRU que detectaron y los conocimientos del profesor que lograron percibir.

Tanto las producciones de los estudiantes como el cuestionario que responderán serán útiles a la investigación para triangular, junto con los demás instrumentos, los datos recogidos y, posteriormente, mediante un análisis y reflexión, poder valorar la primera propuesta, de manera que se logre complementar los concentrados de indicadores iniciales a partir de la práctica y corregir el diseño de la clase con base en los resultados obtenidos, logrando llegar al rediseño de la propuesta de enseñanza.

III.2. Método

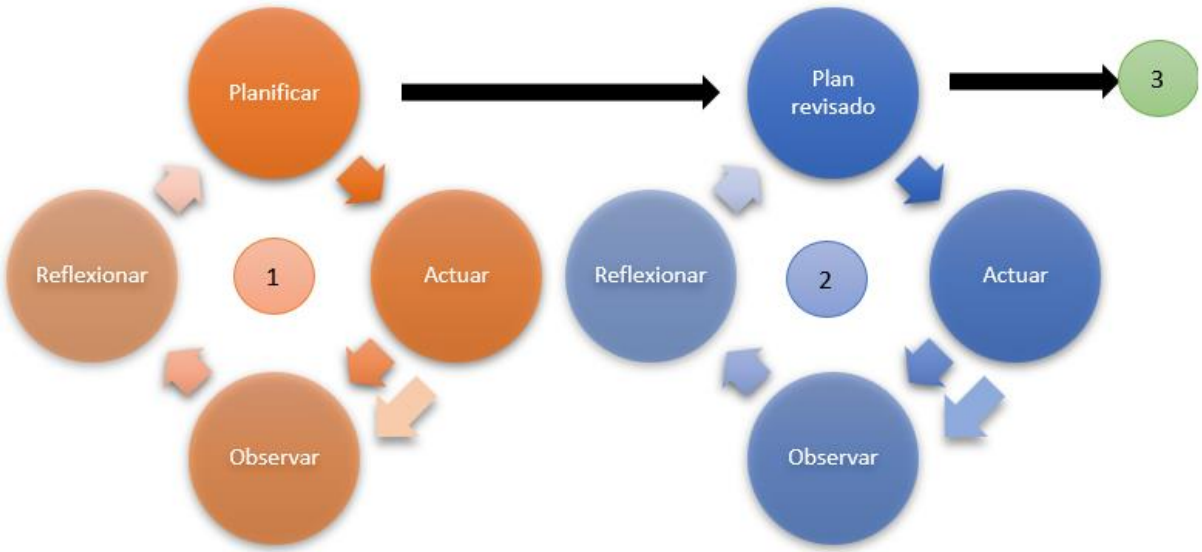
El método empleado en este trabajo es la investigación-acción, la cual es definida por Elliot (1993, citado en Latorre, 2005) como "un estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de la acción dentro de la misma"(p.7). Por medio de ella se busca hacer un vínculo entre la enseñanza y la investigación, dejando de lado el punto de vista de que son dos actividades separadas. Se procura partir de la investigación en los centros educativos para mejorar la enseñanza en ellos mismos. Además, "[la investigación-acción] considera la enseñanza como investigación y a la persona docente como investigadora de su práctica profesional, en el marco de las bases teórico-metodológicas de la docencia, con el fin de conseguir mejorar la calidad de la educación" (Latorre, 2005, p. 7). Es por eso por lo que se considera pertinente su empleo en el presente estudio.

Con este método, se buscará combinar la investigación educativa, en su forma racional y metódica, con la enseñanza, considerada como un fenómeno que puede ser observado en su forma natural para después ser descrita, analizada y autorreflexionada, tratando de hacer una mejora en la práctica. Entonces, se pueden agrupar los pasos que se pretenden seguir para desarrollar el estudio, con las fases del ciclo de la investigación acción (ver Figura 5): planificar, actuar, observar y reflexionar, para después repetir el ciclo.

Así pues, la fase de planificar se atiende elaborando los concentrados de indicadores, el primero con base en las categorías del MTSK y el segundo basado en las dimensiones del TRU, y diseñar la propuesta de enseñanza integrando ambos. Esta propuesta representa el plan inicial, de manera que es flexible, para subsanar los imprevistos que puedan surgir.

Figura 5

Espiral de ciclos de la investigación-acción



Fuente: Adaptación de Latorre (2005, p. 32)

.

Después, en la fase de acción, se pasará a implementar la propuesta de enseñanza en un grupo de alumnos de bachillerato que se encuentren cursando la materia de Cálculo Integral, con la intención de que ésta se desarrolle en un ambiente natural y cotidiano para los estudiantes.

La fase de observación se llevará a cabo a la par de la fase de acción, ya que la docente vigilará el trabajo que está ejecutando en el momento, poniendo atención a las reacciones de los estudiantes y lo que sucede en el aula. A la vez que registra los acontecimientos haciendo una narración de lo sucedido. Por ejemplo, qué de lo planeado se puso en acción, qué imprevistos hubo y cómo se atendieron, cuáles actitudes de los estudiantes se identificaron y qué dificultades se presentaron. A la vez, se grabará la clase en video y/o audio para poder analizarla y evaluarla posteriormente.

Por último, en la fase de reflexión, se hará un análisis de la ejecución de la propuesta basada en la observación y en las videograbaciones de clase, así como en las producciones de los estudiantes, con el fin de realizar un rediseño de la propuesta donde se tomen en cuenta las mejoras en cuánto a las carencias y dificultades. Esto con la intención de iniciar nuevamente el ciclo.

Por cuestiones de tiempo, se contempla la realización de al menos un ciclo de investigación-acción durante el desarrollo de la tesis, sin embargo, se pretende seguir trabajando para hacer otros ciclos, de acuerdo con los tiempos en que se cursa la materia en el nivel bachillerato.

III.3. Técnica

III.3.1. *Instrumentos de recogida de información*

Como se ha mencionado con anterioridad, la recogida de información en el desarrollo del estudio se llevará a cabo en el aula de clases, lugar que representa un ambiente natural para los estudiantes. La investigadora ejercerá el papel de docente participando activamente en la implementación de la propuesta y teniendo contacto directo con el ambiente y los alumnos, procurando que la información se desarrolle con las menores alteraciones posibles, aunque se es consciente de que puede haber emociones y reacciones por parte de los participantes que surjan de manera natural y alteren sus acciones. (Hernández, et al., 2014).

Lo que se espera de la recogida de información es poder identificar los conocimientos y los elementos de la enseñanza para la comprensión robusta que estuvieron presentes en la instrucción del TFC durante la ejecución de la propuesta, es por eso por lo que se piensa en instrumentos de recogida de datos desde 4 fuentes distintas, de acuerdo con lo que considera Latorre (2005), ver Tabla 4.

Tabla 4

Tipo y técnicas de recogida de información

Información (De quién o de qué)	Técnicas (Cómo)
Diversas perspectivas Revisores externos Alumnos	Concentrado de indicadores MTSK y TRU y diseño de la propuesta de enseñanza Cuestionario
Puntos de vista investigador participante (introspección)	Diario de investigación
Perspectiva del investigador (Acciones, actividades y ambiente durante la implementación)	Observación participante Videograbación o grabación de audio
De documentos y materiales	Producciones de los estudiantes

Fuente: adaptación del contenido de Latorre (2005)

Se espera que con los instrumentos mencionados se obtenga la información suficiente y necesaria para interpretar y descubrir los conocimientos y elementos de la enseñanza para comprensión robusta que se pongan en acción.

El concentrado de indicadores del MTSK se realizan con base en una revisión documental que pueda responder al conocimiento especializado del TFC de acuerdo con cada una de las categorías. Por otro lado, para los indicadores del TRU, se toman como referencia las guías de evaluación que proporciona el marco teórico, mismas que dan cuenta de cómo organizar la enseñanza en cada dimensión (contenido; demanda cognitiva; acceso equitativo al contenido; agencia, propiedad e identidad y evaluación formativa) desde distintas situaciones del aula: inicio, exposición del profesor y debate; trabajo individual de los estudiantes, trabajo en grupos pequeños de los estudiantes y presentaciones de los estudiantes, ver Tablas 5-8.

Con base en los concentrados de indicadores, se procede a realizar la propuesta integrando los indicadores con las actividades y acciones del aula, hasta llegar a integrarlos todos. Tanto los concentrados de indicadores como la propuesta son examinados por revisores externos que puedan evaluarla desde su experiencia y conocimientos, y aporten sus puntos de vista sobre ella.

Después de la implementación se aplicará un cuestionario a los alumnos, el cual se integra en dos apartados a evaluar: la enseñanza del tema desde su punto de vista (con base en las dimensiones del TRU) y el conocimiento de la profesora (con base en los indicadores del MTSK, enfocándose en los subdominios KoT y KMT). Esto para conocer las opiniones de los estudiantes respecto a la clase, se busca que las respuestas sean lo más objetivas posible, procurando que se conteste de forma anónima.

De esta manera, los concentrados de indicadores, el diseño de la propuesta de enseñanza y el cuestionario conformarán instrumentos de recogida de datos desde fuentes externas a la investigación.

Por otro lado, la profesora-investigadora, llevó un diario de investigación dónde se describe en cada fase (planificación, acción, observación y reflexión) las situaciones que se presentan, los elementos que se tomaron en cuenta, imprevistos y todo lo que resultó útil a la investigación, de manera que realice una introspección desde su punto de vista.

Otros instrumentos desde la perspectiva de la investigadora son la observación participante y videograbaciones o grabaciones de audio de la clase, esto para retomar experiencias inmediatamente después de la implementación de la propuesta, así como en cualquier otro momento que sea necesario, a través de las grabaciones.

Por último, se consideran también las producciones de los estudiantes durante la ejecución de la propuesta de enseñanza, mismas que constituyen una fuente documental que brinda de elementos importantes durante la recogida de información. Una vez que se cuente con la información, se procederá a su análisis.

Tabla 5

Rúbrica de calificación de todas las actividades de la clase: inicio, exposición del maestro y debate

Rúbrica de todas las actividades de la clase: inicio, exposición del maestro y debate				
El contenido matemático	**La demanda cognitiva**	**El acceso equitativo a las matemáticas**	**Agencia, propiedad e identidad**	**Evaluación formativa**
¿Cuán preciso, coherente y bien justificado es el contenido matemático?	*¿Hasta qué punto se ayuda a los estudiantes a lidiar con los conceptos matemáticos y darles sentido?*	*¿En qué medida apoya el profesor el acceso al contenido de la lección para todos los estudiantes?*	*¿En qué medida los estudiantes son fuente de ideas y discusión sobre ellas? ¿Cómo se enmarcan las contribuciones de los estudiantes?*	*¿En qué medida surge el pensamiento matemático de los estudiantes, en qué medida la instrucción se basa en sus ideas cuando son potencialmente valiosas o se abordan los malentendidos cuando surgen?*
Las actividades del aula están desenfocadas o no están orientadas a las habilidades y carecen de oportunidades para participar con el contenido clave del grado que se está cursando (como se especifica en los Estándares Básicos Comunes).	Las actividades en el aula están estructuradas para que los estudiantes apliquen principalmente procedimientos memorizados y/o ejercicios de rutina de trabajo.	Existe un acceso o participación diferencial en el contenido matemático y no hay esfuerzos aparentes para abordar este problema.	El maestro inicia las conversaciones, los turnos de habla de los estudiantes son cortos (una oración o menos) y están limitados por lo que dice o hace el maestro.	El razonamiento del estudiante no se saca a la luz ni se persigue de forma activa las acciones de los maestros se limitan a comentarios correctivos o de aliento.
Las actividades están al nivel del	Las actividades en el aula	Existe un acceso o participación	Los estudiantes tienen la	El maestro hace referencia al

grado, pero están orientadas principalmente a las habilidades, con pocas oportunidades para hacer conexiones (p. ej., entre procedimientos y conceptos) o para la coherencia matemática.	ofrecen posibilidades de riqueza conceptual o desafío para la resolución de problemas, pero las interacciones de enseñanza tienden a "anular" los desafíos, eliminando oportunidades para la lucha productiva.	desigual, pero el profesor hace algunos esfuerzos para proporcionar acceso matemático a una amplia gama de estudiantes.	oportunidad de explicar algunos de sus pensamientos, pero el maestro es el principal impulsor de las conversaciones y el árbitro de la corrección. En las discusiones de la clase las ideas de los estudiantes no se exploran ni se les da enfoque.	pensamiento de los estudiantes, quizá incluso a errores comunes, pero las ideas específicas de los estudiantes no se abordan (cuando son potencialmente valiosas) ni se utilizan para abordar desafíos (cuando son problemáticas).
Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.	Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.	El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa; o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en tal compromiso.	Los estudiantes explican sus ideas y razonamientos. El maestro puede atribuir propiedad a las ideas de los estudiantes en la exposición y/o los estudiantes responden y construyen sobre las ideas de los demás.	El maestro solicita a los estudiantes que piensen y la instrucción subsiguiente responde a esas ideas, basándose en comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.

Fuente: traducción propia del contenido de Schoenfeld et al. (2014, p. 3)

Tabla 6

Rúbrica de calificación para el trabajo en grupos pequeños

Rúbrica para el trabajo en grupos pequeños				
El contenido matemático	**La demanda cognitiva**	**El acceso equitativo a las matemáticas**	**Agencia, propiedad e identidad**	**Evaluación formativa**
¿Cuán preciso, coherente y bien justificado es el contenido matemático?	*¿Hasta qué punto se ayuda a los estudiantes a lidiar con los conceptos matemáticos y darles sentido?*	*¿En qué medida se apoya a todos los estudiantes para que participen de manera significativa en las discusiones de grupo?*	*¿En qué medida el apoyo del maestro y/o la dinámica del grupo brindan acceso a la "voz" de los estudiantes?*	*¿Hasta qué punto el profesor supervisa y ayuda a los estudiantes a perfeccionar su pensamiento en los equipos?*
Las matemáticas discutidas no están al nivel del grado; las discusiones están enfocadas en "obtener respuestas". Las explicaciones, si aparecen, son en gran medida de procedimiento.	Las actividades o la intervención del maestro restringen a los estudiantes actividades como la aplicación de procedimientos sencillos o memorizados.	Algunos estudiantes están desconectados o marginados y no se aborda el acceso diferencial a las matemáticas o al grupo.	Las intervenciones del maestro, si las hay, limitan a los estudiantes a producir respuestas breves o no se abordan los desequilibrios claros en las discusiones grupales.	Las acciones del maestro son simplemente correctivas (por ejemplo, guiar a los estudiantes por un camino predeterminado) y el maestro no solicita ni persigue de manera significativa el pensamiento del estudiante.
Las discusiones se realizan a nivel del grado, pero están orientadas principalmente a las habilidades,	Las actividades ofrecen posibilidades de participación o de lucha productiva con las ideas	Todos los miembros del equipo parecen estar haciendo matemáticas, pero algunos no participan en actividades de	Al menos un estudiante tiene la oportunidad de hablar sobre el contenido matemático, pero el maestro es el principal	El maestro solicita el pensamiento de los estudiantes, pero en la discusión posterior no se basa en las ideas

con pocas oportunidades para hacer conexiones (por ejemplo, entre procedimientos y conceptos) o para la coherencia matemática.	matemáticas centrales, pero los estudiantes se quedan sin apoyo cuando se pierden, o las acciones del maestro eliminan los desafíos.	grupo, el maestro no apoya su participación en la discusión de estudiante a estudiante.	impulsor de las conversaciones y el árbitro de la corrección. Los estudiantes no reciben apoyo para construir sobre las ideas de los demás.	nacientes. Las acciones del maestro son de naturaleza correctiva, posiblemente guiando a los estudiantes en las direcciones "correctas".
La explicación y la justificación de las ideas matemáticas centrales son coherentes con el nivel del grado.	Se ayuda a los estudiantes a participar de manera productiva con ideas matemáticas centrales. Esto puede implicar una lucha; ciertamente implica tener tiempo para pensar las cosas.	Todos en el equipo contribuyen a las discusiones matemáticas del grupo o subgrupo, o el maestro se mueve para que todos los miembros del equipo hagan contribuciones significativas.	Al menos un estudiante expone y defiende sus ideas o razonamientos, los estudiantes se basan en las ideas de los demás, o el maestro atribuye la propiedad de las ideas de los estudiantes en la discusión posterior.	El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la discusión subsiguiente responde a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando posibles malentendidos.

Fuente: traducción propia del contenido de Schoenfeld et al. (2014, p. 4)

Tabla 7

Rúbrica de calificación para las presentaciones de los estudiantes

Rúbrica de presentaciones de los estudiantes				
El contenido matemático	**La demanda cognitiva**	**El acceso equitativo a las matemáticas**	**Agencia, propiedad e identidad**	**Evaluación formativa**
¿Cuán preciso, coherente y bien justificado es el contenido matemático?	*¿Hasta qué punto se ayuda a los estudiantes a lidiar con los conceptos matemáticos y darles sentido?*	*¿En qué medida apoya el maestro o la clase a los presentadores para que se involucren con las matemáticas?*	*¿En qué medida son los estudiantes la fuente de las ideas presentadas?*	*¿Hasta qué punto el pensamiento matemático de los estudiantes sale a la superficie y sirve como base para la conversación?*
La presentación tiene como objetivo "obtener respuestas" sin abordar el razonamiento subyacente.	La presentación y la discusión en el aula se centran en hechos y procedimientos sencillos o familiares.	(C): Los presentadores necesitan apoyo o estimulo, pero no lo reciben; o (W): Un número significativo de estudiantes parecer estar desinteresado.	El rol del presentador está estructurado por el maestro/texto y el alumno está muy limitado en respuesta a las preguntas del maestro.	El razonamiento del estudiante no sale a la superficie ni se persigue, las acciones de los maestros se limitan a comentarios correctivos o de aliento.
Las matemáticas presentadas son en gran parte procedimentales; no se espera que los presentadores expliquen sus ideas ni se apoyen al hacerlo.	La presentación ofrece posibilidades de riqueza conceptual o desafío para la resolución de problemas, pero las interacciones de enseñanza tienden a anular estas posibilidades, lo que resulta en	(C): El maestro anima a los presentadores, pero no proporciona un andamiaje eficaz o (W): La presentación se convierte en una actividad para toda la clase. Hay una participación desigual y el	Los presentadores tienen la oportunidad de demostrar competencias individuales sin estar estrictamente restringidos por el texto o el maestro, pero, las discusiones no se basan en	En la presentación y discurso el maestro se refiere al pensamiento de los estudiantes, quizá incluso a errores comunes, pero no se enfoca en las ideas específicas de los estudiantes

	un enfoque en hechos y procedimientos sencillos o familiares.	maestro no brinda apoyo estructurado para que muchos estudiantes participen de manera significativa.	las ideas de los estudiantes (se considera una idea, que lo que se menciona debe extenderse más allá de las tareas, diagramas, etc., que se les dio a los estudiantes).	(cuando son potencialmente valiosas) ni se utilizan para abordar desafíos (cuando son problemáticas).
Las matemáticas presentadas son relativamente claras y correctas e incluyen justificaciones o explicaciones o el profesor anima a los estudiantes a centrarse en las ideas matemáticas centrales y a explicarlas y justificarlas.	Las sugerencias o andamiajes del maestro apoyan a los presentadores y/o la clase es una "lucha productiva" para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.	(C): El maestro apoya a los presentadores (si es necesario) para que se involucren, o (W): La presentación se convierte en una actividad de toda la clase en la que el maestro apoya activamente una amplia participación y/o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en dicha participación.	Las presentaciones de los estudiantes dan como resultado una discusión más profunda de las matemáticas relevantes, o los estudiantes hacen una referencia significativa a las ideas de otros estudiantes o grupos en sus presentaciones.	En la presentación y la discusión, el maestro solicita el pensamiento de los estudiantes y responde a sus ideas, basándose en comienzos productivos o abordando los malentendidos emergentes.

Fuente: traducción propia del contenido de Schoenfeld et al. (2014, p. 5)

Tabla 8

Rúbrica de calificación para el trabajo individual del estudiante

Rúbrica de trabajo individual del estudiante				
El contenido matemático	**La demanda cognitiva**	**El acceso equitativo a las matemáticas**	**Agencia, propiedad e identidad**	**Evaluación formativa**
¿Cuán preciso, coherente y bien justificado es el contenido matemático?	*¿Hasta qué punto se ayuda a los estudiantes a lidiar con los conceptos matemáticos y darles sentido?*	*¿En qué medida existe un acceso equitativo a una participación significativa para todos los estudiantes?*	*¿En qué medida son los estudiantes la fuente de las ideas presentadas? ¿Los estudiantes responden a las ideas presentadas?*	*¿Hasta qué punto el maestro monitorea y ayuda a los estudiantes a refinar su pensamiento a medida que circula por la clase?*
Puede ser N/A si no hay datos suficientes, o…	Puede ser N/A si no hay datos suficientes, o…	Puede ser N/A si no hay datos suficientes, o…	Puede ser N/A si no hay datos suficientes, o…	Puede ser N/A si no hay datos suficientes, o…
Los materiales están destinados a "obtener respuestas" sin abordar el razonamiento subyacente.	Los materiales no exigen más que aplicar procedimientos familiares o hechos memorizados.	Un número significativo de estudiantes parece estar desconectado y no existen mecanismos evidentes para apoyar la participación.	El maestro muestra o les dice a los estudiantes cómo hacer las matemáticas, posiblemente corrigiendo el trabajo del estudiante. Las ideas de los estudiantes no se muestran ni se les brinda enfoque.	Las acciones del maestro se limitan a comentarios correctivos o de aliento.
Los materiales para el trabajo de los estudiantes	Los materiales ofrecen posibilidades de riqueza	Los estudiantes parecen estar trabajando, pero no existen	Las interacciones uno a uno brinda a los	Las interacciones individuales brindan

proporcionan algunas posibilidades para las matemáticas coherentes, pero el apoyo del profesor es mínimo y no las aprovecha.	conceptual o desafío para la resolución de problemas, pero las intervenciones de enseñanza tienden a "anular" los desafíos.	mecanismos claros para que los estudiantes que deseen o necesiten apoyo o atención, lo reciban.	estudiantes la oportunidad de hablar sobre sus ideas y/o brindan acceso a diversas formas de participar en las matemáticas.	oportunidades para que los estudiantes discutan su pensamiento y las respuestas de los maestros abordan ese pensamiento de manera explícita (no simplemente corrigen el trabajo del estudiante).
Las intervenciones del maestro con el trabajo individual de los estudiantes apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.	Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una "lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas".	La atención del maestro y/o sustituto está clara y ampliamente disponible para aquellos estudiantes que lo deseen, lo que resulta en acceso a las matemáticas.	Una puntuación de 3 no se codifica a menos que el estudiante tenga una amplia oportunidad y capacidad para desarrollar su idea interactuando con el profesor, o, el profesor lleva la idea del alumno a la discusión en clase inmediatamente después de que termine el trabajo individual.	El maestro solicita a los estudiantes que piensen y las discusiones subsiguientes responden a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.

Fuente: traducción propia del contenido de Schoenfeld et al. (2014, p. 6)

III.3.2. *Instrumentos de análisis*

Para el análisis de información, se tiene previsto realizar una serie de acercamientos a los datos que permitan llegar poco a poco a la saturación de los mismos. Primero, se extraerán los datos que se obtengan de manera textual. Para el caso de las transcripciones de clase se ha elegido un análisis por episodios con base en el siguiente instrumento, ver Tabla 9.

Tabla 9

Instrumento para extracción de la información de los episodios de clase

No: indica el número de episodio analizado **Episodio:** describe el objetivo que perseguía el profesor en un determinado momento de la clase.
Extracto: muestra transcripciones y/o evidencias de lo sucedido en el aula durante el episodio.
Objetivo general: identifica el objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.
Evento desencadenante: evento que funciona como causa de inicio del episodio.
Indicadores de conocimiento encontrados: identifica los indicadores de conocimiento que estuvieron presentes durante el episodio, de acuerdo con las categorías del MTSK.
Indicadores de enseñanza para la comprensión robusta encontrados: identifica los indicadores de enseñanza para la comprensión robusta que estuvieron presentes durante el episodio, de acuerdo con las dimensiones del TRU.
Elementos no clasificados: fila opcional para ubicar elementos que no han podido clasificarse dentro de las categorías del MTSK ni dentro de las dimensiones del TRU.
Evento de término: evento que funciona como causa de término del episodio.

Fuente: adaptación de instrumento de análisis de Ribeiro (2008) y Sosa (2011)

Después de extraer los datos, se realizarán triangulaciones para obtener los indicadores de conocimiento especializado del profesor, con base en las categorías del MTSK y los elementos de la enseñanza para una comprensión robusta, con base en las dimensiones del TRU, así como la detección de elementos que no corresponden al MTSK ni al TRU, para proceder a obtener los resultados del estudio.

CAPÍTULO IV. DISEÑO DE INSTRUMENTOS

Este apartado tiene la intención de describir y mostrar los instrumentos que se han diseñado para llevar a cabo el desarrollo de la investigación para la recogida de información, como son: el concentrado de indicadores del TFC con base en las categorías del MTSK, el concentrado de indicadores del TFC con base en las dimensiones del TRU, la propuesta de enseñanza basada en los dos concentrados de indicadores anteriores y el cuestionario que se aplicará a los estudiantes posterior a la aplicación. En seguida se describe el diseño de cada uno de ellos:

IV.1. Concentrado de indicadores del TFC a partir de las categorías del MTSK

En este apartado se presentan los indicadores que se han propuesto con base en las categorías del MTSK. Las primeras tres columnas se refieren al dominio, subdominio y categoría que están descritos dentro del modelo con base en las ideas de Carrillo et al., (2018); en la cuarta columna se describe el indicador que se ha propuesto para cada categoría, a partir de una revisión documental sobre el tópico matemático y, en algunos casos, basados en la utilidad que puede obtener el profesor al poseer dicho conocimiento.

Cabe señalar que este concentrado surge principalmente a partir de los conocimientos que se tienen a partir de la experiencia como profesora de matemáticas sobre el TFC, complementándose con una revisión de libros de texto y documental de acuerdo con lo que indica cada categoría. Algunos aspectos epistemológicos del TFC se muestran de forma explícita en los indicadores, sobre todo el enfatizar este tópico como una relación inversa entre derivada e integral, esto debido a que el plan de estudio que se maneja en el grupo de bachillerato donde se implementó la propuesta, se concentra en este resultado esperado. Por otra parte, aunque no se puntualizan otros aspectos epistemológicos específicos de forma manifiesta, como diferencia, acumulación y variación, estos se encuentran inmersos en algunos de los indicadores propuestos, sobre todo en aquellos referentes al subdominio KoT.

El rol de los libros de texto para la redacción de los indicadores responde al uso de los recursos disponibles o bien, a realizar una búsqueda de ellos con la intención de que el indicador satisfaga las ideas y propiedades que implica cada una de las categorías. Así, en conjunto, permiten el desglose y la especialización del conocimiento, de acuerdo con los elementos teóricos del modelo MTSK, ver Tabla 10.

Tabla 10

Concentrado de indicadores del TFC a partir de las categorías del MTSK

Dominio	Subdominio	Categoría	Indicador
MK	**KoT**	Fenomenología y aplicaciones	**KoT1.** Conocer el TFC en los trabajos de Newton a partir del teorema que relaciona el problema de las áreas y el problema inverso de las tangentes en el documento *The October 1666 Tract on Fluxions*, mostrando así, la relación inversa entre la derivada y la integral de una manera dinámica (Muñoz, 2021).
			KoT2. Conocer que una aplicación del TFC es en la determinación del área de una región plana (Purcell et al., 2007).
			KoT3. Conocer que un uso del TFC es para calcular la distancia recorrida por un objeto en un determinado tiempo conociendo su velocidad (Academia Nacional de Matemáticas (ANM), 2021)
		Propiedades y fundamentos	**KoT4.** Conocer que el Teorema del valor medio: *"Si f es continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces existe un número c en el intervalo cerrado [a, b], tal que* $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$*."* (Larson & Edward, 2014, p. 280) es necesario para demostrar el TFC.
		Registros de representación	**KoT5.** Conocer la representación algebraica del TFC.
			KoT6. Conocer la representación gráfica del TFC.
		Definiciones	**KoT7.** Conocer la proposición del TFC.
		Procedimientos	**KoT8.** Conocer un procedimiento para demostrar el TFC.
	KSM	Conexiones basadas en simplificación	**KSM1.** Conocer que existe una conexión entre el concepto de límite con la derivada e integral definida. En la integral definida como una suma cuyo límite tiende a infinito y con la derivada a través de una recta secante cuyo incremento tiende a cero para convertirse en una recta tangente (Purcell, 2007).
		Conexiones basadas en complejización	**KSM2.** Conocer que el TFC tiene conexión con el tema de variables aleatorias en probabilidad, ya que para obtener la probabilidad de que una variable aleatoria

			continua en un intervalo [a, b], se requiere calcular el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad en dicho intervalo. (Muñoz, 2021)
		Conexiones auxiliares	**KSM3.** Conocer que el TFC es un procedimiento en la resolución de ecuaciones diferenciales, ya que para encontrar la o las funciones solución de la ecuación diferencial se requiere trabajar con derivadas y antiderivadas.
		Conexiones transversales	**KSM4.** Conocer que existe una conexión transversal entre el tema de ecuación (igualdad que contiene una o más incógnitas (Real Academia Española (RAE), 2020) con el de función y TFC cuando, a partir de una ecuación dónde se conoce el valor del área bajo una curva, se pide calcular la función o funciones continuas que la satisfacen.
	KPM	Prácticas ligadas a una temática en matemática	**KPM1.** Conocer el papel del método directo de demostración para validar el TFC.
		Prácticas ligadas a la matemática en general	**KPM2.** Conocer el papel de las demostraciones matemáticas en la validación de teoremas.
PCK	KFLM	Teorías del aprendizaje matemático	**KFLM1.** Conocer que los entornos de aprendizaje que propician comprensión robusta del TFC están basados en ofrecer oportunidades a los estudiantes con base en cinco dimensiones: contenido, demanda cognitiva, acceso equitativo al contenido, agencia, propiedad e identidad y evaluación formativa (Schoenfeld et al., 2016).
		Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas	**KFLM2.** Conocer que un error común en el aprendizaje del TFC es la falta de comprensión en la noción de continuidad de una función en un intervalo dado, como condición necesaria para aplicar el primer TFC (Valenzuela & Vigo, 2018).
		Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático	**KFLM3.** Conocer que los estudiantes emplean los algoritmos del TFC en forma mecánica, sin saber lo que están haciendo matemáticamente.
		Aspectos emocionales del	**KFLM4.** Conocer que los estudiantes tienen una predisposición a emplear algoritmos geométricos

		aprendizaje de las matemáticas	cuando se les pide calcular el área debajo de funciones constantes o lineales.
	KMLS	Resultados de aprendizaje esperados	**KMLS1.** Conocer que uno de los aprendizajes esperados en cuanto al TFC del programa de estudios de Cálculo Integral en el 5to semestre del bachillerato tecnológico es que el alumno descubra las relaciones inversas entre derivación e integración. (Secretaría de Educación Pública (SEP), s.f., p. 16)
		Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental	**KMLS2.** Conocer que uno de los productos esperados en cuanto al TFC de los alumnos del 5to semestre que cursan la materia de Cálculo Integral en bachillerato tecnológico es que calculen el área bajo la curva de funciones diversas.
		Secuenciación de temas	**KMLS3.** Conocer que un tema previo al TFC en el programa de estudio del 5to semestre del bachillerato tecnológico en la materia de Cálculo Integral es Suma de Riemann.
	KMT	Teorías de la enseñanza de las matemáticas	**KMT1.** Conocer que el TRU (Enseñanza para una Comprensión Robusta, por sus siglas en inglés, considera que se puede lograr una comprensión robusta del TFC si el docente planifica, implementa y reflexiona la instrucción tomando en cuenta las cinco dimensiones de las aulas sólidas de matemáticas: contenido, demanda cognitiva, acceso equitativo al contenido, propiedad, agencia e identidad y evaluación formativa (Schoenfeld et al., 2016).
		Recursos didácticos (físicos y digitales)	**KMT2.** Conocer que el uso del software GeoGebra favorece que los estudiantes visualicen los aspectos dinámicos de acumulación y variación del TFC.
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	**KMT3.** Conocer que un tipo de ejemplo en la enseñanza del TFC que se le puede presentar al estudiante es encontrar el área bajo la curva de una función conocida en un intervalo determinado.

Fuente: elaboración propia

IV.2. Concentrado de indicadores del TFC a partir de las dimensiones del TRU

Este apartado contempla los indicadores que se han contemplado con base en las rúbricas de evaluación de las cinco dimensiones del TRU (Ver Tablas 5-8) que incluye el modelo para valorar la lección desde las siguientes situaciones:

- Inicio de la clase, exposición del maestro y debate
- Trabajo individual de los estudiantes
- Trabajo en grupos pequeños (por parte de los estudiantes)
- Presentaciones de los estudiantes

En la primera columna se menciona la dimensión, en la segunda la herramienta que se consideró (rúbrica de evaluación) y la tercera describe el indicador. Para este concentrado, los indicadores se han tomado de las rúbricas correspondientes al TRU, ver Tabla 11.

Tabla 11

Concentrado de indicadores del TFC a partir de las dimensiones del TRU

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños	**C2.** La explicación y la justificación de las ideas matemáticas centrales son coherentes con el nivel del grado.
	Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes	**C3.** Las matemáticas presentadas son relativamente claras y correctas e incluyen justificaciones o explicaciones o el profesor anima a los estudiantes a centrarse en las ideas matemáticas centrales y a explicarlas y justificarlas.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante	**C4.** Las intervenciones del maestro con el trabajo individual de los estudiantes apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)
La demanda cognitiva	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**DC1.** Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños	**DC2.** Se ayuda a los estudiantes a participar de manera productiva con ideas matemáticas centrales. Esto puede implicar una lucha; ciertamente implica tener tiempo para pensar las cosas.
	Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes	**DC3.** Las sugerencias o andamiajes del maestro apoyan a los presentadores y/o la clase es una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante	**DC4**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.
El acceso equitativo a las matemáticas	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**AEC1.** El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa; o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en tal compromiso.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños	**AEC2.** Todos en el equipo contribuyen a las discusiones matemáticas del grupo o subgrupo, o el maestro se mueve para que todos los miembros del equipo hagan contribuciones significativas.
	Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes	**AEC3.** El maestro apoya a los presentadores (si es necesario) para que se involucren, o la presentación se convierte en una actividad de toda la clase en la que el maestro apoya activamente una amplia participación y/o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en dicha participación.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante	**AEC4.** La atención del maestro y/o sustituto está clara y ampliamente disponible para aquellos estudiantes que lo deseen, lo que resulta en acceso a las matemáticas.

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)
Agencia, propiedad e identidad	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**API1.** Los estudiantes explican sus ideas y razonamientos. El maestro puede atribuir propiedad a las ideas de los estudiantes en la exposición y/o los estudiantes responden y construyen sobre las ideas de los demás.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños	**API2.** Al menos un estudiante expone y defiende sus ideas/razonamientos, los estudiantes se basan en las ideas de los demás, o el maestro atribuye la propiedad de las ideas de los estudiantes en la discusión posterior.
	Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes	**API3.** Las presentaciones de los estudiantes dan como resultado una discusión más profunda de las matemáticas relevantes, o los estudiantes hacen una referencia significativa a las ideas de otros estudiantes/grupos en sus presentaciones.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante	**API4.** El estudiante tiene una amplia oportunidad y capacidad para desarrollar sus ideas interactuando con el profesor, o, el profesor lleva la idea del alumno a la discusión en clase inmediatamente después de que termine el trabajo individual.
Evaluación formativa	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**EF1.** El maestro solicita a los estudiantes que piensen y la instrucción subsiguiente responde a esas ideas, basándose en comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños	**EF2.** El maestro solicita el pensamiento de los estudiantes y la discusión subsiguiente responde a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando posibles malentendidos.
	Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes	**EF3.** En la presentación y la discusión, el maestro solicita el pensamiento de los estudiantes y responde a sus ideas, basándose en comienzos productivos o abordando los malentendidos emergentes.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante	**EF4.** El maestro solicita a los estudiantes que piensen y las discusiones subsiguientes responden a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.

Fuente: adaptación de Schoenfeld et al. 2014

IV.3. Propuesta de enseñanza del TFC con base en los indicadores del MTSK y TRU

Ahora se presenta la propuesta de enseñanza que se ha diseñado integrando los indicadores de los concentrados anteriores. Está dividida en cuatro etapas que corresponden a los momentos que proponen las guías de evaluación del TRU, mismos que se mencionaron anteriormente:

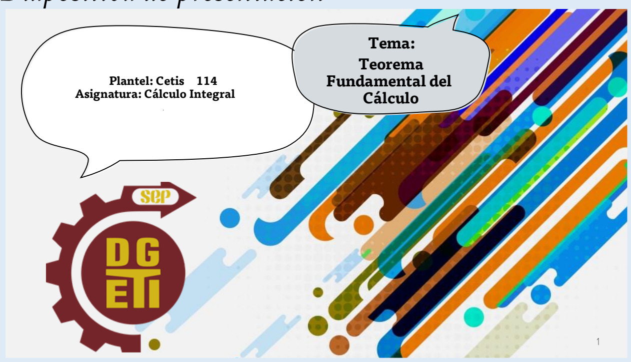
Para cada apartado, se detallan 4 columnas. La primera y segunda mencionan el o los indicadores del MTSK y del TRU que se contemplan, respectivamente. En la tercera se describe de manera detallada la acción que se desarrollará en el aula, incluyendo secciones del discurso de la profesora y las estrategias, recursos y actividades que se han diseñado para la enseñanza del TFC y en la cuarta columna se describe cómo se integran el o los indicadores del MTSK y del TRU que se mencionan en las primeras dos columnas con la acción que se realiza en el aula, ver Tabla 12.

La integración de los indicadores en la organización y planificación de la propuesta de enseñanza se realiza conjuntando los elementos de los tres referentes teóricos: MTSK, TRU y TFC. Es decir, se intenta efectuar, por medio de la planificación de la propuesta, una combinación y entretejo de las categorías del MTSK y las dimensiones del TRU, a partir de la interpretación que se ha hecho al estudiar y analizar estos dos referentes. Asimismo, se organizan los aspectos epistemológicos del TFC que están referidos en los indicadores, tanto explícita como implícitamente.

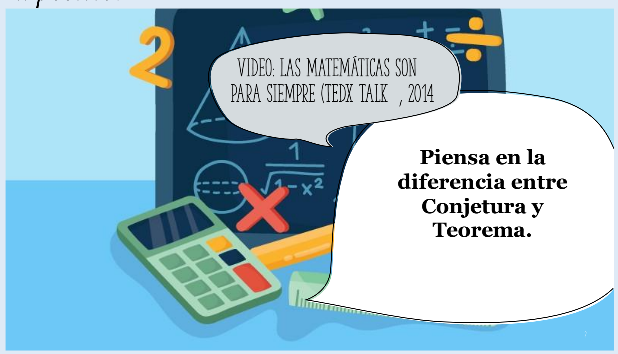
Tabla 12

Propuesta de enseñanza del TFC con base en la integración de los indicadores del MTSK y del TRU

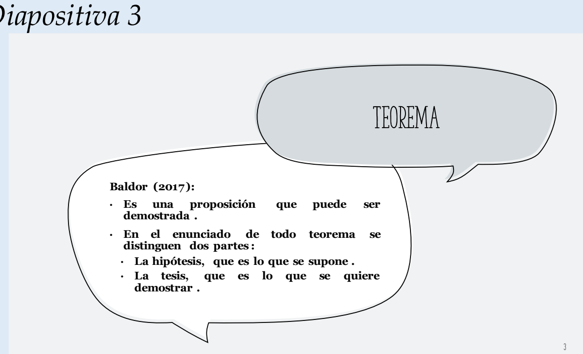
Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
Clase de inicio, exposición del profesor y debate Sesión 1, Tiempo: 30 minutos			
KMLS3	**C1**	El profesor inicia la clase presentando el tema Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), refiere que es el tema correspondiente al programa de la materia y que se encuentra ubicado después del tema de Sumas de Riemann y Propiedades y notación (SEP, s.f.).	Se les menciona a los estudiantes la secuenciación del tema TFC, de acuerdo con el programa de la materia (**KMLS3**) mientras que se conecta el concepto con otros previos, procurando que el alumno cree

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
		Figura 6 *Diapositiva de presentación*  Fuente: elaboración propia	una visión coherente de las matemáticas (**C1**).
KoT7	**C1** **AEC1** **API1**	Pregunta a los estudiantes qué entienden por Teorema y qué significa para ellos la palabra "fundamental", después presenta un video relativo a que el estudiante se cree una noción del concepto de Teorema, este video es un recorte del video TEDxTalks (2014), el recorte se encuentra en el enlace: https://edpuzzle.com/media/617610b2c0726741755b3678. Anima a los estudiantes a participar, aunque crean que sus ideas no son correctas y solicita que los compañeros retomen las opiniones de los demás, propiciando que se forme una estructura de participaciones donde todos tengan las mismas oportunidades.	Se conduce a que el estudiante vaya creando una definición de lo que es el TFC (**KoT7**) tratando de que defina primero cada palabra: Teorema, Fundamental y Cálculo, lo cual apoya a que se hagan conexiones (**C1**), a la vez se invita y se brindan las mismas oportunidades para participar (**AEC1**) y se toman en cuenta sus ideas, construyendo, entre todos (alumnos y profesor), sobre ellas (**API1**).

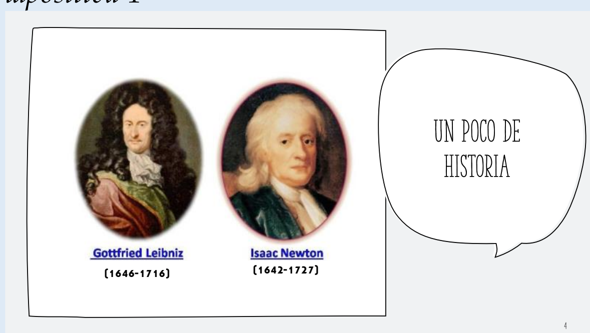
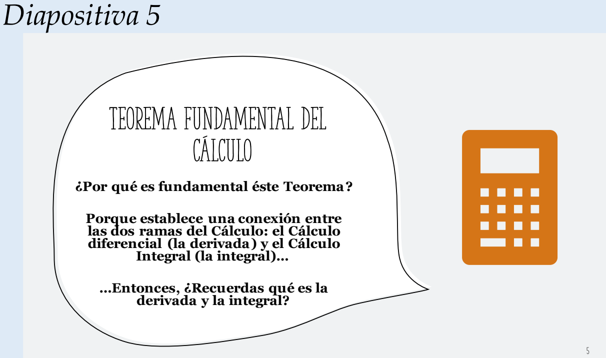
<table>
<tr><th>Indicadores MTSK</th><th>Indicadores TRU</th><th>Descripción de la propuesta de enseñanza</th><th>Integración de los indicadores empleados</th></tr>
<tr><td>KoT7</td><td>C1</td><td>Solicita a los estudiantes que, con base en el contenido del video, describan una diferencia entre conjetura y teorema.

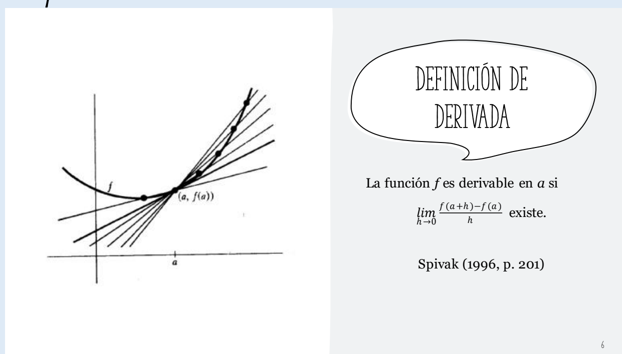
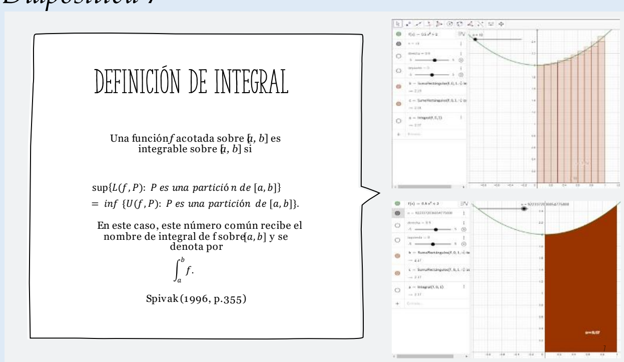
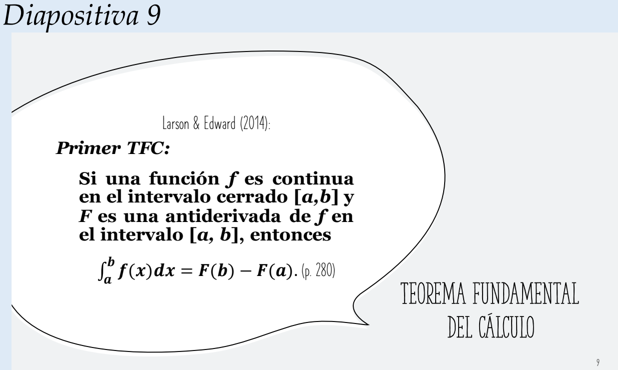
Figura 7
Diapositiva 2


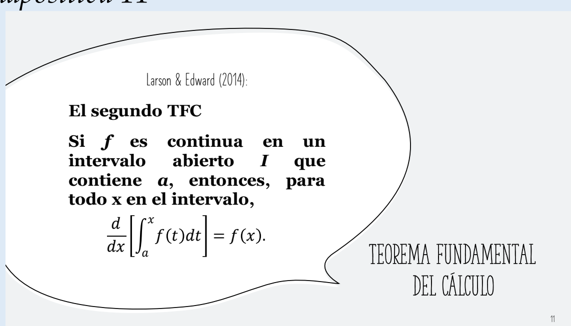
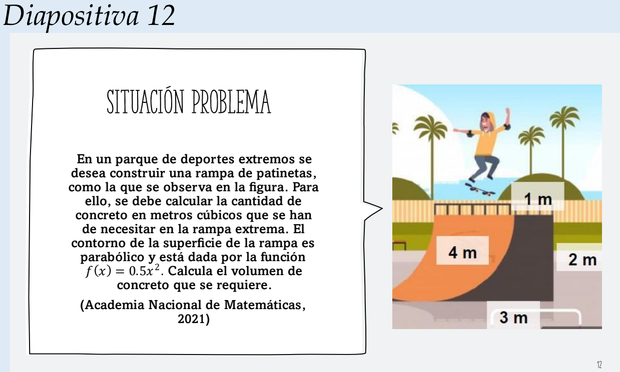
Fuente: elaboración propia</td><td>Se intenta que el estudiante tenga claro el concepto de teorema (KoT7, C1) diferenciándolo del de conjetura.</td></tr>
<tr><td>KPM2</td><td>C1</td><td>Presenta algunas características de los teoremas en matemáticas, como son: es una proposición formada por una hipótesis y una tesis y la importancia de demostrarlos.

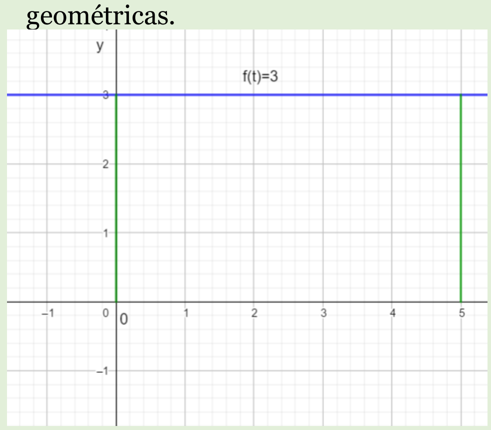
Figura 8
Diapositiva 3


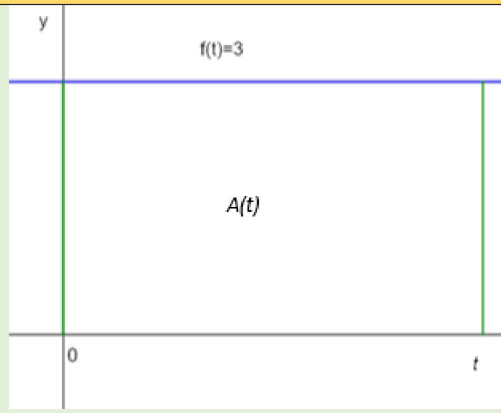
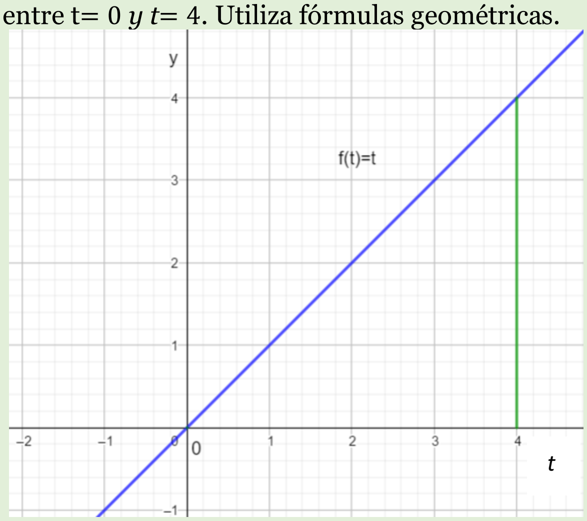
Fuente: elaboración propia</td><td>Se integran aspectos del contenido (C1), como son algunas características de los teoremas (KPM2).</td></tr>
</table>

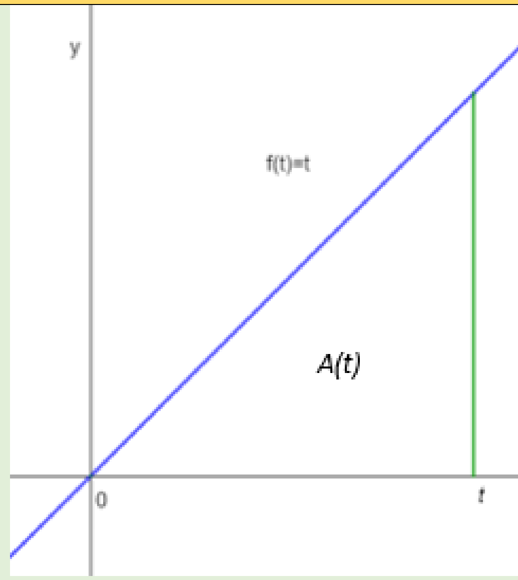
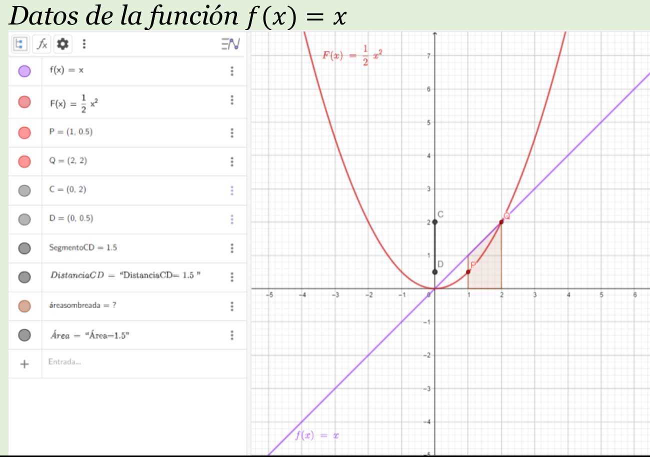
Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KoT1	**C1**	Presenta a Leibniz y Newton como los primeros en demostrar el TFC, ante una necesidad en el contexto de su época, es decir, el TFC como un resultado que emergió al resolver un problema matemático. Para Newton cuando el algoritmo inverso que resuelve el problema de las tangentes resolvió el problema de las áreas. Para Leibniz inició con la idea de que la suma y la diferencia son operaciones inversas. **Figura 9** *Diapositiva 4*  Fuente: elaboración propia	Se mencionan aspectos históricos del TFC (**KoT1**), intentando que el estudiante visualice el contexto en el que surgió (**C1**).
KSM1 **KMLS1**	**C1** **EF1**	Menciona a los estudiantes la parte fundamental del TFC y se les hace la pregunta: ¿Qué entiendes por derivada y por integral? Después de que los estudiantes expresan sus ideas se les presenta la definición formal de derivada e integral, haciendo referencia al tema previo de límite. En la derivada cuando h tiende a cero y en la integral cuando n tiende a infinito. Se muestran también su representación gráfica. **Figura 10** *Diapositiva 5*  Fuente: elaboración propia	Se les pregunta a los estudiantes sobre los conceptos intuitivos de derivada e integral y después se retoman sus ideas para presentarles la definición formal (**EF1**). Se menciona el tema previo de "límite" y cómo hace conexión con los conceptos de derivada e integral

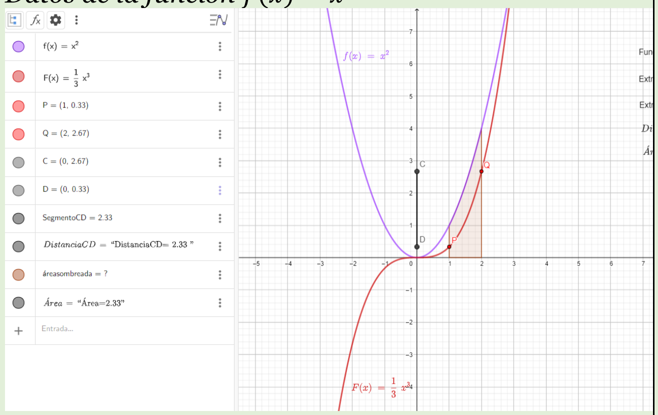
Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
		Figura 11 *Diapositiva 6*  Fuente: elaboración propia **Figura 12** *Diapositiva 7*  Fuente: elaboración propia	(**KSM1**), para que el estudiante cree conexiones significativas entre los conceptos (**C1**). También se le menciona explícitamente la relación inversa entre derivada e integral como un aspecto fundamental del TFC (**KMLS1**).
KoT7 **KoT5**	**C1** **DC1**	Presenta la proposición del TFC y se le muestra una imagen que representa una función y su derivada en forma análoga a los granos de café, de manera que pueda visualizar a la antiderivada cómo la inversa de la derivada. **Figura 13** *Diapositiva 9*  Fuente: elaboración propia	Presenta al estudiante la proposición formal del TFC (**KoT7, KoT5**) y se intentan hacer analogías con el contexto de los alumnos (**C1**), de manera que pueda construir intuitivamente un tema (antiderivada) (**DC1**), que le será útil para obtener áreas

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
		Figura 14 *Diapositiva 10*  Fuente: elaboración propia **Figura 15** *Diapositiva 11*  Fuente: elaboración propia	mediante el TFC.
KoT2 **KMLS3** **KMLS2**	**C1**	Presenta una situación problema que puede ser resuelta con el TFC y que los estudiantes habían resuelto previamente de manera aproximada, mediante Sumas de Riemann. **Figura 16** *Diapositiva 12*  Fuente: elaboración propia	Se retoma un ejercicio que el estudiante había resuelto cuando abordó el tema de Sumas de Riemann, el cual es anterior en el programa de estudios (**KMLS3**), al mismo tiempo que se le muestra una aplicación (**KoT2**) del TFC para el cálculo de áreas de regiones planas (**KMLS2**).

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
Trabajo individual de los estudiantes Actividad extraclase (Ver Anexos 1 y 2)			
KMT3 KMLS2 KFLM4	**AEC4 API4 EF4**	Con la intención de que el estudiante descubra el TFC, se le solicita resolver las siguientes actividades extraclase, la cual es una adaptación de una actividad diseñada por Monroy y Rivero (2020), con la cual pretende que los estudiantes redescubrieran el TFC. Para resolver las dudas de los alumnos que puedan surgir al resolver la actividad, se les invita a compartirlas por whatsapp, o bien, de manera individual con la profesora, ya sea por whatsapp o en el cubículo escolar. Esto, para seguir con la dinámica que se ha estado empleando este semestre debido a que los estudiantes no acuden todos los días a la escuela y los grupos se encuentran divididos. **Nombre**______________________________ **Grupo** _____ **Resuelve las siguientes actividades dejando ver tus procedimientos en cada respuesta. En caso de que no te sea suficiente el espacio, utiliza otras hojas y anéxalas al final.** **Actividad 1.** **Función $f(t) = 3$** 1. Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre t= 0 y t= 5. Utiliza fórmulas geométricas.  Respuesta: ________________________________ 2. Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre t= 0 y t $= t$. Plantea una expresión para $A(t)$.	En la actividad se integran algunos indicadores del MTSK y del TRU, ya que se les ofrece ayuda a los estudiantes para que puedan despejar las dudas que surjan (**AEC4, API4, EF4**), además las actividades fueron diseñadas de manera que el estudiante comience realizando tareas fáciles, como la obtención de área bajo la curva de una función constante o lineal en un intervalo determinado (**KMT3, KMLS2**), y después se vaya subiendo el nivel de complejidad hasta que el estudiante logre hacer una relación inversa cuando integra y deriva una función,

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KMLS1 **KMT3** **KMLS2** **KFLM4**	**DC4** **C4**	 Respuesta: __________________________________ 3. Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior: __________________ 4. De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)$ y $f(t)$. **Función $f(t) = t$** 5. Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre t= 0 y t= 4. Utiliza fórmulas geométricas.  Respuesta: ____________________________ 6. Si t $\in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre t= 0 y t= t. Plantea una expresión para $A(t)$.	regresando a la original (**DC4, KMLS1**, **C4**). El solicitar a los estudiantes que obtengan el área inicial de manera geométrica se hace con la intención de motivar a los estudiantes, ya que se cree que ellos tienen predisposición de hacerlo de esa manera, debido a que han tenido mayor acercamiento a los algoritmos geométricos de área de figuras planas (**KFLM4**) y después se prevé utilizar la función que obtengan en A(x) como integral de f(t). Para la actividad 2, las imágenes que se le presentan al estudiante se utilizan debido a que ellos han tenido acercamiento a la interfaz de GeoGebra (**KMT2**) y se presume que podrán

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KMLS1 KMT2	DC4 C4	 Respuesta: ________________________ 7. Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior: ____________ 8. De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)$ y $f(t)$. 9. Tomando en cuenta tu conclusión anterior. ¿Qué relación observas entre $A(t)$ y $f(t)$? **Actividad 2.** Las siguientes imágenes representan dos funciones distintas f(x), así como ciertos datos que se obtienen de cada una de ellas al obtener su antiderivada. Con base en los datos de las figuras, contesta las preguntas de abajo: **Figura 1** *Datos de la función $f(x) = x$*  	interpretarlas correctamente.

