

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”



**UNIDAD ACADÉMICA DE
MATEMÁTICAS**



SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE MÉXICO Y COLOMBIA

**Tesis para obtener el grado de
Maestra en Matemática Educativa
con Orientación en el Nivel Secundaria**

Presenta:

Daniela Millán Marulanda

Directoras de tesis:

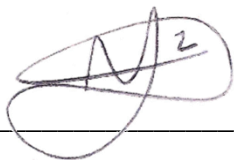
Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

Dra. Darly Alina Kú Euán

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 20 del mes de junio del año 2023, la que suscribe Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas Daniela Millán Marulanda del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria, con número de matrícula 42106982; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado “Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia” bajo la dirección de la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez y la Dra. Darly Alina Kú Euán.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.



Lic. Daniela Millán Marulanda

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia



A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE MÉXICO Y COLOMBIA" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Daniela Millán Marulanda de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 20 de junio del 2023


Dra. Judith A. Hernández Sánchez

Directora de tesis


Dra. Darly Alina Kú Eúan

Directora de tesis

Resumen

Los libros de texto son uno de los recursos didácticos más utilizados por los docentes y los estudiantes; el comprender los significados asociados a los aprendizajes que desde los libros se promueven es crucial dentro de la Matemática Educativa. Los significados de un contenido se construyen a partir del tratamiento y de los contextos en que se propone su uso; el análisis de las tareas propuestas en los libros de texto ayuda a comprender la forma en que se considera la actividad matemática y los significados que se potencian. El comprender los significados del signo igual que los libros de texto propician desde dos sistemas educativos, muestra un panorama de diferentes propuestas de enseñanza; así, comparar textos escolares entre países permite identificar diferencias y semejanzas y provee de información valiosa para la mejora tanto en la práctica del profesor como en la creación de nuevos libros. Es así como el objetivo de este trabajo es comparar los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes entre 10 y 11 años. En particular el interés se centra en identificar si la estructura conceptual y los contextos y situaciones que lo rodean están determinados por los contenidos matemáticos o bien existen diferencias ligadas a los contextos de cada país. Para la identificación de los significados asociados al signo igual se toma como enfoque teórico los componentes del significado de un contenido matemático: sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología. Esta terna, que conforma el triángulo semántico, permite identificar la forma en que se organiza un contenido matemático y los significados que se le asocian. Por lo tanto, este estudio se enmarca en una metodología cualitativa descriptiva y se hace uso del análisis de contenido como método de investigación. Entre los resultados principales se encuentra que la concepción asociada al significado del signo igual que más se potencia en los libros de texto es la equivalencia bajo el referente de operador, donde al lado izquierdo del signo se encuentra una operación y al lado derecho el resultado, primando en ambos libros de texto el desarrollo del signo desde una visión operacional, además, para aquellas concepciones ausentes en los libros de texto se propone en las conclusiones tareas que pueden complementar estos significados.

Palabras clave: Libros de texto, significados del signo igual, sentido operacional, sentido relacional, estudio comparativo.

Abstract

Textbooks are one of the teaching resources most used by teachers and students; Understanding the meanings associated with the learning that is promoted from books is crucial within Educational Mathematics. The meanings of a content are constructed from the treatment and the contexts in which its use is proposed; The analysis of the tasks proposed in the textbooks helps to understand the way in which the mathematical activity is considered and the meanings that are promoted. Understanding the meanings of the equal sign that textbooks promote from two educational systems shows a panorama of different teaching proposals; Thus, comparing school textbooks between countries makes it possible to identify differences and similarities and provides valuable information for improvement both in the teacher's practice and in the creation of new books. This is how the objective of this work is to compare the meanings of the equal sign between a Colombian and a Mexican textbook, aimed at students between 10 and 11 years old. In particular, the interest is focused on identifying if the conceptual structure and the contexts and situations that surround it are determined by the mathematical contents or if there are differences linked to the contexts of each country. For the identification of the meanings associated with the equal sign, the components of the meaning of a mathematical content are taken as a theoretical approach: representation systems, conceptual structure and phenomenology. This shortlist, which makes up the semantic triangle, makes it possible to identify the way in which a mathematical content is organized and the meanings associated with it. Therefore, this study is part of a descriptive qualitative methodology and content analysis is used as a research method. Among the main results, it is found that the conception associated with the meaning of the equal sign that is most promoted in textbooks is equivalence under the operator referent, where an operation is found on the left side of the sign and the result on the right side, Prioritizing in both textbooks the development of the sign from an operational vision, in addition, for those conceptions absent in the textbooks, tasks that can complement these meanings are proposed in the conclusions.

Keywords: Textbooks, meanings of the equal sign, operational sense, relational sense, comparative study.

Tabla de contenido

Resumen	3
Introducción.....	11
Capítulo 1. Planteamiento del problema de investigación	14
1.1 Antecedentes	14
1.1.1 Los libros de texto como herramienta didáctica.....	14
1.1.2 Estudio comparativo en libros de texto	15
1.1.3 El signo igual como objeto de análisis	17
1.1.4 El significado del contenido	22
1.2 Reflexión.....	23
1.3 Problema de investigación.....	24
1.3.1 Problemática	24
1.3.2 Problema.....	25
1.3.3 Pregunta de investigación.....	26
1.3.4 Objetivo general	26
1.3.5 Objetivos específicos.....	26
1.4 Justificación y alcance	26
Capítulo 2: Marco teórico.....	29
2.1 Componentes del significado de un contenido	29
2.1.1 Sistemas de representación.....	30
2.1.2 Estructura conceptual	33
2.1.3 Fenomenología	34
2.2 Desarrollo histórico del signo igual.....	38
2.2.1 La Igualdad	41
2.2.2 La Equivalencia	42
2.2.3 La Identidad	43
Capítulo 3: Metodología.....	47
3.1 El análisis de contenido como método de investigación	47
3.2 Análisis comparativo como método de estudio	49
3.3 Esquema metodológico.....	50
3.3.1 Fase 1 “El trabajo previo a la obtención de los datos”	51
3.3.2 Fase 2 “La extracción de los datos”.....	69
3.3.3 Fase 3 “La explotación de los datos: operaciones e interpretación de resultados”	71

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Capítulo 4: Análisis de los resultados.....	74
4.1 Libro de texto de México.....	74
4.1.1 El signo igual como Equivalencia	83
4.1.2 El signo igual como Relación funcional.....	90
4.2 Libro de texto de Colombia	94
4.2.1 El signo igual como Equivalencia	106
4.2.2 El signo igual como Relación funcional.....	115
4.2.3 El signo igual como separador (Hallazgo)	119
Capítulo 5: Estudio comparativo de los significados del signo igual.....	124
Conclusiones.....	133
Reflexión	140
Referencias	141

Índice de tablas

Tabla 1. Once significados del signo igual.....	18
Tabla 2. Visión operacional y relacional.....	20
Tabla 3. Contextos del signo igual.....	21
Tabla 4. Fase 1 Componentes del significado.....	23
Tabla 5. Ejemplo representación manipulativa.....	32
Tabla 6. Definición de los significados asociados al signo igual.....	44
Tabla 7. Análisis de contenido.....	48
Tabla 8. Relación entre contenidos.....	52
Tabla 9. Ficha Técnica Libro México.....	55
Tabla 10. Ficha Técnica Libro Colombia.....	56
Tabla 11. Unidades de Muestreo.....	58
Tabla 12. Tabla de contenido Cuadernillo 1 - Colombia.....	59
Tabla 13. Tabla de contenido Cuadernillo 2 Colombia.....	62
Tabla 14. Tabla de contenido Libro México.....	64
Tabla 15. Equivalencia de Organización Curricular.....	67
Tabla 16. Ficha de Registro.....	68
Tabla 17. Elementos de las Categorías de análisis.....	68
Tabla 18. Ejemplo de transcripción de los datos.....	69
Tabla 19. Libro de códigos.....	70
Tabla 20. Ejemplo unidad de registro y código.....	71
Tabla 21. Concepciones y tipo de actividad.....	81
Tabla 22. Frecuencia concepción y tipo.....	104
Tabla 23. Comparativo Sistemas de representación.....	124
Tabla 24. Comparativo Fenomenología - Contextos.....	125
Tabla 25. Comparativo Fenomenología - situaciones.....	126
Tabla 26. Comparativos referentes del significado.....	127
Tabla 27. Comparativo entre concepciones y áreas del conocimiento.....	129
Tabla 28. Comparativo entre concepciones y tipo de actividad.....	129

Índice de figuras

Figura 1. Triángulo semántico de un concepto.....	30
Figura 2. Ejemplo representación tabular.....	31
Figura 3. Ejemplo representación gráfica.....	31
Figura 4. Ejemplo representación geométrica.....	31
Figura 5. Ejemplo representación pictórica.....	32
Figura 6. Ejemplo representación ejecutable.....	32
Figura 7. Contexto matemático.....	34
Figura 8. Contexto no matemático.....	34
Figura 9. Ejemplo situación personal.....	35
Figura 10. Ejemplo situación educativa.....	35
Figura 11. Ejemplo situación ocupacional.....	36
Figura 12. Ejemplo situación pública.....	36
Figura 13. Ejemplo situación profesional.....	37
Figura 14. Primer uso del signo igual por Recorde.....	39
Figura 15. Diseño metodológico.....	51
Figura 16. Sistema de categorías- componentes del significado.....	57
Figura 17. Ejemplo de interpretación.....	72
Figura 18. Aparición del signo igual.....	74
Figura 19. Ejemplo sistemas de representación.....	75
Figura 20. Ejemplo sistemas de representación.....	76
Figura 21. Ejemplo estructura conceptual.....	77
Figura 22. Diagrama Fenomenología – Contextos.....	78
Figura 23. Ejemplo contexto no matemático.....	79
Figura 24. Diagrama Fenomenología – Situaciones.....	80
Figura 25. Ejemplo situación ocupacional.....	80
Figura 26. Gráfico referentes del significado.....	81
Figura 27. Signo igual como equivalencia – propuesta de una actividad.....	82
Figura 28. Signo igual como equivalencia - operador.....	83
Figura 29. Gráfico Signo igual como equivalencia.....	84
Figura 30. Signo igual como equivalencia - operador.....	85
Figura 31. Signo igual como equivalencia – propuesta de actividad.....	86
Figura 32. Equivalencia por definición o por notación – México.....	87
Figura 33. Componentes del significado - Signo igual como equivalencia.....	88
Figura 34. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como equivalencia.....	89
Figura 35.....	90
Figura 36. Relación funcional - México.....	91
Figura 37. Signo igual como relación funcional o de dependencia.....	92

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 38. Componentes del significado - Signo igual como relación funcional.....	93
Figura 39. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como relación funcional...	94
Figura 40. Aparición del signo igual - Colombia.....	95
Figura 41. Diagrama Sistemas de representación - Colombia.....	96
Figura 42. Sistemas de representación	97
Figura 43. Estructura conceptual - Colombia.....	98
Figura 44. Estructura conceptual sin campo procedimental.....	99
Figura 45. Diagrama Fenomenología - Situaciones	99
Figura 46. Ejemplo situación educativa	100
Figura 47. Situación ocupacional	100
Figura 48. Diagrama Fenomenología - Contextos.....	101
Figura 49. Ejemplo contexto matemático.....	102
Figura 50. Gráfico referentes del significado	103
Figura 51. Uso matemáticamente incorrecto - Separador	104
Figura 52. Ejemplo del signo igual como equivalencia	105
Figura 53. Equivalencia de tipo explicación	106
Figura 54. El signo igual como equivalencia	107
Figura 55. El signo igual como operador	108
Figura 56. Referentes de operador, equivalencia numérica y ecuación	109
Figura 57. Ecuación en geometría	110
Figura 58. Equivalencia por definición o por notación en Geometría.....	111
Figura 59. Equivalencia por definición o por notación en Geometría.....	112
Figura 60. Equivalencia por definición o notación - Estadística.....	113
Figura 61. Componentes del significado - Signo igual como equivalencia	113
Figura 62. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como equivalencia.....	114
Figura 63. Gráfico el signo igual como relación funcional	115
Figura 64. Definición de un objeto matemático - Estadística.....	115
Figura 65. Indicador de ciertas conexiones o correspondencia - Estadística	116
Figura 66. Indicador de ciertas conexiones o correspondencia - Geometría.....	117
Figura 67. Componentes del significado - Signo igual como relación funcional.....	118
Figura 68. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como relación funcional.	119
Figura 69. Gráfico el signo igual como separador.....	120
Figura 70. Signo igual como separador	121
Figura 71. Componentes del significado - Signo igual como separador	122
Figura 72. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como separador	123
Figura 73. Contraste fenomenología	126
Figura 74. Contraste referentes y campo procedimental	128
Figura 75. Contraste concepción equivalencia	131
Figura 76. Contraste concepción de relación funcional	132

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 77. Propuesta del signo igual como igualdad.....	135
Figura 78. Propuesta del signo igual en un sistema de representación ejecutable	136

Introducción

El libro de texto como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas presenta una ruta para el abordaje de un contenido escolar. Sin embargo, las propuestas que se encuentran en él no logran favorecer o no potencian todos los significados que se espera se desarrollen en el estudiante. El signo igual es uno de los símbolos más utilizados dentro de las matemáticas y su comprensión está asociada a los diversos significados que lo caracterizan. Así, los contenidos matemáticos pueden tener multiplicidad de significados, según Hernández y Kú (2021) “el estudio de la multiplicidad de significados de conceptos matemáticos escolares es una línea vigente de investigación (...), pues brinda información sobre el discurso que se potencia dentro de la matemática escolar.” (p. 18), en este sentido, el analizar los significados que se potencian desde los libros de texto permite identificar la forma en que se podría abordar en el aula y las interpretaciones que puede generar con su uso.

En este sentido, el tratamiento otorgado al signo igual es insuficiente para adquirir las competencias necesarias al iniciar con el estudio del álgebra (Burgell y Ochoviet, 2015), dado que afecta el aprendizaje de los estudiantes tanto de primaria como de secundaria (Ramírez, 2010) mostrando dificultades en el tránsito entre el pensamiento aritmético y el algebraico. De esta manera, los significados adquiridos en los grados elementales sobre el signo igual son parciales, al ser interpretado como la invitación a operar más que ser visto como un símbolo relacional (Ramírez y Rodríguez, 2011). Por lo tanto, surge la pregunta ¿Cuáles son las diferencias y semejanzas de los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes de 10 y 11 años? Así, el objetivo de este trabajo es comparar los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes entre 10 y 11 años.

Para la identificación de los significados asociados al signo igual se toma como enfoque teórico los componentes del significado de un contenido matemático escolar propuesto por Rico (2012). Estos componentes conforman el triángulo semántico: los sistemas de representación, la estructura conceptual y la fenomenología. Esta terna permite identificar la forma en que se organiza un contenido matemático y los significados que se le asocian, además, se complementan con los 13 significados del signo igual propuestos por Molina (2006), siendo estas las categorías de análisis.

De esta manera, este estudio se enmarca en una metodología cualitativa descriptiva la cual se entiende como un conjunto de prácticas interpretativas que estudia fenómenos, con el propósito de darles sentido en función de los significados que las personas les otorguen (Hernández et al., 2014), puesto que se pretende identificar las características del signo igual en los libros de texto e interpretarlas a la luz de las tres dimensiones del triángulo semántico. Por otro lado, se hace uso del análisis de contenido propuesto por Bernete (2013) como

método de investigación; Gómez (2007) menciona que este método “es por tanto el procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática dentro del contenido de las matemáticas escolares” (p. 41), permite la comprensión de contenidos materializados por ejemplo, en libros de textos.

El análisis comparativo es un método que permite contrastar información, Makón (2004) afirma que “permite entonces identificar los elementos comunes, las regularidades de distintos casos (o bien sus diferencias) y de esta forma alcanzar explicaciones más comprensivas de fenómenos” (p. 4). En esta investigación, se identifican elementos que se asemejan y se diferencian entre dos sistemas educativos (uno mexicano y otro colombiano); en este caso, mediante la revisión de los significados del signo igual en libros de textos. Por esto, el llevarlo a cabo es de crucial importancia ya que permite mostrar a partir del análisis de contenido, aspectos entre dos libros de texto latinoamericanos, uno mexicano y otro colombiano identificando si los significados potenciados están determinados por los contenidos matemáticos o si existen diferencias ligadas a los contextos de cada país

En cuanto a los resultados, se encontró que el signo igual bajo el referente de operador es el que se encuentra en mayor medida tanto en el libro de texto colombiano como en el mexicano lo cual conlleva el desarrollo de una visión operacional. Además, un hallazgo a rescatar tiene que ver con el significado del signo igual bajo el referente de ecuación, el cual, aunque generalmente es presentado en un contexto algebraico, fue encontrado en los dos libros de texto, lo que deja en evidencia el inicio de un trabajo pre-algebraico desde la educación primaria.

Para el desarrollo de esta investigación, el documento fue estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se presenta el planteamiento del problema. Se parte de la motivación, donde se mencionan aspectos que motivaron la realización de este estudio, después, se plantea los antecedentes donde se muestra la revisión bibliográfica clasificada en 4 categorías: los libros de texto, los significados de un contenido matemático, los estudios comparativos y el signo igual; posteriormente se expone la reflexión sobre los aspectos que se resaltan de los antecedentes; seguido del problema de investigación donde está la problemática, el problema, la pregunta y los objetivos de investigación; y finalmente se cierra el capítulo con la presentación de la justificación y el alcance.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico. En primer momento se presentan los conceptos bajo los cuales se entienden los libros de texto, el significado y los estudios comparativos; en un segundo momento se expone como enfoque teórico los componentes del

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

significado propuestos por Rico (2012) los cuales conforman el triángulo semántico: sistemas de representación, estructura conceptual y la fenomenología se amplían cada uno de los dominios de la terna con sus componentes y se contextualizan cada uno de ellos entorno al signo igual como objeto de estudio; en un tercer momento se presenta el desarrollo histórico del signo igual y finalmente, se presenta la integración de las concepciones encontradas dentro del desarrollo histórico y los significados del signo igual propuestos por Molina (2006) donde se enmarcan las categorías de análisis.

En el capítulo 3 se presenta la metodología. Primero que todo se define la metodología cualitativa – descriptiva como tipo de investigación en la cual se enmarca este trabajo; en un segundo momento se define el análisis de contenido propuesto por Bernete (2013) como método de investigación; en un tercer momento se presenta el análisis comparativo bajo la visión de Makon (2004) con sus tres fases. Finalmente, se presenta un esquema metodológico en el cual se presentan los 4 momentos de trabajo y se amplían cada una de las fases con las acciones a realizar.

En el capítulo 4 se presenta el análisis de resultados donde se describen los significados potenciados en las tareas relacionadas con el signo igual presentes en el libro de texto de matemáticas de México y Colombia, ampliando dentro de cada país las concepciones encontradas, los referentes del significados rastreados, el análisis basado en las componentes del significado de Rico (2012), y los hallazgos encontrados dentro de cada propuesta educativa.

En el capítulo 5 se presenta el estudio comparativo de los resultados obtenidos en los dos libros, el libro de texto de México “Desafíos matemáticos grado quinto” y el libro de texto de Colombia “Todos aprender Grado 5º”, donde se describen las semejanzas y diferencias encontradas, así como algunos aspectos que caracterizan los sistemas educativos.

Finalmente se presentan la conclusiones donde se mencionan hallazgos encontrados al interior del análisis, se realizan propuestas que incluyen la incursión de los referentes del signo igual que no fueron visualizados bajo las concepciones y los componentes del significado y a su vez se realizan reflexiones propias.

Capítulo 1. Planteamiento del problema de investigación

En el presente capítulo se exponen los elementos que conforman el planteamiento del problema de investigación: los antecedentes donde se muestra la revisión bibliográfica realizada sobre estudios anteriores, la problemática que contiene el problema y la pregunta de investigación, los objetivos, la reflexión en torno al análisis realizado y finalmente se presenta la justificación.

1.1 Antecedentes

Para indagar en las investigaciones en torno a los significados asociados al signo igual, se realizó una búsqueda en las bases de datos: Google, Google académico, ResearchGate, Readly, Dialnet, SciELO y en la base de datos de la Universidad del Valle. En la búsqueda, se utilizaron las siguientes palabras clave: libros de texto, significados del signo igual, interpretación del signo igual, contextos del signo igual, signo igual, comprensión del signo igual, pensamiento relacional y estudios comparativos.

Los antecedentes se clasificaron en cuatro categorías y se presenta cada una de ellas como una sección. La primera dedicada a los libros de texto donde se muestra su importancia en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. La segunda relacionada con el análisis comparativo donde se resalta la importancia y los aportes de comparar libros de texto. La tercera sobre el signo igual como objeto de análisis, mostrando los tipos de análisis realizados: según el contexto en el que se utiliza, según la visión interpretativa del estudiante (relacional y operacional) y según el significado del signo; también se muestra la problemática presente en su enseñanza y aprendizaje junto con sus implicaciones. Finalmente, la cuarta categoría enfocada en los significados, exponiendo la importancia de investigar los significados de los conceptos dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.1.1 Los libros de texto como herramienta didáctica

En el presente apartado, se muestran referentes que exponen la importancia de los libros de texto en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debido al gran uso que se tiene de ellos y el impacto que generan tanto en los estudiantes como en los profesores.

Mosquera (2018) realizó un estudio comparativo en libros de texto de matemáticas de Ecuador y Venezuela sobre los sistemas de ecuaciones lineales de nivel secundaria. El método utilizado fue análisis de contenido de tareas. Los resultados mostraron que los libros estudiados difieren en el número de tareas propuestas, los contextos de las tareas y se asemejan en el énfasis en lo operacional. El autor afirma que “el libro ofrece “una versión” del objeto a través de las actividades que presenta y el discurso que despliega (...) y esa “versión” influiría en la manera como el profesor organiza la enseñanza” (Mosquera, 2018,

p. 93), es decir, el libro de texto brinda tanto al docente en su enseñanza como al estudiante en su aprendizaje una versión o un significado del contenido matemático específico.

Díaz-Levicoy et al. (2020) analizaron las actividades propuestas por los libros de texto de educación primaria en México en torno a las medidas de tendencia central, se apoyaron del análisis de contenido (López-Noguero, 2002), donde definieron unidades de análisis y categorías. Resaltan como resultados el predominio de actividades sobre la moda y la media aritmética. Los autores muestran al libro de texto como un elemento central y como recurso didáctico en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, resaltan que el libro es “producto de una transposición didáctica (Chevallard, 1991), usado ampliamente por profesores y estudiantes (Díaz-Levicoy et al., 2020, p. 708), en este sentido, su uso puede contribuir de forma positiva o negativa en el aprendizaje de los estudiantes, siendo ésta una razón para continuar investigando y analizando el contenido de los libros de texto.

Pallauta et al. (2021) realizan un análisis de la complejidad semiótica de las tablas estadísticas propuestas en libros de texto de España y Chile, posteriormente, realizan un comparativo del tratamiento entre los dos países. Los autores mencionan que “el análisis de las tareas propuestas en los libros de texto para un contenido particular ayuda a comprender la forma en que se considera la actividad matemática con dicho contenido en el aula” (Pallauta et al., 2021, p. 3), es decir, el poder analizar el contenido presente dentro de los libros de texto permiten comprender el abordaje y el tratamiento que se le está dando a un contenido matemático.

El libro de texto es considerado una herramienta didáctica utilizada por los docentes en la organización y planeación de actividades y por los estudiantes en la conceptualización y ejercitación de procedimientos, es decir, que su uso impacta tanto la enseñanza como el aprendizaje. Sin embargo, es producto de una transposición didáctica, por lo que su contenido ofrece versiones de un objeto matemático mediante tareas, actividades, ejercicios y conceptos, por lo cual, su análisis ayuda y permite comprender la forma en que se considera un contenido, el tratamiento que se le brinda y los significados que se favorecen. Es así como el interés de esta investigación es identificar los significados que éstos propician en su contenido, específicamente en torno al signo igual.

1.1.2 Estudio comparativo en libros de texto

A continuación, se presentan referentes que muestran la importancia de los estudios comparativos y ejemplifican los métodos utilizados para su análisis y realización.

Pino y Blanco (2008) realizan un análisis de contenido en libros de texto de matemáticas de España y Chile sobre la proporcionalidad numérica en secundaria. Como resultados del comparativo, encontraron que la mayoría de los problemas son ejercicios de

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

reconocimiento, aplicación de algoritmos y que no se presentan situaciones en contextos reales. Estos resultados permiten identificar coherencia entre los dos sistemas educativos, que, aunque son países pertenecientes a continentes diferentes, se asemejan en la organización de actividades y en el contenido de los libros de texto. De ello surge la siguiente pregunta: ¿Al examinar dos libros de texto de países latinoamericanos se encontrará la misma relación? Pregunta que se espera responder en el desarrollo de esta investigación.

Por su lado, Díaz-Levicoy et al. (2016) realizaron un análisis de contenido y un estudio comparativo en libros de texto de primaria en España y Chile sobre los gráficos estadísticos. Uno de los resultados más notorios se relaciona con la cantidad de actividades, presentando el libro chileno el doble de actividades que el libro español. Estos resultados relacionándolos con los resultados de Pino y Blanco (2008) muestra que aunque se asemejan los sistemas educativos, también se pueden encontrar diferencias significativas como la estructura y contenido de los libros de texto, por lo que resulta pertinente el poder identificar aquellas semejanzas y diferencias que se pueden evidenciar en dos libros de texto de países latinoamericanos, como lo es México y Colombia.

Retomando a Mosquera (2018) se resalta el estudio comparativo realizado entre dos países latinoamericanos (Ecuador y Venezuela) dado que al igual que en la presente investigación, se pretende comparar las potencialidades y limitaciones en los libros de texto de México y de Colombia entorno a los significados del signo igual. El autor resalta que “comparar textos escolares de dos o más países para identificar diferencias y semejanzas entre ellos puede proveernos de información valiosa para mejorar el diseño de nuevos libros” (Mosquera, 2018, p. 95), información que puede mostrar los contenidos matemáticos que están siendo abordados y aquellos que necesitan un tratamiento adicional por parte del docente.

Hernández et al. (2020) realizaron un análisis comparativo entre el currículo oficial y libros de texto sobre los significados del límite de una función. Los resultados muestran que las tareas favorecen el aprendizaje de tipo conceptual y procedimental, mas no el aprendizaje de tipo práctico que se solicita desde el currículo oficial, siendo clara una desarticulación entre lo que el currículo solicita y lo que los libros de texto promueven. Los autores mencionan que los análisis comparativos “se concentran en analizar diferencias de abordaje de una noción matemática, formas de representación utilizadas, tareas y aprendizajes propuestos o bien los significados asociados a un contenido matemático escolar” (Hernández et al., 2020, p. 242), comparativos que pueden realizarse entre libros de texto de diferentes editoriales o de diferentes países, entre currículos o entre sistemas educativos para identificar semejanzas, diferencias e inclusive diferentes puntos de vista.

El análisis de los significados del signo igual que promueven los libros de texto de primaria es importante, ya que tiene efectos en los significados que promueven en su

contenido y que son necesarios para el aprendizaje de las estructuras algebraicas. En este sentido, realizarlo en el marco de un estudio comparativo permitirá enriquecer la investigación al poder mostrar un panorama entre dos propuestas educativas de dos países latinoamericanos que podrá permitir evidenciar: aquellos aspectos que se asemejan, aquellos que se diferencian y que podrán servir de insumo, ya sea para la creación de futuros libros de texto, para la planificación de clases y para brindar un panorama crítico frente a los alcances que pueden tener los libros de texto.

1.1.3 El signo igual como objeto de análisis

En el presente apartado se muestran algunos análisis que diferentes autores han utilizado en sus investigaciones en torno al signo igual y se enfatiza en la manera en que puede interpretarse dicho signo: según el contexto en el que se utiliza, según la visión interpretativa del estudiante o según el significado del signo.

Los autores Knuth et al. (2006) examinan la comprensión del signo igual por parte de estudiantes de secundaria de Estados Unidos, mediante una evaluación escrita. El análisis se realiza desde dos perspectivas: una visión relacional y una visión operacional del signo igual. Concluyen que muchos de los estudiantes carecen de una comprensión sofisticada del signo igual y que son pocos los que comprenden una visión relacional, además, resaltan que los estudiantes que entienden el signo igual como relación de equivalencia tienen más éxito en la resolución de ecuaciones. Estos autores manifiestan que los estudiantes presentan una concepción limitada del signo igual, situación que causa dificultades posteriores en la comprensión de las estructuras algebraicas. Esta lectura muestra una problemática y deja abierta la posibilidad de explorar la presencia de estas dos visiones del signo igual, desde las actividades y contenidos propuestos en los libros de texto.

Molina (2006) analizó la comprensión de los estudiantes de primaria de igualdades y sentencias numéricas para identificar los significados del signo igual y su evolución, en este sentido, propuso actividades escritas, realizó discusiones generales con el grupo y realizó entrevistas individuales con los estudiantes que consideraban pertinente ahondar en su desarrollo. Para realizar el análisis de los significados sobre el signo igual, la autora realiza una revisión bibliográfica en relación a los significados que han sido asociados al signo igual en el álgebra y aritmética. Así, establece once significados que se asignan al símbolo, enfatizando que son reconocidos matemáticamente como símbolo, los asignados por los estudiantes y por los libros de texto.

Como resultados, los autores evidenciaron que los estudiantes utilizan el signo igual desde cuatro significados diferentes: como operador, como expresión de una acción, como equivalencia numérica y como mismidad numérica; sin embargo, manifiestan que los estudiantes tienden a interpretar el signo igual como un símbolo que conlleva a una operación y que son reacios a desarrollar un significado de equivalencia numérica. Estos resultados

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia


brindan un panorama que permite identificar el impacto que un signo tiene en el aprendizaje de los estudiantes y que los significados que se potencien permiten una comprensión más amplia del contenido a desarrollar.

Este referente brinda como elemento de análisis los once significados que se pueden asociar al uso del signo igual, así como la ejemplificación para cada uno de ellos. Estas formarían parte de las categorías del análisis. A continuación, en la Tabla 1 se presentan los once significados de forma sintetizada:

Tabla 1. Once significados del signo igual

No.	Significado	Descripción	Ejemplo
1	Propuesta de actividad	Refiere al uso del signo en expresiones incompletas, con una cadena de números y/o símbolos seguidos a la derecha por el signo igual.	$16 : 3 =$ $x(x + 1) - 3x(x + 5) =$
2	Operador	Refiere al uso del signo como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda, y su resultado, que se dispone a la derecha.	$4x5 = 20$ $x(x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$
3	Expresión de una acción	Éste es un significado bidireccional del signo, que extiende el significado de operador recién reseñado. Aquí la cadena o secuencia de operaciones va indistintamente a la izquierda o a la derecha, y el resultado, en el otro miembro.	$2x = x(x - 2) - x^2 + 4x$ $24 = 12 + 12$ $12 + 12 = 24$
4	Separador	Este uso, matemáticamente incorrecto, se lo dan algunos alumnos al utilizarlo en contextos algebraicos como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad.	$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x} = x^2 + 1 = x$ $= x^2 - x + 1$
5	Expresión de una equivalencia	Refiere al uso del signo para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático.	
5.1	Equivalencia numérica	Indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas que se encuentran en ambos miembros.	$4 + 5 = 3 + 6$ $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$
5.2	Equivalencia simbólica	Indica el mismo valor numérico de dos expresiones	$x^2 + 2x = x(x + 2)$

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

		algebraicas para todos los valores de las variables.	$a + b = b + a$
5.3	Identidad estricta	Aquí las expresiones a ambos lados representan el mismo objeto matemático con el mismo representante.	$3 = 3$ $x + 5 = x + 5$
5.4	Equivalencia por definición o por notación	Indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por el significado de la notación utilizada.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ $100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$
6	Expresión de una equivalencia condicional (ecuación)	Se encuentra en el contexto del álgebra cuando la equivalencia expresada por el signo de igual sólo es cierta para algún o algunos valores de la o las variables, pudiendo inclusive no ser cierta para ningún valor.	$x^2 + 4x = 5x - 6$
7	Definición de un objeto matemático	Se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático.	$a^0 = 1$ $f(x) = 2x + 3$
8	Expresión de una relación funcional o de dependencia	Refiere al uso para indicar una relación o dependencia entre variables o parámetros.	$y = 3x + 2$ $l = 2\pi r$
9	Indicador de cierta conexión o correspondencia	Significado impreciso que se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y no matemáticas.	 = 3
10	Aproximación	Este significado corresponde al uso del signo para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico.	$\frac{1}{3} = 0,33$
11	Asignación de un valor numérico	El signo asigna un valor numérico a otro símbolo.	<i>Si $x = 4$, ¿Cuál es el valor de x^2?</i>

Nota: tomado de Molina et al. (2009)

Por otro lado, Los autores Burgell y Ochoviet (2015) exploran los diferentes significados del signo igual construidos por estudiantes de secundaria en Uruguay, mediante la aplicación de cuestionarios y entrevistas individuales. Como variables de análisis los autores consideraron tanto los once significados del signo igual expuestos anteriormente,

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

como las visiones relacional y operacional mencionadas por Knuth et al. (2006) que se refieren a la forma en que se puede interpretar el signo igual.

Como conclusión general mencionan que los alumnos interpretan el signo igual como un indicador de resultados de una operación y no como una relación de equivalencia, aunque, también se evidencia un progreso de una visión operacional a la relacional, a medida que se avanzaba en los cuestionarios propuestos. En cuanto al significado del signo, se encuentra que los más utilizados son el de operador y el de propuesta de actividad. Teniendo en cuenta estos resultados, para esta investigación surge el interrogante ¿la forma en que se aborda el signo igual en los libros de texto de primaria promueve una visión operacional o relacional?

Burgell y Ochoviet (2015) muestran una integración de dos formas de análisis que se pueden realizar en torno al significado del signo igual, lo cual permite evidenciar que se pueden integrar los elementos de análisis que se han expuesto. Se retoma de este artículo las visiones sobre la interpretación del signo igual, las cuales se presentan en la tabla 2:

Tabla 2. Visión operacional y relacional

Visión	Definición
Visión operacional	Implica considerar el signo de igual como un <i>operador</i> o como una <i>señal de hacer algo</i> .
Visión relacional	Implica ver el signo de igual como el indicador de una relación de equivalencia.

Nota: adaptado de Burgell y Ochoviet (2015)

1.1.3.1 El signo igual en los libros de texto de educación primaria

En esta sección, se presentan dos investigaciones donde el objeto de estudio sigue siendo el signo igual pero enfocadas en libros de texto de educación primaria, teniendo en cuenta que esta investigación se va a desarrollar en educación primaria.

Ramírez y Rodríguez (2010) enfocan su investigación en analizar los contextos (aritmético o no aritmético) en los que se presenta el signo igual en libros de texto de Matemáticas de 1° y 2° grado de España. Las autoras manifiestan que el análisis de los contextos les permite identificar si las actividades propuestas en los libros brindan la oportunidad a los estudiantes de adquirir un significado relacional y de equivalencia o si favorecen un sentido operacional. Como resultados, se obtuvo que los estudiantes encuentran el signo igual en contextos aritméticos, donde se presenta la operación, el signo igual y el resultado, siendo este contexto propulsor de la interpretación operacional del signo, lo que implicaría a futuro dificultades al adquirir un significado de equivalencia.

Esta perspectiva brinda un panorama frente a los contextos en que el signo igual es utilizado y propuesto en libros de texto en educación primaria y a su vez establecer si permite

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

el desarrollo de un significado operacional o relacional. En la tabla 3 se describen los contextos.

Tabla 3. Contextos del signo igual

Contexto	Categorías	Subcategorías
Contextos Aritméticos	Canónico	Operación igual resultado. Encuadraremos aquí sentencias del tipo $a + b = c$ pudiendo ser la incógnita cualquiera de las cantidades (a , b o c), y la operación suma, resta, multiplicación, incluso división.
	No Canónicos	Operaciones en ambos lados del signo igual. En este caso, se incluyen sentencias con la misma operación en ambos lados del signo igual ($a + b = c + d$), o con diferente operación en ambos lados del signo igual ($a \times b = a + a + a$ (b veces)).
		Resultado igual operación: $a = b + c$, pudiendo ser la incógnita cualquiera de las cantidades (a , b o c) y la operación suma, resta, multiplicación y división.
Contextos no Aritméticos	Comparación de cantidades: $a = a$.	
	Contextos de medida: 1 metro = 10 decímetros o 1 regleta roja = 2 regletas blancas.	
	Contextos de equivalencia de monedas: 1 euro = 100 céntimos.	
	Sistema numérico decimal: 400 unidades = 4 centenas.	
	Otros contextos no aritméticos: $a = 1$.	

Fuente: tomado de Ramírez y Rodríguez (2010)

Asimismo, Navia y Vergara (2021) analizan un libro de texto de matemáticas de 1° de primaria, para caracterizar los contextos y significados que presentan las tareas relacionadas con el signo igual, mediante un análisis de contenido desde la perspectiva de Bernete (2013). Las autoras consideran como variables de análisis los once significados atribuidos al signo igual (expuestos anteriormente) y los dos contextos: aritmético y no aritmético, sin embargo, dado que el estudio se enfoca en 1° de primaria, se reducen los once significados a cinco significados, que son los que corresponden a las competencias alcanzadas por los estudiantes en dicho curso.

Esta lectura centra la atención en los significados y contextos que el libro de texto de primer grado de primaria propicia entorno al signo igual, sin embargo, es pertinente observar qué resultados se obtienen al analizar un libro de texto del último grado de educación primaria, dado que se esperaría encontrar que a diferencia del primer grado, sea mayor la cantidad de significados que se propicien y que los contextos proporcionen el desarrollo de un sentido relacional del signo igual. Por otro lado, de esa lectura se retoma la metodología utilizada para la realización del análisis de contenido, siguiendo la propuesta de Bernete (2013), la cual consta de tres momentos:

- Trabajo previo a la obtención de los datos.

