UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

DISEÑO DE UNA PLANIFICACIÓN INTEGRADA DESDE EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS PARA UNA ENSEÑANZA ROBUSTA DE ECUACIONES LINEALES EN ALUMNOS DE SECUNDARIA

Para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa

con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

Lic. Jesús David Jiménez Facio

Directora de tesis:

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Codirectora:

MTI. Mónica del Rocío Torres Ibarra

Zacatecas, Zac., 25 de agosto de 2022

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado mediante la beca con número de registro de CVU 1081029, para la realización de mis estudios de Maestría.

Agradecimientos

A mi familia. Por el apoyo incondicional, por su cariño y por las palabras de aliento. En especial a mi madre que me sigue cuidando y velando por mi bienestar.

A la Dra. Leticia. Por su paciencia, sus palabras de aliento, por su comprensión y por todo su tiempo invertido en mi crecimiento personal y académico. También por guiarme y asesórame en la elaboración de este trabajo que para mí es un gran logro. Gracias por toda su dedicación y esfuerzo, gracias por esas sonrisas y esos destellos de imaginación que nos permitía abordar en cada una de sus clases.

A mis sinodales. Por el tiempo invertido para la revisión de mi trabajo de tesis, ya que sin su apoyo no hubiera aprendido tantas cosas. Muchas gracias.

A la Dra. Silvia. Por aceptarme en una estancia académica en la que sin duda alguna aprendí demasiado. No creo poder pagar por completo aquel tiempo invertido en el que me asesoró cuando me encontraba navegando en un mundo de información.

A la maestra "Lupita". Por aceptar ser parte de este gran logro, por permitirnos aprender de su dedicación y esfuerzo. Gracias por todo.

A mi esposa e hijos. Por su comprensión y apoyo, por el tiempo robado y por el sacrificio que tuvieron que hacer para permitirme obtener este gran logro.

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "DISEÑO DE UNA PLANIFICACIÓN INTEGRADA DESDE EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS PARA UNA ENSEÑANZA ROBUSTA DE ECUACIONES LINEALES EN ALUMNOS DE SECUNDARIA" y que fue realizado bajo mi asesoría por el C. Jesús David Jiménez Facio, egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 25 de agosto del 2022

Leticia Sosa G.

Dra. Leticia Sosa Guerrero

MATI. Mónica del Rocío Torres Ibarra

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 25 del mes de Agosto del año 2022, el que suscribe Lic. Jesús David Jiménez Facio egresado del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 32133506; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado titulado "DISEÑO DE UNA PLANIFICACIÓN INTEGRADA DESDE EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS PARA UNA ENSEÑANZA ROBUSTA DE ECUACIONES LINEALES EN ALUMNOS DE SECUNDARIA" bajo la dirección de la Dra. Leticia Sosa Guerrero y como codirectora la MATI. Mónica del Rocío Torres Ibarra.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Facio

Jesús David Jiménez Facio

Resumen

El presente trabajo de investigación surge a partir de la preocupación y el interés que se tiene como profesor al enseñar las ecuaciones lineales. Consideramos el conocimiento del profesor como algo fundamental para que los estudiantes adquieran una comprensión robusta de este tópico matemático.

En este sentido algunos autores han desarrollado diferentes propuestas de enseñanza de las ecuaciones lineales y en las que se han encontrado una profundización y análisis de diferentes índoles, tales como del tipo didáctico, cognitivo y matemático. Dentro de estas se han desarrollado diferentes ideas en torno a la enseñanza y se han implementado en el aula para verificar si lo que se ha detallado en sus propuestas puede ser validado con la información recabada.

Retomando estos aportes, cada uno de los autores revisados ha considerado diferentes alcances en cuanto a la resolución de ecuaciones, o al cambio del lenguaje común al algebraico. Asimismo, han advertido una falta de profundización en aquellos elementos de conocimiento del profesor que se aplican para su enseñanza y que son importantes para la comprensión de los estudiantes tales como el dominio matemático y didáctico.

La enseñanza de las ecuaciones lineales cobra relevancia en el sentido de que es un aprendizaje fundamental no solo para temas posteriores sino para ampliar el nivel de razonamiento que poseen nuestros estudiantes. Ante este panorama, este trabajo plantea realizar una investigación para lograr evidenciar el conocimiento que debe poner en juego el profesor para la enseñanza de las ecuaciones lineales y además de manera muy particular cómo es que este los aplica en el aula para lograr en los estudiantes una comprensión robusta.

Para lo anterior se plantea el diseño de una planificación integrada tomando en consideración el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) y el marco de Enseñanza de una Comprensión Robusta (TRU). Para esto, se pretende usar como metodología el estudio de casos de tipo instrumental que complementará los elementos considerados en la planificación de la propuesta, para que después de aplicarla en conjunto con una entrevista semiestructurada y las videograbaciones, se pueda evaluar y llegar a determinar los resultados obtenidos.

ÍNDICE

Introducción

El tema de la enseñanza en matemáticas ha cobrado relevancia en cuanto al desarrollo de conocimientos que los profesores logran con sus estudiantes. El conocimiento que ha de poner en juego el profesor para la enseñanza de las ecuaciones lineales no es del todo claro, aunque podemos observar en la literatura que ha habido muchos esfuerzos por establecer una enseñanza cada vez más completa.

Diferentes investigadores han dedicado sus esfuerzos en detallar aquellos elementos que son importantes dentro del conocimiento del profesor y que fungen como una parte prioritaria dentro de la enseñanza (Grossman, Wilson y Shulman, 2005), y que pueden considerarse en el aprendizaje de las ecuaciones lineales.

Sobre la planificación de propuestas que se han elaborado en torno a las ecuaciones lineales se ha identificado como aspecto sustancial una falta de profundización en cuanto a los elementos de conocimiento matemático y didáctico como parte de una enseñanza que genere en los estudiantes una mayor comprensión.

Por lo anterior, el objetivo de la presente investigación es detallar y desarrollar una planificación de la enseñanza de este tema matemático que permita a los estudiantes adquirir una comprensión robusta de las ecuaciones lineales enfocada a su resolución. Para ello, las acciones girarán en torno al conocimiento de una profesora de matemáticas en el nivel secundaria a través de un estudio de casos que permita vislumbrar aquel conocimiento necesario para la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Para esto se ha considerado que pueden establecerse de manera fundamental algunos indicadores de conocimiento. Por una parte, respecto al conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) que movilizan los profesores y, por otro lado, también el desarrollo de conocimientos que generan una comprensión robusta en los estudiantes.

Para lo anterior en el capítulo 1 encontramos una descripción detallada de los antecedentes en los que se han considerado elementos relacionados con la planificación de ecuaciones lineales, el conocimiento del profesor, así como también la importancia que tiene esto para su labor docente. En el capítulo 2 encontramos el marco de referencia que sustenta nuestra investigación, detallado en tres aspectos centrales, el marco matemático, el MTSK y el TRU. Posteriormente se presenta el capítulo 3 en el cual planteamos el método con el que se pretende llevar a cabo la investigación y la técnica empleada.

En lo que respecta al capítulo 4 se denota el seguimiento que fue siguiendo nuestra investigación en la cual describimos el planteamiento de los indicadores de conocimiento encontrados y desarrollados, después la descripción de las actividades planteadas a través de esos indicadores y finalmente la descripción de una prueba piloto sobre nuestra propuesta planificada.

Aunado a lo anterior, en el capítulo 5 nos enfocamos en el análisis de las videograbaciones de clase, de la entrevista, así como también de las producciones de los estudiantes. Asimismo, en el capítulo 6 se encuentran descritos los principales resultados de nuestra investigación seguidos de las conclusiones, referencias y anexos.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta la motivación que nos llevó a realizar esta investigación haciendo énfasis en el conocimiento del profesor como elemento principal de su actividad de planificación, así como también algunas dificultades que se han reportado en el aprendizaje de las ecuaciones lineales.

Asimismo, se integra un apartado con referentes donde se destaca la importancia de la planificación, del conocimiento del profesor y de las propuestas que se han generado hasta el momento, seguido de la problemática, problema, pregunta, objetivos e hipótesis de investigación.

1.1 Motivación de estudio

Mi interés en realizar este trabajo se basa en dos razones centrales. La primera es que en mis estudios del nivel secundaria cuando me encontraba aprendiendo el tema de resolución de ecuaciones lineales me causó algunas dificultades el poder entender todos los procedimientos que se hacían para llegar a encontrar el valor de la incógnita. Esta situación no solo lo observaba en mi sino también en algunos de mis demás compañeros, por lo que fue algo que llamó mi atención.

La segunda razón se origina en mis estudios de licenciatura para ser profesor de matemáticas, pues con base en las prácticas profesionales que logré hacer en varias instituciones me di cuenta de que la planificación es un medio importante para que se pueda dar una enseñanza efectiva. Esto me llevó a pensar en cómo el conocimiento del profesor puesto en marcha dentro de su actividad de planificación puede ayudar a impartir una clase de matemáticas más completa. Esta implicación de una clase también nos lleva a pensar en la importancia de hacer una planeación más a conciencia del conocimiento que el profesor debe movilizar en términos de su Conocimiento Matemático y de su Conocimiento Didáctico del Contenido.

1.2 Antecedentes

1.2.1 La importancia del conocimiento del profesor

La educación matemática siempre ha representado un gran reto. La preparación que los profesores deben tener para la enseñanza, así como los niveles de conocimiento que ellos requieren para su tarea en el aula aún no están del todo claros. Sin embargo, a lo largo del desarrollo de la Matemática Educativa como disciplina científica y de varias investigaciones se ha logrado obtener indicios de lo que un profesor necesita saber para impartir una clase sobre un tema específico.

En este sentido autores como Grossman, Wilson y Shulman (2005) hacen una investigación acerca del conocimiento de la materia, lo cual es una parte esencial que requiere dominar el profesor. En esta se destacan 4 dimensiones al respecto. La primera de ellas denominada "**conocimiento del contenido para la enseñanza**" trata de como el conocer la información objetiva, organización de principios y conceptos centrales permite establecer conexiones e interrelaciones entre contenidos matemáticos. La segunda dimensión es el "**conocimiento sustantivo para la enseñanza**", de la cual se destaca conocer los marcos exploratorios o paradigmas que son empleados para la enseñanza de un tópico matemático y que tiene un impacto directo en el cómo y qué los profesores eligen enseñar. La tercera dimensión abordada por los autores refiere al "**conocimiento sintáctico para la enseñanza**" que tiene que ver con la manera en la que se estructura el conocimiento y la forma en la que se piensa es más apropiada para aprender determinado tópico matemático. La cuarta dimensión se centra en las "**creencias de la materia**" que tiene que ver con las creencias que poseen acerca de qué enseñan.

Sin duda alguna, estos autores nos mencionan conocimientos importantes en torno a la enseñanza de las matemáticas y al conocimiento matemático del profesor. Asimismo, podemos mencionar marcos teóricos que se enfocan en intentar describir el conocimiento que el profesor debe poseer para desempeñar su labor en el aula, como lo propuesto por Ball, Thames, y Phelps (2008); Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2018), o en el caso de Schoenfeld (2016) quien menciona algunos elementos a considerar para una enseñanza robusta. Dentro de sus aportes se encuentra una amplia sistematización de categorías, dimensiones y descriptores del conocimiento que se debe atender para poder enseñar matemáticas.

Respecto a este conocimiento señalado, León, Bara y Azocar (2013) realizan un estudio acerca de la competencia del profesor al abordar o enseñar un tema matemático. Se centran en abordar dos referentes teóricos como el Mapa de Enseñanza-Aprendizaje y el análisis didáctico incluyendo cada uno de sus procesos particulares. A través del estudio se logra arribar a que los dos procedimientos antes señalados aplicados a diferentes temas pueden dotar al profesor de capacidades que contribuyan a su competencia de planificación en matemáticas. Estos mismos autores señalan que:

> El profesor de Matemática ha de ser un profesional matemáticamente culto con una formación disciplinar robusta (González, 2000 y 2010). Es decir, debe lograr un conocimiento matemático a un nivel superior (Rico, 2004; Moreno, 2007); pero ese saber que él adquiere es de una naturaleza diferente al de los profesionales de otras carreras como los matemáticos, ingenieros o economistas. Este es un conocimiento proyectivo, en el sentido de que no es para su uso exclusivo, sino para hacerlo llegar a otros a través de la enseñanza (León, Bara y Azocar, 2013, p. 179).