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
		Figura 2 *Datos de la función* $f(x) = x^2$  1. ¿Qué relación observas entre $f(x)$ y $F(x)$? 2. ¿Qué coordenadas tienen P y Q? 3. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de P y Q, teniendo en cuenta los valores de (A) y (B)? 4. ¿Qué coordenadas tienen C y D? 5. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q? 6. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia? 7. Observa el valor del área (Área=2.33) y el área sombreada en la gráfica. Luego escribe qué relación encuentras entre esa área y los puntos C y D (redacta tus conclusiones en términos de f, F, A y B): 8. De acuerdo con tu conclusión anterior, generaliza el proceso para cualquier A y B:	

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
Trabajo en grupos pequeños Sesión 2, Tiempo: 30 minutos			
KMT3 KMLS2 KFLM4 KMLS1 KMLS2 KMT2	**API2**	En esta sesión se pretende retomar la actividad extraclase que desarrollaron los estudiantes de manera individual, pero ahora reunidos en equipos, con la intención de que puedan comparar sus resultados, así como conversar y discutir entre ellos sobre los procedimientos que siguieron y los resultados obtenidos.	Los indicadores del MTSK se integran cómo se describieron en el desglose de la actividad en el apartado de "trabajo individual de los estudiantes" (**KMT3, KMLS2, KFLM4, KMLS1, KMLS2** y **KMT2**). En cuanto a los del TRU, Se busca que los estudiantes expresen y defiendan sus ideas y el docente anima para que los demás las retomen (**API2**).

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
	AEC2 **API2**	El docente comenzará dando una explicación sobre cómo es importante acudir en cuerpo completo a la escuela, ya que se aprende empleando todo el cuerpo, con esto se pretende que los estudiantes sean conscientes de la importancia que implica el estar atentos y cómodos en el aula de clases y cómo todos tienen las habilidades para aprender, aunque de formas distintas. Para esto se tomarán las ideas de Hernán Aldana, en su video de Youtube "Enseñar y aprender de los pies a la cabeza" el cual se encuentra en el siguiente enlace (https://www.youtube.com/watch?v=hCnkIMK4Fvc) (TEDx Talks, 2019) y se espera que con esto los alumnos modifiquen, aunque sea durante la sesión, sus creencias sobre lo que implica resolver las actividades y se arriesguen a discutir entre ellos para construir conocimientos.	El docente buscará moverse entre los equipos para animar a que todos hagan aportes en cuanto a ideas sobre la resolución de las actividades, además se intenta hacer consciente que todos tienen habilidades para aprender el contenido de TFC (**AEC2**) y se apoyarán las discusiones entre ellos para la construcción de conocimientos (**API2**).
	DC2 **C2** **EF2**	El docente estará atento a las dudas que tuvieron los estudiantes de manera individual pero se les invitará a que primero las discutan en equipo con la intención de que puedan colaborar y retroalimentarse. El docente intervendrá cuando no logren llegar a un resultado o sea evidente que están teniendo dificultades.	Se espera que los estudiantes puedan desarrollar algunas de las tareas de la actividad sin problema, ya que existe coherencia entre el nivel de grado (**C1**), aunque también se espera que haya otras que les resulten difíciles debido

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
			al poco acercamiento que han tenido (**DC2**). Sin embargo, la intención es proporcionarles tiempo para que piensen y logren tener una lucha productiva y exista retroalimentación entre pares y por parte del profesor (**EF2**).
	DC2 **EF2**	Se les dirá a los estudiantes que pueden seguir trabajando en la actividad si es que consideran que aún no está completa, para que tengan tiempo de construir su pensamiento y puedan corregir con base en la retroalimentación de la clase.	Se le da tiempo al estudiante para pensar en el contenido matemático del TFC (**DC2**) y tienen la oportunidad de corregir con base en las retroalimentaciones recibidas por parte de los compañeros y del profesor (**EF2**).
Clase de exposición del profesor y debate Sesión 3, Tiempo: 30 minutos			
Nota: En esta sesión se pretende trabajar con los procedimientos del TFC; para esto se pensó en probar la primera parte del TFC y demostrar la segunda. Esto por dos razones principales: la primera es debido al tiempo que llevaría realizar ambas demostraciones y la segunda es que, en el programa de bachillerato, el TFC se enfoca en la prueba por medio de la resolución de situaciones dónde el estudiante emplee el TFC en la obtención de áreas y no hace énfasis en las demostraciones. Sin embargo, se considera pertinentes incluirlas por la importancia matemática de demostrar los teoremas.			

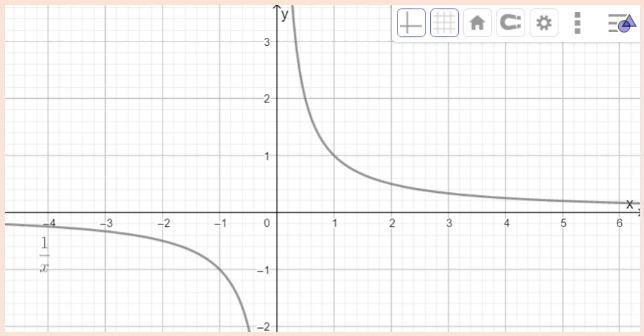
Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KPM2 **KPM1**	**C1**	El docente menciona a los estudiantes que se comprobará la primera parte del TFC y se demostrará la segunda. Hace una diferenciación entre comprobar y demostrar matemáticamente, para que los estudiantes tengan una noción mayor de lo que se va a trabajar.	Se menciona a los estudiantes la diferencia entre prueba y demostración matemática (**KPM2, KPM1**) procurando hacer conexiones entre los procedimientos que se van a realizar (**C1**).
KoT2 **KMT2** **KFLM2** **KMLS2**	**C1** **DC1**	Retoma la situación problema resuelta en la primera sesión (Ver Figura 12) para que los estudiantes analicen y comparen el procedimiento y resultado obtenido con el que habían conseguido previamente por medio de Sumas de Riemann. Ambos resultados deben acercarse, pero la intención es dirigir una discusión dónde los alumnos logren concluir la conveniencia del TFC en el cálculo de áreas bajo ciertas funciones y cumpliendo con la condición de que la función sea continua.	Se retoma una situación en la que se aplica el TFC en el cálculo de área de una región plana (**KoT2, KMT2**), haciendo conexión con el contexto de los estudiantes (**C1**). Luego se solicita que hagan una diferenciación entre Sumas de Riemann (**KMLS2**) y TFC para el cálculo de áreas (**DC1**) y se les hace explícita que la hipótesis del teorema determina que la función debe ser continua en el intervalo (**KFLM2**).

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KoT3 **KMT2**	**C1** **DC1**	Después se le pide resolver el siguiente ejercicio empleando la primera parte del TFC, se espera que lo realicen de la siguiente manera: **Problema.** Un objeto se mueve con movimiento rectilíneo de modo tal que, su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 + 2t\, m/s$. Encuentra la distancia recorrida del objeto durante los tres primeros segundos. Solución. $$\int_0^3 (t^2 + 2t)dt = \int_0^3 (t^2)dt + \int_0^3 (2t)\, dt$$ $$= [\frac{t^3}{3} + 2\left(\frac{t^2}{2}\right)]_0^3$$ A continuación, realizamos $s(b) - s(a)$ sustituyendo primero el límite superior y luego el inferior, $$s(3) - s(0) = \frac{3^3}{3} + 2\left(\frac{3^2}{2}\right) - \left[\frac{0^3}{3} + 2\left(\frac{0^2}{2}\right)\right]$$ $$= 9 + 9 - 0 = 18$$ Distancia recorrida: 18 m. (p. 57) Después se procede a mostrar de forma gráfica la función apoyados del software GeoGebra.	Se solicita a los estudiantes resolver un ejercicio donde usa el TFC para calcular la distancia recorrida por un objeto en un determinado intervalo de tiempo, cuando se conoce su velocidad (**KoT3**), haciendo conexiones con el contexto del estudiante (**C1**). Se espera que el estudiante logre reconocer que puede resolverlo por medio del TFC debido a las características del problema (**DC1**) y al final se comprueba de manera gráfica con GeoGebra (**KMT2**).

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KoT4 **KoT5** **KoT6** **KoT7** **KoT8** **KMT2**	**C1** **DC1**	Luego, el docente procede a demostrar la segunda parte del TFC, tomando el procedimiento de Larson y Edward (2014): **Demostración de la segunda parte del TFC.** comience definiendo F como $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$ Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, puede escribir $$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right]. \end{aligned}$$ Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x > 0$), sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\Delta x$. además, como $x \leq c \leq x + \Delta x$ se deduce que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. Por tanto, obtiene $$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\Delta x\right] = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$ Se puede plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$. (p. 284). Durante la demostración se apoya de un applet diseñado para tal fin, con la intención de que el estudiante comprenda mejor haciendo uso de distintas representaciones. Enlace del applet: https://www.geogebra.org/m/em3zrwwb	Se presenta la proposición de la segunda parte del TFC (**KoT5, KoT7**) y se procede a demostrarlo empleando el procedimiento de los autores (**KoT8**). Durante la demostración se hace uso del teorema del valor medio como parte del procedimiento (**KoT4**), lo cual requiere un esfuerzo extra por parte del estudiante para comprender la demostración (**DC1**) y esta se va realizando también en su forma gráfica (**KoT6**) mediante el uso del software GeoGebra (**KMT2**). Todo lo anterior supone conexiones significativas entre los procedimientos y el concepto de TFC (**C1**).

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KSM2 **KSM3**	**C1**	Se le menciona a los estudiantes algunas de las conexiones que tiene el TFC con otros conceptos matemáticos: 1. Para obtener la probabilidad de variables aleatorias continuas en un intervalo determinado. 2. Como auxiliar para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales.	Se menciona la conexión del TFC con el cálculo de probabilidades de variables aleatorias continuas (**KSM2**) y como auxiliar en la solución de ecuaciones diferenciales (**KSM3**) creando conexiones entre temas matemáticos (**C1**).
	AEC1 **API1** **EF1**	Se solicita realizar un debate en el que todos tengan la oportunidad de contribuir sus ideas sobre los aprendizajes logrados y el maestro apoya para que se vayan considerando las opiniones de los compañeros y resolviendo los malentendidos y confusiones de los estudiantes.	Se les da la oportunidad de participar (**AEC1**), atribuyendo propiedad a sus ideas (**API1**) y se resuelven los malentendidos (**EF1**).
Presentación de los estudiantes **Actividad extraclase**			
	DC3 **EF3**	Se presenta a los estudiantes los siguientes ejercicios para su resolución en equipo, usando dos representaciones. Los estudiantes deberán resolverlos y realizar un video dónde expliquen cómo lo resolvieron y las dificultades que se les presentaron. Se les da la apertura para que acudan a resolver sus dudas, ya sea por whatsapp o de manera presencial en la escuela, para brindarles andamiaje.	Se brinda ayuda y andamiaje a los equipos y presentadores para que participen en prácticas matemáticas (**DC3**) y se abordan malentendidos que surjan (**EF3**).

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KSM4	**C3** **DC3**	**Problema 1** (Rosyidi & Kohar, 2018): Dado que f(x) es una función continua que satisface la ecuación $\int_2^5 f(x)\, dx = -6$. a) Encuentra f(x) b) ¿f(x) tiene una única solución? (p. 3) **Solución esperada.** $$\int_2^5 (ax+b)dx = -6$$ $$\left[\frac{1}{2}ax^2 + bx\right]_2^5 = -6$$ $$\left[\frac{25}{2}a + 5b\right] - [2a + 2b] = -6$$ $$\frac{21}{2}a + 3b = -6$$ Al final, se despeja una de las variables y se encuentran valores de a y b que satisfagan la función; con lo cual también se determina que f(x) no tiene una solución única. La solución mostrada es empleando una función lineal, pero puede también aplicarse con funciones cuadráticas. Uno de los posibles resultados para f(x), es cuando a=2 y b=-9, quedando f(x)=2x-9, ya que $$\frac{21}{2}(2) + 3(-9) = -6$$ $$21 - 27 = -6 \text{ (p. 5)}$$	Se piensa que en este problema surgirán algunas dudas en los estudiantes, por lo cual se les brindará andamiaje (**DC3**) para que puedan pensar en el procedimiento que deben emplear cuando, a partir de una ecuación dónde se conoce el valor del área bajo la curva, se calculen las funciones que la satisfacen (**KSM4**), esperando crear conexiones significativas entre el procedimiento y el concepto (**C1**).

Indicadores MTSK	Indicadores TRU	Descripción de la propuesta de enseñanza	Integración de los indicadores empleados
KFLM2 **KFLM3**	**C3** **DC3**	**Problema 2.** Considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica se representa a continuación:  Determine el área en el intervalo [-1, 2] **Solución esperada.** Se espera que el estudiante logre darse cuenta de la discontinuidad que existe en la función en el intervalo solicitado. Aunque también se espera que procedan de manera mecánica y realicen lo siguiente: $$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}\,dx = [ln(\lvert x\rvert)]_{-1}^{2} = 0.693147\ldots - 0 = 0.693147\ldots$$	Se espera que el estudiante logre visualizar la discontinuidad de la función en el intervalo solicitado (**DC3, C3**) y lo exprese en su presentación (**KFLM2**). Aunque también se corre el riesgo de que el estudiante actúe mecánicamente (**KFLM3**) y simplemente ejecute el algoritmo ignorando la discontinuidad.
	AEC3 **API3**	Los videos se comparten en Youtube y se pide realizar una coevaluación, animando a todos a ver los de sus compañeros con el fin de reflexionar sobre cómo los resolvieron y que logren detectar lo que ellos no habían considerado.	Se espera que los estudiantes expresen sus ideas respecto a los otros presentadores (**API3**), convirtiendo a las presentaciones en una actividad de toda la clase (**AEC3**).

Fuente: elaboración propia

IV.4. Cuestionario de evaluación de la lección por parte del estudiante

Enseguida se muestra el cuestionario que se diseñó para que el estudiante evalúe la lección posterior a la aplicación de la propuesta. Se han considerado dos secciones principales, la primera corresponde a la evaluación tomando como base las preguntas que contempla el TRU para la evaluación de la lección desde el punto de vista del estudiante. En la segunda sección se pretende identificar qué conocimientos empleó la profesora para la enseñanza del TFC, de acuerdo con la opinión del estudiante; considerando algunas categorías de los subdominios KoT y KMT del MTSK.

La limitación a esos dos subdominios se debe a que la evaluación que se realiza es por parte de los estudiantes y se considera pertinente detectar las nociones básicas que ellos identificaron sobre el tema matemático, tales como su definición, procedimientos, aplicaciones, registros de representación y propiedades. Asimismo, consideramos primordial valorar los recursos didácticos y las actividades, tareas y ejemplos que la profesora empleó durante la enseñanza.

En la Tabla 13 se presentan las preguntas del cuestionario correspondientes a cada sección, indicando la dimensión del TRU (para el caso de la primera sección) o el subdominio del MTSK (para la segunda sección) al que pertenece, así como la justificación de realizar cada pregunta.

Este cuestionario se aplicó mediante un formulario de Google y no se incluye el nombre del estudiante o algún dato que lo identifique, con el objetivo de que se sientan libres de contestar con honestidad, para conseguir respuestas objetivas.

Tabla 13

Cuestionario de evaluación de la lección por parte de los estudiantes

Cuestionario para estudiantes		
Sección 1. Evaluación del punto de vista del estudiante sobre la lección, con base en las dimensiones del TRU (Schoenfeld et al., 2016, p. 19)		
Dimensión	**Pregunta**	**Justificación**
El contenido matemático	1. ¿Cuál fue el contenido matemático que presentó la profesora?	Identificar la comprensión que tuvo el estudiante respecto al contenido matemático que se le presentó.
	2. ¿Cuáles temas matemáticos que habías estudiado antes tuviste que retomar o emplear para el estudio del teorema fundamental del cálculo?	
La demanda cognitiva	3. En cuanto al tema estudiado de teorema fundamental del cálculo, menciona el nivel de comprensión que consideras que alcanzaste (en porcentaje) y explica de manera detallada el por qué	Identificar la percepción del estudiante sobre el nivel cognitivo que la profesora le invitó

	4. ¿Consideras que el discurso de la profesora te invitó a explicar con tus propias palabras lo que estabas aprendiendo sobre el tema? Explica	a emplear para comprender el tema.
	5. El tiempo que tuviste para llegar a comprender el tema, ¿Lo consideras suficiente o insuficiente y por qué?	
El acceso equitativo a las matemáticas	6. ¿Cuáles oportunidades tuviste para participar durante la clase en la comprensión del tema?	Identificar la percepción del estudiante sobre las oportunidades brindadas por la profesora para hacer llegar el contenido matemático a todos los estudiantes.
	7. ¿En cuáles ocasiones consideras que no te sentiste incluido o incluida como parte del grupo?	
Agencia, propiedad e identidad	8. ¿Tuviste la oportunidad de expresar tus dudas sobre el tema a tus compañeros y profesora y recibir retroalimentación sobre ellas? Contesta sí o no y explica el por qué	Identificar el punto de vista del estudiante sobre las oportunidades que se le ofrecen para construir el aprendizaje y apropiarse de él.
	9. ¿Consideras que la profesora te visualiza como un estudiante capaz y hábil de contribuir significativamente en el desarrollo de la clase? Contesta sí o no y explica el por qué	
Evaluación formativa	10. ¿Qué acciones realiza la profesora cuando expongo mis dudas?	Identificar la percepción del estudiante sobre la utilidad de la retroalimentación que recibe, favoreciendo la transformación de su pensamiento y la oportunidad de corregir sus errores.
	11. Respecto a las actividades desarrolladas en clase, ¿Recibí retroalimentación por parte de la profesora o mis compañeros sobre lo que realicé y tengo la oportunidad de corregirlas en caso necesario?	
	12. En caso de recibir retroalimentación por parte de la profesora, ¿Crees que dicha retroalimentación te ayuda a pensar más profundamente tus respuestas y comprender el tema? Explica detalladamente.	

Sección 2. Evaluación del conocimiento del profesor desde el punto de vista del estudiante, de acuerdo con los subdominios KoT y KMT (Carrillo et al., 2018)		
Subdominio	**Pregunta**	**Justificación**
KoT	1. ¿Cuál o cuáles procedimientos empleó la profesora para demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo?	Comparar el conocimiento que detectaron los estudiantes durante la clase con el indicador propuesto para las distintas categorías
	2. ¿Cuál o cuáles definiciones presentó la profesora sobre el tema estudiado?	
	3. ¿Cuál o cuáles propiedades mencionó la profesora como útiles en la demostración del teorema fundamental del cálculo?	
	4. Menciona las distintas maneras (registros de representación) que empleó la profesora para mostrar el teorema fundamental del cálculo.	
	5. ¿Qué aspectos históricos recuerdas del teorema fundamental del cálculo?	
	6. ¿Cuáles usos y aplicaciones se dieron al teorema fundamental del cálculo durante la clase?	
KMT	7. ¿Cuáles recursos didácticos (libros, materiales, software) se emplearon durante la enseñanza de teorema fundamental del cálculo?	
	8. Menciona algunas de las tareas y ejemplos que recuerdas que empleó la profesora para la enseñanza del teorema fundamental del cálculo:	

Con los instrumentos presentados en este capítulo, se recabó la información durante la implementación de la propuesta de enseñanza. Cabe señalar que durante la aplicación se emplearon también las grabaciones de audio y video, que no se presentan aquí debido a que no es necesario un diseño previo. Aunque si son indispensables para complementar los datos y realizar un análisis adecuado.

En el siguiente capítulo se muestra la información que ha sido recopilada con los instrumentos que se presentaron y algunos otros utilizados durante el desarrollo de la investigación.

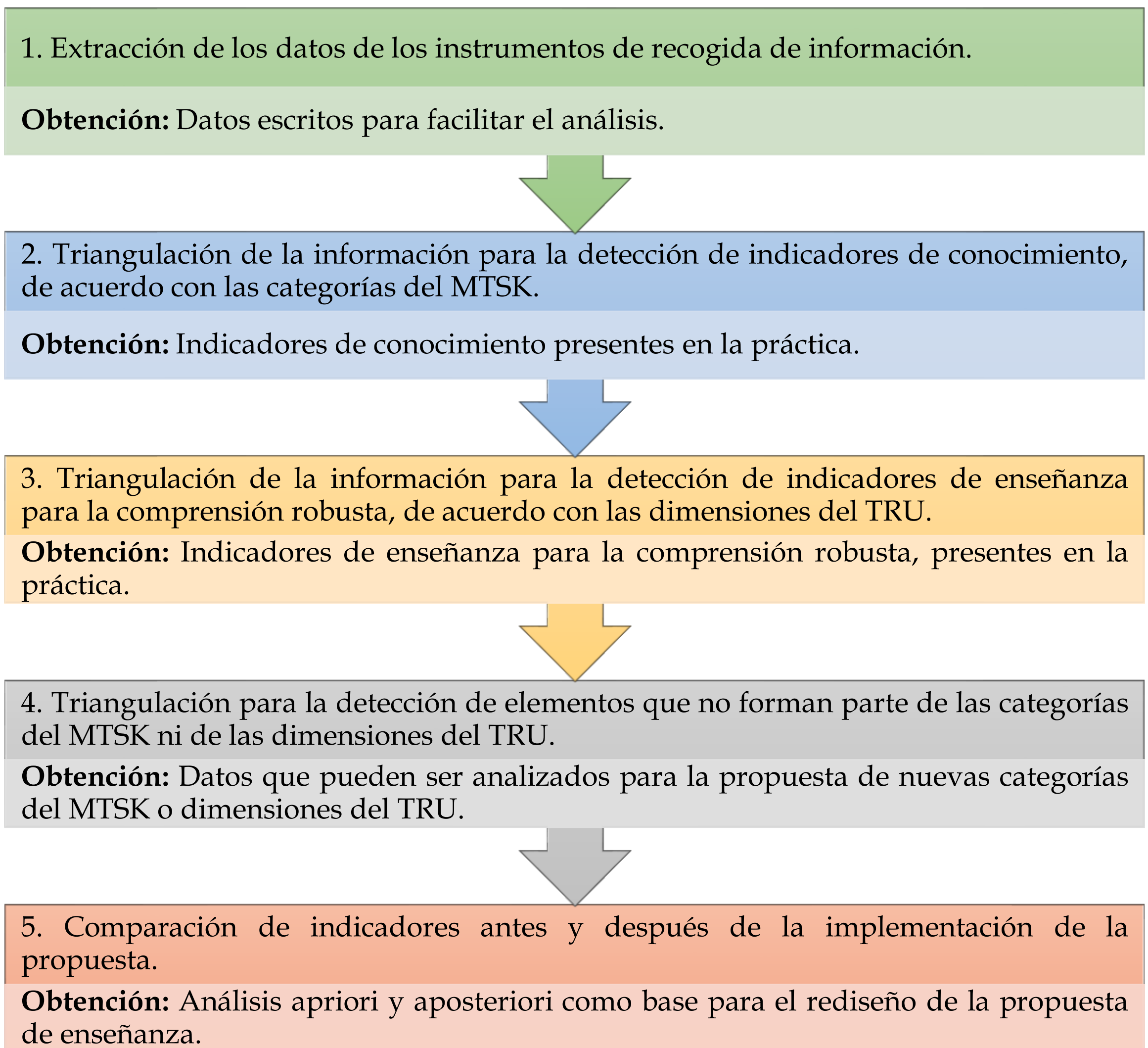
CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Este capítulo muestra la información que ha sido recopilada por medio de los instrumentos de recogida de información. Así como el análisis de los datos que se han compilado.

Con el fin de revisar y analizar los datos con mayor profundidad se ha dividido el análisis en acercamientos o etapas. Cada una de ellas encaminada a una finalidad específica y que, en conjunto, ayuden a llegar a la saturación de información, teniendo en mente el dar respuesta a la pregunta de investigación. En la Figura 13 se muestra un diagrama con los distintos acercamientos y los objetivos que persigue cada uno.

Figura 17

Proceso y objetivo que se persiguen en cada acercamiento a la información obtenida



Fuente: elaboración propia

Cabe señalar que, aunque los acercamientos tienen objetivos específicos, las fases no siempre se realizan de manera ordenada, ya que durante el análisis se pueden detectar elementos que son parte de otros acercamientos y, entonces, se van complementando. A continuación, se detallan cada una de las etapas.

V.1. Extracción de los datos de los instrumentos de recogida de información.

En seguida se muestra la información que se obtuvo de cada uno de los instrumentos de manera puntual, antes de pasar a la triangulación. Primero se presentan los episodios de clase que incluyen transcripciones y acciones que se presentaron en el aula. Después la transcripción del diario de investigación, posteriormente, los procedimientos y resultados que dieron los estudiantes a las actividades y, por último, las respuestas del cuestionario que se aplicó a los estudiantes.

V.1.1. Episodios de clase.

En este apartado se presentan las transcripciones de clase, respetando de manera textual los diálogos y procurando reflejar las acciones y emociones que se presentaron.

Los episodios responden al objetivo que perseguía la profesora durante determinado momento de la clase, tal como se describió en el apartado de instrumentos de análisis.

No: 1 **Episodio:** Introducir el tema Teorema Fundamental del Cálculo ubicándolo en el currículo y motivando a los estudiantes a permanecer atentos y participativos.
Extracto: **Codificación:** ***P=****profesora* ***E1, E2, E3,… hasta E11 =****Estudiante 1, estudiante 2, estudiante 3…, estudiante 11* **Clase 1:** *P: Hola chicos buen día. El día de hoy vamos a abordar el tema Teorema Fundamental del Cálculo. El tema se va a desarrollar en tres partes. En esta primera, vamos a ver una parte digamos, como teórica y luego en la segunda vamos a tratar de que ustedes hagan una actividad y que posteriormente, podamos resolver las dudas. Para esta actividad lo que quiero es que se quiten como todas las ideas que tengan en la cabeza sobre las matemáticas. Sobre todo, las ideas malas… a veces tenemos la creencia de que las matemáticas son difíciles, que nos va siempre mal en los exámenes y esas cosas… pero quiero que tengan mucha seguridad de que puedan preguntar, de que puedan participar, porque eso nos ayuda mucho.*

…imaginen cuando vienen a la escuela, que se pudieran quitar… la cabeza, que pudieran separarla de su cuerpo y la tuvieran aquí en la mano, y que digan: bueno cabeza, …tu ya te vas a la escuela, yo aquí me quedo porque a mí no me necesitan. Muchas veces pensamos que solamente la cabeza necesita venir a la escuela, ¿Ustedes lo han pensado alguna vez? O ¿Quién creen que es más importante que venga a la escuela, su cabeza o su cuerpo?

E1: Las dos cosas

P: ¿Por qué?

E1: porque si no nos morimos

P: imagínense que no se murieran, que si la pudiéramos separar

E2: no, pero también sirve el cuerpo para poder escribir.

P: ajá, de hecho, ustedes están en Enfermería [el bachillerato] y saben que cada movimiento que nosotros hacemos con el cuerpo interfiere directamente en nuestro cerebro. Entonces, la idea de las clases y, sobre todo, en esta clase que vamos a tener es que puedan darse cuenta de que sí necesitamos, desde los pies hasta la cabeza, para poderla llevar a cabo, y que eso implica el hecho de podernos mover, que puedan ustedes preguntar, sin ningún temor, o sin ningún impedimento.
Entonces, vamos a comenzar a ver el tema y bueno, ahí ya lo ven [proyecta diapositiva]… entonces, el tema es el Teorema Fundamental del Cálculo, y ya vimos que ustedes han visto ya temas como Sumas de Riemann, ¿verdad?

E3: ajá.

P: ¿Qué otro tema han visto?

E2: propiedades de notación sigma

P: han visto las propiedades de la notación sigma y, ¿Para qué han utilizado estos dos temas?, ¿Qué han hecho ahí en su cuaderno, en su cuadernillo con estos temas?

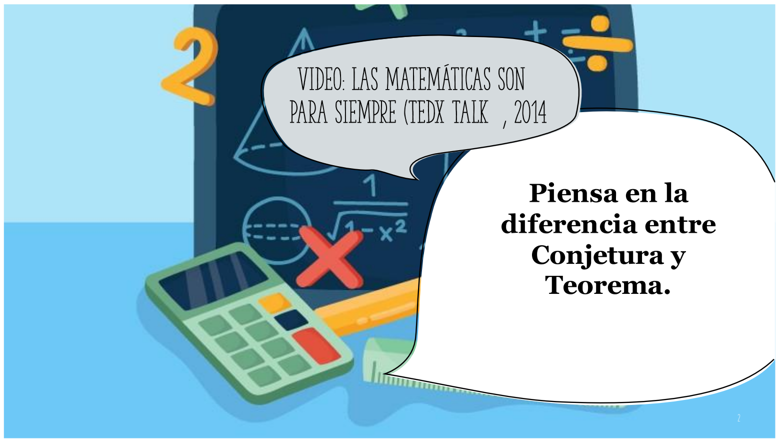
E2: acercarnos a un área aproximada.

E4: para aproximar el área.

P: calcular áreas, exactamente. Estos temas se han empleado para calcular áreas. A bueno, pues el TFC también lo vamos a emplear para eso. De hecho, tiene dos partes el teorema, ¿si?... una parte es precisamente para calcular áreas de forma un poco más sencilla a los procedimientos que han visto y la otra es para hacer una relación entre lo que es la integral y la derivada.

Objetivo general: Presentar el tema TFC y ubicar temas previos que se han abordado y su relación con el TFC.
Evento desencadenante: Iniciar la clase hablando de la importancia de estar atentos de pies a cabeza.
Indicadores de conocimiento encontrados: **Codificación:** Iniciales del subdominio-iniciales de la categoría **KPM-PMG.** Conocer el papel de las analogías en la práctica para la comprensión de temas matemáticos. **KMLS-ST.** Conocer que un tema previo al TFC en el programa de estudio del 5to semestre del bachillerato tecnológico en la materia de Cálculo Integral es Suma de Riemann. **KMLS-ST.** Conocer que un tema previo al TFC en el plan de estudio de bachillerato tecnológico es "Propiedades de Notación Sigma". **KMT-RD.** Conocer que el uso de diapositivas en las clases de matemáticas favorece la explicación teórica y visual del tema.
Indicadores de enseñanza para la comprensión robusta encontrados: **C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas. **DC1.** Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas. **AEC1.** El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa; o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en tal compromiso.
Elementos no clasificados: • La profesora menciona a los estudiantes que la percepción de dificultad de los temas matemáticos puede deberse a concepciones heredadas, con la intención de que abran la mente a que ellos pueden cambiar esa creencia, en caso de que la identifiquen como propia.
Evento de término: Indicar la ventaja que tendrá el cálculo de áreas bajo una función aplicando el TFC, respecto a sumas de Riemann.

No: 2 **Episodio:** diferencia entre teorema y conjetura
Extracto: **Codificación:** ***P=****profesora* ***E1, E2, E3,… hasta E11 =****Estudiante 1, estudiante 2, estudiante 3…, estudiante 11* *P: Entonces, ahí vemos [proyecta la diapositiva]. Eh… vamos a ver un video, ¿si?, que nos va a presentar más a detalle qué es un teorema. En el video quiero que ustedes piensen en esto: la diferencia entre conjetura y teorema.*



P: Los que están aquí enfrente, ¿si alcanzan a ver bien la pantalla?

E5 y E6: si

P: entonces voy a presentarles el video y durante toda la duración piensen en esta diferencia, ¿sale?
Bueno, vamos a ver el video.
[Proyecta el video del enlace: https://edpuzzle.com/media/617610b2c0726741755b3678].

P: Es un video muy cortito, pongan atención en lo que es una conjetura y un teorema y al final escriban en su cuaderno cómo entendieron a cada uno y la diferencia entre ellos.

Contenido del video: *todo lo que hace la ciencia es ser ciencia, es el rigor de la matemática, y ese rigor les viene porque sus resultados son eternos. Seguramente os han dicho alguna vez que un diamante es para siempre, ¿verdad?… depende lo que uno entienda por siempre, un teorema, eso si que es pa´ siempre.*
El Teorema de Pitágoras, aunque se hunda el mundo el teorema de Pitágoras seguiría siendo verdad, allá donde se junten un par de catetos y una buena hipotenusa, el teorema de Pitágoras funciona a tope. Bueno, los matemáticos nos dedicamos a hacer teoremas, verdades eternas, pero no siempre es fácil saber qué es una verdad eterna, un teorema, y qué es una mera conjetura, hace falta una demostración.
Por ejemplo, imaginaos que tengo aquí un campo grande, enorme, infinito, lo quiero cubrir con piezas iguales sin dejar huecos; podría usar cuadrados ¿verdad?, podría usar triángulos, círculos no, que dejan huequitos… ¿cuál es la mejor pieza que puedo usar? la que para cubrir la misma superficie tiene un borde más pequeño, Papus de Alejandría, Papus, en el año 300 dijo que lo mejor era usar hexágonos, como hacen las abejas, pero no lo demostró; el tío dijo uuu hexágonos, venga hexágonos, dámelo, no lo demostró, se quedó en una conjetura; dijo hexágonos, el mundo como sabéis se dividió entre papistas y antipapistas, hasta que 1700 años después, 1700 años después, en 1999, Tomas Hales demostró que Papus y las abejas llevaban razón, que lo mejor es usar hexágono,s y eso se

convirtió en un teorema, el teorema del panal que va a ser verdad para siempre, siempre jamás, más que cualquier diamante.
Así que, bueno, si queréis decirle a alguien qué le queréis para siempre, le podéis regalar un diamante; pero si le queréis decir que le queréis para siempre siempre, regalále un teorema, eso sí, quieto, lo tendréis que demostraré he, que vuestro amor no se quede en conjetura, gracias.

E6: Bravo [empieza a aplaudir y el grupo lo sigue]…

E7: está muy chido ese video.

P: ¿Les gustó? [aplaudiendo]

ET: si

…

P: bueno, entonces. Ya con base en el video y en lo que escribieron en su cuaderno, ¿qué entienden ustedes por conjetura y qué entienden por teorema?

E2: que el teorema es para siempre.

E8: que la conjetura es algo que no se demuestra, sólo se dice.

P: la conjetura no se demuestra, exactamente, ¿si? Bueno, de hecho, ustedes a lo mejor muchas veces pueden pensar en alguna conjetura o han hecho conjeturas… no nada más aquí en matemáticas.

E3: en la vida real.

P: en la vida real, ¿por ejemplo?

E3: hay, no sé

E7: ¿Cómo?, ¿La conjetura es algo que qué?, ¿qué se cree?

P: ajá. Puede ser como una idea que tenemos. Pero que no se demuestre

E7: pues, cuando estamos en pareja pensamos que vamos a durar para siempre, y nada.

[Todos ríen]

P: esa puede ser una conjetura o, por ejemplo, cuando ustedes tienen su novio o su novia y le están mandando mensajes y no les contesta. ¿Qué piensan?

E7: bien tóxico, jaja.

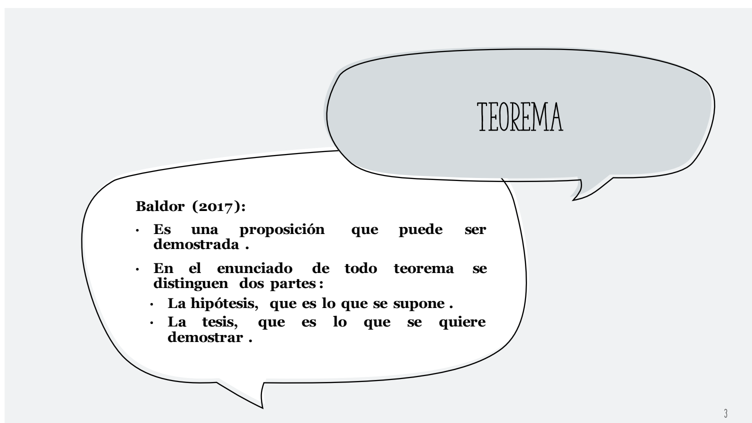
E9: me está engañando

E7: y nada, que sí es cierto.

E9: es un teorema.

[Todos ríen]

P: si solamente pensamos, sin comprobar nada, es una conjetura. Entonces nos dice, los teoremas son para siempre [lo escribe en el pizarrón] y, además, requieren ser demostrados. Estas son algunas de sus características.
Vamos a seguir con la presentación [proyecta la diapositiva]. Y entonces nos dice, ¿qué es un teorema? Bueno, de acuerdo con Baldor, también tiene estas características: es una proposición, una proposición pensemos que es como un enunciado, que puede ser demostrada, ahí está otra vez esta característica. Luego nos dice que en el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: una que es la hipótesis y otra es la tesis.



E6: ¿La qué?

P: la tesis, que es la parte que tenemos que demostrar

E6: ¿entonces la tesis, digo la hipótesis y la conjetura se parecen?

P: podría ser, ajá. La hipótesis de hecho es una suposición. Por ejemplo, pensemos una situación de la vida: ustedes quieren ir a una fiesta y su mamá les dice: pues sabes que, si limpias toda la casa vas a la fiesta. Ahí, por ejemplo, podríamos decir que la hipótesis es que ustedes van a limpiar toda la casa y la tesis es que, bueno, ya si la limpian, entonces ahora si van a la fiesta.
Entonces, digamos que la hipótesis también juega, por decirlo de alguna manera, las bases de una condición, para que suceda esto, tiene que pasar primero esto.

Objetivo general:
Identificar las características de un teorema y diferenciarlo de una conjetura.

Evento desencadenante:
Se proyecta extracto de video "Las matemáticas son para siempre"

Indicadores de conocimiento encontrados:

Codificación:

Iniciales del subdominio-iniciales de la categoría

KoT-D. Conocer una definición de teorema.
KPM-PMG. Conocer el papel de las analogías en la práctica para la comprensión de temas matemáticos.
KPM-PMG. Conocer las características de los teoremas en matemáticas.
KPM-PTM. Conocer que una práctica ligada al estudio del TFC es hacer explícita la diferencia entre teorema y conjetura.
KPM-PTM. Conocer el papel de las demostraciones matemáticas en la validación de teoremas.
KFLM-AE. Conocer que un aspecto que causa emociones agradables cuando se estudian temas matemáticos, es relacionar el tema con situaciones contextuales a los estudiantes.
KMT-RD. Conocer el uso del video como recurso didáctico en la enseñanza del TFC.

Indicadores de enseñanza para la comprensión robusta encontrados:

C1. Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.
AEC1. El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa; o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en tal compromiso.
API1. Los estudiantes explican sus ideas y razonamientos. El maestro puede atribuir propiedad a las ideas de los estudiantes en la exposición y/o los estudiantes responden y construyen sobre las ideas de los demás.

Evento de término:
Estudiar las características de los teoremas en matemáticas.

No: 3

Episodio: aspectos históricos del Teorema Fundamental del Cálculo

Extracto:

Codificación:

P=*profesora*

E1, E2, E3,… hasta E11 =*Estudiante 1, estudiante 2, estudiante 3…, estudiante 11*

P: [Proyecta la diapositiva].
Vamos a ver un poco de historia, bueno ustedes a lo mejor han escuchado hablar de estos dos personajes: Gottfried Leibniz e Isaac Newton.

E1: nada más de Isaac Newton

E5: yo si, en Física

E10: ¿en Física?, no

E5: en Física si… es una conjetura, jajaja

P: ah ok, no están tan seguros. Bueno a Isaac Newton seguro si lo estudiaron en Física, vean es las fechas en las que ellos vivieron, fueron muy contemporáneos… es decir, vivieron más o menos en la misma época, pero Isaac Newton era inglés y Leibniz era alemán, y a los dos se les atribuye la invención del cálculo y también, la demostración del TFC. Como es un teorema, dijimos que debe estar demostrado. Entonces, ellos dos, digamos que ya había gente que ya habían trabajado en el TFC.

E3: ¿antes de ellos?

P: antes que ellos, si. Pero ¿saben qué les faltó? Les faltó pasar de conjetura a teorema, es decir, ¿qué les faltó?

E2: comprobarlo

E4 y E10: demostrarlo

P: demostrarlo; entonces, ellos fueron los primeros que sí lo demostraron, y aunque son de la misma época pues pensaríamos que trabajaron juntos.

E3: pero no

P: pero no, cada uno lo demostró de manera diferente. Entonces, ¿eso que quiere decir? Que este teorema lo podemos demostrar no nada más de una manera, sino de muchas maneras. Newton lo demostró haciendo ver que el algoritmo inverso que resuelve las tangentes resolvía el área bajo una curva; mientras que Leibniz lo demostró por medio de sumas y restas como operaciones inversas.

Objetivo general: Identificar a los personajes que demostraron el TFC por primera vez y, por lo tanto, forman parte de la historia de este teorema.
Evento desencadenante: Presentación de la foto de Gottfried Leibniz e Isaac Newton.
Indicadores de conocimiento encontrados: **Codificación:** Iniciales del subdominio-iniciales de la categoría **KoT-FA.** Conocer que Isaac Newton y Gottfried Leibniz forman parte de la historia del TFC. **KoT-FA.** Conocer que Isaac Newton es conocido por los estudiantes, al ser estudiado en temas previos de Física. **KoT-FA.** Conocer que Newton demostró el TFC a partir de reconocer que el algoritmo inverso que resuelve el problema de las tangentes, resolvió el problema de las áreas. **KoT-FA.** Conocer que una de las formas en que Leibniz demostró el TFC fue observando a la derivada y la integral como operaciones inversas a través de sumas y restas. **KPM-PTM.** Conocer que el TFC puede ser demostrado con procedimientos distintos. KFLM-MI. Conocer que los estudiantes emplean la palabra "comprobación" como un sinónimo de "demostración".
Indicadores de enseñanza para la comprensión robusta encontrados: **C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.
Evento de término: Distinguir que Newton y Leibniz se consideran descubridores del TFC, porque fueron los primeros en demostrarlo.

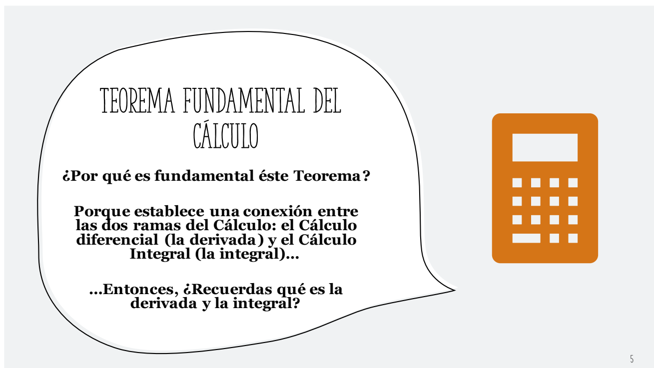
No: 4 **Episodio:** el TFC establece una relación inversa entre derivada e integral.
Extracto: **Codificación:** ***P=****profesora* ***E1, E2, E3,… hasta E11 =****Estudiante 1, estudiante 2, estudiante 3…, estudiante 11* *P: Bueno, vamos a seguir [proyecta diapositiva]. Ahora si, el TFC, nos hacen la pregunta: ¿por qué será fundamental este teorema?* *E5: porque es como una base para… no sé* *E1: suena como a básico.* *P: suena a básico*

E6: necesario

P: necesario, ¿qué más?

E4: esencial

P: esencial… bueno, pues justo eso representa este teorema en el cálculo. nos dice que es fundamental porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo, es decir, el cálculo diferencial a través de la derivada y el cálculo integral a través de la integral.



Objetivo general:
Identificar que la parte fundamental del TFC es que establece una relación inversa entre derivada e integral.

Evento desencadenante:
La profesora pregunta ¿Qué significa la palabra fundamental y por qué creen que el TFC es fundamental?

Indicadores de conocimiento encontrados:

Codificación:
Iniciales del subdominio-iniciales de la categoría

KMLS-RAE. Conocer que uno de los aprendizajes esperados en cuanto al TFC del programa de estudios de Cálculo Integral en el 5to semestre del bachillerato tecnológico es que el alumno descubra las relaciones inversas entre derivación e integración.
KMT-ETTE. Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es estudiar el significado de cada palabra por separado (teorema, fundamental, cálculo) y después unir la frase.

Indicadores de enseñanza para la comprensión robusta encontrados:
C1. Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.
API1. Los estudiantes explican sus ideas y razonamientos. El maestro puede atribuir propiedad a las ideas de los estudiantes en la exposición y/o los estudiantes responden y construyen sobre las ideas de los demás.

Evento de término: se menciona que lo fundamental del TFC es que muestra una relación inversa entre las dos ramas del Cálculo: derivación e integración.

No: 5

Episodio: definición de derivada e integral.

Extracto:

Codificación:

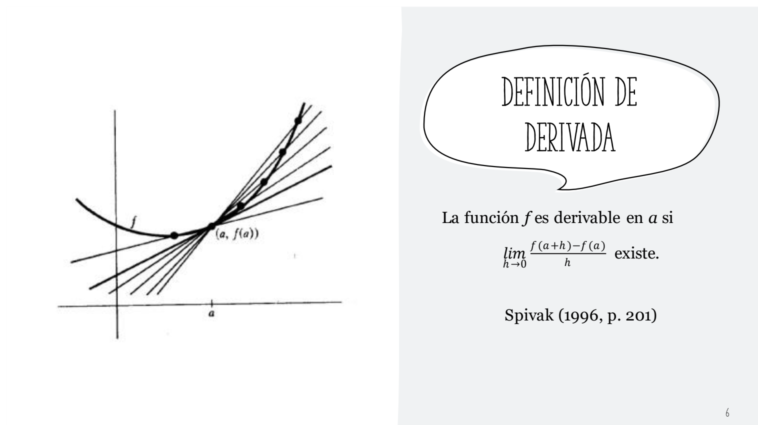
P=*profesora*

E1, E2, E3,… hasta E11 =*Estudiante 1, estudiante 2, estudiante 3…, estudiante 11*

P: [El TFC] como hace una relación inversa entre estas dos [derivada e integral], tenemos que preguntarnos: ¿qué es la derivada y qué es la integral?, ¿ustedes recuerdan qué es la derivada?

E7: no

P: ¿no recuerdan nada? [presenta la diapositiva]



E4: no

P: bueno, Spivak (1996) nos da esta definición, nos dice definición de derivada, una función f, una función f puede ser esta curva, aquí la está representando con una curva, es derivable en a, es decir, en este punto o algún otro, si, vean como nos da como una condición si, el límite cuando h tiende a cero, h si se fijan, es un incremento desde a hasta un determinado punto.
Aquí tengo mi punto a y yo puedo decir que por ejemplo, este punto sería a + h, o este punto también puede ser, o este, o este, lo vamos a ver de forma dinámica. [presenta un recurso de GeoGebra sobre la derivada]. Fíjense bien, esto es lo mismo que tenemos en la imagen. Observen como prendo y apago esta recta que corta a la función en el punto a y en el punto a + h. esta recta, en la posición que está es una recta secante, ¿verdad?, ¿por qué secante?

E5: porque la corta a las dos

P: porque corta en dos puntos a la función… entonces este punto a + h yo lo puedo acercar a a, si disminuyo la distancia de h… vean que a medida que lo acerco, se va juntando, se va juntando, hasta que, ese incremento en h se hace cero, ¿y qué pasó con la recta secante?

E7: desaparece

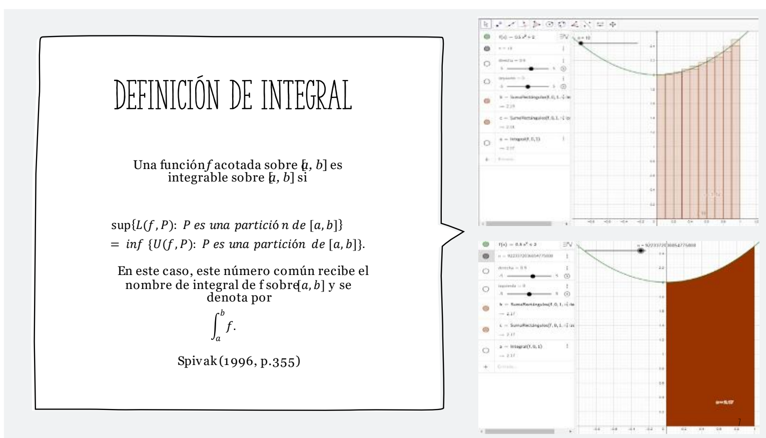
P: desapareció aquí, pero en realidad lo que pasa que se convirtió en una recta tangente. ¿Cuál es la diferencia entre la recta secante y la tangente?

E5: que la tangente pasa por un punto

P: la tangente toca a la función en un punto. Entonces, podríamos comparar a la derivada con la recta tangente de una función. Si ustedes recuerdan, en trigonometría veían que la tangente es igual ¿al cateto opuesto…?

E10: sobre la hipotenusa

P: sobre la hipotenusa, ¿verdad? Luego, en Geometría Analítica veían que ese cateto opuesto, pensando en dos puntos ubicados en el plano cartesiano, se puede sustituir como $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$*. Esta fórmula [de la derivada], si se fijan, es lo mismo, esto nos representaría el cateto opuesto y esto representaría el cateto adyacente y sería la tangente. Entonces, eso es la derivada de forma gráfica y algebraica.*
Y ahora, ¿qué es la integral? [proyecta la diapositiva]



E5: no, pues menos.

P: bueno, la integral tiene que ver con área, precisamente lo que han ustedes estado haciendo de forma aproximada. La integral nos dice: una función f, acotada sobre a, b, este es un intervalo, ustedes para sacar áreas han tenido que elegir un intervalo de la función, nos dice es integrable en ese mismo intervalo si… nos da ahí una serie de nomenclatura que van a decir ¿eso qué significa? Lo podemos leer como la suma superior del límite infinito es igual a la suma inferior del límite infinito. ¿esto que quiere decir? Bueno, si se fijan en la primera imagen, yo dividí el intervalo 0,1 de esta función en 10 rectángulos. Esta área ustedes la pueden obtener por medio de Sumas de Riemann. Bueno, aquí tengo rectángulos que están

por arriba de la función y tengo rectángulos que están por debajo. Y si yo reviso cuanto me da la suma de las áreas de los que están por arriba, obtengo 2.19; mientras que la suma de los que están por debajo me da 2.14. entonces, ¿cumplo con la igualdad? *E7: no* *P: de acuerdo, ahora revisemos qué pasa con la otra imagen, ahora tenemos un número muy grande de rectángulos, digamos que tienden a infinito, y tengo también rectángulos por arriba y rectángulos por abajo… y vean cómo son las sumas de estos rectángulos tanto por arriba como por abajo.* *E6: son iguales* *P: eso quiere decir que esta función en este intervalo, es integrable. Entonces, a manera de resumen, diremos que con la integral nos referimos a área bajo la curva de una función y la derivada ¿qué dijimos?* *E5: una recta infinita* *P: una recta tangente a la función*
Objetivo general: Definir a la derivada y a la integral de una función.
Evento desencadenante: La profesora pregunta ¿Qué es la derivada?
Indicadores de conocimiento encontrados: **Codificación:** Iniciales del subdominio-iniciales de la categoría **KoT-D.** Conocer la definición de derivada de una función. **KoT-D.** Conocer la definición de integral de una función. **KSM-CS.** Conocer que existe una conexión entre el concepto de límite con la derivada e integral definida. En la integral definida como una suma cuyo límite tiende a infinito y con la derivada a través de una recta secante cuyo incremento tiende a cero para convertirse en una recta tangente. **KSM-CS.** Conocer que existe una conexión de simplificación entre los conceptos de recta secante, recta tangente y pendiente de la recta con el de derivada. Ya que en la definición de derivada se aprecia como el incremento h tiende a cero para pasar de una recta secante a la función a una recta tangente de la misma. **KMLS-FD.** Conocer que una dificultad para el aprendizaje del TFC es que, al momento de abordar el tema, los estudiantes muestran poca comprensión del concepto de derivada.
Indicadores de enseñanza para la comprensión robusta encontrados: **C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas. **DC1.** Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

EF1. El maestro solicita a los estudiantes que piensen y la instrucción subsiguiente responde a esas ideas, basándose en comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.

Evento de término:
La profesora hace un resumen entre la derivada y la integral de una función.

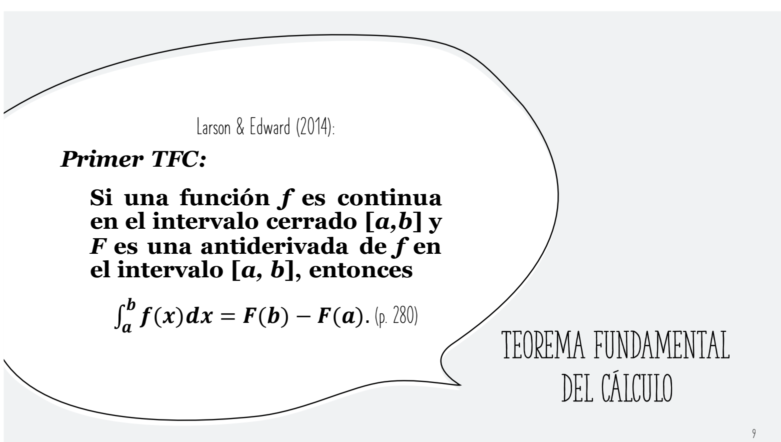
No: 6

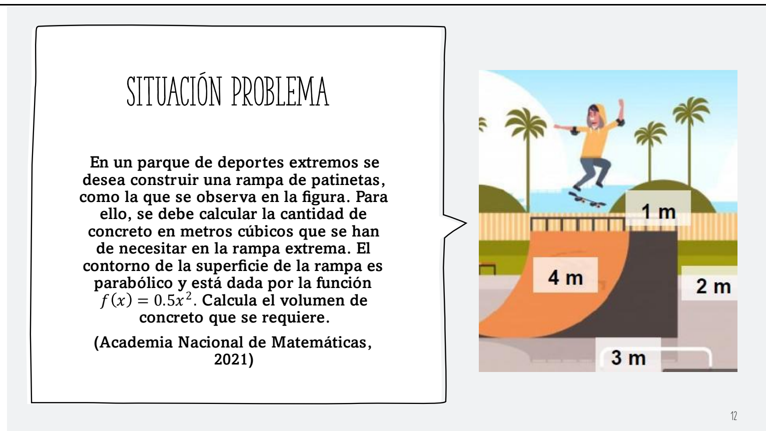
Episodio: proposición del Teorema Fundamental del Cálculo

Extracto:

Codificación:
P=_profesora_
E1, E2, E3,… hasta E11 =_Estudiante 1, estudiante 2, estudiante 3…, estudiante 11_

Clase 2:
P: bueno, fíjense bien chicos, lo que vamos a ver ahora es la proposición del TFC. El TFC está compuesto por dos partes. La primera parte la vamos a mostrar con un ejemplo y la segunda la vamos a demostrar. Entonces, comenzando con la primera, esta nos dice lo siguiente [proyecta la Figura 13], voy a anotar aquí primer teorema fundamental del cálculo. Lo que nos dice es: si f es continua en el intervalo cerrado a coma b y F mayúscula es una antiderivada de f en el mismo intervalo, entonces, la integral desde a hasta b de la función f es igual a la antiderivada de f evaluada en b menos la antiderivada de f evaluada en a. como les decía, esta primera parte la vamos a mostrar con un ejemplo, que es el siguiente [proyecta las diapositivsa].





P: vamos a mostrar esta primera parte por medio del ejemplo que ustedes ya han resuelto antes con Sumas de Riemann y con las propiedades de notación sigma. Tenemos esa función que nos da el problema para lo que es la superficie de la rampa. Esta superficie ya la habíamos representado antes en un plano cartesiano. ¿Cuánto mide la rampa?

E4: 2 metros de alto y 2 de base.

P: muy bien. Entonces, ¿qué debemos sacar primero?

E6: el área del lado y después multiplicarla por 4.

P: ok, bueno, ahí si se fijan tenemos un rectángulo. ¿Cuál es el área de ese rectángulo?

E1: 2 por 1, 2

P: bien, ya tengo el área del rectángulo, ahora nos falta el área de la parte curva, y nos dice que esa curva es la función $f(x) = 0.5x^2$. *y nos interesa el área de esa función ¿en cual intervalo?*

E1: de cero a dos.

P: muy bien, esto ya lo habían hecho con otros métodos, pero ahora vamos a aplicar la primera parte del TFC para obtener esa área. Y entonces, tenemos que hay que integrar desde a hasta b, cuando nos dice que desde a hasta b, ¿qué significa?

E4: a es cero y b es dos, porque es el intervalo.

P: ok, entonces reemplazo acá mis valores, desde cero hasta dos, de la función que es $0.5x^2$ *dx. Y lo que me dice es que primero debemos antiderivar la función. ¿Cuál es la antiderivada de esa función?*

E7: ehhh, a ver… $\frac{0.5x^3}{3}$

P: ok, ahora si se fijan, lo que nos dice es que debemos evaluar la función antiderivada con los valores de b y de a. entonces me quedaría:

$$\int_0^2 0.5x^2\,dx = \frac{0.5x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{0.5[(2)^3]}{3} - \frac{0.5[(0)^3]}{3} = \frac{4}{3}$$

Ahora, sumando el área del rectángulo, ¿cuánto nos da el área del perfil de la rampa?

E2: 2.75

P: muy bien, ahora para sacar el volumen de la rampa que nos pide el problema, ¿qué nos falta?

E1: multiplicar por 4

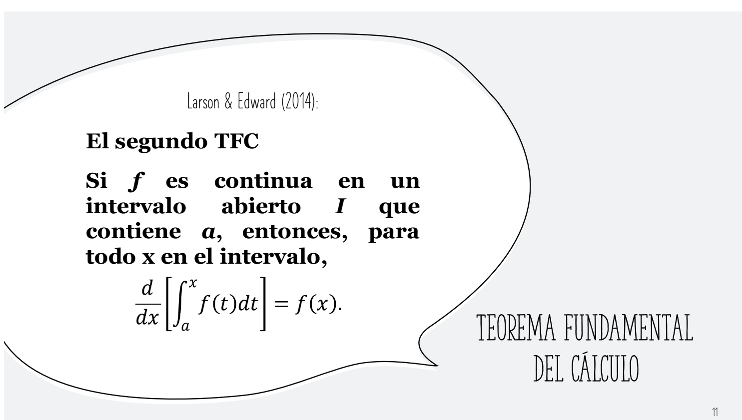
P: ok, entonces, ¿cuánto es el volumen?

E1: 14 metros cúbicos.

P: ok, ¿es lo mismo que les había dado cuando lo hicieron con sumas de Riemann?

E2: si, pero ahora más rápido.

P: ok, entonces, si se fijan, de esta forma mostramos con este ejemplo, la primera parte del TFC. Ahora, vamos a pasar a la segunda parte [proyecta la diapositiva]. Bueno, esta parte nos dice lo siguiente: si f es continua en el intervalo abierto que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo, tenemos que la derivada de la integral de la función f, desde a hasta x, es igual a la función original.



P: entonces, para demostrarlo, vamos a trabajar con un applet de GeoGebra que les estoy proyectando [Enlace del applet: https://www.geogebra.org/m/em3zrwwb], *aquí se ven los ejes, el eje x y el eje y, voy a prender la función que puse en esta práctica, es una función cualquiera. ¿Si se ve?*

E4: ah, ya.