- Extracción de los datos.
- Explotación de los datos.

En conclusión, el signo igual es un signo usado frecuentemente tanto en el estudio de las matemáticas como en otras áreas del conocimiento, por lo tanto, tiene diversos significados que están asociados a los usos que se potencien, así, los contextos de su uso conllevan a que se desarrolle una interpretación tanto operacional como relacional. En este sentido, el identificar los significados que se potencian desde dos libros de texto permitirá identificar las diferencias y semejanzas entre dos sistemas educativos latinoamericanos, para encontrar explicaciones entorno al signo igual y posibles implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1.1.4 El significado del contenido

Teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo es analizar los significados atribuidos al signo igual, es importante antes comprender la forma en que se entiende la palabra significado y comprender la importancia de investigar los significados de los conceptos dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A continuación se presentan algunos referentes.

Retomando a Molina (2006) se resalta la concepción sobre el significado de un objeto matemático, entendido como “una clase de comprensión, cierta forma de comprender dicho objeto. Por tanto, se necesita al menos una comprensión de un objeto para comenzar a tener un significado de él” (Molina, 2006, p. 524). En este sentido, se entiende que para establecer un significado de un contenido, se necesita antes una comprensión de él, es decir conocerlo, interpretarlo y haber tenido un acercamiento con anterioridad.

Por su lado, León, López y Carrillo (2020) investigaron el significado de probabilidad en dos libros de texto de secundaria en México, a través de un análisis de contenido. Los autores encontraron que primeramente se promueve un significado intuitivo y casi a la par se desarrolla un significado frecuencial usando experimentos aleatorios diversos en los cuales se usa la idea de frecuencia relativa. Esta investigación muestra que los significados se construyen a partir de los usos y del tratamiento que se brinda, siendo un referente que aporta a este trabajo una visión sobre los significados como referente teórico.

Finalmente, retomando el artículo de Hernández, Zamora y Lupiáñez (2020), se rescata el enfoque teórico utilizado; dado que brinda un panorama sobre el análisis didáctico tomando como referente a Rico (2012). Este referente será utilizado en esta investigación, específicamente la fase 1 que corresponde a la noción de significado y uso del análisis de contenido. Los autores mencionan que “se propone al análisis de contenido como un método que permite establecer y organizar la diversidad de significados de un concepto matemático” (Hernández et al., 2020, p. 245); de esta manera, al querer analizar los significados asociados

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

al signo igual en libros de texto, es un enfoque muy acorde a los objetivos de este trabajo. En la tabla 1 se describe los componentes del significado:

Tabla 4. Fase 1 Componentes del significado

Fase 1. El Análisis de Contenido como organizador de los significados de un contenido matemático escolar	
Sistemas de representación	Definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros.
Estructura conceptual	Comprende conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
Fenomenología	Incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido.

Nota: tomado de Hernández et al. (2020)

Así, mediante el análisis de contenido como organizador de significados, se pretende identificar aquellos significados propuestos en los libros de texto, dado que, la forma en que es presentado un objeto matemático, el tratamiento que se le brinda y los contextos en que se usa, son algunos elementos que conllevan al reconocimiento y la comprensión de la diversidad de significados que un mismo contenido puede tener.

1.2 Reflexión

Partiendo del análisis realizado de los antecedentes se evidencia la relevancia que el estudio del signo igual ha tenido, debido a la gran importancia que tiene en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, en especial, en la incursión al álgebra.

Los análisis se han desarrollado desde diferentes perspectivas, desde sus usos, estableciendo once significados del signo igual (Burgell y Ochoviet, 2015; Byrd et al., 2015; Parodi et al., 2020; Navia y Vergara, 2021), desde los contextos, contemplando los aritméticos y no aritméticos (Powell, 2015; Navia y Vergara, 2021; Ramírez y Rodríguez, 2011) y desde la interpretación que se le brinda al ser utilizado, desde una visión operacional y relacional (Knuth et al., 2006; Parodi et al., 2020; Vermeulen y Meyer, 2017). En este sentido se cuenta con una variedad de variables que serán insumo para establecer las categorías de análisis que permitirán describir los diferentes significados del signo igual en este trabajo.

En lo que respecta a la metodología, se han utilizado cuestionarios aplicados a estudiantes de secundaria (Parodi et al., 2020; Vermeulen, y Meyer, 2017) y en primaria (Molina et al., 2009; Ramírez y Rodríguez, 2011). También mediante el análisis de libros de texto en primaria (Navia y Vergara, 2021; Chica y Soto, 2015), y en secundaria (Byrd, McNeil et al., 2015). Así, de los 14 referentes estudiados 10 de ellos analizan los resultados obtenidos de cuestionarios, 2 realizan análisis de libros de texto junto con cuestionarios y 2

enfocan el análisis a libros de texto de primaria; de aquí, el interés por encaminar esta investigación hacia el análisis de libros en el nivel educativo de primaria, específicamente para estudiantes de 10 y 11 años (5to grado).

Por otro lado, teniendo en cuenta las variables de análisis utilizadas desde los diferentes trabajos, se evidencia que quienes integran las tres perspectivas (usos del signo igual, contextos e interpretación) son los autores Burgell y Ochoviet (2015) y Burgell (2013) en Uruguay quienes consideran que así se logra realizar un análisis más profundo; sin embargo, sus trabajos se enfocan en el nivel secundaria, siendo pertinente el poder extender este análisis en libros de texto de primaria.

Teniendo en cuenta los estudios comparativos expuestos, se evidencia que solamente 1 de 3 se enfoca en identificar las semejanzas y diferencias entre dos países latinoamericanos (Venezuela y Ecuador), sin embargo ninguno de ellos se concentra en el signo igual como objeto de análisis. Por esto, el interés de este trabajo radica en analizar los significados del signo igual que los libros de texto de educación primaria proponen en México y Colombia.

1.3 Problema de investigación

1.3.1 Problemática

Dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es crucial el reconocimiento y apropiación del lenguaje simbólico, dado que es utilizado para comunicar y comprender conceptos, relaciones, operaciones, fórmulas y reglas propias de las matemáticas.

Cuando los estudiantes inician el desarrollo de su pensamiento algebraico su conjunto numérico se amplía debido a la incursión de nuevas estructuras. Por lo tanto, deben desligarse de los procesos aritméticos identificando una nueva simbología, lenguaje y reglas. Así, en el transcurso de la educación primaria se van interiorizando conceptos que son importantes dentro del álgebra; sin embargo, autores como Knuth et al. (2006) han manifestado que “una concepción limitada de lo que significa el signo igual es uno de los principales escollos en el aprendizaje del álgebra” (p. 310) causando dificultades posteriores en la comprensión de las estructuras algebraicas.

Ramírez y Rodríguez (2011) afirman que “las investigaciones muestran que el significado del signo igual que adquieren los estudiantes desde los primeros cursos de escolarización es incompleto, interpretándolo como una invitación a hacer algo, es decir, operar sobre los números más que un símbolo relacional” (p. 504). Esto deja en evidencia que el tratamiento otorgado a este signo es insuficiente para adquirir las competencias necesarias al iniciar con el estudio del álgebra, por lo tanto, la comprensión que los estudiantes adquieren sobre el signo igual es imprescindible (Burgell y Ochoviet, 2015).

Así, Navia y Vergara (2021) manifiestan la “necesidad de realizar procesos de investigación relativos al signo igual, no sólo por la poca comprensión que los estudiantes manifiestan sino también porque las dificultades de su aprendizaje se constituyen en un obstáculo para el difícil “tránsito” de la aritmética al álgebra” (p. 18), puesto que una adecuada comprensión del signo igual constituye un aporte significativo para el aprendizaje del álgebra (Burgell y Ochoviet, 2015).

1.3.2 Problema

Los significados que los estudiantes adquieren en los grados elementales sobre el signo igual son parciales, puesto que es interpretado como la invitación a operar más que ser visto como un símbolo relacional (Ramírez y Rodríguez, 2011). Esta falta de comprensión relacional del signo igual afecta el aprendizaje de los estudiantes tanto en educación primaria como en educación secundaria (Ramírez, 2010), lo cual muestra dificultades en el tránsito entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

Wardat et al. (2021) afirman que “existe una seria falta de conexión en el currículo entre el álgebra que se enseña en los grados superiores y la aritmética que se enseña en la escuela primaria” (p. 1.506), siendo importantes los significados que se favorecen desde educación primaria para la comprensión y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes en grados superiores.

Aunque comprender el signo igual como una señal para hacer algo generalmente no es problema en la resolución de problemas aritméticos, en el tránsito a la resolución de problemas algebraicos se evidencian falencias. Esto se debe a que los estudiantes de secundaria tienen grandes dificultades a la hora de comprender el signo igual como una equivalencia, como una identidad y como una relación. Así, la poca inmersión del signo igual como un símbolo relacional, conlleva a que se fije en los estudiantes el significado operacional ocasionando después que los estudiantes presenten dificultades al inducir este cambio, Ramírez (2010) menciona que:

“Otra de las causas a las que se atribuye la interpretación inadecuada del signo igual se refiere a la experiencia que tienen los niños en la escuela elemental con los contextos que encuentran en los libros de texto y las explicaciones del profesor” (p. 18)

En este sentido, la forma en que los libros de texto presentan un objeto matemático permite a los estudiantes tener una interacción y una experiencia con dicho contenido conduciéndolos a la apropiación de distintos significados. Sin embargo, González et al. (2015) afirman que:

“El libro de texto es un recurso material utilizado habitualmente para organizar el trabajo en el aula, en el que se apoyan los estudiantes y profesores

como guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Martínez Bonafé, 2008; González y Sierra, 2004). Como cualquier otro material educativo, el libro de texto condiciona el tipo de enseñanza (...) y siendo a veces responsable de la transmisión de errores e inconsistencias” (p. 74)

Considerando lo anterior, es importante analizar los significados del signo igual que se favorecen en los libros de texto (mexicanos y colombianos), ya que estos aprendizajes son imprescindibles para el estudio y el desarrollo del pensamiento algebraico en los grados superiores.

1.3.3 Pregunta de investigación

A partir de lo expuesto en la problemática, surge el siguiente interrogante:

¿Cuáles son las diferencias y semejanzas de los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes entre 10 y 11 años?

1.3.4 Objetivo general

Comparar los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes entre 10 y 11 años.

1.3.5 Objetivos específicos

1. Establecer las categorías de análisis para la identificación y clasificación de los significados del signo igual.
2. Identificar los significados del signo igual presentes en las tareas del libro de texto de matemáticas de México y Colombia.
3. Describir los significados potenciados en las tareas relacionadas con el signo igual presentes en el libro de texto de matemáticas de México y Colombia.

1.4 Justificación y alcance

Dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas los docentes y estudiantes utilizan recursos didácticos como medio de apoyo en sus procesos académicos, uno de estos recursos es el libro de texto, el cual es considerado como una herramienta didáctica.

Navia y Vergara (2021) mencionan que para los docentes “en los procesos de organización de la enseñanza de las matemáticas, los libros de texto reciben la mayor atención al convertirse en materiales imprescindibles para que los docentes fundamenten y desarrollen sus actividades profesionales” (p. 17). Así, al ser una herramienta base para la planeación de los maestros, es importante analizar su contenido, dado que su construcción es producto de una trasposición didáctica (Díaz et al., 2020) y los aprendizajes expuestos pueden

no ser de todo confiables o puede que no sean suficiente para garantizar un aprendizaje significativo en los estudiantes y la apropiación de diversos significados.

Estudiar el contenido propuesto en los libros de texto cobra relevancia dentro de la Matemática Educativa, dado que según Pallauta et al. (2021) “el análisis de las tareas propuestas en los libros de texto para un contenido particular ayuda a comprender la forma en que se considera la actividad matemática y resolución de problemas relacionados con dicho contenido en el aula” (p. 3); es decir, ayuda a que los docentes comprendan qué significados se favorecen y cuales requieren de un trabajo complementario para lograr un desarrollo completo del contenido. Así mismo, el análisis de contenidos permite al docente tomar una postura crítica frente al uso y las potencialidades de cada una de las actividades que se proponen.

Dentro de los contenidos abordados en los libros de texto de matemáticas, el signo igual es uno de los símbolos más utilizados, dado que se encuentra inmerso en los diversos contenidos y en el transcurso de todos los niveles escolares; así el aprendizaje de su significado es importante en la comprensión de contenidos y conceptos tanto aritméticos como algebraicos (Ramírez y Rodríguez, 2011). Los múltiples usos y significados del signo igual son cruciales en el aprendizaje de las estructuras algebraicas, Vermeulen y Meyer (2017) mencionan que “el signo igual es un concepto algebraico importante que los estudiantes deben encontrar y comenzar a comprender en los grados inferiores” (p. 2), en los grados elementales los estudiantes inician la construcción de conceptos y empiezan a apropiarse de significados que, entre más amplios sean, ayudarán a que su destreza y desempeño en niveles superiores sea mucho mejor.

Según Ramírez (2010), la interpretación inadecuada que los estudiantes tienen del signo igual se debe a la “experiencia que tienen los niños en la escuela elemental con los contextos que encuentran en los libros de texto y las explicaciones del profesor” (p. 18), Así, los significados que desde los libros de texto se potencian y la forma en que son abordados inciden en la comprensión e interpretación de los estudiantes, dado que causa dificultades en el aprendizaje del álgebra en niveles superiores.

De esta manera, la comprensión adecuada del signo igual conlleva a que el estudiante identifique este signo desde una visión relacional, es decir, que lo interprete como una equivalencia. Burgell (2013) menciona que para “comprender adecuadamente el signo de *igual*, se requiere poder interpretarlo de forma *relacional*, es decir como el indicador de una relación de equivalencia, y no exclusivamente de forma *operacional*, como el indicador del resultado de una operación o como una señal de hacer algo” (p. 39). Interpretar el signo igual como una relación tiene efectos positivos en el desarrollo del pensamiento del estudiante ya que: promueve una comprensión relacional de este símbolo, prepara a los estudiantes para enfrentar aspectos epistemológicos en la transición de la aritmética al álgebra, ayuda a

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

promover un aprendizaje con comprensión y beneficia en la comprensión de expresiones aritméticas y algebraicas.

Analizar las tareas presentadas en el libro de texto para la enseñanza de un contenido, permite identificar características de un sistema educativo y la forma como se abordan los significados. A partir de esto, es posible evidenciar los significados del signo igual y mostrar si estos favorecen la construcción de una visión relacional u operacional. En este sentido, el realizar el análisis de contenido en dos libros de texto de dos países latinoamericanos que coinciden al ofrecer de forma gratuita libros de texto a los estudiantes de primaria de las instituciones públicas, permitirá evidenciar aquellos aspectos que se asemejan y aquellos que se diferencian, mediante un estudio comparativo.

El tipo de estudio comparativo en que se enmarca esta investigación es en el tipo estudio de un número limitado de casos, dado que se centra en identificar hallazgos mediante la identificación de semejanzas y diferencias, descubrir la combinatoria de causas que intervienen y que caracterizan los significados que se potencian y que pueden ser producto de las estructuras conceptuales, la fenomenología o el contexto de cada libro de texto, al permitir identificar si los significados son determinados por el contexto de cada país o por los contenidos matemáticos que se abordan.

En este sentido, este estudio comparativo permite evitar caer en particularismos, por lo cual, es un método adecuado para la presente investigación, puesto que permitirá comparar los elementos que son comunes, pero a su vez las diferencias que se encuentran, para encontrar explicaciones y descripciones en torno al signo igual y sus posibles implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Colombia y México, además de mostrar hallazgos más sólidos frente a los fenómenos que se pueden repetir y así servir de insumo para la creación de futuros libros de texto, para brindar un panorama crítico frente a los alcances que pueden tener los libros de texto y para mostrar elementos que ayuden a la integración y construcción de propuestas que favorezcan la comprensión del signo igual como una relación de equivalencia.

Capítulo 2: Marco teórico

En este capítulo, se presentan los conceptos bajo los cuales se entienden los libros de texto, el significado y los estudios comparativos; posteriormente se exponen los componentes del significado como enfoque teórico y por último, se presenta la resignificación de los significados del signo igual a la luz del triángulo semántico como organizador de contenidos.

Teniendo en cuenta el objetivo de este trabajo que es comparar los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes de entre 10 y 11 años, es importante entender que en un estudio de este tipo “se concentran en analizar diferencias de abordaje de una noción matemática, formas de representación utilizadas, tareas y aprendizajes propuestos” (Hernández et al., 2020, p. 242), es decir, que es un proceso que permite identificar características y significados de contenidos matemáticos particulares, en este caso, en los libros de texto. Donde un libro de texto bajo la concepción de Alzate et al. (1999) es “un material que se emplea en la escuela, ya sea de manera preferencial, como medio auxiliar, como fuente de información o como facilitador del aprendizaje” (p. 28), es decir, un recurso utilizado en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

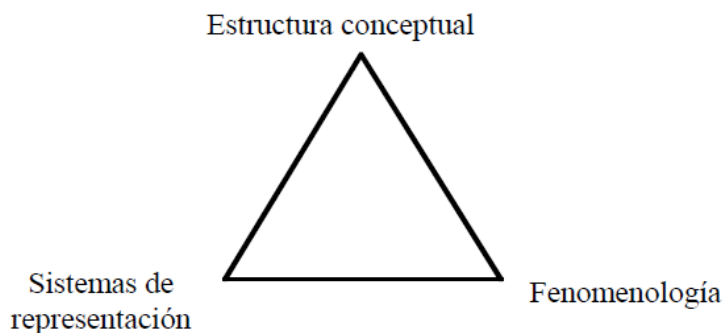
Tanto en México como en Colombia, se denomina libro de texto a un material físico o digital que contiene una secuencia de contenidos que dan respuesta a los lineamientos curriculares establecidos en cada país, en el caso de Colombia responde a los Estándares Básicos de Competencias planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y en el caso de México al Plan de Estudios establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP). Estos libros pueden ser elaborado por el MEN o la SEP (son los que se utilizan en las instituciones educativas públicas y no tienen ningún costo) o por una editorial privada (Norma, Santillana, etc.).

En este sentido, Alzate et al. (1999) afirman que los libros de texto “constituye un instrumento que les ofrece a la educadora y al estudiante una información sobre los diversos temas o desarrollos que las disciplinas científicas tienen en el momento dado” (pp. 28-29). Así, una información relevante son los significados que se potencian en su contenido, por tanto, esta noción se vuelve eje rector en esta investigación. Se entiende el significado como “el concepto [noción, percepción o conocimiento] que alguien tiene sobre ese algo” (Saussure, 1945, citado en Briceño et al., en prensa). En la presente investigación se adoptará la noción de significado expuesta por Rico (2012) por lo que en la siguiente sección se presentan sus componentes.

2.1 Componentes del significado de un contenido

La noción de significado de un contenido dentro de la Matemática escolar, según Rico (2012), se compone por tres dimensiones que conforman el triángulo semántico:

Figura 1. Triángulo semántico de un concepto



Fuente: tomado de Rico (2012).

Esta terna permite identificar la forma en que se organiza un contenido matemático y los significados que se le asocian, dado que un contenido puede tener multiplicidad de significados; en este sentido, Hernández y Kú (2021) mencionan que “El estudio de la multiplicidad de significados de conceptos matemáticos escolares es una línea vigente de investigación (Pino-Fan, 2017), pues brinda información sobre el discurso que se potencia dentro de la matemática escolar.” (p. 18). A continuación se describen cada una de las dimensiones.

2.1.1 Sistemas de representación

Los contenidos y objetos matemáticos pueden tener una variedad de significados, por lo que cada uno de estos puede necesitar de varios sistemas de signos para su conceptualización. Los sistemas de representación se encuentran definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros. A continuación, se exponen los nueve sistemas de representación propuestos por Cañadas y Gómez (2014) y se presenta un ejemplo de lo que sería una representación del signo igual en cada uno de ellos:

- **Sistema simbólico:** es un sistema de representación específico que tiene sus propios signos como números, letras y símbolos de las operaciones aritméticas, con los cuales se puede operar y entre cuyos elementos existe una relación. Para el caso del signo igual el signo sería =
- **Sistema Verbal:** Es el sistema de representación que tiene sentido cuando el lenguaje es referido a conceptos y procedimientos matemáticos que se quieren representar. En este caso, en el siguiente enunciado: “Al sumarle 10 unidades a un número, el resultado es 15” aparece el signo igual de forma implícita. Otra forma en la que puede aparecer es cuando se pide encontrar un número que al sumarle 2 de igual a 3
- **Numérico:** Es un sistema de representación compuesto por símbolos llamados números, como $2 + 2 = 4$, donde el símbolo del signo igual está acompañado de los números 2 y 4.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

- **Tabular:** Es un sistema de representación que tiene sus propios signos y reglas donde se combinan y se relacionan unas con otras. En la figura 3 se puede ver como el signo igual aparece en la tabla de manera implícita al relacionar la cantidad de camisas con la cantidad de botones de tal manera que 1 camisa = 15 botones.

Figura 2. Ejemplo representación tabular

Camisas de adulto					
Cantidad de camisas	1	6	14	75	160
Cantidad de botones	15				

Nota: tomado de libro de texto Desafíos Matemáticos grado quinto – México (p. 45)

- **Gráfico:** Es un sistema de representación que emplea signos y reglas que se relacionan (valores, escalas, trazos, ejes) para representar la información de manera gráfica, como lo son los diagramas. En la figura 3 el signo igual está relacionando la representación gráfica y numérica de una fracción.

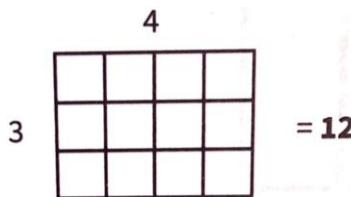
Figura 3. Ejemplo representación gráfica



Nota: tomado de libro de texto Proyecto Sé grado quinto (Cuadernillo 1) – Colombia (p.163)

- **Geométrico:** Es un sistema de representación que permite representar de manera geométrica operaciones o situaciones matemáticas. Como se observa en la figura 4, donde el signo igual relaciona el resultado del área de un rectángulo con su representación.

Figura 4. Ejemplo representación geométrica



Nota: tomado de libro de texto Proyecto Sé grado quinto (Cuadernillo 1) – Colombia (p.155)

- **Pictórico:** Es un sistema de representación que utiliza diferentes elementos para relacionarlos con cantidades matemáticas, como agrupar esferas para realizar agrupaciones. Como es el caso de la figura 5 donde se relacionan el conteo de tres bicicletas con la cantidad numérica que representa 3.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 5. Ejemplo representación pictórica



Nota: Tomado de Molina (2006)

- **Manipulativo:** Es un sistema de representación que utiliza recursos y medios para representar determinados elementos, como por ejemplo el ábaco. En la tabla 5, se propone a los estudiantes recortar le material concreto base 10 y representar el número que se solicita.

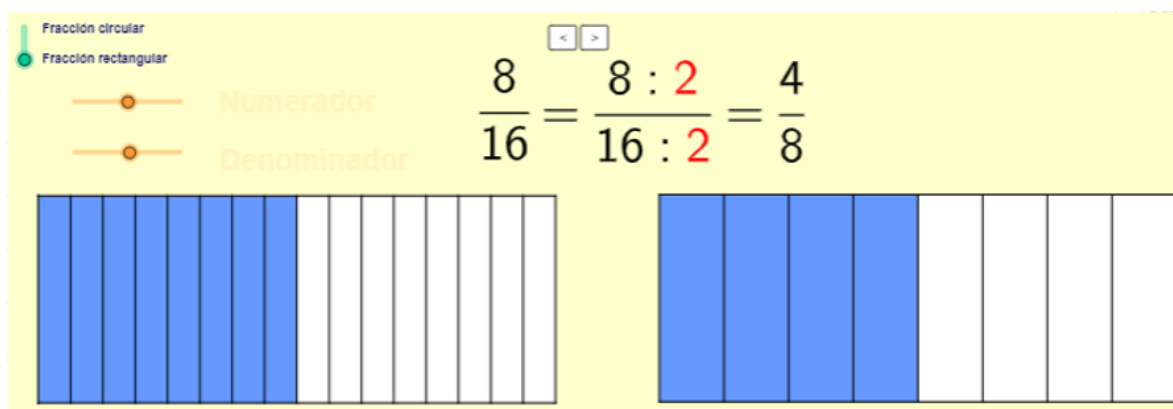
Tabla 5. Ejemplo representación manipulativa

Centro 1, 2 y 3 - Material manipulativo			1,75=		
UNIDADES (1,0)	DÉCIMAS (0,1)	CENTÉSIMAS (0,01)			

Nota: tomado de libro de texto Proyecto Sé grado quinto (Cuadernillo 1) – Colombia (p.13)

- **Ejecutable (relacionado con las TIC):** Es un sistema de representación que se asocia a programas de cómputo como Cabri o Geogebra para representar un concepto determinado. La figura 6 muestra un ejemplo en Geogebra se presenta el siguiente recurso donde al lado izquierdo se propone una fracción y al lado derecho del signo igual se simplifica obteniendo una fracción equivalente, que también se representa gráficamente.

Figura 6. Ejemplo representación ejecutable



Nota: tomado de Geogebra [Simplifica de fracciones – GeoGebra](#)

2.1.2 Estructura conceptual

Comprende conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad, es decir, se refiere a todo lo relacionado con el concepto matemático del contenido matemático escolar a estudiar. Esta dimensión se divide en dos componentes del conocimiento matemático (Rico, 1997). A continuación, se ejemplifican cada uno de los elementos que hacen parte de cada componente contextualizado con el signo igual como objeto de análisis.

1) **Campo conceptual** el cual está organizado en:

a) **Hechos**

- i) **Términos:** contiene los vocablos con los que se denotan los conceptos, algunos pueden ser números, suma, cociente, ecuaciones, área.
- ii) **Notaciones:** son los signos y los símbolos que se emplean para expresar los conceptos, en esta investigación la notación explícita es a través del símbolo = que puede estar acompañado de signos como +, -, /.
- iii) **Convenios:** son acuerdos consensuados para comunicar la información. $2/3 = 0,6667$, donde el signo igual en este caso es entendido como equivalencia (Relación que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).
- iv) **Resultados:** $3 + 5 = 1 + 7$, al obtener que en un igualdad las cantidades ubicadas al lado derecho y lado izquierdo están relacionadas entre sí.

b) **Conceptos:** como equivalencia numérica, igualdad y desigualdad.

c) **Estructuras conceptuales relacionadas con una noción particular:** sirven para unir conceptos y relacionarlos entre sí. Como la relación de equivalencia como objeto matemático asociado al signo igual.

2) **Campo procedimental** el cual se compone por mencionar algunos como:

- a) **Destrezas que procesan hechos:** reconocer la relación entre las cantidades presentes en una igualdad.
- b) **Razonamientos que relacionan conceptos:** Demostrar la equivalencia numérica entre una representación geométrica y numérica.
- c) **Estrategias que actúan sobre las estructuras:** la comprensión e identificación de la diferencia entre una equivalencia, una igualdad y una identidad.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente sobre la estructura conceptual, es necesario reconocer que este análisis se centra en libros de texto de grado quinto de primaria, por lo tanto, el contenido propuesto se encuentra en el nivel hechos del campo conceptual y en el

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

nivel destrezas en el campo procedimental, esto debido al nivel y desarrollo cognitivo de los estudiantes a quien va dirigido.

2.1.3 Fenomenología

Esta dimensión incluye los fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que dan sentido a un concepto. Se divide en dos componentes. A continuación, se presentan cada uno de ellos junto con ejemplos entorno al signo igual:

1) **Los contextos:** es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento (Rico et al. 2008). Dentro de los contextos se considerarán dos:

a) **Matemáticos:** consiste en el uso de símbolos propios de las matemáticas, es decir, situaciones puramente matemáticas. Como en la figura 7 donde todos los símbolos que se utilizan son matemáticos.

Figura 7. Contexto matemático

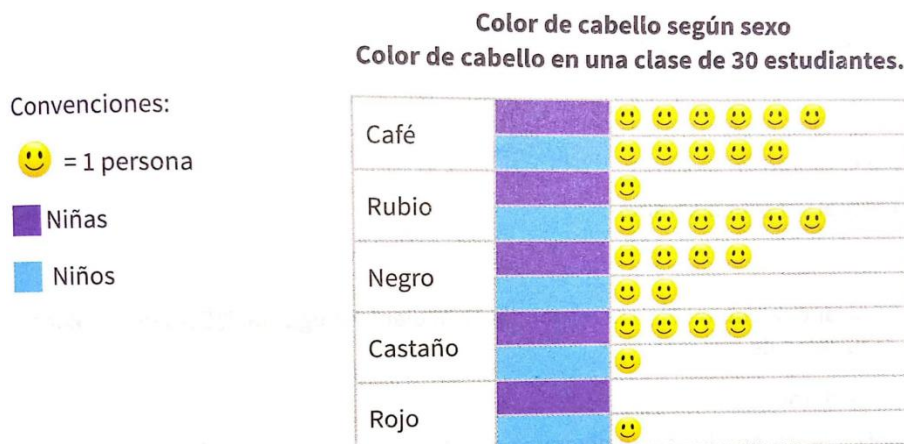
Sabiendo que $324 \div 12 = 27$, determinen los resultados de las siguientes divisiones.

- $972 \div 12 =$
- $324 \div 3 =$
- $81 \div 12 =$
- $108 \div 12 =$
- $3240 \div 120 =$

Nota: tomado de libro de texto Desafíos Matemáticos grado quinto – México (p. 124)

b) **No matemáticos:** relaciona objetos de la vida cotidiana con objetos matemáticos. En el caso de la figura 8, se relacionan caras felices con cantidades numéricas, es decir, objetos de distinta naturaleza.

Figura 8. Contexto no matemático



Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Nota: tomado de libro de texto Proyecto Sé grado quinto (Cuadernillo 2) – Colombia (p.35)

2) **Las situaciones:** estas hacen referencia al medio en el que se sitúan las tareas, pueden ser personales, educativas, ocupacionales, públicas, científicas y profesionales.

a) **Personales:** con aquellas relacionadas con actividades cotidianas de los alumnos, tales como preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transporte personal, deportes, viajes, programación personal, finanzas personales, entre otros (Programme for International Student Assessment [PISA], 2022) tal como se muestra en la figura 9 donde el problema trata sobre las compras.

Figura 9. Ejemplo situación personal

1. Claudia compró primero $\frac{3}{4}$ kg de uvas y luego $\frac{1}{2}$ kg más. ¿Qué cantidad de uvas compró en total?
-

Nota: tomado de libro de texto Desafíos Matemáticos grado quinto – México (p. 11)

b) **Educativas:** son las relacionadas con actividades escolares de los alumnos.

Figura 10. Ejemplo situación educativa

En la secundaria donde estudian Meche y Alejandro, el horario de clases empieza a las 7:30 a.m. y termina a las 2:20 p.m. Las sesiones duran 50 min, con un descanso de 10 min entre cada clase.

- a) ¿A qué hora termina la segunda clase?
-



Nota: tomado de libro de texto Desafíos Matemáticos grado quinto – México (p. 39)

c) **Ocupacionales:** son las que encuentra el alumno en un entorno de trabajo. Estas situaciones pueden abordar aspectos sobre medidas, costos, ordenar materiales para construcción, nómina, control de calidad, programación, inventario, diseño, arquitectura, entre otros (Programme for International Student Assessment [PISA], 2022). Como es el caso de la figura 11, donde se abarca ventas al mayor y al detal.

Figura 11. Ejemplo situación ocupacional

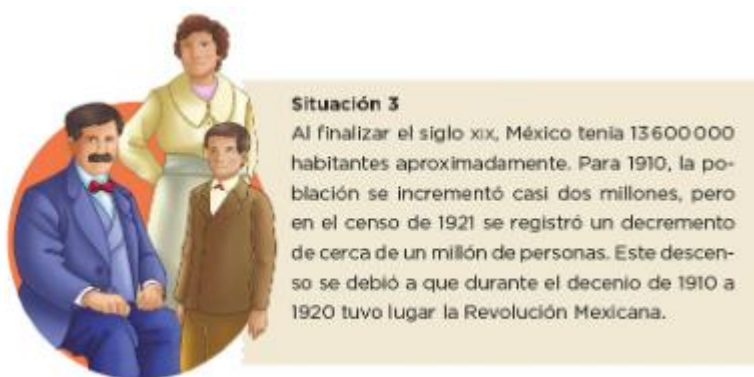
El señor Juan tiene una tienda de abarrotes y sus ventas son al mayoreo y al menudeo. La semana pasada recibió dos toneladas de azúcar en 40 sacos de 50 kg cada uno.

a) ¿Cuántos kilogramos tiene una tonelada (t)?

Nota: tomado de libro de texto Desafíos Matemáticos grado quinto – México (p. 32)

- d) **Públicas:** Son situaciones donde los estudiantes observan aspectos sociales de su entorno y de su comunidad, que pueden ser locales, nacionales o globales, donde se abordan aspectos relacionados con sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas, demografía, publicidad, estadísticas nacionales y economía (Programme for International Student Assessment [PISA], 2022) desde una perspectiva de comunidad. Tal como se observa en la figura 12 donde abarcan aspectos de demografía

Figura 12. Ejemplo situación pública



Nota: tomado de libro de texto Desafíos Matemáticos grado quinto – México (p. 36)

- e) **Científicas:** son situaciones que implican la comprensión de procesos tecnológicos y científicos, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático en áreas relacionadas con el tiempo o el clima, la ecología, la medicina, la ciencia espacial, la genética, la medición y el mundo de las matemáticas (Programme for International Student Assessment [PISA], 2022). A modo de ejemplo la siguiente situación sobre el tiempo.

La nave espacial “Voyager II” salió de la Tierra el 20-8-1997 con destino a Júpiter, tardando en llegar cinco años. Si la mitad del tiempo lo empleó en llegar a Marte. ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a Marte?

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

- f) **Profesionales:** se refieren a aquellas situaciones donde se le propone al alumno desarrollar sus competencias profesionales. Como es el caso de la figura 13, donde la situación se enmarca en el ser bombero, los implementos y el equipo que se necesita y utiliza.

Figura 13. Ejemplo situación profesional

Centro 1 - Los camiones de bomberos - Situación de aplicación

Nombre : _____

Camión unidad de seguridad

Los camiones de la unidad de socorro transportan material y personal al lugar del incendio. Entre los materiales que se encuentran al interior del camión, se encuentra el equipo de los bomberos.

El peso del equipo para bomberos es de 158,75kg.

<p>Aparato respiratorio $\frac{2}{5}$ del equipo de un bombero (dibujo del aparato)</p> 	<p>Botas $\frac{3}{25}$ del equipo de un bombero (dibujo botas)</p> 	<p>Ropa especializada</p>  <p>El resto de la masa (5 dibujos)</p>
--	--	--

¿Cuál es la masa de cada categoría?

Equipo para un bombero kg Aparato respiratorio kg
 Botas kg Ropa especializada kg

Escaneado con CamScanner

Nota: tomado de libro de texto Proyecto Sé grado quinto (Cuadernillo 2) – Colombia (p.70)

Es así, como las tres dimensiones del significado en un concepto matemático permiten evidenciar los significados que se le atribuyen a un contenido matemático en específico, en el caso de este trabajo, permitirá comprender los significados atribuidos al signo igual. Así, teniendo en cuenta las categorías de análisis utilizadas en los referentes donde el objeto de análisis fue el signo igual (once significados base, interpretación y contexto), se realizará una integración de estos, de tal manera que cada uno se pueda relacionar con las tres dimensiones del triángulo semántico:

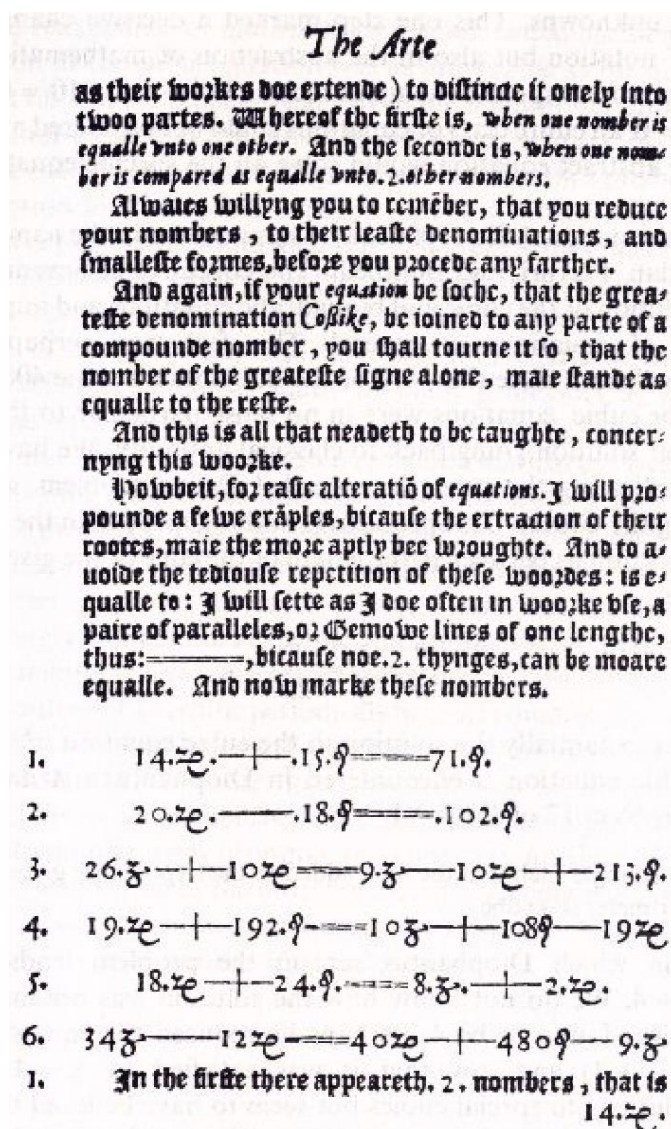
- Las estructuras conceptuales (campo conceptual y campo procedimental) mediante los referentes del significado articulados en el desarrollo histórico y lo significados propuestos por Molina (2006).