Tales saberes son la base y el fundamento de lo que debieran valerse los profesores para enseñar matemáticas, forman el puente principal con el que estos pueden organizar, plantear y estructurar sus labores educativas en el aula, incluyendo el proceso de planificación. Es por ello por lo que el conocimiento del profesor es importante, pues determina la calidad en que éste provee de aprendizajes a sus estudiantes a través de la enseñanza y de los elementos que considera importantes para su implementación.

1.2.2 Elementos de una planificación

Al hablar de planificación hemos de señalar su importancia y además la visión que se tienen al respecto. Por ejemplo, la Secretaría de Educación Pública (2011) señala que la planificación ha de constituirse como una tarea fundamental para la labor del docente, pues sirve como medio para generar reflexiones sobre las intenciones o metas que se esperan sobre el aprendizaje. Por otra parte, en el plan de estudios de educación básica se hace alusión a ella como "un elemento sustantivo de la práctica docente para potenciar el aprendizaje de los estudiantes hacia el desarrollo de competencias" (SEP, 2011, p. 27).

De lo anterior podríamos cuestionarnos acerca de cómo el profesor planifica y delimita lo que considera necesario al enseñar y cómo hace para llevarlo al aula. Al respecto, Flores (2020) realiza una investigación documental para intentar responder a la pregunta sobre ¿cuáles son los elementos indispensables dentro de la planificación para fomentar competencias en los alumnos?

En esta se afirma que los elementos centrales de la planificación son aquellos que tienen que ver con el currículo, el contexto y un sustento teórico. Además de ello, la autora resalta la importancia de establecer propósitos y una evaluación pensada desde el perfil de egreso, pues eso ayudaría a desarrollar objetivos, generar estrategias y plantear una evaluación de manera articulada a un fin máximo. Esto nos da ciertos elementos como el enfoque y el soporte de las ideas, que se pueden considerar en la integración de una propuesta.

Por otra parte, Cázares (2011) realiza un estudio acerca del uso de la planificación como medio para favorecer la organización del trabajo docente a través de su diseño y aplicación. En este se menciona que el trabajo de planificación implica una construcción de objetivos cognitivos, procedimentales y actitudinales, estrategias y técnicas docentes, experiencias y ambientes de aprendizaje, recursos didácticos y el diseño de instrumentos para la evaluación y coevaluación añadiendo además la instrucción que se adopte. También alude a que la acción docente ha de consistir en tres momentos muy importantes, los cuales son la planificación, la ejecución y verificación. Esto último resalta la pertinencia de la planificación como una base fundamental para la enseñanza en la que el planteamiento de ideas y estrategias es relevante.

Por su parte, Fuentes, González, Graus y Rodríguez (2016) mencionan que la planificación debe englobar elementos del conocimiento de los contenidos que ha de seleccionar, los métodos, las formas organizativas que puede utilizar, así como de los medios y la forma de evaluación. En este mismo trabajo se destaca que la planificación de una clase debe tomar en cuenta la unidad temática, el tema, los objetivos de la clase, los conocimientos previos necesarios, las reflexiones previas, dificultades que se esperan entre otros. Estos elementos pueden servir de referente para el diseño de una planificación de calidad centrada en el conocimiento del profesor de matemáticas.

Mata et al. (2019) por su parte realizan un estudio de grupo focal acerca de las percepciones de algunos profesores sobre la planificación y en la que arriban a la necesidad de establecer objetivos, conocer el contenido y el adoptar una metodología sensible a las diferencias individuales de los estudiantes. También se señala de manera importante que una dificultad reconocida por los profesores es la de ajustar su planeación a las características de cada grupo o incluso a las necesidades particulares de cada estudiante. Esto deja notar la necesidad de un conocimiento más profundo y centralizado de las variables que intervienen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como parte constitutiva de una buena planificación.

En este orden de ideas, Pochulu, D'Andrea y Ferreyro (2019) señalan que el pensar, organizar y evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje requiere dotar de sentido y de profesionalización a todas las acciones educativas y actividades curriculares que se desarrollan en las aulas y en la institución. Estos mismos autores entienden a la planificación como una articulación coherente de 6 elementos o componentes básicos, los cuales son la fundamentación, los objetivos, contenidos, la metodología o estrategias de enseñanza, la evaluación y la bibliografía. Estos conceptos atienden de manera directa a la calidad de las clases que se dan en las aulas y destacan la relación que existe entre lo que sabe un profesor con su forma de planificar y enseñar.

1.2.3 La relación entre el conocimiento del profesor y la planificación

Schoenfeld (2016) ha señalado mediante sus investigaciones algunas guías de instrucción que resaltan como parte prioritaria en el aprendizaje de las matemáticas a la planificación de la enseñanza, considerando dimensiones para una enseñanza que genere una comprensión robusta, las cuales refieren al contenido, la complejidad, el acceso equitativo, el involucramiento de los estudiantes, así como la evaluación formativa. Este autor atiende a la idea de que sus contribuciones están lejos de ser una receta que se sigue fielmente en la planificación o la enseñanza como tal, lo cual implica la organización personal que en este caso el profesor de a un conocimiento específico tomando como base sus conocimientos y los elementos propuestos en la teoría.

El intento razonable por la búsqueda del conocimiento del profesor necesario para la labor de enseñar matemáticas se ha vuelto una cuestión de análisis en relación con la planificación. Ciertamente y como lo señala Mata, Alfonso, Rodríguez, Gutiérrez y Pérez (2019),

> la planificación posee significados diversos para los maestros, pero forma una estructura común ya que sigue una serie de pasos o etapas para establecerla que son afines y que a su vez son apreciados de maneras distintas por cada uno (p. 11)

Esto resalta que los profesores no tienen un conocimiento unificado, por ello la enseñanza que pueden generar de un tópico matemático siempre está sujeta a un grado de efectividad distinto derivado de sus conocimientos sobre lo que se enseña y de los objetos matemáticos que se ponen en juego.

La enseñanza de las matemáticas es demasiado compleja en el sentido estricto, pues requiere tener visión de diferentes perspectivas (teóricas y prácticas). Sobre esto, Cázares (2011) señala que

> El papel y la responsabilidad de los docentes en el proceso de planificación, requiere que todos posean los conocimientos y las competencias necesarias para ser buenos planificadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje en su nivel de competencia directa: el aula. (p. 30)

Es aquí donde logramos identificar la importancia del conocimiento del profesor como algo necesario, fundamental y trascendental a la hora de enseñar las matemáticas escolares, lo cual incluye todas sus tareas educativas y esencialmente el proceso de planificación. El conocimiento del profesor y el proceso de planificación están íntimamente ligados, pues "cuando el profesor de matemáticas en formación planifica una unidad didáctica referida a un contenido matemático, utiliza y construye conocimiento sobre cómo enseñar matemática" (Mora y Ortiz, 2013, p. 381).

1.2.4 Secuencias o planeaciones elaboradas sobre ecuaciones lineales

Con respecto al tema de ecuaciones lineales, podemos mencionar que ha significado una gran evolución en los aportes a la manera en la que vemos el mundo, pues a través de ellas se ha podido explicar y representar algunos fenómenos o situaciones, por ejemplo, el estudiar costos, ofertas o consumos, lo cual son situaciones de la vida cotidiana. Es por ello por lo que la comprensión de estas debe ir encaminada no solo en la resolución de problemas, sino también en el razonamiento que hay detrás de cada paso y esto debe promoverse en cada secuencia o propuesta de enseñanza.

Por lo anterior, la planeación ha sido un instrumento y un medio por el cual los profesores ponen en juego diversos conocimientos para intentar desarrollar una buena comprensión en los estudiantes. Schoenfeld (2016) plantea en sus investigaciones algunas descripciones de atributos que deben prevalecer en la enseñanza, con el fin de que se promueva un aprendizaje equitativo y robusto y con ello poder convertir a los estudiantes en pensadores disciplinarios, conocedores, flexibles e ingeniosos.

Con base en el objetivo anterior se han llevado a cabo diferentes propuestas que intentan desarrollar mejores conocimientos en los alumnos. Tal es el caso en De Moreno y De Castellanos (1997) quienes realizan el diseño de secuencia de actividades para enseñar a resolver ecuaciones lineales. En esta se llevó a cabo un análisis previo acerca de aspectos del conocimiento matemático (conceptos y procedimientos involucrados), del aprendizaje (conocimientos previos y errores más comunes) y la enseñanza del tema conforme a la forma tradicional en la que se ha presentado el tema y su relación con los errores identificados.

Después de que los autores desarrollaron y aplicaron su propuesta arribaron a un logro en el desarrollo de la habilidad para despejar la incógnita, pero se presentaron algunos errores típicos que no se atendieron; el primero trata sobre los errores que se originan en la transición conceptual de la aritmética al álgebra y el otro tiene que ver con el aprendizaje deficiente de conceptos previos. De ello, los autores destacan como necesario explorar y reforzar el nivel de prerrequisitos que se consideraron desde el inicio y además indagar acerca de la forma en la que se presentan las actividades o indicaciones, pues lo que se les plantea a los alumnos no es necesariamente lo que ellos comprenden.

Por su parte, Rivera, García y Navarro (2010) elaboran una planificación que coadyuve a entender ecuaciones de primer grado partiendo de situaciones dadas en el lenguaje común y el lenguaje algebraico y viceversa. Para ello se hace uso de la Teoría de Situaciones Didácticas en la que un primer momento fue el identificar el problema a atender siendo éste la resolución de ecuaciones lineales como tal. Posteriormente se realizó un análisis epistemológico, cognitivo y didáctico sobre la traducción del lenguaje común al algebraico para así realizar el diseño de la secuencia, aplicarla y analizar los resultados.

De los resultados se obtuvo que a partir del análisis cognitivo hubo un mejoramiento en el reconocimiento del uso parcial de la incógnita, la interpretación de expresiones algebraicas, así como la importancia del manejo de un lenguaje apropiado tanto coloquial como matemático. De ello también se destacó como problemática el compromiso de los alumnos hacia las actividades, además de que no se logró hacer el cambio del lenguaje algebraico al común. Hizo falta entonces el considerar un análisis previo mejor desarrollado y variables didácticas para el control de grupo, la motivación y la gestión de tiempos.

Por otro lado, Serrano, Moreno, Santoyo, Hernández, Gutiérrez y Lupiáñez (2012) realizan la planificación, implementación y evaluación de una unidad didáctica del tema de ecuaciones lineales. Para ello se apoyaron de varios análisis acerca del contenido (selección y organización de conceptos y procedimientos, así como diferentes representaciones), aspectos cognitivos referidos a la organización y expectativas (capacidades, objetivos y competencias, así como caminos de aprendizaje y limitaciones como errores o dificultades), de instrucción (haciendo una selección de un material para cada actividad) y de actuación (haciendo el diseño de instrumentos de evaluación de la unidad didáctica acerca del desempeño de los alumnos y del profesor).

Dentro de los resultados obtenidos por los autores se destaca que las expectativas del progreso fueron demasiado altas, pues no se consideraron tiempos para algunos recursos o materiales y no se previeron correctamente los conocimientos anteriores al tema, además de que no se diseñaron instrumentos para el análisis de lo actitudinal de los estudiantes. Como fortalezas se detectaron que el contexto escolar identificado permitió una buena adaptación, el tema fue coherente con el plan de estudios, los materiales fueron adecuados y la prueba diagnóstica permitió identificar lo que sabían los estudiantes. Además de lo dicho anteriormente hizo falta analizar el número de sesiones y el tiempo correspondiente a cada una de ellas.