P: en esta función vamos a elegir un intervalo, y chequen que la proposición del TFC nos dice que, para poder cumplir el teorema, la función debe ser continua en el intervalo que se esté trabajando. Entonces, aquí puse dos puntos, a y b, que representan mi intervalo. Estos puntos los voy a ubicar en un intervalo de la función que sea continua. Ahora, entre ese intervalo, vamos a ubicar un punto x, ese punto x lo podemos mover, vean cómo puedo ubicarlo a lo largo del intervalo. Vean como muevo el punto x y la altura de x varía en la gráfica de la función. Lo que tenemos que demostrar es que esa función f(x) es igual a la derivada de la integral desde a hasta x, de esta función, ¿si?... entonces, hasta aquí, tenemos un punto x dentro del intervalo; y entonces puedo tener también un punto x+h, es decir, a partir de x, podemos sumarle una cierta cantidad a esa x, que es h, y así llegamos al punto x+h. o sea que la distancia que hay entre x y x+h, ¿sería?

E5: h

P: exacto, ¿hasta ahí hay alguna duda?

E1, E3 y E6: no

P: bueno, luego, fíjense bien, yo tengo que ver, imagínense que tengo mi función f(x) y necesito una antiderivada, es decir, F(x), y luego esta última la derivo. Entonces, de acuerdo con la definición de derivada, tendríamos los siguiente, vas a poner la integral desde a hasta x+h de f(x), dx. Menos la integral desde a hasta x de f(x) dx, y todo esto lo vamos a dividir entre h. y todo esto ¿qué significa gráficamente? Fíjense bien, me está diciendo que tenemos la integral desde a hasta x+h, acuérdense que integrar estamos hablando de área. Entonces yo puedo tener el área de este intervalo, a hasta x+h, y a esta área le tengo que restar la integral desde a hasta x, la voy a mostrar. Así que si al área del intervalo desde a hasta x+h le restamos el área del intervalo desde a hasta x, ¿qué nos va a quedar?

E7: h

E1: el área de h

P en ese intervalo ¿verdad? Es decir, esta parte que voy a prender. Entonces vamos a trabajar solamente con esa partecita. Es decir, que aquí yo puedo decir que eso va a ser igual a la integral desde x hasta x+h, ¿si? Entonces si se fijan lo hicimos gráficamente, porque quizá en la forma algebraica no se comprenda. Y luego, en este intervalo, vamos a ubicar un punto c cuya altura en ese intervalo, nos genera un rectángulo cuya área es igual que el intervalo bajo la curva desde x hasta x+h. por lo tanto, decimos que ese punto representa el teorema del valor medio. Ahora, si hacemos que h tienda a cero, ¿qué pasa?

E3: es igual

P: ¿igual a qué?

E3: a la misma función del inicio.

P: ok, entonces así demostramos que si derivamos la integral de la una función, regresaremos a la función original, con lo cual nos hace ver que la derivada y la integral son operaciones inversas… ahora, el TFC no es un tema aislado que van a estudiar en este semestre. Esta relacionado con otros temas que ustedes estudiarán después. Por ejemplo, para los que estudien alguna ingeniería o carreras relacionadas, verán que es indispensable para resolver ecuaciones diferenciales. Otro tema con el que se relaciona el TFC es el de variables aleatorias continuas, el cual van a estudiar el próximo semestre en Probabilidad. Ya que para obtener la probabilidad en esas variables, van a emplear el TFC.

Objetivo general: enseñar la proposición del TFC y su demostración.

Evento desencadenante: la profesora presenta la diapositiva de la proposición del TFC.

Indicadores de conocimiento encontrados:

Codificación:

Iniciales del subdominio-iniciales de la categoría

KoT-P. Conocer un procedimiento para demostrar el TFC.
KoT-D. Conocer la proposición del TFC.
KoT-PF. Conocer que el Teorema del valor medio es necesario para demostrar el TFC.
KoT-RP. Conocer la representación algebraica del TFC.
KoT-RP. Conocer la representación verbal del TFC.
KoT-RP. Conocer la representación gráfica del TFC.
KoT-FA. Conocer que una aplicación del TFC es en la determinación del área de una región plana.
KSM-CC. Conocer que el TFC tiene conexión con el tema de variables aleatorias en probabilidad, ya que para obtener la probabilidad de que una variable aleatoria continua en un intervalo [a, b], se requiere calcular el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad en dicho intervalo.
KSM-CA. Conocer que el TFC es un procedimiento auxiliar en la resolución de ecuaciones diferenciales, ya que para encontrar la o las funciones solución de la ecuación diferencial se requiere trabajar con derivadas y antiderivadas.
KMT-RD. Conocer que el uso del software GeoGebra favorece que los estudiantes visualicen los aspectos dinámicos de acumulación y variación del TFC.
KMT-ETTE. Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es por medio de un ejemplo que los estudiantes hayan resuelto de manera previa empleando sumas de Riemann, para que hagan una comparación en cuanto al procedimiento empleado.

Indicadores de enseñanza para la comprensión robusta encontrados:

C1. Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.
DC1. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.
AEC1. El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa; o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en tal compromiso.

EF1. El maestro solicita a los estudiantes que piensen y la instrucción subsiguiente responde a esas ideas, basándose en comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.
Evento de término: la profesora menciona algunos temas matemáticos posteriores en los que se utiliza el TFC.

No: 7

Episodio: Actividad referente al TFC.

Extracto:

Codificación:

P=*profesora*

E1, E2, E3,... hasta E11 =*Estudiante 1, estudiante 2, estudiante 3…, estudiante 11*

P: les voy a repartir esta actividad y quiero que la resuelvan de forma individual, en la próxima clase estaremos revisando sus respuestas y dudas.

Clase 3:

…¿Cómo les fue con la actividad?, ¿Qué dudas tuvieron?

E3: todo, es que yo no sé esos numeritos y señas que tiene maestra.

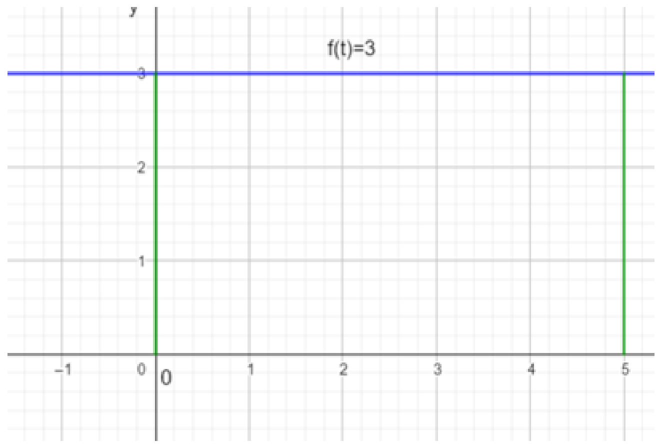
E1: ire, en esta parte aquí viene una x, y luego una e y luego una R, y pues esas cosas no supe qué hacer.

P: bueno, todo eso tiene que ver con el lenguaje matemático. Si no entendemos el lenguaje matemático va a ser difícil que resuelvan los ejercicios. El lenguaje matemático es como un idioma, entonces debemos entenderlo para podernos comunicar con ese ejercicio [proyecta diapositivas].

En la primera dice, nos da una función $f(t) = 3$. *Esta función* $f(t)$ *es como si tuviéramos* $f(x)$, *ahí nada más estamos cambiando la variable. Entonces tenemos ahí en nuestro plano y la función* $f(t) = 3$ *si se fijan es una función que está así [dibuja la gráfica en el pizarrón. Es decir, una función constante]. ¿Por qué constante? Porque independientemente del valor de t, que es mi variable, cómo me está diciendo que* $f(t) = 3$, *no tengo en dónde sustituirla. Entonces, quiere decir que* $f(t)$ *siempre va a valer 3. Es decir, cuando t vale 1, f(t) vale 3, cuando t vale 2, f(t) vale 3; siempre f(t) vale 3. Y nos dice, encuentre el área de la región bajo la recta* $f(t) = 3$, *es decir, esta área, entre t=0 y t=5. Es decir, vamos a encontrar ésta área. Y nos dice ahí: utiliza fórmulas geométricas. Entonces, ¿geométricamente cómo lo harían?*

Función $f(t) = 3$

h) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = 5$. Utiliza fórmulas geométricas.



E2: base por altura, es un rectángulo

E1: esa si está medio fácil maestra

P: ¿Cuánto mide la base?

E1: 5

P: ¿Y la altura?

Varios: 3

P ¿cuánto es el área?

E1: 15

P: muy bien 15 unidades cuadradas. No sabemos si son centímetros, metros o alguna otra unidad. Y de esa manera quedó resuelta la primera.
Ahora, en la segunda nos dice, si t, esto de aquí que parece como una E redondeadita, lo vamos a leer pertenece. En lenguaje matemático, esto significa pertenece a R. esa R que ven ustedes ahí significa el conjunto de los números reales. ¿Saben cuáles son los números reales?

E4: los que están expresados ya ahí ¿no? como que, por ejemplo que diga 3 y tiene que ser 3.

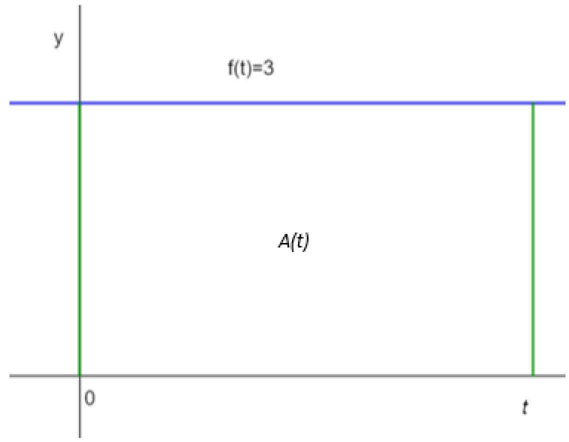
P: bueno, en matemáticas tenemos varios conjuntos de números. Los voy a dibujar aquí… el primer conjunto de números, digamos, el más básico, es como se aprenden los números los niños y es el conjunto de los números naturales. Y los números naturales son los números enteros positivos, por ejemplo 1, 2, 3, etc., enteros y positivos.

Bueno, hay otro conjunto de números que se llaman números enteros, y estos enteros abarcan tanto a los naturales, pero también abarcan al cero y a los negativos. Es decir, los naturales son enteros positivos, mientras que los naturales abarcan también al cero y a los negativos pero siguen siendo enteros. Luego, tenemos otro conjunto de números, que serían los números racionales. Los racionales son los números que los podemos representar como el cociente de dos enteros, por ejemplo, menos cinco séptimos… y estos los podemos representar así o los podemos representar en decimal, en decimal, ¿cómo sería este si dividimos cinco entre siete?

E4: cero punto setecientos catorce.

P: por ejemplo, en este, lo más apropiado es que lo representemos en forma de fracción, porque si se fijan si lo representamos como decimal, a veces tenemos que redondear cifras y eso nos hace trabajar con el número de una forma inexacta.
Muy bien, y luego hay otro conjunto que abarca a todos estos, que son los números reales, abarca a todos estos más los números irracionales. Fíjense bien, los racionales representan el cociente de dos enteros; los irracionales no los podemos representar como el cociente de dos enteros, y son todos aquellos números que en su representación decimal tienen cifras infinitas y no periódicas. Por ejemplo, raíz de cinco, el mismo pi, que comúnmente conocemos como 3.1416, pero en realidad tiene una cantidad infinita de cifras y estas no se repiten… entonces, los números reales abarcan a todos estos conjuntos.
Ahora, regresando al ejercicio, qué es lo que me está diciendo: si t pertenece al conjunto de los números reales, es decir, que t puede ser un entero positivo, un entero negativo, el mismo cero, puede ser un número fraccionario o un número irracional…
Después dice, t mayor que cero, es decir, con esta condición ya quitamos una gran cantidad de números reales…
Nos dice: sea A(t) el área de la región bajo la recta f(t) = 3. Si se fijan tenemos esta misma [señalando la función], solamente que aquí nos dice que calculemos su área entre t igual a cero y t igual a t. entonces, ustedes me dijeron que el área de esta figura se obtiene multiplicando la base por la altura. Entonces, con los valores que nos da, ¿cómo quedaría mi área? Es decir, ¿cuál es mi base?, [proyecta diapositiva].

i) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = t$. Plantea una expresión para $A(t)$.



Respuesta: ______________________________

E4: de cero a t

P: de cero a t, ¿Qué distancia hay?

E4: t

P: ¿Y cuál es mi altura?

E1: 3

P: 3, o sea que podemos decir que A(t) es igual a t por 3 o 3 por t, o 3t, acuérdense que el orden de los factores no altera el producto. Y esa sería la expresión para el área… si se fijan no está tan complicado, pero el lenguaje matemático es lo que nos estaba complicando las cosas.
Ahora dice: deriva A(t) obtenido en el inciso anterior. Esa función que obtuvimos, si yo derivo a Atx), ¿Qué obtengo?

E7: t

P: ¿seguros?¿Recuerdan cómo se deriva una función?

E7: se eliminan los números que están al lado de t, ¿no?

P: vamos a repasar cómo derivar una función. Supongamos que tenemos la función $f(x) = cx^n$ *y para derivar usamos la regla de* $f'(x) = ncx^{n-1}$*: trasladándola a la función A(t), la c sería en este caso el 3, y tengo un exponente en t, ¿qué exponente tiene t?*

E1: 1

P: entonces aplicando la formulita me dice, vas a bajar a n, es decir, al exponente, y luego, lo multiplicamos por la constante, es decir, por 3, y luego a mi literal, le voy a restar al exponente menos uno, ¿cuánto es 1-1?

E1: cero

P: cero, entonces, si se fijan, la derivada es ¿1x3?

E2: 3

P: ¿t a la cero cuando es?

E2: cero

E4: no, se convierte en 1.

P: bueno, t a la cero, o cualquier literal o número a la potencia cero, es 1.
Entonces t a la cero es igual a 1, igual 3 por 1, ¿cuánto es?

V: 3

P: entonces, ¿la derivada de 3t es?

V: 3

P: y luego nos dice, de acuerdo con tus resultados, escribe ¿qué relación existe entre A´(t) y f(t)?, ¿Cuál será esa relación?, ¿Qué observan?

E3: que es el mismo valor

E6: es lo mismo

P: ¿es lo mismo verdad? Y es que si se fijan tenemos una función original, luego sacamos de esta función, su integral, ¿por qué? porque de esa función estamos sacando su área en un intervalo, cuando nosotros representamos una función para su área, realmente lo que estamos haciendo es integrando la función… y luego, si yo derivo esta misma [señalando la función integrada], obtengo la función original.
Entonces, ¿recuerdan que es el teorema fundamental del cálculo o qué relación hacía?

E4: este… decía que es un teorema porque era algo que iba a comprobar

P: Algo que hay que demostrar ¿no?

E4: ajá, que se tenía que demostrar y que, el final de cuentas siempre iba a ser el mismo resultado, o el mismo proceso, bueno, eso que hicimos.

P: ajá, ok, de hecho en las demostraciones utilizamos diversos procedimientos. Entonces, regresando a lo que hicimos ahorita… ¿se acuerdan que decíamos el *teorema fundamental del cálculo lo que hace es decirnos eh, la derivada y la integral son operaciones inversas, y lo podemos ver aquí, si tenemos la función, la integramos y luego la derivamos, regresamos a la misma función. Es como cuando ustedes dicen, bueno, si tengo dos manzanas y a estas dos manzanas le sumo cinco ¿cuántas me van a quedar?*

V: 7

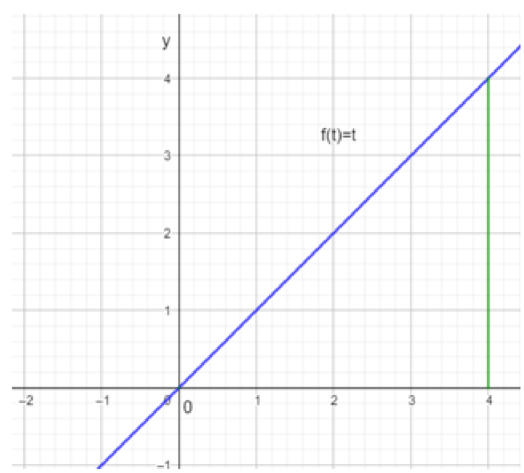
P: si a estas cinco manzanas le resto cinco, ¿cuánto me queda?

V: 2

P: 2, ¿si? Y regresamos a lo que teníamos… esto es algo parecido pero lo estamos demostrando, o mas bien, lo estamos mostrando con cosas que ustedes ya conocen, como el área, como la derivada que también ya la vieron, ¿si? Y entonces la idea es que se den cuenta de que para utilizar el TFC, pues empleamos conocimientos que ya teníamos… si se fijan, luego van a hacer lo mismo, pero ahora es con otra función que, ¿qué figura nos está formando? [proyecta diapositiva]

Función $f(t) = t$

1) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t = 0$ y $t = 4$. Utiliza fórmulas geométricas.



Respuesta: ______________________________

E3: un triángulo

P: ajá, y les pide obtener el área de forma geométrica, ¿Cómo es el área de un triángulo?

E7: base por altura entre dos

P: bueno, este, ahora si quiero que lo traten de hacer ustedes solitos y luego, bueno, esa sería la segunda parte y después viene otra parte donde está esto [muestra la actividad]. Vayan a esta página en su hojita y ahí está algo similar; a partir de la

información que les da la actividad, deberán contestar lo que se pide, quiero que respondan las preguntas que vienen acá… *Esto también les va a servir para otros temas posteriores, por ejemplo, más adelante, en Estadística, el TFC nos sirve para calcular la probabilidad de algunas variables, entre otras cosas; además, si nosotros comparamos el procedimiento que ustedes realizan para calcular un área por medio de rectángulos con sumas de Riemann, y aparte que es un poco laborioso y no siempre nos da un área exacta, sino una aproximada.* *Con el TFC nos vamos a ahorrar mucho de esos procedimientos y vamos a obtener áreas de forma más inmediata.* *Ahora si realicen la actividad 2 ustedes, muchas veces es cosa del lenguaje matemático lo que nos frena, pero ayúdense también entre ustedes para tratar de comprender. Y si tienen alguna duda en cuando al lenguaje matemático o lo que sea, me pueden buscar o enviar mensaje.* *Como trabajo final, van a realizar la actividad que les voy a repartir ahora; esta la van a resolver en equipo y se trata de, primero, resolver la actividad, ¿si?, puede ser en la hoja, y después realizar un video en el que expongan cómo resolvieron dicha actividad; los procedimientos, las consideraciones que tomaron, etc. yo les haré llegar por medio de su jefa de grupo la rúbrica de evaluación del video, para que tomen en cuenta los criterios. E igual, cualquier duda estaré en el cubículo o búsquenme por whatsapp, ¿sale?* *E3: si, maestra* *…*
Objetivo general: Descubrir el TFC mediante las actividades
Evento desencadenante: Solicitar a los estudiantes la resolución de la actividad.
Indicadores de conocimiento encontrados: **Codificación:** Iniciales del subdominio-iniciales de la categoría **KSM-CC.** Conocer que el TFC tiene conexión con el tema de variables aleatorias en probabilidad, ya que para obtener la probabilidad de que una variable aleatoria continua en un intervalo [a, b], se requiere calcular el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad en dicho intervalo. **KFLM-FD.** Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es la falta de comprensión del lenguaje matemático. **KFLM-FD.** Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es la falta de conocimiento de los conjuntos de números. **KFLM-AE.** Conocer que los estudiantes tienen una predisposición a emplear algoritmos geométricos cuando se les pide calcular el área debajo de funciones constantes o lineales. **KMLS-NEDC.** Conocer que uno de los aprendizajes esperados en cuanto al TFC del programa de estudios de Cálculo Integral en el 5to semestre del bachillerato tecnológico es que el alumno descubra las relaciones inversas entre derivación e integración. **KMT-ETTE.** Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es por medio de un ejemplo que los estudiantes hayan resuelto de manera previa empleando sumas de Riemann, para que hagan una comparación en cuanto al procedimiento empleado. **KMT-ETTE.** Conocer que una actividad para la enseñanza del TFC puede basarse en la obtención de áreas bajo la curva de distintas funciones.

KMT-ETTE. Conocer que una actividad para la enseñanza del TFC puede basarse en descubrir la relación inversa entre la derivada y la integral de una función. **KMT-ETTE.** Conocer que un tipo de ejemplo en la enseñanza del TFC que se le puede presentar al estudiante es encontrar el área bajo la curva de una función conocida en un intervalo determinado.
Indicadores de enseñanza para la comprensión robusta encontrados: **C2.** La explicación y la justificación de las ideas matemáticas centrales son coherentes con el nivel del grado. **C4.** Las intervenciones del maestro con el trabajo individual de los estudiantes apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas. **DC2.** Se ayuda a los estudiantes a participar de manera productiva con ideas matemáticas centrales. Esto puede implicar una lucha; ciertamente implica tener tiempo para pensar las cosas. **DC4**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una "lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas". **AEC2.** Todos en el equipo contribuyen a las discusiones matemáticas del grupo o subgrupo, o el maestro se mueve para que todos los miembros del equipo hagan contribuciones significativas. **AEC3.** El maestro apoya a los presentadores (si es necesario) para que se involucren, o la presentación se convierte en una actividad de toda la clase en la que el maestro apoya activamente una amplia participación y/o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en dicha participación. **AEC4.** La atención del maestro y/o sustituto está clara y ampliamente disponible para aquellos estudiantes que lo deseen, lo que resulta en acceso a las matemáticas. **API2.** Al menos un estudiante expone y defiende sus ideas/razonamientos, los estudiantes se basan en las ideas de los demás, o el maestro atribuye la propiedad de las ideas de los estudiantes en la discusión posterior. **API4.** El estudiante tiene una amplia oportunidad y capacidad para desarrollar sus ideas interactuando con el profesor, o, el profesor lleva la idea del alumno a la discusión en clase inmediatamente después de que termine el trabajo individual. **EF2.** El maestro solicita el pensamiento de los estudiantes y la discusión subsiguiente responde a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando posibles malentendidos. **EF4.** El maestro solicita a los estudiantes que piensen y las discusiones subsiguientes responden a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.
Evento de término: la profesora da instrucciones sobre la entrega de las actividades finales.

De esta manera se presentan los distintos episodios, buscando que las transcripciones relaten de manera fiel los diálogos, las acciones y las emociones que se presentaron en el aula.

V.1.2. Diario de investigación.

Ahora se presentan las transcripciones del diario de investigación. Estos pequeños relatos después de cada clase han sido de utilidad para recuperar datos que no se alcanzan a apreciar en las grabaciones y que se consideran de interés para la interpretación y análisis.

Pilotaje

Clase 1

El día de hoy tuve el primer pilotaje de la primera clase y dentro de las situaciones relevantes se encontraron las siguientes:

Al inicio tuve algunos imprevistos que me hicieron retrasarme. Ya que trataba de presentar e introducir el tema pero no encontraba el cable del proyector y eso me hizo desconcentrarme y ponerme nerviosa, por lo que terminé perdiendo unos 5 minutos.

Después pensé que tenía que sacar la clase como fuera y empecé a escribir en el pizarrón, a preguntarles algunas cosas y escribir algunas ideas que ellos tenían sobre lo que es un teorema.

Luego, encontré el cable y pude proyectar el vídeo que estaba planeado, me parecía muy importante para que los alumnos entendieran qué es un teorema, entonces, considero que esta parte más o menos les quedó claro, creo que lograron entender la diferencia entre un teorema y una conjetura.

Me quedé corta de tiempo en cuanto a lo que tenía planeado, en parte porque no encontraba el cable, pero también porque los estudiantes no recuerdan mucho los temas de función, límite, derivada y continuidad, ya que no tienen claro estas nociones que son importante para aprender el TFC. Esto me hace pensar que antes de la aplicación, se deben retomar estos temas.

Por otro lado, traté de desarrollar el tema TFC antes de antiderivada, tal cómo está planteado en los aprendizajes esenciales que ha publicado DGETI recientemente por motivo de la pandemia. Sin embargo, para la parte evaluativa del Teorema, creo que se debe abordar una introducción de la antiderivada. Ya que, de otra manera, los estudiantes no podrán aplicar el algoritmo. Por lo que se añadirá esta parte en la sesión de aplicación.

Al final de la clase repartí la actividad que deberán desarrollar los estudiantes pero ya no hubo tiempo de explicarles las instrucciones, por lo que se atenderán en la segunda sesión.

Después de la clase me di cuenta que olvidé mencionarles que me escriban en caso de dudas.

Clase 2

En cuanto llegué al salón, anoté mi número en el pizarrón otra vez para que puedan comunicarse y preguntar sus dudas, procurando que queden las menos posibles.

Continuamos con lo que se quedó pendiente en la primera clase respecto a la presentación y debate por parte del profesor y después pasamos a la actividad que se llevaron de tarea.

Al momento de preguntarles cómo les fue con la actividad que resolverían de forma individual, me han comentado que se les dificultó la comprensión del lenguaje matemático para comprender las instrucciones de lo que se les pide que realicen. Por lo cual, he tenido que explicarles las instrucciones y retomar los conjuntos de números: naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

En esta clase el enfoque fue la primera parte de la actividad, explicarles sobre todo las instrucciones y un ejemplo de cómo utilizar GeoGebra para responder las preguntas y creo que con eso los estudiantes han podido trabajar un poco mejor en equipos y compartir sus ideas antes de responder.

Clase 3

En esta última clase el enfoque fue la segunda parte de la actividad, que tiene que ver con la demostración del TFC y los estudiantes estuvieron trabajando en equipos pero ahora sí de forma más independiente.

Realizaba recorridos para ver el avance de los equipos y checar dudas específicas de cada equipo. Por lo que la clase ha podido ser más organizada respecto a la anterior.

Al final les expliqué lo que deberán hacer para la entrega de la última actividad y cómo deben presentarla.

Me queda la duda de si los estudiantes entendieron las instrucciones porque no se notan convencidos, pero tampoco las expresan, aunque les pregunte si tienen alguna duda.

Aplicación

Clase 1

El día de hoy tuve la aplicación de la primera clase y considero que ha sido más organizada que en el pilotaje, procuré que los cables del proyector y estuvieran a la mano para no perder tiempo en buscarlos.

Los estudiantes han estado más atentos y participativos que el grupo de pilotaje. Cuando proyecté el video que refiere la diferencia entre conjetura y teorema, al final han aplaudido y han expresado que les gusta ver videos y que han comprendido lo que es un teorema porque el matemático que da la conferencia les parece divertido.

Respecto al mismo video, también han expresado que les gustaría ver videos más seguido durante las clases de cualquier materia, pero en especial de las de matemáticas, pues ellos consideran que les ayuda a comprender mejor los temas.

Al igual que con el grupo de pilotaje, durante la presentación del TFC tuve que retomar los temas de función, límite, derivada y continuidad, sin embargo, había preparado información para que esta parte no se llevara mucho tiempo, además, del repaso previo que se tuvo.

Al final de la clase repartí la actividad que deberán desarrollar los estudiantes pero, al igual que en el pilotaje, no me alcanzó el tiempo para explicarles las instrucciones, aunque ahora sí les mencioné que si tienen alguna duda pueden preguntarme.

Al final de la clase una alumna se acerca a comentarme que le pareció muy bien que desglosara la frase "teorema fundamental del cálculo" e ir viendo cada palabra por separado: teorema, fundamental y cálculo; pues, de esa forma, ella dice que entendió mejor el concepto, porque la frase suena como un tema muy complejo.

Clase 2

Se continuó con la parte de presentación del TFC antes de pasar a la actividad.

Los estudiantes presentaron nuevamente dificultades para entender el lenguaje matemático y por esa razón no completaron la actividad. Por lo tanto, también hubo la necesidad de explicarles los símbolos que se incluyen y sus significados y los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

He implementado una pequeña introducción del tema de antiderivada, para que los estudiantes puedan desarrollar las actividades.

La primera parte de la actividad la estuvieron contestando en equipos y observo que no están muy familiarizados trabajando en equipo durante las clases de matemáticas, por lo que ellos expresan que es una situación nueva y que les gustaría que se trabajara así más seguido; también que las evaluaciones fueran en equipo.

Les comenté que justo la actividad se evaluará en equipo y eso les ha motivado a interesarse en el tema y en la clase, mostrándose más animados.

En general, considero que la clase estuvo mejor organizada respecto a la segunda del pilotaje.

Clase 3

En esta última clase los estudiantes estuvieron trabajando casi de forma independiente en sus equipos y yo realizaba recorridos para resolver sus dudas específicas.

He notado que les gusta trabajar en equipo aunque se les dificulte la organización y que, aunque a veces se desvían de lo que están haciendo para platicar sobre experiencias personales, no pierden mucho tiempo en esos temas y les ayuda a lograr concentrarse mejor durante el tiempo de resolver la actividad.

Muchas de las dudas que resolví fueron nuevamente respecto a que no comprenden del todo las instrucciones por el lenguaje matemático que se presenta, y ellos han optado por colocar el significado de algunos símbolos en la actividad.

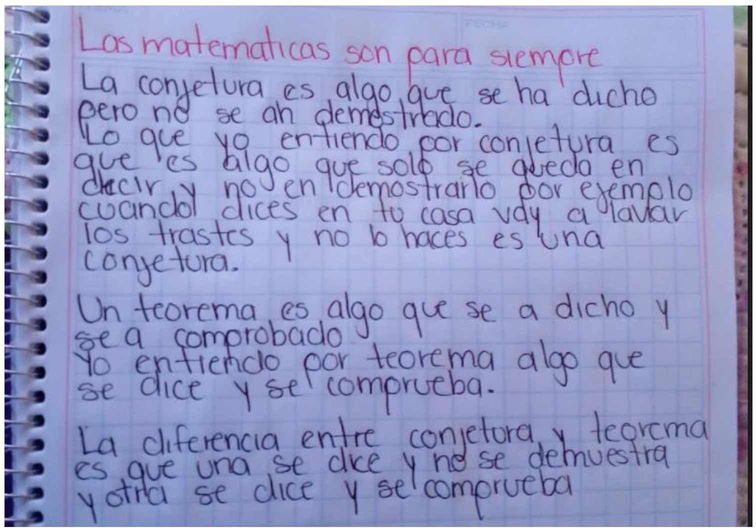
Al final de la clase se les explicó también la manera en que entregarían su último trabajo de clase y la manera en que deberán presentarlo para su entrega. Y se les reiteró que pregunten las dudas que surjan, para que tengan oportunidad de corregir antes de la entrega.

V.1.1. Producciones de los estudiantes.

En seguida se presentan imágenes de los procedimientos y resultados que los estudiantes dieron a las actividades que se les solicitaron realizar durante la implementación. Estas corresponden a las actividades diseñadas para la propuesta.

Figura 18

Los estudiantes pudieron diferenciar entre lo que es un teorema y una conjetura, con base en el contenido del video que se les presentó, y se observa como utilizan la palabra comprobación como un sinónimo de demostración.

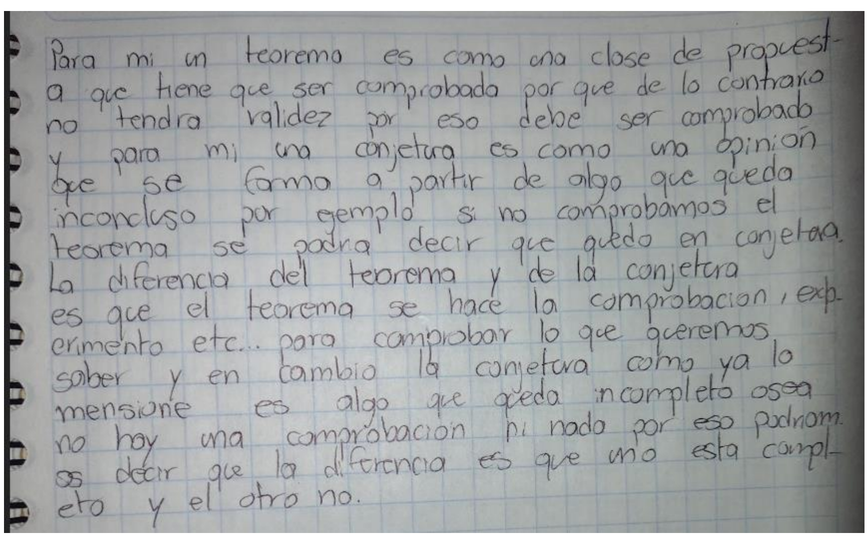


Los matematicas son para siempre

La conjetura es algo que se ha dicho pero no se ah demostrado.
Lo que yo entiendo por conjetura es que es algo que solo se queda en decir y no en demostrarlo por ejemplo cuando dices en tu casa voy a lavar los trastes y no lo haces es una conjetura.

Un teorema es algo que se a dicho y se a comprobado
Yo entiendo por teorema algo que se dice y se comprueba.

La diferencia entre conjetora y teorema es que una se dice y no se demuestra y otra se dice y se comprueba



Para mi un teorema es como una clase de propuesta que tiene que ser comprobada por que de lo contrario no tendra validez por eso debe ser comprobado y para mi una conjetura es como una opinion que se forma a partir de algo que queda inconcluso por ejemplo si no comprobamos el teorema se podra decir que quedo en conjetura. La diferencia del teorema y de la conjetura es que el teorema se hace la comprobacion, experimento etc... para comprobar lo que queremos saber y en cambio la conjetura como ya lo mensione es algo que queda incompleto osea no hay una comprobacion ni nada por eso podnomos decir que la diferencia es que uno esta completo y el otro no.

Actividad 1

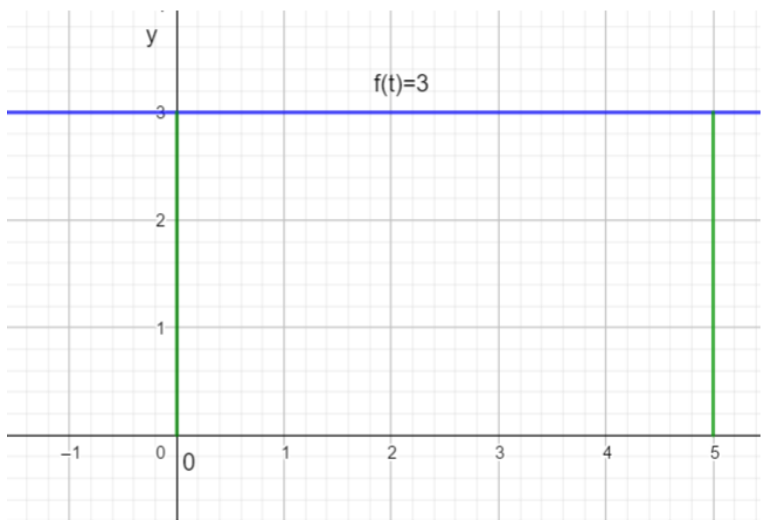
La primera actividad se puede consultar en el Anexo 1; esta se entregó impresa a los estudiantes y ellos la resolvieron de forma individual como tarea extra clase. Posteriormente, se les dio la oportunidad de revisar y comparar sus respuestas reunidos en equipos para que la entregaran corregida.

En seguida se muestran las instrucciones y respuestas que dieron los estudiantes a cada una de ellas.

Instrucción: en esta parte de la actividad se pretendía que el estudiante utilizara sus conocimientos previos de geometría para determinar el área de dos funciones distintas, una función constante y una función lineal, en un intervalo dado.

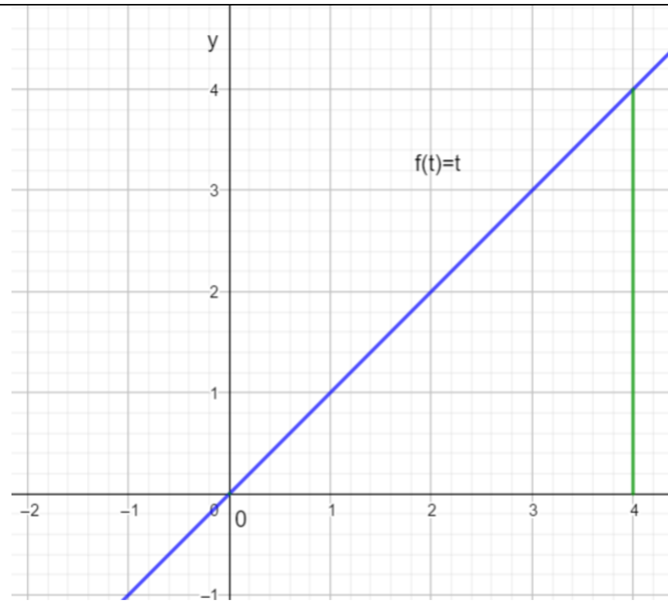
Función $\boldsymbol{f(t) = 3}$

a) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t= 0$ y $t= 5$. Utiliza fórmulas geométricas.

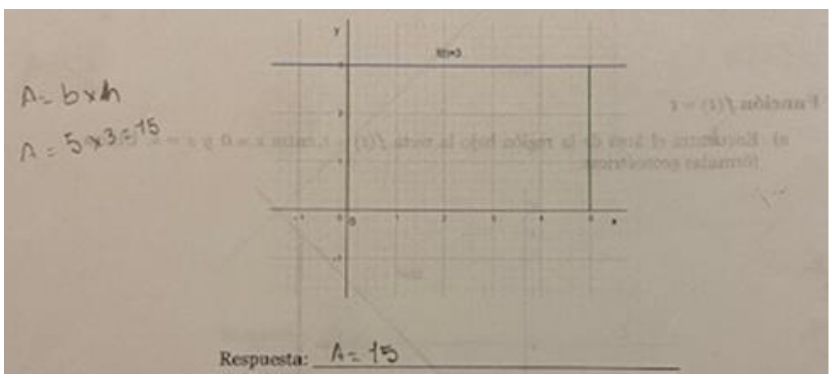


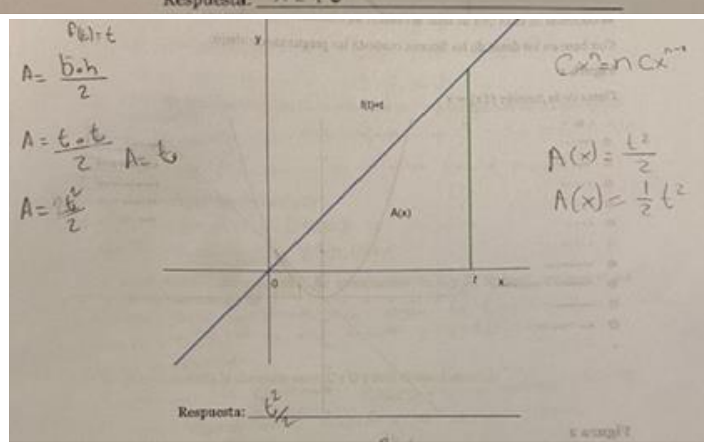
Función $\mathbf{f(t) = t}$

e) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t= 0$ y $t= 4$. Utiliza fórmulas geométricas.

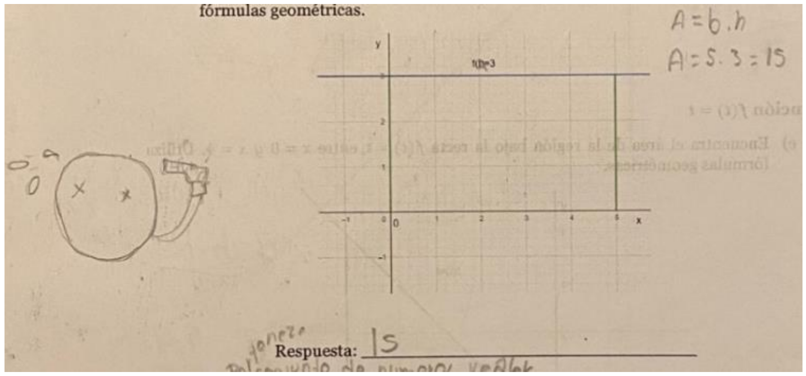


Respuestas:
A estos dos ejercicios, se muestran algunas respuestas de los estudiantes, en donde se aprecia que pudieron encontrar el área de las funciones f(t) = 3 y f(t) = t utilizando fórmulas geométricas. Los resultados de todos fueron correctos, aunque algunos olvidan colocar las unidades de medida o interpretar sus resultados con base en lo que se les solicita.



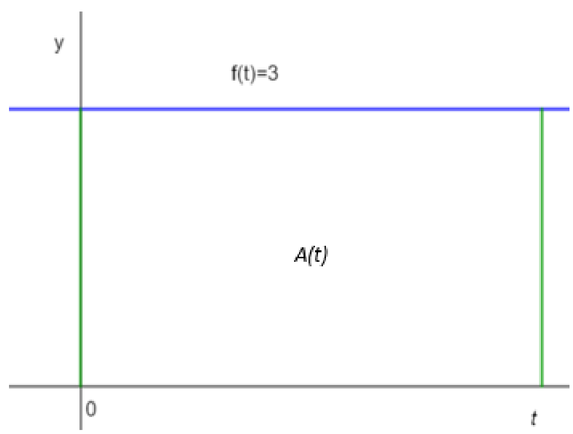


Otro dato interesante es que uno de los equipos dibujó una cara disparándose con una pistola y al preguntarles el significado, relatan que es porque en un inicio no entendían las instrucciones debido al lenguaje matemático.

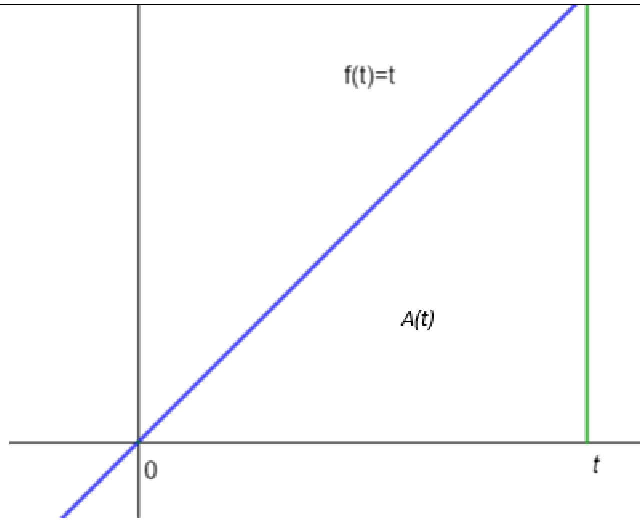


Instrucción: otra parte de la actividad estuvo dirigida a que, con las mismas funciones, los estudiantes plantearan una expresión para A(x), para determinar el área de la función, cuando el intervalo es entre $x = 0$ y $x = t$

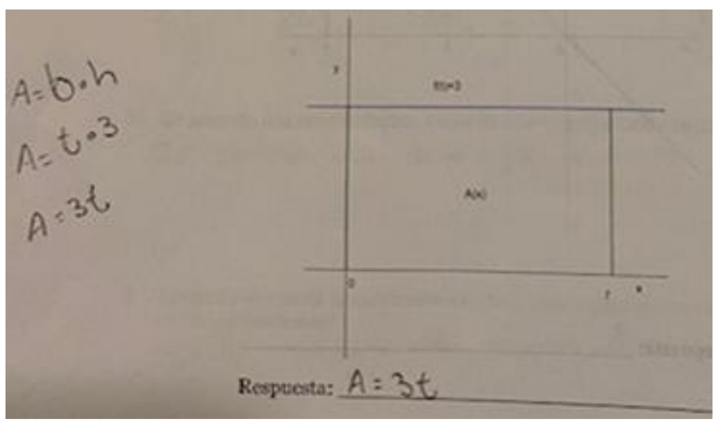
b) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea A(t) el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t= 0$ y $t= t$. Plantea una expresión para A(t).

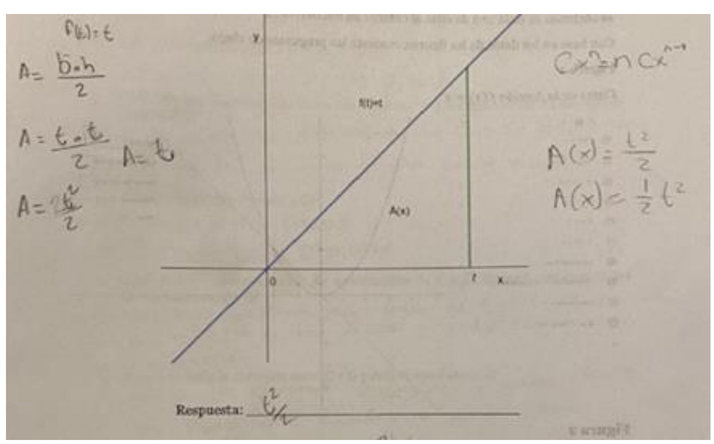


f) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea A(t) el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t= 0$ y $t= t$. Plantea una expresión para A(t).

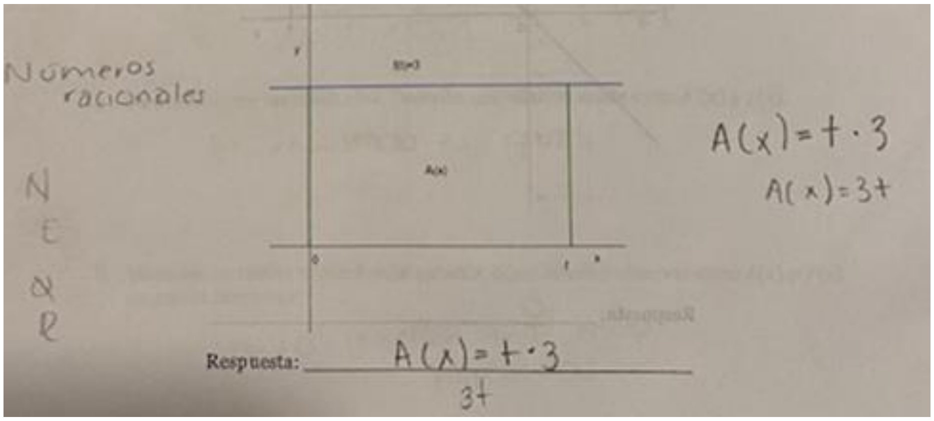


Respuestas:
La mayoría de los estudiantes (10/13) expresaron de forma correcta la función en términos de $A(t) = 3t$ y $A(t) = \frac{t^2}{2}$, empleando las fórmulas geométricas del rectángulo y del triángulo; en las respuestas se aprecia que algunos escriben de forma incompleta la función, o bien, la visualizan como el algoritmo del área.

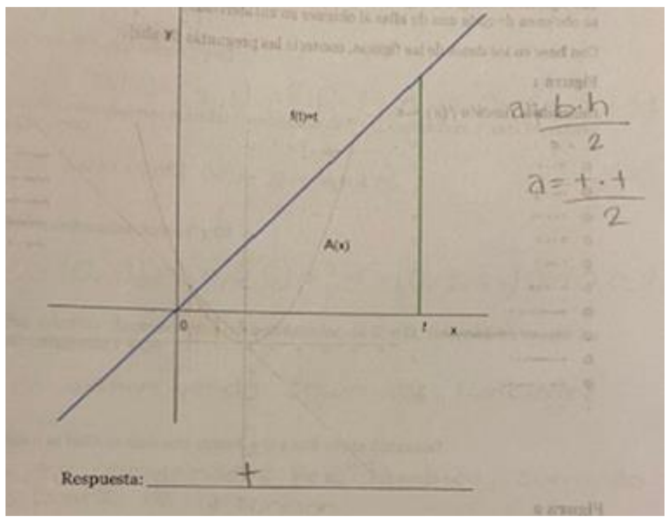




Nota: en las actividades realizadas por los estudiantes se observa que aparece la variable x (A(x)), debido a que en un inicio la actividad se diseñó de esa manera.



Uno de los estudiantes escribió un resultado distinto al que obtuvo.



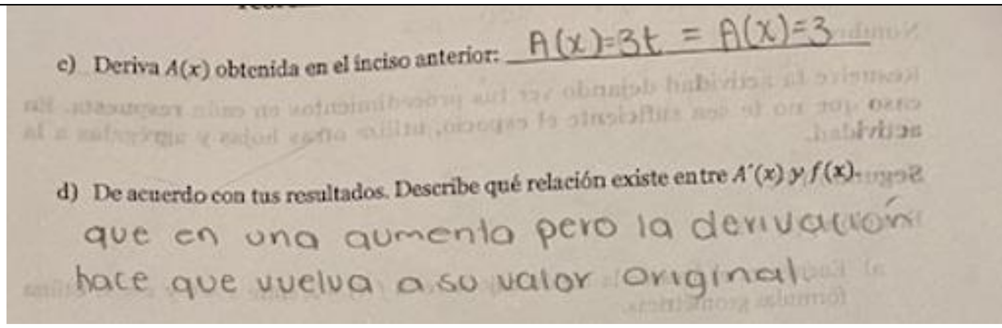
Nota: en las actividades realizadas por los estudiantes se observa que aparece la variable x (A(x)), debido a que en un inicio la actividad se diseñó de esa manera.

Instrucción: Después, se les solicitaba derivar la función A(t) que habían determinado y describir la relación que observaban entre A(t) y f(t) del inicio.

c,g) Deriva A(t) obtenida en el inciso anterior:__________________________

d,h) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre A´(t) y f(t).

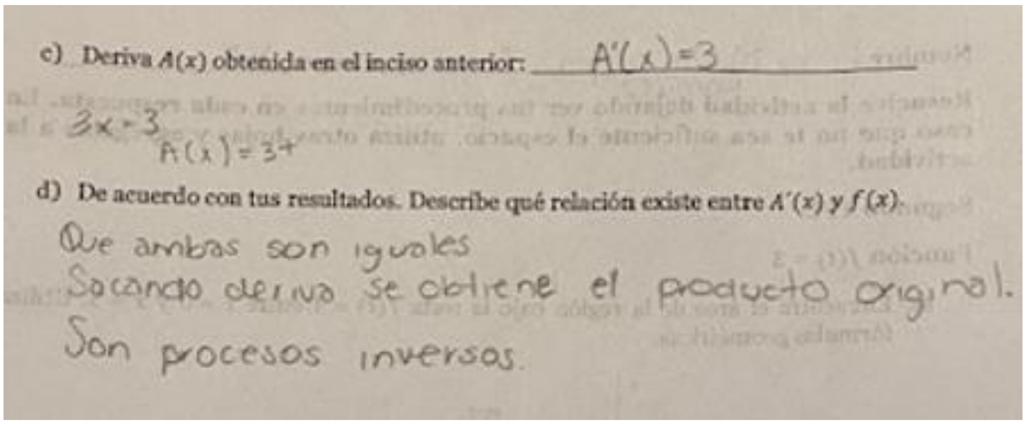
Respuestas:
Todos los estudiantes derivaron correctamente la función, pero solo 7 de 13 muestran nociones de encontrar la relación inversa entre la función planteada para el área y su derivada.



c) Deriva $A(x)$ obtenida en el inciso anterior: A(x)=3t = A(x)=3

d) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(x)$ y $f(x)$.

que en una aumenta pero la derivación
hace que vuelva a su valor original

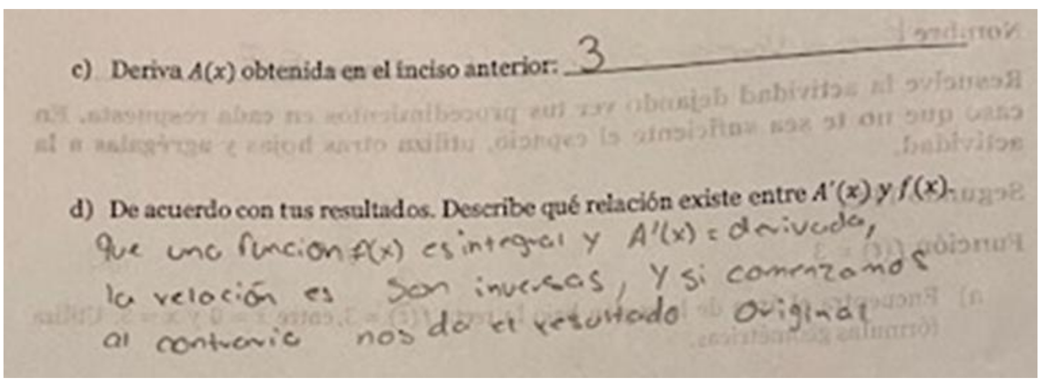


c) Deriva $A(x)$ obtenida en el inciso anterior: A'(x)=3

3x=3
A(x)=3t

d) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(x)$ y $f(x)$.

Que ambas son iguales
Sacando deriva se obtiene el producto original.
Son procesos inversos.



c) Deriva $A(x)$ obtenida en el inciso anterior: 3

d) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(x)$ y $f(x)$.

Que una funcion f(x) es integral y A'(x) = derivada,
la relación es Son inversas, y si comenzamos
al contrario nos da el resultado original

Nota: en las actividades realizadas por los estudiantes se observa que aparece la variable x (A(x)), debido a que en un inicio la actividad se diseñó de esa manera.

Actividad 2

La segunda actividad se puede muestra en el Anexo 2 y esta tuvo la misma dinámica que la anterior, es decir, se entregó de forma individual como tarea extra-clase y después los alumnos se reunieron en equipos para revisar, comparar y corregir.

La actividad consistía en que, a partir de dos figuras sobre las representaciones algebraicas y geométricas de dos funciones distintas, empleando el entorno de GeoGebra, ver Figura 19, los estudiantes pudieran analizar las figuras y responder las preguntas que se les hacían, mismas que se observan a continuación.

Figura 19

Figuras de la Actividad 2 con base en las cuales se les solicitó a los estudiantes responder preguntas:

Las siguientes imágenes representan dos funciones distintas f(x), así como ciertos datos que se obtienen de cada una de ellas al obtener su antiderivada. Con base en los datos de las figuras, contesta las preguntas de abajo:

Figura 1

Datos de la función f(x) = x

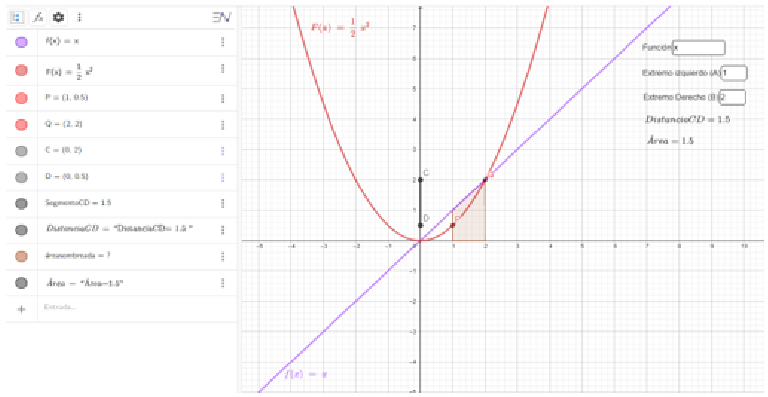
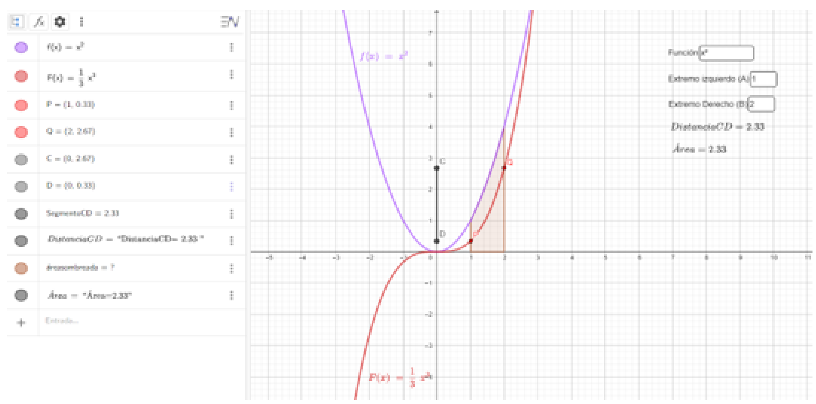


Figura 2

Datos de la función f(x) = x^2



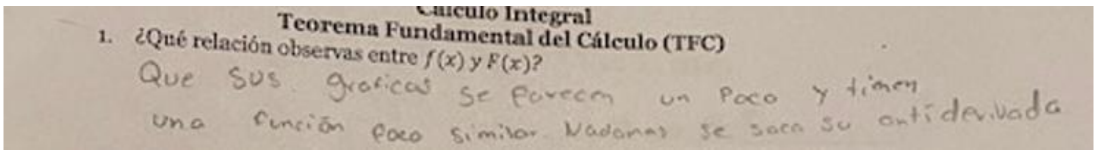
En seguida se muestran las respuestas que dieron los estudiantes a cada una de las preguntas:

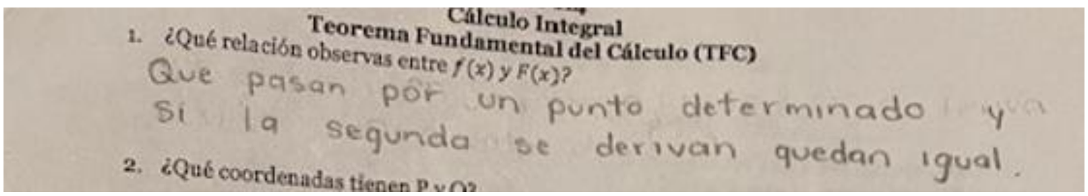
Pregunta: la primera pregunta pretendía que el estudiante, a partir de las representaciones algebraica y geométrica, lograran identificar a F(x) como la antiderivada de f(x).

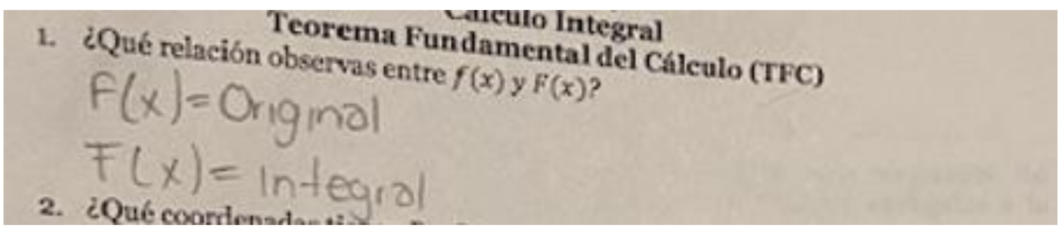
1. **¿Qué relación observas entre $\mathbf{f(x)}$ y $\mathbf{F(x)}$?**

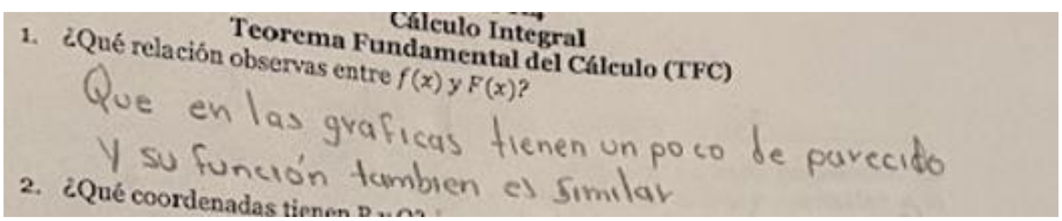
Respuestas:

Solo 4 estudiantes mencionan que logran ver a F(x) como la antiderivada de f(x), los demás expresan que son funciones similares.