- Los sistemas de representación asociado al análisis de todos los apartados donde se evidencie el símbolo de igual (=) y se identifiquen las representaciones que lo acompañan.
- La fenomenología asociada a las situaciones y los contextos en los que se utilizan y proponen las actividades relacionadas con el signo igual en los libros de texto.

2.2 Desarrollo histórico del signo igual

Como muchos de los símbolos utilizados en matemáticas, el signo igual tuvo su origen en el álgebra, fue utilizado y empleado por primera vez por Robert Recorde en su libro de álgebra "The Whetstone of Witte" publicado en 1557, allí justificó y explicó su uso mencionando "Pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o líneas gemelas de una misma longitud, así, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales" (Boyer, 1986, p. 349). Con esta afirmación introduce una representación simbólica para representar conceptos e ideas en contextos como el comercio, la industria y la economía.

Figura 14. Primer uso del signo igual por Recorde



Nota: Tomado de (Molina et al., 2007)

La Figura 14 muestra la primera introducción del signo igual por Recorde, donde se evidencia en una versión más larga, sin embargo, con el paso del tiempo y de las adaptaciones de autores se fue modificando hasta obtener la versión actual. Posteriormente, se siguieron introduciendo símbolos para el signo igual como [usado por Buteo en 1559, ∞ utilizado por Descartes en 1637, | utilizada por Reyher en 1698 entre otros, sin embargo, el reconocimiento del símbolo de Recorde como símbolo universal se produjo gracias a su presencia en trabajos que fueron de gran influencia tales como “Artis analyticae praxis” de Thomas Harriot, “Clavis mathematicae” de William Oughtred y “Trigonometría” de Richard

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Norwood (Cajori, 1993) y al ser utilizado por Leibniz (1646–1716) en su notación para el cálculo (Molina, Castro y Castro, 2007).

Por otro lado, y atendiendo el interés de esta investigación, a lo largo de la historia el signo igual ha adoptado diferentes significados y se han evidenciado diferentes usos, algunos de ellos son:

- Vieta, en 1591 empleó el signo igual para diferencias aritméticas y también lo empleó para establecer que dos números eran desiguales
- Otros autores como Descartes, Caramuelis, Paricius, Dulaurens, Reyher y Legendre han utilizado este signo para representar más o menos (\pm), separar la parte entera y decimal en los números decimales (ej., $102=857$ denotaba 102.857), para separar números en la resolución de problemas aritméticos, representar dos rectas paralelas o para denotar la congruencia de números (lo que es actualmente representado con el signo \equiv).
- Se evidencia en el trabajo de Deidier (Cajori, 1993) el cual escribe:
$$\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{0.1.4.=5}{4,4,4.=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$
- En un texto de aritmética americano “The Columbian Arithmetician” (1811) donde se emplea para la expresión de operaciones encadenadas de la siguiente forma: $1 + 6, = 7, \times 6 = 42, \div 2 = 21$ (Cajori, 1993).
- Pasquier empleó, en 1920, una señal de doble igualdad escribiendo un signo igual sobre otro, para denotar la igualdad por definición, lo que en la actualidad se denota a veces por $\overset{\cdot}{=}$.

(Molina et al., 2007)

De esta manera, el signo igual no siempre ha sido utilizado para denotar igualdades. Molina et al. (2007) menciona que “la consideración del contexto es indispensable para determinar el significado de este signo del que se está haciendo uso” (p, 7), esto, debido a que dentro de las matemáticas no existe una única noción de igualdad, por ejemplo, si se tienen las expresiones $4/3$ y $8/6$ no son iguales, pero pasan a ser iguales al definirse como una relación de equivalencia.

Los términos de igualdad, equivalencia e identidad han estado inmersos en la evolución histórica del signo igual, en algunos casos igualdad y equivalencia son considerados sinónimos y en otros lo son igualdad e identidad. A continuación, se presenta una descripción de cada uno de ellos y serán abordados como concepciones del signo igual.

2.2.1 La Igualdad

La Real Academia Española (RAE, 2023) define el término igualdad como “Conformidad de algo con otra cosa en naturaleza, forma, calidad o cantidad; Correspondencia y proporción que resulta de muchas partes que uniformemente componen un todo”.

Desde la filosofía, para Aristóteles (1998) la igualdad de objetos matemáticos es considerada como una mismidad, de esta manera, dos cuadriláteros con lados y ángulos iguales se dicen que son los mismos; Brugger (1965) definen la igualdad como una identidad lógica, entendiendo que dos entes son iguales cuando se refieren al mismo concepto.

Por su lado, Tododeiure considera la igualdad como “la equivalencia de dos términos, de manera que uno puede ser substituido por otro exacta y perfectamente, (...) [y] que después de la sustitución no haya sufrido aumento ni disminución” (Molina, 2006, p.101), aquí se evidencia una diferencia entre la igualdad y la identidad, dado que se considera la identidad como una situación y propiedad que hace que todo objeto sea igual a sí mismo, mientras que la igualdad es una equivalencia de dos o más objetos distintos.

Dentro de las Matemáticas y la Matemática Educativa, no existe una noción única de igualdad debido a los múltiples contextos en los que se puede encontrar

- Díaz (1990) y García (1992) definen la igualdad como una expresión de equivalencia entre dos cantidades, expresada bajo el signo igual (=).
- Santamaría (1995) define la noción de igualdad como “la relación entre dos miembros iguales, entendiendo por miembros las expresiones que van adelante y detrás del igual” (p. 206)
- Bouvier y George (2000) definen la igualdad como una relación binaria que asocia símbolos que representan un mismo objeto. Esta relación se denota con el signo igual (=), y cumple las propiedades de reflexión, simetría y transitividad, es decir, una relación de equivalencia.

(Molina, 2006)

Teniendo en cuenta que los significados dependen del contexto en el que se desenvuelve el objeto matemático, la igualdad se entiende dependiendo el área desde donde se estudie, la aritmética, el álgebra y la geometría.

Dentro de la aritmética siguiendo a Wilhelmi y otros se pueden distinguir dos tipos de relaciones de igualdad. Por un lado, la **igualdad de dos números** donde se presenta una coincidencia del objeto matemático y del representante, es decir $5 = 5$ y la igualdad **del valor numérico** de expresiones aritméticas donde se presentan distintas representaciones del mismo número, es decir $3 + 5 = 7 + 1$ (Molina, 2006, p. 104)

Dentro del álgebra, Godino y Font (2003) distinguen tres tipos de igualdades, por un lado, **la identidad** que se refiere a los casos en que aparecen variables y la igualdad es verdadera para cualquier valor asignado a las variable; **la ecuación** para aquellos casos donde la igualdad es verdadera para determinados valores y por último **las fórmulas** para aquellas que expresan una relación de dependencia entre dos o más variables.

Dentro de la geometría, Bouvier y George (2000) mencionan que dos figuras son iguales cuando existe una isometría que hace coincidir una en otra, que dos segmentos de una misma longitud son iguales o que dos vectores son iguales cuándo tienen mismo módulo y mismo sentido.

2.2.2 La Equivalencia

La Real Academia Española (RAE, 2023) define el término equivalencia como “igualdad en el valor, estimación, potencia o eficacia de dos o más cosas o personas; igualdad de áreas en figuras planas de distintas formas, o de áreas o volúmenes en sólidos diferentes”.

Desde la filosofía, Abbagnano (1974) define la equivalencia como una relación entre dos objetos que tienen el mismo valor, por ejemplo, en un contexto geométrico serían dos figuras planas con la misma área.

Desde la lógica, Fregoso (1977) define la relación de equivalencia haciendo la distinción con la igualdad: Dadas las proposiciones A y B se dice que son equivalentes si tienen los mismos significados ($S_A = S_B$), la proposición “Hoy es jueves” y “hoy es víspera del viernes” son equivalentes pero no iguales al no tener el mismo símbolo; Ferrater (1988) define la equivalencia material o interpretación material del condicional a la relación de “Si y solo sí” que se denota con los símbolos \leftrightarrow o \equiv y Honderich (2001) menciona que equivalencia corresponde a una relación entre dos enunciados P y Q donde P implica Q y Q implica a P.

Dentro de las Matemáticas y la Matemática Educativa García (1992), Díaz (1990) y Santamaría (1995) definen la equivalencia como cosa igual a otra en eficacia y en valor, para ellos, son figuras equivalentes aquellas que poseen la misma superficie y son magnitudes equivalente aquellas que tienen el mismo valor, por ejemplo, $1\text{kg}=1000\text{l}$.

Liebenberg et al. (1999) define la equivalencia desde el aritmética como aquellas expresiones numéricas que tienen el mismo valor numérico, la misma respuesta y desde el álgebra señala tres tipo de expresiones, **identidad algebraica** para aquellas expresiones que son ciertas para todos los valores de la variable $2x + 3x = 5x$; **ecuación** para aquellas expresiones que son ciertas solo para algunos valores de la variable $8x + 24 = 14x + 100$ y **expresiones que no son ciertas** para ningún valor de la variable $5x + 20 = 5x + 25$. (Molina, 2006, p. 108)

Bouvier y George (2000) conciben bajo el término de equivalencia la noción de relación de equivalencia de un conjunto, que se refiere a la relación binaria sobre un conjunto que es reflexiva, simétrica y transitiva y bajo la equivalencia lógica que se relaciona con el conector bicondicional $A \leftrightarrow B$.

2.2.3 La Identidad

La Real Academia Española (RAE, 2023) define el término Identidad como “Igualdad algebraica que se verifica siempre, cualquiera que sea el valor de sus variables”.

Desde la filosofía, Abbagnano (1974) agrupa tres definiciones de identidad:

1. **Identidad como igualdad de sustancia:** corresponde a la definición establecida por Aristóteles quien mencionaba que “Las cosas son idénticas sólo si es idéntica la definición de su sustancias (...) La identidad propiamente dicha es la de la unidad numérica y que, en dicho caso, ambas cosas que se dicen idénticas pertenecen a la misma categoría, tienen el mismo género, los mismos opuestos, atienden a los mismos accidentes, y a sus generaciones y destrucciones son las mismas”
2. **Identidad como sustituibilidad:** corresponde a la definición de Leibniz “Dos cosas se consideran idénticas si al sustituir una por otra en una proposición verdadera, esta sigue siendo verdadera”.
3. **Igualdad como convención:** en esta definición el significado de la identidad no es único, dado que depende del contexto. Al decir que “a es idéntico a b” se quiere decir que a es el mismo b.

(Molina, 2006, p. 111)

Desde la lógica, Frege menciona dos tipos de identidades

1. **Identidad de contenido**, denotado con el símbolo \equiv , indicando que ambas expresiones tratan o nombran al mismo contenido, sin importar la clase.
2. **Identidad**, que denota con el símbolo $=$ para indicar que dos expresiones aritméticas situadas a ambos lados del signo igual denotan lo mismo.

Dentro de las Matemáticas y la Matemática Educativa, García (1992), Díaz (1990) y Santamaría (1995) definen la identidad como “una igualdad algebraica que se verifica siempre cualquiera que sea el valor de las variables” (Molina, 2006, p. 111).

La evolución del signo igual, su significados y usos han sido diversos y abordados desde las diferentes ramas del conocimiento, la filosofía, la lógica y la matemática, sin embargo, en los términos y conceptos que se le asocian igualdad, equivalencia e identidad son más las similitudes que se encuentran en sus definiciones que sus diferencias, esto enmarcando la importancia del contexto donde el signo igual se encuentre, concluyendo que

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia


los significados que se puedan asociar dependen y requieren de un análisis para ser comprendidos.

Teniendo en cuenta los significados expuestos en este apartado y retomando los significados propuestos por Molina (2006), expuestos en los antecedentes, a continuación en la tabla 6, se presenta la integración de estos significados y que serán de insumo para el análisis de esta investigación.

Tabla 6. Definición de los significados asociados al signo igual

No.	Concepción	Referentes de la estructura conceptual	Descripción	Ejemplos
1	Equivalencia: relación entre dos objetos que tienen el mismo valor	Propuesta de actividad	Refiere al uso del signo en expresiones incompletas, con una cadena de números y/o símbolos seguidos a la derecha por el signo igual.	$16 : 3 =$ $x(x + 1) - 3x(x + 5) =$
2		Operador	Refiere al uso del signo como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda, y su resultado, que se dispone a la derecha.	$4x5 = 20$ $x(x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$
3		Expresión de una acción	Éste es un significado bidireccional del signo, que extiende el significado de operador recién reseñado. Aquí la cadena o secuencia de operaciones va indistintamente a la izquierda o a la derecha, y el resultado, en el otro miembro.	$2x = x(x - 2) - x^2 + 4x$ $24 = 12 + 12$ $12 + 12 = 24$
4		Equivalencia numérica	Indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas que se encuentran en ambos miembros.	$4 + 5 = 3 + 6$ $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ $\frac{1}{3} = 0,33$

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

5		Equivalencia por definición o por notación	Indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por el significado de la notación utilizada.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ $100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$
6		Ecuación	Se encuentra en el contexto del álgebra cuando la equivalencia expresada por el signo de igual sólo es cierta para algún o algunos valores de la o las variables, pudiendo inclusive no ser cierta para ningún valor.	$x^2 + 4x = 5x - 6$
7	Igualdad: conformidad de algo con otra cosa en naturaleza, forma, calidad o cantidad	Igualdad estricta	Aquí las expresiones a ambos lados representan el mismo objeto matemático con el mismo representante.	$3 = 3$ $x + 5 = x + 5$
8		Asignación de un valor numérico	El signo asigna un valor numérico a otro símbolo.	<i>Si $x = 4$, ¿Cuál es el valor de x^2?</i>
9	Identidad: Igualdad algebraica que se verifica siempre, cualquiera que sea el valor de sus variables.	Identidad	Indica el mismo valor numérico de dos expresiones algebraicas para todos los valores de las variables.	$x^2 + 2x = x(x + 2)$ $a + b = b + a$
10	Relación funcional	Relación funcional o de dependencia	Refiere al uso para indicar una relación o dependencia entre variables o parámetros.	$y = 3x + 2$ $l = 2\pi r$
11		Definición de un objeto matemático	Se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático.	$a^0 = 1$ $f(x) = 2x + 3$
12		Indicador de ciertas conexiones o correspondencia	Significado impreciso que se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como por ejemplo,	 = 3

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

			entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y no matemáticas.	
13	No aplica	Separador	Este uso, matemáticamente incorrecto, se lo dan algunos alumnos al utilizarlo en contextos algebraicos como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad.	$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x} = x^2+1 = x = x^2 - x + 1 = 0$ $f(x) = x^2 = f^2(x) = x^4$

Capítulo 3: Metodología

A continuación, se presenta la metodología y el tipo de investigación en la cual se sitúa este trabajo, después, se expone el análisis de contenido propuesto por Bernete (2013) como método de investigación; posteriormente se muestra el método del análisis comparativo de Makon (2004) con sus tres fases de aplicación. Finalmente, se presenta un esquema metodológico el cual muestra la ruta de desarrollo de este trabajo.

Este trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo, dado que se concibe como un conjunto de prácticas interpretativas que estudia fenómenos, con el propósito de darles sentido en función de los significados que las personas les otorguen (Hernández et al., 2014), es decir, no recaba información cuantificable sino basada en la observación y análisis. En este caso, el fenómeno de estudio es el signo igual que se analizará en libros de texto y sus significados serán interpretados teniendo en cuenta las tres dimensiones del triángulo semántico, como organizador de significados, propuesto por Rico (2012).

A su vez es un estudio de tipo descriptivo dado que según Hernández et al. (2014), con estos “se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (p. 92), de tal manera que se puedan especificar las características del signo igual en los libros de texto e interpretarlas a la luz de las tres dimensiones del triángulo semántico: estructura conceptual, fenomenología y sistemas de representación.

Es así, como esta tesis se sitúa en una investigación cualitativa-descriptiva realizando un análisis de los fragmentos de los libros de texto donde esté presente el signo igual, comprender los significados que se potencian a partir de las componentes del triángulo semántico, interpretarlos y posteriormente realizar un comparativo donde se contraste los resultados obtenidos en cada uno de los libros.

3.1 El análisis de contenido como método de investigación

El análisis de los significados en los libros de texto se realizará mediante el método de análisis de contenido, puesto que este se utiliza para estudiar documentos; de esta manera, Díaz (2018) enfatiza que “el análisis de contenido cualitativo no tiene como fin solo la búsqueda de ciertos contenidos dentro de un corpus, sino de encontrar el sentido que estos contenidos, poseen dentro del contexto” (p. 125), de esta manera, este método permite descubrir el sentido del signo igual a través de los significados que se encuentran al interior de un documento en particular, en este caso los libros de texto de dos países: Colombia y México.

De esta manera, Gómez (2007) menciona que este método “es por tanto el procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática dentro del contenido de las matemáticas

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

escolares” (p. 41), es decir, permite la comprensión de contenidos materializado en libros de textos, por lo tanto, permitirá identificar los significados del signo igual que se potencian en el libros de texto de México y de Colombia. En este sentido, se toma como referente, el análisis de contenido propuesto por Bernete (2013), el cual consta de tres fases:

1. **El trabajo previo a la obtención de los datos:** consiste en la definición de los elementos que se requieren para la realización de una investigación social, desde el planteamiento del problema, hasta el modelo de análisis de la información.

2. **La extracción de los datos:** consiste en la transcripción de los datos encontrados en el material que se analiza a los documentos intermedios “protocolo de análisis” o “fichas de registro”. Cada una de las fichas debe recoger todos los datos pertinentes que puedan obtenerse de la unidad de análisis.

3. **Explotación de los datos:** que consiste en el análisis de las fichas de registro e interpretación de los resultados.

De esta manera, teniendo en cuenta las fases del análisis de contenido, a continuación, en la tabla 7 se muestran las etapas que conforman cada una de ellas y los objetivos que se cumplirán al ir las desarrollando.

Tabla 7. Análisis de contenido

Fase	Etapas	Objetivos específicos
El trabajo previo a la obtención de los datos	A) Formulación del problema, los objetivos y, en su caso, las hipótesis, con sus correspondientes definiciones de términos. B) Elección de documentos C) Selección de datos para verificar las hipótesis y organización de los datos en un sistema de categorías D) División del corpus en unidades de análisis E) Planificación de la recogida de los datos y modelo de análisis.	Establecer las categorías de análisis para la identificación y clasificación de los significados del signo igual.
La extracción de los datos	A) Transcripción de los datos encontrados en el material que se analiza a los documentos intermedios. B) Construcción del libro de códigos	Identificar los significados del signo igual presentes en las tareas del libro de texto de matemáticas de México y Colombia.
La explotación de los datos: operaciones	Está enfocado al hallazgo de regularidades en los fenómenos que	Describir los significados potenciados en las tareas

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

interpretación de resultados	se investigan. Se interpretan los datos obtenidos	relacionadas con el signo igual presentes en el libro de texto de matemáticas de México y Colombia.
------------------------------	---	---

Fuente: adaptado de Bernete (2013)

Al culminar la tercera fase del análisis de contenido se estará dando cumplimiento a cada uno de los objetivos específicos, sin embargo, para alcanzar el objetivo general, el cual es Comparar los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes de 10 y 11 años, se debe continuar con el estudio comparativo. A continuación se describe el método del análisis comparativo así como sus fases de ejecución.

3.2 Análisis comparativo como método de estudio

Los estudios comparativos dentro de la Matemática Educativa a lo largo del tiempo han sido muy utilizados, esto se debe a la riqueza de su contenido y potencialidades en sus resultados, Makon (2004) menciona que las comparaciones requieren de un análisis de las características del fenómeno estudiado con relación a aquellas unidades que son comparables y que poseen elementos comunes y diferentes (p. 2), es decir, permite comparar aspectos que se asemejan o que difieren lo que permitirá explicar a través de los significados el sentido otorgado al signo igual en estos dos libros de texto y por ende en sistemas educativos de dos países para estudiantes de una misma edad.

En este sentido, en los estudios comparativos se pueden encontrar causas diversas o similares que pueden estar combinadas y producir fenómenos o hallazgos, y es esta combinación de causas las que según Makón (2004) “la que se buscan identificar y descubrir por medio del método comparativo para explicar la ocurrencia o no de un fenómeno” (p. 4), de esta manera., se comparan los aspectos diferentes y similares de las unidades de análisis seleccionadas.

La elección de estas unidades de análisis, dependen del interés de la investigación, Makón (2004) afirma que:

“Se pueden utilizar *datos estadísticos* (cuantitativos) y/o *históricos* (cualitativos) que pueden ser combinados en las investigaciones. Estos datos provienen de uno o más países o situaciones y de un único momento histórico o de distintos momentos para observar su mutación en el tiempo, ya sea de un caso o de varios” (p. 5)

Como es el caso de esta investigación, donde se pretende analizar datos provenientes de dos libros de texto de dos países diferentes, para identificar aquellos elementos en comunes, las regularidades distintas y semejantes para brindar explicaciones y descripciones

más comprensibles sobre los significados del signo igual presentes en su contenido. En este sentido, los análisis comparativos se clasifican en tres tipos (Makon, 2004, p. 6):

1. **Los estudios de único caso:** Son comparativos por tanto si ponen a prueba una hipótesis o teoría general o si generan hipótesis o conceptos que pueden utilizarse o comprobarse en otra parte. No lo son si sólo realizan descripciones densas de casos singulares sin formular generalizaciones de algún tipo.
2. **Los estudios de un número limitado de casos:** Al considerar un número limitado de casos no llegan a ser investigaciones de tipo estadístico. Los mismos son confrontados de manera sistemática y global con el propósito de identificar semejanzas y diferencias, descubrir la combinatoria de causas que intervienen y de esta forma arribar a generalizaciones. En ellas se da información menos detallada en relación con un único caso pero sus conclusiones son más generales de forma tal que lo que se pierde en descripción se gana en capacidad explicativa
3. **Los estudios estadísticos globales:** que analiza la relación entre variables. Bajo este método, se consideran sus variaciones concomitantes por medio de la observación de si la presencia de A va acompañada de la presencia de B y en qué condiciones.

De este modo, este estudio se enmarca en el tipo estudios de un número limitado de casos, dado que se centra en identificar hallazgos mediante la identificación de semejanzas y diferencias, descubrir la combinatoria de causas que intervienen y que caracterizan los significados que se potencian y que pueden ser producto de las estructuras conceptuales, fenomenología o el contexto de cada libro de texto.

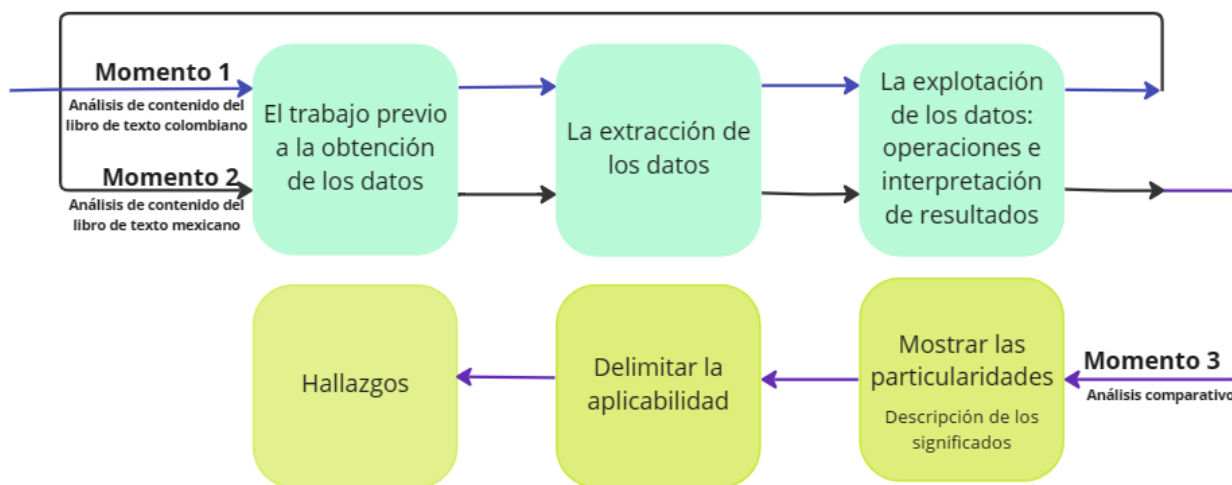
Así, teniendo en cuenta a Makón (2004) el análisis comparativo pasa por tres etapas, la primera enfocada en mostrar las particularidades de cada uno de los casos mediante las componentes del significado de un concepto. Esta etapa se relaciona con la última fase del análisis de contenido dado que, en la explotación de datos, se interpretan los resultados mediante la descripción de los significados encontrados de manera particular en cada uno de los libros de texto. La segunda etapa enfocada en delimitar la aplicabilidad donde se debe asegurar que cada uno de los casos a contrastar sigue en esencia la misma regla, y en el último momento se pretende concluir e identificar los hallazgos.

3.3 Esquema metodológico

A continuación, se presenta mediante un diagrama de flujo los momentos que se llevarán a cabo durante el proceso metodológico.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 15. Diseño metodológico



El diagrama de flujo muestra tres momentos de ejecución. En el primer momento, se realizan las tres fases del análisis de contenido en el libro de texto de matemáticas de Colombia y en el momento 2 se aplican ahora para el libro de texto de matemáticas de México. En el momento 3, se realiza una descripción de los significados identificados en cada uno de los libros, dado que esta descripción brindará los elementos necesarios para proceder al análisis comparativo entre las dos descripciones y así finalmente presentar los resultados.

A continuación, se presenta la implementación de cada una de las fases del análisis de contenido en la presente investigación.

3.3.1 Fase 1 “El trabajo previo a la obtención de los datos”

Esta fase del análisis de contenido se divide en las siguientes etapas que se explican a continuación:

A) Formulación del problema, los objetivos y, en su caso, las hipótesis, con sus correspondientes definiciones de términos: esta etapa consiste en el planteamiento del problema que se encuentra desarrollado en el capítulo 1 de esta tesis.

B) Elección de documentos: En esta etapa, según Bernete (2013) se determina el universo de análisis, es decir, se delimita y justifica el corpus. Teniendo en cuenta el objetivo general de esta investigación, la elección de los documentos se delimita al conjunto de los libros de texto dedicados a la formación de estudiantes de grado 5° de primaria (para estudiantes entre 10 y 11 años) de las instituciones públicas de México y de Colombia.

Pertinencia: Los libros de texto seleccionados para este análisis, son aquellos propuestos por la Secretaría de Educación Pública (en el caso de México) y por el Ministerio de Educación Nacional (en el caso de Colombia), es decir, que estos libros son utilizados por

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

todos los estudiantes pertenecientes a las instituciones educativas públicas y que son distribuidos de forma gratuita.

Exhaustividad: Teniendo en cuenta que estos libros son distribuidos a nivel nacional y trabajados en todas las instituciones educativas públicas, el contenido de estos es coherente con las expectativas nacionales y aprendizajes esperados para el grado 5° de primaria. Así el límite de inferencia es nacional y su impacto es muy amplio al contemplar la cantidad de estudiantes que los utilizan en cada país.

Representatividad: Estos libros se acotan correctamente al universo de estudio dado que son los libros oficiales establecidos para 5° de primaria, además, son avalados y representan los objetivos propuestos por las políticas educativas nacionales, tanto en México como en Colombia.

Homogeneidad: Son homogéneos porque los dos libros son dirigidos para grado 5to de primaria y que ambos libros contienen el objeto de análisis que es el signo igual, además, los contenidos abordados en ambos países se corresponden. A continuación, se presenta la relación entre contenidos en ambos países, tomando como referente los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para grado 5° establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, en el caso de Colombia y los Aprendizajes esperados de grado 5° establecidos por la Secretaría de Educación Pública en México.

Tabla 8. Relación entre contenidos

Colombia		México	
Pensamiento	Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)	Aprendizajes Esperado	Eje y tema
Pensamiento Aleatorio	10. Formula preguntas que requieren comparar dos grupos de datos, para lo cual recolecta, organiza y usa tablas de frecuencia, gráficos de barras, circulares, de línea, entre otros. Analiza la información presentada y comunica los resultados.	•Recolecta, registra y lee datos en tablas y gráficos de barras, e interpreta la moda.	Análisis de datos Estadística
	11. Utiliza las medidas de tendencia central para resolver problemas en los que se requiere presentar o resumir el comportamiento de un conjunto de datos.		

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

	12. Predice la posibilidad de ocurrencia de un evento simple a partir de la relación entre los elementos del espacio muestral y los elementos del evento definido.	<ul style="list-style-type: none"> •Identifica juegos en los que interviene o no el azar. 	Análisis de datos Probabilidad
Pensamiento numérico	1. Interpreta y utiliza los números naturales y las fracciones en su representación fraccionaria y decimal para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación.	<ul style="list-style-type: none"> •Lee, escribe y ordena números naturales hasta de nueve cifras y decimales. 	Número, álgebra y variación Número
	2. escribe y desarrolla estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas de potenciación.	<ul style="list-style-type: none"> •Resuelve problemas de suma y resta con decimales y fracciones con denominadores, uno múltiplo del otro. •Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas de múltiplos de 100 hasta de cinco cifras y de fracciones usuales. 	Número, álgebra y variación Adición y sustracción
		<ul style="list-style-type: none"> •Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador en número natural. •Resuelve problemas de división con números naturales y cociente fraccionario o decimal. •Usa el algoritmo convencional para dividir con dividendos hasta de tres cifras. •Calcula mentalmente, de manera aproximada, multiplicaciones de números naturales hasta dos cifras por tres, y divisiones hasta tres entre dos cifras; calcula mentalmente 	Número, álgebra y variación Multiplicación y división

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

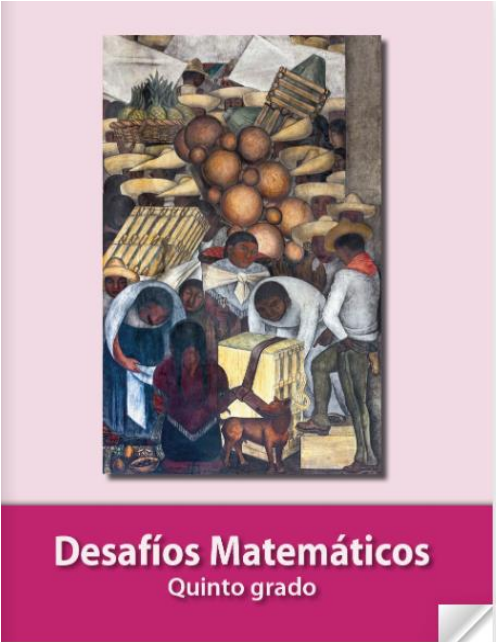
		multiplicaciones de decimales por 10, 100, 1000.	
	3. Compara y ordena fracciones (en sus representaciones fraccionaria y decimal) a través de diversas interpretaciones y representaciones.	•Ordena fracciones con denominadores múltiplos.	Número, álgebra y variación Número
Pensamiento Variacional	8. Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas. 9. Utiliza operaciones no convencionales, encuentra propiedades y resuelve ecuaciones en donde están involucradas.	•Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m); calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa con números naturales (incluyendo tablas de variación).	Número, álgebra y variación Proporcionalidad
Pensamiento Métrico	4. Justifica relaciones entre superficie y volumen, respecto a dimensiones de figuras y sólidos, y elige las unidades apropiadas según el tipo de medición (directa e indirecta), los instrumentos y los procedimientos	Resuelve problemas involucrando longitudes y distancias, pesos y capacidades con unidades convencionales, incluyendo kilómetro y tonelada.	Forma espacio y medida Magnitudes y medidas
	5. Explica las relaciones entre el perímetro y el área de diferentes figuras (variaciones en el perímetro no implican variaciones en el área y viceversa) a partir de mediciones, superposición de figuras, cálculo, entre otras.	•Resuelve problemas que implican calcular el perímetro de polígonos y del círculo, y el área de rectángulos con unidades convencionales (m ² y cm ²).	Forma espacio y medida Magnitudes y medidas

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Pensamiento Espacial	6. Identifica y describe propiedades que caracterizan un cuerpo en términos de la bidimensionalidad y la tridimensionalidad y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas.	<ul style="list-style-type: none"> •Construye círculos a partir de diferentes condiciones. •Construye prismas rectos rectangulares a partir de su desarrollo plano. 	Forma espacio y medida Figuras y cuerpos geométricos
	7. Resuelve y propone situaciones en las que es necesario describir y localizar la posición y la trayectoria de un objeto con referencia al plano cartesiano	•Diseña e interpreta croquis para comunicar oralmente o por escrito la ubicación de seres u objetos y trayectos.	Forma espacio y medida Ubicación espacial

De esta manera, se tomarán los libros de texto que las entidades nacionales brindan para las instituciones del sector público. Así, Se tomarán como unidades de análisis todas las secciones donde se encuentre la presencia del signo = a la luz de la noción de significado propuesta por Rico (2012). A continuación, se presenta la ficha técnica de cada uno de ellos:


Tabla 9. Ficha Técnica Libro México

Desafíos Matemáticos Quinto grado	
	
Área Curricular	Matemáticas

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Autores	Secretaría de Educación Pública
Curso dirigido	Quinto
Editorial	Secretaría de Educación Pública
Edición	Tercera, 2019
Tipo de muestra	Tercera impresión, 2022
Impreso en	México
Año	2022
ISBN	978-607-551-139-9

Tabla 10. Ficha Técnica Libro Colombia

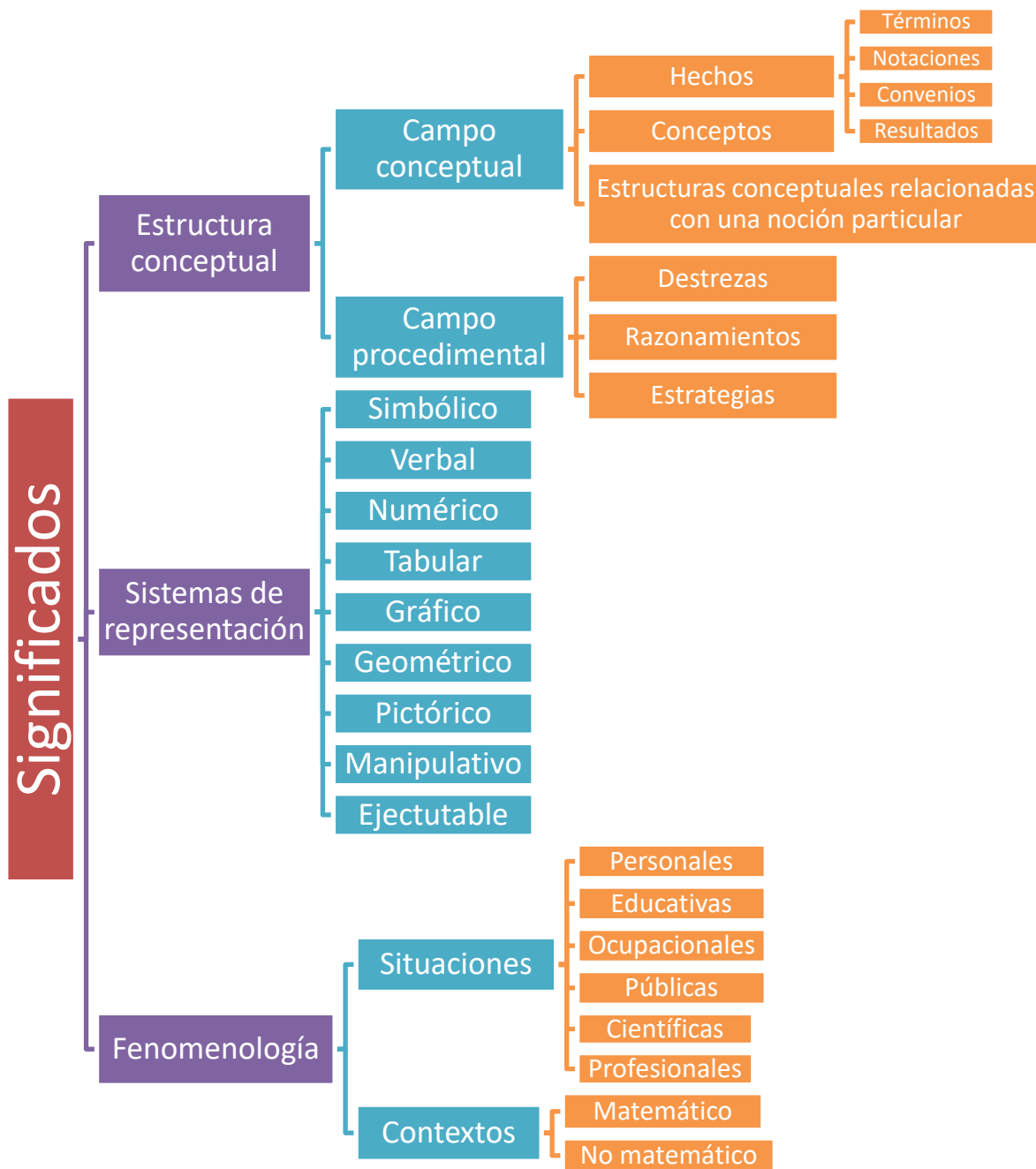
Todos a Aprender Grado 5°	
	
Área Curricular	Matemáticas
Autores	Secretaría de Educación Nacional
Curso dirigido	Quinto
Editorial	Secretaría de Educación Nacional
Impreso en	Colombia
Año:	2022
ISBN	978-958-5424-32-6

C) Selección de datos y organización de los datos en un sistema de categorías: En esta etapa se identifican las secciones de los libros que son relevantes para el análisis, se presentan las variables de análisis, que son las componentes del significado: sistemas de representación,

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

estructura conceptual y fenomenología, y posteriormente se justifica que estas variables cumplan las características de ser homogéneas, ser mutuamente excluyentes y ser exhaustivas (Bernete, 2013, p. 240). En la figura 16 se presenta el sistema de categorías definido para el análisis bajo las componentes del significado.