Por su parte, Soto (2017) desarrolla una propuesta didáctica planificada para el trabajo de ecuaciones de primer grado y para ello se tomó como referente el Análisis Didáctico propuesto por Rico (2013), con ello se realizó un análisis conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y evaluativo. Esto se complementó por medio de un análisis a priori de la descripción sobre las posibles respuestas de los alumnos, las estrategias, las dificultades o errores en sus tres momentos por sesión (inicio, desarrollo y cierre).

De los resultados obtenidos por la autora se destaca la reflexión que conlleva el mismo diseño metodológico, pues permite tener elementos a considerar para poner a disposición de investigadores y docentes, además de proveer una secuencia de clases que puede ser desarrollada y adaptada en diferentes contextos educativos e investigativos. La evidencia que se obtuvo en conjunto con la discusión acerca de ella se constituye como los principales elementos que justifican tanto los objetivos como las tareas de aprendizaje presentes en cada planificación.

El mayor aporte expuesto por la autora es el de un proceso cíclico-reflexivo, pues permite conocer cómo se trabaja el objeto matemático tanto en el currículo como en los textos escolares además de las limitaciones de aprendizaje reportados por otras investigaciones respecto a la resolución de ecuaciones. A lo anterior se añade que el análisis a priori elaborado no fue del todo completo y preciso en cuanto a prever de manera consciente cómo los estudiantes podrían enfrentarse a la tarea propuesta.

Algunas otras investigaciones como las de Guzmán y Huertas (2020) hacen uso de diferentes conocimientos para desarrollar una propuesta planificada o secuencia didáctica con fundamentos en la Teoría de Situaciones Didácticas. En esta investigación se plantea únicamente como objetivo únicamente el desarrollo de la secuencia, pero en otros casos como los anteriores citados se aplica en el aula, por lo cual esta puesta en marcha de las consideraciones cobra especial relevancia en el sentido de que puede verificarse si se logra el objetivo final que se pretende.

1.3 Reflexión

Lo anteriormente expuesto da un panorama general de algunas propuestas de planificación que se han generado en torno a la enseñanza de las ecuaciones, destacando los distintos marcos de referencia utilizados con el objetivo de consolidar un buen aprendizaje. Con base en ello, en algunos casos se tienen buenos resultados en cuanto a lo matemático, pues si se llega a completar algunas o la mayoría de las actividades propuestas, o en casos diferentes solo se proponen, pero no se implementan las secuencias.

A partir de esto, podemos notar que no se tiene un equilibrio en el conocimiento del profesor, puesto que como se observa en los antecedentes se adquieren diferentes análisis y elementos didácticos y matemáticos que se creen importantes para la enseñanza de las ecuaciones lineales y los cuales pueden o no funcionar para el propósito que se pretende. Aunado a esto, se puede señalar que en ese trayecto pueden pasar desapercibidos algunos elementos importantes o dejar de lado cosas inherentes al proceso de enseñanza, ya sea de la didáctica o de la matemática en general. El no conocer o tener un control sobre lo que se implementa le hace cometer errores al no reconocer alguna forma de aprendizaje de sus estudiantes y cómo a su vez las enseñanzas pueden potencializarse.

1.4 Planteamiento del problema de investigación

1.4.1 Problemática

La enseñanza del álgebra históricamente siempre ha representado grandes retos para su apropiación y enseñanza por parte de los profesores de matemáticas. La manera en que estos presentan los contenidos como lo hemos visto en nuestros antecedentes, en este caso el de ecuaciones lineales permite observar de manera práctica algunos saberes de dominio general de los profesores de matemáticas tales como los elementos o componentes de las ecuaciones, formas de resolución, de representación, así como también formas de organizar y generar una enseñanza. Este dominio de conocimiento, el nivel de exigencia y actividades propuestas favorece o limita el aprendizaje de los estudiantes en cierta medida en cuanto a que, si el profesor no conoce por ejemplo a profundidad el contenido matemático, difícilmente conseguirá que sus estudiantes logren un aprendizaje robusto, lo cual significa el tener oportunidad de lograr aprender con mayor profundidad y riqueza las ecuaciones lineales.

Uno de los elementos que se consideran como relevantes dentro de esa profundización del tópico matemático señalado es la planificación de una propuesta de enseñanza y aprendizaje. Esta actividad dentro de la literatura advierte una profundización para los dominios de conocimiento del profesor. El dominar aquellas variables que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje no ha sido una tarea fácil.

Ball et al. (2008) dentro de sus aportaciones señalan cuatro categorías para el conocimiento del profesor que surgen del análisis de la práctica: Conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y del estudiante y conocimiento del contenido y de la enseñanza. De estos elementos resaltamos el concepto de especializado como el uso de conocimientos y habilidades que requiere el profesor en su trabajo más allá del conocimiento común. Al respecto, no se encontró una planificación en la que se hiciera uso o aplicación del conocimiento especializado del profesor y además que genere una comprensión robusta en los estudiantes, por lo cual esta investigación centra su atención en este sentido.

La base de las planificaciones para la enseñanza de las ecuaciones lineales ha dejado grandes avances en cuanto a la formulación y estructuración de tareas para los alumnos. También han dejado algunos indicios de lo que han usado teóricamente y lo que falta por mejorar. En este sentido, resalto la coincidencia de algunos trabajos revisados en cuanto a la necesidad de obtener un conocimiento más profundo de los elementos necesarios para enseñar matemáticas.

Es entonces una necesidad el poder focalizar en los conocimientos indispensables para el profesor de matemáticas. En este sentido, en el Marco del modelo MTSK se desarrollan diferentes dimensiones de conocimiento del profesor de matemáticas que pueden fungir como guía para el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas. Esta propuesta señala la existencia de un conocimiento especializado del profesor de matemáticas dando características de las dimensiones que componen dicho saber.

Bajo estas ideas es que nos centramos en la problemática que será presentada en la siguiente sección.

1.4.2 Problema/pregunta

La falta de una planificación integrada desde el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para lograr una enseñanza que genere comprensión robusta de ecuaciones lineales en alumnos de secundaria.

¿Cómo diseñar una planificación integrada desde el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para lograr una enseñanza que genere comprensión robusta de ecuaciones lineales en alumnos de secundaria?

1.4.3 Objetivo general y objetivos específicos

Objetivo General. - Elaborar una planificación que integre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para lograr una enseñanza que genere comprensión robusta de ecuaciones lineales en alumnos de secundaria.

Objetivos específicos:

- Identificar los elementos que conforman el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la enseñanza y además que generen una comprensión robusta.
- Crear indicadores del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y de una comprensión robusta.
- Diseñar una planificación sobre ecuaciones lineales que considere elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.
- Aplicar la planificación obtenida y valorar su calidad para hacer mejoras y contrastar las observaciones iniciales.

1.5 Hipótesis

A partir de lo visto podemos intuir que el conocimiento del profesor acerca de cómo plantear y planificar una propuesta de enseñanza sobre las ecuaciones lineales se basa principalmente en un análisis a priori de aspectos matemáticos, epistemológicos, cognitivos y didácticos. Aun así, se carece de una articulación entre variables que intervienen en el proceso de enseñanza por lo que hace falta ver de qué manera se pueden integrar estos, además de encontrar la forma en que se ponen en juego esos elementos que den pauta a realizar una mejor intervención en el aula de clase y con ello desarrollar una enseñanza que genere una comprensión robusta de ecuaciones lineales en los estudiantes.

El diseño de una planificación desde el conocimiento especializado del profesor de matemáticas aunado con aquellos elementos en torno a cómo generar una comprensión robusta en los estudiantes debe partir de predisposición al análisis y al cambio constante para mejorar su práctica profesional. Esta debe abordar de manera fundamental e integrada la comprensión de diversos dominios, categorías y dimensiones de conocimiento que permitan al profesor organizar y comprender las matemáticas que propone a sus educandos.

1.6 Justificación

Las investigaciones revisadas hasta el momento han permitido observar la relación e importancia del conocimiento del profesor al realizar la tarea de planificar la enseñanza de las matemáticas. Al hablar de las planificaciones de enseñanza de las ecuaciones lineales, las investigaciones han mostrado por una parte la necesidad de poder profundizar más en aquellos elementos que son inherentes al proceso, lo cual es el análisis a priori y del contenido matemático. Asimismo, los autores sugieren el poder integrar más saberes que puedan ayudar a complementar la enseñanza, pero no se mencionan cuáles serían o podrían ser algunos de estos, solo se pone de manifiesto que existe tal necesidad.

La importancia del conocimiento del profesor radica precisamente en la incorporación de nuevos elementos que puedan desarrollar en los profesores altos índices de reflexión que le permitan realizar sus tareas de enseñanza con mayor calidad. De esto se atiende a la idea de que el profesor debe ser competente en su labor. Al respecto, Mora y Ortiz (2013) señalan que,

> Las capacidades que caracterizan esta competencia, se vinculan directamente con aprender a enseñar matemáticas, pues cada una de ellas involucra procesos de reflexión sobre qué enseñar, qué fenómenos están vinculados al concepto, cuáles son las expectativas de aprendizaje, qué competencias desea que el estudiante desarrolle, cuáles son los posibles errores y dificultades que deben abordar con los estudiantes, qué estrategias de enseñanza utilizar, qué tareas proponer, qué recursos utilizar, qué estrategias de evaluación son adecuadas, entre otros. (p. 382)

Es a partir de esto donde se reconoce que el conocimiento del profesor al enseñar las ecuaciones de primer grado debe integrar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, pues en este se sugieren dominios de análisis con los que se puede primero reconocer el conocimiento que se tiene y también aquellos saberes que pueden integrarse a la planificación para hacerla más completa.

Por esto, en este estudio se hace uso del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas desarrollado por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2018) para detallar a profundidad cuáles son esos saberes que permiten integrarse dentro de una planificación didáctica de las ecuaciones de primer grado dadas las dimensiones del saber del profesor respecto a su conocimiento matemático (MK) y su Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK).

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este apartado se presentan los referentes teóricos que dan sustento a las acciones dentro de la misma investigación, tales como el objeto matemático en cuestión, el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés) y el Marco de Enseñanza para una Comprensión Robusta (TRU por sus siglas en inglés), seguido de una pequeña reflexión sobre la integración de estos elementos.

2.1 Fundamento matemático

Antes de poder definir el concepto que ha de ser objeto de estudio en esta investigación es importante entender primero algunos conceptos que le preceden, ya que estos forman parte del sustento de su significado y que justifican los procedimientos para resolver una ecuación lineal.

Uno de ellos es la existencia de diferentes conjuntos de números que nos permiten operar en determinado momento. De esto hablaremos primero de los **números naturales**. Según Bello (1999) son aquellos que comúnmente usamos para contar y están representados por:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$$

Este conjunto de números está delimitado a los enteros positivos. Existen, sin embargo, problemas que no pueden ser resueltos dentro del conjunto de los números naturales, por ejemplo, si intentamos resolver la ecuación

$$x + 10 = 1,$$

esto no es posible si solamente nos encontramos trabajando con números naturales. Por razones como esta es necesario crear un nuevo conjunto de números que incluya a los naturales, a sus negativos y al cero. Este nuevo conjunto de números son los **enteros** representados por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Al estar trabajando con estos conjuntos de números nos hemos de encontrar algunas situaciones en las que el valor que satisface la ecuación puede ser solo una parte de un número entero, por ejemplo, si intentamos resolver la ecuación

$$2x = 3,$$

tal situación nos proporciona un nuevo campo de números que no son retomados por los conjuntos anteriores. Estos son los **números racionales**, los cuales Ress et al. (1991) los definen como el cociente de dos números enteros, con la excepción de que el denominador no puede ser cero debido a que no está definida (p. 6). Estos engloban a los números naturales y enteros, además se pueden representar de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{a}{b} / \text{a, b} \in \text{Z};\ \text{b} \neq 0\}$$

Sin embargo, dada la existencia de números que no pueden representarse por medio del cociente de dos números enteros, como por ejemplo el valor de π o de la raíz cuadrada de $\sqrt{2}$. Estos son conocidos como el conjunto de los **números irracionales** y pueden representarse de la siguiente manera:

$$\mathrm{I} = \{x \neq \frac{a}{b} / \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{Z};\ \mathrm{b} \neq 0\}$$

Todos los conjuntos anteriores están contenidos dentro de los **números reales**. Es el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales y se designa con la letra **R**. Todo lo anterior lo resumimos dentro de la imagen 1.