Cálculo Integral
Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)
1. ¿Qué relación observas entre $f(x)$ y $F(x)$?
Que sus graficas se parecen un poco y tienen
una función poco similar Nadamas se saca su antiderivada


Cálculo Integral
Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)
1. ¿Qué relación observas entre $f(x)$ y $F(x)$?
Que pasan por un punto determinado y
si la segunda se derivan quedan igual.
2. ¿Qué coordenadas tienen


Cálculo Integral
Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)
1. ¿Qué relación observas entre $f(x)$ y $F(x)$?
F(x)=Original
F(x)=Integral
2. ¿Qué coord


Cálculo Integral
Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)
1. ¿Qué relación observas entre $f(x)$ y $F(x)$?
Que en las graficas tienen un poco de parecido
y su función tambien es similar
2. ¿Qué coordenadas tienen

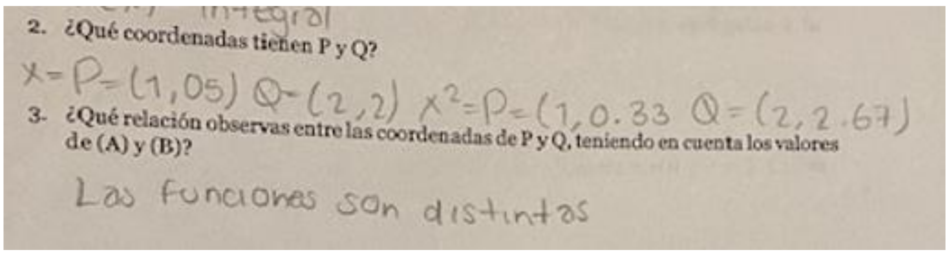
Pregunta: las siguientes dos preguntas pretendían que los estudiantes identifiquen como igual el valor de las absisas en los puntos P y Q, debido a que A y B representan el intervalo en x, en el que se está trabajando.

2) ¿Qué coordenadas tienen P y Q?

3) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de P y Q, teniendo en cuenta los valores de (A) y (B)?

Respuestas:

En la pregunta 2 se observan algunas dificultades para representar simbólicamente las coordenadas de los puntos. Respecto a la pregunta 3 solo 4 estudiantes lograron encontrar la relación.



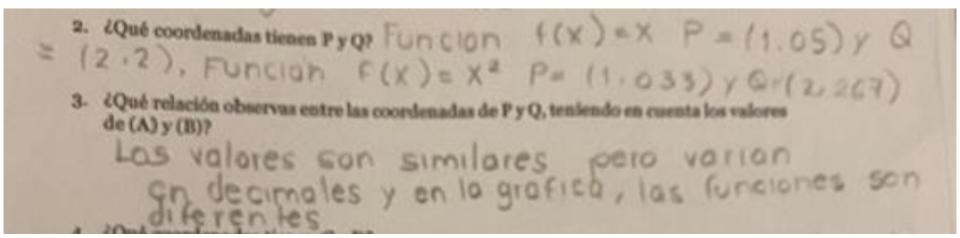
integral

2. ¿Qué coordenadas tienen P y Q?

X= P=(1,05) Q=(2,2) X^2=P=(1,0.33 Q=(2,2.67)

3. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de P y Q, teniendo en cuenta los valores de (A) y (B)?

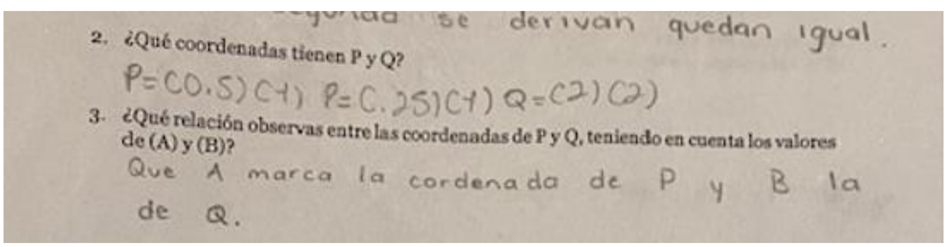
Las funciones son distintas



2. ¿Qué coordenadas tienen P y Q? Funcion f(x)=x P=(1.05) y Q = (2.2), Funcion F(x)= X^2 P= (1.033) y Q=(2,267)

3. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de P y Q, teniendo en cuenta los valores de (A) y (B)?

Los valores son similares pero varian en decimales y en la grafica, las funciones son diferentes



gunda se derivan quedan igual.

2. ¿Qué coordenadas tienen P y Q?

P=(0.5)(1) P=(.25)(1) Q=(2)(2)

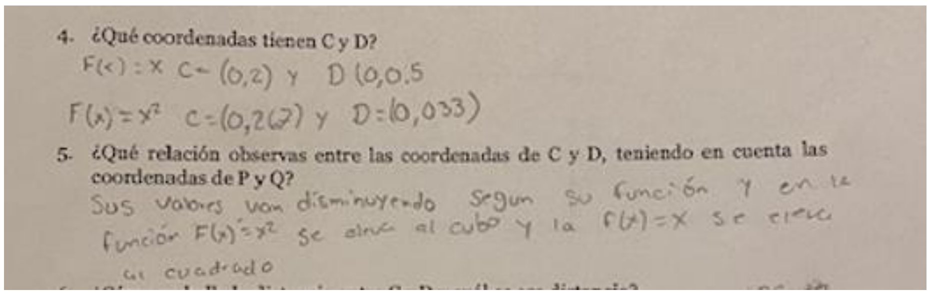
3. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de P y Q, teniendo en cuenta los valores de (A) y (B)?

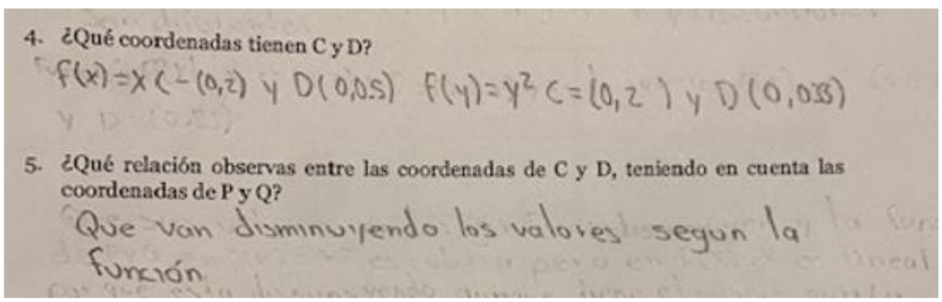
Que A marca la cordenada de P y B la de Q.

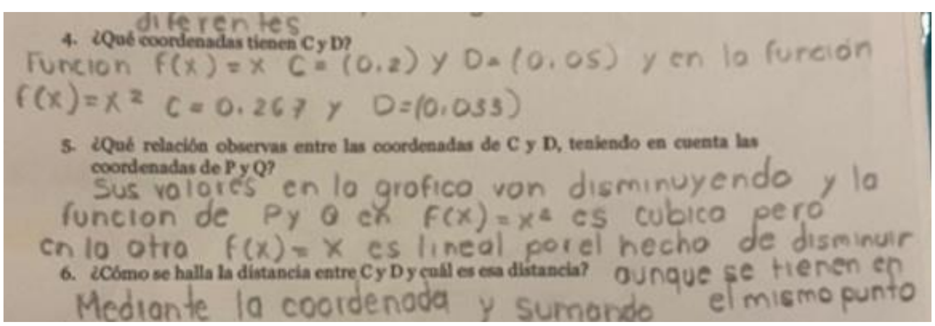
Pregunta: las preguntas 4 y 5 tenían la intención de que los estudiantes relacionaran a los puntos C y D con las ordenadas de los puntos P y Q.

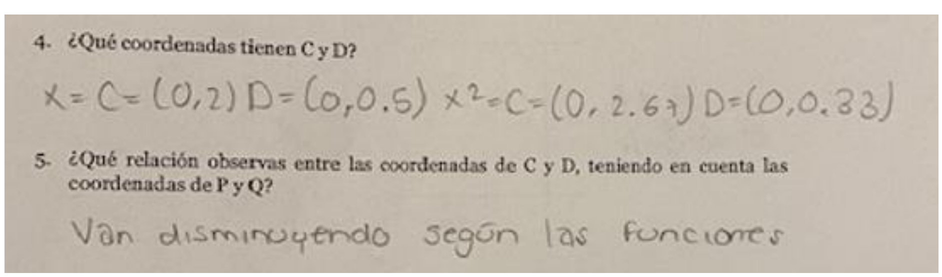
4) **¿Qué coordenadas tienen C y D?**
5) **¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q?**

Respuestas:
Ninguno pudo encontrar la relación entre las coordenadas de C y D y las de P y Q.

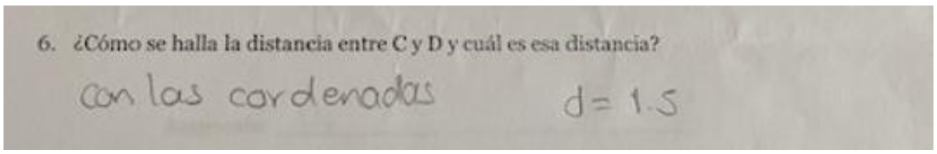

4. ¿Qué coordenadas tienen C y D?
F(x): X C= (0,2) y D (0,0.5
$F(x)=x^2$ C=(0,2(?)) y D=(0,033)
5. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q?
Sus valores van disminuyendo segun su función y en la función $F(x)=x^2$ se eleva al cubo y la F(x)=X se eleva al cuadrado


4. ¿Qué coordenadas tienen C y D?
F(x)=X C=(0,2) y D(0,0,5) $F(y)=y^2$ C=(0,2) y D(0,033)
5. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q?
Que van disminuyendo los valores segun la función

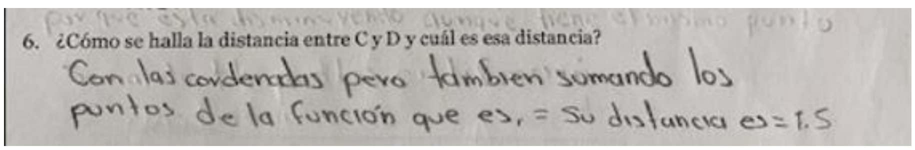

diferentes
4. ¿Qué coordenadas tienen C y D?
Funcion F(x)=X C=(0.2) y D=(0.05) y en la función $F(x)=X^2$ C=0.267 y D=(0.033)
5. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q?
Sus valores en la grafica van disminuyendo y la funcion de P y Q en $F(x)=x^2$ es cubica pero en la otra f(x)=X es lineal por el hecho de disminuir aunque se tienen en el mismo punto
6. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia?
Mediante la coordenada y sumando


4. ¿Qué coordenadas tienen C y D?
X= C=(0,2) D=(0,0.5) X^2=C=(0, 2.67) D=(0,0.33)
5. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q?
Van disminuyendo según las funciones

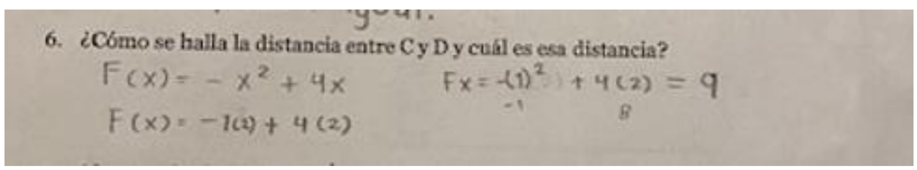
Pregunta: la pregunta 6 se hizo con el propósito de que los estudiantes visualizaran a la distancia entre C y D como el valor absoluto entre la diferencia entre las ordenadas de C y D, y que realizaran la operación. **6) ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia?**
Respuestas: 10 de los 13 estudiantes encontraron la distancia entre C y D. Algunos intentaron operar con las funciones.


6. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia?

con las cordenadas d= 1.5


6. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia?

Con las cordenadas pero tambien sumando los puntos de la función que es, = Su distancia es = 1.5


6. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia?

$F(x) = -x^2 + 4x$ $Fx = -(1)^2 + 4(2) = 9$

$F(x) = -1(1) + 4(2)$

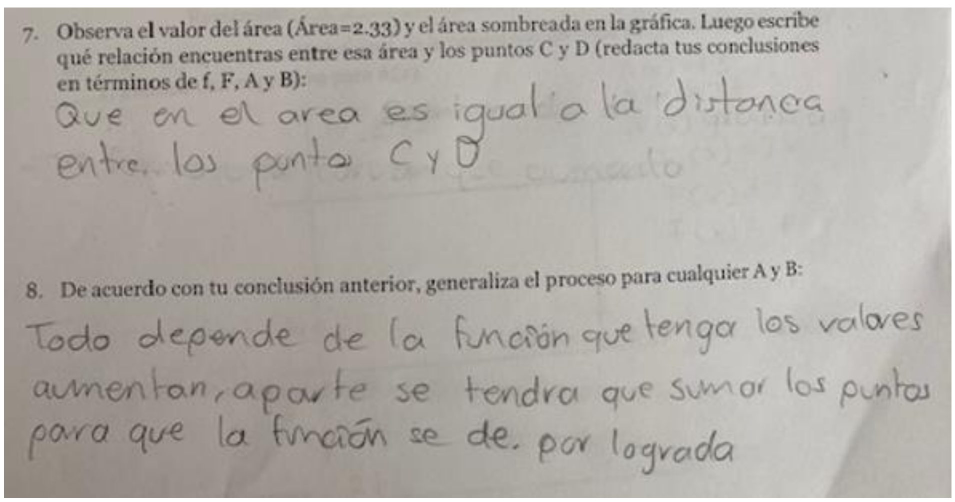
Pregunta: las preguntas 7 y 8 pretendían que los estudiantes visualizaran como iguales el área de las funciones en el intervalo indicado y la distancia entre los puntos C y D, con el fin de que pudieran generalizar que el área de la función f(x) en un intervalo [a,b] es igual a la diferencia entre b y a evaluados en la antiderivada de la función. Es decir, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

7) **Observa el valor del área (Área=2.33) y el área sombreada en la gráfica. Luego escribe qué relación encuentras entre esa área y los puntos C y D (redacta tus conclusiones en términos de f, F, A y B):**

8) **De acuerdo con tu conclusión anterior, generaliza el proceso para cualquier A y B:**

Respuestas:

3 estudiantes relacionaron el valor del área con la distancia entre los puntos C y D, pero ninguno logró generalizar el proceso en términos de la proposición del TFC, que ya se les había presentado.



7. Observa el valor del área (Área=2.33) y el área sombreada en la gráfica. Luego escribe qué relación encuentras entre esa área y los puntos C y D (redacta tus conclusiones en términos de f, F, A y B):

Que en el area es igual a la distanca entre los punto C y D

8. De acuerdo con tu conclusión anterior, generaliza el proceso para cualquier A y B:

Todo depende de la función que tenga los valores aumentan, aparte se tendra que sumar los puntos para que la función se de. por lograda

Actividad de presentación por parte de los estudiantes:

Como última actividad de la clase, se les entregó a los estudiantes dos problemas que debían resolver en equipos y presentar sus procedimientos y resultados por medio de un video. Esto con el fin de que ellos conversaran y trabajaran de manera colaborativa y pudieran emplear los aprendizajes que han adquirido respecto al TFC.

Los estudiantes trabajaron en los mismos equipos que las actividades anteriores, 3 equipos de 3 integrantes y 1 de 4. A continuación se presentan las respuestas que mostraron los estudiantes en sus videos y se transcriben algunos de los diálogos que presentaron.

Ejercicio 1: el primer ejercicio pretendía que los estudiantes pudieran emplear el algoritmo del TFC de una forma distinta a cómo la habían trabajado en las actividades anteriores, y que, pudieran determinar la función f(x) a partir del intervalo y el valor del área, como datos conocidos, empleando sus conocimientos previos de ecuaciones lineales o cuadráticas y de la antiderivada de la función.
También se esperaba que los estudiantes expresaran algo respecto al área negativa que se les presenta en el ejercicio.

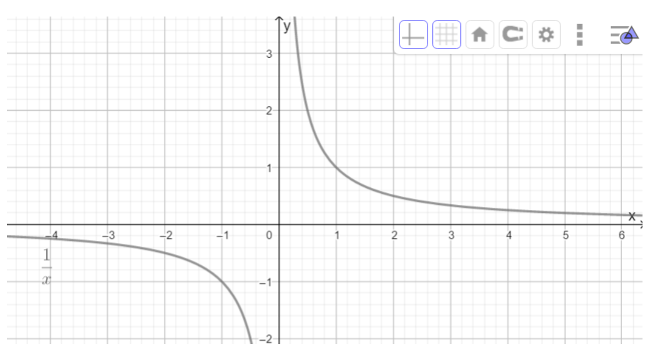
Ejercicio 1:
Dado que f(x) es una función continua que satisface la ecuación $\int_2^5 f(x)\,dx = -6$.
a) Encuentra f(x)
b) ¿f(x) tiene una única solución?

Respuestas:
Respecto a este ejercicio ninguno de los equipos lo presentaron, pues no mostraron ningún procedimiento ni resultado, solo mencionaron al inicio del video que no lo presentaron debido a que se les dificultó resolverlo, a pesar de que resolvieron sus dudas con la profesora.

Narración de uno de los equipos:
Nosotros no presentamos el primer ejercicio porque no pudimos resolverlo, no le entendimos a cómo sacar la ecuación.

Ejercicio 2: el segundo ejercicio les solicitaba a los estudiantes obtener el área bajo la curva de una función en un intervalo determinado empleando el TFC. Se les mostró la gráfica de la función para que pudieran visualizar si la función era continua en el intervalo solicitado.

Ejercicio 2:
Considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica se representa a continuación:

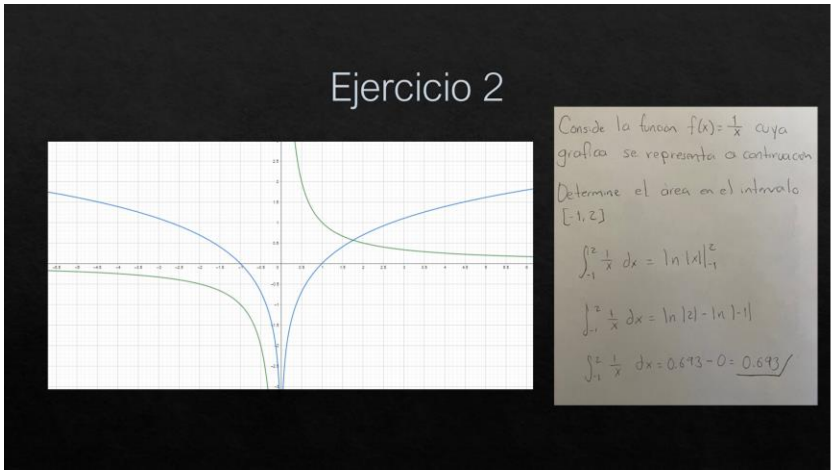


Determine el área en el intervalo [-1, 2]

Respuestas:

Dos de los equipos (7 estudiantes)

resolvieron el ejercicio sin contemplar la condición de continuidad que plantea el TFC, aplicando el algoritmo de forma mecánica. Se muestra una de las respuestas que dieron:

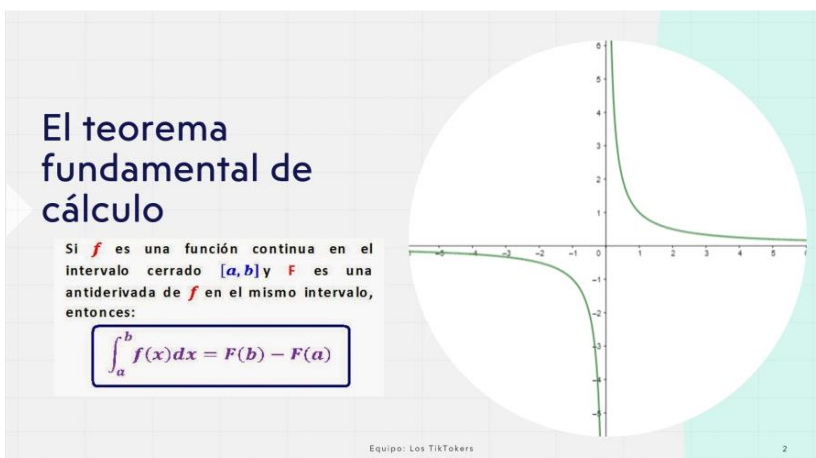


Narración del equipo:

Nosotros lo que hicimos fue primero sacar la antiderivada de la función, para eso buscamos en internet y en las reglas que vienen en el cuadernillo y descubrimos que es el logaritmo natural de x.

Después sustituimos los valores de 2 y nos dio 0.693, luego sustituimos el valor de -1 y nos dio 0. Luego restamos, y el área nos da de 0.693.

Solo uno de los equipos (3 estudiantes) mostraron la representación gráfica de la función y mencionaron que no se podía obtener su área en el intervalo señalado, debido a que la función no es continua.



Narración del equipo:

Esta función eh no se puede determinar su área porque el teorema fundamental del cálculo dice que la función debe ser continua eh, en el intervalo para poder eh, obtener su área. Por eso no aplicamos la fórmula.

V.1.1. Respuestas de los estudiantes al cuestionario.

En esta sección se presentan las respuestas que los estudiantes dieron al cuestionario para evaluar la lección. Dichas respuestas están divididas en dos secciones: la primera corresponde a la evaluación de la lección de acuerdo con las dimensiones del TRU. Mientras que la segunda corresponde a la evaluación que ellos detectaron en cuanto a los conocimientos que posee la profesora, de acuerdo con las categorías del KoT y del KMT. En la tabla 14 se presenta la información.

Tabla 14

Respuestas de los estudiantes al cuestionario aplicado después de clase

Sección 1. Evaluación del punto de vista del estudiante sobre la lección, con base en las dimensiones del TRU (Schoenfeld et al., 2016, p. 19)		
Dimensión	**Pregunta**	**Respuestas**
El contenido matemático	1. ¿Cuál fue el contenido matemático que presentó la profesora?	E1. Teorema Fundamental del Cálculo. E2. Teorema fundamental de calculo E3. Teorema E4. Teorema fundamental del calculo E5. El teorema fundamental del cálculo E6. Qué es el teorema fundamental del cálculo, que es la derivada, que es la integral y como representarlas ya sea de gráfica, algebraicamente, etc. E7. Vimos cómo eran las funciones derivadas sobre cual funciona es independiente e independiente. E8. El teorema fundamental del cálculo, Las derivadas y las integrales. E9. Me acuerdo de que vimos el teorema de Pitágoras E10. operaciones con áreas E11. teorema fundamental, compartimento E12. teorema fundamental del cálculo, derivada, integrales-representación gráfica-representación algebraica E13. Teorema Fundamental del Cálculo Integral

	2. ¿Cuáles temas matemáticos que habías estudiado antes tuviste que retomar o emplear para el estudio del teorema fundamental del cálculo?	E1. Gráficas E2. Funciones, contexto transversales, funciones continúan y discontinuas E3. Despejes, fórmulas E4. El plano cartesiano E5. los tipos de grupos de números, las ecuaciones y los binomios y asi conceptos q se me olvidaron E6. Un poco de todos pero me hizo recordar mucho los temas E7. Las representaciones algebraicas E8. Sobre las funciones E9. Lo que recuerdo que retomamos fueron las representaciones tablar, la representacion grafica y la representacion geometrica E10. Teorema de Pitágoras E11. Teorema, los de compartimiento E12. Plano cartesiano para poder graficar correctamente. E13. Derivadas, continuidad, integral definida e indefinida,
La demanda cognitiva	3. En cuanto al tema estudiado de teorema fundamental del cálculo, menciona el nivel de comprensión que consideras que alcanzaste (en porcentaje) y explica de manera detallada el por qué	E1. 85, por qué seguimos utilizando gráficas y tablas que facilitan el aprendizaje. E2. 90%,por que es algo que me resulto de hacer es algo que no es difícil para que solo se necesitan sacar valores de las cosas no lo entendí a un 100% por que algunas veces era algo complicado. E3. Un 80% porque comprendi bine como se saca el area usando la ecuación para determinar si esta bien al igual que sacar la integral correcta entender que dependiendo la ecuación te hace saber que tipo de grafica hiba a ser por ejemplo si es cuadratica va a salir una cubica etc. E4. Siento que lo estén di un poco pero no a mucha profundidad E5. Casi todos los temas comprendí muy bien %75 E6. Un 80% antes me confundia mucho al entender las ecuaciones para poder resolver. Pero volviendo a retomar el tema. Ya lo tengo mas claro y ya no me confundo con los signos. E7. 70%

		E8. 70% le entendí pero a veces olvidaba el procedimiento E9. gráficas y tubulares: 90% es muy sencillo teorema fundamental 80% es una operación inversa entre derivada e integral; derivada;30% aún no comprendo bien como se sacan E10. el teorema fundamental del calculo un 76% E11. Creo que logre mejorar el tema de compartimiendo ya que lo retomamos de buena manera E12. 90% Considero que la maestra explica demasiado bien E13. 70%, porque ya sé que, después de que la función sea continua en un intervalo (a,b) puedo derivarla y, por tanto, encontrar la antiderivada de la función. Puedo integrarla en el intervalo que es derivable.
	4. ¿Consideras que el discurso de la profesora te invitó a explicar con tus propias palabras lo que estabas aprendiendo sobre el tema? Explica	E1. Si, he aprendido muchas fórmulas que antes no sabía E2. Si y no, no por aprendí más viendo a la maestra hacerlo que escuchándolo. E3. pues lo que ella me explico también me ayudo ah organizar mejor mis ideas, y se me falicita mejor. E4. Si ya que para esto tenemos que comprender los temas pero cada uno lo puede aprender a su manera E5. pues mas o menos hay veces que si le entendia muy bien y otras en las que me costaba mas pero regularmente si entendia todo y ps podia explicarlo sin tanto problema E6. Si, la manera en que explica la maestra es muy sencilla y detallada va al punto y es muy entendible E7. Si. Gracias a las explicaciones detalladas de la maestra y gracias a que nos retomaba el tema con claridad y paciencia logre comprenderlo. E8. Pues no, la maestra explicaba como debía de ser, sin necesidad de alteraciones E9. Si está bien por que así dices lo que vas aprendiendo E10. Si por que ella explicaba de una manera bien y clara que en ocasiones no le entendía pero volvía a explicar de distinta manera y yo comprendía por mis propias palabras el tema E11. Más o menos por qué a veces no le entendía jajsjs E12. Si, porque nos explica bien con ejemplos

		E13. Sí, porque me permitió justificar lo que aprendí del teorema fundamental del calculo con mis propias palabras y así nos queda más claro qué significa eso
	5. El tiempo que tuviste para llegar a comprender el tema, ¿Lo consideras suficiente o insuficiente y por qué?	E1. Un poco insuficiente me hubiera gustado más clasees o como antes de 50 minutis E2. Si está un poco corto el tiempo, ya que para algunos incluyendo me es difícil aprender matemáticas. E3. si lo considero suficiente , por que lo explico de una buena manera . E4. Suficiente, no se me ah hecho tan complicado E5. suficiente ya que cada clase se realzaba el conocimiento aprendido el dia anterior E6. Pues me falta entender un poquito porque aveses me confundí con algunas funciones. E7. Mi comprensión de un poco lenta pero entendí bien el tiempo. E8. Lo considero suficiente. Porque la maestra en cada seción nos dejo muy claro el tema. Y no habia nesecidad de retomarlo nuevamente en mas de tres clases. E9. insuficiente, creo que debimos abordar más el tema para una mayor comprensión E10. Suficiente, siempre había tiempo para aprender con tranquilidad E11. Suficiente ya que se vieron de una manera buena y con calma E12. Pues si lo considero que aprendí pero siento que me falta más por aprender E13. suficiente porque dedicamos 3 horas de clase. aunque, al ser extenso el tema, me toco estudiar un poco el tema por individual
El acceso equitativo a	6. ¿Cuáles oportunidades tuviste para participar durante la clase en la comprensión del tema?	E1. Los trabajos en equipo y respondiendo a la maestra E2. Se tuvo toda oportunidad de expresión. E3. pues trabajar en equipo con mis compañeros y muy pocas veces daba mi opinion sobre as cosas ya que casi no me gusta opinar E4. Casi no participe pero algunas veces ayudando a resolver ejercicios E5. En todas ya que los temas eran bien explicados

		E6. trabajar con mis compañeros pero mas el pparticipar con la maestra yo trato de estar atento y comprender para participar E7. Dar mi opinión E8. Tube la oprtunidad de ayudar a mis compañeros a aclarar alguna duda que les surgia del tema o de un problema que estuvieramos resolviendo. Y pude dar mi opinión en algunos temas (de algunos detalles que yo me acordara de ese tema). E9. Pues que nos daban tiempo en la clase para contestar las actividades E10. Pues cuando hacia algunos ejercicios con mis compañeros E11. Pues tuve varias oportunidades para opinar, en presentación y en explicar algo pues la verdad no tuve la oportunidad E12. -Dar mi opinion en ciertos trabajos,temas,explicaciones,punos exactos de la clase E13. trabajamos en equipo expusimos el trabajo a nuestro grupo resolvimos dudas en grupo
	7. ¿En cuáles ocasiones consideras que no te sentiste incluido o incluida como parte del grupo?	E1. En ninguna E2. en ninguna. E3. En ningún momento E4. en los momentos que a lo mejor yo no entendia pero otro compañero si E5. Ninguna E6. En ninguna ocasión. Ya que somos un grupo pequeño nos ponen mas atención. E7. Me sentí incluido Pues cuando hacíamos trabajos en equipo E8. PS en ninguna todos me han apollado E9. Me sentí incluida siempre E10. En ninguna E11. Siempre me sentí incluído E12. -en si en ninguna,solo en ocasiones yo prefiero trabajar solo que en equipo por qje aveces los demas integrantes no hacen nada,pero en si me llevo bien con el grupo de clase E13. cuando debimos resolver actividades y no entendía

Agencia, propiedad e identidad	8. ¿Tuviste la oportunidad de expresar tus dudas sobre el tema a tus compañeros y profesora y recibir retroalimentación sobre ellas? Contesta sí o no y explica el por qué	E1. Si, la maestra me explicaba E2. Si, ya que la maestra contesta todas tus dudas y también te puedes acoplarte a tus compañeros. E3. si tuve la oportunidad de aclarar mis dudas , por que le preguntaba a la maestra y ya ella me las explicaba aun que muy pocas veces tenia dudas. E4. Si ya que avía partes donde no entendía alguna cosa y le preguntaba a la maestra y a mis compañeros E5. si yo le preguntaba pocas veces a la maestra sobre algo y me explicaba mas detalladamente E6. No porque me daba pena E7. Si. Cuando no comprendia le pregunta a la maestra y ella lo volvia a explicar. E8. Si, cuando había una duda la decía E9. Si les decia todas mis dudas a algunos compañeros para ver si me podían ayudar E10. Si,en equipo yo decía una duda y entre todos la resolvíamos o bien la maestra nos ayudaba explican dos de una manera clara donde pudiera entender E11. Si, la maestra nos dejaba dar nuestra opinión E12. Si, porque cuando no entendía un tema le preguntaba a mi compañero y si me explicaba E13. Sí. cuando no entendí que la función era continua y derivable en un intervalo
	9. ¿Consideras que la profesora te visualiza como un estudiante capaz y hábil de contribuir significativamente en el desarrollo de la clase? Contesta sí o no y explica el por qué	E1. Posiblemente sí, aunque algunos sean más capaces que otros E2. No lose, aún que tuviera muchas oportunidades de participar no lo hize mucho por pena. E3. yo creo que si, pues todos somos capaces de hacer sus activides E4. Creo que si aun que la profesora casi no interactua con nosotros :(E5. Si porque las oportunidades son iguales para todos E6. si ya que participo mucho casi siempre entiendo o trato de entender y eso hace que el profesor sienta que eres capaz E7. Yo creo que si. Ya que soy una de las alumnas mas cumplidas y que mas participo. E8. Pues si, aunque es normal con todos los alumnos, todos somos capaces E9. Em si por que vamos entiendo lo que nos explica

		E10. No se alomejor si E11. Si por que entregaba todos sus trabajos,todas las tareas,ponía atención a clases y lograba entender todo lo que ella hacía cuando preguntaba E12. Si, pero yo no creo poder entender y explicar bien los trabajos E13. sí porque siempre me motiva a realizar los ejercicios y aprender
Evaluación formativa	10. ¿Qué acciones realiza la profesora cuando expongo mis dudas?	E1. Explica con ejemplos E2. Hace acciones verbales y gráficas para explicar los temas. E3. pues me lo explica de una manera mas fácil de entender E4. Yo no le eh preguntado nada pero a mis compañeros les explica y/o resuelve sus dudas E5. trata de comprender que es lo que no entendi y desglosar mas como la explicación aver si haci comprendo mas E6. Nos explica las dudas que tenemos o en que parte no le entendimos bien E7. Pues las preguntas que han tenido preguntas las toma a bien. no como otros profesores E8. Esta dispuesta a explicar E9. Me lo explica de una buena manera, y con pasiencia. E10. explica con ejemplos y visualizaciones, nada brusco o repentino, solo nos aclara la duda E11. Te escucha E12. Nos explica de otra manera hasta entenderlo, explicar más detalladamente o usar otros ejemplos E13. me explica las dudas que tengo, ejercicios, me ayuda a entender además es muy comprensiva y me dedica tiempo adicional durante las clases o cuando esta en la sala de profesores

	11. Respecto a las actividades desarrolladas en clase, ¿Recibí retroalimentación por parte de la profesora o mis compañeros sobre lo que realicé y tengo la oportunidad de corregirlas en caso necesario?	E1. Si E2. Si, se obtuvo la retroalimentación y también hubo chance de corregir. E3. pues si E4. No se que es retroalimentación E5. Si, nos dio chance de corregir las actividades E6. Si un poquito E7. Si E8. Si E9. Si, cuando resolvemos algo en grupo, corregía lo que tenía mal E10. No entedi E11. Sii E12. Si, porque así lo entendía más E13. si, la profesora nos da tiempo de corregir si algun punto no nos quedó bien
	12. En caso de recibir retroalimentación por parte de la profesora, ¿Crees que dicha retroalimentación te ayuda a pensar más profundamente tus respuestas y comprender el tema? Explica detalladamente.	E1. Si, nos ayuda a resolver dudas y sacarnos de muchos apuros E2. Si, como comenté sabe explicar verbal y gráficamente las dudas y actividades. E3. yo creo que si ya que seria mas fácil entender ese tema ya que me la explico de una manera adecuada entonces ya puede pensar mejor mis respuestas y estar mas segura de lo que responderé. E4. ... E5. Si ya que analizo bien los trabajos E6. si ya que ahi es cuando pones en practica lo que entendiste aunque hay veces que se te confunde pero si la profesora esta ahi pues te hace entender E7. Si porque así puedo Aser mejor mi trabajo E8. Pues si cualquier ayuda es bien recibida E9. Si porque siempre es bueno reparar lo comprendido para que no se olvide tan fácil E10. Si. Al retroalimentarla comprendes mas a fondo el tema y lo sabes usar en tu vida diaria. E11. Pues si está bien cuando es como ayuda, que es lo que siempre suele pasar, ayuda a comprender mejor el tema E12. Si, en ocasiones no entendía el tema y la maestra me explicaba con más retroalimentación para que yo

		pensara y lograra entender el tema de una manera más mejor E13. Si. Porque si la profesora nos ayuda a solucionar ejercicios, podemos encontrar respuestas a nuestras dudas también esto de la retroalimentación me ayuda a entender cosas anteriores. porque a veces con las clases virtuales no aprendimos lo mismo y nos faltaron temas que en la retroalimentación la profe nos explica

Sección 2. Evaluación del conocimiento del profesor desde el punto de vista del estudiante, de acuerdo con los subdominios KoT y KMT (Carrillo et al., 2018)		
Subdominio	**Pregunta**	**Justificación**
KoT	13. ¿Cuál o cuáles procedimientos empleó la profesora para demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo?	E1. Las representaciones álgebraicas, tablas y gráficas E2. Ir sacando áreas de figuras conocidas como el rectángulo y el triangulo E3. lo hizo gráficamente y con ecuaciones. E4. Tomo ejemplos y no los explico en el pizarron a si como geogebra (la aplicacion que nos ayuda con la materia) nos mostro como se comportan. E5. Utilizo el pizarrón como método gráfico, y también un proyector E6. Operaciones E7. Pues dando la clase lo mas clara posible y resolviendo nuestras dudas E8. Con GeoGebra E9. Nos explicó el teorema de forma geométrica y representación algebraica E10. Nos daba ejemplos de cosas que nos pasan en la casa E11. No me acuerdo E12. Empleó el procedimiento de la fórmula y la representación gráfica E13. la profesora demostro que la funcion era derivable en un intervalo. luego integro en el intervalo utilizando una funcion t equivalente a la funcion derivable

	14. ¿Cuál o cuáles definiciones presentó la profesora sobre el tema estudiado?	E1. Todo explico muy bien E2. Retroalimentar temas y ensañar nuevas cosas. E3. la de las teorema E4. que es un teorema, representacion grafica, algebraica, derivada, operaciones inversas E5. sobre qué es la derivada y la integral y el teorema fundamental del calculo E6. vimos porque es fundamental y la de teorema E7. definición de una función, de la derivadda E8. que es una operación inversa, derivada, integral E9. la conjetura y el teorema E10. Los temas vistos los explico muy bien E11. No recuerdo E12. -la definición de función, -la definición de cálculo, -la defunción de cálculo integral, -la definición de representación algebraica, -la definición de representación gráfica y geométrica, -la definición de valor independiente E13. Derivadas Integrales continuidad Teorema
	15. ¿Cuál o cuáles propiedades mencionó la profesora como útiles en la demostración del teorema fundamental del cálculo?	E1. La derivada y la integral E2. Las sumas de Riemann E3. Mencionaba gráficas de funciones para sacar varias escuasiones que ayudan a determinar los resultados E4. El teorema, las representaciones gráficas E5. derivadas ,operaciones inversas , derivada, integral E6. variable, derivada, integral, teorema fundamental del calculo E7. propiedades de la suma. Propiedades de producto E8. los números y el teorema E9. relaciones inversas E10. Pues en algunas ocaciones esto nos puede ayudar en la vida cotidiana E11. Planteamiento, juicio e hipótesis E12. Derivadas, integrales y teorema del valor medio E13. Contiuidad
	16. Menciona las distintas maneras (registros de representación) que empleó la profesora para mostrar el	E1. Álgebraicas, verbales y gráficas E2. Verbal, gráfica, y con presentaciones en digital. E3. gráficamente , grafica y ecuaciones. E4. Escritas, expuestas, con lectura E5. Gráficas, verbales y funciones E6. Pues gráficamente. Visualmente. Numéricamente

	teorema fundamental del cálculo.	E7. Geometrica. Verbal, algebraica. E8. gráficas y dibujos ilustrativos para mejor comprensión E9. Pizarrón y proyector E10. Lenguaje algebraico y grafico E11. No recuerdo E12. -gráficas -tablas -operaciones -dibujos -tabla de X/Y -formulas E13. la profesora mostró graficas de la función algebraico verbal
	17. ¿Qué aspectos históricos recuerdas del teorema fundamental del cálculo?	E1. De newton y otro E2. ¿Históricos? E3. no los recuerdo E4. Como se original el calculo E5. De que antes utilizaban piedras para medir E6. No se E7. La verdad no recuerdo bien pero creo la información de Grecia E8. Ninguno E9. Lo que hizo newton y Leibniz E10. Que Pitágoras no hizo el teorema f E11. no recuerdo E12. Fueron unos fanáticos E13. Que fue demostrado por Leibniz y Newton
	18. ¿Cuáles usos y aplicaciones se dieron al teorema fundamental del cálculo durante la clase?	E1. No me acuerdo muy bien E2. Gráfica de funciones, funciones transversales. E3. Nose E4. Miramos una aplicasion para graficar creo que era GeoGebra E5. El uso de las funciones para encontrar el área debajo E6. Derivda, integral E7. En una rampa E8. En muchas aplicaicoens E9. Funcion lineal., Funcion constante. Derivada, interal E10. No recuerdo E11. Usarlo para la elaboración de gráficas E12. En un parque de diversiones E13. Geogebra
KMT	19. ¿Cuáles recursos didácticos (libros, materiales,	E1. Actividades y la maestra E2. Las actividades

	software) se emplearon durante la enseñanza de teorema fundamental del cálculo?	E3. Actividades y una presentación de gráficas en proyector E4. cuadernillo de aprendizajes, proyector y geogebra E5. unas actividades que nos dio la maestra E6. Se utilizó GeoGebra E7. Trabajos y video para saber qué es un teorema, me gustó ver el video en la clase E8. Videos E9. Las actividades y tu cuaderno E10. El video que mostró el teorema de forma divertida E11. Libros y materiales E12. -libros -materiales -internet -páginas web E13. GeoGebra
	20. Menciona algunas de las tareas y ejemplos que recuerdas que empleó la profesora para la enseñanza del teorema fundamental del cálculo:	E1. Una rampa de patinaje y áreas de figuras E2. El geogebra cuando pons la fubcion de la derivada E3. Las matemáticas son para siempre E4. Recuerdo la tarea 1 y 2 que consiste en responder E5. Nos dejo ver un video para saber la diferencia entre que es un teorema y una conjetura E6. Un video y varios ejercicios y muchos ejemplos E7. Tareas para sacar áreas y GeoGebra E8. Nos ponía ejemplo de una pisa para patinar y de ese tipo E9. Derivada, integral y teorema fundamental del calculo E10. Las integrales son areas E11. Clasificacion y compaetimiento E12. Videos y unas actividades con ejemplos E13. una tarea del área de un rectángulo

Es así como se presentan los datos que se reunieron gracias a los instrumentos de recogida de información, tratando que sean lo más fiel a cómo se recopilaron; en el caso de los episodios de clase y el diario de investigación, se consideran lo más puntual posible a cómo se presentaron los datos durante la implementación de la propuesta.

V.2. Triangulación de la información para la detección de indicadores de conocimiento durante la implementación, de acuerdo con las categorías del MTSK.

En este apartado, se puntualizan los indicadores de conocimiento que se han encontrado a partir de la revisión de los instrumentos de recogida de información, tratando de hacer una triangulación entre ellos para dar evidencia de cómo fueron detectados. Puede apreciarse que, en algunos existe mayor cantidad de evidencia que en otros. Asimismo, se ha logrado encontrar indicadores que estaban presentes en la planificación inicial de forma implícita, pero que no se habían descubierto antes.

Indicadores de conocimiento a partir de la práctica				
Dominio	Subdominio	Categoría	Indicador ¿Qué se vio?	**Evidencia de los instrumentos de recogida de información ¿Cómo se vio?**
MK	KoT	Procedimientos (P)	Conocer un procedimiento para demostrar el TFC.	**Cuestionario de los estudiantes:** **Pregunta 13:** ¿Cuál o cuáles procedimientos empleó la profesora para demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo? E2: Ir sacando áreas de figuras conocidas como el rectángulo y el triangulo E4: Tomo ejemplos y no los explico en el pizarron a si como geogebra (la aplicacion que nos ayuda con la materia) nos mostro como se comportan. E8: Nos explicó el teorema de forma geométrica y representación algebraica E13: la profesora demostró que la función era derivable en un intervalo. luego integro en el intervalo utilizando una funcion t equivalente a la funcion derivable.
			Conocer un procedimiento para demostrar el TFC.	**En el episodio 6 la profesora realiza la demostración del TFC:** *P: entonces, para demostrarlo, vamos a trabajar con un applet de GeoGebra que les estoy proyectando, aquí se ven los ejes, el eje x y el eje y, voy a prender la función que puse en esta práctica, es una función cualquiera. ¿Si se ve?* *E4: ah, ya.* *P: en esta función vamos a elegir un intervalo, y chequen que la proposición del TFC nos dice que, para poder cumplir el teorema, la función debe ser continua en el intervalo que se esté trabajando. Entonces, aquí puse dos puntos, a y b, que representan mi intervalo. Estos puntos los voy a ubicar en un intervalo de la función que sea continua. Ahora, entre ese intervalo, vamos a ubicar un punto x, ese punto x lo podemos mover, vean cómo puedo ubicarlo a lo largo del intervalo. Vean como muevo el punto x y la altura de x varía en la*

				gráfica de la función. Lo que tenemos que demostrar es que esa función f(x) es igual a la derivada de la integral desde a hasta x, de esta función, ¿si?... entonces, hasta aquí, tenemos un punto x dentro del intervalo; y entonces puedo tener también un punto x+h, es decir, a partir de x, podemos sumarle una cierta cantidad a esa x, que es h, y así llegamos al punto x+h. o sea que la distancia que hay entre x y x+h, ¿sería? *E5: h* *…* *P: bueno, luego, fíjense bien, yo tengo que ver, imagínense que tengo mi función f(x) y necesito una antiderivada, es decir, F(x), y luego esta última la derivo. Entonces, de acuerdo con la definición de derivada, tendríamos los siguiente, vas a poner la integral desde a hasta x+h de f(x), dx. Menos la integral desde a hasta x de f(x) dx, y todo esto lo vamos a dividir entre h. y todo esto ¿qué significa gráficamente? Fíjense bien, me está diciendo que tenemos la integral desde a hasta x+h, acuérdense que integrar estamos hablando de área. Entonces yo puedo tener el área de este intervalo, a hasta x+h, y a esta área le tengo que restar la integral desde a hasta x, la voy a mostrar. Así que si al área del intervalo desde a hasta x+h le restamos el área del intervalo desde a hasta x, ¿qué nos va a quedar?* *E7: h* *E1: el área de h* *P en ese intervalo ¿verdad? Es decir, esta parte que voy a prender. Entonces vamos a trabajar solamente con esa partecita. Es decir, que aquí yo puedo decir que eso va a ser igual a la integral desde x hasta x+h, ¿si? Entonces si se fijan lo hicimos gráficamente, porque quizá en la forma algebraica no se comprenda. Y luego, en este intervalo, vamos a ubicar un punto c cuya altura en ese intervalo, nos genera un rectángulo cuya área es igual que el intervalo bajo la curva desde x hasta x+h. por lo tanto, decimos que ese punto representa el teorema del valor medio. Ahora, si hacemos que h tienda a cero, ¿qué pasa?* *E3: es igual* *P: ¿igual a qué?* *E3: a la misma función del inicio.* *P: ok, entonces así demostramos que si derivamos la integral de la una función, regresaremos a la función original, con lo cual nos hace ver que la derivada y la integral son operaciones inversas…*

<table>
<tr>
<td rowspan="3">MK</td>
<td rowspan="3">KoT</td>
<td rowspan="3">Definiciones (D)</td>
<td rowspan="2">Conocer la proposición del TFC.</td>
<td colspan="2">En el episodio 6, se muestra a los estudiantes:

P: … Entonces, comenzando con la primera [parte del TFC], esta nos dice lo siguiente,…: si f es continua en el intervalo cerrado a coma b y F mayúscula es una antiderivada de f en el mismo intervalo, entonces, la integral desde a hasta b de la función f es igual a la antiderivada de f evaluada en b menos la antiderivada de f evaluada en a… Ahora, vamos a pasar a la segunda parte. Bueno, esta parte nos dice lo siguiente: si f es continua en el intervalo abierto que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo, tenemos que la derivada de la integral de la función f, desde a hasta x, es igual a la función original.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Cuestionario de los estudiantes:

Pregunta 14: ¿Cuál o cuáles definiciones presentó la profesora sobre el tema estudiado?

E5: sobre qué es la derivada y la integral y el teorema fundamental del cálculo.</td>
</tr>
<tr>
<td>Conocer una definición de teorema.</td>
<td>P: …Y entonces nos dice, ¿qué es un teorema? Bueno, de acuerdo con Baldor, también tiene estas características: es una proposición, una proposición pensemos que es como un enunciado, que puede ser demostrada, ahí está otra vez esta característica. Luego nos dice que en el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: una que es la hipótesis y otra es la tesis.</td>
<td>Cuestionario de los estudiantes:

Pregunta 14: ¿Cuál o cuáles definiciones presentó la profesora sobre el tema estudiado?

E3: la de las teorema
E4: que es un teorema, representacion grafica, algebraica, derivada, operaciones inversas
E6: vimos porque es fundamental y la de teorema
E9: la conjetura y el teorema
E13: Derivadas Integrales continuidad Teorema</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">MK</td><td rowspan="3">KoT</td><td rowspan="3">Definiciones (D)</td><td>Conocer la definición de derivada de una función.</td><td>En el episodio 5 se muestra a los estudiantes la definición de derivada, de acuerdo con Spivak (1996):

P:… Spivak (1996) nos da esta definición, nos dice definición de derivada, una función f, una función f puede ser esta curva, aquí la está representando con una curva, es derivable en a, es decir, en este punto o algún otro, si, vean como nos da como una condición si, el límite cuando h tiende a cero, h si se fijan, es un incremento desde a hasta un determinado punto.</td><td>Cuestionario de los estudiantes:
Pregunta 14: ¿Cuál o cuáles definiciones presentó la profesora sobre el tema estudiado?
E4: representacion grafica, algebraica, derivada, operaciones inversas
E5: sobre qué es la derivada y la integral y el teorema fundamental del calculo
E7: definición de una función, de la derivadda
E8: que es una operación inversa, derivada, integral</td></tr>
<tr><td>Conocer la definición de integral de una función.</td><td>En el episodio 5 se muestra a los estudiantes la definición de integral (Spivak, 1996):
Y ahora, ¿qué es la integral?
E5: no, pues menos.
P: …La integral nos dice: una función f, acotada sobre a, b, este es un intervalo … nos dice es integrable en ese mismo intervalo si… nos da ahí una serie de nomenclatura que van a decir ¿eso qué significa? Lo podemos leer como la suma superior del límite infinito es igual a la suma inferior del límite infinito. ¿esto que quiere decir? …Y si yo reviso cuanto me da la suma de las áreas de los que están por arriba, obtengo 2.19; mientras que la suma de los que están por debajo me da 2.14. entonces, ¿cumplo con la igualdad?</td><td>Cuestionario de los estudiantes:

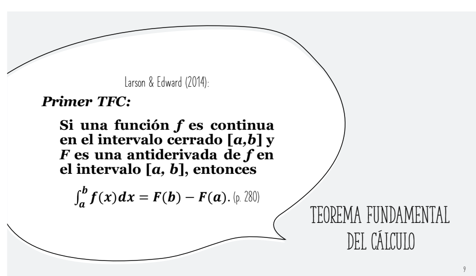
Pregunta 14: ¿Cuál o cuáles definiciones presentó la profesora sobre el tema estudiado?

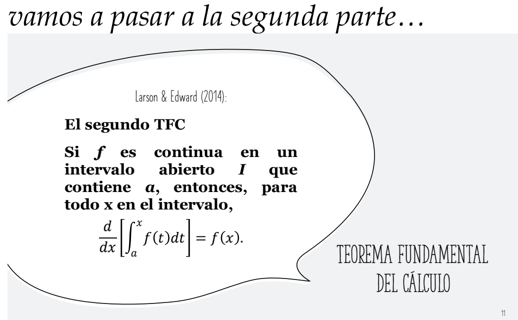
E5: sobre qué es la derivada y la integral y el teorema fundamental del calculo
E8: que es una operación inversa, derivada, integral
E13: Derivadas Integrales continuidad Teorema</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">En el episodio 6:
E7: no
P: de acuerdo, ahora revisemos qué pasa con la otra imagen, ahora tenemos un número muy grande de rectángulos, digamos que tienden a infinito, y tengo también rectángulos por arriba y rectángulos por abajo… y vean cómo son las sumas de estos rectángulos tanto por arriba como por abajo… eso quiere decir que esta función en este intervalo, es integrable.</td></tr>
</table>

MK	KoT	Propiedades y fundamentos (PF)	Conocer que el Teorema del valor medio para integrales es necesario para demostrar el TFC.	**En el episodio 6, se utiliza el teorema del valor medio para integrales cuando se está demostrando el TFC.** *P: en ese intervalo ¿verdad? Es decir, esta parte que voy a prender. Entonces vamos a trabajar solamente con esa partecita. Es decir, que aquí yo puedo decir que eso va a ser igual a la integral desde x hasta x+h, ¿si? Entonces si se fijan lo hicimos gráficamente, porque quizá en la forma algebraica no se comprenda. Y luego, en este intervalo, vamos a ubicar un punto c cuya altura en ese intervalo, nos genera un rectángulo cuya área es igual que el intervalo bajo la curva desde x hasta x+h. por lo tanto, decimos que ese punto representa el teorema del valor medio.*	**Cuestionario de los estudiantes:** Pregunta 15: ¿Cuál o cuáles propiedades mencionó la profesora como útiles en la demostración del teorema fundamental del cálculo? E12: Derivadas, integrales y teorema del valor medio

<table>
<tr>
<td rowspan="2">MK</td>
<td rowspan="2">KoT</td>
<td rowspan="2">Registros de representación (RP)</td>
<td rowspan="2">Conocer la representación algebraica del TFC.</td>
<td>Cuestionario de los estudiantes:
Pregunta 16: Menciona las distintas maneras (registros de representación) que empleó la profesora para mostrar el teorema fundamental del cálculo.
E14. Álgebraicas, verbales y gráficas
E3. gráficamente , grafica y ecuaciones.
E5. Gráficas, verbales y funciones
E7. Geometrica. Verbal, algebraica.
E10. Lenguaje algebraico y grafico
E12. -gráficas -tablas -operaciones -dibujos -tabla de X/Y -formulas
E13. la profesora mostró graficas de la función algebraico verbal</td>
<td>Cuestionario de los estudiantes:

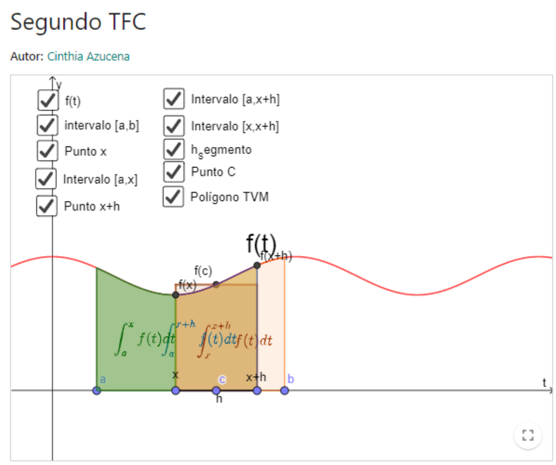
Pregunta 4: ¿Consideras que el discurso de la profesora te invitó a explicar con tus propias palabras lo que estabas aprendiendo sobre el tema? Explica
E10: Si por que ella explicaba de una manera bien y clara que en ocasiones no le entendía pero volvía a explicar de distinta manera y yo comprendía por mis propias palabras el tema</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">En el episodio 6, se muestra a los estudiantes:

P: … Entonces, comenzando con la primera, esta nos dice lo siguiente…


P: …Ahora, vamos a pasar a la segunda parte…


</td>
</tr>
</table>

MK	KoT	Registros de representación (RP)	Conocer la representación verbal del TFC.	**En el episodio 6, la profesora menciona a los estudiantes:** P: … *Entonces, comenzando con la primera, esta nos dice lo siguiente, ... si f es continua en el intervalo cerrado a coma b y F mayúscula es una antiderivada de f en el mismo intervalo, entonces, la integral desde a hasta b de la función f es igual a la antiderivada de f evaluada en b menos la antiderivada de f evaluada en a…* ***P:*** *…Ahora, vamos a pasar a la segunda parte. Bueno, esta parte nos dice lo siguiente: si f es continua en el intervalo abierto que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo, tenemos que la derivada de la integral de la función f, desde a hasta x, es igual a la función original.*	Cuestionario de los estudiantes: **Pregunta 10:** ¿Qué acciones realiza la profesora cuando expongo mis dudas? E2: Hace acciones verbales y gráficas para explicar los temas. **Pregunta 16:** Menciona las distintas maneras (registros de representación) que empleó la profesora para mostrar el teorema fundamental del cálculo. E1. Álgebraicas, verbales y gráficas E15. Verbal, gráfica, y con presentaciones en digital. E4. Escritas, expuestas, con lectura E5. Gráficas, verbales y funciones E7. Geometrica. Verbal, algebraica. E13. la profesora mostró graficas de la función algebraico verbal.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">**MK**</td>
<td rowspan="2">KoT</td>
<td rowspan="2">Registros de representación (RP)</td>
<td rowspan="2">Conocer la representación gráfica del TFC.</td>
<td>**En el episodio 6 se muestra de forma gráfica el TFC, por medio de un applet de GeoGebra:**
</td>
</tr>
<tr>
<td>**Cuestionario de los estudiantes:**

Pregunta 10: ¿Qué acciones realiza la profesora cuando expongo mis dudas?
E10: explica con ejemplos y visualizaciones, nada brusco o repentino, solo nos aclara la duda
Pregunta 12: En caso de recibir retroalimentación por parte de la profesora, ¿Crees que dicha retroalimentación te ayuda a pensar más profundamente tus respuestas y comprender el tema? Explica detalladamente.
E2. Si, como comenté sabe explicar verbal y gráficamente las dudas y actividades.
Pregunta 16: Menciona las distintas maneras (registros de representación) que empleó la profesora para mostrar el teorema fundamental del cálculo.
E1. Álgebraicas, verbales y gráficas
E2. Verbal, gráfica, y con presentaciones en digital.
E16. gráficamente , grafica y ecuaciones.
E5. Gráficas, verbales y funciones
E6. Pues gráficamente. Visualmente. Numéricamente
E7. Geometrica. Verbal, algebraica.
E8. gráficas y dibujos ilustrativos para mejor comprensión
E10. Lenguaje algebraico y grafico
E12. -gráficas -tablas -operaciones -dibujos -tabla de X/Y -formulas
E13. la profesora mostró graficas de la función algebraico verbal</td>
</tr>
</table>

MK	KoT	Fenomenología y aplicaciones (FA)	Conocer que Isaac Newton y Gottfried Leibniz forman parte de la historia del TFC.	**En el episodio 3, se muestran en la diapositiva de "aspectos históricos del TFC":** *P:…Vamos a ver un poco de historia, bueno ustedes a lo mejor han escuchado hablar de estos dos personajes: Gottfried Leibniz e Isaac Newton …vivieron más o menos en la misma época, pero Isaac Newton era inglés y Leibniz era alemán, y a los dos se les atribuye la invención del cálculo y también, la demostración del TFC …Entonces, ellos dos, digamos que ya había gente que ya habían trabajado en el TFC.* *E3: ¿antes de ellos?* *P: antes que ellos, si. Pero ¿saben qué les faltó? Les faltó pasar de conjetura a teorema, es decir, ¿qué les faltó?* *E2: comprobarlo* *E4 y E10: demostrarlo*	**Cuestionario del estudiante:** **Pregunta 17:** ¿Qué aspectos históricos recuerdas del teorema fundamental del cálculo? E14. De newton y otro E9. Lo que hizo newton y Leibniz E13. Que fue demostrado por Leibniz y Newton
			Conocer que Isaac Newton es conocido por los estudiantes, al ser es estudiado en temas previos de Física.	**En el episodio 3, los estudiantes mencionan que han estudiado a Isaac Newton en temas de Física:** *P: …Vamos a ver un poco de historia, bueno ustedes a lo mejor han escuchado hablar de estos dos personajes: Gottfried Leibniz e Isaac Newton.* *E1: nada más de Isaac Newton* *E5: yo si, en Física* *E10: ¿en Física?, no* *E5: en Física si… es una conjetura, jajaja.*	

<table>
<tr>
<td rowspan="3">MK</td>
<td rowspan="3">KoT</td>
<td rowspan="3">Fenomenología y aplicaciones (FA)</td>
<td rowspan="2">Conocer que Newton demostró el TFC como un resultado de resolver que el algoritmo inverso que resuelve el problema de las tangentes, resolvió el problema de las áreas.</td>
<td>Cuestionario del estudiante:

Pregunta 3: En cuanto al tema estudiado de teorema fundamental del cálculo, menciona el nivel de comprensión que consideras que alcanzaste (en porcentaje) y explica de manera detallada el por qué
E9: …teorema fundamental 80% es una operación inversa entre derivada e integral.
E13: 70%, porque ya sé que, después de que la función sea continua en un intervalo (a,b) puedo derivarla y, por tanto, encontrar la antiderivada de la función. Puedo integrarla en el intervalo que es derivable.</td>
<td>En el episodio 3, se habla de cómo demostró Newton el TFC:

P: …pero no, cada uno lo demostró de manera diferente. Entonces, ¿eso que quiere decir? Que este teorema lo podemos demostrar no nada más de una manera, sino de muchas maneras. Newton lo demostró haciendo ver que el algoritmo inverso que resuelve las tangentes resolvía el área bajo una curva…</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Las actividades fueron diseñadas para que los estudiantes encontraran esa relación:
En la actividad 1 se da la instrucción de derivar la función A(t) (área) que habían determinado y describir la relación que observaban entre A(t) y f(t) del inicio.
c,g) Deriva A(t) obtenida en el inciso anterior:__________________________
d,h) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre A´(t) y f(t).</td>
</tr>
<tr>
<td>Conocer que Leibniz demostró el TFC como operaciones inversas entre la derivada y la integral a través de sumas y restas.</td>
<td colspan="2">En el episodio 3, se habla de cómo demostró Leibniz el TFC:

P: …mientras que Leibniz lo demostró por medio de sumas y restas como operaciones inversas…</td>
</tr>
</table>

MK	KoT	Fenomenología y aplicaciones (FA)	Conocer que una aplicación del TFC es en la determinación del área de una región plana.	**En el episodio 6 se muestra un ejemplo a los estudiantes en el que deben determinar el área del perfil de una rampa de patinaje, para poder determinar el volumen de concreto que se requiere.** **P: …** *Tenemos esa función que nos da el problema para lo que es la superficie de la rampa. Esta superficie ya la habíamos representado antes en un plano cartesiano.* SITUACIÓN PROBLEMA **En un parque de deportes extremos se desea construir una rampa de patinetas, como la que se observa en la figura. Para ello, se debe calcular la cantidad de concreto en metros cúbicos que se han de necesitar en la rampa extrema. El contorno de la superficie de la rampa es parabólico y está dada por la función $f(x) = 0.5x^2$. Calcula el volumen de concreto que se requiere.** **(Academia Nacional de Matemáticas, 2021)**	**Cuestionario del estudiante:** **Pregunta 18:** ¿Cuáles usos y aplicaciones se dieron al teorema fundamental del cálculo durante la clase? E5: El uso de las funciones para encontrar el área debajo E7: En una rampa

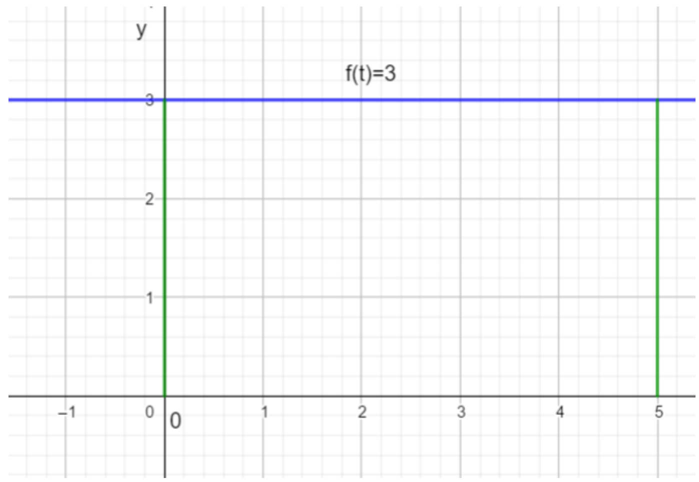
<table>
<tr>
<td>MK</td>
<td>KoT</td>
<td>Fenomenología y aplicaciones (FA)</td>
<td></td>
<td>

Producciones de los estudiantes:

En la actividad 1 se solicita a los estudiantes calcular el área debajo de regiones planas.