Figura 16. Sistema de categorías- componentes del significado



Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Homogéneas: las categorías de análisis comprenden las tres dimensiones que conforman el triángulo semántico sustentadas por Rico (2012), las cuales, permiten identificar la forma en que se organiza un contenido matemático y los significados que se le asocian.

Ser mutuamente excluyentes: Tal como se expone en el marco teórico, cada una de estas dimensiones, que son las categorías de análisis, son diferentes y cada una contienen elementos particulares, es decir, no habrá confusión en la identificación de cada una de ellas, dado que su naturaleza es diferente.

Ser exhaustivas: cumplen todas las posibilidades de la variable a analizar, que es el significado, dado que la misma propuesta de Rico (2012) afirma que son los tres elementos que conforman el significado de un contenido.

D) División del corpus en unidades de análisis: En esta etapa se describe la forma en que están estructurados cada uno de los libros de textos (secciones, capítulos, unidades) y la terminología para posteriormente establecer el libro de códigos, esto, teniendo en cuenta que el corpus se fragmenta en unidades más pequeñas: unidad de muestreo, unidad de contexto y unidad de registro (Bernete, 2013, p. 243).

Unidad de muestreo: son cada uno de los documentos constitutivos del corpus, en este caso se presentan dos unidades de muestreo que son los libros a analizar, el libro que corresponde a Colombia compuesto por dos cuadernillos y el otro que corresponde al libro de México.

Tabla 11. Unidades de Muestreo

Unidad de muestreo	Libro de texto	Cuadernillos	País
1	Desafíos matemáticos Quinto grado		México
2	Todos a aprender Grado 5° – Cuadernillo 1	Cuadernillo 1	Colombia
		Cuadernillo 2	

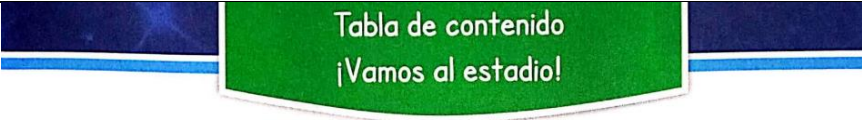
Unidad de contexto: son cada una de las partes en las que se dividen las unidades de muestreo, en este caso corresponde a las partes en que se divide cada uno de los libros de texto a analizar. A continuación, se presentan las unidades de contexto de cada uno de ellos.

El libro de texto de 5° de primaria en Colombia “Todos a aprender”, constan de 2 cuadernillos de trabajo, y cada cuadernillo está compuesto por situaciones problema. El cuadernillo 1 está compuesto por 3 situaciones problema y el cuadernillo 2 por 2 situaciones problema, es decir que en total se desarrollan 5 situaciones problema. Cada situación problema tiene una subdivisión en centros de aprendizaje, los cuales son subetapas que conllevan a la resolución y cumplimiento de la situación problema.

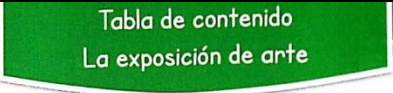
Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

A continuación, se muestra la tabla de contenido de cada cuadernillo, el pensamiento abordado y los objetivos de aprendizaje dentro de cada situación.

Tabla 12. Tabla de contenido Cuadernillo 1 - Colombia

Cuadernillo 1	
Situaciones problema 1 “ ¡Vamos al estadio!”	
	
Situación problema: ¡Vamos al estadio!	9
Mi solución	11
Centro 1 – La alineación del equipo	12
Hojas «Lo que estoy aprendiendo»	13
Ejercitación	14
Centro 2 – ¡A jugar!	16
Hojas «Lo que estoy aprendiendo»	17
Ejercitación	18
Situación de aplicación	20
Centro 3 – La liga profesional	21
Hojas «Lo que estoy aprendiendo»	22
Ejercitación	23
Situación de aplicación	25
Centro 4 – Tiempo adicional	26
Hojas «Lo que estoy aprendiendo»	27
Ejercitación	29
Situación de aplicación	27
Material manipulativo	33
Pensamiento	Objetivos de aprendizaje
Numérico	Leer y describir números decimales. Aproximación del resultado de una operación. Desarrollo de procesos de cálculos escritos (Sumar números decimales cuyo resultado no supere la posición de las centenas).
Métrico	Medir o calcular el tiempo con la ayuda de unidades convencionales. Establecer relaciones entre unidades de medida.
Situación problema 2 “La exposición de arte”	

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

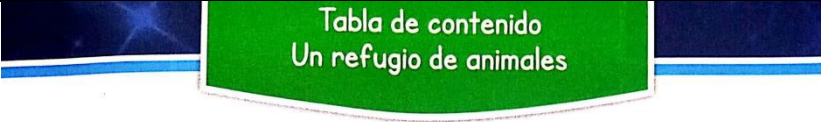
	
Situación problema: La exposición de arte..... 65	
Mi solución 68	
Centro 1 - La obra de arte 69	
Hojas «Lo que estoy aprendiendo» 70	
Ejercitación 72	
Situación de aplicación 74	
Centro 2 - Cubismo 76	
Hojas «Lo que estoy aprendiendo» 77	
Ejercitación 80	
Situación de aplicación 84	
Centro 3 - El arte egipcio 86	
Hojas «Lo que estoy aprendiendo» 87	
Ejercitación 89	
Situación de aplicación 93	
Centro 4 - Pop art 95	
Hojas «Lo que estoy aprendiendo» 96	
Ejercitación 97	
Situación de aplicación 100	
Centro 5 - El arte de la antigua Grecia 101	
Hojas «Lo que estoy aprendiendo» 102	
Ejercitación 103	
Situación de aplicación 106	
Material manipulativo 111	
<small>CC BY-NC-SA</small>	
Pensamiento	Objetivos de aprendizaje
Numérico	Leer y escribir números decimales. Comprender la función de la coma en los números decimales. Estimar el resultado de una operación. Desarrollar procesos de cálculo mental (efectuar operaciones con decimales y multiplicar o dividir por 10 100, 1000...). Desarrollar procesos para realizar cálculos escritos. Multiplicar números decimales en los que el producto no sobrepase las centésimas).
Espacial	Describir polígonos convexos y no convexos. Reconocer la propiedad de los cuadriláteros y clasificarlos. reconocer las propiedades de los triángulos y clasificarlos.
Métrico	Establecer relaciones entre las unidades de medida de longitud. Calcular el perímetro de figuras planas. Estimar y medir el área de superficies. Establecer relaciones entre las unidades de medida de volumen.
Aleatorio	Interpretar datos con ayuda de una tabla.
Situación problema 3 “El Congreso Internacional de Pequeñas Criaturas”	

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

<div style="text-align: center; background-color: #008000; color: white; padding: 5px;"> Tabla de contenido El Congreso Internacional de Pequeñas Criaturas </div>	
Situación problema: El Congreso Internacional de Pequeñas Criaturas	137
Mi solución	139
Centro 1 - Los prismas	145
Hojas «Lo que estoy aprendiendo»	146
Ejercitación.	149
Situación de aplicación	151
Centro 2 – Las estructuras multiplicativas	153
Hojas «Lo que estoy aprendiendo»	154
Ejercitación.	157
Situación de aplicación	160
Centro 3 – Volumen	161
Hojas «Lo que estoy aprendiendo»	162
Ejercitación.	163
Situación de aplicación	165
Centro 4 - Multiplicar una fracción por un número natural	166
Hojas «Lo que estoy aprendiendo»	167
Ejercitación.	169
Situación de aplicación	171
Material manipulativo	173
<small>CC BY-NC-SA</small>	
Pensamiento	Objetivos de aprendizaje
Numérico	A través de procesos convencionales determina la suma de 2 números. Determinar el producto de una multiplicación y plantear y resolver una situación de multiplicación con la ayuda de material o de esquemas. Identificar las diferentes formas de representar una fracción y utilizarlas para multiplicar una fracción por un número natural.
Espacial	Asociar el desarrollo plano de un poliedro a la pirámide o al prisma correspondiente.
Métrico	Medir el área de una superficie. Calcular el perímetro de un polígono. Determinar el volumen con la ayuda de unidades de medida no convencionales y convencionales.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Tabla 13. Tabla de contenido Cuadernillo 2 Colombia

Cuadernillo 2 Situaciones problema 1 “El refugio de animales”	
	
Situación problema: Un refugio de animales 7 Mi solución 11 Centro 1 - La guacamaya 12 Hojas “Lo que estoy aprendiendo” 13 Ejercitación..... 15 Situación de aplicación 18 Centro 2 - La tortuga carbonera 19 Hojas “Lo que estoy aprendiendo” 20 Ejercitación..... 26 Situación de aplicación 32 Centro 3 - La salamandra 33 Hojas “Lo que estoy aprendiendo” 34 Ejercitación..... 38 Situación de aplicación 40 Material manipulativo 41	
Pensamiento	Objetivos de aprendizaje
Numérico	Comprende el sentido de la potenciación y de la radicación. Representar una fracción de diferentes maneras, a partir de un todo o de una colección. Diferencia la función del numerador y del denominador de una fracción. Leer y escribir un fraccionario. Ordenar fracciones. Construir conjuntos de fracciones equivalentes. Reducir una fracción a su expresión más simple. Asociar un número decimal a un porcentaje o a una fracción. Comprender el papel de la coma decimal.
Métrico	Estimar y medir volúmenes con la ayuda de unidades convencionales. Establecer relaciones entre las unidades de medida. Estimar y medir el peso de objetos con la ayuda de unidades no convencionales.
Aleatorio	Interpretar los datos y representarlos en un diagrama circular.
Situación problema 2 “Bombero por un día”	

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Tabla de contenido Bombero por un día	
Situación problema: Bombero por un día	53
Mi solución	57
Centro 1 - Los camiones de bomberos	58
Hojas "Lo que estoy aprendiendo"	59
Ejercitación	68
Situación de aplicación	70
Centro 2 - El cuartel	71
Hojas "Lo que estoy aprendiendo"	72
Ejercitación	74
Situación de aplicación	76
Centro 3 - Incendios forestales	78
Hojas "Lo que estoy aprendiendo"	79
Ejercitación	81
Situación de aplicación	83
Centro 4 - El equipo de un bombero	84
Hojas "Lo que estoy aprendiendo"	85
Ejercitación	90
Situación de aplicación	92
Material manipulativo	95

Pensamiento	Objetivos de aprendizaje
Numérico	<p>Leer y escribir números fraccionarios.</p> <p>Diferenciar la función del numerador y del denominador de una fracción</p> <p>Asociar un número decimal a un porcentaje o a una fracción.</p> <p>Leer y escribir números decimales.</p> <p>Comprender el papel de la coma en los números decimales.</p> <p>Reconocer las operaciones que deben realizarse en una situación particular.</p> <p>Sumar y restar fracciones en las cuales el denominador de una sea múltiplo del denominador de la otra.</p> <p>Multiplicar y dividir números decimales por 10, 100 y 1000</p> <p>Dividir números decimales entre números naturales inferiores a 11.</p>
Aleatorio	<p>Interpretar datos representados en un diagrama circular.</p> <p>Comprender y calcular el promedio aritmético de una colección de datos.</p> <p>Utilizar una recta de probabilidades para indicar de forma cualitativa el grado de posibilidad de un evento.</p> <p>Reconocer que una probabilidad es un número entre 0 y 1</p> <p>representar la probabilidad de un evento utilizando notación decimal de porcentajes o de fracción.</p>

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

El libro de texto de 5° de primaria de México “Desafíos matemáticos” se encuentra estructurado por IV bloques. Al interior de cada bloque se presentan consignas, situaciones y actividades que conllevan al desarrollo de los contenidos. A continuación, se muestra la tabla de contenido.

Tabla 14. Tabla de contenido Libro México

<i>El libro de texto de 5° de primaria de México “Desafíos matemáticos”</i>	
Introducción	7
Bloque I	
1. ¿Cuánto es en total?	10
2. ¿Sumar o restar?	12
3. ¿Cuántas cifras tiene el resultado?	13
4. Anticipo el resultado	14
5. Bolsitas de chocolate	16
6. Salón de fiestas	18
7. Paralelas y perpendiculares	19
8. Descripciones	21
9. Diferentes ángulos	22
10. La colonia de Isabel	24
11. ¿Cómo llegas a...?	27
12. Litros y mililitros	29
13. Mayoreo y menudeo	32
14. Unidades y periodos	34
15. ¿Mañana o noche?	38
16. Línea del tiempo	42
17. Botones y camisas	45
18. La fonda de la tía Chela	47
19. ¿Qué pesa más?	48

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Bloque II	
20. ¿Qué tanto es?	50
21. ¿A cuánto corresponde?	52
22. ¿Cuánto es?	54
23. ¿Es lo mismo?	56
24. En partes iguales	58
25. Repartir lo que sobra	60
26. Tres de tres	61
27. Todo depende de la base	62
28. Bases y alturas	63
29. Y en esta posición, ¿cómo queda?	64
30. Cuadrados o triángulos	66
31. El romboide	68
32. El rombo	71
33. El ahorro	73
34. Factor constante	75
35. Tablas de proporcionalidad	76
Bloque III	
36. ¿Cuál es mayor?	78
37. Comparación de cantidades	80
38. ¡Atajos con fracciones!	81
39. ¡Atajos con decimales!	82
40. Los botones	83
41. Con la calculadora	84
42. Con lo que te queda	85
43. ¿Cómo es?	86
44. ¿Todos o algunos?	87
45. ¡Manotazo!	89
46. ¿Cómo llego?	90
47. Dime cómo llegar	91
48. ¿Cómo llegamos al Zócalo?	92
49. La ruta de los cerros	94
50. Divido figuras	95
51. ¿Qué cambia?	97
52. Armo figuras	99
53. Unidades de superficie	102
54. Unidades agrarias	104
55. Un valor intermedio	106
56. Ahorro compartido	107
57. Más problemas	108

Bloque IV

58. Número de cifras	110
59. Los números romanos	113
60. Sistema egipcio	115
61. Patrones numéricos	117
62. Uso de patrones	118
63. Una escalera de diez	119
64. Uno y medio con tres	120
65. Adivinanzas	121
66. Corrección de errores	123
67. ¿Cuál de todos?	126
68. Banderas de América	128
69. ¿Cuánto mide?	130
70. Hagámoslo más fácil	131
71. Abreviemos operaciones	133
72. Equivalencias	136
73. El litro y la capacidad	140
74. Más unidades para medir	142
75. La venta de camisas	144
76. ¿Qué tanto leemos?	146
77. Información gráfica	148

Bloque V

78. ¿En qué se parecen?	152
79. Es más fácil	156
80. ¿A quién le toca más?	158
81. El robot	160
82. ¿Cuál es el patrón?	161
83. Un patrón de comportamiento	165
84. La papelería	167
85. ¿Qué hago con el punto?	168
86. La excursión	169
87. La misma distancia	170
88. Antena de radio	172
89. Relaciones con el radio	174
90. Diseños circulares	176
91. ¿Dónde me siento?	180
92. Batalla aérea	182
93. Dinero electrónico	183
94. La mejor tienda	184
95. En busca de descuentos	185
96. Recargos	187
97. Vamos por una beca	189
98. ¿A todos les va igual?	191
Material recortable	193

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Dentro del contenido en cada uno de los libros, se evidencia que al interior de las situaciones problema y las consignas se integran los contenidos sin ser clasificados específicamente en temas, así, y teniendo en cuenta que en Colombia los contenidos se dividen en 5 pensamientos y que en México se dividen en 3 ejes temáticos cada uno con temas, a continuación se presenta la relación entre ellos que muestra una equivalencia entre la organización curricular.

Tabla 15. Equivalencia de Organización Curricular

Equivalente	Colombia	México
Geometría	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Forma espacio y medida (Ubicación espacial; Figuras y cuerpos geométricos)
	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Forma espacio y medida (Magnitudes y medidas)
Aritmética	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Número, álgebra y variación (Número; Adición y sustracción; Multiplicación y división)
	Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analítico	Número, álgebra y variación (Proporcionalidad)
Estadística y probabilidad	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Análisis de datos (Estadística y probabilidad)

Unidades de registro: estas unidades corresponden a cada uno de los fragmentos extraídos de los libros de texto y que son aquellos donde el signo igual se encuentra de manera explícita, es decir, en su representación simbólica (=).

E) Planificación de la recogida de los datos y modelo de análisis: En esta etapa se establece la ficha de registro que contenga las variables de análisis, la cual será el modelo que permitirá organizar la información y los datos que se recolectarán en los libros de texto. A continuación, se presenta en la tabla 16 la ficha de registro.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Tabla 16. Ficha de Registro

Unidad de registro				Código
Imagen				XXXXXX
Estructura conceptual		Sistemas de representación	Fenomenología	Concepción y referente
Campo conceptual	Campo procedimental			
Nivel 1: Hechos	Nivel 1: Destrezas		Contexto Situación	
Nivel 2: Conceptos	Nivel 2: Razonamientos			
Nivel 3: Estructuras	Nivel 3: Estrategias			
Observaciones:				

Para el llenado, es necesario tener presente los elementos que conforman las categorías de análisis, a continuación se presentan en la tabla 17.

Tabla 17. Elementos de las Categorías de análisis

Estructura conceptual	Sistemas de representación	Fenomenología	Concepción y referente del significado
Campo conceptual - Hechos <ul style="list-style-type: none"> • Términos • Notaciones • Convenios • Resultados Campo procedimental – Destrezas	<ul style="list-style-type: none"> • Simbólico • Verbal • Numérico • Tabular • Gráfico • Geométrico • Pictórico • Manipulativo • Ejecutable 	Contextos: <ul style="list-style-type: none"> • Matemático • No matemático Situaciones: <ul style="list-style-type: none"> • Personales • Educativas • Ocupacionales • Públicas • Científicas 	Equivalencia: <ul style="list-style-type: none"> • Propuesta de actividad • Operador • Expresión de una acción • Equivalencia numérica • Equivalencia por definición o por notación • Ecuación Relación funcional <ul style="list-style-type: none"> • Relación funcional o de dependencia • Definición de un objeto matemático • Indicador de cierta conexión o correspondencia Igualdad <ul style="list-style-type: none"> • Asignación de un valor numérico • Igualdad estricta

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

			Identidad <ul style="list-style-type: none"> • Identidad No aplica <ul style="list-style-type: none"> • Separador
--	--	--	---

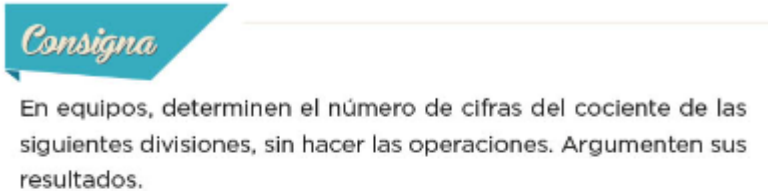
3.3.2 Fase 2 “La extracción de los datos”

A continuación, se describen cada una de las etapas que conforman esta fase.

A) Transcripción de los datos encontrados en el material que se analiza a los documentos intermedios: Esta etapa consiste en la recolección de toda la información pertinente para el estudio en las fichas de registro. Estas fichas permiten transformar el contenido de cada unidad de registro en información codificada.

De esta manera, cada una de las explicaciones y tareas donde el signo igual se evidencie de forma explícita, harán parte de las unidades de registro, las cuales serán plasmadas dentro de la casilla de unidad de registro y serán codificadas para posteriormente realizar el proceso de interpretación teniendo en cuenta las categorías de análisis.

Tabla 18. Ejemplo de transcripción de los datos

Unidad de registro			Código													
 <table border="1" data-bbox="289 1285 1010 1575"> <thead> <tr> <th>División</th> <th>Número de cifras del resultado</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$837 \div 93 =$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$10500 \div 250 =$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$17625 \div 75 =$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$328320 \div 380 =$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$8599400 \div 950 =$</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			División	Número de cifras del resultado	$837 \div 93 =$		$10500 \div 250 =$		$17625 \div 75 =$		$328320 \div 380 =$		$8599400 \div 950 =$			
División	Número de cifras del resultado															
$837 \div 93 =$																
$10500 \div 250 =$																
$17625 \div 75 =$																
$328320 \div 380 =$																
$8599400 \div 950 =$																
Estructura conceptual		Sistemas de representación	Fenomenología	Concepción y referente												
Campo conceptual	Campo conceptual															
Nivel 1: Hechos	Nivel 1: Destrezas		Contexto Situación													

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Nivel 2: Conceptos	Nivel 2: Conceptos			
Nivel 3: Estructuras	Nivel 3: Estructuras			
Observaciones:				

B) Construcción del libro de códigos: En esta etapa se define el libro de códigos donde se darán definiciones explícitas de las categorías, con reglas de codificación (Bernete, 2013, p. 248) que permitirán etiquetar la información, en la tabla 19, se presenta el libro de códigos que se define para las codificación de las unidades de registro.

Tabla 19. Libro de códigos

País	Libro	Sección	Tipo	Sección	Página
M (México)		B1 (Bloque 1) B2 (Bloque 2) B3 (Bloque 3) B4 (Bloque 4) B5 (Bloque 5)	E (Explicación) T (Tarea)	G (Geometría) A (Aritmética) E (Estadística y probabilidad)	1-93
C (Colombia)	1 (Cuadernillo 1)	S1 (Situación de aprendizaje 1) S2 (Situación de aprendizaje 2) S3 (Situación de aprendizaje 3)			1-199
	2 (Cuadernillo 2)	S4 (Situación de aprendizaje 4) S5 (Situación de aprendizaje 5)			1-109

A modo de ejemplo, si se establece el código MB4EG113 quiere decir que la unidad de registro se encuentra en el libro de México en el bloque 4, lo que corresponde a una explicación sobre geometría en la página 113.

En la tabla 20, se presenta un ejemplo de la unidad de registro con el código C1S1TA24, es decir el libro de texto de Colombia, cuadernillo 1 en la Situación de Aprendizaje 1 corresponde a una Tarea del área de Aritmética y que se encuentra en la página 24.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Tabla 20. Ejemplo unidad de registro y código

Unidad de registro		Código		
10) Completa las siguientes ecuaciones. a) $8,1 + \square = 21,31$ b) $44,17 + 36,8 = \square + 29,07$ c) $\square + 0,25 = 1,34 + 2,07$ d) $\square - 0,5 = 52,59 - 23,7$ e) $86,5 - 77,05 = \square - 3,45$ f) $9,6 - 6,37 = 19,34 - \square$		CISITA24		
Estructura conceptual		Sistemas de representación	Fenomenología	Concepción y referente
Campo conceptual	Campo procedimental			
Nivel 1: Hechos	Nivel 1: Destrezas	Contexto Situación		
Nivel 2: Conceptos	Nivel 2: Razonamientos			
Nivel 3: Estructuras	Nivel 3: Estrategias			
Observaciones:				

3.3.3 Fase 3 “La explotación de los datos: operaciones e interpretación de resultados”

Se centra en la identificación de regularidades en los fenómenos que se investigan, es decir, en esta etapa se interpretan y analizan los datos obtenidos. Se inicia el proceso de identificación y representación de pautas relevantes en los resultados.

A continuación, en la figura 17, se presenta el proceso de análisis que se realiza durante la interpretación de las unidades de registro.

Figura 17. Ejemplo de interpretación

Centro 3 - La liga profesional - Ejercitación

C) Ejercicios numéricos

8) Encuentra el resultado de las siguientes sumas.

a) $3,1 + 32,09 =$

b) $17,25 + 13,69 =$

c) $32,59 + 67,9 =$

d) $13,3 + 48,84 =$

e) $95,11 + 4,5 =$

9) Encuentra el resultado de las siguientes restas.

a) $79,88 - 7,09 =$

b) $99, \text{ - } ,01 =$

c) $11,28 - 4,7 =$

d) $9 - 2,37 =$

e) $54,35 - 27,89 =$

10) Completa las siguientes ecuaciones.

a) $8,1 + \text{ } = 21,31$

b) $44,17 + 36,8 \text{ } = 29,07$

c) $\text{ } + 0,25 = 1,34 + 2,07$

d) $\text{ } - 0,5 = 52,5 \text{ } - 3,7$

e) $86,5 - 77,05 = \text{ } - 3,45$

f) $9,6 - 6,37 = 19,34 - \text{ }$

Para la identificación de las categorías de análisis se asigna un color a cada una de ellas, en un primer momento se inicia con la identificación de la estructura conceptual, como esta se clasifica en dos, se asigna el color verde al campo conceptual y el color morado campo procedimental, además, para los sistemas de representación se establece el color naranja. En el caso de la fenomenología y la concepción y referentes, estos no se les asigna colores dado que la interpretación se realiza mediante el análisis de la unidad de registro como unidad.

Para la identificación del *campo conceptual* se buscan los *hechos* que están presentes, por lo cual en un primer momento se identifican los términos tales como sumas, restas, ecuaciones, la incógnita representada por y los números decimales (3,1-

17,25...), también se pueden identificar *notaciones* tales como los símbolos de + , - y de decimales 3,1.

Para identificar el *campo procedimental* buscan las *destrezas*, las cuales especifican los procedimientos sobre los hechos, es decir, las consignas que indican que procedimiento se va a realizar en cada uno de los puntos 8, 9 y 10, por lo tanto, se encierran todos los enunciados.

Ahora para establecer los *sistemas de representación* se evidencian números que corresponden al sistema *numérico*, los símbolos de suma y resta que corresponden al sistema *simbólico* y el sistema de representación *pictórico* dado por las casillas donde se debe colocar las cantidades faltantes.

Continuando con la *fenomenología*, al leer la actividad por completo se evidencia que los símbolos utilizados son propios de la matemática, por lo tanto, corresponde a un *contexto matemático* y al identificar al medio en el que se sitúa la actividad, se evidencia que está relacionada con actividades escolares de los alumnos, por lo tanto la *situación es educativa*.

Para establecer la concepción y el referente asociado a la actividad, se debe realizar el análisis de cada uno de los puntos que conforman la actividad completa. En el caso del punto 8 y 9 se les asocia la *equivalencia como operador*, teniendo en cuenta que al lado derecho de la igualdad se encuentra una operación que realizar y que al lado derecho se encuentra un cuadro donde debe ir el resultado. Sin embargo, en el punto 10 se asocian dos referentes, por un lado, la *equivalencia como ecuación* dado que en los incisos de la b a las f se debe encontrar el valor de la incógnita (que está dada por un rectángulo) la cual hace que la equivalencia numérica se cumpla. Además, también se asocia la *equivalencia como equivalencia numérica* dado que en el inciso a, se debe encontrar el número que permita que se conserve el mismo valor numérico en ambos lados de la igualdad.

El proceso de análisis descrito anteriormente es el que se realiza para cada una de las fichas de registro, de tal manera que se pueda realizar su llenado para posteriormente continuar con la fase de análisis de resultados e identificación de hallazgos.

Capítulo 4: Análisis de los resultados

Al realizar la interpretación de las fichas de registro de cada uno de los libros de texto se obtiene la información para realizar el análisis sobre los significados del signo igual potenciados, es así como mediante de los componentes del significados se establece las concepciones y los referentes del significados (expuestos en el capítulo 2 de esta tesis) que se abordan al interior de cada libro, por esto, a continuación, se realiza la presentación de los resultados obtenidos en el análisis de las unidades de registro.

Este análisis se divide en dos secciones, una por cada libro de texto y al interior de cada una, se realiza un análisis estructurado de lo general a lo particular, es decir, se empieza realizando una explicación de la presencia de cada uno de los componentes del significado, después se muestra de los 13 referentes del significados cuales se encontraron y posteriormente, estos referentes se presentan al interior de las concepciones, del tipo de actividad y del área de conocimiento a la que pertenece.

4.1 Libro de texto de México

En el libro de texto de México “Desafíos matemáticos grado quinto” se obtuvieron 15 fichas de registro. En cada ficha se encuentran las unidades de registro entendidas como aquellos fragmentos donde el signo igual se encuentra de manera explícita. Cada uno de estos fragmentos contiene tareas o explicaciones completas, es decir, fragmentos donde puede aparecer el signo igual más de una vez, tal como se observa en la figura 18, donde el signo igual está presente 18 veces, sin embargo al estar contenido en una tarea, esta se cuenta como una unidad de registro.

Figura 18. Aparición del signo igual



Reunidos en parejas, hagan lo que se pide.

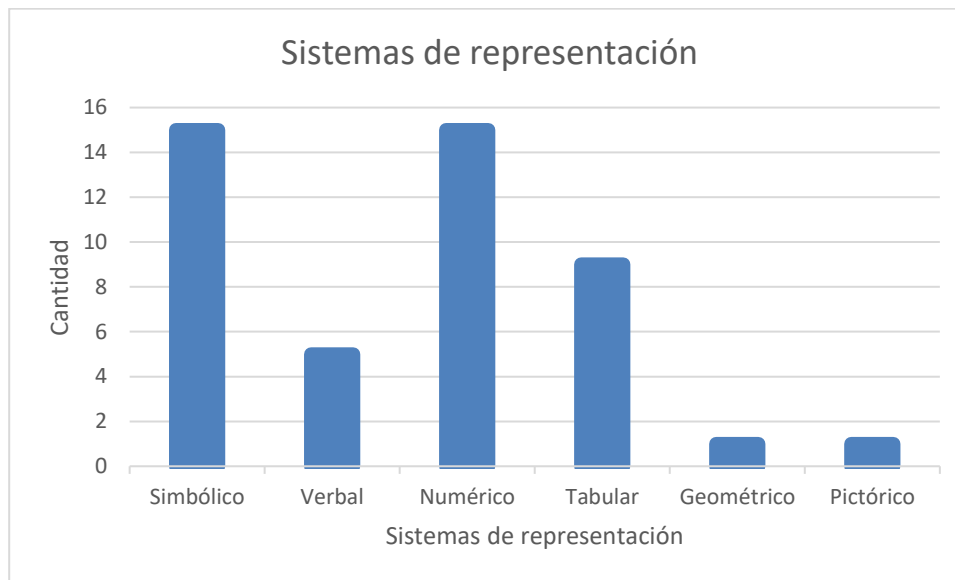
1. En la siguiente tabla están escritos algunos números en el sistema de numeración que empleaban los antiguos romanos; a la derecha se expresa su equivalente en el sistema de numeración decimal.

III = 3	VIII = 8	XII = 12	VII = 7	XV = 15	LX = 60
IV = 4	IX = 9	XC = 90	CD = 400	CM = 900	DLIII = 553
LXX = 70	CCC = 300	DCC = 700	MD = 1500	MM = 2000	CC = 200

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

En este sentido, dentro de las 15 unidades de registro analizadas, se pudo observar mucha riqueza entorno a los sistemas de representación, dado que de los 9 sistemas de representación buscados, en el análisis se presentaron los siguientes: el simbólico, verbal, numérico, tabular, geométrico y pictórico. En la figura 19, se muestra un diagrama con la frecuencia de cada uno de ellos.

Figura 19. Ejemplo sistemas de representación

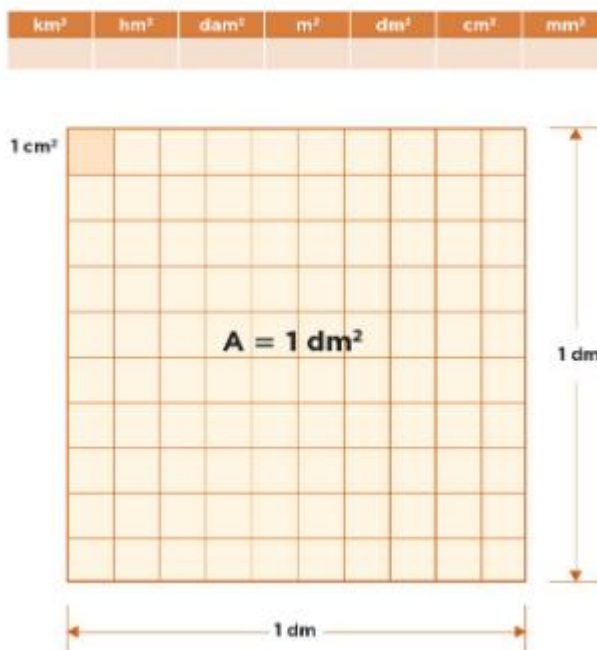


Teniendo en cuenta la naturaleza del signo igual y que sus significados dependen del uso que se le brinde, para su conceptualización este signo se encuentra inmerso entre otros sistemas de representación, en un primer momento, el signo igual como signo pertenece al sistema de representación simbólico, el cual está presente en las 15 unidades de registro acompañado de otros símbolos como +, -, x..., así mismo, se observa con igual frecuencia el sistema numérico, esto debido a que el signo igual está presente en tareas o explicaciones donde está acompañado de números. Seguido a estos, se observa el sistema de representación tabular con una frecuencia de 9 veces, esto debido a que se observa que muchas de las actividades que propone el libro de texto son mediante tablas como puede evidenciar en la figura 18 presentada con anterioridad, donde se organiza en una tabla la equivalencia entre los sistemas de numeración; también se puede observar en la figura 20 que se presenta a continuación, donde en una tabla se presenta la organización de múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida de longitud.

En este orden de ideas, en una misma unidad de registro se puede encontrar varios sistemas de representación, como lo es el caso de la figura 20, donde se muestra una tarea de geometría, donde se puede observar la presencia de 5 sistemas de representación.

Figura 20. Ejemplo sistemas de representación

2. Completen la siguiente tabla y busquen una regla para realizar conversiones entre los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado (m^2). Para ello, pueden observar en la figura la relación que hay entre $1 dm^2$ y $1 cm^2$.



Nota: código MB3TG103

El sistema de representación numérico está presente en las cantidades asociadas a las medidas del cuadrado $1 dm^2$ o $1 cm^2$; el registro simbólico se evidencia con el uso del signo igual =; el sistema geométrico al hacer uso de una figura geométrica y al tratarse del área de un cuadrado; el registro tabular al presentar una tabla de conversiones para completar y por último el registro verbal para comunicar las unidades de medida y sus conversiones dm^2, km^2 o hm^2 . En esta tarea es de resaltar la riqueza de los sistemas de representación, como se complementan para la comunicación y construcción de conocimientos, en este caso, es una tarea que promueve la relación funcional.

Analizando el componente de la estructura conceptual, se pudo observar la presencia tanto del campo procedimental como del campo conceptual en las 15 unidades de registro, en el nivel 1 de hechos y nivel 1 de destrezas respectivamente. Los otros niveles no se evidencian, debido al nivel educativo al que va dirigido el libro de texto pues al tratarse de grado 5to de primaria, no se aborda aún el trabajo de conceptos, por ende no se evidencian razonamientos. En la figura 21, se presenta a modo de ejemplo la estructura conceptual de una unidad de registro.

Figura 21. Ejemplo estructura conceptual

2. Dadas las siguientes fracciones, escriban dos maneras más de representar el mismo número. Los primeros dos casos están resueltos.

a) $\frac{9}{10} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10}; \quad \frac{2}{20} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10}$

b) $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}; \quad \frac{16}{20} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} + \frac{18}{20}$

c) $\frac{8}{5} =$

d) $\frac{42}{9} =$

Nota: código MB2TA50

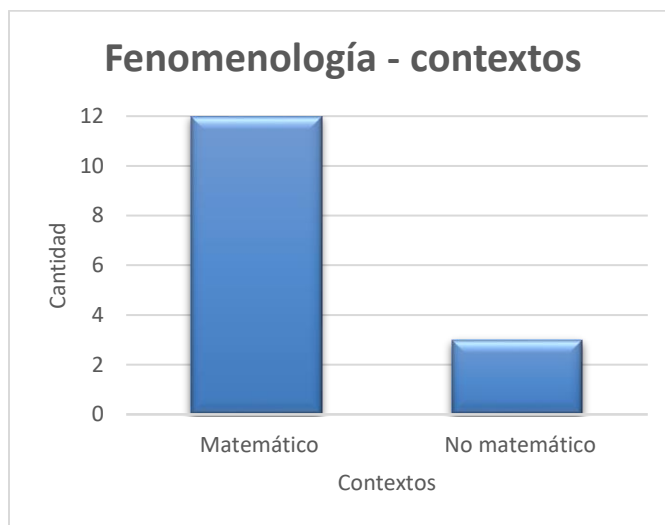
Dentro del campo conceptual se encuentra el componente del conocimiento matemático, en este sentido, dentro de los hechos se evidencian términos, es decir, las denominaciones o los vocablos con los que se designan los conceptos, en el ejemplo se puede observar números naturales (3), números racionales ($\frac{3}{10}, \frac{42}{9} \dots$), sumas y el término representación; además se evidencian notaciones tales como el signo +, y números de la forma $\frac{a}{b}$. Aunque el signo igual también hace parte de las notaciones, se tomó la decisión de no colocarlo dado que al ser el objeto de estudio está presente en todas las unidades de registro.

Dentro del campo procedimental, donde se encuentran los procedimientos y los modos de actuación con respecto al conocimiento, las destrezas se encontraron muy explícitas en todas las unidades de registro, los procedimientos sobre los hechos que se debían realizar fueron muy claros, como en el ejemplo de la figura 21, donde la destreza consta de escribir dos maneras más de representar el mismo número que se está presentando.