Conjunto de los números reales

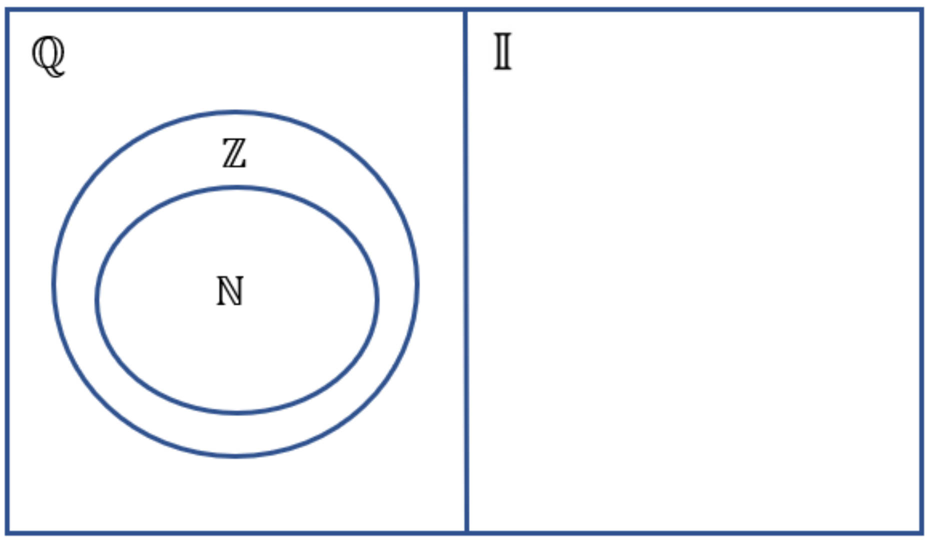


Imagen 1. Conjuntos de números. Fuente: Elaboración propia.

De lo anterior es muy importante señalar que hasta el momento se han descrito los conjuntos de números que pertenecen a los reales, por lo que cabría aclarar que en el nivel secundaria únicamente se trabajan con los conjuntos de los naturales, enteros y racionales, pero es relevante que el profesor los conozca. Aunado a esto, desde nivel primaria se acostumbra a trabajar con operaciones básicas que relacionan a los conjuntos de números por medio de diferentes propiedades para la suma y multiplicación, las cuales se presentan a continuación.

Propiedades de las operaciones que facilitan el trabajo con ecuaciones lineales

<u>Suma</u>:

Propiedad asociativa de la suma. Esta refiere a la posibilidad de agrupar algunos sumandos de cualquier forma que queramos sin que esto afecte a la suma. Por ejemplo, al sumar $17 + 98 + 2$ podemos establecer el siguiente orden $(17 + 98) + 2 = 17 + (98 + 2)$ y nos damos cuenta de que el resultado es el mismo (Bello, 1999, p. 65). Este hecho puede establecerse de la siguiente manera:

$a + (b + c) = (a + b) + c$ para cualquier número $a, b\ y\ c$.

Propiedad conmutativa de la suma. Esta propiedad nos indica que el orden en el que realizamos las sumas no afecta en su resultado. Por ejemplo, $2 + 3 = 3 + 2$ y se puede expresar de la siguiente manera:

$a + b = b + a$ para cualquier número a y b.

Propiedad de identidad para la suma. Esta propiedad nos indica que si sumamos 0 a un número, este queda sin alteración alguna. Esta afirmación puede representarse de la siguiente manera:

$a + 0 = 0 + a = a$ para cualquier número a.

Propiedad de inverso aditivo. Esta propiedad define que para todo número a existe otro $-a$, tal que es llamado su inverso aditivo, tenemos que:

$$a + (-a) = (-a) = +a = 0$$

Multiplicación:

Propiedad asociativa de la multiplicación. Para este caso de forma similar al anterior, en esta la manera en que agrupamos los números tampoco importa dado que el resultado no se modificará. De esto podemos decir que el orden de los factores no altera el producto y se puede establecer de la siguiente manera:

$a * (b * c) = (a * b) * c$ para cualquier número a, b y c.

Propiedad conmutativa de la multiplicación. Esta propiedad nos indica que el orden en el que realizamos las multiplicaciones no afecta en su resultado. Por ejemplo, $5 * 4 = 4 * 5$ y se puede expresar de la siguiente manera:

$a * b = b * a$ para cualquier número a y b.

Propiedad de identidad para la multiplicación. Según esta propiedad, si multiplicamos un número por 1 este permanece sin ninguna modificación. Decimos entonces que el número 1 es el elemento identidad para la multiplicación y se representa de la siguiente manera:

$a * 1 = 1 * a = a$ para cualquier número a.

Propiedad de inverso multiplicativo. El inverso aplicado en la multiplicación se traduce en que para cada número a (excepto el 0), existe otro número $\frac{1}{a}$ llamado inverso multiplicativo (o reciproco), tal que:

$$a * \frac{1}{a} = 1$$

Propiedad distributiva. Esta propiedad nos indica que si multiplicamos un número por una suma se puede realizar de la siguiente manera. Por ejemplo: $7 * (5 + 4)$ puede expresarse para resolverse como $(7 * 5) + (7 * 4)$. De esta forma la multiplicación distribuye a la suma de la siguiente manera:

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \text{para cualquier número } a, b \text{ y } c.$$

Todos estos conjuntos y propiedades de números dan pie a la forma en que se pueden resolver las ecuaciones lineales. Entenderemos entonces, en términos de lo que menciona Bello (1999) que una ecuación lineal es una afirmación que establece que dos expresiones son iguales (p. 79). Esta puede representarse como:

$$ax + b = c \qquad \text{donde a, b y c son números reales, además } a \neq 0.$$

La ecuación lineal en su representación algebraica está conformada por varios elementos que se muestran en la imagen 2.

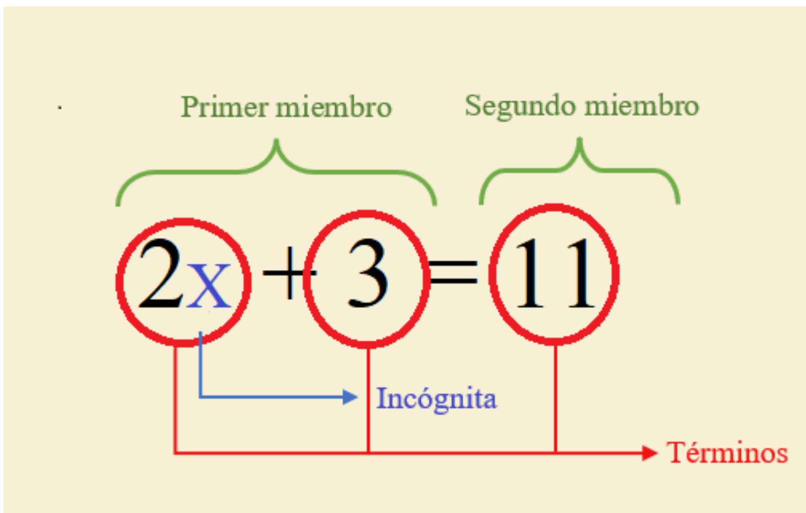


Imagen 2. Elementos de una ecuación lineal. Fuente: elaboración propia.

2.2 El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) como modelo puede tener dos propósitos, el primero es que puede verse como una propuesta teórica que modela el conocimiento central y profesional del profesor de matemáticas. Asimismo, cada una de las categorías de los subdominios que lo conforman puede servir como una herramienta metodológica que permite analizar las prácticas del profesor de matemáticas.

El MTSK propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2018) surge a partir del análisis de varios modelos que se enfocan en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, principalmente como respuesta a aquellas dificultades detectadas en el MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008). Este modelo en particular adquiere un carácter especializado del profesor de manera integral en todas las subdimensiones que lo conforman y evita incluir referentes externos (conocimiento de otras profesiones). Asimismo, retoma la separación que propone Shulman (1986) en dos dominios de conocimiento (conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido matemático) y provee de contenido a cada uno de éstos con tres subdominios y diferentes categorías internas.

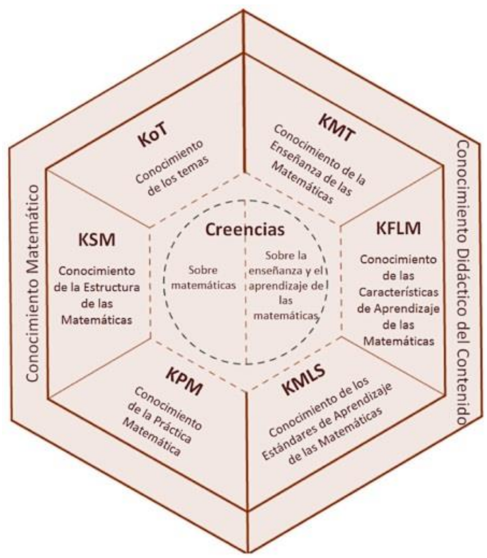


Imagen 3. Dominios del MTSK (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2016, p. 154).

El MTSK como modelo analítico implica dos grandes entes de conocimiento cuyo origen y medios de validación difieren entre sí (véase imagen 3). Por una parte, considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de las matemáticas como disciplina científica en un entorno escolar. En el modelo, esto adquiere el nombre de MK (Mathematical Knowledge). Se considera también otro dominio que refiere al conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje. Este último adquiere el nombre de PCK (Pedagogical Content Knowledge) (Carrillo et al., 2018). Las categorías presentadas en cada subdominio surgen de la reflexión teórica y de los datos empíricos con los que se ha trabajado hasta el momento. A esto se añade un tercer dominio llamado creencias las cuales pueden ser sobre las matemáticas o sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, aunque éste aún no se encuentra categorizado.

2.2.1 Conocimiento matemático (MK)

Una parte esencial en el saber del profesor es el conocimiento de las matemáticas que se enseñan. Por tanto, es necesario plantearse como objeto de estudio saber qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas. Por ello, en este dominio se describen tres subdominios que dan sentido al conocimiento matemático: el conocimiento robusto del contenido matemático en sí (conocimiento de los temas matemáticos), de su estructura (conocimiento de la estructura matemática) y de cómo se conduce y se hacen matemáticas (conocimiento de la práctica matemática).

Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)

El profesor debe conocer los contenidos que enseña a sus estudiantes. Para describir qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, en el MTSK se considera el KoT, el cual supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. Se integra el contenido que queremos que aprenda el alumno y permite la consideración de un conocimiento con un nivel de profundización mayor al esperado para los alumnos.

Este subdominio se compone de cinco categorías que pueden emplearse de manera indistinta al tema que este abordando el profesor. La categoría ***Fenomenología*** tiene un carácter bivalente. Por un lado, considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de modelos atribuibles a un tema, vistos como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, entre ellos, los que aparecen en la génesis del propio concepto. Por otro lado, se considera el conocimiento que tiene acerca de usos y aplicaciones de un tema. Otra categoría es el conocimiento de las ***Propiedades y sus fundamentos*** atribuibles a un tema o procedimiento matemático en particular. La categoría de ***Registros de representación*** abarca el conocimiento del profesor acerca de las distintas formas de representar un tema abordado (numérica, gráfica, verbal, analítica, etcétera), así como la notación y el vocabulario apropiado al uso de dichas representaciones. Por otra parte, la categoría de ***Definiciones*** considera el conocimiento del conjunto de propiedades que hacen definible a un objeto matemático además de las formas alternativas que utilice el profesor para esta tarea. Finalmente, la categoría de ***Procedimientos*** abarca el conocimiento de los algoritmos convencionales y alternativos, además de resaltar las condiciones para proceder y las características que tendría el objeto resultante asociadas a un tema.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM)

Su configuración se describe principalmente a través de las conexiones que pueden establecerse en la matemática, específicamente las intramatemáticas. De manera específica este dominio refiere al conocimiento de las relaciones que el profesor hace entre distintos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013) y sobre todo también entre niveles educativos.