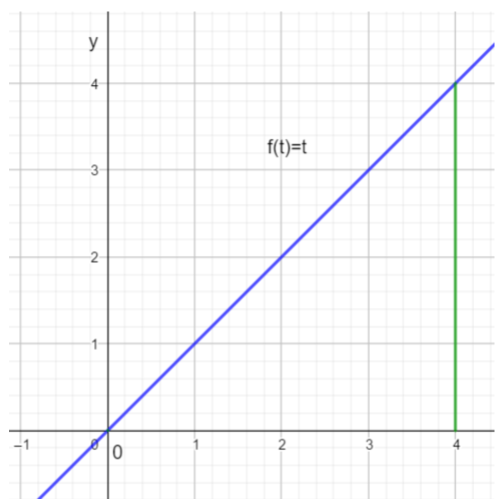
Función $\boldsymbol{f(t) = 3}$

b) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = 5$. Utiliza fórmulas geométricas.



Función $\mathbf{f(t) = t}$

f) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t = 0$ y $t = 4$. Utiliza fórmulas geométricas.



</td>
</tr>
</table>

MK	KSM	Conexiones basadas en simplificación (CS)	Conocer que existe una conexión entre el concepto de límite con la derivada e integral definida. En la integral definida como una suma cuyo límite tiende a infinito y con la derivada a través de una recta secante cuyo incremento tiende a cero para convertirse en una recta tangente.	**En el episodio 5, se presenta la definición de derivada:** ***P: bueno, Spivak (1996) nos da esta definición [de derivada], nos dice definición de derivada, una función f, una función f puede ser esta curva, aquí la está representando con una curva, es derivable en a, es decir, en este punto o algún otro, si, vean como nos da como una condición si, el límite cuando h tiende a cero, h si se fijan, es un incremento desde a hasta un determinado punto.*** ***Aquí tengo mi punto a y yo puedo decir que por ejemplo, este punto sería a + h, o este punto también puede ser, o este, o este, lo vamos a ver de forma dinámica [presenta un recurso de GeoGebra sobre la derivada].***	**En el episodio 5, se presenta la definición de integral:** *P: …La integral nos dice: una función f, acotada sobre a, b, este es un intervalo, ustedes para sacar áreas han tenido que elegir un intervalo de la función, nos dice es integrable en ese mismo intervalo si… nos da ahí una serie de nomenclatura que van a decir ¿eso qué significa? Lo podemos leer como la suma superior del límite infinito es igual a la suma inferior del límite infinito… de acuerdo, ahora revisemos qué pasa con la otra imagen, ahora tenemos un número muy grande de rectángulos, digamos que tienden a infinito, y tengo también rectángulos por arriba y rectángulos por abajo… y vean cómo son las sumas de estos rectángulos tanto por arriba como por abajo.* *E6: son iguales* *P: eso quiere decir que esta función en este intervalo es integrable.*

MK	KSM	Conexiones basadas en simplificación (CS)	Conocer que existe una conexión de simplificación entre los conceptos de recta secante, recta tangente y pendiente de la recta con el de derivada. Ya que en la definición de derivada se aprecia como el incremento h tiende a cero para pasar de una recta secante a la función a una recta tangente de la misma.	**En el episodio 5 se muestra con un recurso de Geogebra, la definición de derivada empleando rectas secantes y tangente a la función:** *P: …Fíjense bien, esto es lo mismo que tenemos en la imagen. Observen como prendo y apago esta recta que corta a la función en el punto a y en el punto a + h. esta recta, en la posición que está es una recta secante, ¿verdad?, ¿por qué secante?* *E5: porque la corta a las dos* *P: porque corta en dos puntos a la función… entonces este punto a + h yo lo puedo acercar a a, si disminuyo la distancia de h… vean que a medida que lo acerco, se va juntando, se va juntando, hasta que, ese incremento en h se hace cero, ¿y qué pasó con la recta secante?* *E7: desaparece* *P: desapareció aquí, pero en realidad lo que pasa que se convirtió en una recta tangente. ¿cuál es la diferencia entre la recta secante y la tangente?* *E5: que la tangente pasa por un punto* *P: la tangente toca a la función en un punto. Entonces, podríamos comparar a la derivada con la recta tangente de una función. Si ustedes recuerdan, en trigonometría veían que la tangente es igual ¿al cateto opuesto…?* *E10: sobre la hipotenusa* *P: sobre la hipotenusa, ¿verdad? Luego, en Geometría Analítica veían que ese cateto opuesto, pensando en dos puntos ubicados en el plano cartesiano, se puede sustituir como* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. *Esta fórmula [de la derivada], si se fijan, es lo mismo, esto nos representaría el cateto opuesto y esto representaría el cateto adyacente y sería la tangente. Entonces, eso es la derivada de forma gráfica y algebraica.*

MK	KSM	Conexiones basadas en complejización (CC)	Conocer que el TFC tiene conexión con el tema de variables aleatorias en probabilidad, ya que para obtener la probabilidad de que una variable aleatoria continua en un intervalo [a, b], se requiere calcular el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad en dicho intervalo.	**En el episodio 6 la profesora lo menciona de forma explícita:** *P: …otro tema con el que se relaciona el TFC es el de variables aleatorias continuas, el cual van a estudiar el próximo semestre en Probabilidad. Ya que para obtener la probabilidad en esas variables, van a emplear el TFC.*	**En el episodio 7, la profesora comenta a los estudiantes que podrán emplearlo para ese tema estadístico:** *P: …Esto también les va a servir para otros temas posteriores, por ejemplo, más adelante, en Estadística, el TFC nos sirve para calcular la probabilidad de algunas variables, entre otras cosas…*

MK	KSM	Conexiones auxiliares (CA)	Conocer que el TFC es un procedimiento auxiliar en la resolución de ecuaciones diferenciales, ya que para encontrar la o las funciones solución de la ecuación diferencial se requiere trabajar con derivadas y antiderivadas.	**En el episodio 6 la profesora lo menciona de forma explícita:** *P: El TFC no es un tema aislado que van a estudiar en este semestre. Esta relacionado con otros temas que ustedes estudiarán después. Por ejemplo, para los que estudien alguna ingeniería o carreras relacionadas, verán que es indispensable para resolver ecuaciones diferenciales.*

MK	KSM	Conexiones transversales (CT)	Conocer que existe una conexión transversal entre el tema de ecuación (igualdad que contiene una o más incógnitas (Real Academia Española (RAE), 2020) con el de función y TFC cuando, a partir de una ecuación dónde se conoce el valor del área bajo una curva, se pide calcular la función o funciones continuas que la satisfacen.	**Producciones de los estudiantes** **En la actividad de presentación de los estudiantes se les solicita el siguiente ejercicio:** **Ejercicio 1:** el primer ejercicio pretendía que los estudiantes pudieran emplear el algoritmo del TFC de una forma distinta a cómo la habían trabajado en las actividades anteriores, y que, pudieran determinar la función f(x) a partir del intervalo y el valor del área, como datos conocidos, empleando sus conocimientos previos de ecuaciones lineales o cuadráticas y de la antiderivada de la función. También se esperaba que los estudiantes expresaran algo respecto al área negativa que se les presenta en el ejercicio. **Ejercicio 1:** Dado que f(x) es una función continua que satisface la ecuación $\int_2^5 f(x)\,dx = -6$. c) Encuentra f(x) d) ¿f(x) tiene una única solución?

<table>
<tr>
<td rowspan="2">MK</td>
<td rowspan="2">KPM</td>
<td rowspan="2">Prácticas ligadas a la matemática en general (PMG)</td>
<td rowspan="2">Conocer el papel de las analogías en la práctica para la comprensión de temas matemáticos.</td>
<td>En el episodio 7 se les presenta a los estudiantes una analogía de la suma y la resta como operaciones inversas, al igual que la derivada y la integral:

P: …Entonces, regresando a lo que hicimos ahorita… ¿se acuerdan que decíamos el teorema fundamental del cálculo lo que hace es decirnos eh, la derivada y la integral son operaciones inversas, y lo podemos ver aquí, si tenemos la función, la integramos y luego la derivamos, regresamos a la misma función. Es como cuando ustedes dicen, bueno, si tengo dos manzanas y a estas dos manzanas le sumo cinco ¿cuántas me van a quedar?
V: 7
P: si a estas cinco manzanas le resto cinco, ¿cuánto me queda?
V: 2</td>
<td>En el episodio 2, el contenido del video presentado está basado en realizar una analogía entre lo que dura para siempre: un diamante o un teorema:

Contenido del video:
Así que, bueno, si queréis decirle a alguien qué le queréis para siempre, le podéis regalar un diamante; pero si le queréis decir que le queréis para siempre siempre, regalále un teorema, eso sí, quieto, lo tendréis que demostraré he, que vuestro amor no se quede en conjetura, gracias.</td>
</tr>
<tr>
<td>En el episodio 1, la profesora hace una analogía sobre la importancia de estar atentos en clase:

P: …imaginen cuando vienen a la escuela, que se pudieran quitar… la cabeza, que pudieran separarla de su cuerpo y la tuvieran aquí en la mano, y que digan: bueno cabeza, …tu ya te vas a la escuela, yo aquí me quedo porque a mí no me necesitan.
Muchas veces pensamos que solamente la cabeza necesita venir a la escuela, ¿Ustedes lo han pensado alguna vez? O ¿Quién creen que es más importante que venga a la</td>
<td>En el episodio 2 la profesora realiza analogías para que los estudiantes comprendan la diferencia entre la hipótesis y la tesis de un teorema:

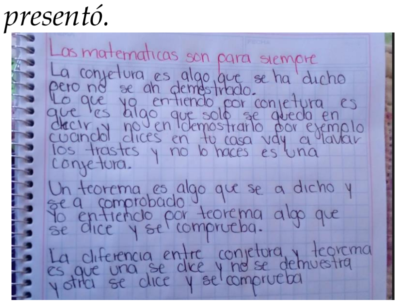
P: podría ser, ajá. La hipótesis de hecho es una suposición. Por ejemplo pensemos una situación de la vida: ustedes quieren ir a una fiesta y su mamá les dice: pues sabes que, si limpias toda la casa vas a la fiesta. Ahí por ejemplo, podríamos decir que la hipótesis es que ustedes van a limpiar toda la casa y la tesis es que, bueno, ya si la limpian, entonces ahora si van a la fiesta.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td>escuela, su cabeza o su cuerpo?
E1: Las dos cosas
P: ¿Por qué?
E1: porque si no nos morimos
P: imagínense que no se murieran, que si la pudiéramos separar
E2: no, pero también sirve el cuerpo para poder escribir.</td><td></td></tr>
<tr><td>Conocer las características de los teoremas en matemáticas.</td><td colspan="2">En el episodio 2 se mencionan las características de los teoremas matemáticos:

P: …¿qué es un teorema? Bueno, de acuerdo con Baldor, también tiene estas características: es una proposición, una proposición pensemos que es como un enunciado, que puede ser demostrada, ahí está otra vez esta característica. Luego nos dice que en el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: una que es la hipótesis y otra es la tesis.</td></tr>
<tr><td>Conocer el papel del ejemplo para mostrar el TFC.</td><td colspan="2">En el episodio 6 se menciona a los estudiantes que la primera parte del TFC se mostrará con un ejemplo:

P: bueno, fíjense bien chicos, lo que vamos a ver ahora es la proposición del TFC. El TFC está compuesto por dos partes. La primera parte la vamos a mostrar con un ejemplo y la segunda la vamos a demostrar.</td></tr>
<tr><td>MK</td><td>KPM</td><td>Prácticas ligadas a una temática en matemáticas (PTM)</td><td>Conocer que una práctica ligada al estudio del TFC es hacer explícita la diferencia entre teorema y conjetura.</td><td>En el episodio 2 se les expresa a los estudiantes que el objetivo del video es hacer una diferencia entre teorema y conjetura:

P: entonces voy a presentarles el video y durante toda la duración piensen en esta diferencia, ¿sale? Bueno, vamos a ver el video.
P: Es un video muy cortito, pongan atención en lo que es una conjetura y un teorema.</td><td>Producciones de los estudiantes

Figura 18
Los estudiantes pudieron diferenciar entre lo que es un teorema y una conjetura, con base en el contenido del video que se les presentó.

</td></tr>
</table>

			Conocer el papel de las demostraciones matemáticas en la validación de teoremas.	**En el episodio 2 se menciona en el video:** Contenido del video: *Por ejemplo, imaginaos que tengo aquí un campo grande, enorme, infinito, lo quiero cubrir con piezas iguales sin dejar huecos;… ¿cuál es la mejor pieza que puedo usar? la que para cubrir la misma superficie tiene un borde más pequeño, Papus de Alejandría, Papus, en el año 300 dijo que lo mejor era usar hexágonos, como hacen las abejas, pero no lo demostró; el tío dijo uuu hexágonos, venga hexágonos, dámelo, no lo demostró, se quedó en una conjetura;… hasta que 1700 años después, 1700 años después, en 1999, Tomas Hales demostró que Papus y las abejas llevaban razón, que lo mejor es usar hexágono,s y eso se convirtió en un teorema…*	**En el episodio 2 se menciona a la demostración como una característica escencial de los teoremas matemáticos:** *P: si solamente pensamos, sin comprobar nada, es una conjetura. Entonces nos dice, los teoremas son para siempre [lo escribe en el pizarrón] y, además, requieren ser demostrados.*
			Conocer que el TFC puede ser demostrado con procedimientos distintos.	**En el episodio 3, se habla de cómo demostraron Newton y Leibniz dicho teorema:** P: … *Entonces, ¿eso que quiere decir? Que este teorema lo podemos demostrar no nada más de una manera, sino de muchas maneras. Newton lo demostró haciendo ver que el algoritmo inverso que resuelve las tangentes resolvía el área bajo una curva; mientras que Leibniz lo demostró por medio de sumas y restas como operaciones inversas.*	

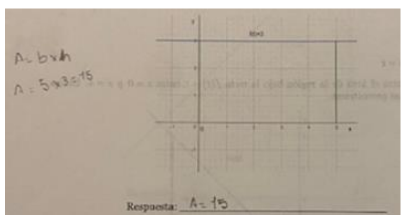
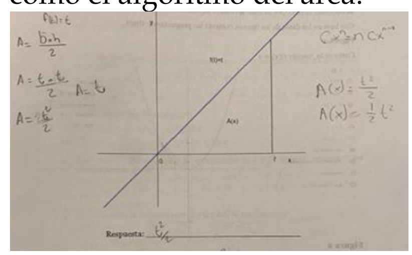
PCK	KFLM	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)	Conocer que una dificultad para el aprendizaje del TFC es que, al momento de abordar el tema, los estudiantes muestran poca comprensión de los conceptos de función, límite, continuidad y derivada.	**En el episodio 5, los estudiantes expresaron que no recuerdan el concepto de derivada:** *P: [El TFC] como hace una relación inversa entre estas dos [derivada e integral], tenemos que preguntarnos: ¿qué es la derivada y qué es la integral?, ¿ustedes recuerdan qué es la derivada?* *E7: no* *P: ¿no recuerdan nada?* *E4: no*	**Diario de investigación** **Pilotaje** **Clase 1** *…los estudiantes no recuerdan mucho los temas de función, límite, derivada y continuidad, ya que no tienen claro estas nociones que son importante para aprender el TFC. Esto me hace pensar que antes de la aplicación, se deben retomar estos temas.*
				Cuestionario de los estudiantes: **Pregunta 12:** En caso de recibir retroalimentación por parte de la profesora, ¿Crees que dicha retroalimentación te ayuda a pensar más profundamente tus respuestas y comprender el tema? Explica detalladamente. E13: Si. Porque si la profesora nos ayuda a solucionar ejercicios, podemos encontrar respuestas a nuestras dudas también esto de la retroalimentación me ayuda a entender cosas anteriores. porque a veces con las clases virtuales no aprendimos lo mismo y nos faltaron temas que en la retroalimentación la profe nos explica.	

PCK	KFLM	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)		**Cuestionario de los estudiantes:** ¿Cuáles temas matemáticos que habías estudiado antes tuviste que retomar o emplear para el estudio del teorema fundamental del cálculo? **E2:** Funciones, contexto transversales, funciones continúan y discontinuas. E8: Sobre las funciones E13: Derivadas, continuidad, integral definida e indefinida,	**Diario de investigación Aplicación** **Clase 1** *…Al igual que con el grupo de pilotaje, durante la presentación del TFC tuve que retomar los temas de función, límite, derivada y continuidad, sin embargo, había preparado información para que esta parte no se llevara mucho tiempo, además, del repaso previo que se tuvo.*
			Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es la falta de comprensión del lenguaje matemático.	**Diario de investigación: Pilotaje** **Clase 2** *Al momento de preguntarles cómo les fue con la actividad que resolverían de forma individual, me han comentado que se les dificultó la comprensión del lenguaje matemático para comprender las instrucciones de lo que se les pide que realicen. Por lo cual, he tenido que explicarles las instrucciones y retomar los conjuntos de números: naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.*	**En el episodio 7 se tuvo que traducir el lenguaje matemático de la actividad:** … ***P:*** *¿Cómo les fue con la actividad?, ¿Qué dudas tuvieron?* *E3: todo, es que yo no sé esos numeritos y señas que tiene maestra.* *E1: ire, en esta parte aquí viene una x, y luego una e y luego una R, y pues esas cosas no supe qué hacer.*
				Diario de investigación Aplicación **Clase 2** *…Los estudiantes presentaron nuevamente dificultades para entender el lenguaje matemático y por esa razón no completaron la actividad. Por lo tanto, también hubo la necesidad de explicarles los símbolos que se incluyen y sus significados…*	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">PCK</td>
<td rowspan="2">KFLM</td>
<td rowspan="2">Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)</td>
<td rowspan="2">Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es la falta de conocimiento de los conjuntos de números.</td>
<td colspan="2">En el episodio 7 se repasaron los conjuntos de números para que pudieran resolver las actividades:

P: …En lenguaje matemático, esto significa pertenece a R. esa R que ven ustedes ahí significa el conjunto de los números reales. ¿Saben cuáles son los números reales?
E4: los que están expresados ya ahí ¿no? como que, por ejemplo que diga 3 y tiene que ser 3.
P: bueno, en matemáticas tenemos varios conjuntos de números. Los voy a dibujar aquí… el primer conjunto de números, digamos, el más básico, es como se aprenden los números los niños y es el conjunto de los números naturales. Y los números naturales son los números enteros positivos, por ejemplo 1, 2, 3, etc., enteros y positivos.
Bueno, hay otro conjunto de números que se llaman números enteros, y estos enteros abarcan tanto a los naturales, pero también abarcan al cero y a los negativos. Es decir, los naturales son enteros positivos, mientras que los naturales abarcan también al cero y a los negativos pero siguen siendo enteros. Luego, tenemos otro conjunto de números, que serían los números racionales. Los racionales son los números que los podemos representar como el cociente de dos enteros, por ejemplo, menos cinco séptimos… y estos los podemos representar así o los podemos representar en decimal, en decimal, ¿cómo sería este si dividimos cinco entre siete?</td>
</tr>
<tr>
<td>Diario de investigacipon Pilotaje
Clase 2
…Por lo cual, he tenido que explicarles las instrucciones y retomar los conjuntos de números: naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.</td>
<td>Diario de investigación Aplicación
Clase 2

…Por lo tanto, también hubo la necesidad de explicarles …los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.</td>
</tr>
</table>

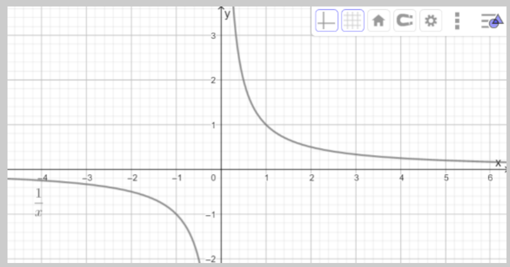
PCK	KFLM	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)	Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes cuando resuelven ejercicios matemáticos, es que olvidan interpretar los resultados y colocar las unidades de medida.	**Producciones de los estudiantes** **Respuestas:** A estos dos ejercicios, se muestran algunas respuestas de los estudiantes, en donde se aprecia que pudieron encontrar el área de las funciones $f(t) = 3$ y $f(t) = t$ utilizando fórmulas geométricas. Los resultados de todos fueron correctos, aunque algunos olvidan colocar las unidades de medida o interpretar sus resultados con base en lo que se les solicita. 	**Producciones de los estudiantes:** **Respuestas:** La mayoría de los estudiantes (10/13) expresaron de forma correcta la función en términos de $A(t) = 3t$ y $A(t) = \frac{t^2}{2}$, empleando las fórmulas geométricas del rectángulo y del triángulo; en las respuestas se aprecia que algunos escriben de forma incompleta la función, o bien, la visualizan como el algoritmo del área. 

<table>
<tr>
<td>PCK</td>
<td>KFLM</td>
<td>Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)</td>
<td>Conocer que un error común en el aprendizaje del TFC es la falta de comprensión en la noción de continuidad de una función en un intervalo dado, como condición necesaria para aplicar el primer TFC.</td>
<td>

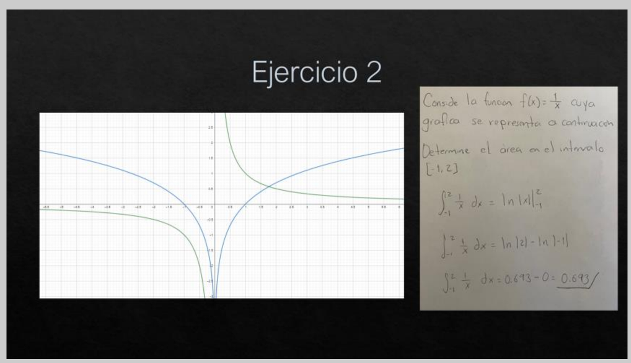
Producciones de los estudiantes:

Ejercicio 2: el segundo ejercicio les solicitaba a los estudiantes obtener el área bajo la curva de una función en un intervalo determinado empleando el TFC. Se les mostró la gráfica de la función para que pudieran visualizar si la función era continua en el intervalo solicitado.

Ejercicio 2:
Considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica se representa a continuación:



Respuestas:
Dos de los equipos (7 estudiantes) resolvieron el ejercicio sin contemplar la condición de continuidad que plantea el TFC, aplicando el algoritmo de forma mecánica. Se muestra una de las respuestas que dieron:



Narración del equipo:
Nosotros lo que hicimos fue primero sacar la antiderivada de la función, para eso buscamos en internet y en las reglas que vienen en el cuadernillo y descubrimos que es el logaritmo natural de x.
Después sustituimos los valores de 2 y nos dio 0.693, luego sustituimos el valor de -1 y nos dio 0. Luego restamos, y el área nos da de 0.693.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">PCK</td><td rowspan="2">KFLM</td><td rowspan="2">Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)</td><td>Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es confundir los registros de representación con temas matemáticos.</td><td>Cuestionario de los estudiantes:

¿Cuál fue el contenido matemático que presentó la profesora?

E12: teorema fundamental del calculo, derivada, integrales-representación grafica-representación algebraica</td><td>Cuestionario de los estudiantes:

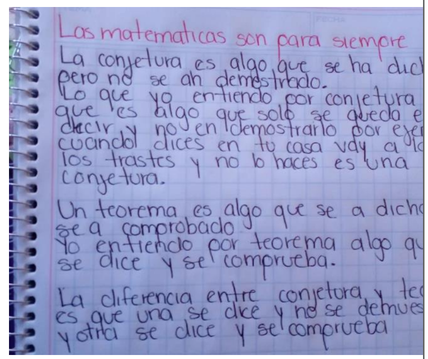
¿Cuáles temas matemáticos que habías estudiado antes tuviste que retomar o emplear para el estudio del teorema fundamental del cálculo?
E7: Las representaciones algebraicas
E9: Lo que recuerdo que retomamos fueron las representaciones tablar, la representacion grafica y la representacion geométrica</td></tr>
<tr><td>Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es el tiempo limitado que se invierte en la clase.</td><td colspan="2">Cuestionario de los estudiantes:

Pregunta 5: El tiempo que tuviste para llegar a comprender el tema, ¿Lo consideras suficiente o insuficiente y por qué?

E1: Un poco insuficiente me hubiera gustado más clases o como antes de 50 minutos
E2: Si está un poco corto el tiempo, ya que para algunos incluyendo me es difícil aprender matemáticas.
E8: insuficiente, creo que debimos abordar más el tema para una mayor comprensión
E13: suficiente porque dedicamos 3 horas de clase. aunque, al ser extenso el tema, me toco estudiar un poco el tema por individual.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">PCK</td>
<td rowspan="2">KFLM</td>
<td rowspan="2">Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático (MI)</td>
<td rowspan="2">Conocer que los estudiantes emplean la palabra “comprobación” como un sinónimo de “demostración”.</td>
<td>En el episodio 3, se les pregunta a los estudiantes qué les faltó a los personajes que trabajaron en TFC antes que Newton y Leibniz para considerarse los precursores:

P: antes que ellos, si. Pero ¿saben qué les faltó? Les faltó pasar de conjetura a teorema, es decir, ¿qué les faltó?
E2: comprobarlo
E4 y E10: demostrarlo
P: demostrarlo; entonces, ellos fueron los primeros que sí lo demostraron…</td>
<td>Producciones de los estudiantes

Los estudiantes como utilizan la palabra comprobación como un sinónimo de demostración.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Cuestionario de los estudiantes:

Pregunta 4: ¿Consideras que el discurso de la profesora te invitó a explicar con tus propias palabras lo que estabas aprendiendo sobre el tema? Explica

E10: Si porque ella explicaba de una manera bien y clara que en ocasiones no le entendía pero volvía a explicar de distinta manera y yo comprendía por mis propias palabras el tema

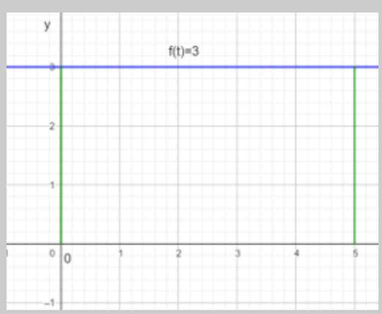
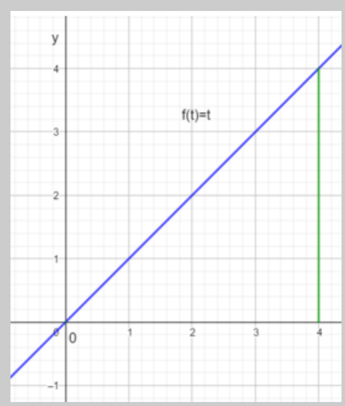
E13: Sí, porque me permitió justificar lo que aprendí del teorema fundamental del cálculo con mis propias palabras y así nos queda más claro qué significa eso</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">PCK</td>
<td rowspan="2">KFLM</td>
<td rowspan="2">Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático (MI)</td>
<td>Conocer que los estudiantes colocan el significado de los símbolos matemáticos en las actividades, para consultarlos cuando tienen dudas.</td>
<td>Diario de investigación
Aplicación
Clase 3

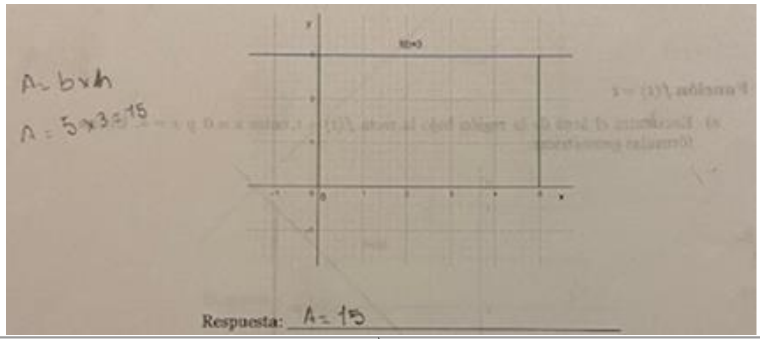
… Muchas de las dudas que resolví fueron nuevamente respecto a que no comprenden del todo las instrucciones por el lenguaje matemático que se presenta, y ellos han optado por colocar el significado de algunos símbolos en la actividad.</td>
</tr>
<tr>
<td>Conocer que los estudiantes tienen una predisposición a repetir lo que realiza el profesor.</td>
<td>Cuestionario de los estudiantes:

Pregunta 4: ¿Consideras que el discurso de la profesora te invitó a explicar con tus propias palabras lo que estabas aprendiendo sobre el tema? Explica

E2: Si y no, no por aprendí más viendo a la maestra hacerlo que escuchándolo.</td>
</tr>
</table>

PCK	KFLM	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas (AE)	Conocer que un aspecto que causa emociones agradables cuando se estudian temas matemáticos, es relacionar el tema con situaciones contextuales a los estudiantes.	**En el episodio 2, después de ver el video donde se utiliza un lenguaje ameno para los estudiantes y se emplean como ejemplo qué regalarle a alguien para demostrarle nuestro amor, los estudiantes se mostraron entusiastas**. *E6: Bravo [empieza a aplaudir y el grupo lo sigue]…* *E7: está muy chido ese video.* *P: ¿Les gustó? [aplaudiendo]* *ET: si*	**Diario de investigación** **Aplicación** **Clase 1:** *…Cuando proyecté el video que refiere la diferencia entre conjetura y teorema, al final han aplaudido y han expresado que les gusta ver videos y que han comprendido lo que es un teorema porque el matemático que da la conferencia les parece divertido.*
			Conocer que los estudiantes tienen una predisposición a emplear algoritmos geométricos cuando se les pide calcular el área debajo de funciones constantes o lineales.	**En el episodio 7 se muestra que las actividades fueron diseñadas tomando en cuenta esta consideración:** *P: …Y nos dice, encuentre el área de la región bajo la recta* $f(t) = 3$*, es decir, esta área, entre t=0 y t=5. Es decir, vamos a encontrar ésta área. Y nos dice ahí: utiliza fórmulas geométricas. Entonces, ¿geométricamente cómo lo harían?*  *E2: base por altura, es un rectángulo* *E1: esa si está medio fácil maestra*	*P: 2: …lo estamos mostrando con cosas que ustedes ya conocen, como el área, como la derivada que también ya la vieron, ¿si? …si se fijan, luego van a hacer lo mismo, pero ahora es con otra función que, ¿qué figura nos está formando?*  *E3: un triángulo* *P: ajá, y les pide obtener el área de forma geométrica, ¿Cómo es el área de un triángulo?* *E7: base por altura entre dos*

<table>
<tr>
<td rowspan="3">PCK</td>
<td rowspan="3">KFLM</td>
<td rowspan="3">Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas (AE)</td>
<td></td>
<td colspan="2">Producciones de los estudiantes

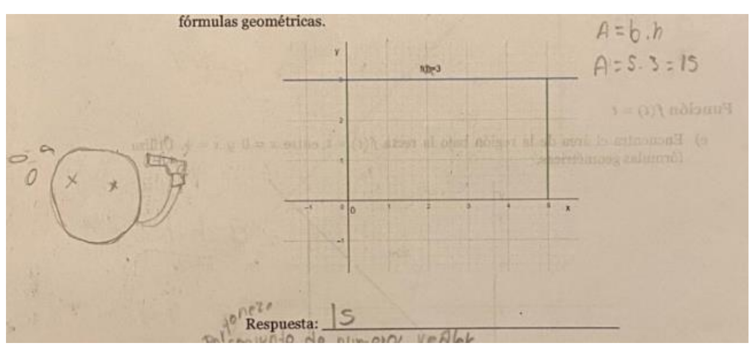
Los estudiantes pudieron encontrar el área de las funciones $f(t) = 3$ y $f(t) = t$ utilizando fórmulas geométricas
.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Conocer que un aspecto positivo durante el aprendizaje del TFC es en uso del video como recurso didáctico.</td>
<td>Diario de investigación
Aplicación
Clase 1

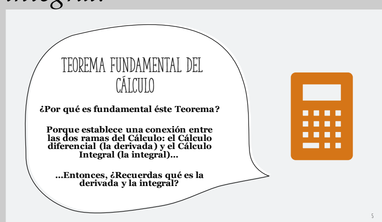
Respecto al mismo video, también han expresado que les gustaría ver videos más seguido durante las clases de cualquier materia, pero en especial de las de matemáticas, pues ellos consideran que les ayuda a comprender mejor los temas.</td>
<td>Cuestionario del estudiante:

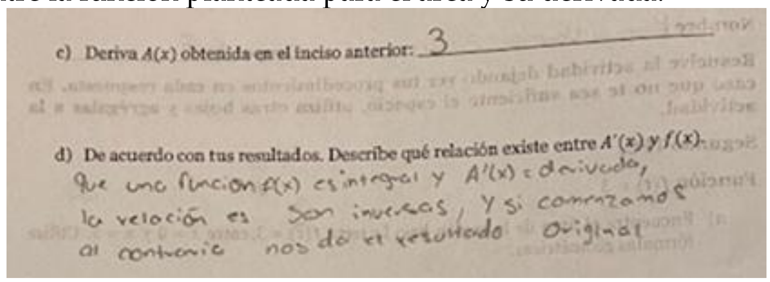
Pregunta 19: ¿Cuáles recursos didácticos (libros, materiales, software) se emplearon durante la enseñanza de teorema fundamental del cálculo?

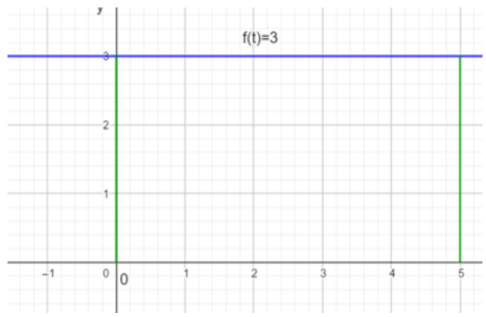
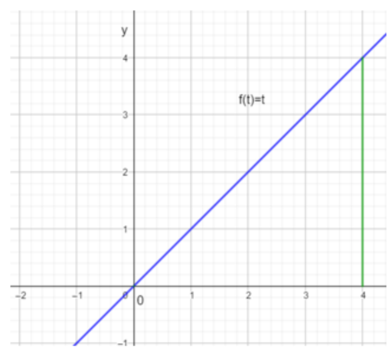
E7: Trabajos y video para saber qué es un teorema, me gustó ver el video en la clase
E10: El video que mostró el teorema de forma divertida.</td>
</tr>
<tr>
<td>Conocer que la falta de comprensión de las actividades que se solicitan a los estudiantes les produce emociones desagradables.</td>
<td colspan="2">Producciones de los estudiantes:

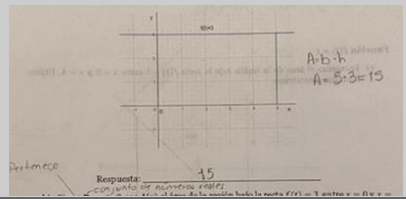
… Otro dato interesante es que uno de los equipos dibujó una cara disparándose con una pistola y al preguntarles el significado, relatan que es porque en un inicio no entendían las instrucciones debido al lenguaje matemático.


</td>
</tr>
</table>

PCK	KMLS	Resultados de aprendizaje esperados (RAE)	Conocer que uno de los aprendizajes esperados en cuanto al TFC del programa de estudios de Cálculo Integral en el 5to semestre del bachillerato tecnológico es que el alumno descubra las relaciones inversas entre derivación e integración.	**En el episodio 4 se menciona la relación de forma explícita:** *…P: esencial… bueno, pues justo eso representa este teorema en el cálculo. nos dice que es fundamental porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo, es decir, el cálculo diferencial a través de la derivada y el cálculo integral a través de la integral.* 	**Cuestionario de los estudiantes:** Pregunta 3: En cuanto al tema estudiado de teorema fundamental del cálculo, menciona el nivel de comprensión que consideras que alcanzaste (en porcentaje) y explica de manera detallada el por qué E9: gráficas y tubulares: 90% es muy sencillo; teorema fundamental 80% es una operación inversa entre derivada e integral. E13: 70%, porque ya sé que, después de que la función sea continua en un intervalo (a,b) puedo derivarla y, por tanto, encontrar la antiderivada de la función. Puedo integrarla en el intervalo que es derivable.

PCK	KMLS	Resultados de aprendizaje esperados (RAE)		**Producciones de los estudiantes:** **Respuestas:** Todos los estudiantes derivaron correctamente la función, pero solo 7 de 13 muestran nociones de encontrar la relación inversa entre la función planteada para el área y su derivada.  c) Deriva $A(x)$ obtenida en el inciso anterior: 3 d) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(x)$ y $f(x)$. Que una función f(x) es integral y A'(x) = derivada, la relación es son inversas, y si comenzamos al contrario nos da el resultado original
				En el episodio 7, la actividad está orientada a descubrir la relación inversa entre la derivada y la integral de la función: *P: y luego nos dice, de acuerdo con tus resultados, escribe ¿qué relación existe entre A´(x) y f(t)?, ¿Cuál será esa relación?, ¿Qué observan?* *E3: que es el mismo valor* *E6: es lo mismo* *P: ¿es lo mismo verdad? Y es que si se fijan tenemos una función original, luego sacamos de esta función, su integral, ¿por qué? porque de esa función estamos sacando su área en un intervalo, cuando nosotros representamos una función para su área, realmente lo que estamos haciendo es integrando la función… y luego, si yo derivo esta misma [señalando la función integrada], obtengo la función original.* *…Entonces, regresando a lo que hicimos ahorita… ¿se acuerdan que decíamos el teorema fundamental del cálculo lo que hace es decirnos eh, la derivada y la integral son operaciones inversas, y lo podemos ver aquí, si tenemos la función, la integramos y luego la derivamos, regresamos a la misma función.*

PCK	KMLS	Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental (NEDC)	Conocer que, en cuanto al TFC de los alumnos del 5to semestre que cursan la materia de Cálculo Integral en bachillerato o tecnológico, de acuerdo con el plan de estudios, e espera que calculen el área bajo la curva de funciones diversas.	**En el episodio 7, en la Actividad 2 se les pide a los estudiantes calcular el área de diversas funciones.** ***Figura 21*** *Primer ejercicio de la actividad* ***Función*** $\boldsymbol{f(t) = 3}$ h) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = 5$. Utiliza fórmulas geométricas.  ***Figura 23*** *Tercer ejercicio de la actividad* **Función** $\mathbf{f(t) = t}$ l) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t = 0$ y $t = 4$. Utiliza fórmulas geométricas. 

PCK	KMLS	Secuenciación de temas (ST)	Conocer que un tema previo al TFC en el plan de estudio de bachillerato tecnológico es “Sumas de Riemann”.	**Episodio 1 al presentar el tema TFC se recuerdan los temas previos que han estudiado:** **P:** *Entonces, vamos a comenzar a ver el tema y bueno, ahí ya lo ven… entonces, el tema es el Teorema Fundamental del Cálculo, y ya vimos que ustedes han visto ya temas como Sumas de Riemann, ¿verdad?* **E3:** *ajá.*	**Producciones de los estudiantes:** En la actividad 1, ellos pudieron encontrar el área de una función en un intervalo dado, por medio de fórmulas geométricas, tal como lo hacen en Sumas de Riemann. 
			Conocer que un tema previo al TFC en el plan de estudio de bachillerato tecnológico es “Propiedades de Notación Sigma”.	**Episodio 1 al presentar el tema TFC se recuerdan los temas previos que han estudiado:** ***P: ¿Qué otro tema han visto?*** ***E2: propiedades de notación sigma*** **P:** *han visto las propiedades de la notación sigma y, ¿Para qué han utilizado estos dos temas?, ¿Qué han hecho ahí en su cuaderno, en su cuadernillo con estos temas?* **E2:** *acercarnos a un área aproximada.* **E4:** *para aproximar el área.*	
PCK	KMT	Recursos didácticos (físicos y digitales) (RD)	Conocer que el uso de diapositivas en las clases de matemáticas, favorece la explicación teórica y visual del tema.	**En los episodios del 1 al 6 se presentan distintos aspectos teóricos y ejemplos del TFC, por medio de diapositivas.** **P:** *Entonces, ahí vemos. Eh… vamos a ver un video, ¿si?, que nos va a presentar más a detalle qué es un teorema. En el video quiero que ustedes piensen en esto: pensar en la diferencia entre conjetura y teorema.*	**P:** *Vamos a seguir con la presentación. Y entonces nos dice, ¿qué es un teorema? Bueno, de acuerdo con Baldor, también tiene estas características: es una proposición, una proposición pensemos que es como un enunciado, que puede ser demostrada, ahí está otra vez esta característica. Luego nos dice que en el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: una que es la hipótesis y otra es la tesis.*
				Pregunta 19: ¿Cuáles recursos didácticos (libros, materiales, software) se emplearon durante la enseñanza de teorema fundamental del cálculo? E3. Actividades y una presentación de gráficas en proyector	

<table>
<tr>
<td rowspan="3">PCK</td>
<td rowspan="3">KMT</td>
<td rowspan="3">Recursos didácticos (físicos y digitales) (RD)</td>
<td>Conocer que el uso del software GeoGebra favorece que los estudiantes visualicen los aspectos dinámicos de acumulación y variación del TFC.</td>
<td>En el episodio 6 se muestra la representación gráfica y la demostración del TFC con ayuda de GeoGebra:

P: entonces, para demostrarlo, vamos a trabajar con un applet de GeoGebra que les estoy proyectando ...Entonces si se fijan lo hicimos gráficamente, porque quizá en la forma algebraica no se comprenda.</td>
<td>Cuestionario del estudiante:

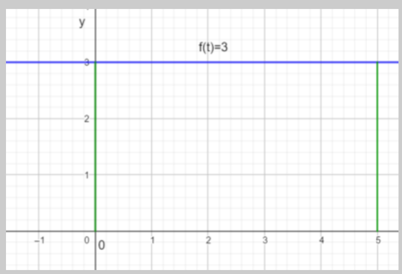
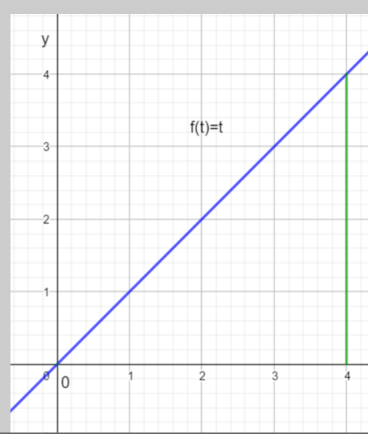
Pregunta 19: ¿Cuáles recursos didácticos se emplearon durante la enseñanza de teorema fundamental del cálculo?
E4: cuadernillo de aprendizajes, proyector y geogebra
E6: Se utilizó GeoGebra
E13: GeoGebra</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Conocer el uso del video como recurso didáctico en la enseñanza del TFC.</td>
<td>En el episodio 2 se presenta a los estudiantes un extracto del video “Las matemáticas son para siempre”.

P: …vamos a ver un video, ¿si?, que nos va a presentar más a detalle qué es un teorema. En el video quiero que ustedes piensen en esto: …la diferencia entre conjetura y teorema.</td>
<td>Diario de investigación
Pilotaje
Clase 1

…pude proyectar el vídeo que estaba planeado, me parecía muy importante para que los alumnos entendieran qué es un teorema…</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Cuestionario del estudiante:
Pregunta 19: ¿Cuáles recursos didácticos (libros, materiales, software) se emplearon durante la enseñanza de teorema fundamental del cálculo?
E7: Trabajos y video para saber qué es un teorema, me gustó ver el video en la clase
E8: Videos
E10: El video que mostró el teorema de forma divertida</td>
</tr>
</table>

PCK	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (ETTE)	Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es estudiar el significado de cada palabra por separado (teorema, fundamental, cálculo) y después unir la frase.	**En el episodio 2 se aprecia lo que es un teorema y en el episodio 4 se analiza la palabra fundamental:** Extracto del episodio 4: … *P: Bueno, vamos a seguir [proyecta diapositiva de la figura 5]. Ahora si, el TFC, nos hacen la pregunta: ¿por qué será fundamental este teorema?* *E5: porque es como una base para… no sé* *E1: suena como a básico.* *P: suena a básico* *E6: necesario* *P: necesario, ¿qué más?* *E4: esencial* *P: esencial… bueno, pues justo eso representa este teorema en el cálculo. nos dice que es fundamental porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo, es decir, el cálculo diferencial a través de la derivada y el cálculo integral a través de la integral.*	**Diario de investigación: Aplicación** **Clase 1** *…Al final de la clase una alumna se acerca a comentarme que le pareció muy bien que desglosara la frase "teorema fundamental del cálculo" e ir viendo cada palabra por separado: teorema, fundamental y cálculo. pues de esa forma ella dice que entendió mejor el concepto, porque la frase suena como un tema muy complejo.*
			Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es por medio de un ejemplo que los estudiantes hayan resuelto de manera previa empleando sumas de	**Cuestionario del estudiante:** **Pregunta 20:** Menciona algunas de las tareas y ejemplos que recuerdas que empleó la profesora para la enseñanza del teorema fundamental del cálculo: E14. Una rampa de patinaje y áreas de figuras E8: Nos ponía ejemplo de una pisa para patinar y de ese tipo.	**En el episodio 7 se menciona la simplicidad en el uso del TFC para la obtención de áreas, en comparación con sumas de Riemann.** *P: …además, si nosotros comparamos el procedimiento que ustedes realizan para calcular un área por medio de rectángulos con sumas de Riemann, y aparte que es un poco laborioso y no siempre nos da un área exacta, sino una aproximada.* *Con el TFC nos vamos a ahorrar mucho de esos procedimientos y vamos a obtener áreas de forma más inmediata.*

			Riemann, para que hagan una comparación en cuanto al procedimiento empleado.	**En el episodio 6, la profesora muestra como resolver con TFC, un ejemplo que antes los estudiantes resolvieron con Sumas de Riemann.** *P: vamos a mostrar esta primera parte por medio del ejemplo que ustedes ya han resuelto antes con Sumas de Riemann y con las propiedades de notación sigma. Tenemos esa función que nos da el problema para lo que es la superficie de la rampa. Esta superficie ya la habíamos representado antes en un plano cartesiano. ¿Cuánto mide la rampa?* *E4: 2 metros de alto y 2 de base.* *P: muy bien. Entonces, ¿qué debemos sacar primero?* *E6: el área del lado y después multiplicarla por 4.* *P: ok, bueno, ahí si se fijan tenemos un rectángulo. ¿Cuál es el área de ese rectángulo?* *E1: 2 por 1, 2* *P: bien, ya tengo el área del rectángulo, ahora nos falta el área de la parte curva, y nos dice que esa curva es la función* $f(x) = 0.5x^2$. *y nos interesa el área de esa función ¿en cual intervalo?* *E1: de cero a dos.* *P: muy bien, esto ya lo habían hecho con otros métodos, pero ahora vamos a aplicar la primera parte del TFC para obtener esa área. Y entonces, tenemos que hay que integrar desde a hasta b, cuando nos dice que desde a hasta b, ¿qué significa?* *E4: a es cero y b es dos, porque es el intervalo.* *P: ok, entonces reemplazo acá mis valores, desde cero hasta dos, de la función que es* $0.5x^2$ *dx. Y lo que me dice es que primero debemos antiderivar la función. ¿Cuál es la antiderivada de esa función?* *E7: ehhh, a ver…* $\frac{0.5x^3}{3}$ *P: ok, ahora si se fijan, lo que nos dice es que debemos evaluar la función antiderivada con los valores de b y de a. entonces me quedaría:* $$\int_0^2 0.5x^2\,dx = \frac{0.5x^3}{3}\,{}^{2}_{0} = \frac{0.5[(2)^3]}{3} - \frac{0.5[(0)^3]}{3} = \frac{4}{3}$$ *Ahora, sumando el área del rectángulo, ¿cuánto nos da el área del perfil de la rampa?* *E2: 2.75* *P: muy bien, ahora para sacar el volumen de la rampa que nos pide el problema, ¿qué nos falta?* *E1: multiplicar por 4* *P: ok, entonces, ¿cuánto es el volumen?* *E1: 14 metros cúbicos.* *P: ok, ¿es lo mismo que les había dado cuando lo hicieron con sumas de Riemann?* *E2: si, pero ahora más rápido*

PCK	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (ETTE)	Conocer que una actividad para la enseñanza del TFC puede basarse en la obtención de áreas bajo la curva de distintas funciones.	**ACTIVIDAD 1 TFC** **Instrucción:** en esta parte de la actividad se pretendía que el estudiante utilizara sus conocimientos previos de geometría para determinar el área de dos funciones distintas, una función constante y una función lineal, en un intervalo dado. ***Función*** $\boldsymbol{f(t) = 3}$ c) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = 5$. Utiliza fórmulas geométricas.  **Función** $\mathbf{f(t) = t}$ g) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t = 0$ y $t = 4$. Utiliza fórmulas geométricas. 	**Cuestionario del estudiante:** **Pregunta 20:** Menciona algunas de las tareas y ejemplos que recuerdas que empleó la profesora para la enseñanza del teorema fundamental del cálculo: E1: Una rampa de patinaje y áreas de figuras E4: Recuerdo la tarea 1 y 2 que consiste en responder E7: Tareas para sacar áreas y GeoGebra E13: una tarea del área de un rectángulo

<table>
<tr>
<td>PCK</td>
<td>KMT</td>
<td>Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (ETTE)</td>
<td>Conocer que una actividad para la enseñanza del TFC puede basarse en descubrir la relación inversa entre la derivada y la integral de una función.</td>
<td>
ACTIVIDAD 2 TFC
Las siguientes imágenes representan dos funciones distintas f(x), así como ciertos datos que se obtienen de cada una de ellas al obtener su antiderivada.
Con base en los datos de las figuras, contesta las preguntas de abajo:
Figura 1
Datos de la función $f(x) = x$

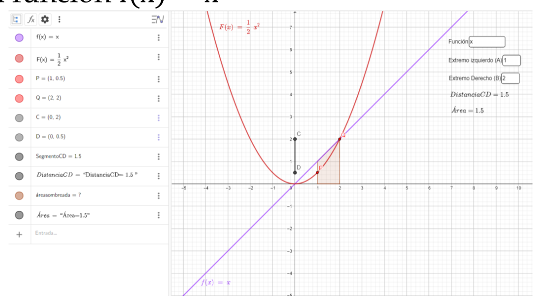
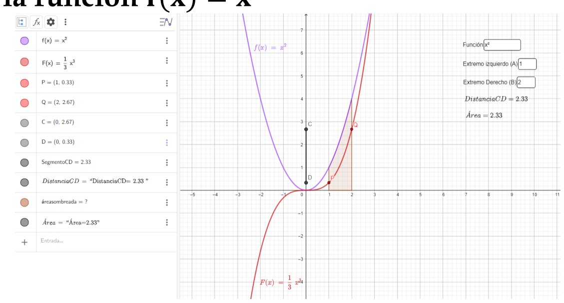
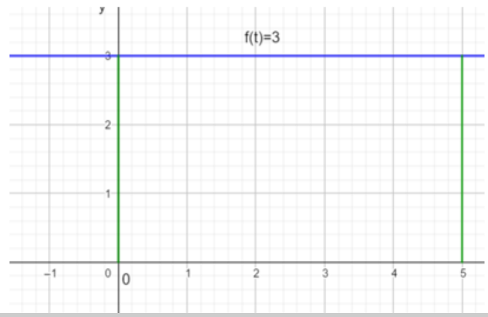



Figura 2
Datos de la función $\mathbf{f(x) = x^2}$

a) Qué relación observas entre f(x) y F(x)?
b) ¿Qué coordenadas tienen P y Q?
c) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de P y Q, teniendo en cuenta los valores de (A) y (B)?
d) ¿Qué coordenadas tienen C y D?
e) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q?
f) ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia?
g) Observa el valor del área (Área=2.33) y el área sombreada en la gráfica. Luego escribe qué relación encuentras entre esa área y los puntos C y D (redacta tus conclusiones en términos de f, F, A y B):
h) De acuerdo con tu conclusión anterior, generaliza el proceso para cualquier A y B:
</td>
</tr>
</table>

PCK	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (ETTE)	Conocer que un ejemplo en la enseñanza del TFC que se le puede presentar al estudiante es encontrar el área bajo la curva de una función conocida en un intervalo determinado.	**En el episodio 7 se les pide a los estudiantes resolver una actividad que incluye varios de estos ejemplos:** Figura 21 *Primer ejercicio de la actividad* ***Función*** $\boldsymbol{f(t) = 3}$ h) Encuentra el área de la región bajo la recta f(t) = 3, entre t = 0 y t = 5. Utiliza fórmulas geométricas. 

V.3. Triangulación de la información para la detección de indicadores de enseñanza para la comprensión robusta durante la implementación, de acuerdo con las dimensiones del TRU.