Finalmente, el componente de la fenomenología se refiere a aquellos contextos y situaciones que dan sentido a los conceptos, en este sentido, se realizó la revisión en las 15 unidades de registro para identificar los contextos en los que se enmarca las actividades y el tipo de situación que aborda cada una de ellas. A continuación en la figura 22, se presenta el diagrama que muestra los contextos encontrados.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 22. Diagrama Fenomenología – Contextos



Por un lado, dentro de los contextos se conciben los matemáticos, que alude al uso de símbolos propios de las matemáticas y los no matemáticos que se refiere a la relación entre objetos cotidianos con objetos matemáticos. Se muestra que 12 unidades de registro se presentan en un contexto matemático como es en el caso de la figura 21, donde el lenguaje utilizado es propio de las matemáticas y solamente 3 en un contexto no matemático como se puede observar en la figura 23, donde se mezclan objetos de diferente naturaleza al tener pictogramas relacionados con cantidades numéricas.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 23. Ejemplo contexto no matemático

Consigna

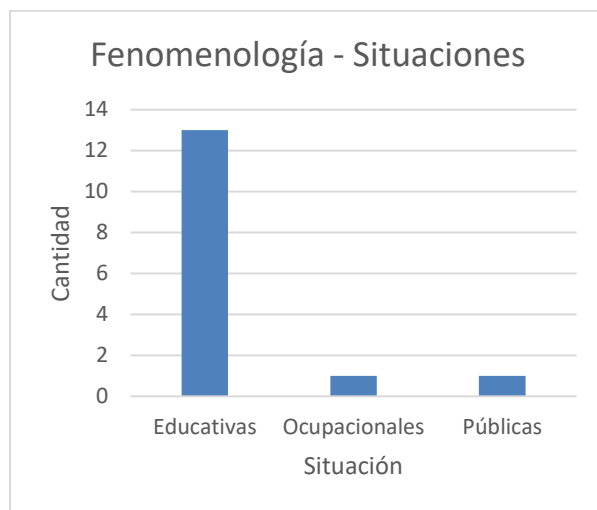
Reúnete con un compañero para identificar cuál de los valores le corresponde a cada símbolo de los que aparecen en la escalera, de tal forma que al sumar los de cada renglón y los de cada columna, el resultado sea 10.

$6\frac{5}{9}$
 $\frac{8}{4}$
 $2\frac{1}{3}$
 $4\frac{5}{10}$
 $3\frac{2}{9}$

$\blacklozenge = \square$ $\infty = \square$ $\times = \square$
 $\star = \square$ $\Omega = \square$

En cuanto a las situaciones, estas hacen referencia al medio en que se sitúan las unidades de registro, las cuales pueden ser personales, educativas, ocupacionales, públicas, científicas y profesionales, sin embargo, solamente se evidencian 3 de las 5, con una mayor frecuencia en las situaciones educativas, tal como se evidencia en la figura 24, que contiene el diagrama con la frecuencia.

Figura 24. Diagrama Fenomenología – Situaciones



Las situaciones educativas son las relacionadas con actividades escolares de los alumnos, lo cual deja en manifiesto que la mayoría de las situaciones son propiamente académicas como se observa en los ejemplos de las figuras 20 y 21, además, para ejemplificar una situación diferente a la educativa, en la figura 25, se muestra una situación ocupacional entendidas como las que encuentra el alumno en un entorno de trabajo.

Figura 25. Ejemplo situación ocupacional

2. Para medir grandes extensiones de tierra se utilizan las siguientes unidades agrarias. Analícenlas y luego respondan lo que se pregunta.

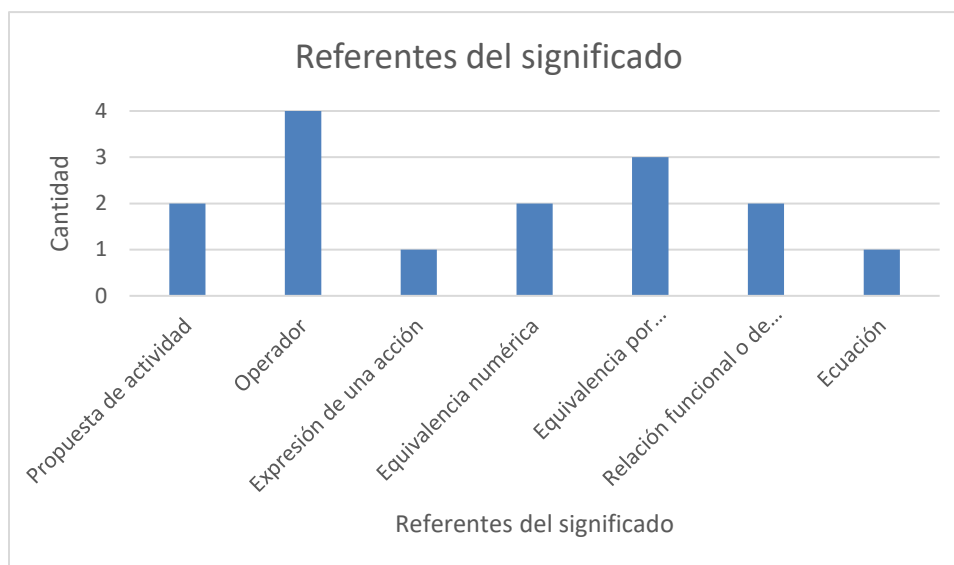
1 área (a) = cuadrado de 10 m de lado.
1 hectárea (ha) = cuadrado de 100 m de lado.
1 centiárea (ca) = cuadrado de 1 m de lado.

Código: MB3EG105

De esta manera, se muestra una descripción de la presencia de los componentes del significado de manera general en las 15 unidades de registro analizadas, ahora, con el objetivo de mostrar la presencia de los 13 referentes del significado, a continuación en la figura 26, se muestra cuales se evidencian y la cantidad de cada uno de ellos.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 26. Gráfico referentes del significado



Como se muestra en el gráfico, se evidencia la presencia de 7 de los 13 referentes del significado del signo igual. Dentro de los referentes ausentes se encuentra ecuación, identidad y separador los cuales dentro de su descripción se menciona que estos se encuentran en un contexto del álgebra, de esta manera, al analizar un libro de texto dirigido a estudiantes de quinto de primaria el contexto abordado es el aritmético. Por otro lado, el referente de igualdad estricta tampoco se evidencia, puesto que el signo igual no se ve en expresiones donde a ambos lados se represente un mismo objeto matemático con el mismo representante, así mismo, el referente de asignación de un valor numérico no se observa dado que no se asigna un valor numérico a símbolos y tampoco se evidencia el referente de definición de un objeto matemático, pues este se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático lo cual no se encontró en las unidades de registro.

A continuación, en la tabla 21 se presentan las concepciones que se relacionan con los 7 referentes encontrados en las 15 unidades de registro, clasificadas por tipo de actividad.

Tabla 21. Concepciones y tipo de actividad

Concepción	Tipo		Total
	Tarea	Explicación	
Equivalencia	10	3	13
Relación funcional	2	0	2
Total	12	3	15

En el libro de texto se encontró la presencia de 2 de las 4 concepciones, la de equivalencia y la de relación funcional, sin embargo, no aparece ni la igualdad ni la identidad. Las unidades de registro fueron clasificadas en dos tipos, tipo tareas para aquellas donde se

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

encontrará una consigna donde se proponga al lector realizar una acción y tipo explicaciones para aquellos apartados donde se está ampliando una temática o conceptualizando los contenidos.

De esta manera, se evidencia que de las 15 unidades de registro 12 pertenecen a tareas de las cuales 10 se presentan bajo la concepción de equivalencia y 2 bajo la relación funcional. Por otro lado, se presentan solamente 3 unidades de tipo explicativas y todas bajo la concepción de equivalencia. En este resultado se puede observar que las tareas se presentan en mayor frecuencia, esto se debe a que el libro de texto en su mayoría propone actividades y ejercicios que desarrollen la parte procedimental en el estudiante y que ponen en práctica los conceptos abordados. También se observa que la noción asociada al signo igual que se potencia con mayor frecuencia es como equivalencia.

A modo de ejemplo, en la figura 27 se observa un ejemplo del signo igual como equivalencia bajo el referente de propuesta de una actividad, al mostrar una tarea que tiene al lado izquierdo de la igualdad una operación y al lado derecho un espacio en blanco, es decir, una expresión incompleta.

Figura 27. Signo igual como equivalencia – propuesta de una actividad

<p>Problema 4</p> <p>Sabiendo que $28 \times 16 = 448$, determinen, a partir de esta operación, los resultados de las siguientes multiplicaciones.</p> <ul style="list-style-type: none">• $28 \times 4 =$• $56 \times 16 =$• $28 \times 80 =$• $7 \times 16 =$• $140 \times 160 =$	
	<p>Problema 5</p> <p>Sabiendo que $324 \div 12 = 27$, determinen los resultados de las siguientes divisiones.</p> <ul style="list-style-type: none">• $972 \div 12 =$• $324 \div 3 =$• $81 \div 12 =$• $108 \div 12 =$• $3240 \div 120 =$

Código: MB4TA124

De manera complementaria, en la figura 28 se muestra un ejemplo del signo igual con el significado de equivalencia pero en una actividad de tipo tarea, donde el uso del signo igual está dado como un operador, es decir, al lado derecho del signo igual se encuentra la

operación y al lado derecho se encuentra una línea que corresponde al espacio para escribir la respuesta.

Figura 28. Signo igual como equivalencia - operador

Consigna 2

En parejas, resuelvan el siguiente problema.

Sabiendo que $35 \times 24 = 840$, encuentren, sin hacer la operación, el resultado de:

a) $35 \times 12 =$ _____

b) $840 \div 24 =$ _____

c) $24 \times 7 =$ _____

d) $840 \div 12 =$ _____

e) $35 \times 8 =$ _____

f) $840 \div 7 =$ _____

Nota: código MB4TA125

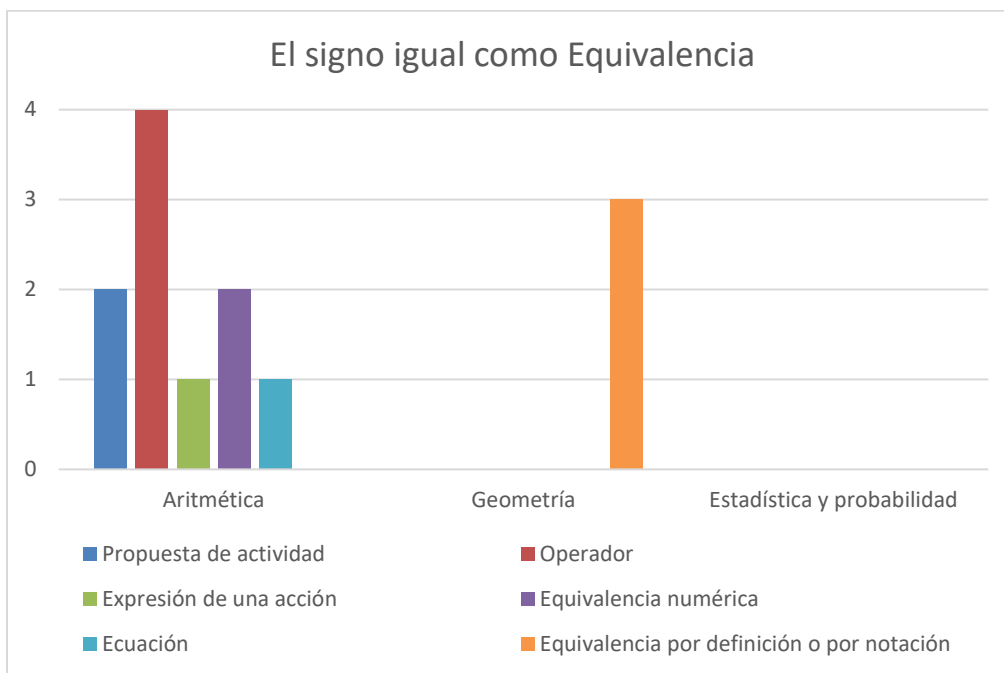
En los siguientes apartados se presenta los referentes del significado al interior de cada concepción, expuestos en la tabla 6 de este trabajo, y la clasificación de los tipos actividades en cada una de las áreas del conocimiento clasificadas: aritmética, geometría y estadística y probabilidad.

4.1.1 El signo igual como Equivalencia

Desde la concepción de equivalencia, el signo igual se pudo rastrear desde 5 de los 13 referentes, en las 12 unidades de registro. A continuación, en la figura 29 se presenta en un diagrama la frecuencia en cada uno de ellos y en las áreas del conocimiento que estuvieron presente.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 29. Gráfico Signo igual como equivalencia



De esta manera, se observa que los referentes encontrados en el libro de texto de México de 5to año de primaria “Desafíos matemáticos” son propuesta de actividad, operador, expresión de una acción, equivalencia numérica, ecuación y equivalencia por definición o por notación. Al observar la frecuencia dentro de las áreas de conocimiento, se puede evidenciar que 10 corresponden a actividades del área de aritmética, 3 al área de geometría y que no se evidenció el signo igual presente en actividades del área de estadística y probabilidad.

Dentro del área de conocimiento de aritmética se evidencian 5 referentes del signo igual, sin embargo, el signo igual como operador tiene mayor frecuencia, esto se debe a la presencia en mayor medida de tareas enfocadas a la resolución y realización de operaciones con el objetivo de encontrar un resultado. En la figura 30 se muestra una unidad de registro que muestra el signo igual como operador.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 30. Signo igual como equivalencia - operador

Consigna

En parejas, coloquen una ✓ en el resultado de las siguientes divisiones. Cálculenlas mentalmente. En las líneas escriban lo que hicieron para llegar al resultado.

$840 \div 20 =$	10	
	40	
	42	
	50	
$1015 \div 35 =$	9	
	10	
	29	
	30	

Nota: código MBITA14

Como se observa en la figura 30, la estructura conceptual está determinada por el campo conceptual donde se evidencian términos como resultados, divisiones y cálculos, además de notaciones como el símbolo de división /, en cuanto al campo procedimental se encuentra la destreza definida por la consigna que indica que se debe colocar una paloma en el resultado correcto y escribir en la siguiente casilla en blanco el procedimiento realizado. Además, se observa que en el sistema de representación tabular se encuentra una división y al frente en varias filas se encuentran diferentes resultados, es allí donde se ve la presencia del signo igual acompañado además del sistema de representación simbólica y numérico. La fenomenología está dada por el contexto matemático siendo una situación educativa, con un lenguaje propio de las matemáticas.

Teniendo en cuenta esto, se puede observar el signo igual como operador, dado que al lado izquierdo del signo se encuentra la división a realizar y al lado derecho el resultado que debe ser señalado.

Continuando en el área de aritmética, se evidencia que al signo igual como operador le siguen propuesta de actividad y equivalencia numérica, cada uno de estos presentes en dos unidades de registro respectivamente. Para ejemplificar uno de ellos, en la figura 31 se presenta una unidad de registro de tipo tarea donde el signo igual está presente como propuesta de actividad .

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 31. Signo igual como equivalencia – propuesta de actividad

2. Resuelvan las siguientes operaciones en el sistema maya; transformen las cantidades al sistema decimal y contesten la pregunta.

•		
••	+	•• =
☉		—

•		— =
—	+	••••

•		
☉	×	— =
•		☉

¿Por qué consideran que durante la historia de la humanidad se ha universalizado el sistema de numeración decimal?

Nota: Código MB5TA157

Al identificar los componentes del significado en la unidad de registro, se evidencia que la dentro de la estructura conceptual, el campo conceptual está dado por hechos, donde los términos que se evidencian son operaciones, sistema de numeración maya y sistema de numeración decimal, también se evidencias notaciones como + y X, por su parte, el campo procedimental está determinado por la destreza que indica: resolver las siguientes operaciones en el sistema maya; transformar las cantidades al sistema decimal y contestar la pregunta, en este sentido, al identificar los sistemas de representación presentes se observan el simbólico dado por los signos +, x y =, el tabular dado por las tablas que organizan las operaciones y el sistema numérico dado por el sistema de numeración maya. En cuanto a la fenomenología, al tratarse de sistemas de numeración los símbolos que se usan son propios de las matemáticas por lo tanto, corresponde a un contexto matemático y a una situación de tipo educativa.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Teniendo en cuenta estos componentes, se determina que se presenta el signo igual como propuesta de una actividad, dado que en el lado izquierdo del signo igual se presentan operaciones entre números en el sistema de numeración maya y del lado derecho del signo igual hay un espacio vacío, por lo tanto, es una expresión incompleta.

Dentro del área de geometría, se observan 3 unidades de registro que abordan el referente de equivalencia por definición o notación, como es el caso de la figura 32 donde se muestra un ejemplo de una explicación que se enmarca en una actividad tipo explicación, bajo el referente de equivalencia por notación.

Figura 32. Equivalencia por definición o por notación – México

En equipos, analicen la siguiente información. Posteriormente resuelvan lo que se solicita.

Para medir grandes superficies, como la de los estados de la República Mexicana, se usa como unidad de medida el kilómetro cuadrado; su símbolo es km^2 . Por ejemplo, el estado de Aguascalientes tiene una superficie de $5\,616 \text{ km}^2$.

Algunas equivalencias entre distintas unidades de medida de superficie son:



1 kilómetro cuadrado (km^2) = 100 hectómetros cuadrados
1 hectómetro cuadrado (hm^2) = 100 decámetros cuadrados
1 decámetro cuadrado (dam^2) = 100 metros cuadrados
1 metro cuadrado (m^2) = 100 decímetros cuadrados
1 decímetro cuadrado (dm^2) = 100 centímetros cuadrados
1 centímetro cuadrado (cm^2) = 100 milímetros cuadrados

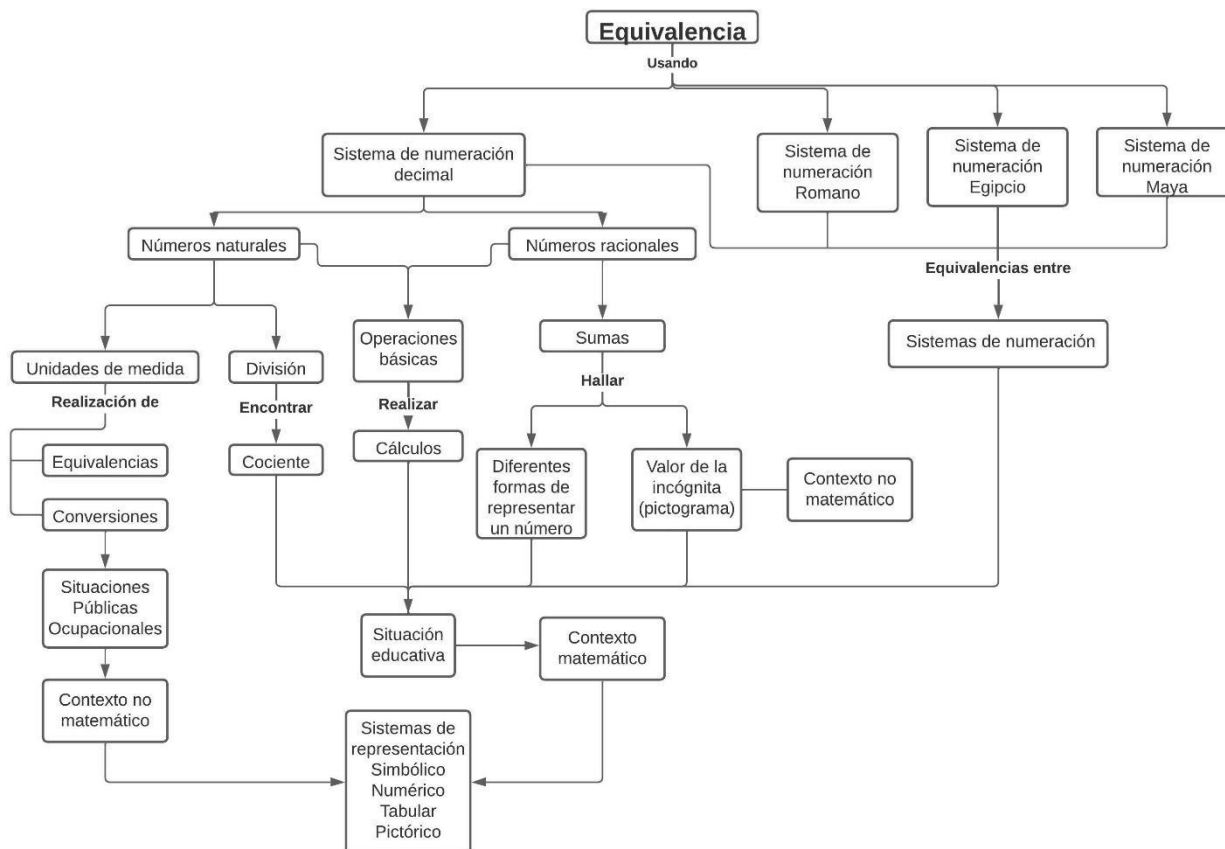
Nota: código MB3EG102

Dentro del campo conceptual se evidencian hechos, dado por términos como números naturales (1-100), equivalencias y unidades de medida y en el campo procedimental la destreza frente a la acción que se debe ejecutar la cual consiste en analizar la información y resolver lo que se solicita. Los sistemas de representación evidenciados son numéricos al contener números naturales, simbólico al contener el signo igual y verbal al referir las unidades de medida, en este sentido, la fenomenología se enmarca en un contexto no matemático y la situación es del tipo pública, dado que éstas son situaciones donde los estudiantes observan aspectos sociales de su entorno y de su comunidad, en este caso, la superficie de los estados de la República Mexicana.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Teniendo en cuenta lo anterior, en la explicación se muestran equivalencias entre unidades de medida de superficie, donde el signo igual está presente entre conversiones, es decir, en equivalencias por notación. A continuación, se presenta en la figura 33 un mapa conceptual que muestra el signo igual como relación funcional desde las componentes del significado.

Figura 33. Componentes del significado - Signo igual como equivalencia



El signo igual bajo la concepción de equivalencia fue rastreado en 13 unidades de registro y al analizarlas bajo las componentes del significado, se encuentra que la equivalencia es abordada entre los distintos sistemas de numeración romano, egipcio y maya mostrando equivalencias numéricas con el sistema de numeración decimal. Además, dentro del sistema de numeración decimal se observan dos conjuntos numéricos, los naturales y los racionales. A continuación en la figura 34, se muestran dos unidades de registro que muestran las conexiones realizadas dentro del mapa conceptual.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 34. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como equivalencia

MB4TA119

Consigna

Reúnete con un compañero para identificar cuál de los valores le corresponde a cada símbolo de los que aparecen en la escalera, de tal forma que al sumar los de cada renglón y los de cada columna, el resultado sea 10.

MB4TG139

Consigna 4

En pareja, realicen las conversiones que se indican.

2.5 m = _____ cm	280 m = _____ dam
3.4 km = _____ m	396 cm = _____ m
1056 hm = _____ m	721 dm = _____ m

Dentro de los números naturales se evidencian unidades pertenecientes al área de geometría donde proponen la realización de equivalencias y conversiones entre unidades de medida, en situaciones educativas, públicas y ocupacionales, como es el caso de la unidad MB4TG139 de la figura 34, además, también se observan unidades desde el área de aritmética donde se aborda la división con la intención de encontrar el cociente. Dentro de los números racionales se utiliza la suma para hallar las diferentes formas en que se puede representar un número, también se aborda el signo igual como ecuación, como es el caso de la unidad MB4TA119 donde mediante operaciones se debe encontrar el valor de los pictogramas que toman la función de incógnita. Aunque se observan estos conjuntos numéricos por separado, también hay unidades donde los dos conjuntos se integran con la intención de realizar cálculos entre conjuntos haciendo uso de las operaciones básicas.

Aunque la mayoría de las unidades corresponden a situaciones educativas, las enfocadas al área de geometría abarcan generalmente situaciones públicas y ocupacionales, al traer en contexto temas relacionados con agricultura y de terrenos. Por esto, el contexto en que se ubican las unidades de registro varía, en el caso de la unidad MB4TG139 corresponde a un contexto matemático y la unidad MB4TA119 a un contexto no matemático.

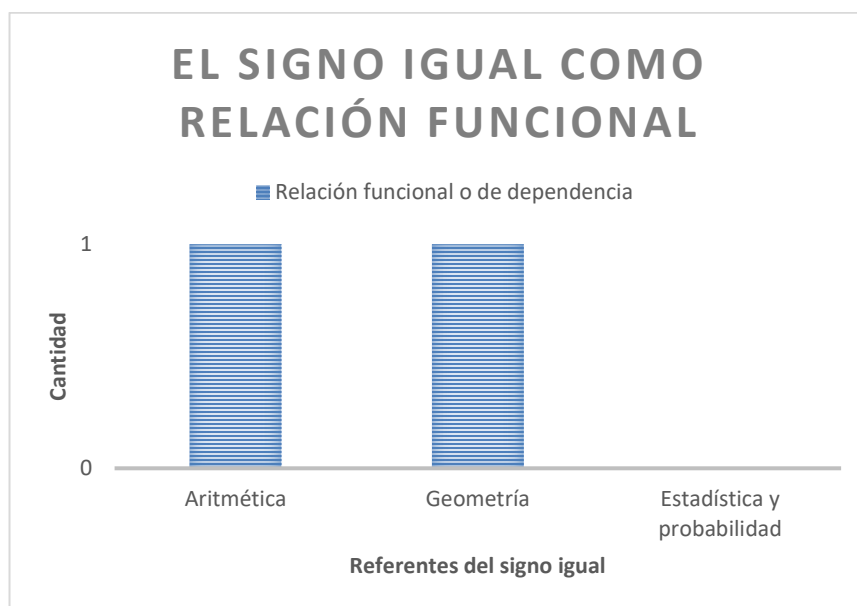
Por último, se evidencia que los sistemas de representación más utilizados en las unidades de registro son numérico, simbólico y tabular, además, la unidad MB4TG139 contiene el sistema de representación verbal y la unidad MB4TA119 el sistema de representación pictórico.

4.1.2 El signo igual como Relación funcional

El signo igual desde la concepción de relación funcional muestra una correspondencia, conexión o dependencia entre las cantidades que se relacionan. Dentro de la concepción del signo igual como relación funcional, los referentes asociados son relación funcional o de dependencia e indicador de ciertas conexiones o correspondencia. En la figura 35, se presenta una gráfica con la frecuencia de estos referentes, clasificados en las áreas de conocimiento: aritmética, geometría y estadística.

Figura 35.

Diagrama signo igual como relación funcional



En la figura 35, se muestra que la relación funcional está presente en 2 unidades de registro, 1 pertenecientes al área de aritmética y 1 sobre geometría, ambos bajo el referente relación funcional o de dependencia. A continuación, en la figura 36 se presenta un ejemplo.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 36. Relación funcional - México

Consigna

En equipos, determinen el número de cifras del cociente de las siguientes divisiones, sin hacer las operaciones. Argumenten sus resultados.

División	Número de cifras del resultado
$837 \div 93 =$	
$10\,500 \div 250 =$	
$17\,625 \div 75 =$	
$328\,320 \div 380 =$	
$8\,599\,400 \div 950 =$	

Nota: código MB1TA13

Se puede observar en la figura 36 que el campo procedimental está dado por la consigna que indica que se debe estimar los resultados de las divisiones, sin hacer la división. Argumentado el resultado, es decir que se debe determinar la cantidad de cifras que conforman el cociente de las divisiones. Además, el campo conceptual está determinado por los hechos mediante términos como división, cociente y números naturales (3380-65-150...). Los sistemas de representación presentes son el simbólico dado por los símbolos = y /, el numérico por los números naturales y el tabular al estar la tarea presente en una tabla donde se relacionan la operación de la columna izquierda y con la columna derecha al llenarla con la cantidad de cifras. La fenomenología corresponde a un contexto matemático, dado que los símbolos utilizados son propiamente de las matemáticas, así es una situación de tipo educativa.

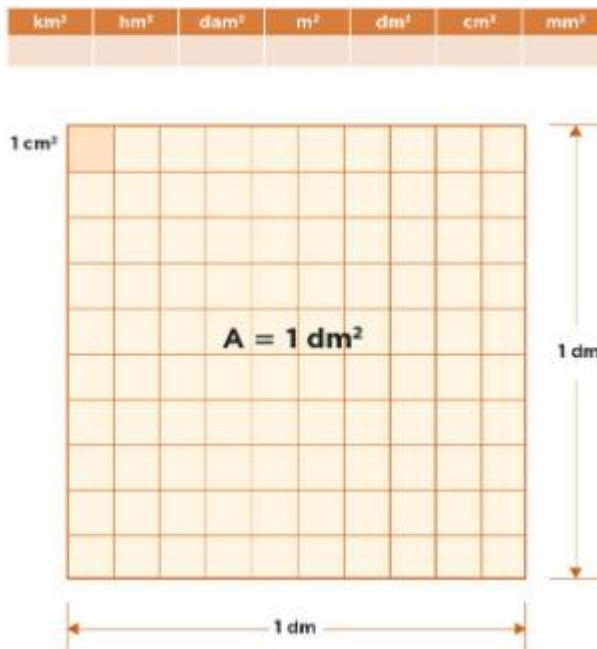
Al analizar el signo igual, se observa que al lado derecho del signo igual se presenta la operación a realizar, pero al lado derecho no se le asocia el resultado de la operación, sino que se asocia el número de cifras que lo conforman, en este sentido, se establece una relación funcional entre la división y el cociente.

Dentro del área de geometría se encuentra una tarea bajo el referente de relación funcional o de dependencia, la cual se muestra en la figura 37.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 37. Signo igual como relación funcional o de dependencia

2. Completen la siguiente tabla y busquen una regla para realizar conversiones entre los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado (m^2). Para ello, pueden observar en la figura la relación que hay entre $1 dm^2$ y $1 cm^2$.



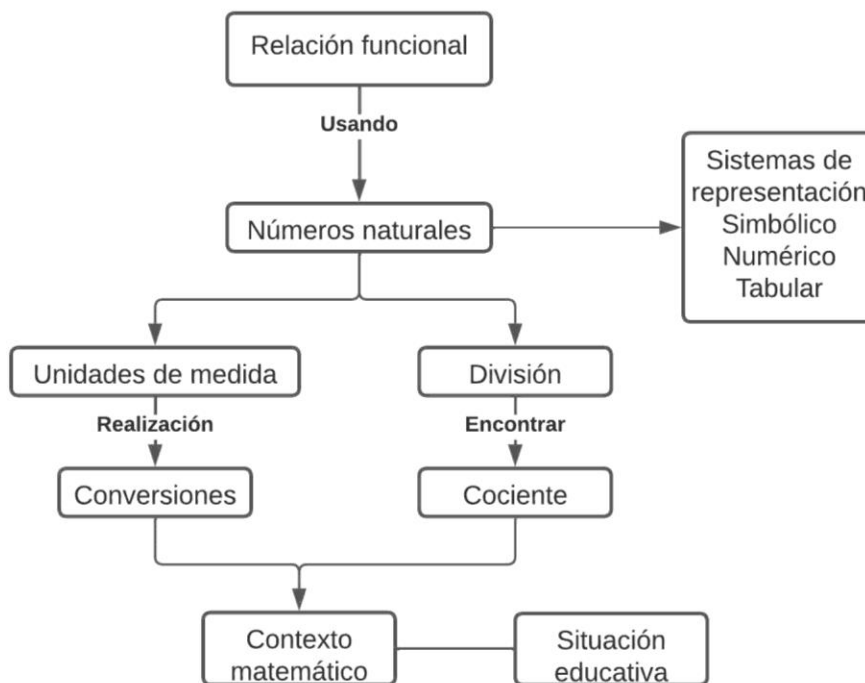
Nota: código MB3TG103

Al identificar los componentes del significado, se encuentra que dentro de la estructura conceptual, se presenta el campo conceptual y en su interior hechos dados por los términos números naturales, unidades de medida, múltiplos y submúltiplos, por otro lado, el campo procedimental se especifica en la destreza: completar la siguiente tabla y busque una regla para realizar conversiones. Al identificar los sistemas de representación inmersos en la unidad de registro, se encuentra el numérico, simbólico, geométrico, tabular y verbal. En cuanto a la fenomenología, el contexto es matemático dado que se abordan símbolos propios de la matemática en una situación educativa. En este sentido, el signo igual se presenta bajo el referente de relación funcional o de dependencia dado que el uso está indicando una relación entre parámetros al indicar que A, el área, es igual a un valor numérico.

A continuación, se presenta en la figura 38 un mapa conceptual que muestra el signo igual como relación funcional desde las componentes del significado.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 38. Componentes del significado - Signo igual como relación funcional



El signo igual bajo la concepción de relación funcional fue rastreado en 2 unidades de registro, las cuales se relacionan en la figura 39. Al analizarlas bajo las componentes del significado, se encuentra que la relación funcional es abordada desde el conjunto numérico de los números naturales, desde el área de geometría y el área de aritmética donde se pide la realización de conversiones y encontrar los cocientes respectivamente. En este sentido, se observa que estas unidades pertenecen al contexto matemático, además, todas las situaciones son de tipo educativa.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 39. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como relación funcional

MB1TA13

Consigna

En equipos, determinen el número de cifras del cociente de las siguientes divisiones, sin hacer las operaciones. Argumenten sus resultados.

División	Número de cifras del resultado
$837 \div 93 =$	
$10500 \div 250 =$	
$17625 \div 75 =$	
$328320 \div 380 =$	
$8599400 \div 950 =$	

MB3TG103

2. Completen la siguiente tabla y busquen una regla para realizar conversiones entre los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado (m^2). Para ello, pueden observar en la figura la relación que hay entre $1 dm^2$ y $1 cm^2$.

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

En la figura 39 se observa que los sistemas de representación que se evidencian presentes en todas las unidades son el simbólico dado por los símbolos asociados a las operaciones y al signo igual, el numérico por las cantidades que deben ser operadas y el tabular por la utilización de tablas que organizan la información, sin embargo, en la unidad MB3TG103 también se evidencia el sistema de representación verbal, dado por las unidades de medida.

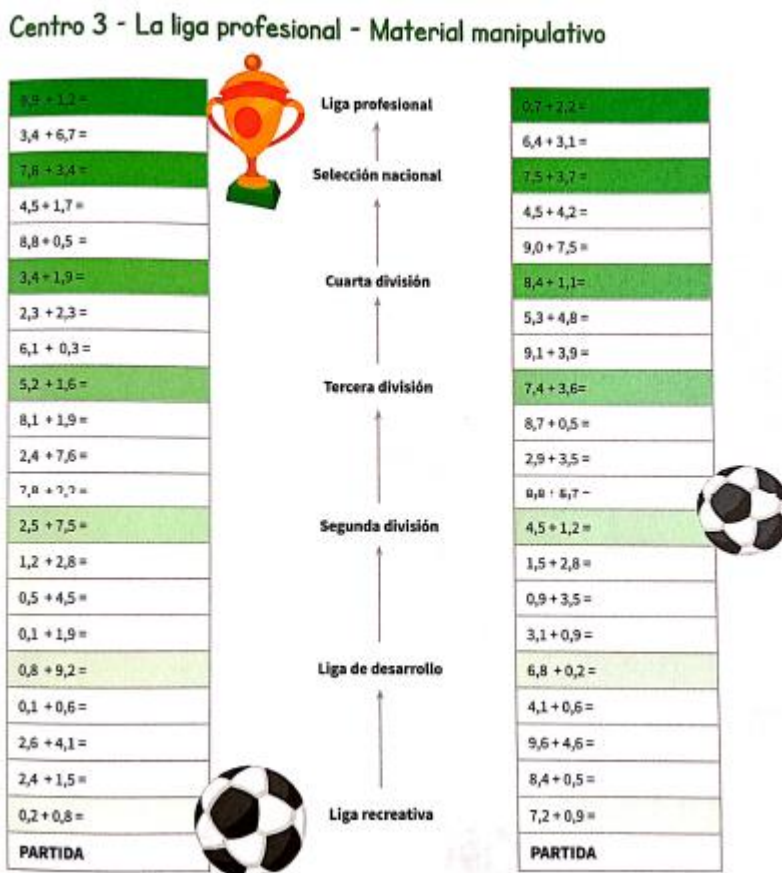
4.2 Libro de texto de Colombia

En el libro de texto de Colombia “Todos aprender Grado 5°” se obtuvieron 50 fichas de registro en las cuales se encuentran las unidades de registro donde el signo igual está presente de manera explícita. Cada unidad de registro contiene un fragmento donde el signo igual se utiliza dentro de una tarea o dentro de una explicación y en cada uno de estos fragmentos el signo puede aparecer más de una vez, tal como se observa en la figura 40, está presente 42

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

veces, sin embargo al estar contenido en una misma tarea, se cuenta como una unidad de registro.

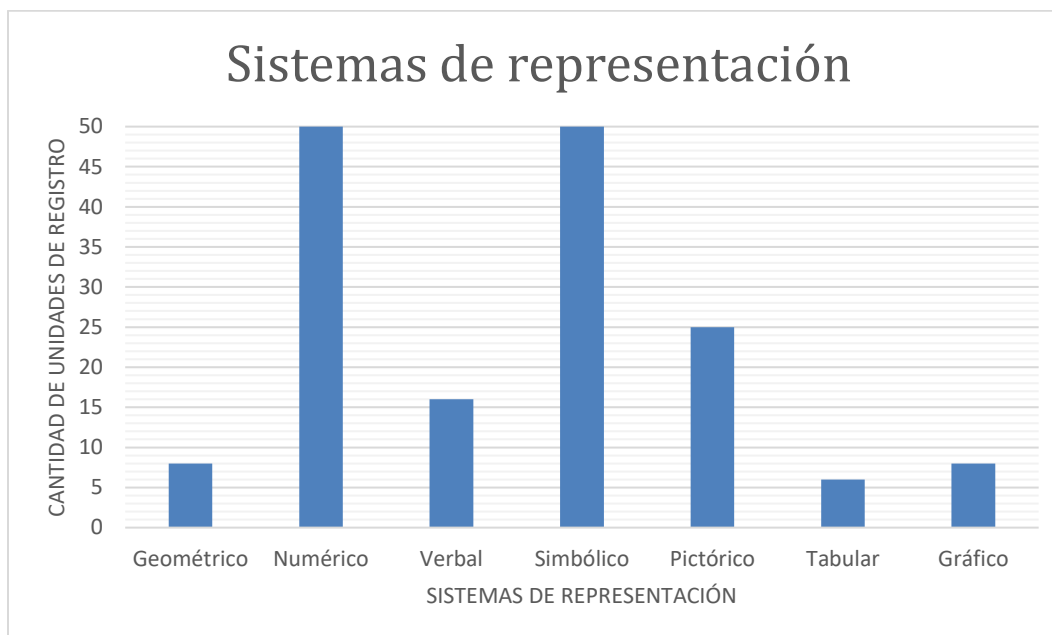
Figura 40. Aparición del signo igual - Colombia



Nota: código C1S1TA53

En este sentido, dentro de las 50 unidades de registro analizadas, se pudo observar la presencia de diferentes sistemas de representación, dado que de los 9 sistemas de representación base, se encontraron los siguientes: el simbólico, verbal, numérico, tabular, geométrico, pictórico y gráfico. En la figura 41, se presenta un diagrama que muestra cantidad de unidades de registro donde fueron observados cada uno de ellos.