En este subdominio se proponen cuatro categorías de conexiones matemáticas. La primera denominada ***Conexiones de Complejización*** que refiere a la relación entre los contenidos enseñados con los posteriores y mantiene una visión expuesta por Klein (1933) en donde un punto de partida para el conocimiento avanzado es la proyección de los contenidos enseñados como potenciadores para futuros. Por otra parte, la categoría de ***Conexiones de Simplificación*** relaciona tanto los contenidos que se han enseñado con los previos. Puede verse de manera avanzada dentro de una retrospección de los contenidos enseñados que son a su vez potenciados por los previos. La siguiente categoría propone las ***Conexiones de Contenidos Transversales*** en las que existe una cualidad común entre contenidos que les relaciona, incluyendo los modos de pensamiento que conservan esta misma característica. No se trata de temas más simples o complejos, sino de aquello que subyace comúnmente entre temas matemáticos. La cuarta categoría atiende a las ***Conexiones Auxiliares*** en las que se refleja el uso de temas u objetos matemáticos para desarrollar otros, no como parte de su misma estructura matemática sino más bien como complementarios para hacer matemáticas.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

En este se destaca la importancia de que el profesor conozca de manera fundamental las formas de proceder y las características del trabajo en matemáticas, incluido los resultados matemáticos que ya están establecidos en la jerga (conocimiento considerado en el KoT). Atiende a cuestionamientos sobre cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas; cómo establecer relaciones, correspondencias y equivalencias; cómo se argumenta, se razona y se generaliza; qué papel tiene dicha relación y qué cualidades poseen los elementos con los que se hacen matemáticas (como una definición o una demostración).

Se plantean dos categorías para este subdominio que difieren entre sí, por el conocimiento relacionado a la matemática en general y el ligado a la idea de temática en matemáticas. La primera atiende a las ***Prácticas ligadas a la Matemática en General*** que aborda un tipo de conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto abordado. Se trata de, por ejemplo, conocer las condiciones necesarias y suficientes o incluso saber las cualidades de una definición. Su importancia radica en la posible apropiación de estructuras lógicas de pensamiento que ayudan a entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos. Por otro lado, la segunda categoría describe las ***Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas*** y está asociada al conocimiento y uso de las peculiaridades de un tema en cuestión. Se aborda también cuestiones de tipo heurísticas aplicados de manera estratégica a tópicos matemáticos en las que interviene una memorización de lo que debe desarrollar o de un razonamiento más profundo de su uso.

2.2.2 Conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Este dominio destaca una característica especial (o conjunto de ellas), pues hace evidente un conocimiento que es propio y particular de un profesor para su labor de enseñar Matemáticas. Su importancia radica en el reconocimiento de la necesidad de que el profesor conozca el contenido matemático desde el punto de vista de un contenido a enseñar (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas), desde el punto de vista de un contenido a aprender (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas) y desde una perspectiva general de los estándares de aprendizaje que se pueden o pretenden alcanzar (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas).

Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM)

En este subdominio se abordan conocimientos sobre las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático. Su foco principal es el contenido matemático como objeto de aprendizaje, sin dejar de lado el papel del estudiante. Se aborda cuatro categorías, la primera refiere a las ***Formas de Aprendizaje***, con la cual se reconoce el conocimiento que tiene el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. En esta se incluyen los conocimientos sobre estructuras, teorías personales o institucionalizadas sobre el desarrollo cognitivo del estudiante tanto para la matemática en general como para contenidos particulares. La categoría de ***Fortalezas y Dificultades asociadas al Aprendizaje*** comprende el conocimiento del profesor sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas específicos, así como las ventajas y potencialidades que podrían aprovecharse para el aprendizaje relacionados con la naturaleza misma de la matemática o contenido en particular. La categoría de conocimiento sobre las ***Formas de Interacción de los Alumnos con el Contenido Matemático*** se refiere a aquel saber del profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales, así como los conocimientos acerca del posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un determinado contenido. Por último, la categoría de ***Concepciones de los Estudiantes sobre Matemáticas*** aborda el saber que posee el profesor sobre las expectativas e intereses que tiene los estudiantes con respecto a las matemáticas.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Este subdominio considera el conocimiento del profesor acerca de lo que deben aprender los estudiantes y el nivel conceptual con el que se espera que lo aprenda en un determinado momento escolar. Asimismo, se destaca el saber acerca de materiales y programas que sirven como herramienta de trabajo para los profesores. Se consideran tres categorías, la primera refiere a los conocimientos del profesor acerca de qué ***Contenidos Matemáticos se requieren Enseñar*** en un determinado grado, los cuales pueden obtenerse al consultar un documento rector o por abstracciones de las capacidades matemáticas que requiere desarrollar en los estudiantes. La segunda categoría considera el ***Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental esperado***, esto es los niveles de abstracción, Complejización, etc., de un tema matemático en un determinado momento escolar. La categoría denominada ***Secuenciación de Diversos Temas*** refiere al orden de relación al abordar tópicos dentro de un mismo curso o cursos anteriores (conocimientos y capacidades previas que tiene un estudiante para enfrentar tareas) o de cursos posteriores (conocer las potencialidades que debe desarrollar para un determinado tópico).

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Este subdominio aborda el conocimiento de recursos, materiales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado. Se aborda entonces, conocimientos intrínsecamente dependientes de los contenidos matemáticos. No se trata de conocimientos matemáticos por un lado y de la enseñanza por otro, sino que se incluyen tan solo aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. Se reconoce la categoría de ***Formas de Enseñar*** que refiere al conocimiento del profesor acerca de teorías de enseñanza personales o institucionalizadas dentro de la educación Matemática. Se abordan también conocimientos acerca de las potencialidades que pueden tener algunas actividades, estrategias o técnicas didácticas asociadas a un contenido matemático, así como los alcances que estas poseen, esto es el conocimiento sobre analogías, ejemplos típicos, metáforas, explicaciones, etcétera, que los profesores visualizan como potentes para abordar un determinado contenido matemático. Una segunda categoría nos habla del conocimiento de ***Recursos y Materiales*** asociados al contenido a enseñar y considera el saber del profesor sobre los recursos y materiales en sí mismos y los beneficios o dificultades asociados al uso de éstos como apoyo para la enseñanza de un contenido matemático.

El interés por tanto de esta investigación radica en describir los conocimientos mínimos necesarios para diseñar una planificación para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. Esto se encuentra directamente relacionado con el dominio PCK centrándose en el subdominio KMT y sus categorías, especialmente la que tiene que ver con las formas de enseñar. No se trata de dejar de lado a los demás subdominios sino de ver de qué manera se pueden integrar a nuestra propuesta. En este sentido, en términos de la planificación no hablamos de obtener con ella cualquier enseñanza sino de una que genere comprensión robusta, para lo cual hemos de describir algunos de sus elementos.

2.3 Marco de enseñanza para una comprensión robusta (TRU)

Este marco para la enseñanza es desarrollado por Schoenfeld (2016) con la intención de proveer indicios que den respuesta a la pregunta sobre cuáles son los atributos de los entornos de aprendizaje equitativos y robustos, es decir, de entornos en los que los estudiantes reciben apoyo para llegar a ser expertos en la materia, flexibles e ingeniosos.

El sustento de este marco radica en grandes investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje, de los aportes hacia lo que debería estar sucediendo en el aula y de una amplia gama de marcos para observar las aulas. La idea central de esta propuesta es ver de manera organizada ese conocimiento de modo que sea más fácil para al profesor entenderlo, organizarlo y utilizarlo.

Para ello se proponen cinco dimensiones (Tabla 1) que caracterizan a la calidad de un entorno de aprendizaje en la medida de que se proporcionan a los estudiantes oportunidades a lo largo de las siguientes cinco dimensiones:

Cinco dimensiones para lograr una comprensión robusta				
El contenido	Demanda Cognitiva	Acceso equitativo al contenido	Agencia, propiedad e identidad	Evaluación formativa
La medida en que la estructura de las actividades del aula brinda oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinarios conocedores, flexibles e ingeniosos.	El grado con el cual los estudiantes tienen oportunidades de atacar y de tener sentido de las ideas disciplinarias importantes y de su uso. Los estudiantes aprendan mejor cuando son desafiados en formas que proporcionan espacio y el apoyo para el crecimiento.	La medida en que las estructuras de las actividades del aula invitan y apoyan al compromiso activo de todos los estudiantes en el aula con el contenido disciplinario central que está siendo abordado en el aula. Las aulas en las que un pequeño número de estudiantes obtienen la mayor participación no son equitativas.	La medida en que se ofrece a los estudiantes la oportunidad de caminar sobre la marcha del mismo contenido, para contribuir a las conversaciones sobre ideas disciplinarias, para construir sobre las ideas de los demás y hacer que otros construyan sobre las suyas.	El grado en que las actividades de los estudiantes y las interacciones subsiguientes responden a esas ideas, aprovechando los comienzos productivos y abordando los malentendidos emergentes.

Tabla 1. Cinco dimensiones del TRU. Retomado de Shoenfeld (2016). Traducción propia

La primera refiere a la riqueza de los conceptos y prácticas disciplinares (el contenido) disponibles para el aprendizaje; la demanda cognitiva es la toma de sentido de los estudiantes y la "lucha productiva"; la siguiente es el acceso significativo y equitativo a los conceptos y prácticas para todos los estudiantes; la cuarta refiere a los medios para construir identidades disciplinarias positivas a través de presentar, discutir y refinar ideas y finalmente la última trata sobre la capacidad de respuesta del entorno al pensamiento estudiantil.

Estas dimensiones focales tienen algunas propiedades, por ejemplo, cada una es considerada como vasta y completa siendo que, si se basa la enseñanza en ellas entonces los estudiantes que emerjan de estos entornos serán pensadores y se volverán expertos, flexibles e ingeniosos. Por otro lado, cada una de las cinco dimensiones puede ser el centro de un desarrollo profesional coherente. Asimismo, el conjunto de éstas proporciona un lenguaje y un marco para investigar la instrucción y sobre cómo mejorarla, además de que están fuera de ser una receta que les dicen a los maestros lo que deben hacer.

Dimensión 1: El contenido

En la medida que la estructura de las actividades del aula brinda oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinarios expertos, flexibles e ingeniosos (Schoenfeld, 2016). Las discusiones son enfocadas y coherentes, proporcionando oportunidades para aprender ideas, técnicas y perspectivas disciplinarias, hacer conexiones y desarrollar hábitos disciplinarios productivos de la mente.

Una parte fundamental para la comprensión de la disciplina por parte de los estudiantes surge a partir de su experiencia en el aula. El conocimiento sobre las orientaciones disciplinarias, de conceptos, herramientas, prácticas y hábitos de la mente son característicos de esta dimensión. En esta también se afirma que para que los estudiantes sean realmente pensadores disciplinarios deben experimentar la disciplina en toda su riqueza.

Dimensión 2: Demanda cognitiva

En la medida que los estudiantes tienen oportunidades de enfrentarse al conocimiento y tener sentido de ideas disciplinarias relevantes y su uso, podrán aprender mejor sobre todo cuando son desafiados en formas que proporcionan espacio y apoyo para el crecimiento, con un nivel de exigencia que transita de lo simple a lo complejo, lo que los debe conducir a una lucha productiva (Schoenfeld, 2016).

En esta se describen el sentido que tienen las actividades en su nivel de complejidad, el enfoque (procedimientos memorizados o razonamiento) y el cómo impacta en los estudiantes. Si estos se encuentran inmersos en situaciones demasiado fáciles o muy difíciles para ellos, será poco probable que puedan progresar. El reto entonces es encontrar tareas que inviten a los estudiantes a pensar conceptualmente y a hacer conexiones que generen oportunidades para el pensamiento. El desafío para la instrucción es proporcionar aclaraciones y otros apoyos (consejos heurísticos, plantear cuestionamientos) sin decir a los estudiantes qué hacer.