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.	**En el episodio 1:** a) La profesora presenta el tema: *P: Hola chicos buen día. El día de hoy vamos a abordar el tema Teorema Fundamental del Cálculo.* *b)* Menciona temas previos relacionados con el TFC: P: *Entonces, vamos a comenzar a ver el tema y bueno, ahí ya lo ven …entonces, el tema es el Teorema Fundamental del Cálculo, y ya vimos que ustedes han visto ya temas como Sumas de Riemann, ¿verdad?* *P: ¿Qué otro tema han visto?* *E2: propiedades de notación sigma* *P: han visto las propiedades de la notación sigma y, ¿Para qué han utilizado estos dos temas?, ¿Qué han hecho ahí en su cuaderno, en su cuadernillo con estos temas?* *E2: acercarnos a un área aproximada.* *E4: para aproximar el área.* *P: calcular áreas, exactamente. Estos temas se han empleado para calcular áreas. A bueno, pues el TFC también lo vamos a emplear para eso. De hecho, tiene dos partes el teorema, ¿si?... una parte es precisamente para calcular áreas de forma un poco más sencilla a los procedimientos que han visto y la otra es para hacer una relación entre lo que es la integral y la derivada.*

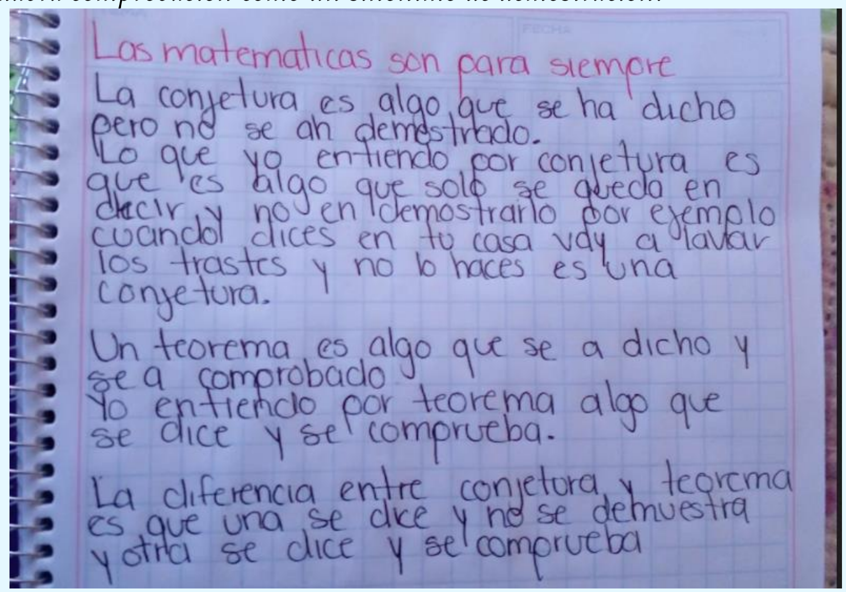
Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.	**En el episodio 2:** a) Se les presenta a los estudiantes un video con la diferencia entre conjetura y teorema: *P: Entonces, ahí vemos [proyecta la diapositiva de la Figura 7]. Eh… vamos a ver un video, ¿si?, que nos va a presentar más a detalle qué es un teorema. En el video quiero que ustedes piensen en esto: la diferencia entre conjetura y teorema.* *… P: si solamente pensamos, sin comprobar nada, es una conjetura. Entonces nos dice, los teoremas son para siempre [lo escribe en el pizarrón] y, además, requieren ser demostrados. Estas son algunas de sus características.* *Vamos a seguir con la presentación.* b) Se muestran las características de un teorema en matemáticas: *P: …Y entonces nos dice, ¿qué es un teorema? Bueno, de acuerdo con Baldor, también tiene estas características: es una proposición, una proposición pensemos que es como un enunciado, que puede ser demostrada, ahí está otra vez esta característica. Luego nos dice que en el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: una que es la hipótesis y otra es la tesis.*

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.	**En el episodio 3:** **Se presentas aspectos históricos del TFC y relacionan a Newton con temas vistos en Física:** *P: Bueno a Isaac Newton seguro si lo estudiaron en Física, vean es las fechas en las que ellos vivieron, fueron muy contemporáneos… es decir, vivieron más o menos en la misma época, pero Isaac Newton era inglés y Leibniz era alemán, y a los dos se les atribuye la invención del cálculo y también, la demostración del TFC. Como es un teorema, dijimos que debe estar demostrado. Entonces, ellos dos, digamos que ya había gente que ya habían trabajado en el TFC.* *… ; entonces, ellos fueron los primeros que sí lo demostraron, y aunque son de la misma época pues pensaríamos que trabajaron juntos.* *E3: pero no* *P: pero no, cada uno lo demostró de manera diferente. Entonces, ¿eso que quiere decir? Que este teorema lo podemos demostrar no nada más de una manera, sino de muchas maneras. Newton lo demostró haciendo ver que el algoritmo inverso que resuelve las tangentes resolvía el área bajo una curva; mientras que Leibniz lo demostró por medio de sumas y restas como operaciones inversas.*
			En el episodio 4: **Se menciona la relación inversa entre la derivada y la integral como la parte fundamental del TFC:** *P: esencial… bueno, pues justo eso representa este teorema en el cálculo. nos dice que es fundamental porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo, es decir, el cálculo diferencial a través de la derivada y el cálculo integral a través de la integral.*

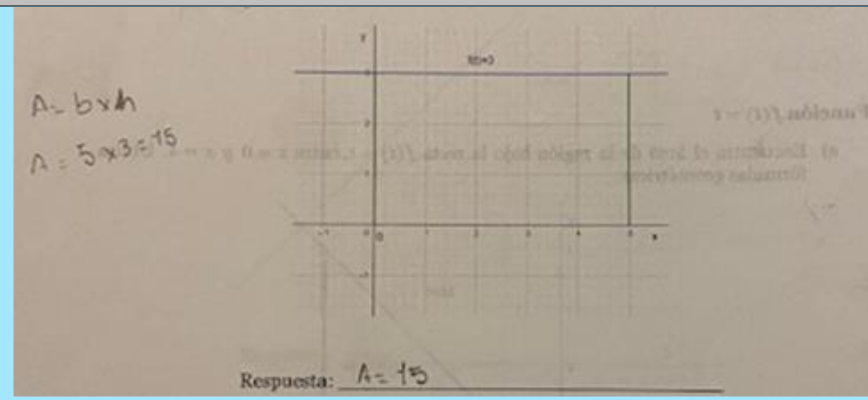
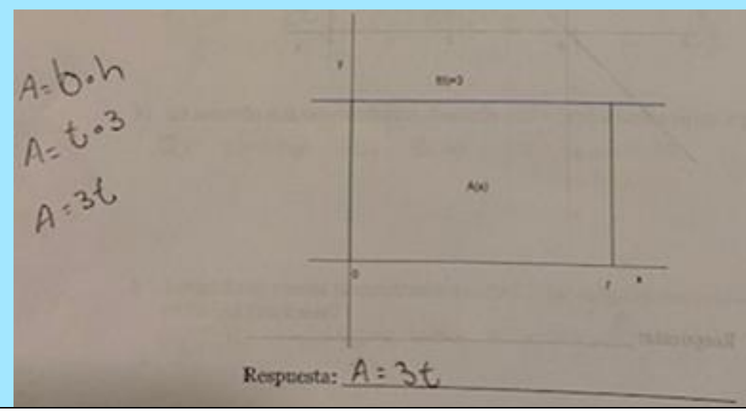
Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.	**En el episodio 5:** a) Se presenta la definición de derivada e integral: *P: bueno, Spivak (1996) nos da esta definición… una función f puede ser esta curva, aquí la está representando con una curva, es derivable en a, es decir, en este punto o algún otro, si, vean como nos da como una condición si, el límite cuando h tiende a cero, h si se fijan, es un incremento desde a hasta un determinado punto.* b) Se muestra una conexión entre derivada y recta tangente: *P: … Observen como prendo y apago esta recta que corta a la función en el punto a y en el punto a* + *h. esta recta, en la posición que está es una recta secante, ¿verdad?, ¿por qué secante?* *E5: porque la corta a las dos* *P: porque corta en dos puntos a la función… entonces este punto a* + *h yo lo puedo acercar a a, si disminuyo la distancia de h… vean que a medida que lo acerco, se va juntando, se va juntando, hasta que, ese incremento en h se hace cero, ¿y qué pasó con la recta secante?* *E7: desaparece* *P: desapareció aquí, pero en realidad lo que pasa que se convirtió en una recta tangente. ¿cuál es la diferencia entre la recta secante y la tangente?* *E5: que la tangente pasa por un punto* *c) Se presenta la definición de integral:* *P: …Y ahora, ¿qué es la integral? … La integral nos dice: una función f, acotada sobre a, b, este es un intervalo, ustedes para sacar áreas han tenido que elegir un intervalo de la función, nos dice es integrable en ese mismo intervalo si… nos da ahí una serie de nomenclatura que van a decir ¿eso qué significa? Lo podemos leer como la suma superior del límite infinito es igual a la suma inferior del límite infinito.*

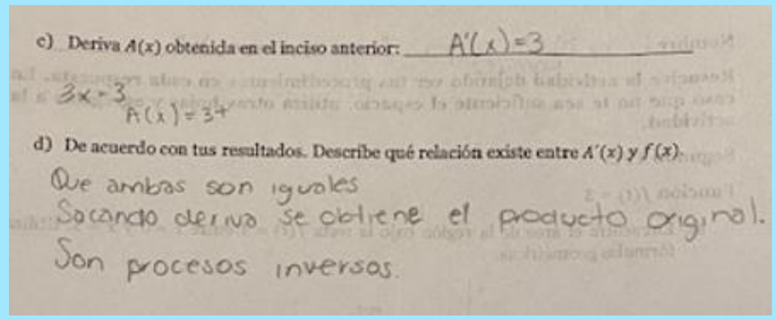
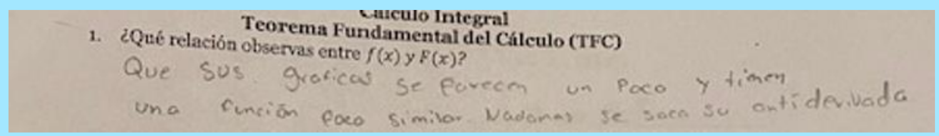
Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.	**En el episodio 6:** a) Se presenta la proposición del TFC: *P: bueno, fíjense bien chicos, lo que vamos a ver ahora es la proposición del TFC. El TFC está compuesto por dos partes. La primera parte …nos dice lo siguiente e…si f es continua en el intervalo cerrado a coma b y F mayúscula es una antiderivada de f en el mismo intervalo, entonces, la integral desde a hasta b de la función f es igual a la antiderivada de f evaluada en b menos la antiderivada de f evaluada en a.* *… Ahora, vamos a pasar a la segunda parte. Bueno, esta parte nos dice lo siguiente: si f es continua en el intervalo abierto que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo, tenemos que la derivada de la integral de la función f, desde a hasta x, es igual a la función original.* b) Se demuestra el TFC: *P: entonces, para demostrarlo, vamos a trabajar con un applet de GeoGebra que les estoy proyectando, aquí se ven los ejes, el eje x y el eje y, voy a prender la función que puse en esta práctica, es una función cualquiera.* c) Se presentan algunas propiedades del TFC: *P: en esta función vamos a elegir un intervalo, y chequen que la proposición del TFC nos dice que, para poder cumplir el teorema, la función debe ser continua en el intervalo que se esté trabajando.* *… Y luego, en este intervalo, vamos a ubicar un punto c cuya altura en ese intervalo, nos genera un rectángulo cuya área es igual que el intervalo bajo la curva desde x hasta x+h. por lo tanto, decimos que ese punto representa el teorema del valor medio.* d) Se emplean diversos registros de representación del TFC: *Entonces si se fijan lo hicimos gráficamente, porque quizá en la forma algebraica no se comprenda.*

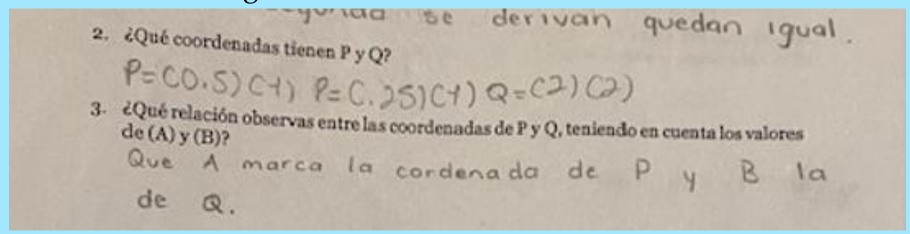
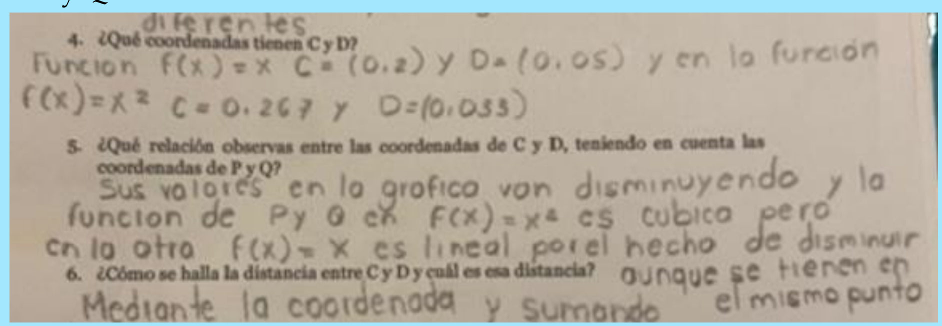
Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.	e) Se mencionan temas matemáticos con los que tiene relación el TFC: *P: … ahora, el TFC no es un tema aislado que van a estudiar en este semestre. Esta relacionado con otros temas que ustedes estudiarán después. Por ejemplo, para los que estudien alguna ingeniería o carreras relacionadas, verán que es indispensable para resolver ecuaciones diferenciales. Otro tema con el que se relaciona el TFC es el de variables aleatorias continuas, el cual van a estudiar el próximo semestre en Probabilidad. Ya que para obtener la probabilidad en esas variables, van a emplear el TFC.*
			Diario de investigación **Pilotaje** **Clase 1:** **La profesora relata que se comprendió la diferencia entre teorema y conjetura:** *Luego, encontré el cable y pude proyectar el vídeo que estaba planeado, me parecía muy importante para que los alumnos entendieran qué es un teorema, entonces, considero que esta parte más o menos les quedó claro, creo que lograron entender la diferencia entre un teorema y una conjetura.*

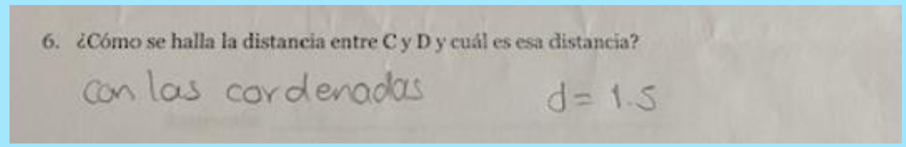
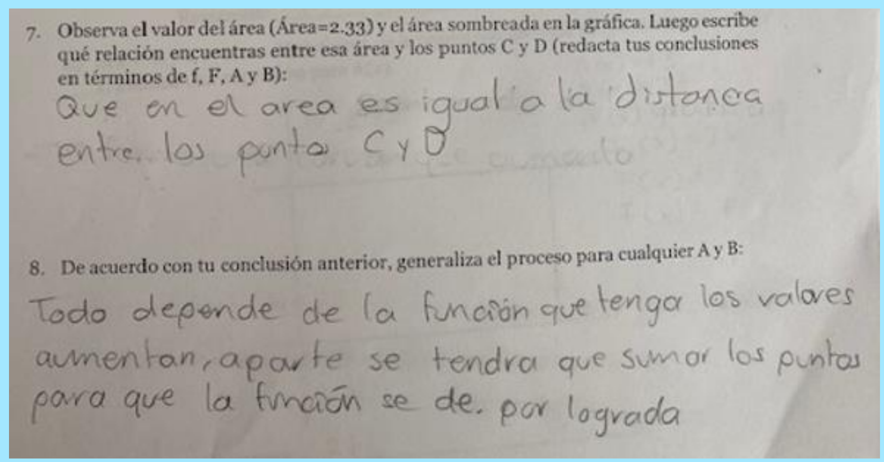
Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**C1.** Las actividades del aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.	**Producciones de los estudiantes:** *Los estudiantes pudieron diferenciar entre lo que es un teorema y una conjetura, con base en el contenido del video que se les presentó, y se observa como utilizan la palabra comprobación como un sinónimo de demostración.*  **Cuestionario de los estudiantes:** **Pregunta 1:** ¿Cuál fue el contenido matemático que presentó la profesora? **Pregunta 2:** ¿Cuáles temas matemáticos que habías estudiado antes tuviste que retomar o emplear para el estudio del teorema fundamental del cálculo?

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**C2.** La explicación y la justificación de las ideas matemáticas centrales son coherentes con el nivel del grado.	**En el episodio 7:** Se retoman ideas de lo que es el TFC: *P: ajá, ok, de hecho en las demostraciones utilizamos diversos procedimientos. Entonces, regresando a lo que hicimos ahorita… ¿se acuerdan que decíamos el teorema fundamental del cálculo lo que hace es decirnos eh, la derivada y la integral son operaciones inversas, y lo podemos ver aquí, si tenemos la función, la integramos y luego la derivamos, regresamos a la misma función. Es como cuando ustedes dicen, bueno, si tengo dos manzanas y a estas dos manzanas le sumo cinco ¿cuántas me van a quedar? … Y regresamos a lo que teníamos… esto es algo parecido pero lo estamos demostrando, o mas bien, lo estamos mostrando con cosas que ustedes ya conocen…*
			Producciones de los estudiantes: Se muestran algunas respuestas de los estudiantes, en donde se aprecia que pudieron encontrar el área de las funciones $f(t) = 3$ y $f(t) = t$ utilizando fórmulas geométricas. Los resultados de todos fueron correctos, aunque algunos olvidan colocar las unidades de medida o interpretar sus resultados con base en lo que se les solicita.

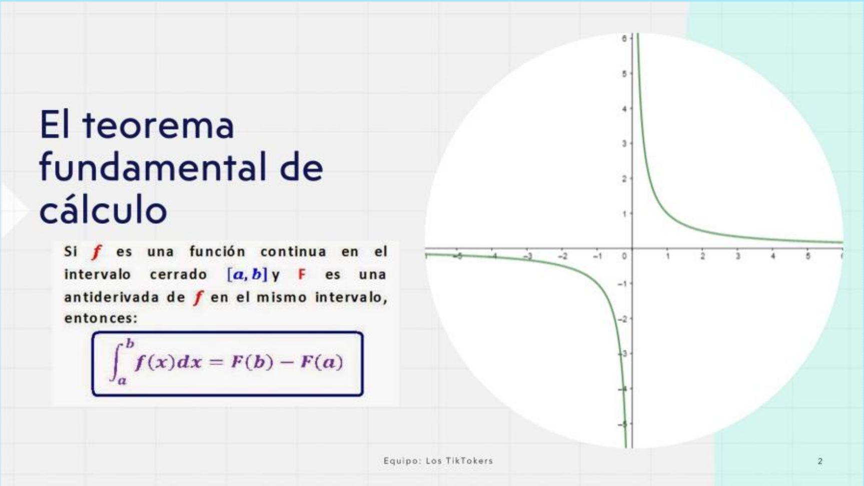
Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
			 La mayoría de los estudiantes (10/13) expresaron de forma correcta la función en términos de $A(t) = 3t$ y $A(t) = \frac{t^2}{2}$, empleando las fórmulas geométricas del rectángulo y del triángulo; en las respuestas se aprecia que algunos escriben de forma incompleta la función, o bien, la visualizan como el algoritmo del área. 

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**C2.** La explicación y la justificación de las ideas matemáticas centrales son coherentes con el nivel del grado.	**Producciones de los estudiantes:** Todos los estudiantes derivaron correctamente la función, pero solo 7 de 13 muestran nociones de encontrar la relación inversa entre la función planteada para el área y su derivada.  c) Deriva $A(x)$ obtenida en el inciso anterior: $A'(x)=3$ $3x+3$ $A(x)=3+$ d) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(x)$ y $f(x)$. Que ambas son iguales Sacando deriva se obtiene el producto original. Son procesos inversos. Solo 4 estudiantes mencionan que logran ver a F(x) como la antiderivada de f(x), los demás expresan que son funciones similares.  Cálculo Integral Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) 1. ¿Qué relación observas entre $f(x)$ y $F(x)$? Que sus graficas se parecen un poco y tienen una función poco similar. Nadamas se saca su antiderivada

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**C2.** La explicación y la justificación de las ideas matemáticas centrales son coherentes con el nivel del grado.	**Producciones de los estudiantes:** En la pregunta 2 se observan algunas dificultades para representar simbólicamente las coordenadas de los puntos. Respecto a la pregunta 3 solo 4 estudiantes lograron encontrar la relación.  se derivan quedan igual. 2. ¿Qué coordenadas tienen P y Q? P=(0.5)(1) P=(.25)(1) Q=(2)(2) 3. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de P y Q, teniendo en cuenta los valores de (A) y (B)? Que A marca la cordenada de P y B la de Q. Ninguno pudo encontrar la relación entre las coordenadas de C y D y las de P y Q.  diferentes 4. ¿Qué coordenadas tienen C y D? Funcion f(x)=x C=(0.2) y D=(0.05) y en la funcion f(x)=x² C=0.267 y D=(0.033) 5. ¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q? Sus valores en la grafica van disminuyendo y la funcion de P y Q en F(x)=x² es cubica pero en la otra f(x)=x es lineal por el hecho de disminuir aunque se tienen en el mismo punto 6. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia? Mediante la coordenada y sumando

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**C2.** La explicación y la justificación de las ideas matemáticas centrales son coherentes con el nivel del grado.	**Producciones de los estudiantes:** 10 de los 13 estudiantes encontraron la distancia entre C y D. Algunos intentaron operar con las funciones.  6. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia? con las cordenadas d= 1.5 3 estudiantes relacionaron el valor del área con la distancia entre los puntos C y D, pero ninguno logró generalizar el proceso en términos de la proposición del TFC, que ya se les había presentado.  7. Observa el valor del área (Área=2.33) y el área sombreada en la gráfica. Luego escribe qué relación encuentras entre esa área y los puntos C y D (redacta tus conclusiones en términos de f, F, A y B): Que en el area es igual a la distonca entre los punto C y D 8. De acuerdo con tu conclusión anterior, generaliza el proceso para cualquier A y B: Todo depende de la función que tenga los valores aumentan, aparte se tendra que sumar los puntos para que la función se de. por lograda

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes**	**C3.** Las matemáticas presentadas son relativamente claras y correctas e incluyen justificaciones o explicaciones o el profesor anima a los estudiantes a centrarse en las ideas matemáticas centrales y a explicarlas y justificarlas.	**Producciones de los estudiantes:** Respecto al ejercicio 1: Dado que f(x) es una función continua que satisface la ecuación $\int_2^5 f(x)\,dx = -6$. a) Encuentra f(x) b) ¿f(x) tiene una única solución? Ninguno de los equipos lo presentaron, pues no mostraron ningún procedimiento ni resultado. **Narración de uno de los equipos:** *Nosotros no presentamos el primer ejercicio porque no pudimos resolverlo, no le entendimos a cómo sacar la ecuación.*

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El contenido	**Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes**	**C3.** Las matemáticas presentadas son relativamente claras y correctas e incluyen justificaciones o explicaciones o el profesor anima a los estudiantes a centrarse en las ideas matemáticas centrales y a explicarlas y justificarlas.	**Producciones de los estudiantes:** Ejercicio 2: Solo uno de los equipos (3 estudiantes) mostraron la representación gráfica de la función y mencionaron que no se podía obtener su área en el intervalo señalado, debido a que la función no es continua.  **Narración del equipo:** *Esta función eh no se puede determinar su área porque el teorema fundamental del cálculo dice que la función debe ser continua eh, en el intervalo para poder eh, obtener su área. Por eso no aplicamos la fórmula.*

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
	Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante	**C4.** Las intervenciones del maestro con el trabajo individual de los estudiantes apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.	**En el episodio 7:** a) Se les explica a los estudiantes la interpretación del lenguaje matemático para que puedan resolverla: *P: …En la primera dice, nos da una función $f(t) = 3$. Esta función $f(t)$ es como si tuviéramos $f(x)$, ahí nada más estamos cambiando la variable. ..Entonces, quiere decir que $f(t)$ siempre va a valer 3. Es decir, cuando t vale 1, f(t) vale 3, cuando t vale 2, f(t) vale 3; siempre f(t) vale 3. Y nos dice, encuentre el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, es decir, esta área, entre x=0 y x=5.* *b) Se mencionan temas matemáticos relacionados con el TFC:* *Esto también les va a servir para otros temas posteriores, por ejemplo, más adelante, en Estadística, el TFC nos sirve para calcular la probabilidad de algunas variables, entre otras cosas; además, si nosotros comparamos el procedimiento que ustedes realizan para calcular un área por medio de rectángulos con sumas de Riemann, y aparte que es un poco laborioso y no siempre nos da un área exacta, sino una aproximada.*

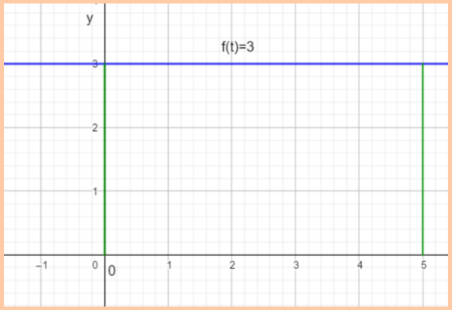
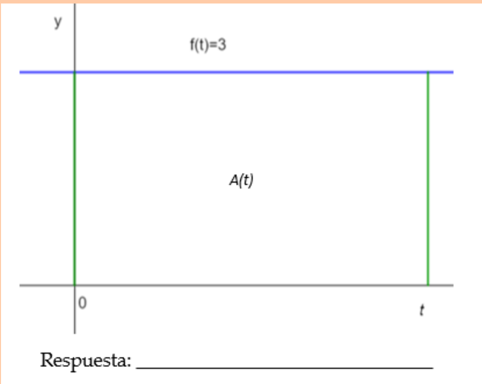
Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
La demanda cognitiva	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**DC1.** Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.	**En el episodio 1:** Se recuperan temas previos relacionados con el TFC, para que el estudiante tenga un mayor entendimiento de su utilidad: *P:…]… entonces, el tema es el Teorema Fundamental del Cálculo, y ya vimos que ustedes han visto ya temas como Sumas de Riemann, ¿verdad?* *E3: ajá.* *P: ¿Qué otro tema han visto?* *E2: propiedades de notación sigma* *P:… y ¿Para qué han utilizado estos dos temas?, ¿Qué han hecho ahí en su cuaderno, en su cuadernillo con estos temas?* *E2: acercarnos a un área aproximada.*
			En el episodio 5: La profesora muestra las similitudes de la derivada con temas previos que los alumnos han estudiado para facilitar la comprensión del tema: *P: la tangente toca a la función en un punto. Entonces, podríamos comparar a la derivada con la recta tangente de una función. Si ustedes recuerdan, en trigonometría veían que la tangente es igual ¿al cateto opuesto…?* *E10: sobre la hipotenusa* *P: sobre la hipotenusa, ¿verdad? Luego, en Geometría Analítica veían que ese cateto opuesto, pensando en dos puntos ubicados en el plano cartesiano, se puede sustituir como* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$*. Esta fórmula [de la derivada], si se fijan, es lo mismo, esto nos representaría el cateto opuesto y esto representaría el cateto adyacente y sería la tangente. Entonces, eso es la derivada de forma gráfica y algebraica.*

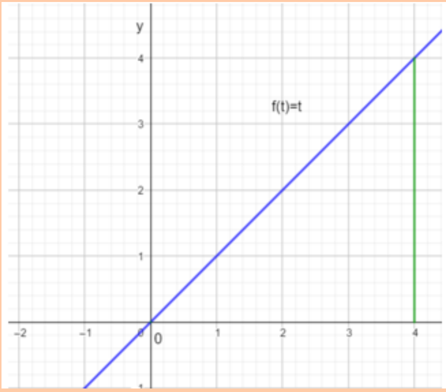
<table>
<tr><th>Dimensión</th><th>Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Evidencias</th></tr>
<tr><td rowspan="2">La demanda cognitiva</td><td rowspan="2">Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate</td><td rowspan="2">DC1. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.</td><td>En el episodio 6:
a) Se muestra una situación problema a los estudiantes que han resuelto antes empleando sumas de Riemann:

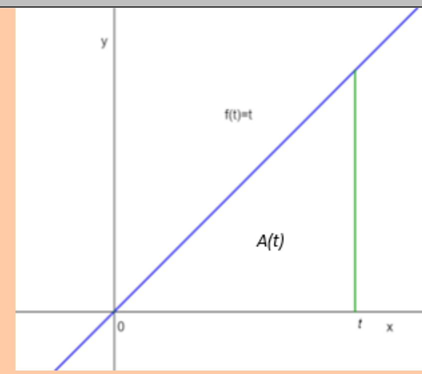
P… vamos a ver el ejemplo:

b) Se compara el resultado del ejemplo con el que habían obtenido antes mediante sumas de Riemann:
P: ok, entonces, si se fijan, de esta forma mostramos con este ejemplo, la primera parte del TFC.</td></tr>
<tr><td>Diario de investigación
Pilotaje
Clase 1

Se reorganiza la secuenciación del currículo, con el objetivo de lograr una mejor lucha productiva en los estudiantes:
Por otro lado, traté de desarrollar el tema TFC antes de antiderivada, tal cómo está planteado en los aprendizajes esenciales que ha publicado DGETI recientemente por motivo de la pandemia. Sin embargo, para la parte evaluativa del Teorema, creo que se debe abordar una introducción de la antiderivada. Ya que, de otra manera, los estudiantes no podrán aplicar el algoritmo. Por lo que se añadirá esta parte en la sesión de aplicación.</td></tr>
</table>

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
La demanda cognitiva	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**DC2.** Se ayuda a los estudiantes a participar de manera productiva con ideas matemáticas centrales. Esto puede implicar una lucha; ciertamente implica tener tiempo para pensar las cosas.	**En el episodio 7:** Las actividades están diseñada para comenzar con conocimientos previos que conocen los estudiantes y luego ir aumentando la complejidad. ***Función*** $\boldsymbol{f(t) = 3}$ a) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = 5$. Utiliza fórmulas geométricas.  b) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = t$. Plantea una expresión para $A(t)$.  c) Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior:

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
			d) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)$ y $f(t)$. **Función $\mathbf{f(t) = t}$** e) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t= 0$ y $t= 4$. Utiliza fórmulas geométricas.  f) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t= 0$ y $t= t$. Plantea una expresión para $A(t)$.

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
			 g) Deriva A(t) obtenida en el inciso anterior: h) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre A´(t) y f(t). i) Tomando en cuenta tu conclusión anterior. ¿Qué relación observas entre A(t) y f(x) en ambas funciones?
La demanda cognitiva	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**DC2.** Se ayuda a los estudiantes a participar de manera productiva con ideas matemáticas centrales. Esto puede implicar una lucha; ciertamente implica tener tiempo para pensar las cosas.	**Cuestionario de los estudiantes:** **Pregunta 3:** En cuanto al tema estudiado de teorema fundamental del cálculo, menciona el nivel de comprensión que consideras que alcanzaste (en porcentaje) y explica de manera detallada el por qué

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
La demanda cognitiva	**Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes**	**DC3.** Las sugerencias o andamiajes del maestro apoyan a los presentadores y/o la clase es una "lucha productiva" para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.	**Producciones de los estudiantes:** Se considera que el ejercicio 1 de presentación de los estudiantes no pudo ser resuelto porque no se manejó de manera adecuada el andamiaje para que los estudiantes lograran comprender el procedimiento. Los equipos solo mencionaron al inicio del video que no lo presentaron debido a que se les dificultó resolverlo, a pesar de que resolvieron sus dudas con la profesora. **Narración de uno de los equipos:** *Nosotros no presentamos el primer ejercicio porque no pudimos resolverlo, no le entendimos a cómo sacar la ecuación.*
			Cuestionario de los estudiantes: **Pregunta 4:** ¿Consideras que el discurso de la profesora te invitó a explicar con tus propias palabras lo que estabas aprendiendo sobre el tema? Explica
			Cuestionario de los estudiantes: **Pregunta 5:** El tiempo que tuviste para llegar a comprender el tema, ¿Lo consideras suficiente o insuficiente y por qué?

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
La demanda cognitiva	**Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante**	**DC4**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en una "lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas".	**En el episodio 7:** Se va dirigiendo a los estudiantes desde lo fácil a lo complejo: *P: …Es decir, vamos a encontrar ésta área. Y nos dice ahí: utiliza fórmulas geométricas. Entonces, ¿geométricamente cómo lo harían?* *E2: base por altura, es un rectángulo* *E1: esa si está medio fácil maestra* *… P: Ahora, regresando al ejercicio, qué es lo que me está diciendo: si x pertenece al conjunto de los números reales, es decir, que x puede ser un entero positivo, un entero negativo, el mismo cero, puede ser un número fraccionario o un número irracional… Después dice, x mayor que cero, es decir, con esta condición ya quitamos una gran cantidad de números reales…* *--- P: y luego nos dice, de acuerdo con tus resultados, escribe ¿qué relación existe entre A´(t) y f(t)?, ¿Cuál será esa relación?, ¿Qué observan?* *E3: que es el mismo valor* *E6: es lo mismo* *P: ¿es lo mismo verdad? Y es que si se fijan tenemos una función original, luego sacamos de esta función, su integral, ¿por qué? porque de esa función estamos sacando su área en un intervalo, cuando nosotros representamos una función para su área, realmente lo que estamos haciendo es integrando la función… y luego, si yo derivo esta misma [señalando la función integrada], obtengo la función original.*

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El acceso equitativo al contenido	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**AEC1.** El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa; o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en tal compromiso.	**En el episodio 1:** Se les invita a los estudiantes a participar y preguntar las dudas que surjan: *P:…pero quiero que tengan mucha seguridad de que puedan preguntar, de que puedan participar, porque eso nos ayuda mucho.* *… Entonces, la idea de las clases y, sobre todo, en esta clase que vamos a tener es que puedan darse cuenta de que sí necesitamos, desde los pies hasta la cabeza, para poderla llevar a cabo, y que eso implica el hecho de podernos mover, que puedan ustedes preguntar, sin ningún temor, o sin ningún impedimento.*
			En el episodio 2: La profesora pregunta si todos pueden ver la pantalla, antes de proyectar el video: *P: Los que están aquí enfrente, ¿si alcanzan a ver bien la pantalla?*
			En el episodio 6: a) Las preguntas de la clase no van dirigidas a estudiantes en específico: *Esta superficie ya la habíamos representado antes en un plano cartesiano. ¿Cuánto mide la rampa?* *E4: 2 metros de alto y 2 de base.* *P: muy bien. Entonces, ¿qué debemos sacar primero?* *E6: el área del lado y después multiplicarla por 4.* *P: ok, bueno, ahí si se fijan tenemos un rectángulo. ¿Cuál es el área de ese rectángulo?* *E1: 2 por 1, 2* b) La profesora pregunta a los estudiantes si todos ven la pantalla para proceder a la demostración del TFC y durante la presentación, pregunta continuamente si no hay dudas:

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
			P: entonces, para demostrarlo, vamos a trabajar con un applet de GeoGebra que les estoy proyectando, aquí se ven los ejes, el eje x y el eje y, voy a prender la función que puse en esta práctica, es una función cualquiera. ¿Si se ve? *… P: exacto, ¿hasta ahí hay alguna duda?* *E1, E3 y E6: no*
El acceso equitativo al contenido			En las respuestas del cuestionario, los estudiantes expresan que se sintieron incluidos: P19: ¿En cuáles ocasiones consideras que no te sentiste incluido o incluida como parte del grupo? R1: en ninguna P20: ¿Tuviste la oportunidad de expresar tus dudas sobre el tema a tus compañeros y profesora y recibir retroalimentación sobre ellas? Contesta sí o no y explica el por qué R3: si tuve la oportunidad de aclarar mis dudas , por que le preguntaba a la maestra y ya ella me las explicaba aun que muy pocas veces tenia dudas.
			Los estudiantes expresan en las respuestas al cuestionario, que cuando el maestro no hace preguntas dirigidas, se sienten incluidos en la clase.

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El acceso equitativo al contenido	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**AEC2.** Todos en el equipo contribuyen a las discusiones matemáticas del grupo o subgrupo, o el maestro se mueve para que todos los miembros del equipo hagan contribuciones significativas.	**En el episodio 7:** La profesora solicita organizarse en equipos y va con cada uno para escuchar sus discusiones y propiciar la participación de todos los miembros del equipo.
			En las respuestas del cuestionario, los estudiantes expresan que se sienten apoyados e incluidos: P18: ¿Cuáles oportunidades tuviste para participar durante la clase en la comprensión del tema? R3: pues trabajar en equipo con mis compañeros y muy pocas veces daba mi opinion sobre as cosas ya que casi no me gusta opinar
			Cuestionario de los estudiantes: **Pregunta 6:** ¿Cuáles oportunidades tuviste para participar durante la clase en la comprensión del tema? **Pregunta 7:** ¿En cuáles ocasiones consideras que no te sentiste incluido o incluida como parte del grupo?

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
El acceso equitativo al contenido	**Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes**	**AEC3.** El maestro apoya a los presentadores (si es necesario) para que se involucren, o la presentación se convierte en una actividad de toda la clase en la que el maestro apoya activamente una amplia participación y/o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas resultan en dicha participación.	**En el episodio 7:** Se menciona a los estudiantes que pueden consultar dudas que tengas buscando a la profesora a través de distintos medios que tienen al alcance: P: …. *E igual, cualquier duda estaré en el cubículo o búsquenme por whatsapp, ¿sale?* *E3: si, maestra*
			Producciones de los estudiantes: Debido a que la actividad se realizó como extra clase, no se tuvo la oportunidad de una participación activa con todos los estudiantes y varios equipos presentaron dificultades para resolver lo que se les solicitaba.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante	**AEC4.** La atención del maestro y/o sustituto está clara y ampliamente disponible para aquellos estudiantes que lo deseen, lo que resulta en acceso a las matemáticas.	**En el episodio 7:** La profesora pregunta a los estudiantes qué dudas surgieron durante la realización de las actividades: P: ……*¿Cómo les fue con la actividad?, ¿Qué dudas tuvieron?*

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
Agencia, propiedad e identidad	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**API1.** Los estudiantes explican sus ideas y razonamientos. El maestro puede atribuir propiedad a las ideas de los estudiantes en la exposición y/o los estudiantes responden y construyen sobre las ideas de los demás.	**En el episodio 2:** a) La profesora pide a los estudiantes que expresen de forma escrita sus propias ideas sobre lo que es conjetura y teorema, con base en el video proyectado: *P: Es un video muy cortito, pongan atención en lo que es una conjetura y un teorema y al final escriban en su cuaderno cómo entendieron a cada uno y la diferencia entre ellos.* *… bueno, entonces. Ya con base en el video y en lo que escribieron en su cuaderno, ¿qué entienden ustedes por conjetura y qué entienden por teorema?* *…E8: que la conjetura es algo que no se demuestra, sólo se dice.* *P: la conjetura no se demuestra, exactamente, ¿si?* b) Se realizan algunas analogías para que los estudiantes tengan un mayor entendimiento del tema: *E7: ¿Cómo?, ¿La conjetura es algo que qué?, ¿qué se cree?* *…pues, cuando estamos en pareja pensamos que vamos a durar para siempre, y nada.* *P: … o, por ejemplo, cuando ustedes tienen su novio o su novia y le están mandando mensajes y no les contesta.* *E6: ¿entonces la tesis, digo la hipótesis y la conjetura se parecen?* *P: podría ser, ajá…. Por ejemplo, pensemos una situación de la vida: ustedes quieren ir a una fiesta y su mamá les dice: pues sabes que, si limpias toda la casa vas a la fiesta. Ahí, por ejemplo, podríamos decir que la hipótesis es que ustedes van a limpiar toda la casa y la tesis es que, bueno, ya si la limpian, entonces ahora si van a la fiesta.*

<table>
<tr><th>Dimensión</th><th>Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Evidencias</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Agencia, propiedad e identidad</td><td rowspan="3">Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate</td><td rowspan="3">API1. Los estudiantes explican sus ideas y razonamientos. El maestro puede atribuir propiedad a las ideas de los estudiantes en la exposición y/o los estudiantes responden y construyen sobre las ideas de los demás.</td><td>En el episodio 4:
Se recuperan las ideas de los estudiantes sobre porqué consideran que es fundamental el TFC:
P: ..Ahora si, el TFC, nos hacen la pregunta: ¿por qué será fundamental este teorema?
E5: porque es como una base para… no sé
E1: suena como a básico.
…E6: necesario
P: necesario, ¿qué más?
E4: esencial
P: esencial… bueno, pues justo eso representa este teorema en el cálculo. nos dice que es fundamental porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo, es decir, el cálculo diferencial a través de la derivada y el cálculo integral a través de la integral.</td></tr>
<tr><td>Diario de investigación
Pilotaje
Clase 1:

Se recuperan ideas de los estudiantes sobre lo que es un teorema:
Después pensé que tenía que sacar la clase como fuera y empecé a escribir en el pizarrón, a preguntarles algunas cosas y escribir algunas ideas que ellos tenían sobre lo que es un teorema.</td></tr>
<tr><td>Cuestionario de los estudiantes:

Pregunta 9: ¿Consideras que la profesora te visualiza como un estudiante capaz y hábil de contribuir significativamente en el desarrollo de la clase? Contesta sí o no y explica el por qué</td></tr>
</table>

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
Agencia, propiedad e identidad	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**API2.** Al menos un estudiante expone y defiende sus ideas/razonamientos, los estudiantes se basan en las ideas de los demás, o el maestro atribuye la propiedad de las ideas de los estudiantes en la discusión posterior.	**En el episodio 7:** Los estudiantes tienen la oportunidad de conversar entre ellos para apropiarse del contenido matemático. P: … *Ahora si realicen la actividad 2 ustedes, muchas veces es cosa del lenguaje matemático lo que nos frena, pero ayúdense también entre ustedes para tratar de comprender. Y si tienen alguna duda en cuando al lenguaje matemático o lo que sea, me pueden buscar o enviar mensaje.*
			Diario de investigación **Aplicación** **Clase 2:** Se interactúa con los estudiantes para que comprendan el lenguaje matemático y puedan resolver las actividades: *Los estudiantes presentaron nuevamente dificultades para entender el lenguaje matemático y por esa razón no completaron la actividad. Por lo tanto, también hubo la necesidad de explicarles los símbolos que se incluyen y sus significados y los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.*
			Cuestionario de los estudiantes: **Pregunta 8:** ¿Tuviste la oportunidad de expresar tus dudas sobre el tema a tus compañeros y profesora y recibir retroalimentación sobre ellas? Contesta sí o no y explica el por qué

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
Agencia, propiedad e identidad	**Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes**	**API3.** Las presentaciones de los estudiantes dan como resultado una discusión más profunda de las matemáticas relevantes, o los estudiantes hacen una referencia significativa a las ideas de otros estudiantes en sus presentaciones.	**Producciones de los estudiantes:** Los alumnos realizaron su trabajo en casa, por lo que no se tuvo la oportunidad de discutir con sus demás compañeros sobre los procedimientos y resultados.
	Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante	**API4.** El estudiante tiene una amplia oportunidad y capacidad para desarrollar sus ideas interactuando con el profesor, o, el profesor lleva la idea del alumno a la discusión en clase inmediatamente después de que termine el trabajo individual.	**En el episodio 7:** Se recupera la idea de números reales que tienen los estudiantes, para reforzarla: *… En lenguaje matemático, esto significa pertenece a R. esa R que ven ustedes ahí significa el conjunto de los números reales. ¿Saben cuáles son los números reales?* *E4: los que están expresados ya ahí ¿no? como que, por ejemplo que diga 3 y tiene que ser 3.* *P: bueno, en matemáticas tenemos varios conjuntos de números...*

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
Evaluación formativa	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**EF1.** El maestro solicita a los estudiantes que piensen y la instrucción subsiguiente responde a esas ideas, basándose en comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.	**En el episodio 5:** Se les pregunta a los estudiantes sobre temas previos que han estudiado y se abordan los malentendidos emergentes que surgen: *P: [El TFC] como hace una relación inversa entre estas dos [derivada e integral], tenemos que preguntarnos: ¿qué es la derivada y qué es la integral?, ¿ustedes recuerdan qué es la derivada?* *E7: no* *P: ¿no recuerdan nada?* *E4: no* *P: bueno, Spivak (1996) nos da esta definición…* *Aquí tengo mi punto a y yo puedo decir que por ejemplo, este punto sería a + h, o este punto también puede ser, o este, o este, lo vamos a ver de forma dinámica.*
			En el episodio 6: **Se muestra el TFC mediante un ejemplo para atender malentendidos emergentes que surjan en el proceso:** *P: muy bien, esto ya lo habían hecho con otros métodos, pero ahora vamos a aplicar la primera parte del TFC para obtener esa área. Y entonces, tenemos que hay que integrar desde a hasta b, cuando nos dice que desde a hasta b, ¿qué significa?* *E4: a es cero y b es dos, porque es el intervalo.* *P: ok, entonces reemplazo acá mis valores, desde cero hasta dos, de la función que es* $0.5x^2$ *dx. Y lo que me dice es que primero debemos antiderivar la función. ¿Cuál es la antiderivada de esa función?* *E7: ehhh, a ver…* $\frac{0.5x^3}{3}$

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
			P: ok, ahora si se fijan, lo que nos dice es que debemos evaluar la función antiderivada con los valores de b y de a. entonces me quedaría: $\int_0^2 0.5x^2\,dx = \frac{0.5x^3}{3}\,{}_0^2 = \frac{0.5[(2)^3]}{3} - \frac{0.5[(0)^3]}{3} = \frac{4}{3}$ *Ahora, sumando el área del rectángulo, ¿cuánto nos da el área del perfil de la rampa?* *E2: 2.75* *P: muy bien, ahora para sacar el volumen de la rampa que nos pide el problema, ¿qué nos falta?* *E1: multiplicar por 4* *P: ok, entonces, ¿cuánto es el volumen?* *E1: 14 metros cúbicos.*

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
Evaluación formativa	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**EF1.** El maestro solicita a los estudiantes que piensen y la instrucción subsiguiente responde a esas ideas, basándose en comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.	**Diario de investigación** **Pilotaje** **Clase 1:** Los estudiantes no recuerdan temas previos, por lo que se deben atender los malentendidos: *Me quedé corta de tiempo en cuanto a lo que tenía planeado, en parte porque no encontraba el cable, pero también porque los estudiantes no recuerdan mucho los temas de función, límite, derivada y continuidad, ya que no tienen claro estas nociones que son importante para aprender el TFC. Esto me hace pensar que antes de la aplicación, se deben retomar estos temas.* **Diario de investigación** **Pilotaje** **Clase 1:** *Al igual que con el grupo de pilotaje, durante la presentación del TFC tuve que retomar los temas de función, límite, derivada y continuidad, sin embargo, había preparado información para que esta parte no se llevara mucho tiempo, además, del repaso previo que se tuvo.*

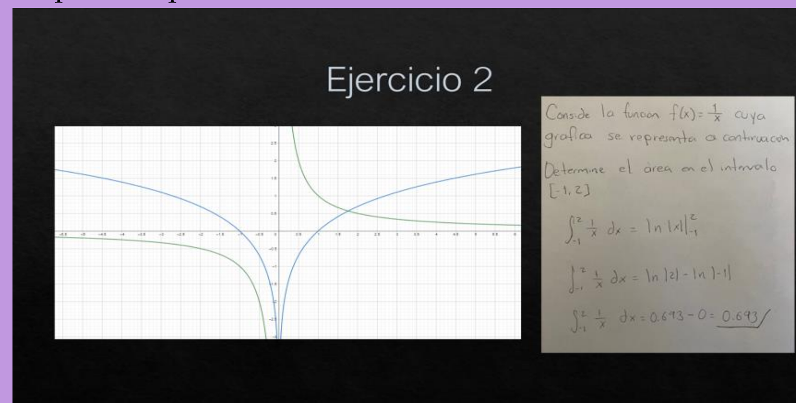
Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
Evaluación formativa	**Rúbrica de las actividades de clase: inicio, exposición del maestro y debate**	**EF1.** El maestro solicita a los estudiantes que piensen y la instrucción subsiguiente responde a esas ideas, basándose en comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.	**Diario de investigación** **Pilotaje** **Clase 2** Se les avisa a los estudiantes que pueden comunicarse por distintos medios para obtener retroalimentación: *En cuanto llegué al salón, anoté mi número en el pizarrón otra vez para que puedan comunicarse y preguntar sus dudas, procurando que queden las menos posibles.*
			Cuestionario de los estudiantes: **Pregunta 10:** ¿Qué acciones realiza la profesora cuando expongo mis dudas?

<table>
<tr><th>Dimensión</th><th>Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Evidencias</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Evaluación formativa</td><td rowspan="2">Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños</td><td rowspan="2">EF2. El maestro solicita el pensamiento de los estudiantes y la discusión subsiguiente responde a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando posibles malentendidos.</td><td>En el episodio 7:
Se les comunica a los estudiantes que pueden consultar a la profesora en caso de tener dudas, para obtener retroalimentación:
P: Con el TFC nos vamos a ahorrar mucho de esos procedimientos y vamos a obtener áreas de forma más inmediata.
Para la próxima, ahora si traten de hacerlo, muchas veces es cosa del lenguaje matemático lo que nos frena, pero ayúdense también entre ustedes para tratar de comprender. Y si tienen alguna duda en cuando al lenguaje matemático o lo que sea, me pueden mandar un mensaje.</td></tr>
<tr><td>Diario de investigación
Pilotaje
Clase 3
Se realizaron recorridos por los distintos equipos para resolver dudas:
Realizaba recorridos para ver el avance de los equipos y checar dudas específicas de cada equipo. Por lo que la clase ha podido ser más organizada respecto a la anterior.

Diario de investigación
Aplicación
Clase 3
En esta última clase los estudiantes estuvieron trabajando casi de forma independiente en sus equipos y yo realizaba recorridos para resolver sus dudas específicas.
… Muchas de las dudas que resolví fueron nuevamente respecto a que no comprenden del todo las instrucciones por el lenguaje matemático que se presenta, y ellos han optado por colocar el significado de algunos símbolos en la actividad.</td></tr>
</table>

Dimensión	Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)	Evidencias
Evaluación formativa	**Rúbrica de evaluación para el trabajo en grupos pequeños**	**EF2.** El maestro solicita el pensamiento de los estudiantes y la discusión subsiguiente responde a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando posibles malentendidos.	**Diario de investigación** **Aplicación** **Clase 2:** Los estudiantes proponen que las evaluaciones se realicen en equipos para familiarizarse en esta forma de trabajo: *La primera parte de la actividad la estuvieron contestando en equipos y observo que no están muy familiarizados trabajando en equipo durante las clases de matemáticas, por lo que ellos expresan que es una situación nueva y que les gustaría que se trabajara así más seguido; también que las evaluaciones fueran en equipo.* *Les comenté que justo la actividad se evaluará en equipo y eso les ha motivado a interesarse en el tema y en la clase, mostrándose más animados.*
			Cuestionario de los estudiantes: **Pregunta 11:** Respecto a las actividades desarrolladas en clase, ¿Recibí retroalimentación por parte de la profesora o mis compañeros sobre lo que realicé y tengo la oportunidad de corregirlas en caso necesario? **Pregunta 12:** En caso de recibir retroalimentación por parte de la profesora, ¿Crees que dicha retroalimentación te ayuda a pensar más profundamente tus respuestas y comprender el tema? Explica detalladamente.

<table>
<tr><th>Dimensión</th><th>Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Evidencias</th></tr>
<tr>
<td>Evaluación formativa</td>
<td>Rúbrica de evaluación de las presentaciones de los estudiantes</td>
<td>EF3. En la presentación y la discusión, el maestro solicita el pensamiento de los estudiantes y responde a sus ideas, basándose en comienzos productivos o abordando los malentendidos emergentes.</td>
<td>
Producciones de los estudiantes:
Se presentaron dificultades para llegar a la respuesta correcta y se cree que en parte es debido a la poca retroalimentación que recibieron durante esta etapa:
Ejercicio 2:
Dos de los equipos (7 estudiantes)
resolvieron el ejercicio sin contemplar la condición de continuidad que plantea el TFC, aplicando el algoritmo de forma mecánica. Se muestra una de las respuestas que dieron:



Narración del equipo:
Nosotros lo que hicimos fue primero sacar la antiderivada de la función, para eso buscamos en internet y en las reglas que vienen en el cuadernillo y descubrimos que es el logaritmo natural de x. Después sustituimos los valores de 2 y nos dio 0.693, luego sustituimos el valor de -1 y nos dio 0. Luego restamos, y el área nos da de 0.693.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Dimensión</th><th>Herramienta TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Indicador TRU (Schoenfeld et al. 2014)</th><th>Evidencias</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Evaluación formativa</td><td rowspan="2">Rúbrica de evaluación para el trabajo individual del estudiante</td><td rowspan="2">EF4. El maestro solicita a los estudiantes que piensen y las discusiones subsiguientes responden a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos o abordando malentendidos emergentes.</td><td>En el episodio 7:
Los estudiantes expresan las dudas que tuvieron y la profesora retroalimenta para atender los malentendidos:
E3: todo, es que yo no sé esos numeritos y señas que tiene maestra.
E1: ire, en esta parte aquí viene una x, y luego una e y luego una R, y pues esas cosas no supe qué hacer.
P: bueno, todo eso tiene que ver con el lenguaje matemático. Si no entendemos el lenguaje matemático va a ser difícil que resuelvan los ejercicios. El lenguaje matemático es como un idioma, entonces debemos entenderlo para podernos comunicar con ese ejercicio-
--- Ahora dice: deriva $A(t)$ obtenido en el inciso anterior. Esa función que obtuvimos, si yo derivo a $A(t)$, ¿Qué obtengo?
E7: t
P: ¿seguros?¿Recuerdan cómo se deriva una función?
E7: se eliminan los números que están al lado de t, ¿no?
P: vamos a repasar cómo derivar una función. Supongamos que tenemos la función $f(x) = cx^n$ y para derivar usamos la regla de $f'(x) = ncx^{n-1}$:</td></tr>
<tr><td>Diario de investigación
Pilotaje
Clase 2

Se ofrece retroalimentación sobre temas previos que no recuerdan los estudiantes:
Al momento de preguntarles cómo les fue con la actividad que resolverían de forma individual, me han comentado que se les dificultó la comprensión del lenguaje matemático para comprender las instrucciones de lo que se les pide que realicen. Por lo cual, he tenido que explicarles las instrucciones y retomar los conjuntos de números: naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.</td></tr>
</table>

V.4. Detección de elementos que no forman parte de las categorías del MTSK ni de las dimensiones del TRU.

Elemento sin clasificar	Evidencia de los instrumentos de recogida de información
La profesora menciona a los estudiantes que la percepción de dificultad que a veces se tiene sobre los temas matemáticos, puede deberse a concepciones heredadas, con el fin de que abran su mente y visualicen el TFC como un tema que puede ser aprendido si somos conscientes de esas percepciones heredadas.	**En el episodio 1 la profesora menciona:** P: *Para esta actividad lo que quiero es que se quiten como todas las ideas que tengan en la cabeza sobre las matemáticas. Sobre todo, las ideas malas… a veces tenemos la creencia de que las matemáticas son difíciles, que nos va siempre mal en los exámenes y esas cosas… pero quiero que tengan mucha seguridad de que puedan preguntar, de que puedan participar, porque eso nos ayuda mucho.*
A pesar de que la profesora tenía una organización de la clase previa a la implementación, han surgido imprevistos para desarrollarla tal cual se ha planeado, por lo que ha recurrido a improvisar.	**Diario de investigación** **Pilotaje** **Clase 1** *El día de hoy tuve el primer pilotaje de la primera clase y dentro de las situaciones relevantes se encontraron las siguientes:* *Al inicio tuve algunos imprevistos que me hicieron retrasarme. Ya que trataba de presentar e introducir el tema pero no encontraba el cable del proyector y eso me hizo desconcentrarme y ponerme nerviosa, por lo que terminé perdiendo unos 5 minutos.* *Después pensé que tenía que sacar la clase como fuera y empecé a escribir en el pizarrón, a preguntarles algunas cosas y escribir algunas ideas que ellos tenían sobre lo que es un teorema.*
Se ha tenido que recurrir a conocer las ideas intuitivas que tienen los estudiantes respecto al TFC para saber si hacía falta reforzar temas anteriores.	**Diario de investigación** **Pilotaje** **Clase 1** *Me quedé corta de tiempo en cuanto a lo que tenía planeado, en parte porque no encontraba el cable, pero también porque los estudiantes no recuerdan mucho los temas de función, límite, derivada y continuidad, ya que no tienen claro estas nociones que son importante para aprender el TFC. Esto me hace pensar que antes de la aplicación, se deben retomar estos temas.*
La profesora ha determinado que era necesario realizar ajustes en cuanto a la secuenciación de temas en el currículo de la materia de Cálculo Integral, con el objetivo de que los estudiantes	**Diario de investigación** **Pilotaje** **Clase 1** *Por otro lado, traté de desarrollar el tema TFC antes de antiderivada, tal cómo está planteado en los aprendizajes esenciales que ha publicado DGETI recientemente por motivo de la pandemia. Sin embargo, para la parte evaluativa del Teorema, creo que se debe*

	abordar una introducción de la antiderivada. Ya que, de otra manera, los estudiantes no podrán aplicar el algoritmo. Por lo que se añadirá esta parte en la sesión de aplicación.

V.5. Comparación de indicadores antes y después de la implementación de la propuesta

Realizando una comparación entre los indicadores de conocimiento a priori y a posteriori de la propuesta de enseñanza, se ha podido realizar una tabla comparativa de los mismos, ver Tabla 15, donde se aprecian los indicadores que estuvieron presentes en cada categoría, resaltando con fondo verde los que coinciden en el antes y después de la implementación; con fondo naranja se identifican aquellos que no estuvieron presentes en la práctica y en fondo color morado los que resultaron a partir de la extracción de los datos.