Figura 41. Diagrama Sistemas de representación - Colombia



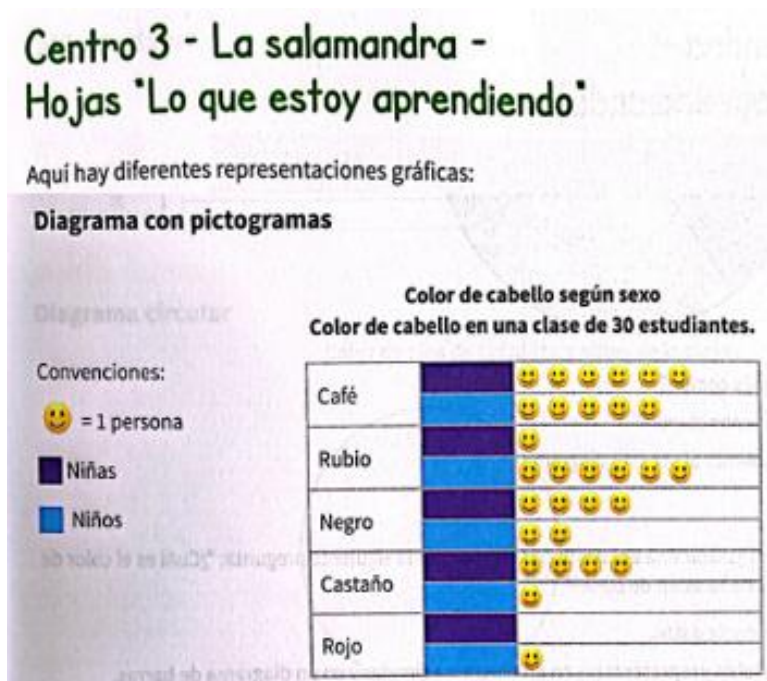
Teniendo en cuenta que los contenidos y objetos matemáticos pueden tener una variedad de significados, éstos necesitan de varios sistemas de representación para su conceptualización, como sucede con el signo igual, por esto se observa la presencia de una variedad de sistemas de representación.

En el diagrama, se observan un total de 163 de registros de representación presentes en las 50 unidades de registro, donde el sistema de representación simbólico y numérico tiene la frecuencia mayor 50, esto debido a que en las 50 unidades de registro está presente el signo igual que corresponde al sistema simbólico, acompañado de otros como +, -, %, /, ... También se observa con la misma frecuencia el sistema de representación numérico debido a que en todas las unidades de registro el signo igual está acompañado de cantidades numéricas.

El sistema de representación pictórico está contenido en 25 unidades de registro, estando en las frecuencias más altas, esto se debe a que en muchas de las unidades los recuadros son muy comunes para establecer que el espacio sea de un resultado o si el espacio corresponde a una incógnita. Seguido a este sistema de representación, está el verbal con una frecuencia de 16, la cual está muy presente en las unidades de registro del área de geometría, donde el sistema de representación verbal es necesario para indicar las unidades de medida o medidas de superficie o áreas.

En la figura 42, se muestra un ejemplo de una unidad de registro en la cual se encuentra la presencia de 5 sistemas de representación.

Figura 42. Sistemas de representación



Nota: C2S4EE35

El sistema de representación tabular se encuentra presente al tratarse de una tabla que recoge el color de cabello según el sexo de los estudiantes, el sistema de representación pictórico también al representar a una persona con caritas felices, además, el sistema de representación numérico al especificar que se trata de 30 estudiantes y que cada cara representa 1. El simbólico, como se argumentó al inicio por la presencia explícita del signo igual y finalmente el verbal dado que los colores y la relación de 1 persona está acompañada de este sistema.

En este sentido, se muestra que la variedad de sistemas de representación es muy alta y que al analizar con detalle cada una de las unidades de registro, se pueden encontrar varios, mostrando que para identificar significados es necesario la utilización de varios sistemas de representación, en especial para el signo igual, ya que al ser solamente un signo, por sí solo no tiene significados.

En cuanto a la estructura conceptual, se pudo observar que en las 50 unidades de registro, en todas se encontró la presencia del campo conceptual, sin embargo, hubo 13 unidades donde no se pudo identificar de forma explícita el campo procedimental.

El campo conceptual se rastreó en el nivel 1 hechos, al igual que el campo procedimental desde el nivel 1 destreza, esto se debe al nivel educativo al que va dirigido el libro de texto, al tratarse de 5to de primaria no se aborda aún el trabajo de conceptos, por

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

ende no se evidencian razonamientos. A modo de ejemplo, en la figura 43 se muestra la identificación de la estructura conceptual.

Figura 43. Estructura conceptual - Colombia

Centro 1 - Los prismas - Situación de aplicación

Introducción al Centro de Aprendizaje

Nombre: _____


El duende de las selvas de América

Puckwoodgenie es un duende proveniente de las leyendas amerindias. Él sabe proteger la fauna y la flora, pero a veces puede ser muy travieso. La prueba es que reemplazó todas las manzanas de un árbol por poliedros.

De todos los sólidos que colocó Puckwoodgenie en el árbol, sus dos favoritos son los dos poliedros que respetan las siguientes relaciones de Euler (# de caras + # de vértices = # de aristas + 2):

6 caras + vértices = 12 aristas + 2

caras + 6 vértices = 9 aristas + 2



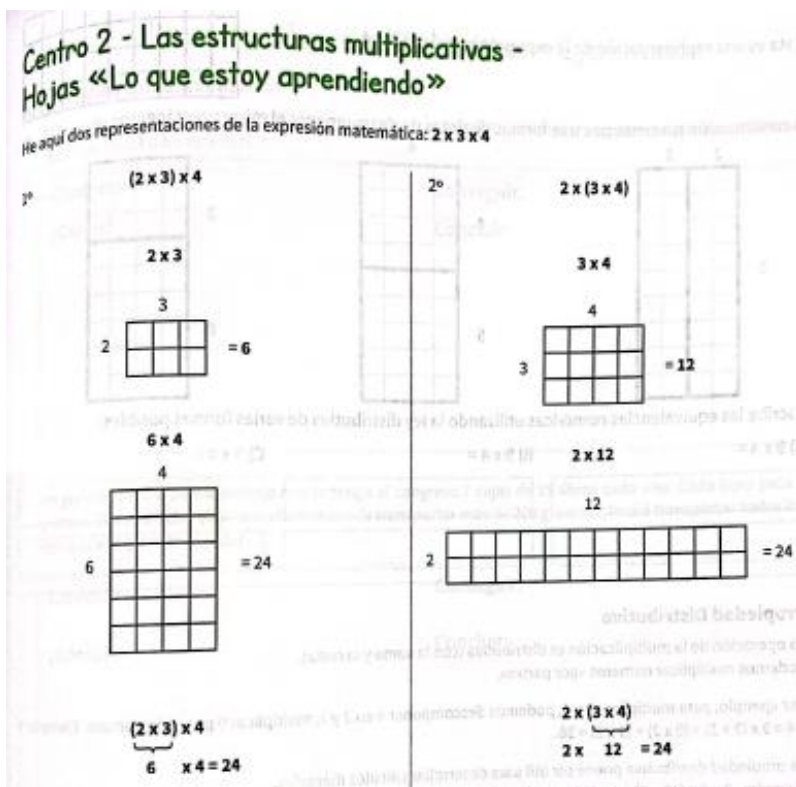
Nota: C1S3TG151

Por un lado, el campo conceptual está compuesto por hechos, donde se logra identificar términos como números naturales (6-2...), caras, vértices, aristas, incógnita; notaciones como + # y resultado dado por la relación de Euler. En cuanto al campo procedimental se observa la destreza que consiste en comprobar la relación de Euler.

En la figura 44 se muestra un ejemplo de una unidad de registro donde no se evidencia con claridad el campo procedimental. La unidad de registro corresponde al área de aritmética y es de tipo explicación, por lo tanto, su intención es mostrar el procedimiento a realizar para la aplicación de la propiedad asociativa, por lo tanto, no se presenta una destreza que involucre una demanda cognitiva en el lector. El campo conceptual si es claro, dentro de los hechos se identifican términos como expresiones, multiplicación, números naturales (2-3-6...); notaciones como x y resultado la propiedad asociativa.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

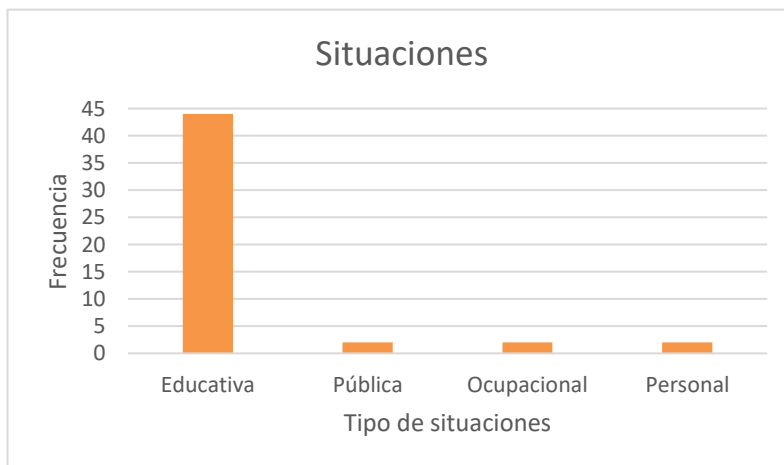
Figura 44. Estructura conceptual sin campo procedimental



Nota: C1S3EA155

Finalmente, la fenomenología se refiere a aquellos contextos y situaciones que dan sentido a los conceptos, en este sentido, se realizó la revisión en las 50 unidades de registro para identificar los contextos en los que se enmarca las actividades y el tipo de situación que aborda cada una de ellas. En la figura 45 se presenta la frecuencia y presencia de estos.

Figura 45. Diagrama Fenomenología - Situaciones



Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

En cuanto a las situaciones, estas hacen referencia al medio en que se sitúan las unidades de registro, las cuales pueden ser personales, educativas, ocupacionales, públicas, científicas y profesionales, sin embargo, se evidencian 4 de las 5, con una mayor frecuencia en las situaciones educativas. A continuación se describen cada una de ellas y se ejemplifica con la figuras anteriormente presentadas.

Las situaciones educativas tienen mayor frecuencia, pues se encuentra en 44 de las 50 unidades de registro. Éstas son las relacionadas con actividades escolares de los alumnos, lo cual deja en manifiesto que la mayoría de las situaciones son propiamente académicas como se observa la figuras 46, donde se muestra la forma de escribir números decimales y su descomposición.

Figura 46. Ejemplo situación educativa

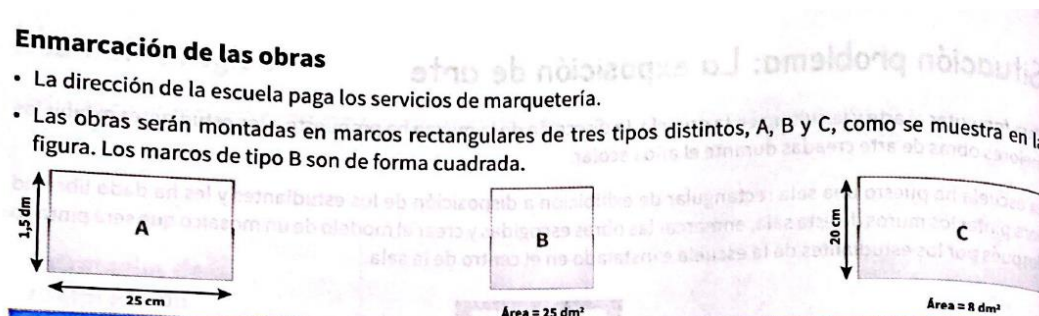
- Se designa así: «sesenta y cinco centésimas». Como número decimal, se escribe 0,65 y se lee: «sesenta y cinco centésimas». Un análisis posible puede ser: $0,65 = 0,60 + 0,05$.
- Se designa así: «ocho décimas». Como número decimal, se escribe 0,8 y se lee «ocho décimas». Un análisis posible puede ser: $0,8 = 0,5 + 0,3$.

Nota: Código C1S2EA70

Las situaciones personales tienen una frecuencia de 2 unidades de registro y son relacionadas con actividades cotidianas de los alumnos, tales como preparación de alimentos, compras, juegos... la cual se puede evidenciar en la figura 40 donde se habla de una leyenda de un duende, situación que corresponde a entornos personales de los estudiantes.

Las situaciones ocupacionales también se encuentran en solo 2 unidades de registro. Son aquellas que encuentra el alumno en un entorno de trabajo, como se observa en la figura 47 que trata sobre la enmarcación de obras y donde se abordan aspectos de medidas y costos.

Figura 47. Situación ocupacional

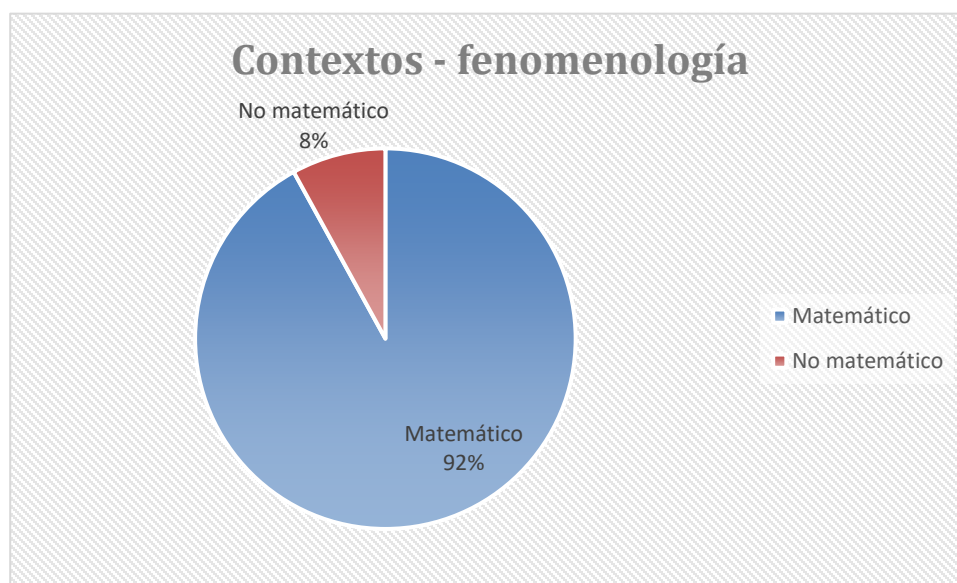


Nota: C1S2EG66

Finalmente, las situación pública, que está presente en dos unidades de registro, son donde los estudiantes observan aspectos sociales de su entorno y de su comunidad, que pueden ser locales, nacionales o globales, lo cual se puede identificar en la figura 37, donde se habla de la liga profesional de futbol, siendo un tema de interés público.

En la figura 48, se muestra un diagrama con el porcentaje de unidades de registro presentes por cada tipo de contextos dentro de las 50 unidades de registro.

Figura 48. Diagrama Fenomenología - Contextos



Se evidencia que el contexto matemático está presente en un 92%, es decir, en 46 de las 50 unidades de registro analizadas. Este contexto alude al uso de símbolos propios de las matemáticas como se observa en las figuras 49.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 49. Ejemplo contexto matemático

9) Para cada multiplicación, primero realiza una estimación y luego encuentra el resultado exacto.

OPERACIONES	$67,2 \times 4,5 =$	$2,9 \times 3,9 =$	$71,01 \times 8 =$	$5,3 \times 63,9 =$	$0,6 \times 0,4 =$
ESTIMACIÓN					
CÁLCULO					

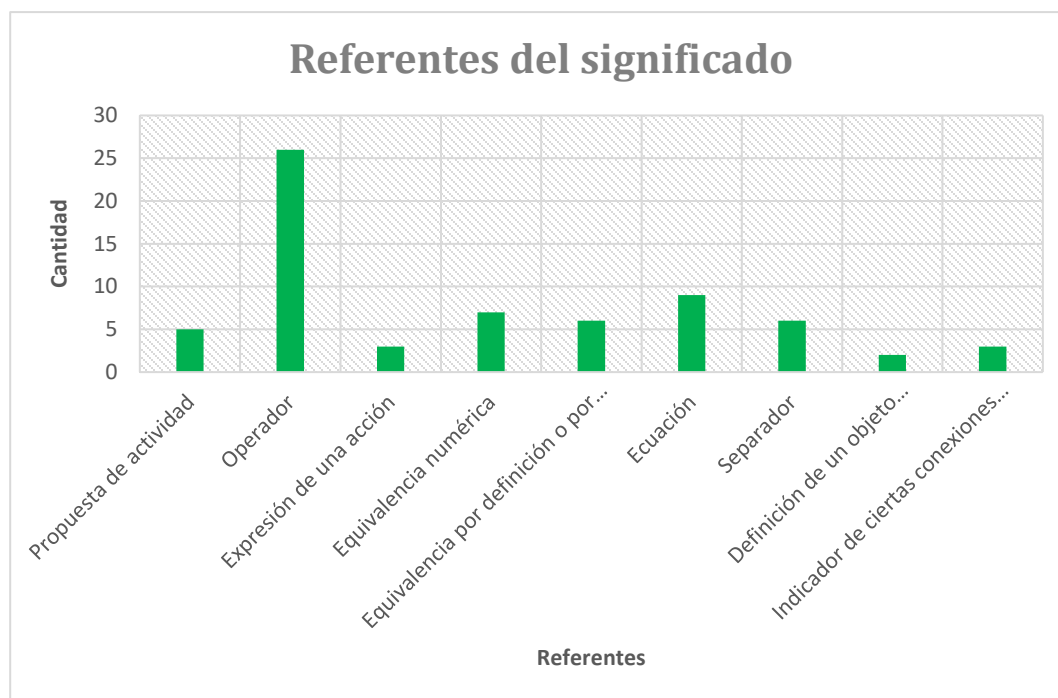
Nota: código C1S2TA73

El contexto no matemático se refiere a la relación entre objetos cotidianos con objetos matemático, tal como se observa en la figura 42 que corresponde a una de las tres unidades de registro asociadas a este contexto. Es importante resaltar que de las tres unidades, dos corresponden a actividades del área de estadística, donde los pictogramas están presentes y una al área de geometría donde se involucran situaciones personales donde se observa con claridad la presencia de objetos de distinta naturaleza.

Por otro lado, al identificar los referentes del significado en todas las unidades de registro analizadas, se evidencia que de los 13 referentes se encontraron 9, los cuales su frecuencia se muestra en la figura 50.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 50. Gráfico referentes del significado



En este sentido, no se lograron rastrear 4 referentes, los cuales son igualdad estricta que se refiere a aquellas expresiones que representan en ambos lados el mismo objeto matemático con el mismo representante; asignación de un valor numérico el cual se refiere a la asignación de un valor numérico a otro símbolo; identidad que indica el mismo valor numérico de dos expresiones algebraicas para todos los valores de las variables; y por último relación funcional o de dependencia que refiere al uso para indicar una relación o dependencia entre variables o parámetros.

La ausencia de estos referentes puede deberse al tipo de libro de texto, dado que al tratarse de un libro de educación primaria el trabajo algebraico no es explícito, puesto que se realiza un trabajo de nociones tal como se mostró en el referente de ecuación, más no el trabajo con variables.

A continuación, en la tabla 22 se presentan las concepciones que se relacionan con los 9 referentes rastreados en las 50 unidades de registro. Las unidades de registro fueron clasificadas en dos tipos, tareas para aquellas donde se encontrará una consigna donde se proponga al lector realizar una acción y explicaciones para aquellos apartados donde se está ampliando una temática o conceptualizando los contenidos.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Tabla 22. Frecuencia concepción y tipo

Concepción	Tipo		Total
	Tarea	Explicación	
Equivalencia	35	21	56
Relación funcional	3	2	5
Total	38	23	61

En el libro de texto se encontró la presencia de 2 de las 4 concepciones, la de equivalencia y la de relación funcional mostrando la ausencia de la igualdad y la identidad. Además, se encontró actividades de tipo uso matemáticamente incorrecto, que, aunque no hace parte de una concepción como tal, se trata de un uso atribuido al signo igual como un separador del paso a paso de un procedimiento de resolución, como se observa en la figura 51, donde el signo igual separa el paso a paso de la resolución de una operación que muestra la propiedad distributiva.

Figura 51. Uso matemáticamente incorrecto - Separador

Propiedad Distributiva
La operación de la multiplicación es distributiva (con la suma y la resta).
Podemos multiplicar números «por partes».

Por ejemplo, para multiplicar 9×4 , podemos descomponer 4 en 2 y 2, multiplicar 9 por cada número. Ejemplo: $9 \times 4 = 9 \times (2 + 2) = (9 \times 2) + (9 \times 2) = 36$.

La propiedad distributiva puede ser útil para desarrollar cálculos mentales.
Ejemplo: $9 \times 4 = (10 - 1) \times 4 = (10 \times 4) - (1 \times 4) = 40 - 4 = 36$.

Realiza la multiplicación utilizando la propiedad distributiva: 15×5

Nota: C1S3EA156

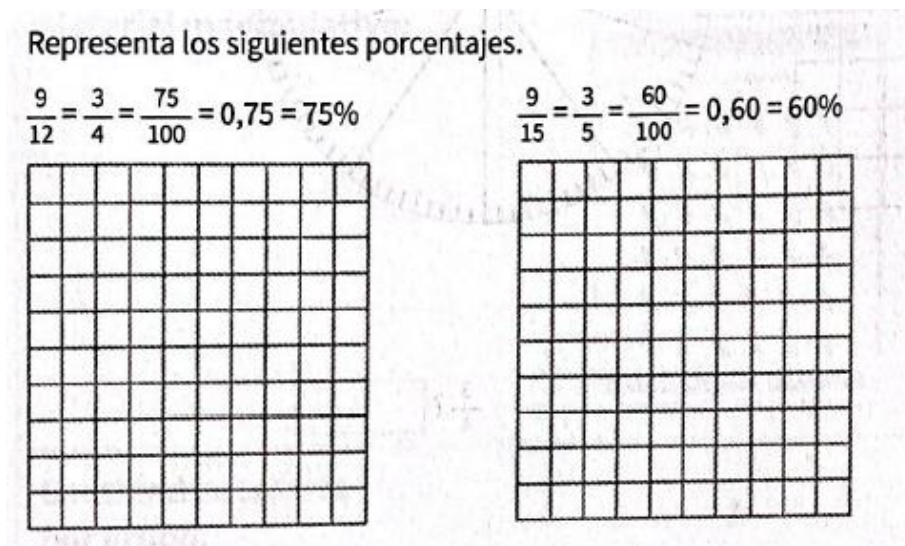
Es importante aclarar que, aunque se obtuvieron un total de 50 fichas de registro, la presencia de las concepciones suma un total de 67, esto se debe a que en algunas unidades de registro se observó la presencia de una o más concepciones o que dan cuenta de más de un referente de cada concepción, lo cual hace que el total sea mayor a 50.

Para ejemplificar lo argumentado, en la figura 52 se observa una unidad de registro donde está presente la concepción de equivalencia al tratarse de un número fraccionario que se procede a convertir en un porcentaje, además, también se observa el uso matemáticamente

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

incorrecto, como separador al identificar el signo igual que separa fracciones equivalentes, en este caso, en esta unidad de registro se observan dos conteos. También se puede ejemplificar la concepción de equivalencia de tipo tarea, donde se debe representar de forma gráfica los porcentajes brindados tanto en fracción como en porcentaje

Figura 52. Ejemplo del signo igual como equivalencia



Nota: C2S4TA14

Por otro lado, en la figura 53 que se presenta a continuación, se ejemplifica la concepción de equivalencia de tipo explicación, donde se muestra la explicación para desarrollar potencias con su paso a paso, y se presenta la equivalencia como operador, dado que al lado izquierdo del igual se presenta la operación $16 \div 2$ y al lado derecho el resultado 8.

Figura 53. Equivalencia de tipo explicación

**Centro 2 - La tortuga carbonera -
Hojas "Lo que estoy aprendiendo"**

Un **exponente** indica cuántas veces debemos multiplicar por sí mismo un número (que llamamos base y que se encuentra siempre a la izquierda del exponente)

Ejemplo: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Por convención, todo número, salvo 0, elevado al exponente 0 es igual a 1. Así, $3^0 = 1$; $7^0 = 1$; $45^0 = 1$; $114^0 = 1$.

Además, $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ $16 \div 2 = 8$, $8 \div 2 = 4$, $4 \div 2 = 2$ y $2 \div 2 = 1$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ $2^2 = 2 \times 2 = 4$ $2^1 = 2$ $2^0 = 1$

Nota: código C2S4EA22

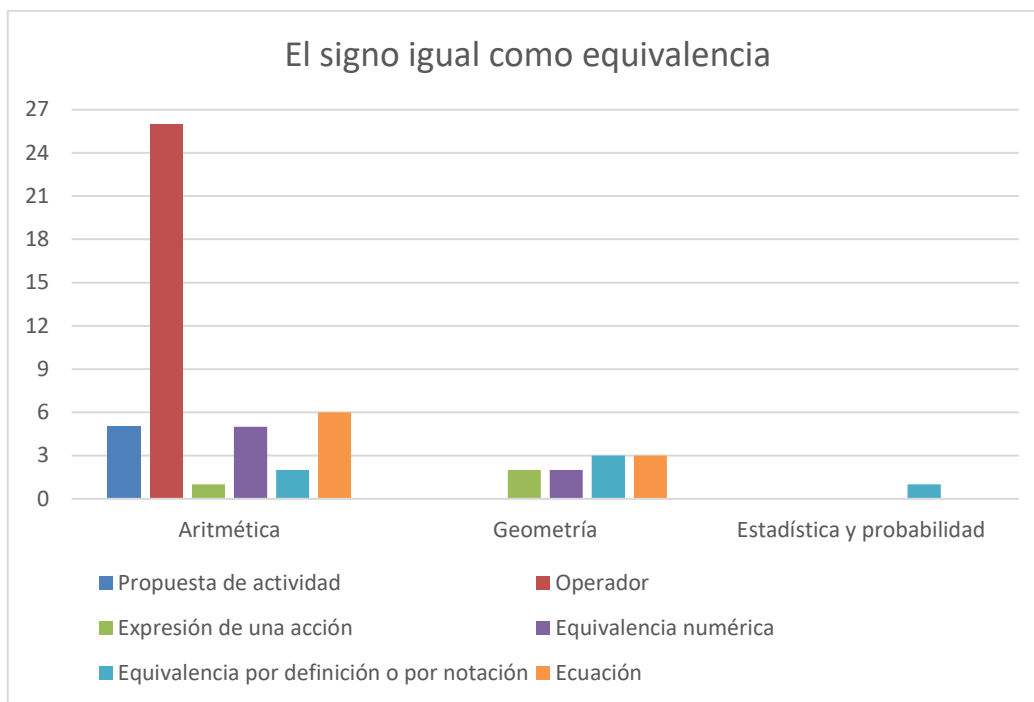
El libro de códigos utilizado para cada unidad de registro no contiene solamente el tipo de tarea, también contiene el área de conocimiento que se aborda, sea aritmética, geometría o estadística y probabilidad. A continuación, en los siguientes apartados se presenta los referentes inmersos al interior de cada concepción detallando el área al que pertenecen.

4.2.1 El signo igual como Equivalencia

Desde la concepción de equivalencia, el signo igual se puede evidenciar desde 6 de los 13 referentes del significado. A continuación, en el diagrama de la figura 54 se muestra la frecuencia en cada uno de ellos y en las áreas del conocimiento que estuvieron presente.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 54. El signo igual como equivalencia



El gráfico permite observar que la mayoría de las unidades de registro corresponden a tareas o explicaciones del área de aritmética, siendo el referente de operador y de ecuación los que tienen mayor ocurrencia en las unidades de registro. El referente operador se evidencia en la figura 55, donde al lado izquierdo del signo igual se encuentra la operación, pero el lado derecho de la igualdad no está vacío, se encuentra un recuadro el cual está dando lugar a un resultado. El referente operador se refiere al uso del signo como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda, y su resultado, que se dispone a la derecha, en este caso el resultado no está en un sistema de representación numérico aún, pero si está representado por un recuadro en un sistema de representación pictórico.

Figura 55. El signo igual como operador

c) Ejercicios numéricos

8) Realiza mentalmente las siguientes multiplicaciones:

a. $34,5 \times 10 =$

b. $489,67 \times 100 =$

c. $98,7 \times 100 =$

d. $3,1 \times 10 =$

e. $0,72 \times 100 =$

f. $0,02 \times 10 =$

g. $1,9 \times 100 =$

h. $6,7 \times 10 =$

Nota: C1S2TA73

Al identificar los componentes del significado en la figura 55, dentro de la estructura conceptual en el campo conceptual se evidencian hechos, dados por términos como números decimales (34,5-3,1...), números naturales (10-100) y multiplicación, además, notaciones como \times y 0,1, por su lado, en el campo procedimental la destreza hace referencia a realizar mentalmente las multiplicaciones. El signo igual en su esencia representa el sistema simbólico, sin embargo, la presencia de cantidades numéricas representa el sistema numérico y los recuadros para las respuestas al sistema de representación pictórico. Por otro lado, el lenguaje utilizado dentro de la unidad es netamente matemático, lo que significa que se enmarca en un contexto matemático y en una situación educativa.

Dentro del área de aritmética, la ecuación también tiene una alta frecuencia, es interesante el poder identificar este referente dentro de un libro de texto de primaria, este referente está definido según Molina (2006) como aquel que “Se encuentra en el contexto del álgebra cuando la equivalencia expresada por el signo de igual sólo es cierta para algún o algunos valores de la o las variables, pudiendo inclusive no ser cierta para ningún valor” (p. 150), aunque desde su conceptualización de enmarca en un contexto algebraico las evidencias muestran que también se puede rastrear desde un contexto aritmético, tal como se evidencia en la figura 56.

Figura 56. Referentes de operador, equivalencia numérica y ecuación

Centro 3 - La liga profesional - Ejercitación

C) Ejercicios numéricos

8) Encuentra el resultado de las siguientes sumas.

a) $3,1 + 32,09 =$

b) $17,25 + 13,69 =$

c) $32,59 + 67,9 =$

d) $13,3 + 48,84 =$

e) $95,11 + 4,5 =$

9) Encuentra el resultado de las siguientes restas.

a) $79,88 - 7,09 =$

b) $99,1 - 9,01 =$

c) $11,28 - 4,7 =$

d) $9 - 2,37 =$

e) $54,35 - 27,89 =$

10) Completa las siguientes ecuaciones.

a) $8,1 +$ $= 21,31$

b) $44,17 + 36,8 =$ $+ 29,07$

c) $+ 0,25 = 1,34 + 2,07$

d) $- 0,5 = 52,59 - 23,7$

e) $86,5 - 77,05 =$ $- 3,45$

f) $9,6 - 6,37 = 19,34 -$

Nota: C1S1TA24

Específicamente en el inciso 10 desde la consigna se mencionan las ecuaciones y si se observa por ejemplo el punto a, al lado izquierdo del igual se encuentra un número seguido del símbolo + y posteriormente un recuadro, el recuadro hace la función de incógnita en la ecuación, indicando que se debe encontrar el valor que corresponde y que hace que la igualdad se cumpla, que el valor numérico del lado izquierdo sea igual al valor numérico de la derecha, donde a su vez se evidencia el referente de equivalencia numérica.

También se resalta ecuaciones de los puntos c y f, donde el nivel de complejidad es mayor, puesto que se debe encontrar el valor de la incógnita que están ubicadas una al lado derecho del igual y la otra al lado izquierdo además, una operación en ambos lados de la igualdad, donde la equivalencia numérica toma protagonismo en el proceso de resolución, el

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

referente de equivalencia numérico es entendido como aquel que indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas que se encuentran en ambos miembros.

En esta tarea de la figura 56 se resalta la riqueza de significados en su interior, dado que no solamente se evidencia ecuación y equivalencia numérica si no también el referente de operador en el caso del punto 8 y 9 puesto que se encuentra al lado izquierdo del igual la operación y al lado derecha un recuadro que indica el espacio del resultado que debe ser escrito allí, se asocia un pictograma al resultado.

Al analizar los componentes del significado, se evidencia dentro de la estructura conceptual, el campo conceptual donde en el nivel 1 hechos se identifican términos como Números decimales (3,1-8,1 – 21,31...), suma, resta, ecuaciones e incógnita, además *notaciones como* +, - y 0,1. Dentro del campo procedimental se evidencian 3 destrezas (una por cada literal) encontrar los resultados de las siguientes sumas, encontrar los resultados de las siguientes restas y completar las siguientes ecuaciones. Dentro de los sistemas de representación, los símbolos de +, - e = representan el sistema simbólico, los números decimales el sistema numérico y los recuadros que indican las repuestas y las incógnitas representan el sistema pictórico. La fenomenología está dada por el contexto matemático dado el lenguaje utilizado dentro de la situación que es educativa.

Ahora dentro del área de geometría, se observa que ecuación y equivalencia por definición tienen mayor frecuencia, en el caso de ecuación en la figura 57, donde se aborda en una explicación la relación de Euler siendo esta una ecuación donde se pide completar la incógnita, dada por el recuadro y tomando el valor de C, número de caras, para validar su cumplimiento.

Figura 57. Ecuación en geometría

Centro 1 - Los prismas - Hojas «Lo que estoy aprendiendo»

La relación de Euler

La relación de Euler es una ecuación que relaciona el número de vértices (V), el número de caras (C) y el número de aristas (A) de cualquier poliedro convexo. Esta ecuación es la siguiente:

Relación de Euler: $V + C = A + 2$

En palabras: El número de vértices (V) más el número de caras (C) es igual al número de aristas (A) más dos.

Verifica la relación de Euler para el siguiente prisma, indicando el número de caras del mismo:

$V + C = A + 2$

$8 + \square = 12 + 2$

Nota: C1S3TG147

En esta misma unidad, además de ecuación, también se puede evidenciar la equivalencia como valor numérico, dado que para poder validar el cumplimiento de la ecuación, se debe validar que el valor numérico de ambos lados de la igualdad sea el mismo,

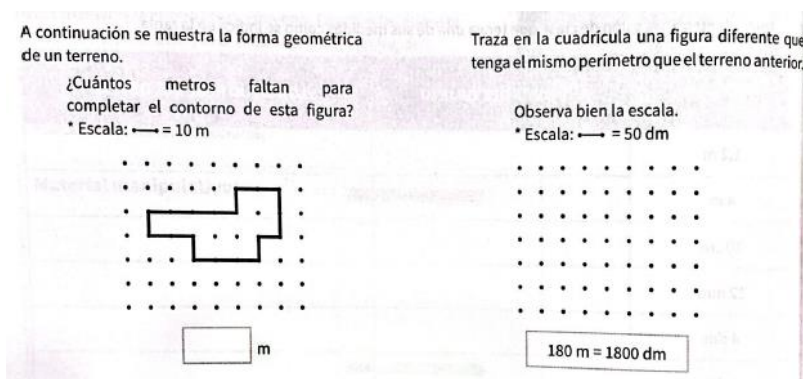
Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

es decir, que es otro ejemplo donde una unidad de registro de tipo explicación contiene dos referentes del significado.

En la figura 57, se puede evidenciar dentro del campo conceptual en el nivel 1 hechos, los términos prismas, caras, vértices, aristas, poliedros, números naturales (12-2), ecuación e incógnita, notaciones como + y como resultado la relación de Euler. Dentro del campo procedimental la destreza corresponde al verificar la relación de Euler para el siguiente prisma, indicando el número de caras del mismo. El signo igual está acompañado del sistema de representación geométrico al involucrar poliedros. Por otro lado al sistema verbal al hacer referencia a una fórmula, al sistema de representación pictórico al representar el recuadro donde se debe colocar el valor de C (número de caras) y finalmente el sistema numérico al tratarse de números naturales. La fenomenología está dada por el contexto que es matemático y ser una situación educativa.

El referente de equivalencia por definición o por notación, es aquel que indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por el significado de la notación utilizada, como es el caso de la figura 3 donde se muestra la equivalencia entre fracciones al indicar $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ simplificaciones y ampliaciones. Además, se puede observar en la figura 58, donde se evidencia el trabajo de las unidades de medida y las conversiones donde por notación se establecen equivalencias al indicar que $180\text{ m} = 1800\text{ dm}$.

Figura 58. Equivalencia por definición o por notación en Geometría



Nota: C1S2TG78

Dentro de la estructura conceptual, el campo conceptual está dado por términos como Contorno, Unidades de medida y Números naturales (50-10) y el campo procedimental la destreza se define como ¿Cuántos metros faltan para completar el contorno de una figura? Trazar en la cuadrícula una figura diferente que tenga el mismo perímetro. El sistema de representación está dado por el simbólico por la presencia del signo igual, el geométrico al tratarse de figuras geométricas, el verbal al hacer referencia unidades de medida, el numérico

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

al apoyarse de cantidades numéricas y finalmente el pictórico al utilizar recuadros para establecer la escala y las equivalencias.