Dimensión 3: Acceso equitativo al contenido

El acceso equitativo al contenido se genera en la medida en que las estructuras de actividad del aula invitan y apoyan el compromiso activo de todos los estudiantes con el contenido disciplinario central que está siendo abordado por la clase. Las aulas en las que solo algunos estudiantes tienen mayor participación no son equitativas, no importa cuán rico sea el contenido: todos los estudiantes tienen que estar involucrados.

Las aulas equitativas proporcionan a todos los estudiantes el acceso a conceptos y prácticas disciplinarias significativas, de manera que apoyan sus propios entendimientos y les ayudan a construir identidades disciplinarias productivas. Por ejemplo, cuando se involucra a todos los alumnos por igual en momentos de discusión de manera frecuente (Schoenfeld, 2016).

Dimensión 4: Agencia, propiedad e identidad

Esto se promueve en la medida en que se ofrece a los estudiantes oportunidades de "caminar y hablar", para contribuir a conversaciones sobre ideas disciplinarias, para construir sobre las ideas de los demás y hacer que otros construyan sobre las suyas de manera que contribuyan a su desarrollo de la agencia (la voluntad de participar), su propiedad sobre el contenido y el desarrollo de identidades positivas como pensadores y estudiantes (Schoenfeld, 2016).

Su énfasis recae en las oportunidades que tienen los estudiantes de generar y compartir ideas, tanto en clases enteras como en grupos pequeños y también en que sus aportaciones se alienten, reconozcan y apoyen como parte de la actividad normal del aula tratando de inhibir en todo momento las malas creencias de sí mismos y de una disciplina. Muchas de las veces la disposición de una persona a participar viene de la percepción de la disciplina.

Dimensión 5: Evaluación formativa

Se promueve en la medida en que las actividades del aula provocan el pensamiento de los estudiantes y las interacciones posteriores responden a esas ideas, atendiendo como base los comienzos productivos y abordando los malentendidos emergentes. La instrucción poderosa reconoce a los estudiantes donde están y les da oportunidades de profundizar sus entendimientos.

Esta implica organizar actividades o situaciones en las que se revele el estado actual de la comprensión de los estudiantes durante el proceso de aprendizaje. Identificar las formas de entendimiento de los estudiantes provee al profesor y a los alumnos oportunidades para construir sobre lo aprendido y para abordar los malentendidos. Implica también la recopilación de información informal que ayuden a los estudiantes a que den cuenta de que necesitan profundizar más en el contenido (Schoenfeld, 2016).

2.4 Del marco teórico

De los elementos en los que nos hemos centrado en el marco teórico comenzamos con el marco matemático por lo indispensable que es el dominio de lo que se va a enseñar un profesor de matemáticas. En estos términos es importante saber los conocimientos que posee el profesor de matemáticas tanto de la disciplina como de la enseñanza. Es precisamente por ello que hacemos referencia al MTSK por la riqueza contenida dentro de sus subdominios y categorías que nos permite analizar ese saber que pone en juego un profesor o centrarnos en aspectos específicos.

Por lo anterior, como lo que se pretende es la elaboración de una planificación que genere en los estudiantes una comprensión robusta fue importante relacionar el TRU en términos de analizar el "cómo" implementar lo que el profesor sabe para apoyar a convertir a los estudiantes en verdaderos pensadores del contenido. Es así que entenderemos a la planificación integrada como la conjunción de estos tres grandes marcos en términos de la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Esta planificación antes mencionada ha de ser producto de la conjunción del MTSK en términos de los conocimientos que debe movilizar el profesor de matemáticas para la enseñanza dado que es algo fundamental en la práctica del profesor. A esto se añade que en los entornos de enseñanza se deben establecer los caminos y los aspectos que han de ayudar a lograr un objetivo de enseñanza, es por ello por lo que el TRU nos da la posibilidad de pensar y analizar en cómo se deben presentar esos conocimientos como objeto de enseñanza.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se detalla el tipo y alcance de la investigación, seguido del método y la técnica empleados para lograr los objetivos planteados.

3.1 Tipo y alcance de investigación

A partir de lo que se pretende obtener con la investigación y de cómo realizarla se intuye que el enfoque de la investigación debe ser de tipo cualitativo, pues se considera como un acercamiento más apropiado para poder conocer la manera de integrar el conocimiento especializado del profesor en su tarea de planificar. Denzin y Lincoln (1994) mencionan que la investigación cualitativa es multimetódica en su enfoque, ya que involucra una orientación interpretativa, naturalista hacia el objeto de estudio. Sobre esta idea Rodríguez, Gil y García (1999) resaltan que los investigadores cualitativos estudian la realidad en su contexto natural con el que se intenta tomar sentido de algo, de interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que poseen las personas implicadas. Dicho contexto desde nuestra investigación será el aula de clase en la cual se pueda analizar el conocimiento que se pone en juego en la enseñanza.

Taylor y Bogdan (1986) consideran que las características principales de la investigación cualitativa son:

1. Es inductiva
2. El investigador observa el escenario y a las personas desde una perspectiva holística como un todo.
3. Los investigadores cualitativos son sensibles a los efectos que ellos mismos causan sobre las personas que son objeto de estudio.
4. Se trata de comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas.
5. Bajo este enfoque de investigación se desprenden o apartan las propias creencias, perspectivas o predisposiciones.
6. Todas las perspectivas son valiosas.
7. Son humanistas.
8. Se da un énfasis a la validez de su investigación por parte de los investigadores.
9. Todos los escenarios y personas son dignos de estudio.
10. La investigación cualitativa es un arte.

A través de estos elementos lo que se busca con nuestra investigación es dar cuenta de cuáles son las perspectivas que muestra un profesor al dar una clase, lo cual incluye no solo lo que hace sino también los argumentos que dice y cómo se relacionan estos en su tarea de enseñar. Para esto, se han considerado diferentes elementos clave como el entrevistar a un profesor o profesora, hacer videograbaciones, hacer transcripciones, anotaciones para poder obtener elementos que sean producto de un análisis posterior.

En lo que respecta al alcance de la investigación consideramos que es descriptiva, pues según Hernández, Fernández y Baptista (2014) consiste en caracterizar fenómenos, situaciones, contextos y sucesos detallando como son y se manifiestan. En este alcance de estudio se pretende esclarecer las propiedades, características y perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta al análisis y justamente esto se relaciona con nuestra investigación de tal manera que lo que queremos hacer inicialmente es poder describir esos saberes que pone en juego un profesor o profesora en el aula y con ello poder crear indicadores de conocimiento que se sometan a diferentes análisis y contrastaciones para poder generar una propuesta de planificación sobre ecuaciones lineales.

3.2 Método

Para llevar a cabo nuestra investigación se ha considerado como primer momento el análisis de cada uno de los dominios, subdominios y categorías que se presentan en el MTSK con el fin de poder comprender las ideas que expresan los autores. Posteriormente se propondrán algunos indicadores de conocimiento tomando como base una revisión exhaustiva de libros de matemática pura en el siguiente orden: primero me remitiré a libros de álgebra elemental, después a los de álgebra superior y finalmente a los de álgebra abstracta. Asimismo, se pretende hacer una investigación entre los libros de texto de secundaria o artículos que abonen a nuestro trabajo desde diferentes perspectivas. Lo anterior con el fin de poder integrar una amplia gama de conocimientos que mantengan una estrecha relación con el tópico que es objeto de análisis.

Aunado a lo anterior, se pretende también elaborar indicadores de conocimiento respecto al TRU y para ello se ha de analizar cada una de las 5 dimensiones que componen a una enseñanza que genere comprensión robusta. Esto ayudará a obtener una serie de indicadores enfocados a la instrucción que se han de implementar durante el desarrollo del tema. Estos elementos en conjunto con los indicadores del MTSK nos permitirán desarrollar una propuesta que integre todos estos elementos mencionados.

Para la aplicación de la propuesta antes mencionada se pretende llevar a cabo el siguiente proceso. En primera instancia se pretende formular los indicadores del MTSK y del TRU, posteriormente se espera con ello tener elementos para poder desarrollar una propuesta planificada y aplicarla en el aula en una prueba piloto y con ello poder refinar aspectos que sean necesarios.

Se pretende también llevar a cabo una segunda complementación de estos indicadores a través de un estudio de casos en el cual se tomará en consideración a una profesora que por cuestiones éticas llamaremos Lupita y se analizará el conocimiento que pone en juego a la hora de desarrollar el tema de ecuaciones lineales.

Esta profesora se eligió considerando que pudiera tener características de ser reconocida en su ámbito, además de tener experiencia en la enseñanza de este tema y labore en el nivel secundaria que es donde se pretende elaborar la investigación. Además de esto, consideramos que pudiera mostrar disposición para una preparación en cuanto a las actividades planificadas en la propuesta, ya que se pretende sea ella quien las efectué en un entorno escolar.

Se ha elegido como método el estudio de casos pues, Denny (1978) lo define como un examen completo o intensivo de un aspecto, una cuestión o acontecimiento que tiene lugar en un marco geográfico a lo largo del tiempo. Lo anterior se relaciona con nuestra investigación en cuanto a que indagaremos acerca del conocimiento que pone en juego la profesora dentro del aula.

Asimismo, Rodríguez, Gil y García (1999) mencionan que un estudio de casos se basa en el razonamiento inductivo y lo caracteriza el descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos aún más que la verificación y comprobación de la hipótesis. Con base en esto es que pretendemos analizar lo que sucede con la puesta en marcha de la propuesta de planificación y ahondar en esos aspectos del conocimiento del profesor que deben estar presentes en la enseñanza de las ecuaciones.

Guba y Lincoln (1981) plantean que a través del estudio de casos se puede conseguir alguno de los siguientes objetivos:

a) Llevar a cabo un registro de los hechos más o menos como han sucedido
b) Representar o describir situaciones o hechos.
c) Proporcionar conocimiento o instrucción acerca del fenómeno estudiado
d) Comprobar o contrastar los efectos, relaciones y contextos presentes en una situación o grupo de individuos analizados.

Además de lo anterior, consideramos un estudio de casos de tipo instrumental dado que según Stake (2013) se refiere a una caracterización más general del caso en sí y se elige por que el interés es la comprensión de otra cuestión. En nuestra investigación esa característica se centra en el conocimiento que moviliza el profesor de matemáticas y cómo lo pone en juego para promover una enseñanza.

Con los objetivos antes expuestos nuestra intención en esta investigación es poder recabar información por medio de algunos instrumentos e ir transitando por cada objetivo hasta lo que es el diseño e implementación de la propuesta de planificación.

Por otro lado, se considera que para recabar información relevante para nuestra investigación es necesario el uso de diferentes instrumentos para lograr alcanzar el objetivo planteado, tales como indicadores de conocimiento, videograbaciones, entrevista semiestructurada y transcripciones.

3.3 Técnica

Dentro de los instrumentos que se han mencionado con anterioridad y que fungen como una parte fundamental para obtener datos en esta investigación se ha considerado la creación de indicadores que estén orientadas en elementos en los que hay que poner gran atención en las clases, por ello nos remitiremos a las guías del TRU y las dimensiones del MTSK para poder generar puntos de interés para nuestra investigación.

Por otro lado, se pretende complementar la información por medio de una entrevista semiestructurada tomando como base el MTSK y el TRU, con la cual permita la obtención de elementos que subyacen a la misma labor de los profesores y que posiblemente no se evidencien en el aula de clase. Se ha elegido desarrollar este tipo de entrevista puesto que según Hernández, Fernández y Baptista (2014) se basan en una guía de aspectos relevantes para el investigador en las que el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información (p. 403). A partir de lo anterior lo que se pretende es poder reconocer aquel conocimiento involucrado para poder contrastarlo con el que pone en juego nuestro caso de investigación.