Tabla 15

Resumen de indicadores de conocimiento a priori y a posteriori de la ejecución de la propuesta de enseñanza

<table>
<tr><th colspan="5">Indicadores de conocimiento</th></tr>
<tr><th>Dominio</th><th>Subdominio</th><th>Categoría</th><th>Indicadores a priori</th><th>Indicadores a posteriori</th></tr>
<tr><td rowspan="6">MK</td><td rowspan="6">KoT</td><td>Procedimientos (P)</td><td colspan="2">KoT-P1. Conocer un procedimiento para demostrar el TFC.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Definiciones (D)</td><td colspan="2">KoT-D1. Conocer la proposición del TFC.</td></tr>
<tr><td></td><td>KoT-D2. Conocer una definición de teorema.
KoT-D3. Conocer la definición de derivada de una función.
KoT-D4. Conocer la definición de integral de una función.</td></tr>
<tr><td>Propiedades y fundamentos (PF)</td><td colspan="2">KoT-PF1. Conocer que el Teorema del valor medio es necesario para demostrar el TFC.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Registros de representación (RP)</td><td colspan="2">KoT-RP1. Conocer la representación algebraica del TFC.
KoT-RP2. Conocer la representación gráfica del TFC.</td></tr>
<tr><td></td><td>KoT-RP3. Conocer la representación verbal del TFC.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Indicadores de conocimiento</th></tr>
<tr><th>Dominio</th><th>Subdominio</th><th>Categoría</th><th>Indicadores a priori</th><th>Indicadores a posteriori</th></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">KoT</td><td rowspan="2">Fenomenología y aplicaciones (FA)</td><td colspan="2">KoT-FA1. Conocer que Newton demostró el TFC como un resultado de resolver que el algoritmo inverso que resuelve el problema de las tangentes resolvió el problema de las áreas.
KoT-FA2. Conocer que una aplicación del TFC es en la determinación del área de una región plana.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">MK</td><td>KoT-FA3. Conocer que un uso del TFC es para calcular la distancia recorrida por un objeto en un determinado tiempo conociendo su velocidad (Academia Nacional de Matemáticas (ANM), 2021)</td><td>KoT-FA4. Conocer que Isaac Newton es conocido por los estudiantes, al ser es estudiado en temas previos de Física.
KoT-FA5. Conocer que una de las formas en que Leibniz demostró el TFC fue observando a la derivada y la integral como operaciones inversas a través de sumas y restas.</td></tr>
<tr><td>KSM</td><td>Conexiones basadas en simplificación (CS)</td><td colspan="2">KSM-CS1. Conocer que existe una conexión entre el concepto de límite con la derivada e integral definida. En la integral definida como una suma cuyo límite tiende a infinito y con la derivada a través de una recta secante cuyo incremento tiende a cero para convertirse en una recta tangente.</td></tr>
</table>

Indicadores de conocimiento				
Dominio	**Subdominio**	**Categoría**	**Indicadores a priori**	**Indicadores a posteriori**
MK	**KSM**	**Conexiones basadas en simplificación (CS)**		**KSM-CS2.** Conocer que existe una conexión de simplificación entre los conceptos de recta secante, recta tangente y pendiente de la recta con el de derivada. Ya que en la definición de derivada se aprecia como el incremento h tiende a cero para pasar de una recta secante a la función a una recta tangente de la misma.
		Conexiones basadas en complejización (CC)	**KSM-CC1.** Conocer que el TFC tiene conexión con el tema de variables aleatorias en probabilidad, ya que para obtener la probabilidad de que una variable aleatoria continua en un intervalo [a, b], se requiere calcular el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad en dicho intervalo.	
		Conexiones auxiliares (CA)	**KSM-CA1.** Conocer que el TFC es un procedimiento auxiliar en la resolución de ecuaciones diferenciales, ya que para encontrar la o las funciones solución de la ecuación diferencial se requiere trabajar con derivadas y antiderivadas.	
		Conexiones transversales (CT)	**KSM-CT1.** Conocer que existe una conexión transversal entre el tema de ecuación (igualdad que contiene una o más incógnitas (Real Academia Española (RAE), 2020) con el de función y TFC cuando, a partir de una ecuación dónde se conoce el valor del área bajo una curva, se pide calcular la función o funciones continuas que la satisfacen.	

<table>
<tr><th colspan="5">Indicadores de conocimiento</th></tr>
<tr><th>Dominio</th><th>Subdominio</th><th>Categoría</th><th>Indicadores a priori</th><th>Indicadores a posteriori</th></tr>
<tr><td rowspan="4">MK</td><td rowspan="4">KPM</td><td rowspan="2">Prácticas ligadas a la matemática en general (PMG)</td><td></td><td>KPM-PMG1. Conocer el papel de las analogías en la práctica para la comprensión de temas matemáticos.
KPM-PMG2. Conocer las características de los teoremas en matemáticas.
KPM-PMG3. Conocer el papel del ejemplo para mostrar el TFC.</td></tr>
<tr><td colspan="2">KPM-PMG4. Conocer el papel de las demostraciones matemáticas en la validación de teoremas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prácticas ligadas a una temática en matemáticas (PTM)</td><td colspan="2">KPM-PTM1. Conocer el papel del método directo de demostración para validar el TFC.</td></tr>
<tr><td></td><td>KPM-PTM2. Conocer que una práctica ligada al estudio del TFC es hacer explícita la diferencia entre teorema y conjetura.
KPM-PTM3. Conocer que el TFC puede ser demostrado con procedimientos distintos.</td></tr>
<tr><td>PCK</td><td>KFLM</td><td>Teorías del aprendizaje matemático (TAM)</td><td colspan="2">KFLM-TAM1. Conocer que los entornos de aprendizaje que propician comprensión robusta del TFC están basados en ofrecer oportunidades a los estudiantes con base en cinco dimensiones: contenido, demanda cognitiva, acceso equitativo al contenido, agencia, propiedad e identidad y evaluación formativa (Schoenfeld et al., 2016).</td></tr>
</table>

Indicadores de conocimiento				
Dominio	**Subdominio**	**Categoría**	**Indicadores a priori**	**Indicadores a posteriori**
PCK	**KFLM**	**Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)**	**KFLM-FD1.** Conocer que un error común en el aprendizaje del TFC es la falta de comprensión en la noción de continuidad de una función en un intervalo dado, como condición necesaria para aplicar el primer TFC.	
		Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)		**KFLM-FD2.** Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es la falta de comprensión del lenguaje matemático. **KFLM-FD3.** Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es la falta de conocimiento de los conjuntos de números. **KFLM-FD4.** Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es el tiempo limitado que se invierte en la clase. **KFLM-FD5.** Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es confundir los registros de representación con temas matemáticos.

Indicadores de conocimiento				
Dominio	**Subdominio**	**Categoría**	**Indicadores a priori**	**Indicadores a posteriori**
PCK	**KFLM**	**Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (FD)**		**KFLM-FD6.** Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes cuando resuelven ejercicios matemáticos, es que olvidan interpretar los resultados y colocar las unidades de medida. **KFLM-FD7.** Conocer que una dificultad para el aprendizaje del TFC es que, al momento de abordar el tema, los estudiantes muestran poca comprensión de los conceptos de función, límite, continuidad y derivada.
		Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático (MI)		**KFLM-MI1.** Conocer que los estudiantes emplean la palabra "comprobación" como un sinónimo de "demostración". **KFLM-MI2.** Conocer que los estudiantes colocan el significado de los símbolos matemáticos en las actividades, para consultarlos cuando tienen dudas. **KFLM-MI3.** Conocer que los estudiantes tienen una predisposición a repetir lo que realiza el profesor.

<table>
<tr><th colspan="5">Indicadores de conocimiento</th></tr>
<tr><th>Dominio</th><th>Subdominio</th><th>Categoría</th><th>Indicadores a priori</th><th>Indicadores a posteriori</th></tr>
<tr><td rowspan="4">PCK</td><td rowspan="3">KFLM</td><td>Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático (MI)</td><td colspan="2">KFLM-MI4. Conocer que los estudiantes emplean los algoritmos del TFC en forma mecánica, sin saber lo que están haciendo matemáticamente.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas (AE)</td><td colspan="2">KFLM-AE1. Conocer que los estudiantes tienen una predisposición a emplear algoritmos geométricos cuando se les pide calcular el área debajo de funciones constantes o lineales.</td></tr>
<tr><td></td><td>KFLM-AE2.
Conocer que un aspecto que causa emociones agradables cuando se estudian temas matemáticos, es relacionar el tema con situaciones contextuales a los estudiantes.
KFLM-AE3.
Conocer que un aspecto positivo durante el aprendizaje del TFC es en uso del video como recurso didáctico.
KFLM-AE4.
Conocer que la falta de comprensión de las actividades que se solicitan a los estudiantes les produce emociones desagradables.</td></tr>
<tr><td>KMLS</td><td>Resultados de aprendizaje esperados (RAE)</td><td colspan="2">KMLS-RAE1. Conocer que uno de los aprendizajes esperados en cuanto al TFC del programa de estudios de Cálculo Integral en el 5to semestre del bachillerato tecnológico es que el alumno descubra las relaciones inversas entre derivación e integración.</td></tr>
</table>

Indicadores de conocimiento				
Dominio	**Subdominio**	**Categoría**	**Indicadores a priori**	**Indicadores a posteriori**
PCK	**KMLS**	**Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental (NEDC)**	**KMLS-NEDC1.** Conocer que, en cuanto al TFC de los alumnos del 5to semestre que cursan la materia de Cálculo Integral en bachillerato tecnológico, de acuerdo con el plan de estudios, e espera que calculen el área bajo la curva de funciones diversas.	
		Secuenciación de temas (ST)	**KMLS-ST1.** Conocer que un tema previo al TFC en el plan de estudio de bachillerato tecnológico es "Sumas de Riemann".	
				KMLS-ST2. Conocer que un tema previo al TFC en el plan de estudio de bachillerato tecnológico es "Propiedades de Notación Sigma".
	KMT	**Teorías de la enseñanza de las matemáticas (TEM)**	**KMT-TEM1.** Conocer que el TRU (Enseñanza para una Comprensión Robusta, por sus siglas en inglés, considera que se puede lograr una comprensión robusta del TFC si el docente planifica, implementa y reflexiona la instrucción tomando en cuenta las cinco dimensiones de las aulas sólidas de matemáticas: contenido, demanda cognitiva, acceso equitativo al contenido, propiedad, agencia e identidad y evaluación formativa (Schoenfeld et al., 2016).	
		Recursos didácticos (físicos y digitales) (RD)	**KMT-RD1.** Conocer que el uso del software GeoGebra favorece que los estudiantes visualicen los aspectos dinámicos de acumulación y variación del TFC.	
				KMT-RD2. Conocer que el uso de diapositivas en las clases de matemáticas favorece la explicación teórica y visual del tema. **KMT-RD3.** Conocer el uso del video como recurso didáctico en la enseñanza del TFC.

Indicadores de conocimiento				
Dominio	**Subdominio**	**Categoría**	**Indicadores a priori**	**Indicadores a posteriori**
PCK	**KMT**	**Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (ETE)**		**KMT-ETE1.** Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es estudiar el significado de cada palabra por separado (teorema, fundamental, cálculo) y después unir la frase. **KMT-ETE2.** Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es por medio de un ejemplo que los estudiantes hayan resuelto de manera previa empleando sumas de Riemann, para que hagan una comparación en cuanto al procedimiento empleado. **KMT-ETE3.** Conocer que una actividad para la enseñanza del TFC puede basarse en la obtención de áreas bajo la curva de distintas funciones. **KMT-ETE4.** Conocer que una actividad para la enseñanza del TFC puede basarse en descubrir la relación inversa entre la derivada y la integral de una función.
			KMT-ETE5. Conocer que un tipo de ejemplo en la enseñanza del TFC que se le puede presentar al estudiante es encontrar el área bajo la curva de una función conocida en un intervalo determinado.	

Fuente: elaboración propia

Como puede apreciarse en la tabla comparativa, solo uno de los indicadores que se habían contemplado en el concentrado inicial, no se vio reflejado en la ejecución de la propuesta: *conocer que un uso del TFC es para calcular la distancia recorrida por un objeto en un determinado tiempo, conociendo su velocidad* (fenomenología y aplicaciones del KoT); se considera que esto se debe a que los ejemplos empleados aplicados en la propuesta se han enfocado en las determinaciones que marca el plan de estudio del subsistema al que pertenece la institución donde se realizó la implementación: que el estudiante calcule áreas bajo la curva de diversas funciones y que logre establecer la relación inversa entre derivada e integral.

Pasando a los nuevos indicadores localizados, se aprecia que varios de ellos se encontraban implícitos en el diseño de la propuesta, esto hace notar que, al organizar el conocimiento para la enseñanza empleando las dimensiones del TRU, inconscientemente se han puesto en práctica otros saberes que permitieron complementar la propuesta procurando lograr los objetivos de la clase; así entonces, se encuentra una relación intrínseca entre el MTSK y el TRU que ha permitido organizar la instrucción. Estos indicadores se aprecian en las categorías de:

Dominio MK

Subdominio KoT:

- **Definiciones:**
    - Conocer una definición de teorema.
    - Conocer una definición de derivada de una función.
    - Conocer una definición de integral de una función.
- **Registros de representación:**
    - Conocer la representación verbal del TFC.
- **Fenomenología y aplicaciones:**
    - Conocer que Isaac Newton y Gottfried Leibniz forman parte de la historia del TFC.

Subdominio KSM:

- **Conexiones basadas en simplificación:**
    - Conocer que existe una conexión de simplificación entre los conceptos de recta secante, recta tangente y pendiente de la recta con el de derivada. Ya que en la definición de derivada se aprecia como el incremento h tiende a cero para pasar de una recta secante a la función a una recta tangente de la misma.

Subdominio KPM:

- **Prácticas ligadas a la matemática en general:**
    - Conocer las características de los teoremas en matemáticas.
    - Conocer el papel del ejemplo para mostrar el TFC.
- **Prácticas ligadas a una temática en matemáticas:**
    - Conocer que una práctica ligada al estudio del TFC es hacer explícita la diferencia entre teorema y conjetura.
    - Conocer que el TFC puede ser demostrado con procedimientos distintos.

Dominio PCK

Subdominio KMLS:

- **Secuenciación de temas:**
  - Conocer que un tema previo al TFC en el plan de estudio de bachillerato tecnológico es *propiedades de Notación Sigma*.

Subdominio KMT:

- **Recursos didácticos:**
  - Conocer que el uso de diapositivas en las clases de matemáticas favorece la explicación teórica y visual del tema.
  - Conocer el uso del video como recurso didáctico en la enseñanza del TFC.
- **Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos:**
  - Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es estudiar el significado de cada palabra por separado (teorema, fundamental, cálculo) y después unir la frase.
  - Conocer que una estrategia de enseñanza del TFC es por medio de un ejemplo que los estudiantes hayan resuelto de manera previa empleando sumas de Riemann, para que hagan una comparación en cuanto al procedimiento empleado.
  - Conocer que una actividad para la enseñanza del TFC puede basarse en la obtención de áreas bajo la curva de distintas funciones.
  - Conocer que una actividad para la enseñanza del TFC puede basarse en descubrir la relación inversa entre la derivada y la integral de una función.

Como puede verse, dichos indicadores que se encontraban en forma tácita en el diseño de la propuesta corresponden tanto al dominio MK, como al PCK; es decir, se ha empleado conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido para completar el diseño. La categoría donde se aprecia un mayor numero de ellos es en la de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, correspondiente al subdominio KMT (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas); se infiere que este hallazgo se relaciona precisamente con la manera en que se organizan los conocimientos en estrategias didácticas y actividades para presentarlas al estudiante.

Por otro lado, el resto de los nuevos indicadores encontrados han surgido de manera espontánea durante la práctica docente y se enuncian a continuación:

Dominio MK

Subdominio KoT:

- **Fenomenología y aplicaciones:**
  - Conocer que Isaac Newton es conocido por los estudiantes, al ser es estudiado en temas previos de Física.
  - Conocer que Leibniz demostró el TFC como operaciones inversas entre la derivada y la integral a través de sumas y restas.

Subdominio KPM:

- **Prácticas ligadas a la matemática en general:**
  - Conocer el papel de las analogías en la práctica para la comprensión de temas matemáticos.

Dominio PCK

Subdominio KFLM:

- **Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas:**
  - Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es la falta de comprensión del lenguaje matemático.
  - Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es la falta de conocimiento de los conjuntos de números.
  - Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes cuando resuelven ejercicios matemáticos, es que olvidan interpretar los resultados y colocar las unidades de medida.
  - Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es confundir los registros de representación con temas matemáticos.
  - Conocer que una dificultad en el aprendizaje del TFC es el tiempo limitado que se invierte en la clase.
  - Conocer que una dificultad para el aprendizaje del TFC es que, al momento de abordar el tema, los estudiantes muestran poca comprensión de los conceptos de función, límite, continuidad y derivada.
- **Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático:**
  - Conocer que los estudiantes emplean la palabra *comprobación* como un sinónimo de *demostración*.
  - Conocer que los estudiantes colocan el significado de los símbolos matemáticos en las actividades, para consultarlos cuando tienen dudas.
  - Conocer que los estudiantes tienen una predisposición a repetir lo que realiza el profesor.
- **Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas:**
  - Conocer que un aspecto que causa emociones agradables cuando se estudian temas matemáticos, es relacionar el tema con situaciones contextuales a los estudiantes.
  - Conocer que un aspecto positivo durante el aprendizaje del TFC es en uso del video como recurso didáctico.
  - Conocer que la falta de comprensión de las actividades que se solicitan a los estudiantes les produce emociones desagradables.

Respecto a estos nuevos indicadores surgidos a partir de la práctica, se resalta que una gran mayoría responde al dominio PCK, específicamente al subdominio KFLM (conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas), con esto se deduce que la ejecución de la enseñanza ha permitido reconocer las cualidades del aprendizaje del TFC, logrando detectar las fortalezas y dificultades, las formas que emplean los estudiantes para interactuar con el tópico matemático y los aspectos emocionales que se pusieron en juego.

Debido a lo anterior, este acercamiento ha resultado un importante criterio metodológico en la fase de reflexión de la investigación-acción con el que se ha logrado, no solo confrontar los indicadores, sino profundizar los análisis a priori y a posteriori, permitiendo visualizar una complementación de los referentes MTSK y TRU y la caracterización del tipo de indicadores que tienen mayor presencia durante la práctica docente.

En cuanto a los indicadores del TRU, se aprecia que no hubo indicadores nuevos respecto a los que se habían considerado al principio. Esto debido a que se han empleado las rúbricas de evaluación propuestas por los autores, las cuales, cómo se vio anteriormente, están dirigidas a evaluar los distintos momentos de la clase con base en las cinco dimensiones. Por lo tanto, en el análisis a priori y a posteriori se mantiene el mismo número de indicadores, ver tabla 11.

CAPÍTULO VI. RESULTADOS

En este capítulo se detallan los resultados obtenidos a partir del análisis del estudio. Se pretende mostrarlos de lo particular a lo general.

Iniciando con los indicadores detectados a priori y a posteriori de la ejecución de la propuesta de enseñanza, se observa que, se han logrado encontrar una cantidad considerable de nuevos indicadores durante la práctica, algunos de ellos se habían empleado de manera intrínseca desde la etapa de planeación, sin embargo, no se era consciente de ellos. Esto demuestra que la etapa de reflexión de la investigación-acción, correspondiente al análisis, ha permitido ubicarlos y considerarlos en el rediseño.

En lo que respecta al MTSK, **se han puesto en práctica la mayoría de los indicadores a priori, el que está ausente se retomará en el rediseño de la propuesta.** En los subdominios **KFLM y KMT** se han identificado el **mayor número de nuevos indicadores**, siendo la categoría **fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas,** la que denotó una mayor cantidad.

En cuanto al TRU no se han detectado nuevos indicadores, debido a que estos se tomaron haciendo referencia a las rúbricas de evaluación que propone el modelo y a que, en general, las dimensiones hacen referencia a aspectos amplios de la clase que logran clasificar los datos obtenidos.

Haciendo una conjunción de los marcos teóricos, de acuerdo con las triangulaciones de datos, se puede observar que **existen categorías del MTSK que se fusionan con las dimensiones del TRU**. Esto se deduce analizando las evidencias que se han clasificado en ambas triangulaciones, correspondientes al segundo y tercer acercamiento del análisis de datos. En seguida se detallan los hallazgos a este respecto.

En la **dimensión *el contenido* del TRU**, se logró clasificar lo referente a las categorías de los ***subdominios KoT y KSM* del MTSK**, ya que esta dimensión abarca lo concerniente a las **definiciones, contextos (fenomenología y aplicaciones), registros de representación, procedimientos y propiedades del TFC**, que es el **contenido matemático** con el que se trabajó. Asimismo, incluye también las **conexiones entre contenidos matemáticos**, tanto **previos, posteriores, transversales o auxiliares**, por lo que existe una fusión en cuanto a estos aspectos en ambos referentes teóricos.

Además, esta dimensión se observa involucrada en algunas categorías del resto de los subdominios, aunque no tan explícita como en los anteriormente mencionados. En el caso del **KPM** se observa una relación en cuanto al papel que ha considerado de importancia la profesora para demostrar el TFC asistida con un applet y a través del diseño de actividades basadas en algunas de las demostraciones de Newton y Leibniz, asimismo, se muestra el interés de enunciar las características de los teoremas en matemáticas**;** estos aspectos se ubican en las **prácticas ligadas a la matemática en general**.

Respecto al subdominio **KMLS**, se observa una conjunción con la dimensión contenido al **basar el tema TFC en el nivel de grado y seguir la secuencia que especifica el plan de estudios de bachillerato**; por último, en cuanto al **KMT y KFLM** se aprecian similitudes en la manera de organizar el contenido matemático por medio de **teorías de enseñanza y aprendizaje, respectivamente.**

Desde el diseño de la propuesta y en los episodios de clase, se muestra como la profesora optó por estructurar el contenido comenzando por presentar el tema TFC y su ubicación en el currículo, después se pasa a definir lo que es un teorema y la diferencia con una conjetura, luego se presentan algunos aspectos históricos relacionados con el tópico para después pasar a la parte fundamental del TFC como una relación inversa entre la derivada y la integral de una función, se retoman las definiciones de derivada e integral, se define y demuestra el TFC y, por último, se realizan y revisan las actividades; cabe señalar que esta estructura responde a la experiencia y creencias como profesora de matemáticas y cada educador puede considerar organizarlo como lo crea más adecuado, de acuerdo con el contexto y la dinámica del grupo con el que se trabaje.

En cuanto a la dimensión ***la demanda cognitiva***, apreciamos algunas similitudes con los ***subdominios KFLM y KMT***, debido a que la dimensión infiere las oportunidades que se le presentan al estudiante para entender el TFC, mientras que los subdominios mencionados contienen categorías referentes al uso de teorías de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas, respectivamente. Por lo tanto, consideramos que **ambos refieren la organización y estructuración que se hace del contenido para lograr su enseñanza y aprendizaje,** en el caso de este trabajo se ha empleado el mismo TRU como **teoría de aprendizaje y de enseñanza del TFC**.

También, durante dicha organización, la profesora ha pensado en algunas **estrategias, actividades o ejemplos que brinden andamiaje al estudiante** con el objetivo de facilitarle la aprehensión del contenido; por ejemplo, durante el diseño de las actividades se ha pensado en la manera de que el estudiante transite de lo fácil a lo complejo.

Aunque existe una relación implícita, **algunos de estos aspectos son también meramente pertenecientes a la dimensión** *demanda cognitiva*, ya que no se observan de forma explícita en las categorías del MTSK, por ejemplo el **dar tiempo para que los estudiantes desarrollen su propio pensamiento matemático** al dejarles actividades extraclase, tanto individual como en equipos, y fomentar, por medio del discurso, la participación que implique la expresión de los desafíos que ellos detectan para comprender el TFC.

Pasando a la **dimensión *el acceso equitativo al contenido***, se vislumbra una correspondencia con el **subdominio KMT**, en cuanto **al orden de llevar las estrategias, actividades y recursos didácticos para que todos los estudiantes puedan tener acceso al contenido**. Sin embargo, en esta dimensión **se observan elementos que no son claros en el**

MTSK, como el hecho de **fomentar una participación activa de los estudiantes**, lo cual se ha intentado realizar mediante el uso de analogías que ellos mismos han formulado. También el **ofrecer y brindar atención específica a quienes lo requieran**, invitando a los estudiantes a acercarse para aclarar sus dudas, mediante distintos medios de comunicación con la profesora (teléfono, whatsapp, cubículo) y el hecho de que todas las preguntas de la clase se han dirigido de manera abierta al grupo.

Luego, en la **dimensión *agencia, propiedad e identidad*** se observan similitudes con el **subdominio KFLM** en la categoría **maneras en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático**, pues al fomentar las conversaciones entre estudiantes, se ha logrado detectar que cuando ellos tienen acercamiento al TFC, intentan apropiarse del contenido empleando un lenguaje familiar para ellos que les permita hacer esa transición al lenguaje matemático; por ejemplo, cuando emplean la palabra comprobación como un sinónimo de demostración. Otra forma de interacción y de apropiación es comenzar haciendo mecanizaciones con el uso del algoritmo del TFC, mientras comprenden la conexión entre derivada e integral, esta acción logra verse en la resolución de las actividades planteadas.

Esa dimensión también se vislumbra en el **subdominio KMT**, por el hecho de que, como profesora, se ha tenido que pensar en **estrategias de enseñanza a partir de conocer las ideas que tienen los estudiantes sobre los conceptos relativos al TFC**, como función, límite y derivada. Sin embargo, también hay **aspectos que son muy propios de la dimensión**, como el hecho de **fomentar las conversaciones entre los estudiantes para que desarrollen su identidad como pensadores matemáticos** y el **hecho de crear discusiones grupales a partir de sus propias ideas y aportaciones**.

Por último, **la dimensión** *evaluación formativa* muestra semejanzas con los **subdominios KFLM y KMT**, en cuanto a que durante la implementación de la propuesta se ha pensado en **estrategias de enseñanza que permitan a la profesora identificar las dificultades** que se presentan para **resolver las actividades** y que el TFC pudiera ser aprendido. Por otro lado, se aprecian elementos de la dimensión que no son explícitos en el MTSK, como el **retroalimentar las ideas de los estudiantes**, tanto por parte de la profesora como de ellos mismos y darles la oportunidad de **identificar sus errores y corregir**.

Es así como se han identificado aspectos de las dimensiones del TRU que se conjuntan con algunos subdominios del MTSK y algunos otros que se han detectado como propios del modelo y sus dimensiones. Sin embargo, también existen elementos de las categorías del MTSK que no se logran ver con claridad en las dimensiones del TRU y, por lo tanto, se consideran pertenecientes únicamente al MTSK.

Por ejemplo, en cuanto al **subdominio KPM**, la profesora ha pensado en uno o varios métodos adecuados para **demostrar el TFC**, tomando en cuenta el nivel de grado de los estudiantes y los conocimientos previos que ellos poseen**,** lo cual ubicamos dentro de las **prácticas ligadas a una temática en específico.** Luego, respecto al **subdominio KMLS**, se han diseñado las actividades y ejercicios considerando los **resultados esperados** que marca el plan de estudios de la materia, por lo que se ha centrado gran parte de la clase en la identificación de la relación inversa entre derivada e integral, como la parte fundamental del TFC.

El **subdominio KFLM** por su parte, refiere a las **maneras en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático y aspectos emocionales del aprendizaje**. Por ejemplo, el hecho de que los estudiantes optaron por escribir en la actividad el significado de los símbolos matemáticos y las emociones que expresaron durante las clases, de forma oral y escrita. Por último, en lo que respecta al **subdominio KMT** se aprecian a los **recursos didácticos**, físicos y digitales, como propios del MTSK.

De esta manera, se puede concluir que los referentes teóricos MTSK y TRU tienen ciertas peculiaridades que se conjugan en ambos, pero también cada uno incluye aspectos propios que no se detectan de forma manifiesta en el otro. Por lo tanto, la unión de estos referentes ha logrado un complemento que ayuda a potencializar la enseñanza del TFC y suponemos que también de otros temas matemáticos. Asimismo, se infiere que **el MTSK**, en el diseño e implementación de la propuesta, ha sido útil para responder al ***qué*** conocimientos tiene la profesora para llevarlos al aula, mientras que **el TRU** responde al ***cómo*** organizar dichos conocimientos para su enseñanza.

Es de relevancia mencionar que la dimensión del ***contenido*** es la que se ha encontrado inmersa con mayor claridad en todos los subdominios del MTSK, sobre todo en los pertenecientes al dominio MK, esto debido a que los conocimientos que la profesora ha empleado deben basarse en un contenido matemático específico, el TFC en este caso.

En cuanto a los subdominios del MTSK, ha sido el ***KMT*** el que se encontró incluido en todas las dimensiones del TRU, ya que la investigación está dirigida a organizar la enseñanza del TFC con base en el conocimiento especializado de la profesora.

Ahora bien, respecto a los elementos que **no han podido clasificarse** ni en las categorías del MTSK ni en las dimensiones del TRU, se observa que **han sido pocos** considerando la cantidad de información que se obtuvo. Creemos que en parte se debe a que el diseño inicial de la propuesta se ha basado justo en los elementos de ambos marcos referenciales, por lo que es lógico pensar que la información movilizada durante y después permanezca dentro de ellos. Otra razón que consideramos viable, es que la unión de estas dos teorías resulta en un potente enlace que abarca una gran parte de las interacciones de la enseñanza de un tópico matemático.

Como elementos no clasificados descubrimos que algunos de ellos corresponden a **las creencias que tiene la profesora para organizar y desarrollar la enseñanza del TFC,** como el hacer explícito que se pueden heredar concepciones erróneas sobre las matemáticas, el cómo improvisa la logística de la clase cuando algo no resulta como lo planeado, retomar la enseñanza de temas previos y realizar cambios en la secuenciación de temas del currículo porque lo consideró primordial para mejorar la enseñanza y comprensión del TFC.

Es importante señalar que, aunque el modelo MTSK incluye un tercer dominio referente a las creencias del profesor; estas no se han contemplado para esta investigación debido a que sólo se están considerando los dominios MK y PCK, pues en estos ya se han establecido categorías previas que especifican el conocimiento.

Retomando la pregunta de investigación: **¿Cómo elaborar una propuesta de enseñanza basada en el conocimiento especializado del profesor y en elementos para generar comprensión robusta del TFC en bachillerato?** El desarrollo de investigación se ha basado en el desglose de los referentes teóricos MTSK y TRU, el primero con base en sus categorías y el segundo, en las dimensiones que propone. Con la asociación de estos datos se han elaborado indicadores que han servido como base para la elaboración de la propuesta de enseñanza. En el análisis de datos lograron encontrarse otros conocimientos que la profesora puso en marcha durante la práctica.

Esto nos lleva a concluir que **el empleo de esta dualidad teórica ha permitido dar respuesta a la pregunta de investigación, al relacionar y entrelazar el conocimiento especializado del profesor y elementos para una comprensión robusta del TFC**, en una propuesta de enseñanza de este tópico matemático. En la Figura 20 se muestra un resumen de los resultados anteriormente expuestos sobre la relación y conjunción del MTSK y el TRU. En la parte central de dicha figura, con fondo gris, se muestran los elementos que logran apreciarse en ambos modelos, haciendo una unión entre los subdominios del MTSK y las dimensiones del TRU, articulando con flechas los aspectos específicos que comparten entre sí.

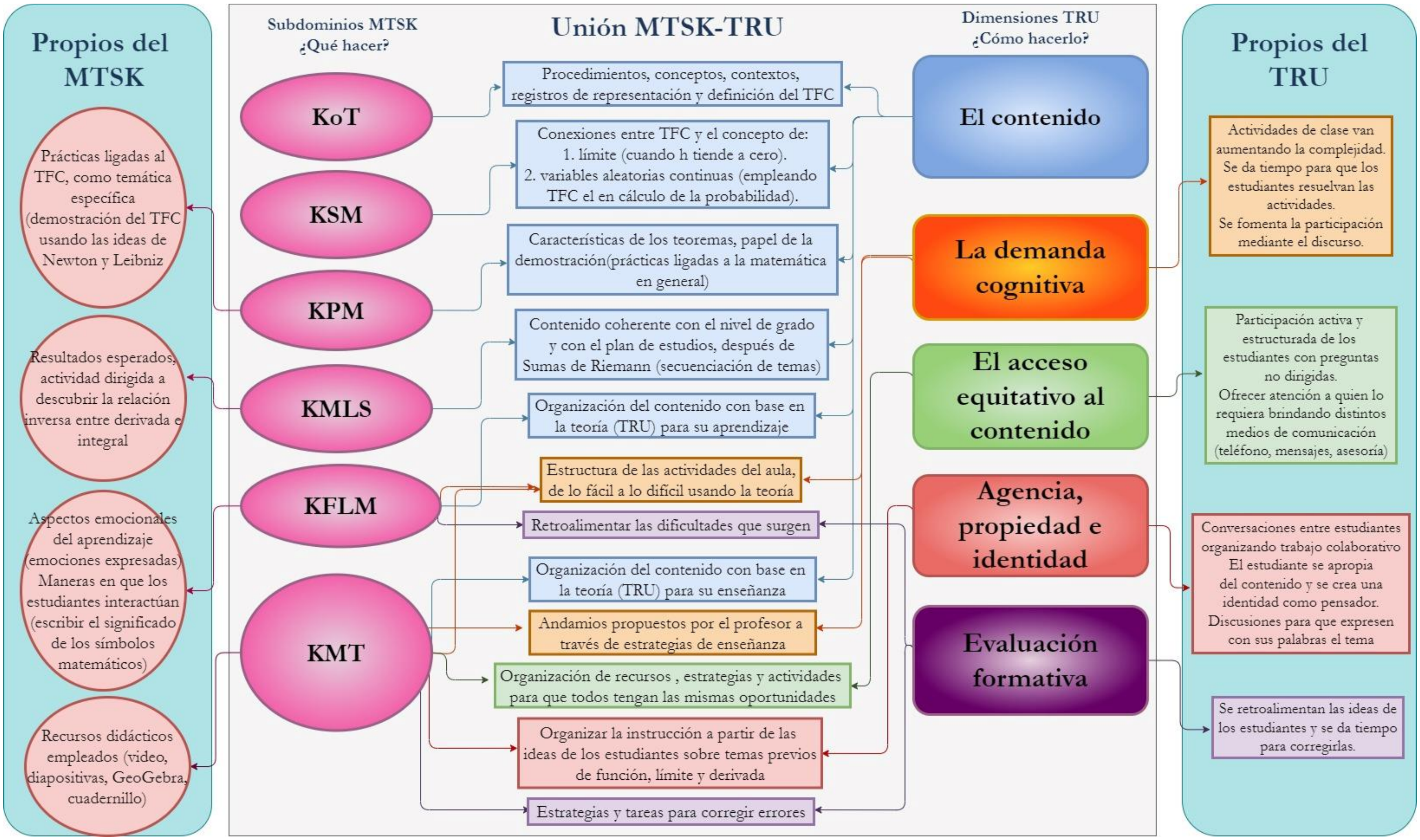
Mientras tanto, en los extremos laterales izquierdo y derecho, con fondo verde, se posicionan aquellos elementos de cada modelo de los que no ha sido claro, tanto en la teoría como en la práctica, la conjunción entre estos dos referentes, por lo que se mantienen separados e independientes.

Asimismo, se muestra en la figura que, para realizar la propuesta de enseñanza, el MTSK ha dado respuesta al ***¿qué*** conocimientos tiene la profesora para la enseñanza del TFC? Mientras que el TRU ha permitido responder al ***¿cómo*** ordenar y estructurar el conocimiento para la instrucción de dicho tópico matemático? Tratando de resaltar las potencialidades de ambos.

Los indicadores que se han propuesto respecto al MTSK, resultaron del conocimiento que tiene la profesora para desarrollar la enseñanza del TFC. Es decir, procuramos partir del conocimiento que posee la profesora para ordenarlo y llevarlo a la práctica, siendo el TRU el que otorga herramientas para llevar a cabo dicha organización. Por lo tanto, se concluye que **la conjunción de los marcos teóricos puede esclarecer los conocimientos de cualquier profesor y ayudarle a planear y ejecutar la enseñanza de cualquier tópico matemático**.

Figura 20

Relación y conjunción de los referentes teóricos MTSK y TRU



Fuente: elaboración propia

CAPÍTULO VII. CONCLUSIONES

En este capítulo se muestran las conclusiones a las que se ha llegado con el desarrollo de la investigación, extrayendo generalizaciones a partir de los resultados. Se retoman los objetivos específicos de la investigación, así como la forma y profundidad que estos han alcanzado para llegar al objetivo general.

VII.1. Respecto al primer objetivo específico

El primer objetivo específico de la investigación se refiere a *identificar y sistematizar indicadores del conocimiento especializado del profesor del TFC en bachillerato*; por lo tanto, se puede concluir que los indicadores que se muestran en la tabla 15, son los que cumplen con este objetivo; ya que representan indicadores detectados a priori y a posteriori de la implementación de la propuesta y se han conjuntado para llegar a un concentrado complementado.

Es importante señalar que este condensado surge, desde un inicio, al reconocer e identificar el conocimiento que se posee como investigadora y profesora. Por lo tanto, no pretende expresar el conocimiento que debe tener un profesor de bachillerato para impartir TFC, sino recuperar el conocimiento de la profesora y especializarlo, por medio de las categorías del MTSK, para luego transformarlo en una propuesta de enseñanza del TFC.

VII.2. Respecto al segundo objetivo específico

El segundo objetivo específico refiere el *identificar y sistematizar indicadores de elementos de una enseñanza para la comprensión robusta del TFC en bachillerato*. A diferencia de los indicadores de conocimiento, el concentrado de indicadores de enseñanza para la comprensión robusta se han retomado a partir de las rúbricas de evaluación del TRU, mismas que describen, de manera general, el cómo organizar la información para llevar a cabo la enseñanza, y se organizan en 4 momentos o situaciones: el inicio y debate del profesor, el trabajo individual de los estudiantes, el trabajo en grupos pequeños y presentaciones de los estudiantes.

Este concentrado se ha mantenido sin modificaciones, respetando las ideas de Schoenfeld et al. (2014), mismas que se concentran en la tabla 11, y con lo cual se da cumplimiento a este objetivo específico.

VII.3. Respecto al tercer objetivo específico y el objetivo general

El tercer objetivo específico refiere *elaborar actividades y estrategias didácticas que integren los indicadores,* para esto, al igual que con el diseño inicial de la propuesta de enseñanza, se integran los dos concentrados de indicadores, dando como resultado la organización de la enseñanza (por medio de los indicadores de las dimensiones del TRU), a partir del conocimiento que posee el profesor (a partir de los indicadores de las categorías del MTSK).

Con esta integración, se crean actividades y estrategias didácticas que, a su vez, se conjuntan para corregir y *rediseñar la propuesta de enseñanza del TFC en bachillerato, tomando como base el conocimiento especializado del profesor y elementos de una enseñanza para la comprensión robusta*, lo cual se dirige al cumplimiento del objetivo general de la investigación y se muestra en seguida en la tabla 16.

En esta parte, se enfatiza sobre todo en la integración de los indicadores de conocimiento y de enseñanza que no se pudieron en práctica durante la implementación, cambiando, corrigiendo o complementando las ideas iniciales, para que puedan reflejarse todos o la mayoría de ellos, en la propuesta.

Es necesario aclarar, sin embargo, que la propuesta aquí descrita no pretende ser una especie de receta o instrucción sobre cómo implementar una clase de TFC en bachillerato. Sino que otorga algunas ideas sobre cómo desarrollar la clase y sobre todo, cómo se intenta organizar el conocimiento de la profesora que se ha recuperado en el concentrado, con la intención de mostrar la potencialidad que ha tenido la conjunción de los referentes teóricos MTSK y TRU. Y que puede retomarse en la enseñanza de otros tópicos matemáticos.

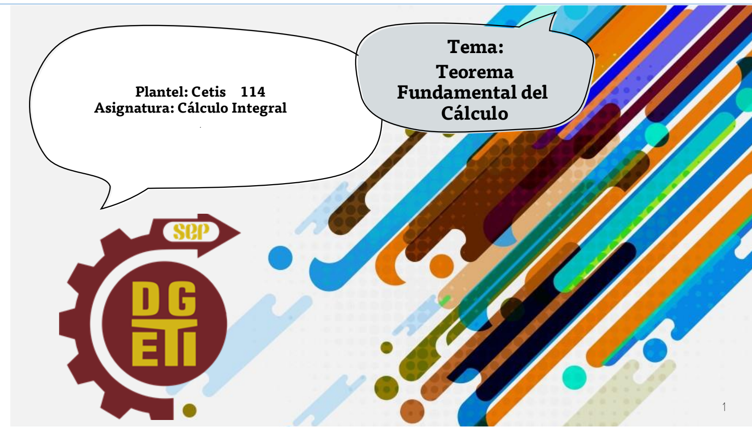
Cobra importancia resaltar que la integración de los indicadores en esta etapa de rediseño (cuarta columna de la Tabla 16) ya no sólo está basada en la revisión y análisis teórico, como fue el caso del primer diseño de la propuesta, sino que ahora también se considera la manera en que se han logrado conjuntar los referentes MTSK y TRU a partir de la práctica, tal como se ha detallado en el capítulo de resultados. Por lo tanto, no pretende hacerse una conjunción arbitraria de ambos modelos teóricos, sino retomar las fases de la investigación-acción que se han desarrollado (planificación, acción, observación y reflexión) para desarrollar el rediseño de la propuesta de enseñanza.

Asimismo se aprecia que en este rediseño, al igual que el la propuesta inicial, se encuentran implícitos aspectos epistemológicos del TFC como la aproximación, acumulación, variación y conexión derivada e integral.

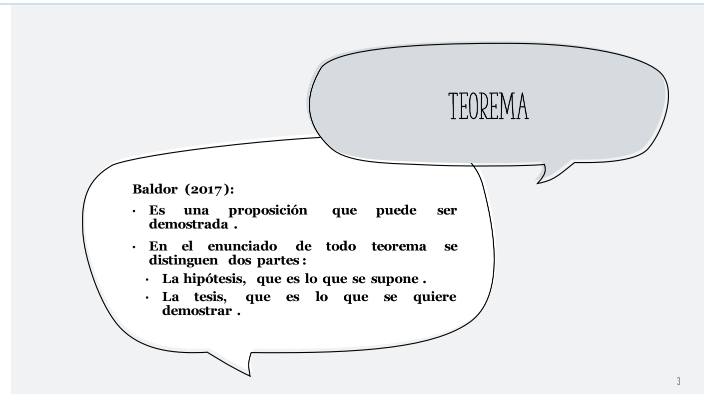
Tabla 16

Corrección y rediseño de la propuesta de enseñanza del TFC con base en la integración de indicadores del MTSK y del TRU

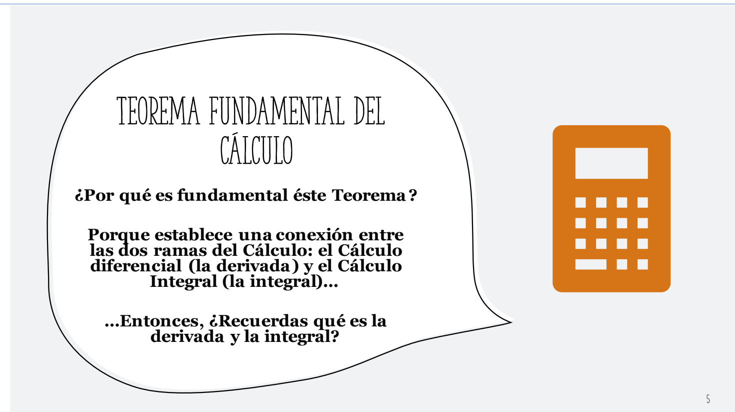
Indicadores MTSK	**Indicadores TRU**	**Descripción de la propuesta de enseñanza**	**Integración de los indicadores empleados**
Clase de inicio, exposición del profesor y debate Sesión 1, Tiempo: 50 minutos			
KPM-PMG1 KMLS-ST1 KMLS-ST2 KMT-RD2	**C1 DC1 AEC1**	Se inicia la clase presentando el tema Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), refiriendo que es el tema correspondiente al programa de la materia y que se encuentra ubicado en el plan de estudios después de Sumas de Riemann y Propiedades de notación sigma (SEP, s.f.). El profesor presenta alguna o algunas analogías relacionando el TFC con alguna situación del contexto y agrado de los estudiantes que les permita comprender la idea principal del tema, a la vez que lanza preguntas no dirigidas, como: ¿Para qué han utilizado las sumas de Riemann?, ¿Qué dificultades tienen ustedes para encontrar el área debajo de una curva?, ¿En qué situaciones de su vida, creen que pueden emplear el contenido que hemos estudiado previamente? **Figura 6** *Diapositiva de presentación*	Se les menciona a los estudiantes la secuenciación del tema TFC, de acuerdo con el programa de la materia (**KMLS-ST1 y KMLS-ST2**) por medio de diapositivas (**KMT-RD2**), mientras que se conecta el concepto con otros previos, realizando preguntas no dirigidas (**AEC1**) en las que se retomen las ideas que tienen los estudiantes sobre los contenidos previos (**DC1**) procurando que el alumno cree una visión coherente de las matemáticas (**C1**). El profesor, de acuerdo con el conocimiento del grupo y su contexto plantea situaciones cotidianas con la intención de facilitarles la comprensión0d el TFC (**KPM-PMG1**).

		 Fuente: elaboración propia	
KoT-D2 **KPM-PMG1** **KPM-PMG2** **KPM-PTM2** **KFLM-AE2** **KFLM-AE3** **KMT-RD3** **KMT-ETE1** **KFLM-MI1**	**C1** **AEC1** **API1**	Pregunta a los estudiantes qué entienden por Teorema y cuales teoremas conocen; después presenta el video del enlace https://edpuzzle.com/media/617610b2c0726741755b3678 relativo a que el estudiante se cree una noción del concepto de Teorema. Anima a los estudiantes a participar, aunque crean que sus ideas no son correctas y retoma las ideas de los estudiantes solicitando que los compañeros opinen sobre ellas, propiciando que se forme una estructura de participaciones donde todos tengan las mismas oportunidades. **Figura 7** *Diapositiva 2*	Se conduce a que el estudiante vaya creando una definición de lo que es un teorema (**KoT-D2**), tratando de que defina primero cada palabra: Teorema, Fundamental y Cálculo (**KMT-ETE1**), lo cual apoya a que se hagan conexiones significativas (**C1**), a la vez que se invita y se les brindan las mismas oportunidades para participar (**AEC1**) y se toman en cuenta las ideas de los estudiantes, construyendo, entre todos (alumnos y profesor, sobre ellas (**API1**). Se intenta que el estudiante tenga claro el concepto de teorema (**KoT7, C1)** diferenciándolo del de conjetura (**KPM-PMG2**),

		 Fuente: elaboración propia Al finalizar el video, solicita que, con base en el contenido, escriban en su cuaderno lo que entendieron por conjetura y por teorema y las diferencias que detectaron.	empleando el video como recurso (**KMT-RD3**), donde se presente la información de manera amena para ellos (**KFLM-AE3**) y se relacionen situaciones del contexto de los estudiantes con el TFC (**KFLM-AE2 y KPM-PMG1**). El estudiante explica sus ideas y lo que comprendió con el video (**API1**) y se revisa si los estudiantes emplean la palabra comprobación como sinónimo de demostración (**KFLM-MI1**), para aclarar dudas.
KPM-PMG2	**C1**	Presenta algunas características de los teoremas en matemáticas, como son: es una proposición formada por una hipótesis y una tesis y la importancia de demostrarlos. **Figura 8** *Diapositiva 3*	Se integran aspectos del contenido (**C1**), como son algunas características de los teoremas (**KPM-PMG2**).

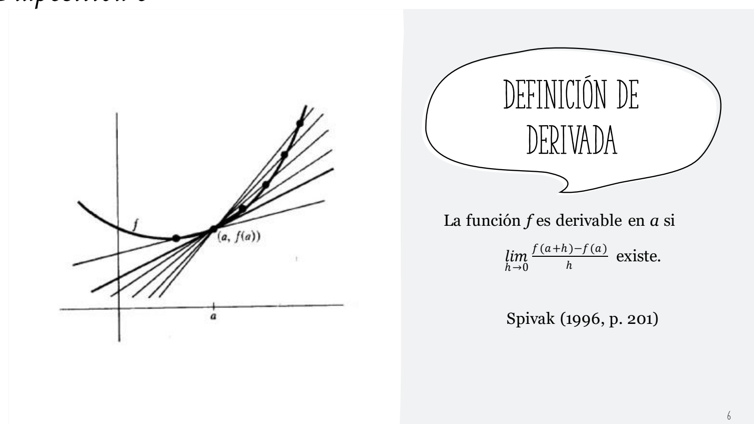
		 Fuente: elaboración propia	
KoT-FA1 **KoT-FA4** **KoT-FA5** **KPM-PTM3**	**C1**	Presenta a Leibniz y Newton como los primeros en demostrar el TFC. Se les pregunta a los estudiantes si han escuchado hablar de estos dos personajes, tratando de que lo relacionen con temas de Física. Se hace explícito que el TFC surgió ante una necesidad en el contexto de su época, es decir, como un resultado que emergió al resolver un problema matemático. Para Newton cuando el algoritmo inverso que resuelve el problema de las tangentes resolvió el problema de las áreas. Para Leibniz inició con la idea de que la suma y la diferencia son operaciones inversas. El profesor recalca el hecho de que el TFC, al igual que otros teoremas, puede ser demostrado mediante procedimientos distintos. **Figura 9** *Diapositiva 4*	Se mencionan aspectos históricos del TFC, resaltando a Newton y Leibniz como los pioneros, al ser los primeros en demostrarlo (**KoT-FA1 y KoT-FA5**) intentando que el estudiante visualice el contexto en el que surgió (**C1**). Y haciendo notar que cada uno, demostró el TFC con su propio procedimiento, recalcando la diversidad de estos en la demostración (**KPM-PTM3**). Se indaga en los conocimientos que tiene el estudiante sobre estos personajes, especialmente Newton con temas de Física (**KoT-FA4)**.

		 Fuente: elaboración propia	
KoT-D3 **KoT-D4** **KSM-CS1** **KSM-CS2** **KFLM-FD7** **KMLS-RAE1** **KMT-ETE1**	**C1** **DC1** **API1** **EF1**	Menciona a los estudiantes la parte fundamental del TFC y se les hace la pregunta: ¿Qué entiendes por derivada y por integral? Después de que los estudiantes expresan sus ideas se les presenta la definición formal de derivada e integral, haciendo referencia al tema previo de límite. En la derivada cuando h tiende a cero y en la integral cuando n tiende a infinito. **Figura 10** *Diapositiva 5*	Se les pregunta a los estudiantes qué entienden por fundamental y por qué el TFC tiene esta connotación (**KMT-ETE1**). Luego se realiza un diálogo sobre sus ideas intuitivas de los conceptos de derivada e integral y se retoman estos temas, en caso de que muestren poca comprensión (**KFLM-FD7 y DC1**) después se retoman sus ideas para presentarles la definición formal (**C1, API1 Y EF1, KoT-D3 y KoT-D4**). Se menciona el tema previo de “límite” y cómo hace conexión con los conceptos de derivada (a través de una tendencia a cero) e integral (a través de una suma infinita) (**KSM-CS1**); también se muestra una conexión con los



Fuente: elaboración propia

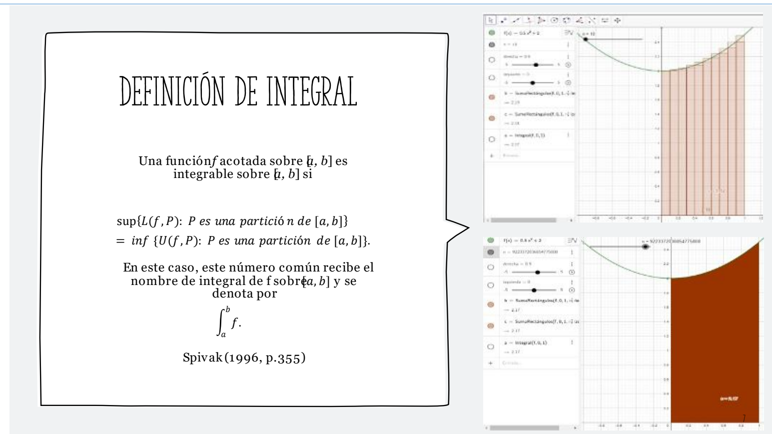
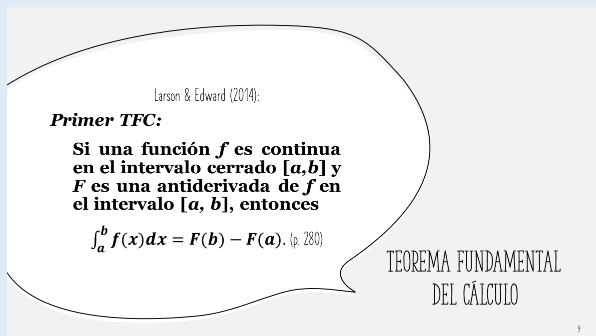
Figura 11
Diapositiva 6

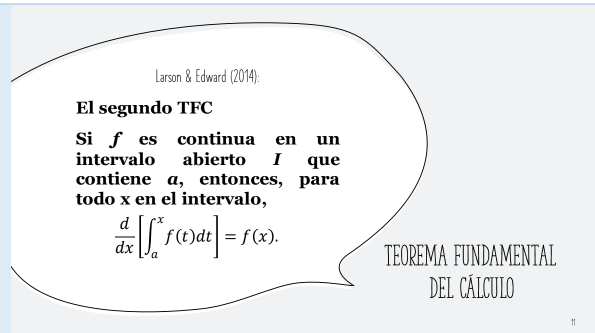


Fuente: elaboración propia

Figura 12
Diapositiva 7

conceptos de recta secante y recta tangente (**KSM-CS2**), por medio del incremento en h cuando tiende a cero; la intención es que el estudiante cree conexiones significativas entre los conceptos (**C1**). También se le menciona explícitamente la relación inversa entre derivada e integral como el aspecto fundamental del TFC (**KMLS-RAE1**).

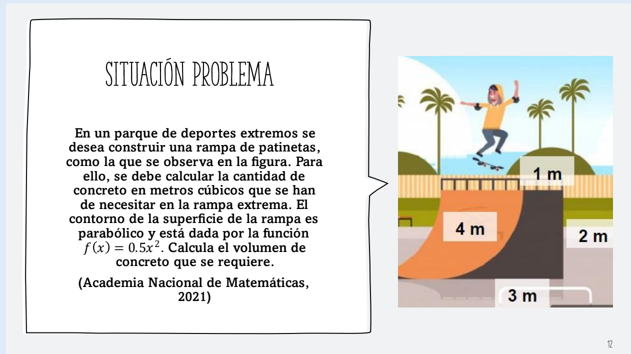
		 Fuente: elaboración propia	
KoT-D1 **KoT-RP1** **KoT-RP3** **KSM-CC1** **KSM-CA1** **KFLM-FD5**	**C1**	El profesor presenta la proposición del TFC: **Figura 13** *Diapositiva 9*  Fuente: elaboración propia **Figura 15** *Diapositiva 11*	Presenta al estudiante la proposición formal del TFC (**KoT-D1**) y le muestra la representación verbal y gráfica (**KoT-RP1 y KoT-RP3**), con el fin de crear conexiones significativas intraconceptuales (**C1**). Asimismo, menciona la utilidad que tiene el TFC con otros temas matemáticos creando conexiones entre ellos (**KSM-CC1 y KSM-CA1**). Aunque no se detallan dichas conexiones, se espera que los estudiantes tengan la idea de que el tema no está aislado de otros tópicos. Se hace la diferenciación entre objeto matemático y registro de representación, para evitar que el

		 Fuente: elaboración propia Se hace el comentario de que los registros de representación son distintas maneras de percibir el mismo objeto, como si este se viera desde diferentes perspectivas. Se le menciona a los estudiantes algunas de las conexiones que tiene el TFC con otros conceptos matemáticos: 1. Para obtener la probabilidad de variables aleatorias continuas en un intervalo determinado. Como auxiliar para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales.	estudiante pueda llegar a pensar que son sinónimos (**KFLM-FD5**).
		Clase de exposición del profesor y debate **Sesión 2, Tiempo: 50 minutos**	
KoT-FA2 **KPM-PMG3** **KFLM-FD1** **KMLS-ST1** **KMT-ETE2**	**C1** **AEC1** **DC1** **EF1**	Muestra la primera parte por medio de un ejemplo aplicado que se había desarrollado anteriormente, donde se aprecia también la demostración del TFCpara la obtención de áreas de regiones planas. Mientras que la segunda parte se demuestra empleando un applet de GeoGebra. Presenta una situación problema que puede ser resuelta con el TFC y que los estudiantes habían resuelto previamente de manera aproximada, mediante Sumas de Riemann. Ambos resultados deben acercarse, pero la intención es dirigir una discusión dónde los alumnos logren concluir la conveniencia del TFC en el cálculo de áreas bajo ciertas	Se retoma un ejercicio que el estudiante había resuelto de manera aproximada cuando abordó el tema de Sumas de Riemann, el cual es anterior en el programa de estudios (**KMT-ETE2 y KMLS-ST1**), para mostrar el TFC mediante un ejemplo (**KPM-PMG3**), al mismo tiempo que se le muestra una aplicación del TFC para el cálculo

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
funciones y cumpliendo con la condición de que la función sea continua.

Figura 16

Diapositiva 12



Fuente: elaboración propia
</td>
<td>
de áreas de regiones planas (**KoT-FA2**). De este modo, puede comparar resultados y corregirse a sí mismo, tanto en los procedimientos empleados anteriormente como en los actuales (**EF1**).

Luego se solicita que hagan una diferenciación entre Sumas de Riemann y TFC para el cálculo de áreas (**DC1**) y se les hace explícita que la hipótesis del teorema determina que la función debe ser continua en el intervalo (**KFLM-FD1**).
</td>
</tr>
<tr>
<td>
KoT-P1
KoT-PF1
KoT-RP2
KPM-PMG4
KPM-PTM1
KMT-RD1
</td>
<td>
C1
AEC1
DC1
EF1
</td>
<td>
Luego, el docente procede a demostrar la segunda parte del TFC, tomando el procedimiento de Larson y Edward (2014):

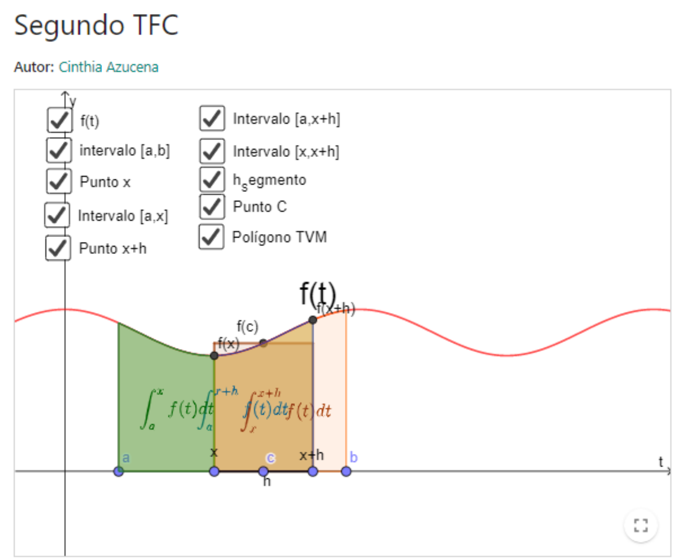
Demostración de la segunda parte del TFC. comience definiendo F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

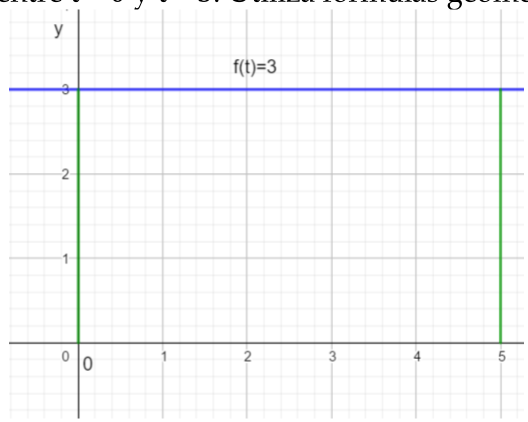
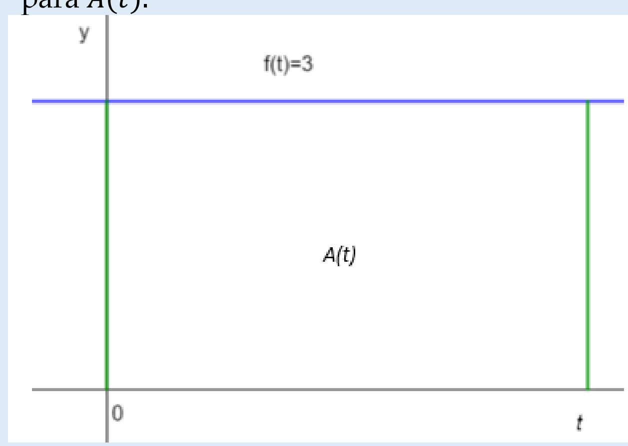
Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, puede escribir
</td>
<td>
Luego, mediante un applet de GeoGebra (**KMT-RD1**) se realiza un procedimiento (**KoT-P1**) para la demostración del TFC (**KPM-PMG4** y **KPM-PTM1**), empleando al Teorema del valor medio (**KoT-PF1**); en el applet se muestra la representación gráfica del TFC (**KoT-RP2**).