Este referente de equivalencia por definición o por notación en geometría, también se evidencia en la figura 59, donde la tarea del área de geometría corresponde en realizar la conversión entre unidades de medida de volumen.

Figura 59. Equivalencia por definición o por notación en Geometría

9) Haz la conversión de ml a L o de L a ml:

a) 22 500 ml =	<input type="text"/>	L
b) 0,9 L =	<input type="text"/>	ml
c) 431 ml =	<input type="text"/>	L
d) 60 ml =	<input type="text"/>	L
e) 12 L =	<input type="text"/>	ml
f) 0,05 L =	<input type="text"/>	ml
g) 5 ml =	<input type="text"/>	L

Nota: C1S2TG105

La estructura conceptual de la unidad de registro está dada por hechos en el campo conceptual, en el cual se identifican términos como conversiones, litros, mililitros, números decimales (0,9-0,05...), números naturales (5-60...) y notaciones como 0,1, así mismo, en el campo procedimental la destreza es explícita haciendo referencia a hacer la conversión. En este sentido, se evidencia 4 sistemas de representación el numérico dado por los números naturales y decimales, el verbal dado por las unidades de medida, el pictórico dado por los recuadros y finalmente el simbólico que hace referencia al signo igual. En cuanto a la fenomenología, la unidad de registro se sitúa en un contexto matemático siendo una situación educativa.

En cuanto al área de estadística y probabilidad, la presencia del signo igual es muy baja en la concepción de equivalencia, lo cual no significa que no haya actividades, explicaciones y tareas enfocadas en esta área, lo que significa es que la presencia del signo igual en esta área es menor que en las otras tres áreas rastreadas. En este sentido, se evidencia que en el área el referente que se encuentra es equivalencia por definición o notación como se muestra en la figura 60, donde el signo igual está en una equivalencia entre fracciones que posteriormente se expresa en un porcentaje, con el objetivo de identificar la probabilidad de un evento.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 60. Equivalencia por definición o notación - Estadística

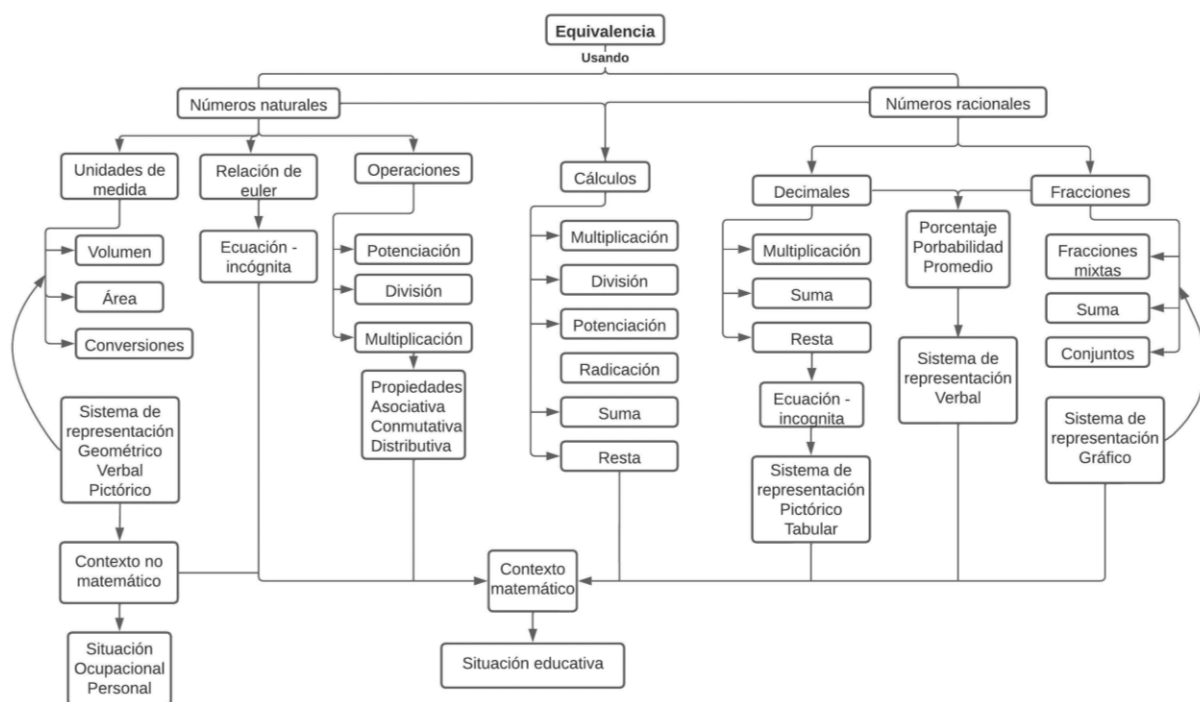
- ¿Cuál crees que será la probabilidad de obtener el evento "igual"? ¿Cuál será la de obtener el evento "diferente"? Hay 4 parejas que se pueden obtener: AA, NN, AN, NA. Por lo tanto, la probabilidad del evento "igual" es de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ o 50%. La probabilidad del evento "diferente" es la misma. Es decir, el evento "igual" es igualmente probable al evento "diferente".

Nota: C2S5EE88

En esta figura, en la estructura conceptual se encuentran los términos números racionales ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$), fracciones, porcentajes, probabilidad y evento y las notaciones % , $\frac{1}{2}$ como parte del campo conceptual, además en el campo procedimental la destreza es ¿Cuál crees que será la probabilidad de obtener un evento "igual"? Dentro de esta explicación se evidencian dos sistemas de representación el numérico dado por los números racionales y el simbólico dado el signo igual y el símbolo de porcentaje. En este sentido, el contexto de la unidad es matemático y es una situación de tipo educativa.

Cabe resaltar que en las tareas y explicaciones sobre estadística y probabilidad, se evidencia el uso de tablas y gráficos donde mediante estos se establecen relaciones entre cantidades que sustituyen el signo igual, por esto, no se rastrea de forma explícita. A continuación, se presenta en la figura 61 un mapa conceptual que muestra el signo igual como equivalencia desde las componentes del significado.

Figura 61. Componentes del significado - Signo igual como equivalencia










Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

El signo igual como equivalencia, fue rastreado 56 veces en las unidades de registro, siendo la concepción más encontrada, en este sentido, en el mapa conceptual se observa que esta concepción se rastrea mediante el uso de dos conjuntos numéricos, por un lado dentro de los números naturales, se observa en tareas y explicaciones relacionadas con el área de geometría, al abordar las unidades de medida al hallar volúmenes, áreas y la realización de conversiones, además, de la utilización de la relación de Euler donde se presenta la ecuación que debe ser comprobada para garantizar la equivalencia numérica, situación que conlleva el trabajo de incógnitas. También, se evidencia el trabajo de la división, la potenciación y la multiplicación junto con las propiedades que la componen.

Por otro lado, dentro del conjunto numérico de los números racionales se observan los decimales y las fracciones donde en ambas se realiza trabajo de las operaciones básicas, además, se juntan las fracciones y los decimales para trabajar porcentajes, temas probabilísticos y el promedio, encontrando en este conjunto numérico el abordaje de las áreas de estadística y probabilidad, aritmética y geometría. Un aspecto para considerar es que se evidencia la realización de cálculos y operaciones básicas que incluyen los dos conjuntos numéricos, los naturales y los racionales. A continuación en la figura 62, se muestran dos unidades de registro que muestran las conexiones realizadas dentro del mapa conceptual.

Figura 62. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como equivalencia

C1S2TE106	C1S3TG151
<p>La inauguración</p> <p>La dirección de la escuela está organizando la inauguración de la exhibición artística de las obras de sus estudiantes. Durante la inauguración, se servirá jugo de manzana a los invitados.</p> <p>Se planea servir 200 ml de jugo a cada invitado. Cada botella de jugo se vende a \$5000 y tiene 1 L de contenido.</p> <p>A continuación, se muestra el número de invitados que confirmaron su asistencia al evento.</p> <div data-bbox="349 1270 625 1396"> <p>Invitados</p> <p>Estudiantes de la escuela: </p> <p>Padres: </p> <p>Funcionarios: </p> <p>Periodistas: </p> </div> <p> = 8 personas</p>  <p>Para facilitar la repartición de las bebidas, se utilizarán dispensadores de bebidas de mayor capacidad que las botellas. Cada botella de 1L puede llenar 0,3 de la capacidad del dispensador. Se planea verter todas las botellas en los dispensadores antes de que comience la inauguración.</p> <p>Calcula el número de botellas que se deben comprar, el costo total de jugo de manzana y el número de dispensadores que se necesitan.</p>	<p>Centro 1 - Los prismas - Situación de aplicación</p> <p>Nombre: _____</p> <p>El duende de las selvas de América</p> <p>Puckwoodgenie es un duende proveniente de las leyendas amerindias. Él sabe proteger la fauna y la flora, pero a veces puede ser muy travieso. La prueba es que reemplazó todas las manzanas de un árbol por poliedros.</p> <p>De todos los sólidos que colocó Puckwoodgenie en el árbol, sus dos favoritos son los dos poliedros que respetan las siguientes relaciones de Euler (# de caras + # de vértices = # de aristas + 2):</p> <p>6 caras + <input type="text"/> vértices = 12 aristas + 2</p> <p><input type="text"/> caras + 6 vértices = 9 aristas + 2</p> 

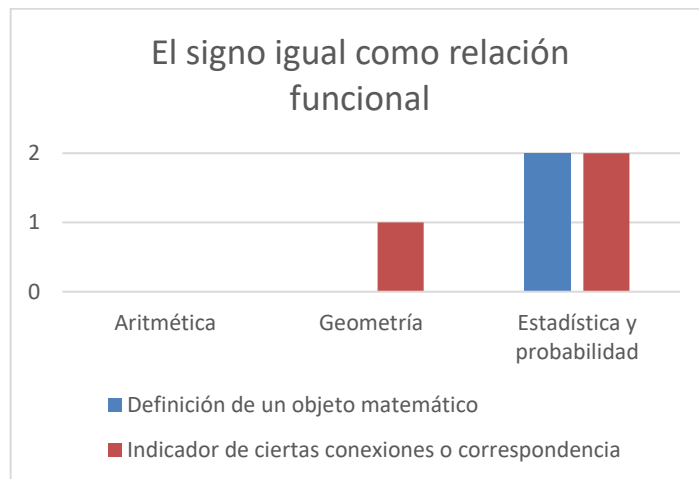
Ambas unidades de registro corresponden a tareas, el C1S2TE106 asociada al área de estadística y probabilidad y el C1S3TG151 al área de geometría, ambas situadas en contextos no matemáticos, dado que al analizar el contenido de las tareas, se evidencia que no se utiliza lenguaje propio de las matemáticas si no que se relaciona con objetos de distinta naturaleza, a su vez, las dos unidades permiten identificar distintos tipos de situaciones tal como se observa en el mapa conceptual, por un lado el C1S2TE106 el cual se enmarca en un situación educativa, al tratarse de un problema centrado en un evento organizado dentro de la escuela para una exhibición artística y por otro lado el C1S3TG151 se enmarca en una situación

personal al acudir a leyendas de la cotidianidad del estudiante para asociarlas a la relación de Euler.

4.2.2 El signo igual como Relación funcional

El signo igual desde la concepción de relación funcional muestra una correspondencia, conexión o dependencia entre las cantidades que se relacionan. En las unidades de registro de encuentra el signo igual como relación funcional, los significados asociados son relación funcional o de dependencia e indicador de ciertas conexiones o correspondencia. En la figura 63, se muestra una gráfica con la frecuencia de existencia de los referentes del signo igual clasificados en las áreas de aritmética, geometría y estadística.

Figura 63. Gráfico el signo igual como relación funcional



Dentro del área de estadística y probabilidad, se encuentran 4 unidades de registro que contienen dos de los referentes del significado. Por un lado, el referente definición de un objeto matemático, se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático y se observa desde el área de estadística y probabilidad, en unidades de registro de tipo tareas. En la figura 64 se muestra un ejemplo.

Figura 64. Definición de un objeto matemático - Estadística

8) Encuentra el dato que falta para que el promedio M sea igual al número dado.

a) 12, 8, 9, $M=9$

b) 2,5; 1,6; 0,9; 1,7; $M=1,7$

c) 6, 8, 3, , 1 $M=5$

d) 0,65; 1,85; $M=1,1$

Nota: C2S5TE82

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Se evidencia el signo igual como definición de un objeto matemático dado que a M entendido como el promedio, se le está asignando un valor numérico de tal manera que esta igualdad permita identificar el valor que falta en la secuencia numérica.

En esta tarea, se encuentran términos como números naturales (12-8-9...), números decimales (0,65-1,7...) y promedio como parte de los hechos de la estructura conceptual, como parte del campo procedimental los hechos son explícitos indicando que Encuentre el dato que falta para que el promedio M sea igual al número dado. En esta unidad de registro se encuentran 4 sistemas de representación, el numérico dado por los números naturales y decimales, el simbólico dado por el signo igual, el pictórico dado por los recuadros y el verbal al incluir la letra M para indicar le promedio. La tarea está enmarcada en una situación educativa en un contexto de la tarea es matemático

Por otro lado, el referente de indicador de ciertas conexiones o correspondencia es un significado impreciso que se refiere al uso del signo igual entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, en estadística y probabilidad se puede observar en la tarea expuesta en la figura 65, donde el signo igual relaciona dos objetos matemáticos de distinta naturaleza, en este caso, al símbolo de persona se le asocia la cantidad de 8 personas, indicando una correspondencia entre el símbolo con la cantidad numérica 8.





Figura 65. Indicador de ciertas conexiones o correspondencia - Estadística


La inauguración


La dirección de la escuela está organizando la inauguración de la exhibición artística de las obras de sus estudiantes. Durante la inauguración, se servirá jugo de manzana a los invitados.

Se planea servir 200 ml de jugo a cada invitado. Cada botella de jugo se vende a \$5000 y tiene 1 L de contenido.

A continuación, se muestra el número de invitados que confirmaron su asistencia al evento.

Invitados	
Estudiantes de la escuela:	
Padres:	
Funcionarios:	
Periodistas	

 = 8 personas



Para facilitar la repartición de las bebidas, se utilizarán dispensadores de bebidas de mayor capacidad que las botellas. Cada botella de 1 L puede llenar 0,3 de la capacidad del dispensador. Se planea verter todas las botellas en los dispensadores antes de que comience la inauguración.

Calcula el número de botellas que se deben comprar, el costo total de jugo de manzana y el número de dispensadores que se necesitan.

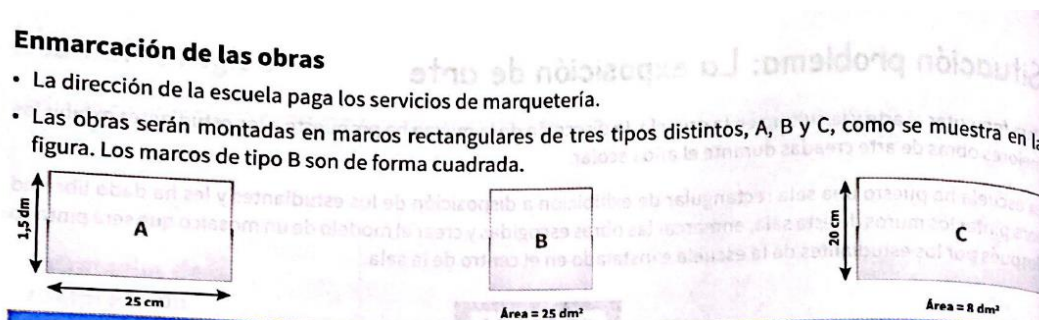
Nota: C1S2TE106

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Esta tarea de estadística tiene dentro de la estructura conceptual términos como cálculos, pictogramas, capacidad, operaciones, números naturales (200-5000) y números decimales (0,3) dentro del campo conceptual; la destreza indica calcular el número de botellas que se deben comprar, el costo total de jugo de manzana y el número de dispensadores que se necesitan dentro del campo procedimental. Se evidencian 4 sistemas de representación el numérico dado por los números decimales y naturales, el simbólico dado por el signo igual, el gráfico y el pictórico dado por la tabla y los pictogramas. Dentro de la fenomenología la situación es educativa y en un contexto no matemático dado que se presenta en la tarea objetos matemáticos y no matemáticos.

En el caso del área de geometría, el único referente rastreado es Indicador de ciertas conexiones o correspondencia, en la figura 66 se observa un ejemplo, donde se establece una relación entre el área de las figuras con la cantidad que corresponde tanto en la figura B como en la figura C.

Figura 66. Indicador de ciertas conexiones o correspondencia - Geometría



Nota: C1S2EG66

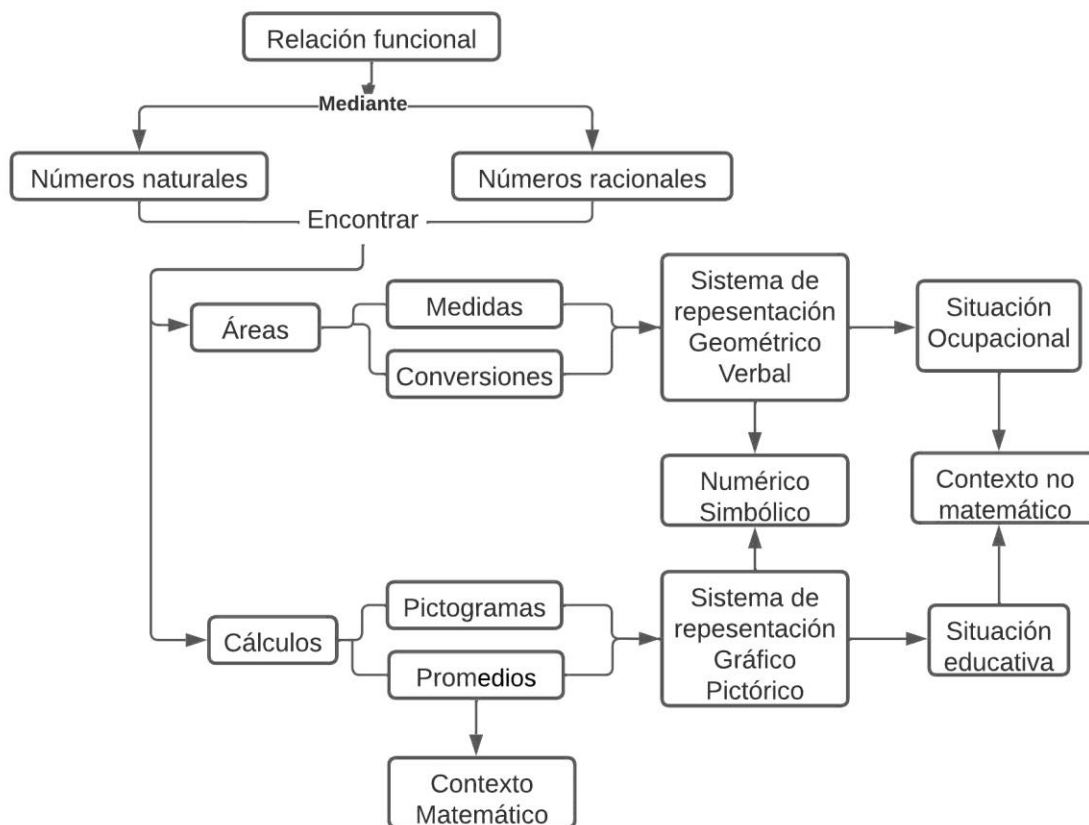
En esta explicación, dentro del campo conceptual se encuentran términos como área, rectángulos, cuadrados, medidas, conversión, números naturales (25-8...) y números decimales (3,5), sin embargo, no se encuentra evidencia del campo procedimental, puesto que la destreza a realizar no es explícita, esto se debe a que corresponde a una explicación y no a una tarea específica para realizar. Dentro de los sistemas de representación, se evidencian los siguientes: el simbólico dado por el signo igual, el numérico por los números naturales, el geométrico por los rectángulos y cuadrados y el verbal por las unidades de medida. La situación es ocupacional al tratarse de una enmarcación de obras y en un contexto no matemático.

En este sentido, la relación funcional no se evidencia desde el área de aritmética, esto se puede deber a la naturaleza de la relación funcional que relaciona objetos de distinta naturaleza que se puede ver presente en pictogramas y situaciones geométricas donde se asignan valores correspondientes a superficies, sin embargo, en el área de aritmética la mayoría corresponden a la parte operativa de cantidades numéricas es decir, objetos

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

matemáticos que son de una misma naturaleza. A continuación, se presenta en la figura 67 un mapa conceptual que muestra el signo igual como relación funcional desde las componentes del significado.

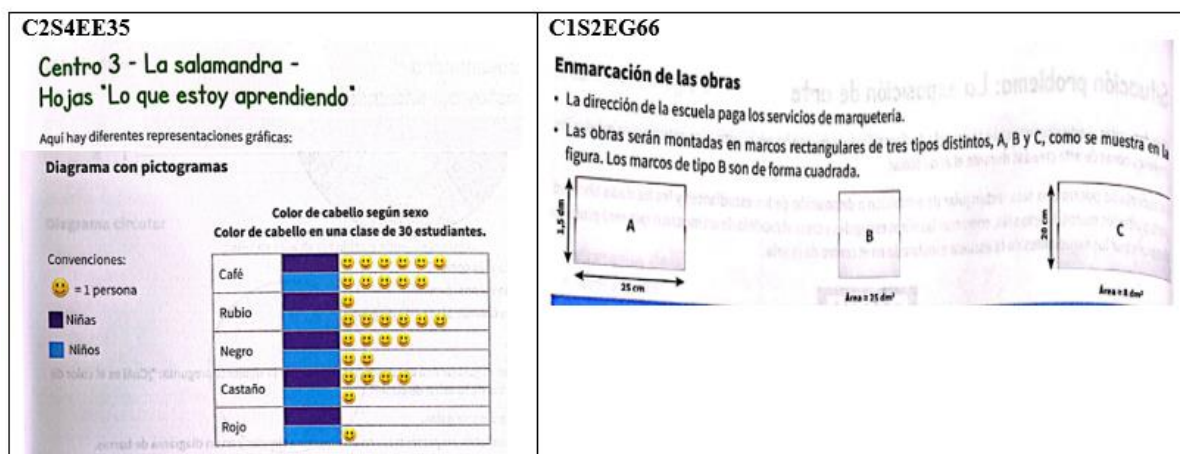
Figura 67. Componentes del significado - Signo igual como relación funcional



En las unidades de registro donde se rastrea la concepción de relación funcional, se evidencia mediante el uso de números naturales y números racionales, los cuales se integran para encontrar áreas proponiendo la realización de medidas de figuras y a su vez conversiones entre unidades de medida, además, para la realización de cálculos donde se involucran pictogramas y procedimientos para encontrar promedios. En este sentido, se observa que el sistema de representación simbólico y numérico está presente ambos procesos, sin embargo, dentro del trabajo de áreas se evidencia el sistema de representación geométrico y verbal, asociado a aquellas explicaciones y tareas enfocadas al área de geometría, y en la parte de los cálculos los sistemas de representación gráfico y pictórico al relacionarse con el área de estadística y probabilidad. A continuación en la figura 68, se evidencian algunas relaciones expuestas en el mapa conceptual.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 68. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como relación funcional

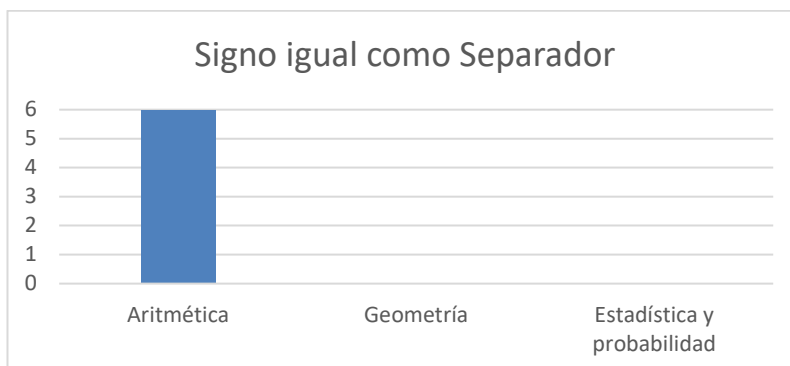


Como se observa en las dos unidades que se contrastan, ambas corresponden a explicaciones enmarcada en un contexto no matemático, debido a que se utilizan objetos de distinta naturaleza, es decir, no son objetos únicamente matemáticos, sin embargo, se presenta una diferencia en el tipo de situación, dado que en la unidad C2S4EE35 al tratarse del color de cabello de los estudiantes, se trata de una situación educativa, sin embargo, la unidad C1S2EG66 al tratarse de una enmarcación de obras donde se habla de pagos por los servicios de marquertería, esta se ubica en una situación de tipo ocupacional.

4.2.3 El signo igual como separador (Hallazgo)

Como se mencionó al principio, el signo igual como separador es un significado matemáticamente incorrecto ya que el signo igual es usado como separador de un procedimiento matemático. En la figura 69, se muestra la frecuencia de este referente en cada una de las áreas del conocimiento.

Figura 69. Gráfico el signo igual como separador



Este referente se encuentra presente en 6 unidades de registro del área de aritmética, de las cuales 2 son tipo tarea y 4 tipo explicación. El referente separador de tipo explicación, se puede observar en la figura 48, donde para explicar la propiedad distributiva se realizan procedimientos continuos separados por el signo igual $9 \times 4 = (10 - 1) \times 4 = (10 \times 4) - (1 \times 4) = 40 - 4 = 36$, al igual que en la figura 50, donde al explicar la potenciación utilizan el signo igual para la separación del procedimiento, indicando que $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Así mismo, el signo igual como separador en actividades tipo tarea, se puede observar en la figura 70, donde para la realización de potencias, en el caso del numeral 16, se presentan primero la potencia a realizar, seguida del signo igual, seguido de un recuadro, posteriormente nuevamente el signo igual y por último un recuadro, donde se debe realizar la tarea propuesta indicando el paso a paso para la realización de cada una de las potencias, evidenciando el signo igual como separador.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 70. Signo igual como separador

16) Calcula los resultados de las siguientes operaciones

Ejemplo: $2^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

a) $6^2 =$ $=$

b) $7^4 =$ $=$

c) $1^{4*} =$ $=$

d) $10^{1*} =$ $=$

e) $9^0 =$

f) $4^1 =$

17) Realiza los siguientes cálculos.

a) $3,24 \times 1 =$ 3,24

b) $3,24 \times 10 =$ 32,4

c) $3,24 \times 10^2 =$ 324

d) $3,24 \times 10^3 =$

e) $3,24 \times 10^4 =$

f) $3,24 \times 10^5 =$

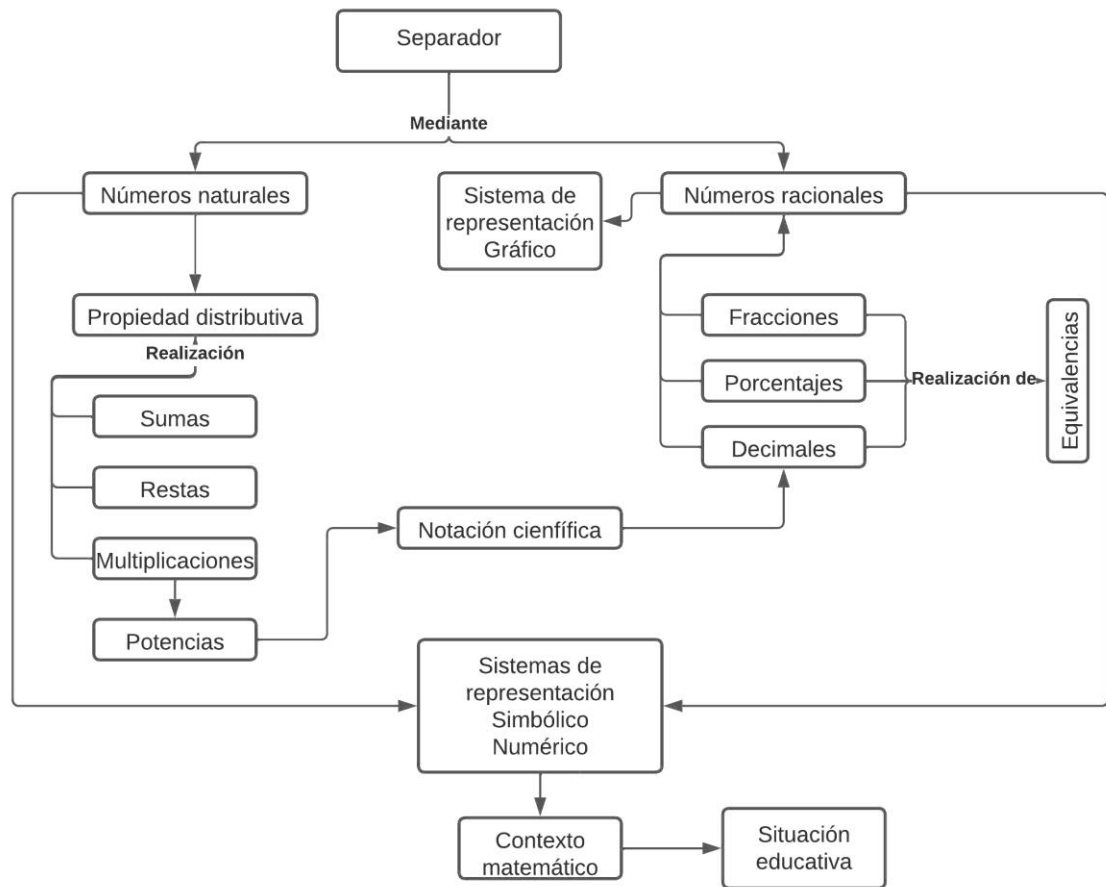
Nota: códigoC2S4TA30

Dentro del campo conceptual, los términos presentes son operaciones, potenciación, multiplicación y números decimales (3,24...) además de notaciones como 0,1 y x ; dentro del campo conceptual la destreza está dada por la consigna presente en cada numeral, por lo tanto, son dos calcula los resultados de las siguientes operaciones y realiza los siguientes cálculos. Los sistemas de representación que se rastrean son dos numérico y simbólico. Además, la situación es educativa y el contexto matemático.

De esta manera, se observa que aunque es un significado matemáticamente incorrecto, su uso es frecuente y propuesto inclusive por libros de texto, lo que conlleva a que las personas que los utilizan vean este uso y posteriormente lo puedan replicar, sin saber que es matemáticamente incorrecto. A continuación, se presenta en la figura 71 un mapa conceptual que muestra el signo igual como separador desde las componentes del significado.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 71. Componentes del significado - Signo igual como separador



El signo igual como separador, se observa mediante el uso de dos conjuntos numéricos, los naturales y los racionales, por un lado en los números naturales dentro de los procedimientos para la aplicación de la propiedad distributiva donde se hace uso de operaciones como sumas, restas y multiplicaciones, además, dentro de los números racionales para los procedimientos en la realización de equivalencias entre fracciones, porcentajes y números decimales, tal como se evidencia en la figura 72.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 72. Ejemplo componentes del significado - Signo igual como separador

C2S4TA14
Representa los siguientes porcentajes.

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75 = 75\%$$
$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 0,60 = 60\%$$

C1S3EA156
Propiedad Distributiva
La operación de la multiplicación es distributiva (con la suma y la resta). Podemos multiplicar números «por partes».

Por ejemplo, para multiplicar 9×4 , podemos descomponer 4 en 2 y 2, multiplicar 9 por cada número. Ejemplo: $9 \times 4 = 9 \times (2 + 2) = (9 \times 2) + (9 \times 2) = 36$.

La propiedad distributiva puede ser útil para desarrollar cálculos mentales.
Ejemplo: $9 \times 4 = (10 - 1) \times 4 = (10 \times 4) - (1 \times 4) = 40 - 4 = 36$.

Realiza la multiplicación utilizando la propiedad distributiva: 15×5

Donde se observa en la unidad C2S4TA14 que para la representación de los porcentajes se utiliza el signo igual como separador de las cantidades equivalentes y procedimientos de simplificación y amplificación que se deben realizar para llegar al porcentaje y representación gráfica. También en la unidad C1S3EA156 se observa el paso a paso para la aplicación de la propiedad distributiva. Cabe mencionar que los sistemas de representación que se utilizan dentro del signo igual como separador son el numérico y simbólico, sin embargo, en la representación gráfica del porcentaje, también se evidencia el sistema de representación gráfico. Todas las unidades de registro se ubican en situaciones de tipo educativa, tal como se observa en las dos unidades y corresponden a un contexto matemático.

Capítulo 5: Estudio comparativo de los significados del signo igual

Siguiendo con el objetivo general de este trabajo que es comparar los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes de 10 y 11 años, a continuación, se presenta el comparativo, donde se muestran los componentes del significado presentes en ambos libros de texto, posteriormente los 13 referentes del significado y se cierra mostrando las concepciones que se abordaron y las áreas del conocimiento.

Es importante tener en cuenta que en el libro de texto de México se encontraron 15 unidades de registro y en el libro de texto de Colombia se encontraron 50, esto se debe a que el libro de texto mexicano consta de un solo libro, mientras que el colombiano contiene 3 cuadernillos de trabajo, así la cantidad de páginas analizadas son diferentes por ende, la diferencia entre la cantidad de unidades de registro.

Al contrastar los sistemas de representación trabajados al interior de cada libro, coincide en el abordaje de 6 de los sistemas de representación, el simbólico, verbal, numérico, tabular, geométrico y pictórico, a continuación en la tabla 23 se presenta el contraste.

Tabla 23. Comparativo Sistemas de representación

Sistema de representación	México	Colombia
Simbólico	15	50
Verbal	5	16
Numérico	15	50
Tabular	9	6
Geométrico	1	8
Pictórico	1	25
Gráfico	0	8
Manipulativo	0	0
Ejecutable	0	0

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Los datos muestran que se presenta una coincidencia en los sistemas de representación con mayor presencia en las unidades de registro, pues se evidencia que el sistema de representación simbólico y el numérico se encuentra en la totalidad de unidades de registro analizadas en ambos países, esto se debe a que como mínimo en todas las unidades de registro debía estar presente el signo igual y se encontró que en todas había la presencia de cantidades numéricas.

También se evidencia que los sistemas de representación con menor frecuencia en cada país son diferentes, en el caso de México corresponde al pictórico y geométrico mientras que en Colombia corresponde al tabular. Además, el sistema de representación gráfico no se rastrea en el libro de texto de México pero si se encuentra en el libro de texto de Colombia. En este sentido, no se evidencian en ninguno de los dos libros los sistemas de representación manipulativo y ejecutable.

Al contrastar los contextos asociados a la fenomenología de cada libro de texto, también se encuentran semejanzas y similitudes, en la tabla 24, se presenta el conteo de esta variable en los dos libros de texto. Se evidencia que el contexto matemático está en la mayoría de las unidades de registro, en el caso de México en un 80% y en el caso de Colombia en un 92% evidenciando que el uso de símbolos propios de las matemáticas prima dentro de ambos países y que la relación entre objetos de la vida cotidiana con objetos matemáticos es muy poca en ambas propuestas educativas.


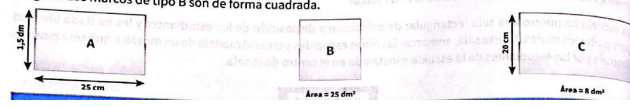
Tabla 24. Comparativo Fenomenología - Contextos

Contextos	México	Colombia
Matemático	12	46
No matemático	3	4

En la figura 73 se presentan dos unidades de registro, una del libro de texto de México y otra de Colombia respectivamente, ambas unidades corresponden a un contexto no matemático, debido a que se utilizan objetos de distinta naturaleza, lo cual, permite evidenciar que los contextos son muy parecidos, al igual los contextos matemáticos donde las explicaciones y tareas manejan un lenguaje netamente matemático para la resolución, ejercitación o explicación de contenidos.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 73. Contraste fenomenología

<p>MB3EG102</p> <p>En equipos, analicen la siguiente información. Posteriormente resuelvan lo que se solicita.</p> <p>Para medir grandes superficies, como la de los estados de la República Mexicana, se usa como unidad de medida el kilómetro cuadrado; su símbolo es km². Por ejemplo, el estado de Aguascalientes tiene una superficie de 5616 km².</p> <p>Algunas equivalencias entre distintas unidades de medida de superficie son:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>1 kilómetro cuadrado (km²) = 100 hectómetros cuadrados 1 hectómetro cuadrado (hm²) = 100 decámetros cuadrados 1 decámetro cuadrado (dam²) = 100 metros cuadrados 1 metro cuadrado (m²) = 100 decímetros cuadrados 1 decímetro cuadrado (dm²) = 100 centímetros cuadrados 1 centímetro cuadrado (cm²) = 100 milímetros cuadrados</p> </div>  <p style="text-align: center;">Situación Pública</p>	<p>C1S2EG66</p> <p>Enmarcación de las obras</p> <ul style="list-style-type: none"> La dirección de la escuela paga los servicios de marquería. Las obras serán montadas en marcos rectangulares de tres tipos distintos, A, B y C, como se muestra en la figura. Los marcos de tipo B son de forma cuadrada.  <p style="text-align: center;">Situación ocupacional</p>
--	---

Así mismo, en la tabla 25 se presenta dentro de la fenomenología el tipo de situaciones en el que se sitúan las tareas. Se coincide en que la situación educativa está presente en la mayoría de las unidades de registro en ambos libros de texto, esto se debe a que la mayoría de las unidades comprenden actividades relacionadas con situaciones escolares de los mismos estudiantes y de las matemáticas escolares que se enseñan. A su vez en ambos libros se observa la presencia de situaciones ocupacionales y públicas, sin embargo, solamente en el libro de Colombia se evidencia situaciones de tipo personal. De esta manera, no se rastrean en ninguno de los dos libros de texto las situaciones científicas y profesionales.