A continuación, se presentan cada una de las preguntas elaboradas junto con una pequeña justificación global del porqué se plantean. Estas están separadas por temas en los que nos valemos para rescatar información del profesor y su conocimiento sobre el tema en cuestión conservando como esencia la relación MTSK-TRU y el tema de ecuaciones lineales. Asimismo, se destaca en color azul preguntas secundarias inspiradas con mayor énfasis en el TRU para profundizar en cada aspecto.

Guion de entrevista semiestructurada		
Tema	**Pregunta**	**Justificación**
T1. Saberes conceptuales	1. ¿Qué aplicaciones tienen las ecuaciones lineales? 2. ¿Qué saberes están presentes en el tema de ecuaciones lineales? 3. ¿Qué propiedades se ponen en juego en la resolución de ecuaciones lineales? 4. ¿Cómo definiría lo que es una ecuación? 5. ¿Qué procedimientos se utilizan para resolver una ecuación lineal?	El objetivo de estas preguntas es conocer lo que el profesor sabe sobre usos, conceptos, propiedades, definiciones, procedimientos en torno a las ecuaciones lineales. Esto también está relacionado con la dimensión 1 del TRU sobre la riqueza que tiene el contenido que se lleva a la clase.
T2. Conexiones matemáticas	6. ¿Qué otros conocimientos se conectan con las ecuaciones lineales y de qué manera? 7. ¿Qué procedimientos o razonamientos usados en las ecuaciones lineales se aplican dentro de otros temas matemáticos? 8. ¿En qué otros temas matemáticos se usan o aplican las ecuaciones lineales de manera indirecta?	Estas preguntas tienen el objetivo de indagar lo que el profesor conoce acerca de las conexiones que se producen dentro de los temas matemáticos. Esto también me ayudará a percibir cómo estas ideas pueden usarse o aplicarse posteriormente en una clase.

		Esto también se relaciona con el TRU de tal manera con la dimensión 1 sobre contenido en cuanto al desarrollo de conexiones e ideas importantes del objeto matemático.
T3. Práctica matemática	9. ¿Qué condición es necesaria para considerar una expresión matemática como ecuación lineal? 10. ¿Qué papel juega la demostración en el conocimiento sobre ecuaciones lineales? 11. A partir de la definición de ecuación que ha dado anteriormente, ¿Qué determina o que caracteriza a una definición?	El objetivo de estas preguntas es el indagar el conocimiento del profesor acerca de elementos que permite hacer matemáticas y a indagar sobre prácticas que dan sustento a acciones o procedimientos dentro del tema de ecuaciones lineales. Esto se relaciona con el TRU sobre la riqueza del contenido (dimensión 1) y como esto permite al profesor justificar ciertas cuestiones matemáticas.
T4. Aprendizaje	12. ¿Cómo cree que aprenden matemáticas sus estudiantes? ¿Qué proceso mental debe hacer el estudiante para aprender ecuaciones lineales? 13. ¿Cómo cree que aprenden mejor sus estudiantes las ecuaciones lineales? ¿Qué seguimiento o estructura debe tener el contenido para que los estudiantes se apropien de él? 14. ¿Qué dificultades presentan o han presentado sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas? ¿Cuál podría ser un ejemplo de ello? ¿Cómo puede o podría atenderlos?	El objetivo de estas preguntas es indagar el conocimiento que el profesor tiene acerca de cómo aprenden sus estudiantes, así como de los enfoques, procesos y estrategias que permiten potencializar el saber del alumno. Esto también se relaciona con el TRU en cuanto a si el profesor adquiere una estructura lógica para la enseñanza (dimensión 5 sobre evaluación formativa)

	15. ¿Qué dificultades pueden existir en el aprendizaje de las ecuaciones lineales? ¿Cuál podría ser un ejemplo de ello? ¿Cómo puede o podría atenderlos? 16. ¿En qué ayuda a los estudiantes el aprendizaje de las ecuaciones lineales? 17. ¿Qué procesos o estrategias usan habitualmente los estudiantes para la resolución ecuaciones lineales? 18. ¿Qué expectativas tienen sus estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas? ¿Y en específico de las ecuaciones lineales?	además del reconocimiento del cómo puede potencializar el aprendizaje (Dimensión 2 sobre demanda cognitiva).
T5. Estándares de aprendizaje	19. ¿Qué elementos considera usted para la planificación de la enseñanza de las matemáticas? 20. ¿Qué conocimientos deben dominar los alumnos al finalizar la enseñanza de las ecuaciones lineales en primer grado de secundaria? 21. ¿Qué temas le anteceden al aprendizaje de las ecuaciones lineales? 22. ¿Qué temas se apoyan en el conocimiento sobre las ecuaciones lineales?	El objetivo de estas preguntas es indagar sobre el conocimiento que tiene el profesor acerca de los lineamientos y estándares que rigen la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundaria y de aquellos otros elementos (artículos o estándares) considerados para la enseñanza. Esto también se relaciona con el TRU en cuanto los saberes que debe dominar para la enseñanza (Dimensión 1 sobre contenido).
T6. Enseñanza	23. ¿De qué manera enseña comúnmente matemáticas a sus estudiantes? ¿Qué pasos se deben seguir en general para enseñar cualquier tema matemáticas? 24. ¿Qué actividades o estrategias matemáticas apoyan a los alumnos en el	El objetivo de estas preguntas es indagar acerca de lo que el profesor conoce sobre la enseñanza de las matemáticas. En particular sobre si concibe una estructura lógica, estrategias, formas de

	aprendizaje de las ecuaciones lineales? ¿Cómo las lleva a cabo en el aula? 25. ¿Qué acciones o estrategias lleva a cabo como profesor para que todos sus estudiantes se involucren en su aprendizaje y que importancia les da a las ideas que expresan? 26. ¿Qué elementos de los estudiantes considera para lograr una enseñanza efectiva? ¿esto cómo lo aplica dentro de su planificación de clase? 27. ¿Qué recursos pueden usarse para la enseñanza de las ecuaciones lineales? ¿Qué ventajas y desventajas tienen estos al enseñar ecuaciones lineales?	involucrar a los alumnos, así como recursos para la enseñanza de las ecuaciones lineales. Estas preguntas también se relacionan con el TRU en cuanto al conocimiento del profesor acerca de cómo involucrar de manera profunda a todos los estudiantes (Dimensión 3 sobre acceso equitativo al contenido) y además sobre la apropiación e importancia de las contribuciones del alumno en relación con el objeto matemático (Dimensión 4 sobre agencia, propiedad e identidad).

Tabla 2. Guion de entrevista Semiestructurada. Fuente: Elaboración propia

Cada una de estas preguntas de la tabla 2 fueron desarrolladas tomando como referencia el objeto matemático, la revisión de saberes del libro de texto y los propios conocimientos encontrados, relacionando las dimensiones del TRU y sobre todo los aspectos centrales de las categorías del MTSK.

Asimismo, se pretende tomar como evidencia para el análisis videograbaciones de las clases para que la información se pueda complementar con los demás instrumentos y poner en común acuerdo cada una de las ideas expresadas durante la clase.

Para realizar el análisis de las clases video grabadas se propuso la siguiente estructura (Tabla 3) con el fin de dar un primer acercamiento a lo encontrado. Este instrumento fue desarrollado y adaptado a partir de las contribuciones de Sosa (2011) derivado de su investigación que considera un análisis detallado del conocimiento de dos profesoras en bachillerato.

Consideramos que a partir de las adaptaciones realizadas y la elaboración de transcripciones de clase podemos dar cuenta de qué conocimientos están presentes en el desarrollo de las clases, lo cual nos permitirán precisar evidencias del mismo. Además, se ha decidido que para considerar la riqueza de lo encontrado se ha de tomar como objeto de análisis episodios que se rescaten por actividades.

A continuación, se esquematiza la estructura que se usará para este proceso y lo que se expone en cada apartado.

Episodio 1: Número de episodio **Objetivo general**: Identificación de la intención del profesor para esa actividad en concreto. **Evento desencadenante**: Este ha de concebirse como aquella situación o punto de partida que da origen a la producción de conocimiento. **Extracto**: Nomenclatura utilizada en la evidencia **Evidencia**: Este hará referencia a una descripción o fragmento del episodio que desencadeno los conocimientos que se señalan posteriormente. **Conocimientos encontrados**: Estos han de entenderse como aquellos saberes que se pusieron en juego por la maestra y fueron evidenciados en las videograbaciones (MTSK TRU). **MTSK**: **TRU**: **Evento de término**: Ha de entenderse como la acción que lleva a cabo la maestra para dar fin a la clase o actividad.

Tabla 3. Instrumento de análisis para las videograbaciones de clase

Se considera que a través de la aplicación del instrumento y el análisis de los sucesos a través de episodios nos permitirá indagar acerca del conocimiento que se pone en juego dentro de las clases pudiendo distinguir así aquel saber que la profesora utiliza a la hora de enseñar las ecuaciones lineales y cómo ese saber se conecta con su labor de planificar la enseñanza.

Aunado a lo anterior, después de la recogida y descripción de la información, lo que se pretende es hacer una comparación o triangulación de datos para poder analizarla desde diferentes perspectivas. Esto con la intención de que se puedan hallar contrastaciones que estén relacionadas con el conocimiento de la profesora y sobre cómo es que lleva a cabo su actividad de enseñanza.

Estos puntos señalados y el análisis bajo diferentes acercamientos permitirán encontrar puntos de convergencia y nuevos elementos que ayuden a complementar los indicadores de conocimiento y nuestra propuesta con el fin de que al aplicarla podamos tener muchos mayores elementos que abonen a nuestra pregunta de investigación y sobre todo para que pueda darse una comprensión robusta.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

En este capítulo se describe el desarrollo de los indicadores de conocimiento del MTSK y el TRU. También se detalla la elaboración de la propuesta de actividades que aplicará la profesora, así como también un pilotaje de las actividades que dan como resultado la propuesta final. La manera en que se presentan aquí coincide con el cómo se fueron desarrollando cada una de las acciones que nos llevaron a concluir en la propuesta final.

4.1 Indicadores de conocimiento basados en el MTSK

En este apartado se muestran los indicadores de conocimiento propuestos a partir del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas y de cada una de sus dimensiones, subdimensiones y categorías. Con base en el tópico matemático que es objeto de estudio en la presente investigación hemos identificado algunos indicadores de conocimiento que consideramos el profesor debe poner en juego para la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Estos conocimientos expuestos en la tabla 4 están estructurados de tal manera que señalan por dominio, subdominio y categoría del MTSK. De esto que la nomenclatura utilizada hace referencia a los aspectos de este modelo.