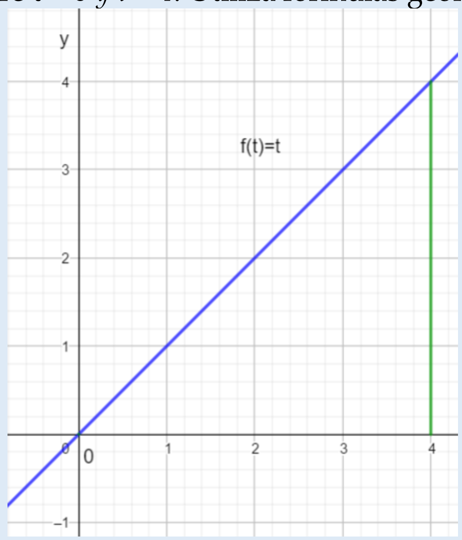
Lo anterior lleva al estudiante a pensar en las propiedades del concepto (**C1**) y, mediante el applet, se favorece que pueda manipular y tenga acceso los aspectos dinámicos del TFC (**AEC1**), llevando paso a paso el
</td>
</tr>
</table>

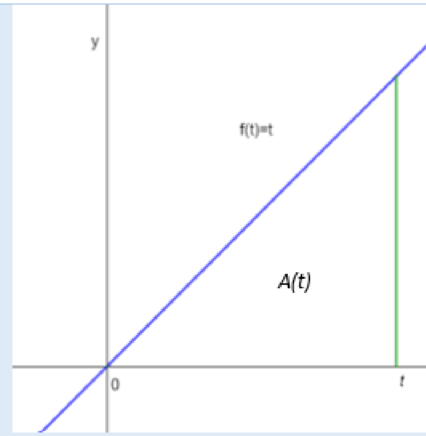
		$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$ $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)\, dt]$$ $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)\, dt]$$ $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt].$$ Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x > 0$), sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\Delta x$. además, como $x \leq c \leq x + \Delta x$ se deduce que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. Por tanto, obtiene $$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [\frac{1}{\Delta x} f(c)\Delta x] = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$ Se puede plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$. (p. 284). Durante la demostración se apoya de un applet diseñado para tal fin, con la intención de que el estudiante comprenda mejor haciendo uso de distintas representaciones. Enlace del applet: https://www.geogebra.org/m/em3zrwwb	procedimiento para la demostración (**DC1**).

			
KoT-FA3 **KFLM-FD6** **KMT-RD1**	**C1** **DC1**	Después se le pide resolver el siguiente ejercicio empleando la primera parte del TFC, se espera que lo realicen de la siguiente manera: **Problema.** Un objeto se mueve con movimiento rectilíneo de modo tal que, su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 + 2t\ m/s$. Encuentra la distancia recorrida del objeto durante los tres primeros segundos. Solución. $\int_0^3 (t^2 + 2t)dt = \int_0^3 (t^2)dt + \int_0^3 (2t)\ dt = [\frac{t^3}{3} + 2\left(\frac{t^2}{2}\right)]_0^3$ A continuación, realizamos $s(b) - s(a)$ sustituyendo primero el límite superior y luego el inferior, $s(3) - s(0) = \frac{3^3}{3} + 2\left(\frac{3^2}{2}\right) - \left[\frac{0^3}{3} + 2\left(\frac{0^2}{2}\right)\right] = 9 + 9 - 0 = 18$ Distancia recorrida: 18 m. (p. 57)	Se solicita a los estudiantes resolver un ejercicio donde usa el TFC para calcular la distancia recorrida por un objeto en un determinado intervalo de tiempo, cuando se conoce su velocidad (**KoT-FA3**), haciendo conexiones con el contexto del estudiante (**C1**). Se espera que el estudiante logre reconocer que puede resolverlo por medio del TFC debido a las características del problema (**DC1**) y al final se comprueba de manera gráfica con GeoGebra (**KMT-RD1**).

		Después se procede a mostrar de forma gráfica la función apoyados del software GeoGebra y se le solicita al estudiante releer el problema para que recuerde qué se le solicitaba al inicio.	Se pide al estudiante colocar la respuesta del problema con base en lo que se le solicita, para que haga una interpretación de los resultados (**KFLM-FD6**).
	AEC1 **API1** **EF1**	Se solicita realizar un debate en el que todos tengan la oportunidad de contribuir sus ideas sobre los aprendizajes logrados y el maestro apoya para que se vayan considerando las opiniones de los compañeros y resolviendo los malentendidos y confusiones de los estudiantes.	Se les da la oportunidad de participar (**AEC1**), atribuyendo propiedad a sus ideas (**API1**) y se resuelven los malentendidos que surgen en el momento (**EF1**).
Trabajo individual de los estudiantes **Actividad extraclase (Ver Anexos 3 y 4)**			
KoT-FA1 **KoT-FA2** **KoT-FA5** **KFLM-FD2** **KFLM-FD3** **KFLM-MI2** **KFLM-MI3** **KFLM-AE1** **KFLM-AE4** **KMLS-NEDC1** **KMT-RD1** **KMT-ETE3** **KMT-ETE4** **KMT-ETE5**	**C4** **DC4** **AEC4** **API4** **EF4**	Con la intención de que el estudiante descubra el TFC, se le solicita resolver las siguientes actividades, la cual es una adaptación de una actividad diseñada por Monroy y Rivero (2020), con la que se pretende que los estudiantes redescubrieran el TFC. Para resolver las dudas de los alumnos que puedan surgir al resolver la actividad, se les invita a compartirlas en el grupo de whatsapp, o bien, de manera individual con la profesora, ya sea por whatsapp o en el cubículo escolar. Esto, para seguir con la dinámica que se ha estado empleando el semestre debido a que los estudiantes no acuden todos los días a la escuela y los grupos se encuentran divididos. **Nombre**__________________________ **Grupo** ____ **Resuelve la actividad dejando ver tus procedimientos en cada respuesta.**	En la actividad se integran algunos indicadores del MTSK y del TRU, ya que se les ofrece ayuda a los estudiantes para que puedan despejar las dudas que surjan, retroalimentándose mutuamente y con ayuda del profesor. (**AEC4, API4, EF4**), además, las actividades fueron diseñadas de manera que el estudiante comience realizando tareas fáciles, como la obtención de área bajo la curva de una función constante o lineal en un intervalo determinado (**KMLS-**

		Función $f(t) = 3$ f) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre t= 0 y t= 5. Utiliza fórmulas geométricas.  	**NEDC1, KoT-FA2, KMT-ETE5**), y después se va subiendo el nivel de complejidad hasta que el estudiante logre hacer una relación inversa cuando integra y deriva una función, regresando a la original (**DC4, KMT-ETE3, C4**). Se pretende que, aún estando en clases, el profesor lea las instrucciones y pregunte a los estudiantes si comprenden lo que se les solicita o si es necesario ofrecer retroalimentación en
		Respuesta: ________________________________ g) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre t= 0 y t= t. Plantea una expresión para $A(t)$.  	cuanto a la interpretación del lenguaje matemático, (**KFLM-FD2),** los conjuntos de números (**KFLM-FD3**), o algún otro referente a la instrucción. Si es así, se comenta que pueden colocar el significado de los símbolos matemáticos en su actividad, con el objetivo de que ellos puedan interpretar la instrucción (**KFLM-MI2**), para evitar emociones desagradables por no comprender (**KFLM-AE4**). El solicitar a los estudiantes que obtengan el área inicial de

		Respuesta: ______________________________ h) Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior: ________________________ i) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)$ y $f(t)$. **Función $f(t) = t$** j) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre t= 0 y t= 4. Utiliza fórmulas geométricas.  Respuesta: ______________________________ k) Si t $\in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre t $= 0$ y $t = t$. Plantea una expresión para $A(t)$.	manera geométrica tiene la intención de motivar a los estudiantes, ya que se cree que ellos tienen predisposición de hacerlo de esa forma, debido a que han tenido mayor acercamiento a los algoritmos geométricos de área de figuras planas (**KFLM-AE1**) y después se prevé utilizar la función que obtengan en A(x) como integral de f(t). Para ambas actividades se solicita al estudiante apoyarse de los applets de Geogebra (**KMT-RD1**) que han sido diseñadas con base en algunas demostraciones (**KoT-FA1 y KoT-FA5**) del TFC que empleó Newton y Leibniz. La actividad le brinda las instrucciones al estudiante de cómo utilizar el applet con el objetivo de que este descubra las nociones matemáticas del TFC de manera gradual e intuitiva. Esta actividad se solicita, primero, de forma individual, para evitar, en la medida de lo posible, que el estudiante tenga una tendencia a realizar lo que realiza el profesor, sino que



Respuesta: ________________________________

l) Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior:

m) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)$ y $f(x)$.

n) Tomando en cuenta tu conclusión anterior. ¿Qué relación observas entre $A(t)$ y $f(t)$?

Propón una función:

Dirígete al enlace https://www.geogebra.org/geometry/pcbx2xdh para realizar lo que se indica en los incisos y responde a las preguntas:

o) En la casilla f(x), escribe una función cualquiera y en la casilla F(x) escribe la antiderivada de la función anterior.

p) Enciende las casillas f(t) y F(t).

q) Mueve el punto "t" en el eje x hacia algún lugar donde observes que ambas funciones f(t) y F(t) son continuas.

r) Enciende la casilla "Recta tangente a F(t)". Luego enciende las casillas Δy e Δx. Tomando en cuenta las

pueda proponer y desarrollar su pensamiento matemático (**KFLM-MI3**).

El objetivo final de la actividad es que los estudiantes puedan descubrir la relación inversa entre derivada e integral (**KMT-ETE4**).

coordenadas de los puntos correspondientes, obtén los valores de Δy e Δx.
$\Delta y =$____________________
$\Delta x =$____________________

s) Con los valores obtenidos en Δy e Δx. Determina la pendiente de la recta tangente a F(t).
m=___________

t) Tomando en cuenta las coordenadas de los puntos “t” y “f(t)”, determina la distancia entre estos:
Distancia $t - f(t) =$ ________________

u) ¿Qué relación encuentras entre los valores que obtuviste en los incisos n) y o)?

v) ¿Qué puedes concluir, de acuerdo con la relación encontrada? Escribe tu respuesta en términos de f(x) y F(x)?

Actividad 2.
Nombre________________________ **Grupo** __

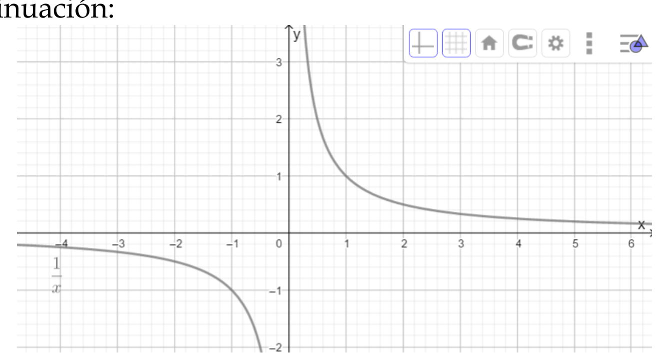
Dirígete al enlace https://www.geogebra.org/geometry/wn62wmxg para realizar lo que se indica en los incisos y responde a las preguntas:

a) En la casilla f(x), escribe una función que sea continua y en la casilla F(x) escribe la antiderivada de la función anterior.
b) Mueve los puntos a y b, ubicados en el eje x, de manera que f(x) y F(x) sean continuas en el intervalo entre a y b.
c) ¿Cuál es el área bajo la curva de la función f, entre a y b?
Área=_____________
d) Enciende las casillas F(b) y F(a) y escribe sus coordenadas:
F(b)=___________ F(a)=____________
e) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de F(b) y F(a), teniendo en cuenta los valores de a y b?

		f) ¿Qué coordenadas tiene el punto G? g) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de F(a) y las del punto G? h) ¿Cuál es la distancia entre F(b) y el punto G? i) Observa el rectángulo que se forma del lado derecho, con base en las coordenadas de sus vértices, escribe el valor de su base y altura. Base=______________ altura=_______________ j) ¿Qué relación observas entre la distancia encontrada en el inciso h) y los lados del rectángulo? k) Calcula el área del rectángulo: Área=_______________ l) Enciende la casilla "Área del rectángulo (cuadratura)" y comprueba tu resultado. Luego observa el valor de las áreas sombreadas con azul y rojo y describe que relación observas. De acuerdo con lo anterior, ¿Qué representa el rectángulo respecto de f(x) en el intervalo [a,b]?	
		Trabajo en grupos pequeños **Sesión 3, Tiempo: 50 minutos**	
KoT-FA1 **KoT-FA5** **KMLS-NEDC1** **KFLM-AE1** **KMT-RD1** **KMT-ETE3**	**API2**	En esta sesión se pretende retomar la actividad extraclase que desarrollaron los estudiantes de manera individual, pero ahora reunidos en equipos, con la intención de que puedan comparar sus resultados, así como conversar y discutir entre ellos sobre los procedimientos que siguieron y los resultados obtenidos.	Los indicadores del MTSK se integran cómo se describieron en el desglose de la actividad en el apartado de "trabajo individual de los estudiantes". En cuanto a los del TRU, Se busca que los estudiantes expresen y defiendan sus ideas y el docente anima para que los demás las retomen (**API2**).
	AEC2 **API2**	El docente comenzará dando una explicación sobre cómo es importante acudir en cuerpo completo a la escuela, ya que se aprende empleando todo el cuerpo, con esto se pretende que	El docente buscará moverse entre los equipos para animar a que todos hagan aportes en cuanto a

		los estudiantes sean conscientes de la importancia que implica el estar atentos y cómodos en el aula de clases y cómo todos tienen las habilidades para aprender, aunque de formas distintas. Para esto se tomarán las ideas de Hernán Aldana, en su video de Youtube "Enseñar y aprender de los pies a la cabeza" el cual se encuentra en el siguiente enlace (https://www.youtube.com/watch?v=hCnkIMK4Fvc) (TEDx Talks, 2019) y se espera que con esto los alumnos modifiquen, aunque sea durante la sesión, sus creencias sobre lo que implica resolver las actividades y se arriesguen a discutir entre ellos para construir conocimientos.	ideas sobre la resolución de las actividades, además se intenta hacer consciente que todos tienen habilidades para aprender el contenido de TFC (**AEC2**) y se apoyarán las discusiones entre ellos para la construcción de conocimientos (**API2**).
	DC2 **C2** **EF2**	El docente estará atento a las dudas que tuvieron los estudiantes de manera individual pero se les invitará a que primero las discutan en equipo con la intención de que puedan colaborar y retroalimentarse. El docente intervendrá cuando no logren llegar a un resultado o sea evidente que están teniendo dificultades.	Se espera que los estudiantes puedan desarrollar algunas de las tareas de la actividad sin problema, ya que existe coherencia entre el nivel de grado (**C1**), aunque también se espera que haya otras que les resulten difíciles debido al poco acercamiento que han tenido (**DC2**). Sin embargo, la intención es proporcionarles tiempo para que piensen y logren tener una lucha productiva y exista retroalimentación entre pares y por parte del profesor (**EF2**).
	DC2 **EF2**	Se les dirá a los estudiantes que pueden seguir trabajando en la actividad si es que consideran que aún no está completa, para que tengan tiempo de construir su pensamiento y puedan corregir con base en la retroalimentación de la clase.	Se le da tiempo al estudiante para pensar en el contenido matemático del TFC (**DC2**) y tienen la oportunidad de corregir con base en las retroalimentaciones recibidas por

			parte de los compañeros y del profesor (**EF2**).
Presentación de los estudiantes **Actividad extraclase**			
	DC3 **EF3**	Se presenta a los estudiantes los siguientes ejercicios para su resolución en equipo, usando dos representaciones. Los estudiantes deberán resolverlos y realizar un video dónde expliquen cómo lo resolvieron y las dificultades que se les presentaron. Se les da la apertura para que acudan a resolver sus dudas, ya sea por whatsapp o de manera presencial en la escuela, para brindarles andamiaje.	Se brinda ayuda y andamiaje a los equipos y presentadores para que participen en prácticas matemáticas (**DC3**) y se abordan malentendidos que surjan (**EF3**).
KSM-CT1	**C3** **DC3**	**Problema 1** (Rosyidi & Kohar, 2018): Dado que f(x) es una función continua que satisface la ecuación $\int_2^5 f(x)\,dx = -6$. a) Encuentra f(x) b) ¿f(x) tiene una única solución? (p. 3) **Solución esperada.** $$\int_2^5 (ax+b)dx = -6$$ $$\left[\frac{1}{2}ax^2 + bx\right]_2^5 = -6$$	Se piensa que en este problema surgirán algunas dudas en los estudiantes, por lo cual se les brindará andamiaje (**DC3**) para que puedan pensar en el procedimiento que deben emplear cuando, a partir de una ecuación dónde se conoce el valor del área bajo la curva, se calculen las funciones que la satisfacen (**KSM-CT1**), esperando crear

		$$\left[\frac{25}{2}a + 5b\right] - [2a + 2b] = -6$$ $$\frac{21}{2}a + 3b = -6$$ Al final, se despeja una de las variables y se encuentran valores de a y b que satisfagan la función; con lo cual también se determina que f(x) no tiene una solución única. La solución mostrada es empleando una función lineal, pero puede también aplicarse con funciones cuadráticas. Uno de los posibles resultados para f(x), es cuando a=2 y b=-9, quedando f(x)=2x-9, ya que $$\frac{21}{2}(2) + 3(-9) = -6$$ $$21 - 27 = -6$$ (p. 5)	conexiones significativas entre el procedimiento y el concepto (**C1**).
KFLM-FD1 **KFLM-MI4**	**C3** **DC3**	**Problema 2.** Considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica se representa a continuación:  Determine el área en el intervalo [-1, 2] **Solución esperada.** Se espera que el estudiante logre darse cuenta de la discontinuidad que existe en la función en el intervalo solicitado. Aunque también se espera que procedan de manera mecánica y realicen lo siguiente:	Se espera que el estudiante logre visualizar la discontinuidad de la función en el intervalo solicitado (**DC3, C3**) y lo exprese en su presentación (**KFLM-FD1**). Aunque también se corre el riesgo de que el estudiante actúe mecánicamente (**KFLM-MI4**) y simplemente ejecute el algoritmo ignorando la discontinuidad.

		$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\, dx = [ln(\lvert x \rvert)]_{-1}^{2} = 0.693147 \ldots - 0 = 0.693147 \ldots$	
	AEC3 **API3**	Los videos se comparten en Youtube y se pide realizar una coevaluación, animando a todos a ver los de sus compañeros con el fin de reflexionar sobre cómo los resolvieron y que logren detectar lo que ellos no habían considerado.	Se espera que los estudiantes expresen sus ideas respecto a los otros presentadores (**API3**), convirtiendo a las presentaciones en una actividad de toda la clase (**AEC3**).

Algunos indicadores no aparecen de manera explícita, pero se encuentran inmersos en la propuesta. por ejemplo, el **KFLM-TAM1** y **KMT-TEM1**, ya que se está empleando el TRU como teoría de aprendizaje y de enseñanza con base en la conjunción de sus cinco dimensiones. También el KFLM-FD4, ya que las sesiones se están proponiendo de 50 minutos, suponiendo que no haya modificaciones en cuanto a la pandemia, como fue el caso de la implementación de este trabajo.

CAPÍTULO VIII. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se relatan algunas consideraciones que se consideran relevantes respecto al desarrollo de este trabajo, enfatizando en los principales aportes, las limitaciones y recomendaciones y una reflexión final de las contribuciones que me deja como profesora y como persona.

VIII.1. Principales aportes de la investigación

En esta sección se dan a conocer algunos de los aportes generales que se han identificado a partir del trabajo. Uno de los principales es el hecho de atreverse a explorar en el empleo y conjunción de dos referentes teóricos recientes para el diseño de una propuesta de enseñanza: el MTSK y el TRU, mismos que han mostrado tener elementos, tanto independientes como entrelazados, y que juntos potencializan la enseñanza del TFC, tal como se detalló en el capítulo de conclusiones y en la Figura 22.

A partir de la teoría y la práctica han podido identificarse los elementos que se entrelazan y cuales se mantienen como individuales en cada marco teórico, tratando de detallar el potencial que puede llegar a tener la unión de ambos en el diseño de la instrucción, puesto que en las triangulaciones realizadas durante el análisis, se han quedado pocos elementos sin clasificar, ya sea en las categorías del MTSK o en las dimensiones del TRU.

VIII.1.1. Hacia a la metodología

Para el desarrollo de la investigación se partió de una serie de pasos, tal como se mencionó en la Figura 4, en el capítulo de Metodología. Se dio inicio con los dos concentrados de indicadores, el primero respecto a las categorías del MTSK y el segundo relacionado a las dimensiones del TRU. Después se propusieron actividades y estrategias para conformar la propuesta de enseñanza, haciendo una conjunción de todos los indicadores (MTSK y TRU), basándose en la revisión y análisis de los componentes teóricos de ambos modelos.

Posteriormente, se ejecutó la propuesta por parte de la profesora-investigadora con alumnos de bachillerato tecnológico que se encontraban cursando la materia de Cálculo Integral para luego, analizar y comparar lo planeado al inicio con la ejecución, detectando nuevos indicadores y, sobre todo aquellos que no se llevaron a la práctica, con el fin de proponer nuevas estrategias y realizar el rediseño de la propuesta de enseñanza.

Consideramos que el proceso seguido ha sido útil para llegar al objetivo, ya que se han podido complementar los aspectos específicos de cada referente teórico y esto ha permitido potenciar la propuesta de enseñanza recuperando los conocimientos de la profesora (el qué, a través de las categorías del MTSK) y organizándolos para la enseñanza (el cómo, a partir de las dimensiones del TRU).

Asimismo, consideramos que esta metodología puede ser útil para el profesor de bachillerato cuando planifica la enseñanza. La propuesta de enseñanza pretende mostrar que, a partir de los conocimientos que tiene cada profesor respecto a un tópico matemático, se puede planificar, ejecutar y analizar o reflexionar la enseñanza del TFC o cualquier otro tema. Por lo tanto, lo primordial es que con el MTSK se recuperan el conocimiento especializado del profesor, mientras que con el TRU, se organiza dicho conocimiento para llevarlo a la práctica.

Respecto al método de investigación-acción, su empleo ha favorecido ahorrar tiempo, ya que se han mantenido en mente los objetivos que se persiguen y la parte teórica que se fundamentó con anterioridad. Además, siguiendo el ciclo de la investigación acción, se ha pasado por las etapas de **planificación** durante la elaboración de los concentrados de indicadores y el primer diseño de la propuesta, luego se pasó a la fase de **acción**, ejecutando en un escenario real la propuesta de enseñanza; durante la implementación se llevó a cabo también la etapa de **observación**, recogiendo datos mediante grabaciones, cuestionario y un diario de investigación; por último, se llevó a cabo la fase de **reflexión**, mediante el análisis de datos y obtención de resultados. Estas etapas, permitieron presentar el diseño corregido de la propuesta de enseñanza, con el cual se estaría iniciando nuevamente el ciclo.

VIII.1.2. Respecto al Desarrollo Profesional

Derivado de lo anterior, también se realizan aportes al Desarrollo Profesional del docente de matemáticas, ya que hace notar que pueden crearse otras formas para planificar y llevar a cabo la enseñanza, gracias al uso de teorías matemáticas o bien, a la conjunción de dos o más de ellas.

Por lo tanto, implícitamente se invita a los profesores a adentrarse en las teorías matemáticas que se han utilizado como referentes en esta investigación y en otras que les puedan ser de utilidad para la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, que les ayuden a estar al tanto de sus conocimientos y a organizarlos para llevarlos a la práctica. Esta acción puede detonar que poco a poco se desarrolle una visión compartida de las matemáticas.

Además, el empleo del MTSK permite al profesor que refuerce su conocimiento del contenido matemático y su conocimiento didáctico del contenido. Mediante el empleo de las categorías de los subdominios como base para realizar un concentrado de indicadores, el profesor da un paso hacia la especialización de su propio conocimiento, mismo que se robustece al organizarlo empleando las dimensiones del TRU.

Por otro lado, se hace notar la importancia de que el profesor se convierta en un científico investigador en el aula de clases, que esté atento a lo que sucede y que se fomente el análisis de clases, ya sea de manera individual o colectiva entre los docentes de matemáticas, con el fin de rediseñar continuamente la enseñanza de los temas que imparte, con base también, en el conocimiento de los estudiantes y su contexto.

De esta manera se podrá avivar la identidad del docente de matemáticas, al otorgarle herramientas para desarrollar su profesión y brindarle habilidades que fomenten y mejoren continuamente su enseñanza.

VII.4. Respecto a la formación de profesores

En lo que respecta a la formación de profesores, se aprecia la importancia de que el profesor de matemáticas de los distintos subsistemas de media superior del sistema educativo mexicano, tengan acceso a una formación inicial y continua como docente profesional y que dicha formación contemple la identificación de su conocimiento y la especialización del mismo, así como el uso de herramientas para organizar sus ideas y realizar las adecuaciones que considere pertinentes durante la instrucción.

La investigación nos hace ver la necesidad de incorporar teorías de enseñanza y aprendizaje durante la formación de profesores, pues de esa manera se podrán entrelazar y conjuntar creando nuevas alternativas de planeación, ejecución y análisis de clase, como se ha hecho en el presente trabajo.

Asimismo, se considera pertinente que los docentes se formen desarrollando hábitos que les permitan reflexionar continuamente sus propias clases, con la intención de analizar aspectos que puedan mejorar, para optimizar las concepciones que se tienen sobre las matemáticas y empoderarlo hacia la transmisión del conocimiento a sus estudiantes.

Por último, la propuesta de enseñanza del TFC se ha diseñado y corregido siguiendo una serie de pasos que comienzan con la identificación del conocimiento que posee la profesora respecto al tema matemático. Es ese proceso, más que la propuesta, el aporte que hacemos notar, ya que partimos de lo que sabe el profesor respecto a un tópico matemático específico, para posteriormente organizarlo y e implementarlo en el aula.

VII.5. Respecto a la Matemática Educativa

Considerando los resultados y conclusiones de la investigación, así como las aportaciones descritas en este apartado, podemos deducir que el principal aporte que se hace hacia la Matemática Educativa es el hecho de mostrar la relevancia de fomentar la formación y actualización del docente de matemáticas del nivel medio superior en los distintos subsistemas mexicanos, con el propósito de que tengan más oportunidades de mejorar la enseñanza y aprendizaje de los temas matemáticos como TFC, a partir de la especialización del conocimiento que posee, tanto del contenido matemático como el conocimiento didáctico del contenido.

También se enfatiza en la importancia de contemplar el conocimiento del profesor y elementos de enseñanza para la comprensión robusta en la instrucción de temas matemáticos. Por lo tanto, se requiere de investigaciones relacionadas que profundicen estos aspectos.

VIII.2. Limitaciones y recomendaciones

La presente investigación surgió a partir de la motivación de buscar alternativas a la instrucción del TFC en bachillerato a partir de la indagación del conocimiento especializado del profesor y de elementos de una enseñanza para la comprensión robusta. Consideramos que es una acción que puede mejorar la enseñanza y, aunque se han realizado grandes aportes, en este apartado también reflexionamos sobre algunas limitaciones que se presentaron.

Una de las limitaciones que consideramos es la etapa de pandemia que hemos vivido durante el desarrollo del estudio y que eso ha traído modificaciones en la forma de trabajar de las instituciones educativas a nivel mundial, debiendo adaptar de forma continua los planes para llevar a cabo el diseño e implementación de la propuesta de enseñanza, principalmente trabajando con horarios de clase reducidos y grupos divididos. Por lo tanto, se contempla la necesidad de retomar esta propuesta en investigaciones futuras donde se trabaje en un horario y grupo completos, para analizar y comparar ambas situaciones.

Derivado del punto anterior, otra de las limitantes ha sido la falta de comprensión que muestran los alumnos respecto a nociones como función, límite y derivada; mismas que se han encontrado en investigaciones previas; el grupo en el que se ejecutó la propuesta mostró un casi nulo conocimiento y comprensión de estos conceptos, por lo cual se han debido retomar de manera previa, aunque de forma superficial, debido al tiempo con el que se contaba.

Por último, consideramos una limitante el hecho de realizar un solo ciclo de investigación acción para la corrección de la propuesta, ya que sería enriquecedor ejecutarla en distintos grupos y contextos para afianzar o modificar los resultados. Por lo que se invita a la realización de esta acción.

Pasando a las recomendaciones, en cuanto a los fundamentos matemáticos del TFC que se contemplan es esta investigación, se han enfatizado los que refieren a la conexión inversa entre derivada e integral, debido a que es lo que refiere el plan de estudio, sin embargo, se considera interesante que pudieran diseñarse propuestas de enseñanza con la misma metodología para la instrucción de la derivada e integral de una función, tomando en cuenta aspectos epistemológicos como diferencia, acumulación y variación. De esa manera, consideramos que la clase tendría una mejor comprensión del TFC.

Respecto a los libros de texto que se han considerado en la redacción de indicadores de conocimiento con base en las categorías del MTSK, consideramos que sería conveniente realizar una revisión más exhaustiva que permita comparar información y seleccionar la pertinente de acuerdo con el contexto del grupo y el nivel de grado que se pretende; aunque se es consciente de que en este proceso entra en juego la subjetividad, experiencia y creencias del docente de matemáticas.

Una recomendación a partir del proceso metodológico que se ha seguido para la realización de este trabajo, en el cual se han conjuntado los referentes teóricos MTSK y TRU, es que dicho proceso creemos que puede emplearse en investigaciones futuras para el diseño de propuestas de enseñanza de otros temas matemáticos, con el fin de comparar resultados y refinar los procedimientos y procesos.

Otra recomendación es que se lleve a cabo la enseñanza del TFC desde otros puntos de vista. Por ejemplo, si se quiere dar un enfoque en la representación geométrica, podría referirse al TFC en los trabajos de Leibniz con las proposiciones de transmutación, o en Newton a partir del teorema de van Heuraet. O bien, una versión aritmética del TFC, a partir de los trabajos iniciales de Leibniz con el triángulo armónico.

VIII.3. Reflexión

Para cerrar este trabajo, en seguida presento una reflexión particular sobre los aportes y aprendizajes que he tenido a lo largo del desarrollo de esta investigación a nivel profesional y personal.

Lo primero que me llevo es la necesidad de mejora continua que requiero en cuanto a mi propio conocimiento del contenido matemático y conocimiento didáctico del contenido, así como la importancia de trabajar en la especialización de ellos; el MTSK me ha permitido identificar el conocimiento que poseo y profundizarlo y fundamentarlo para llevarlo al aula. Durante los últimos dos años he aprendido un poco sobre la Matemática Educativa y su interés por optimizar el aprendizaje y enseñanza de los temas matemáticos. Como profesora de matemáticas, gracias a este trabajo, puedo identificar algunas de las carencias que tengo y que están en mis manos afrontar.

Considero que también ahora tengo una idea más clara de cómo organizar el conocimiento en distintas etapas de la enseñanza: inicio de la clase y debate del profesor, trabajo individual de los estudiantes, trabajo en equipo de los estudiantes y presentaciones por parte de los estudiantes; el estudio del TRU otorga herramientas en esa dirección y me queda mucho por explorar en este aspecto, pues gracias al análisis realizado me he percatado de la relevancia de llevar a cabo el rediseño y análisis constante de las clases que imparto.

Me siento con una mayor capacidad para realizar modificaciones en cuanto a la organización institucional y curricular de la disciplina matemática; siempre y cuando dichos cambios sean pertinentes, se encuentren fundamentados y se dirijan a una mejora en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Durante la investigación vi la necesidad de hacer cambios en cuanto a la secuenciación de temas del currículo; gracias al desarrollo del trabajo he podido corroborar, teórica y empíricamente, la pertinencia para hacerlo.

Otra de las cosas que pude obtener es la importancia de conocer a mis estudiantes, ya que eso me lleva a organizar el conocimiento y diseñar la enseñanza con base en sus motivaciones y contextos, así como darle un mayor sentido a los temas, otorgar el tiempo necesario a los estudiantes para que creen su propio razonamiento matemático, para que tengan un acceso equitativo al contenido, para que puedan trabajar de distintas maneras y en escenarios variados y para que tengan la oportunidad de recibir retroalimentación y corregir sus errores; ya que todas estas acciones, en esta investigación, han representado pequeños detalles que marcan una diferencia notoria en el impacto que puede tener el tema para los estudiantes.

Creo que he volteado a ver a los alumnos con mayor detenimiento y es algo en lo que debo seguir trabajando, contemplar el aula de clases como un laboratorio en la cual estar atenta a lo que sucede y cómo sucede, para tener herramientas y desarrollar habilidades que me ayuden a desempeñar mi labor. Siempre recordando que los estudiantes antes que nada son personas y debemos darles la confianza de desempeñarse como tal, respetando sus derechos humanos, emociones y aspiraciones personales.

Me alegra poder reconocer que las enseñanzas de este estudio han fomentado una identidad como profesora de matemáticas con la obligación de crecer profesional y personalmente; me hace ver que hay mucho camino por recorrer y que está lleno de baches y relieves complicados, pero que hay cosas que puedo llevar a cabo desde mi propia trinchera. Por otro lado, me entristece el rumbo que en ocasiones se le ha dado a la formación y capacitación docente, así como la manera en la que actualmente es visto el docente, a nivel social. En este sentido, creo que somos los profesores quienes debemos trabajar en la dignificación de la profesión comprometiéndonos a luchar contra corriente, cuando así se requiera.

Por último, me queda el compromiso de trabajar de manera constante en mi propio desarrollo profesional y formación como docente, mantener una actualización constante en cuanto a las investigaciones referentes a la Matemática Educativa y seguir aportando hallazgos a esta disciplina mediante investigaciones futuras y la práctica profesional.

REFERENCIAS

Academia Nacional de Matemáticas. (2021). *Cálculo Integral. Manual del alumno. Aprendizajes esenciales*. DGETI, SEP.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA, Investigación e Innovación en Educación Matemática, 8*(1), 30-46.

Apostol, T. (1984). *Calculus. Volúmen 1. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal*. Reverté.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp.97-135). Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 207-220). Kluwer Academic.

Baldor, J. A. (2017). *Geometría y Trigonometría*. Patria.

Ball, D., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Cantoral R., Cordero, F., Farfán, R. & Imaz, C. (1990). Cálculo-Análisis. Una revisión de la investigación educativa reciente en México. En *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 55-69). Universidad Autónoma del Estado de México.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 255-270.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Thomson.

Cantoral, R. & Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 265-292.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher´s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, C., & Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. En *Un marco teórico para* *el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Dávila-Araiza, M. T., & Grijalva, A. (2019). Resultados ocultos tras la operatividad del Teorema Fundamental del Cálculo. *Revista Electrónica Amiutem, VII*(1), 85-101. http://funes.uniandes.edu.co/20396/1/Davila2019Resultados.pdf

Douady, R. (1986). Jeux de Cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique de Mathematique, 7*(2), 5-31.

Farmaki, V. & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 83-106.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En *Un marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Font, V., & Adán, M. (2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

García, J. A. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37*(1), 29-42.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Grupo de Innovación Educativa. (s.f.). Teoremas fundamentales. GieMATic. https://www.giematic.unican.es/index.php/integracion-simple/teoremas

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). Mc Graw Hill Education.

Hitt, F. (2003, enero). Dificultades en el aprendizaje del cálculo [Ponencia]. *XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_c%C3%A1lculo

Hurtado, G. H. (2015). Tendencias investigativas sobre el enfoque de enseñanza para la comprensión (EPC) en Hispanoamérica. *Revista del Centro de Investigación La Salle, 11*(43), 21-60.

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(1), 67-101.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM*, *46*(4), 533–548. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5

Larson, R. & Edward, B. (2014). *Cálculo. Tomo I* (Décima edición). Cengage Learning.

Latorre, A. (2005). *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. Graó.

Latorre, A., Del Rincón, D., & Arnal, J. (2003). *Bases metodológicas de la investigación educativa* (1ra. Ed.). Ediciones experiencia.

Monroy, Z. T., & Rivero, D. A. (2020). *Actividades para re-descubrir el Teorema Fundamental del Cálculo* [Tesis de Licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN. http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/12088/actividades_para_redescubrir_el_teorema_fundamental_del_calculo.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Muñoz, W. (2021). Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles mediaciones tecnológicas. *Ciencia y Educación*, 5(1), 189-204.

Morales, C.A. (2008). *Los métodos de demostración en Matemática* [Tesis de Maestría]. Universidad de San Carlo de Guatemala.

Morales, J.F. & Peña, L.M. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza del Cálculo en Ingeniería, basada en la modelación matemática* [Memorias de congreso]. Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay. https://core.ac.uk/download/pdf/328835257.pdf

Neira (2013). Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática. *Revista Infancias imágenes, 12*(1), 44-50.

Peñaloza, W.D., Suárez, S.R. & Roa, S. (2013). El Teorema Fundamental del Cálculo: Escenarios para su comprensión. *Educación científica y tecnológica*, 660-664.ja

Ponce, J.C. (2006). *La argumentación y enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en profesores de matemáticas* [sesión de conferencia]. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Camagüey, Cuba.

Ponce, J. C. (2007). *Un estudio de caso con profesores de bachillerato sobre el papel que juega el Teorema Fundamental del Cálculo* [Tesis de maestría no publicada]. https://www.researchgate.net/publication/236247933_Un_estudio_de_caso_con_profesores_de_bachillerato_sobre_el_papel_que_juega_el_Teorema_Fundamental_del_Calculo

Purcell, E., Varberg, D. & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (novena edición). Pearson Educación.

Real Academia Española (2020). Ecuación. https://dle.rae.es/ecuaci%C3%B3n

Ribeiro, C.M. (2008). From modeling the teacher practice to the establishment of relatios between the teacher actions and cognitions. In M. Joubert (Ed.). *Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics November 2008, 28*(3), 102-107.

Robles, M.G., Tellechea, E. & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al Teorema Fundamental del Cálculo. *Educación Matemática, 26*[2], 69-109.

Rosyidi, A. H., & Kohar, A. W. (2018). Is f(x) unique? Prospective teachers' conceptual and procedural knowledge on a definite integral problem. *Journal of Physics: Conference Series*, *1108*(1), 0–7. https:// doi.org/10.1088/1742-6596/1108/1/012095

Salett, M. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Salinas, P. & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa, 12*[3], 355-382.

Salinas, P., Pulido, R., & Alanís, J. A. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. *Didac,* 56-67.

Schoenfeld, A. H., Floden, R. E., & the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2014). *The TRU Math Scoring Rubric* [Archivo PDF]. https://www.map.mathshell.org/trumath/tru_math_rubric_alpha_20140731.pdf

Schoenfeld, A. H., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework* [Archivo PDF]. https://www.map.mathshell.org/trumath/intro_to_tru_20161223.pdf

Secretaría de Educación Pública. (s.f.*). Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior. Cálculo Integral.* DGETI. http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/5_C%C3%A1lculo%20integral.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal* (2da. Ed.). Reverté S.A.

Sosa, L. (2011). Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos [Tesis de Doctorado publicada]. Universidad de Huelva.

Sosa, L. & Flores-Medrano, E. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 173-189.

TEDxTalks (Canal). (2014, 14 de octubre). *Las matemáticas son para siempre* [Archivo de video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=jej8qlzlAGw

TEDxTalks (Canal). (2019, 25 de junio). *Enseñar y aprender de los pies a la cabeza* [Archivo de video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=hCnkIMK4Fvc

Tzanakis, C., Arcavi, A. Correia, C., Lit, C.K., Niss, M., Pitombeira, J., Rodríguez, M., & Siu, M.K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. En J. Fauvel & J. Van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. New ICMI Study Series*, (pp. 201-240). Springer, Dordrecht.

Valenzuela, B. & Vigo, K. (2018). Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo: un estado del arte. En C. Gaitia, J. Flores, F. Ugarte, & C. Quintanilla, (eds.), *Actas de IX Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 616-626). Universidad Nacional de Huancavelica.

Índice de figuras

Índice de tablas

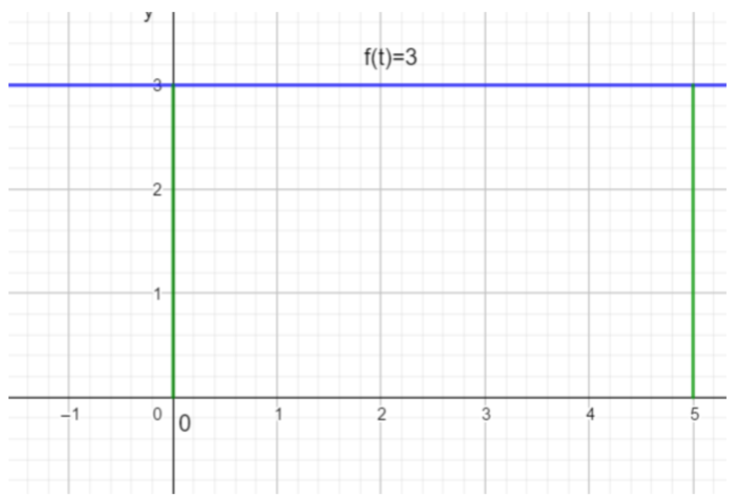
ANEXO 1. ACTIVIDAD 1 TFC

Nombre_______________________________ Grupo _______________

Resuelve la actividad dejando ver tus procedimientos en cada respuesta.

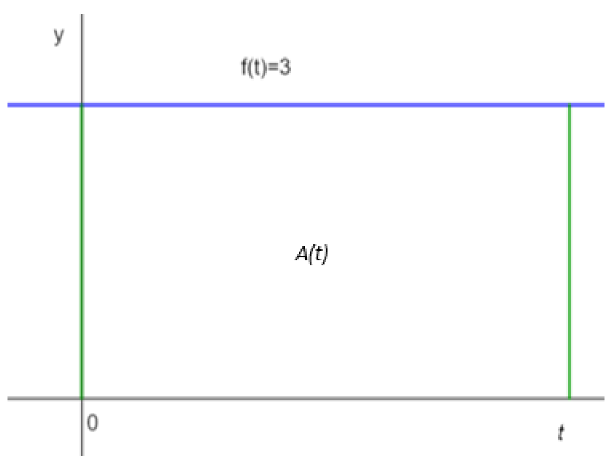
Función $f(t) = 3$

h) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = 5$. Utiliza fórmulas geométricas.



Respuesta: ________________________________

i) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = t$. Plantea una expresión para $A(t)$.



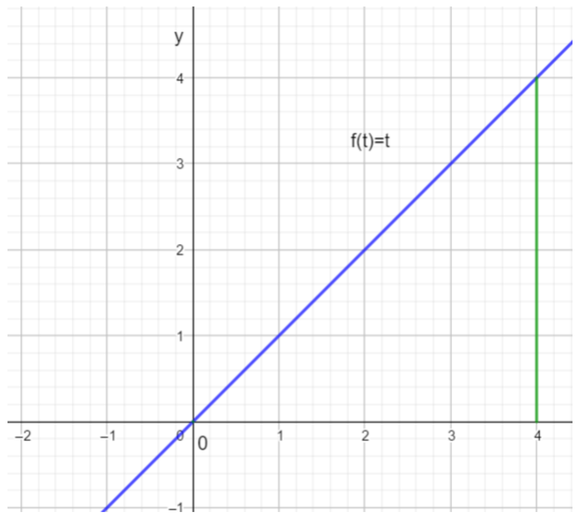
Respuesta: ________________________________

j) Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior: ___________________________

k) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)$ y $f(t)$.

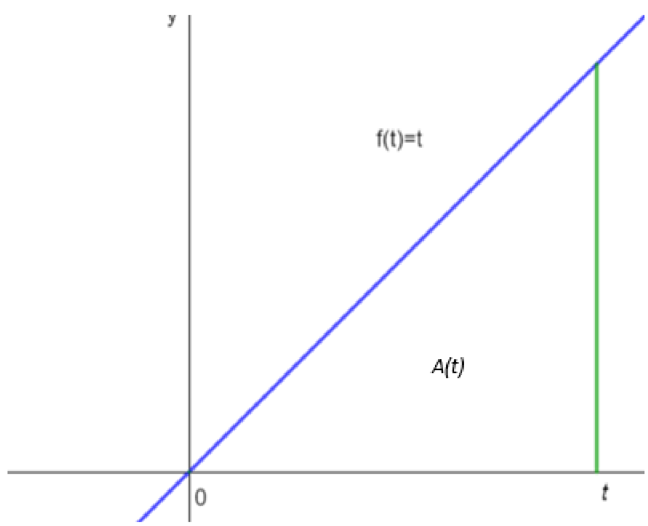
Función $\mathbf{f(t) = t}$

l) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t = 0$ y $t = 4$. Utiliza fórmulas geométricas.



Respuesta: _________________________________

m) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t = 0$ y $t = t$. Plantea una expresión para $A(t)$.



Respuesta: _________________________________

n) Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior:___________________________

o) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)$ y $f(t)$.

p) Tomando en cuenta tu conclusión anterior. ¿Qué relación observas entre $A(t)$ y $f(t)$?

ANEXO 2. ACTIVIDAD 2 TFC

Nombre_____________________________ **Grupo** ______________

Las siguientes imágenes representan dos funciones distintas f(x), así como ciertos datos que se obtienen de cada una de ellas al obtener su antiderivada.

Con base en los datos de las figuras, contesta las preguntas de abajo:

Figura 1

Datos de la función $f(x) = x$

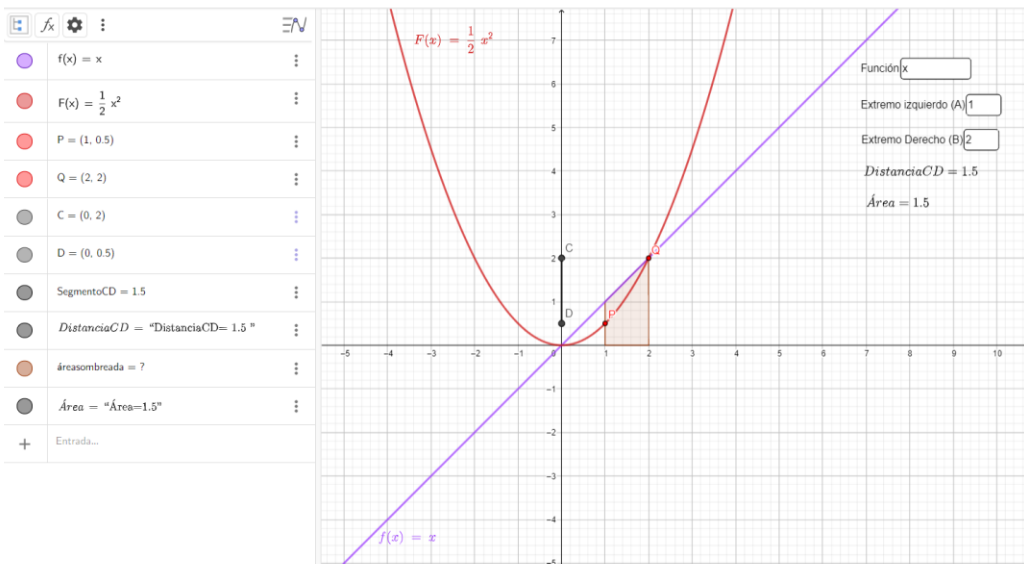
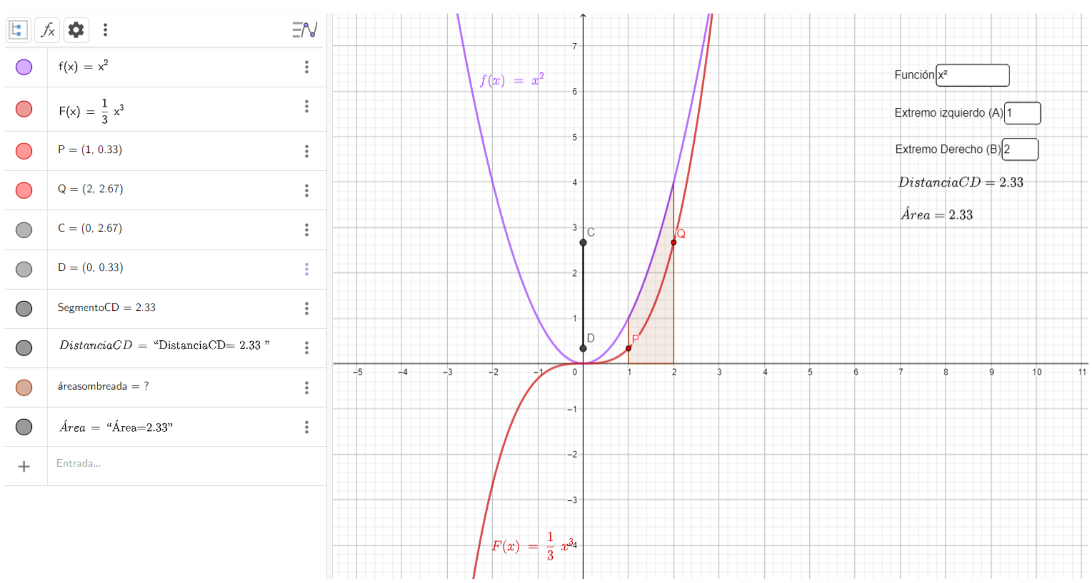


Figura 2

Datos de la función $f(x) = x^2$



d) ¿Qué relación observas entre f(x) y F(x)?

e) ¿Qué coordenadas tienen P y Q?

f) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de P y Q, teniendo en cuenta los valores de (A) y (B)?

g) ¿Qué coordenadas tienen C y D?

h) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de C y D, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q?

i) ¿Cómo se halla la distancia entre C y D y cuál es esa distancia?

j) Observa el valor del área (Área=2.33) y el área sombreada en la gráfica. Luego escribe qué relación encuentras entre esa área y los puntos C y D (redacta tus conclusiones en términos de f, F, A y B):

k) De acuerdo con tu conclusión anterior, generaliza el proceso para cualquier A y B:

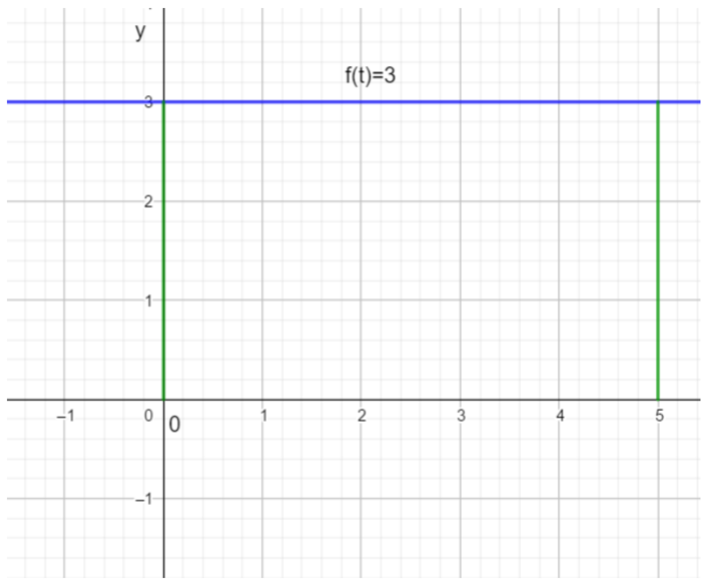
ANEXO 3. ACTIVIDAD CORREGIDA DEL TFC 1

Nombre______________________________ **Grupo** ______________

Resuelve la actividad dejando ver tus procedimientos en cada respuesta.

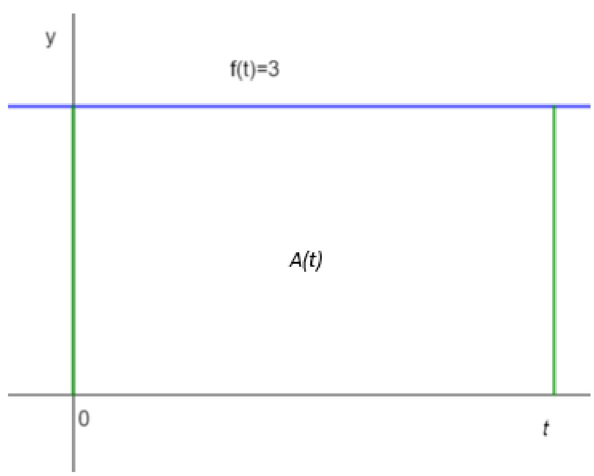
Función $\boldsymbol{f(t) = 3}$

a) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = 5$. Utiliza fórmulas geométricas.



Respuesta: __________________________________

b) Si $t \in \mathbb{R}\ y\ t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = 3$, entre $t = 0$ y $t = t$. Plantea una expresión para $A(t)$.



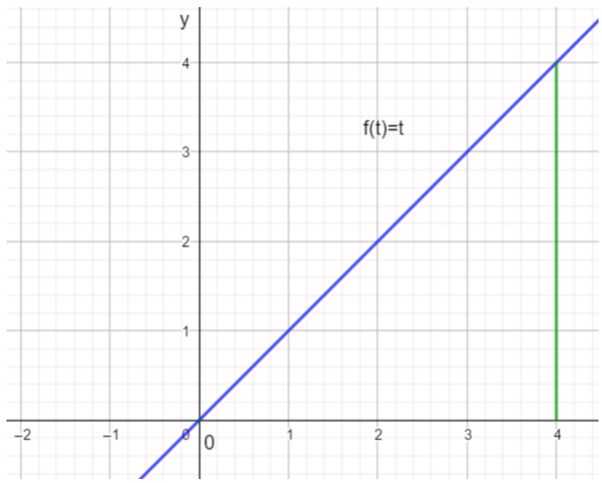
Respuesta: __________________________________

c) Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior: ___________________________

d) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)\ y\ f(t)$.

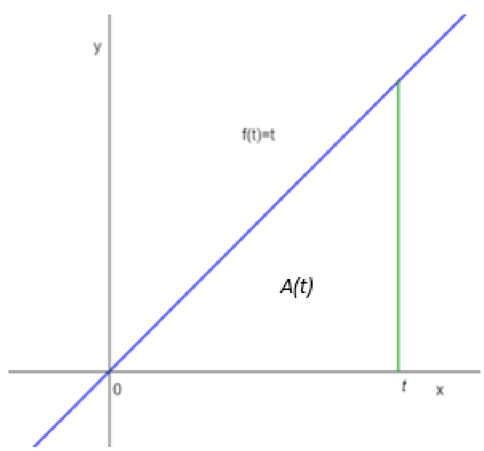
Función $\boldsymbol{f(t) = t}$

e) Encuentra el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t = 0$ y $t = 4$. Utiliza fórmulas geométricas.



Respuesta: __________________________________

f) Si $t \in \mathbb{R}\ y\ t > 0$, sea $A(t)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = t$, entre $t = 0$ y $t = t$. Plantea una expresión para $A(t)$.



Respuesta: __________________________________

g) Deriva $A(t)$ obtenida en el inciso anterior:___________________________

h) De acuerdo con tus resultados. Describe qué relación existe entre $A'(t)\ y\ f(t)$.

i) Tomando en cuenta tu conclusión anterior. ¿Qué relación observas entre $A(t)\ y\ f(t)$?

Propón una función:

Dirígete al enlace https://www.geogebra.org/geometry/pcbx2xdh para realizar lo que se indica en los incisos y responde a las preguntas:

j) En la casilla f(x), escribe una función cualquiera y en la casilla F(x) escribe la antiderivada de la función anterior.

k) Enciende las casillas f(t) y F(t).

l) Mueve el punto "t" en el eje x hacia algún lugar donde observes que ambas funciones f(t) y F(t) son continuas.

m) Enciende la casilla "Recta tangente a F(t)". Luego enciende las casillas Δy e Δx. Tomando en cuenta las coordenadas de los puntos correspondientes, obtén los valores de Δy e Δx.

$\Delta y =$______________________ $\Delta x =$_________________________

n) Con los valores obtenidos en Δy e Δx. Determina la pendiente de la recta tangente a F(t).

o) Tomando en cuenta las coordenadas de los puntos "t" y "f(t)", determina la distancia entre estos:

Distancia $t - f(t) =$ _________________

p) ¿Qué relación encuentras entre los valores que obtuviste en los incisos n) y o)?

q) ¿Qué puedes concluir, de acuerdo con la relación encontrada? Escribe tu respuesta en términos de f(x) y F(x)?

ANEXO 4. ACTIVIDAD CORREGIDA DEL TFC 2

Nombre______________________________ **Grupo** ______________

Dirígete al enlace https://www.geogebra.org/geometry/wn62wmxg para realizar lo que se indica en los incisos y responde a las preguntas:

a) En la casilla f(x), escribe una función que sea continua y en la casilla F(x) escribe la antiderivada de la función anterior.

b) Mueve los puntos a y b, ubicados en el eje x, de manera que f(x) y F(x) sean continuas en el intervalo entre a y b.

c) ¿Cuál es el área bajo la curva de la función f, entre a y b?

Área=_____________

d) Enciende las casillas F(b) y F(a) y escribe sus coordenadas:

F(b)=___________ F(a)=____________

e) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de F(b) y F(a), teniendo en cuenta los valores de a y b?

f) ¿Qué coordenadas tiene el punto G?

g) ¿Qué relación observas entre las coordenadas de F(a) y las del punto G?

h) ¿Cuál es la distancia entre F(b) y el punto G?

i) Observa el rectángulo que se forma del lado derecho, con base en las coordenadas de sus vértices, escribe el valor de su base y altura.

Base=_____________ altura=______________

j) ¿Qué relación observas entre la distancia encontrada en el inciso h) y los lados del rectángulo?

k) Calcula el área del rectángulo:

Área=______________

l) Enciende la casilla "Área del rectángulo (cuadratura)" y comprueba tu resultado. Luego observa el valor de las áreas sombreadas con azul y rojo y describe que relación observas.

m) De acuerdo con lo anterior, ¿Qué representa el rectángulo respecto de f(x) en el intervalo [a,b]?