Tabla 25. Comparativo Fenomenología - situaciones

Situación	México	Colombia
Educativas	13	44
Ocupacionales	1	2
Públicas	1	2
Personales	0	2
Científico	0	0
Profesional	0	0

Un aspecto a resaltar entorno a las situaciones, es que en el libro de texto de México las situaciones públicas obedecen a situaciones culturales donde se retoman cantidades reales y propias del contexto, como se evidencia en la figura 73, donde la unidad MB3EG102 retoma la medida de la superficie de los estados la República Mexicana, sin embargo, en las unidades de Colombia las situaciones se enmarcan en situaciones muy generales, como es el

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

caso de la unidad C1S2EG66 donde la situación es ocupacional dado que se habla de la enmarcación de una obra, contenido que no obedece a un contexto netamente Colombiano.

De esta manera, aunque ambas unidades corresponden a un contexto no matemático, el tipo de situación cambia y es aquí donde se evidencia una particularidad entre los dos países, al evidenciar que en el libro Mexicano algunas tareas y explicaciones son muy cercanas al entorno del estudiante, aspecto que caracteriza este libro de texto.

A continuación en la tabla 26, se contrastan los referentes del significado identificados en los libros de textos. Según los datos, se evidencia que el referente operador es aquel que tiene mayor uso en los dos libros analizados, mostrando en la mayoría de las unidades de registro que al lado izquierdo del signo igual se encuentra una operación y al lado derecho se encuentra el resultado. Además, se observa que el libro de texto de Colombia aborda 9 de los 13 referentes del significado mientras que en México se identifican 7 de 13.

Tabla 26. Comparativos referentes del significado

No	Referente	Colombia	México
1	Propuesta de actividad	5	2
2	Operador	26	4
3	Expresión de una acción	3	1
4	Equivalencia numérica	7	2
5	Equivalencia por definición o por notación	6	2
6	Ecuación	9	1
7	Separador	6	0
8	Relación funcional o de dependencia	0	2
9	Definición de un objeto matemático	2	0
10	Indicador de ciertas conexiones o correspondencia	3	1
11	Igualdad estricta	0	0
12	Asignación de un valor numérico	0	0
13	Identidad	0	0

En la figura 74, se presenta al lado izquierdo una unidad de registro del libro de texto de Colombia y al lado derecho de México donde el referente del significado del signo igual que se potencia es operador, dado que al lado derecho del signo igual se presenta una operación y al lado derecho un resultado, sin embargo, aquí hay dos cosas importantes a resaltar, por un lado la forma en que hace alusión al resultado; en la unidad C1S2TA73 está dado por un recuadro que está dispuesto para ser completado con un resultado pero en la unidad MB1TA14 está dado por varios números donde se debe señalar cual es el correcto,

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

de lo cual, se resalta que aunque en la unidad C1S2TA73 el resultado no es numérico, está el espacio atribuido y dispuesto para este.

Figura 74. Contraste referentes y campo procedimental

CIS2TA73	MB1TA14																		
<p>c) Ejercicios numéricos</p> <p>8) Realiza mentalmente las siguientes multiplicaciones:</p> <p>a. $34,5 \times 10 =$ <input type="text"/></p> <p>b. $489,67 \times 100 =$ <input type="text"/></p> <p>c. $98,7 \times 100 =$ <input type="text"/></p> <p>d. $3,1 \times 10 =$ <input type="text"/></p> <p>e. $0,72 \times 100 =$ <input type="text"/></p> <p>f. $0,02 \times 10 =$ <input type="text"/></p> <p>g. $1,9 \times 100 =$ <input type="text"/></p> <p>h. $6,7 \times 10 =$ <input type="text"/></p>	<p>Consigna</p> <p>En parejas, coloquen una ✓ en el resultado de las siguientes divisiones. Cálculenlas mentalmente. En las líneas escriban lo que hicieron para llegar al resultado.</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td rowspan="4">$840 \div 20 =$</td> <td>10</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>40</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>42</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>50</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td rowspan="4">$1015 \div 35 =$</td> <td>9</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>29</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>30</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table>	$840 \div 20 =$	10	<input type="checkbox"/>	40	<input type="checkbox"/>	42	<input type="checkbox"/>	50	<input type="checkbox"/>	$1015 \div 35 =$	9	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	29	<input type="checkbox"/>	30	<input type="checkbox"/>
$840 \div 20 =$	10		<input type="checkbox"/>																
	40		<input type="checkbox"/>																
	42		<input type="checkbox"/>																
	50	<input type="checkbox"/>																	
$1015 \div 35 =$	9	<input type="checkbox"/>																	
	10	<input type="checkbox"/>																	
	29	<input type="checkbox"/>																	
	30	<input type="checkbox"/>																	

Por otro lado, al observar el campo procedimental de ambas unidades, es de resaltar la diferencia entre estos, dado que las destrezas que se promueven al interior del libro Colombiano apunta a ejercitación y el trabajo procedimental de los procedimientos, sin embargo, las destrezas en el libro de texto de México buscan a parte de la resolución, la argumentación y descripción de cómo se llegó a los resultados o del por qué se eligió el desarrollo de cierto procedimiento. Aquí se encuentra una caracterización importante de las propuestas educativas, dado que una va más enfocada a lo procedimental mientras que la otra también desarrollo procesos argumentativos.

También se evidencia que en ambos países se tiene ausencia de los tres referentes Igualdad estricta, Asignación de un valor numérico e Identidad. Además de estos, en el libro de texto mexicano no se evidencian los significados de referencia como definición de un objeto matemático, ecuación y separador y para el caso de Colombia no se presentan los de relación funcional o de dependencia.

También se hizo una agrupación de los significados en 4 concepciones y clasificados según el área de conocimiento que se aborda en cada unidad de registro. En la tabla 27 se presenta la cantidad de unidades de registro que abordan cada una de las concepciones clasificadas en áreas.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Tabla 27. Comparativo entre concepciones y áreas del conocimiento

No.	Concepción	Colombia			México		
		A	G	E	A	G	E
1	Equivalencia	45	10	1	9	3	0
2	Relación funcional	0	1	4	2	1	0
3	Igualdad	0	0	0	0	0	0
4	Identidad	0	0	0	0	0	0

Según la información de la tabla 27, se puede evidenciar que en ambos países la concepción de equivalencia es la que tiene mayor uso y trabajo entorno al signo igual, es decir, el signo igual es utilizado para establecer la relación entre dos objetos que tienen el mismo valor, además también se evidencia que la mayoría de las unidades de registro bajo la concepción de equivalencia se presentan en el área de aritmética y su presencia en el área de estadística y probabilidad es casi nulo para el caso del libro colombiano con sólo una mención y para el caso mexicano no existe presencia de ningún significado del signo igual para el área de estadística y probabilidad. En cuanto a las diferencias, la concepción de relación funcional se evidencia que en ambos países se aborda desde el área de geometría, sin embargo en México también desde el área de aritmética y en Colombia desde el área de estadística y probabilidad

Las concepciones de igualdad y de identidad no se aborda en ninguno de los dos libros de texto, esto se puede deber a la misma naturaleza del grado escolar, dado que al tratarse de quinto de primaria no se abordan aspectos algebraicos y la concepción de identidad se define como una igualdad algebraica que se verifica siempre, cualquiera que sea el valor de sus variables, por su parte, la concepción de igualdad se entiende como la conformidad de algo con otra cosa en naturaleza, forma, calidad o cantidad, aspectos que no fueron vistos en los libros de texto.

En la tabla 28, se presentan ahora las concepciones pero clasificadas en tipo de actividad, sea tarea o explicación.

Tabla 28. Comparativo entre concepciones y tipo de actividad

Concepción	México		Colombia	
	Tarea	Explicación	Tarea	Explicación
Equivalencia	9	3	35	21
Relación funcional	3	0	3	2
Igualdad	0	0	0	0
Identidad	0	0	0	0
Total	12	3	38	23

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

En cuanto al tipo de actividad, se evidencia que en ambos libros de texto las mayoría de unidades de registro corresponden a tareas donde se propone la realización de ejercicios que pongan en práctica los contenidos abordados, por esto, las unidades de tipo explicación se presentan menor cantidad, porque aunque se utiliza el signo igual en las explicaciones y espacios de conceptualización y explicación de contenidos y procedimientos, se presentan mayor cantidad de actividades a desarrollar por el lector.

De esta manera y retomando la explicación de la tabla anterior, la concepción de equivalencia es la que más se aborda, por lo tanto, las cantidad de tareas y explicaciones enfocadas en esta concepción son diferenciales con relación a las otras concepciones.

Desde la concepción de equivalencia registradas en los mapas conceptuales propuestos dentro del análisis de cada libro de texto se observan similitudes y diferencias. En cuanto a las semejanzas, se encuentra que en ambos países se aborda dentro del sistema de numeración decimal, el trabajo de los conjuntos numéricos de los números racionales y naturales para la realización de operaciones básicas dentro de aritmética y trabajo de conversiones y unidades de medida dentro de geometría, además, se encuentra que en ambos países se trabajan situaciones de tipo educativa, ocupacionales y personales en contextos matemáticos y no matemáticos.

Sin embargo, también hay diferencias interesantes a identificar, se observa que en el libro de texto de México se realiza un trabajo además entre los sistemas de numeración decimal, romano, egipcio y maya con la intención de reconocer la simbología, las cantidades numéricas que estas representan y su equivalente con el sistema de numeración decimal, siendo un aspecto que en el libro de Colombia no se menciona y por su parte en el libro Colombiano se evidencia la equivalencia para el trabajo de porcentajes, probabilidades y promedios que abona al área de estadística y probabilidad. Para identificar este contraste de forma visual, a continuación en la figura 75 se presentan dos ejemplos.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 75. Contraste concepción equivalencia

MB5TA157	C2S5EE88																								
<p>2. Resuelvan las siguientes operaciones en el sistema maya; transformen las cantidades al sistema decimal y contesten la pregunta.</p> <table border="1" data-bbox="402 457 625 569"><tr><td>•</td><td></td><td></td></tr><tr><td>••</td><td>+</td><td>••</td></tr><tr><td>☉</td><td></td><td>—</td></tr></table> <table border="1" data-bbox="402 583 625 653"><tr><td>•</td><td></td><td>—</td></tr><tr><td>—</td><td>+</td><td>••••</td></tr></table> <table border="1" data-bbox="402 667 625 779"><tr><td>•</td><td></td><td></td></tr><tr><td>☉</td><td>×</td><td>—</td></tr><tr><td>•</td><td></td><td>☉</td></tr></table> <p>¿Por qué consideran que durante la historia de la humanidad se ha universalizado el sistema de numeración decimal?</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>	•			••	+	••	☉		—	•		—	—	+	••••	•			☉	×	—	•		☉	<p>• ¿Cuál crees que será la probabilidad de obtener el evento "igual"? ¿Cuál será la de obtener el evento "diferente"?</p> <p>Hay 4 parejas que se pueden obtener: AA, NN, AN, NA. Por lo tanto, la probabilidad del evento "igual" es de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ o 50%. La probabilidad del evento "diferente" es la misma. Es decir, el evento "igual" es igualmente probable al evento "diferente".</p>
•																									
••	+	••																							
☉		—																							
•		—																							
—	+	••••																							
•																									
☉	×	—																							
•		☉																							

Se evidencia en la unidad de registro de México MB5TA157 la operatividad entre símbolos del sistema de numeración maya para ser transformados en cantidades decimales, donde se evidencia una equivalencia numérica, además, se cierra la tarea con una pregunta que cuestiona el hecho de que el sistema de numeración decimal sea el universal, mostrando nuevamente el interés de la propuesta educativa en la argumentación y el pensamiento crítico. Por otro lado, en la unidad de registro de Colombia C2S5EE88 se muestra la equivalencia entre cantidades para expresar la probabilidad de un evento, donde esta explicación se enmarca en el conjunto de los números racionales mediante la simplificación de cantidades y el paso a porcentajes.

Desde la concepción de relación funcional registrada en los mapas conceptuales propuestos dentro del análisis de cada libro de texto se observa una similitud es el trabajo con el conjunto numérico de los números naturales para la realización de conversiones entre diferentes unidades de medida, además también se coincide con el trabajo de situaciones educativas enmarcadas en contextos matemáticos. Sin embargo, como diferencias se encuentra que el libro de texto de Colombia las conversiones entre unidades de medida las realiza entre números naturales y números racionales, además que se incluye el abordaje de promedios y situaciones ocupacionales, por lo tanto, también se evidencia el contexto no matemático.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Figura 76. Contraste concepción de relación funcional

C2S5TE82

8) Encuentra el dato que falta para que el promedio M sea igual al número dado.

a) 12, 8, 9, M=9

b) 2,5; 1,6; 0,9; 1,7; M=1,7

c) 6, 8, 3, ,1 M=5

d) 0,65; 1,85; M=1,1

MB1TA13

Consigna

En equipos, determinen el número de cifras del cociente de las siguientes divisiones, sin hacer las operaciones. Argumenten sus resultados.

División	Número de cifras del resultado
$837 \div 93 =$	
$10500 \div 250 =$	
$17625 \div 75 =$	
$328320 \div 380 =$	
$8599400 \div 950 =$	

En la figura 76, se puede observar como en la unidad de registro C2S5TE82 se presenta una tarea de estadística y probabilidad que pide encontrar el valor que falta para que el promedio sea el estipulado, evidenciando que el signo igual está presente bajo una relación funcional como definición de un objeto, en este caso, definiendo a M que es el promedio, además se observa la presencia de números naturales y números decimales. Por su parte la unidad de registro MB1TA13 siendo una tarea de aritmética pide determinar el número de cifras del cociente, siendo el signo igual utilizado como una relación funcional dado que el resultado que se colocará en la columna no corresponde al resultado de la división, si no a la cantidad de cifras de ese resultado, unidad donde se evidencia la presencia de la división. Un aspecto que resaltar en la destreza de esta unidad es el componente argumentativo que se exige para dar cuenta de los procedimientos realizados, componente que caracteriza al libro de texto mexicano.

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo se enmarca bajo la pregunta de investigación ¿Cuáles son las diferencias y semejanzas de los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes de 10 y 11 años? De esta manera, para dar respuesta a la pregunta fue necesario plantear como objetivo general: comparar los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes de 10 y 11 años, además de tres objetivos específicos. A continuación se presenta como se da cumplimiento a cada uno de ellos.

Para cumplir el primer objetivo específico, el cual fue establecer las categorías de análisis para la identificación y clasificación de los significados del signo igual, fue necesario complementar los antecedentes con la investigación del desarrollo histórico del signo igual, donde se determinaron los referentes base que sirvieron como categorías de análisis para la organización de los significados del signo igual en los libros de texto, además teniendo en cuenta que el interés fue analizar significados, se tomó como referente teórico las componentes del significado propuestas por Rico (2012), dado que esta terna permite identificar la forma en que se organiza un contenido matemático y los significados que se le asocian.

Una vez establecidas las categorías de análisis, el segundo objetivo consistió en identificar los significados del signo igual presentes en las tareas del libro de texto de matemáticas de México y Colombia, por lo cual, se estableció como instrumento una ficha de registro donde se recogieron todas las unidades de registro en los libros de texto donde el signo igual estaba presente de forma explícita y se identificó las componentes del significado, las concepciones y los referentes del significado del signo igual.

El contar con las unidades de registro completas, permitió continuar con el tercer objetivo específico, el cual fue describir los significados potenciados en las tareas relacionadas con el signo igual presentes en el libro de texto de matemáticas de México y Colombia, fue aquí donde se realizó un análisis y una descripción de los resultados, a continuación se presentan las conclusiones del análisis que permiten dar respuesta al objetivo general y a la pregunta de investigación.

Como el análisis realizado dentro de los libros de texto de México y Colombia de grado 5to tenía como objetivo identificar los significados del signo igual potenciados, estos fueron agrupados dentro de cuatro concepciones: equivalencia, relación funcional, igualdad e identidad, encontrando como resultados la presencia del signo igual como equivalencia y como relación funcional.

El signo igual como equivalencia agrupa 6 referentes del significado: propuesta de actividad, operador, expresión de una acción, equivalencia numérica, equivalencia por

definición o por notación y ecuación siendo un resultado relevante el encontrar todos estos referentes presenten en los dos libros de texto, mostrando que la equivalencia desde una visión relacional y operacional son propuestas y desarrolladas mediante las tareas y las explicaciones que los libros proponen.

Así mismo, el signo igual como relación funcional agrupa 3 referentes del significado: relación funcional o de dependencia, definición de un objeto matemático e indicador de ciertas conexiones o correspondencia, concepción donde se encuentran diferencias entre los significados que se abordan en cada país, dado que en el caso de México se potencia el significado de relación funcional o de dependencia el cual refiere al uso para indicar una relación o dependencia entre variables o parámetros, ejemplificado en la figura 36 y 37. Además, en el caso del libro de texto de Colombia se potencian los dos significados restantes, por un lado definición de un objeto matemático que se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático, ejemplificado en la figura 64 y por otro lado indicador de ciertas conexiones o correspondencia que se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza ejemplificado en la figura 65.

Ahora, centrando la atención en aquellas concepciones no encontradas, la concepción de identidad está definida según la RAE (2023) como “una igualdad algebraica que se verifica siempre, cualquiera que sea el valor de sus variables” definición que la enmarca dentro de un contexto algebraico, lo cual justifica la ausencia, dado que al tratarse de un grado de primaria el trabajo matemático es aritmético. Por otro lado, la concepción de igualdad según la RAE (2023) se entiende como “Conformidad de algo con otra cosa en naturaleza, forma, calidad o cantidad” siendo posible su abordaje dentro del trabajo aritmético.

A modo de ejemplo, en la figura 77 se propone una actividad, de construcción propia, donde se trabaja el signo igual como igualdad. En la actividad se propone validar si la igualdad es verdadera o falsa, a partir de los valores numéricos asociados a cada icono, lo cual conlleva a reemplazar los valores, realizar las operaciones en ambos lados del igual y posteriormente comparar si las cantidades son las mismas en forma y cantidad, lo cual hace alusión al signo igual bajo la concepción de igualdad.

Figura 77. Propuesta del signo igual como igualdad.

Teniendo en cuenta el valor numérico de cada icono, comprueba si las igualdades se cumplen.

$$\begin{aligned} \heartsuit &= 2 & \smile &= 5 \\ 3 + \heartsuit &= 4 + 1 \\ 8 \times \heartsuit &= 5 \times \smile \\ \smile - 1 &= 2 + \heartsuit \end{aligned}$$

En este sentido, teniendo en cuenta que las tareas y explicaciones fueron clasificadas en áreas del conocimiento: Aritmética, Geometría y Estadística y probabilidad, se encontró que el signo igual está presente en mayor frecuencia en unidades de registro donde se abordan el área de aritmética, esto se debe al grado al que va dirigido el libro de texto que, al ser grado 5° de primaria, el desarrollo y el trabajo de las operaciones básicas es un trabajo constante que se enmarca en la aritmética. Así mismo, se encontró que el signo igual casi no se evidencia en tareas y explicaciones del área de estadística y probabilidad, de lo cual se pudo concluir que se puede deber al uso de diagramas, gráficos y tablas que sustituyen muchas relaciones de igualdad y que por esto el signo igual no está presente de forma explícita.

En cuanto a las componentes del significado, al analizar los sistemas de representación se encontró que se rastrean 7 de los 9 sistemas de representación, de estos 7 sistemas se encuentra que los dos libros de texto contienen 6, el simbólico, verbal, numérico, tabular, geométrico y pictórico mostrando una gran riqueza de sistemas de representación que permiten que los significados del signo igual sean más amplios. Además, en el libro de texto de Colombia se rastrea el sistema de representación Gráfico. En este sentido, en ambos libros se encuentra la ausencia de dos sistemas de representación, por un lado el manipulativo, el cual se refiere a la utilización de recursos y medios para representar determinados elementos, no se evidencia de forma explícita, sin embargo ambos libros de texto proponen y contiene material recortable para ser manipulado, pero, al no encontrarse en estas secciones el signo igual explícitamente, no se analiza si su uso está involucrado.

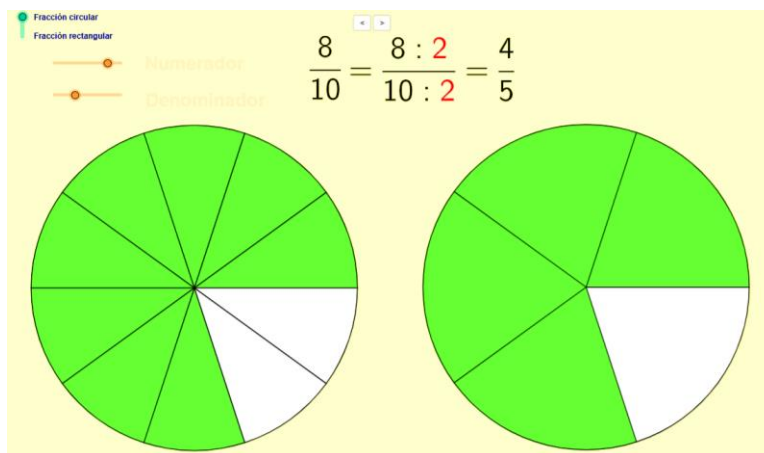
Por otro lado, el otro sistema de representación ausente es el ejecutable, el cual consiste en la utilización de programas de cómputo y aunque se trata de un libro de texto, fuese importante que el libro invitara al lector a ingresar a un enlace, plataforma o página donde se pudiera aprovechar los medios tecnológicos para ampliar los conceptos y a su vez brindar mayores oportunidades de aprendizaje, teniendo en cuenta las ventajas del uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se sugiere añadir tareas o

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

explicaciones que conlleven el uso de este sistema, dado que puede favorecer y fortalecer la adquisición de los significados.

Para ejemplificar la incursión de este y teniendo en cuenta que en los libros de grado 5to de primaria se trabajan las fracciones, se podría incluir la utilización de recursos en GeoGebra, tal como se observa en la figura 78 donde el signo igual muestra la equivalencia entre fracciones mediante la simplificación y la amplificación de fracciones a su vez en un sistema de representación numérico y gráfico. Estas actividades potencia la visualización del estudiante permitiéndole interactuar con diferentes fracciones al mover los deslizadores de numerador y denominador y ver si la fracción puede ser simplificada o amplificada o si es irreducible, permitiéndole adquirir mayores significados asociados al signo igual y la apropiación de conceptos.

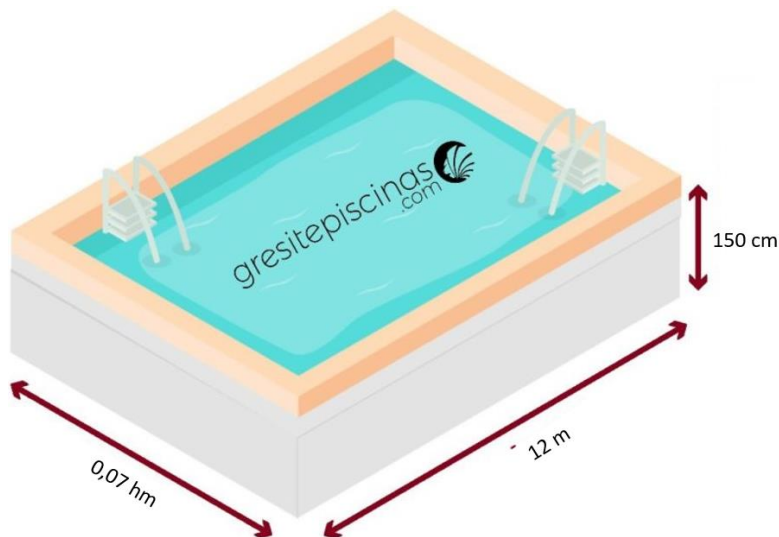
Figura 78. Propuesta del signo igual en un sistema de representación ejecutable



Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/WrTAdCyw>

Así mismo, con relación a la fenomenología se observó la ausencia de situaciones científicas y profesionales, por lo que sería prudente la inclusión de estas situaciones dado que permiten al lector identificar el signo igual en contextos reales logrando proyectar sus usos y la adquisición de significados. A modo de ejemplo, la siguiente situación problema se enmarca en una situación profesional dado que se trata de las actividades que desarrolla un arquitecto en un contrato para la realización de una piscina, además, se tiene en cuenta que el trabajo de conversiones, de áreas y volúmenes es importante que se desarrollen en grado 5to de primaria, teniendo en cuenta los lineamientos nacionales.

Un arquitecto fue contratado para la realización de una piscina. El arquitecto realiza y presenta el siguiente diseño. Sin embargo, aún le falta encontrar cual es el volumen de la piscina. Vamos a ayudarle, recuerda que $V = \text{Largo} \times \text{Ancho} \times \text{Profundidad}$.



En cuanto a los contextos la mayoría corresponden a contextos matemáticos, esto mostrando que el lenguaje utilizado dentro del libro generalmente es propio de las matemáticas y que la relación con objetos de otra naturaleza es escasa, lo cual se relaciona con lo expuesto anteriormente en las situaciones, donde se evidencia que son pocas las situaciones diferentes a las educativas, con lo cual se puede concluir que al garantizar la incursión de situaciones sean públicas, ocupacionales, personales, científicas y demás, podría ocasionar mayor trabajo de un contexto no matemático, haciendo que la tareas o explicaciones sean más contextualizadas para el estudiante y se propicie la adquisición de mayores significados, dado que la interpretación inadecuada que los estudiantes tienen del signo igual puede deberse a la experiencia que tienen los niños en la escuela elemental con los contextos que encuentran en los libros de texto (Ramírez, 2010)

En este sentido, con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cuáles son las diferencias y semejanzas de los significados del signo igual entre un libro de texto colombiano y uno mexicano, dirigidos a estudiantes entre 10 y 11 años?, dentro del estudio comparativo se describen las semejanzas y diferencias, sin embargo, se concluye que la propuesta educativa mexicana y colombiana están muy alineadas, dado que dentro de las semejanzas encontradas y apoyadas en los componentes del significado, se evidencia que dentro de los sistemas de representación se coincide con el uso con mayor frecuencia de los sistemas simbólicos y numéricos, en la fenomenología se coincide en que la mayoría corresponde a un contexto matemático y a situaciones educativas y que el referente del significado más utilizado para el signo igual es el de operador.

Dentro de las diferencias se rescata que en el libro de texto colombiano se aborda el sistema de representación gráfico mientras que en México no, al igual que en la fenomenología las situaciones personales son evidenciadas en Colombia pero no en México.

Dentro de los referentes del significado se muestra que en Colombia no se aborda la relación funcional o de dependencia mientras que en México sí y que en México no se abordan los referentes de separador y definición de un objeto matemático mientras que en Colombia sí.

En cuanto a los referentes del significado, se encontró que el signo igual bajo el referente de operador es el que se encuentra en mayor medida tanto en el libro de texto colombiano como en el mexicano, esto, lo cual la literatura reporta, dado que se ha encontrado que los significados adquiridos en los grados elementales sobre el signo igual son parciales, es interpretado como la invitación a operar más que ser visto como un símbolo relacional (Ramírez y Rodríguez, 2011).

A su vez, un hallazgo a rescatar tiene que ver con el significado del signo igual bajo el referente de ecuación, el cual, aunque está definido dentro de un contexto algebraico, fue encontrado en los dos libros de texto, lo cual deja en evidencia el inicio de un trabajo pre-algebraico desde la educación primaria, aspecto que los autores Vermeulen y Meyer (2017) han sugerido al mencionar que “el signo igual es un concepto algebraico importante que los estudiantes deben encontrar y comenzar a comprender en los grados inferiores” (p. 2.) Este hallazgo muestra acercamientos algebraicos importantes que mediante la aritmética, permite desarrollar la interpretación del signo igual desde una visión relacional además de minimizar la brecha existente entre la aritmética y el álgebra, puesto que se encontró unidades de registro en ambos libros (figura 34 y 56), donde se aborda el signo igual como ecuación, donde la incógnita está remplazada por un recuadro que alude a la cantidad desconocida y que debe ser completada con un número que tiene un único valor.

En este sentido, el poder reconocer los referentes del significado del signo igual que no se abordan dentro de los libros de texto es de vital importancia, dado que por un lado permite a los docentes identificar que el contenido presente dentro de los libros de texto no es suficiente para la conceptualización de un contenido o un objeto matemático a enseñar, dado que como se muestra en este trabajo, se presentan significados que no se potencian y que sería trabajo del maestro complementar, por esto la importancia de analizar las tareas propuestas en los libros de texto, dado que ayuda a comprender la forma en que se considera la actividad matemática (Pallauta, Batanero y Gea, 2021)

Estos resultados aportan a las editoriales y para quienes construyen material de trabajo porque muestra que hay aspectos importantes que permiten una conceptualización y la adquisición de conocimientos para el alumno que no se están abordando y que deberían tenerse en cuenta; además, es un aporte para los docentes como muestra de que los contenidos de los libros de texto puede ser de ayuda pero que también debe ser complementados para que la conceptualización y la apropiación de todos los significados de un contenido sean tomados en cuenta para su comprensión.

Dentro de las limitaciones que se presentaron en la construcción de este trabajo, una de ellas tiene que ver con la fenomenología, dado que los contextos y las situaciones requieren de un mayor trabajo y una mayor profundización de tal manera que el análisis que se realiza en las unidades de registro pueda ser más detallado y claro, así mismo, sería interesante el articular el signo igual bajo la visión relacional y operacional con los referentes del significado, de tal manera que se pudiera hacer explícito aquellos significados que afianzan cada una de estas visiones para identificar cuáles son los más favorecidos y cuales por el contrario no lo son.

Este análisis y las limitaciones encontradas, permite establecer ciertas líneas de continuidad para este trabajo, queda como interrogante ¿Qué variación tendría este estudio al ser realizado en libros de texto de grado 6°? Los referentes han mostrado que en educación primaria el signo igual desde una visión relacional es escaso, sin embargo, en este estudio se mostró un acercamiento al pre-álgebra al encontrar el signo igual en la resolución de ecuaciones, con lo cual se podría establecer la hipótesis que al analizar libros de grado 6° de primaria el trabajo relacional sea mayor, dado el grado escolar.

Otra investigación importante también sería el realizar este estudio en el último grado de primaria y primero de secundaria, con el objetivo de identificar la variación de estos significados y su hay un cambio significativo de un nivel a otro, teniendo como hipótesis que en el libro de texto del último grado de primaria habrán mayores acercamiento al pre-álgebra y que en el primero de secundaria la frecuencia debe ser más alta.

Así mismo, se presentan aquellos referentes del signo igual que no se fueron rastreados, por lo que se podría continuar con la realización de propuestas de diseño de actividades o adecuación de las actividades que se encontraron de tal manera que se potencien más significados e intentar mediante el pre-álgebra que aquellos que se enmarcan en contextos algebraicos puedan ser introducidos desde la aritmética.

Reflexión

Desde mi práctica docente he identificado que el uso atribuido al signo igual trae consecuencias en el aprendizaje y razonamiento en los estudiantes a medida que avanzan en sus años escolares. Cuando a los estudiantes de primaria se les presenta una operación al lado derecho de la igualdad y se les propone escribir el resultado al lado izquierdo, esto ocasiona confusión en ellos, indicando que no comprenden qué deben realizar o por qué la operación está organizada de forma diferente, aspecto que he evidenciado con mis estudiantes al momento de abordar las propiedades de la suma y la multiplicación.

Aunque en mi rol docente había identificado estas dificultades, fue hasta que cursé el Seminario Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico en mi primer semestre de la maestría que comprendí que tal dificultad estaba documentada y que es motivo de investigación. Por un lado, Navia y Vergara (2021) realizaron un análisis de un libro de texto de matemáticas de primer grado de Educación Primaria en Colombia, con el fin de identificar los contextos y significados del signo igual. Por otro lado, Burgell y Ochoviet (2015) realizaron un estudio con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y profesores, donde aplicaron un cuestionario que les permitió identificar los Significados del signo de igual y además, de realizar una revisión en las guías de los profesores y cuadernos de algunos estudiantes para identificar aspectos de la enseñanza que involucran los significados del signo igual.

En este sentido, la confusión del estudiante en las igualdades se debe a la manera en que comprenden el signo igual, dado que generalmente el signo igual es propuesto con un sentido operacional, es decir como una propuesta de una actividad o como indicación de realizar y encontrar un resultado, donde se presenta al lado izquierdo una operación y al lado derecho se debe colocar una respuesta. Este sentido operacional deja de lado otros significados importantes que conllevan al estudiante a una comprensión más amplia de los usos que puede tener este signo y a tener la capacidad de abordar otras situaciones donde el signo igual se presente como equivalente o como relación.

De aquí surgió mi interés y el objetivo de este trabajo, del poder relacionar una dificultad que la literatura reporta con mi experiencia como docente, con la intención de ahondar en ella, conocerla e identificar herramientas didácticas que me permitan aportar en la construcción de los significados del signo igual en mis estudiantes.

Referencias

- Álzate, M., Gómez, M., y Romero, F. (1999). *Textos escolares y representaciones sociales de la familia 1: definiciones, dimensiones y campos de investigación*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Bernete, F. (2013). Análisis de contenido (cuantitativo y cualitativo). En A. Marín y A. Noboa, (Ed.), *Conocer lo social: Estrategias, técnicas de construcción y análisis de datos* (pp. 222-261). Madrid.
- Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.
- Burgell, F. (2013). *¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de primer año del ciclo básico de enseñanza media?: aportes para pensar los cimientos del álgebra*. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (p. 39-50).
- Burgell, F., y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza: un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 33(3), 77-98. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1561>
- Byrd, C., McNeil, N., Chesney, D., y Matthews, P. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, 38, 61-67.
- Cajori, F. (1993). *Una historia de las notaciones matemáticas* (Vol. 1). Courier Corporation.
- Cañadas, M. C., Gómez, P., y Pinzón, A. (2015). Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD 4.
- Chica, Y., y Soto, Y. (2015). Análisis de concepciones sobre signo igual y concepto de equivalencia desarrollada en estudiantes de educación básica primaria, grado Quinto de la Institución Educativa San Simón sede Montealegre. [Trabajo de grado, Universidad del Tolima] <http://repository.ut.edu.co/>
- Díaz, C. (2018). Investigación cualitativa y análisis de contenido temático. Orientación intelectual de revista Universum. *Revista general de información y documentación*, 28(1), 119.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., y Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 713-737.

- Díaz-Levicoy, D., Morales, L., y Rodríguez, F. (2020). Las medidas de tendencia central en libros de texto de Educación Primaria en México. *Revista Paradigma*, 41, 706-729.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]
- González, E. M. L., Guerrero, A. C., Yáñez, J. C., y González, L. C. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de investigación en educación matemática*, (8), 73-94.
- Hernández, J., y Kú D. (2021). Significados de la ecuación cuadrática en producciones de estudiantes de secundaria. En L. Hernández, E. Juárez, y H. Ruiz. (Ed.) *Tendencias en la educación matemática 2021*. (pp. 17-32). Comunicación Científica.
- Hernández, J., Zamora, R. y Lupiáñez, J. L. (2020). Estudio comparativo de los significados y expectativas de aprendizaje del límite en tres libros y el currículo oficial. *PNA* 14(4), 241-269.
- Hernández, R.; Fernández, C., y Baptista, P. (1997). *Metodología de la Investigación*. 3ª Edición. Colombia: Panamericana Formas e Impresos S.A.
- Herrera, M., Velasco, M y Ruiz-Hidalgo, J. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA*, 11(4), 280-306.
- Knuth, E., Stephens, A, McNeil, N., y Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.
- León, J., López, I., y Carrillo, C. (2020). Significados de la probabilidad presentes en libros de texto de primer año de secundaria en México. *Acta latinoamericana de matemáticas educativa*. 33 (2), 78 – 88.
- Makón, A. (2004). Métodos comparativos en ciencias sociales: algunas reflexiones en relación a sus ventajas y limitaciones. *VI Jornadas de Sociología*. Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.
- Molina, M. (2006). Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria. [Tesis doctoral, Universidad de granada] <http://funes.uniandes.edu.co/>
- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán, *Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinarios y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides* (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

- Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2009). Cómo entienden los alumnos de Primaria el signo Igual en las ecuaciones numéricas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 341-368.
- Mosquera, J. (2018). Estudio comparativo de Textos Escolares Oficiales de Matemáticas de Ecuador y Venezuela: los Sistemas de Ecuaciones Lineales. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 14(52), 91-117.
- Navia, A., y Vergara, M. (2021). Contextos y significados del signo igual: el caso de un libro de texto de matemáticas de primer grado de educación primaria en Colombia. [Trabajo de grado, Universidad del Valle] <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/>
- Pallauta, J., Batanero, C., y Gea, M. (2021). Complejidad semiótica de las tablas estadísticas en textos escolares chilenos y españoles de educación primaria. *Revista de Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 23(4), 193-220.
- Parodi, S., Ochoviet, C., y Lezama, J. (2020). Interpretaciones del Signo Igual en un Contexto Algebraico de Polinomios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34, 1264-1284.
- Pino, J, y Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.
- Powell, S. (2015). The influence of symbols and equations on understanding mathematical equivalence. *Intervention in School and Clinic*, 50(5), 266-272.
- Programme for International Student Assessment [PISA], 2022
- Ramírez, M. (2010). Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. [Trabajo de grado, Universidad Complutense de Madrid] <https://eprints.ucm.es/>
- Ramírez, M., y Rodríguez, P. (2011). El signo igual y su significado en los libros de texto de Primer Ciclo de Educación Primaria. In *Investigación en Educación Matemática XV*, 2011, 503-512.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Vermeulen, C., y Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African journal of research in mathematics, science and technology education*, 21(2), 136-147.

Significados del signo igual en libros de texto de educación primaria de México y Colombia

Wardat, Y., Jarrah, A., y Stoica, G. (2021). Understanding the Meaning of the Equal Sign: A Case Study of Middle School Students in the United Arab Emirates. *European Journal of Educational Research*, 10(3), 1505-1514.