Dominio	Subdominio	Categoría	Indicador
Conocimiento matemático (MK)	**Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)**	**Fenomenología y aplicaciones**	**KoT 1**. Conocer que una forma en que han resuelto ecuaciones lineales es utilizando el método de la falsa posición.
		Propiedades y sus fundamentos	**KoT 2**. Conocer que las propiedades de la igualdad se cumplen también en la resolución de ecuaciones.
		Registros de representación	**KoT 3**. Conocer que las ecuaciones lineales se representan por medio de letras, números y operaciones.
		Definiciones	**KoT 4**. Conocer que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que mantienen una relación.
		Procedimientos	**KoT 5**. Conocer que resolver una ecuación significa encontrar el valor incógnita usando diferentes propiedades.
	Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	**Conexiones de complejización**	**KSM 1**. Conocer que las ecuaciones lineales se conectan con las matrices a través de los sistemas de ecuaciones lineales.
		Conexiones de simplificación	**KSM 2**. Conocer que las propiedades que subyacen de los números reales se aplican para resolver ecuaciones a través

			de las operaciones aritméticas (suma y multiplicación).
		Conexiones de contenidos transversales	**KSM 3**. Conocer que las ecuaciones lineales se relacionan con las razones trigonométricas a través del despeje.
		Conexiones auxiliares	**KSM 4**. Conocer que el razonamiento de resolución de ecuaciones se conecta con el Teorema de Pitágoras a través de la sustitución de variable.
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	**Prácticas ligadas a la matemática en general**	**KPM 1**. Conocer el papel que juega la estrategia para poder plantear un problema matemático.
		Prácticas ligadas a una temática en matemática	**KPM 2**. Conocer el papel del ensayo y error para resolver una ecuación de primer grado.
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	**Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM)**	**Formas de aprender**	**KFLM 1**. Conocer que los alumnos pueden aprender a resolver ecuaciones lineales a través de problemas contextuales.
		Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje	**KFLM 2**. Saber que una de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico.
		Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático	**KFLM 3**. Conocer que uno de los razonamientos típicos del estudiante al resolver ecuaciones lineales es simplemente relacionar los datos que se tienen.
		Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas	**KFLM 4**. Conocer que una concepción del estudiante es que siempre hay un resultado correcto.
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	**Formas de enseñanza**	**KMT 1**. Conocer que el "análisis didáctico" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales.
		Recursos y materiales	**KMT 2**. Conocer que la balanza es un recurso didáctico que puede ayudar a entender el término de igualdad (pero limita una representación cuando los

			números en las ecuaciones son negativos).
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS)	**Contenidos matemáticos que se requieren enseñar**	**KMLS 1**. Conocer cada uno de los conocimientos implicados en este tema es encontrar valor desconocidos.
		Conocimientos del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado	**KMLS 2**. Conocer que las ecuaciones lineales se abordan en primero de secundaria solo con una incógnita.
		Secuenciación de diversos temas	**KMLS 3**. Conocer que uno de los temas que le anteceden a las ecuaciones es el uso de letras en distintos problemas con las que es posible operar.

Tabla 4. Indicadores del MTSK. Fuente: creación propia.

4.2 Indicadores de conocimiento basados en el TRU

En este apartado se presentan los indicadores de conocimiento desarrollados a partir de cada una de las dimensiones que componen al Marco de Enseñanza para una Comprensión Robusta (TRU). Estos son presentados por dimensión considerando 4 elementos expuestos dentro de las contribuciones en este marco que son las diferentes formas de trabajar dentro del aula expuestos por Shoenfeld et al. (2014). En estos aportes se encuentran destilados por medio de rúbricas los elementos a considerar para evaluar una compresión robusta en general. En su mayoría son índices de gran alcance en cuanto a sus dimensiones.

Para dar mayor claridad a los indicadores expuestos enseguida, se ha de entender como C la dimensión primera que es **el contenido** (Tabla 5), DC como la segunda dimensión denominada **demanda cognitiva** (Tabla 6), AEC como la tercera dimensión **acceso equitativo al contenido** (Tabla 7), API como la cuarta dimensión llamada **agencia, propiedad e identidad** (Tabla 8) y finalmente EF como la quinta dimensión **evaluación formativa** (Tabla 9). Cada uno de los indicadores se encuentran enumerados, los cuales se presentan a continuación conforme a la dimensión a la que pertenecen.

Dimensión 1	Elementos del TRU	Indicador
El contenido	Actividades en clase: Planteamiento, exposición y discusión.	**C1**. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona

		oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.
	Trabajo en grupos pequeños.	**C2**. La explicación y justificación de las ideas matemáticas están al nivel del grado en que se trabaja.
	Presentaciones de los estudiantes.	**C3**. Las matemáticas presentadas son relativamente claras y correctas e incluyen justificaciones o explicaciones que animan a los estudiantes a centrarse en las ideas matemáticas.
	Trabajo individual	**C4**. Las intervenciones del profesor con los estudiantes individuales apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.

Tabla 5. Indicadores sobre el contenido. Fuente: Shoenfeld (2014).

Dimensión 2	Elementos del TRU	Indicador
Demanda cognitiva	Actividades en clase: Planteamiento, exposición y discusión.	**DC 1**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.
	Trabajo en grupos pequeños.	**DC 2**. Se apoya a los estudiantes para que se involucren productivamente con ideas matemáticas centrales y además se les da tiempo para pensar.
	Presentaciones de los estudiantes.	**DC 3**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los presentadores y/o a la clase en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.
	Trabajo individual	**DC 4**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

Tabla 6. Indicadores sobre Demanda cognitiva. Fuente: Shoenfeld (2014).

Dimensión 3	Elementos del TRU	Indicador
Acceso equitativo al contenido	Actividades en clase: Planteamiento,	**AEC 1**. El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa.

	exposición y discusión.	
	Trabajo en grupos pequeños.	**AEC 2**. Todos en el equipo contribuyen a las discusiones matemáticas grupales o subgrupos y además el maestro promueve que todos los miembros del equipo hagan contribuciones significativas.
	Presentaciones de los estudiantes.	**AEC 3**. El maestro apoya a los presentadores (si es necesario) en la participación y además propicia la participación de toda la clase.
	Trabajo individual	**AEC 4**. La atención del profesor está clara y ampliamente disponible para aquellos estudiantes que lo necesiten, lo que resulta en un acceso profundo a las matemáticas.

Tabla 7. Indicadores sobre acceso equitativo al contenido. Fuente: Shoenfeld (2014).

Dimensión 4	Elementos del TRU	Indicador
Agencia, propiedad e identidad	Actividades en clase: Planteamiento, exposición y discusión.	**API 1**. Los estudiantes tienen oportunidad de explicar sus ideas y el razonamiento del maestro ayuda a la apropiación de ideas de los estudiantes en exposición además de que responden y construyen sobre las ideas de los demás.
	Trabajo en grupos pequeños.	**API 2**. Al menos un estudiante expone y defiende sus ideas/razonamientos, además de que construyen sobre las ideas de los demás con base en las discusiones desarrolladas.
	Presentaciones de los estudiantes.	**API 3**. Las presentaciones de los estudiantes dan como resultado una mayor discusión de las matemáticas relevantes, guiándose en algunos casos sobre las ideas que los demás han presentado.
	Trabajo individual	**API 4**. El estudiante tiene amplia oportunidad y agencia para desarrollar sus ideas interactuando con el maestro, llevándolo a la discusión en clase al término del trabajo individual.

Tabla 8. Indicadores sobre Agencia, propiedad e identidad. Fuente: Shoenfeld (2014).

Dimensión 5	Elementos del TRU	Indicador
Evaluación formativa	Actividades en clase: Planteamiento, exposición y discusión.	**EF 1**. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la instrucción posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes.
	Trabajo en grupos pequeños.	**EF 2**. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la discusión posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando posibles malentendidos.
	Presentaciones de los estudiantes.	**EF 3**. En la presentación y discusión, el maestro solicita el pensamiento del estudiante y responde a las ideas del estudiante aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes.
	Trabajo individual	**EF 4**. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y las discusiones posteriores responden a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes.

Tabla 9. Indicadores sobre Evaluación Formativa. Fuente: Shoenfeld (2014).

4.3 Propuesta de enseñanza para una comprensión Robusta de Ecuaciones Lineales

En este apartado se presentan la propuesta de actividades para el desarrollo del tema de ecuaciones lineales considerando cada uno de los indicadores de conocimiento expuestos con anterioridad. Se han propuesto un total de 10 actividades de las cuales se encuentran justificadas a partir de los indicadores en el apartado anterior. Dicha secuencia se contempló para aplicarse en 5 sesiones de 50 minutos. Para cada una de las actividades presentadas en la planificación (Anexo 1) se propuso un apartado en el cual se describiera brevemente el sentido de la intervención del profesor.

Para el planteamiento de la **primera actividad** pensamos que era conveniente empezar con una situación familiar para los estudiantes, dado que es en primero de secundaria cuando por primera vez ven ecuaciones lineales. Considerando esta idea y a partir de una revisión del objeto matemático desde niveles primarios logramos identificar que existe un precedente a la resolución de ecuaciones en ejercicios de tipo valor faltante, por lo cual planteamos ejercicios de ese tipo.

Para la **segunda actividad** se consideró como parte central una de las dificultades identificadas en el análisis del tópico matemático que es el uso del lenguaje algebraico y la traducción al lenguaje común. Para atender esta parte se planteó algunos ejercicios en los que tuvieran que familiarizarse con los términos utilizados en oraciones concretas y en expresiones algebraicas para hacer el proceso inverso.

Para la **tercera actividad** se pensó en integrar el pensamiento del estudiante en un ejercicio mental. Para esto, se planteó que todos pensaran en un valor numérico del cual le tendrían que hacer diferentes procesos o aplicar algunas operaciones para obtener un valor. Esto ayudaría a dos cosas, la primera en integrar a los estudiantes en el significado de la ecuación y por otro lado al involucramiento de todos los estudiantes al tener un resultado distinto. A través de este trayecto consideramos que será posible arribar a la definición de ecuación.

La **cuarta actividad** fue pensada en términos de presentar un método de resolución de las ecuaciones lineales. Este proceso de resolución saldría a relucir al presentar la balanza como material tangible en el que los estudiantes lograran apreciar las propiedades de la igualdad. Pensando en un contexto en el que las clases fuesen en línea se pensó que podríamos presentar la balanza en digital sin descartar la posibilidad de presentarla de manera física comparando objetos al alcance.

Para la **quinta, sexta y séptima actividad** lo que se pensó fue en que los estudiantes primero pudieran observar lo que sucedía en la balanza pesando objetos que ellos traen consigo. Después, se pensó que los alumnos pudieran trasladar el razonamiento de la balanza en la resolución de una ecuación aplicando diferentes propiedades para llegar al resultado (valor de la incógnita).

Para la **octava y novena actividad** consideramos una actividad de resolución de ejercicios que involucraban diferentes ecuaciones de la forma $ax + b = c$ con la intención de que fueran familiarizando un procedimiento que involucraba lo visto con el método de la balanza. A esto se agregaron dos ejercicios de la forma $ax + b = cx + d$ para que observaran que además de las primeras existen otras completamente distintas, a pesar de que no correspondan a primer grado escolar.

Para la **décima actividad** consideramos una serie de ejercicios relacionados con temas anteriores para darles continuidad con el de ecuaciones lineales y también para el logro del propósito establecido que era la resolución de ecuaciones lineales. De esto podremos de alguna manera identificar referentes con los que podamos dar cuenta de si el seguimiento anterior fue adecuado para lograr una comprensión robusta de este tópico matemático.

4.4 Pilotaje

Antes de la puesta en marcha de la planificación se propuso realizar una prueba piloto de las actividades planteadas con el fin de poder obtener información que nos permitiera observar si la estructura, complejidad y demás elementos eran los más adecuados para que se diera el aprendizaje de las ecuaciones lineales.

En un principio y dadas las condiciones en las que nos encontrábamos por el Covid-19 se pensó que esta prueba podría aplicarse en un entorno real, pero por la cuestión de que en ese momento la educación era a distancia se optó por elegir a un grupo de primer grado de una escuela secundaria para llevarla a cabo en línea por medio de la plataforma Meet a través de dos sesiones.

Esta aplicación se llevó a cabo con un total de 12 estudiantes que fueron llevando a cabo todas las actividades planteadas por medio de una presentación previamente preparada en la que se iban atendiendo cada una de las preguntas o cuestionamientos. Esto llegó a modificar un poco la estructura en la que se pensaba desarrollar algunas actividades pues se tenía previsto trabajar en parejas o equipos, pero por estar trabajando a distancia esto se dificultó.

Centrándonos de lleno en el desarrollo de las actividades se obtuvo que tanto el seguimiento como en su resolución era muy adecuado. De esto resaltamos que en la actividad tres los estudiantes presentaron mayor participación y se encontraban más motivados pues se les solicitaba de manera puntual su pensamiento en cuanto a la resolución de un ejercicio mental.

Lo anterior aunado con el planteamiento de las dos primeras actividades nos llevó a observar que en la primera se presentaron algunas dudas en cuanto a los ejercicios que se pudieron aclarar en el momento. Esto pudo deberse a que era el primer acercamiento de las ecuaciones en este nivel considerando entonces que debía cambiarse el tipo de actividad para que estos pudieran integrar primero una idea o noción de la forma de resolución.

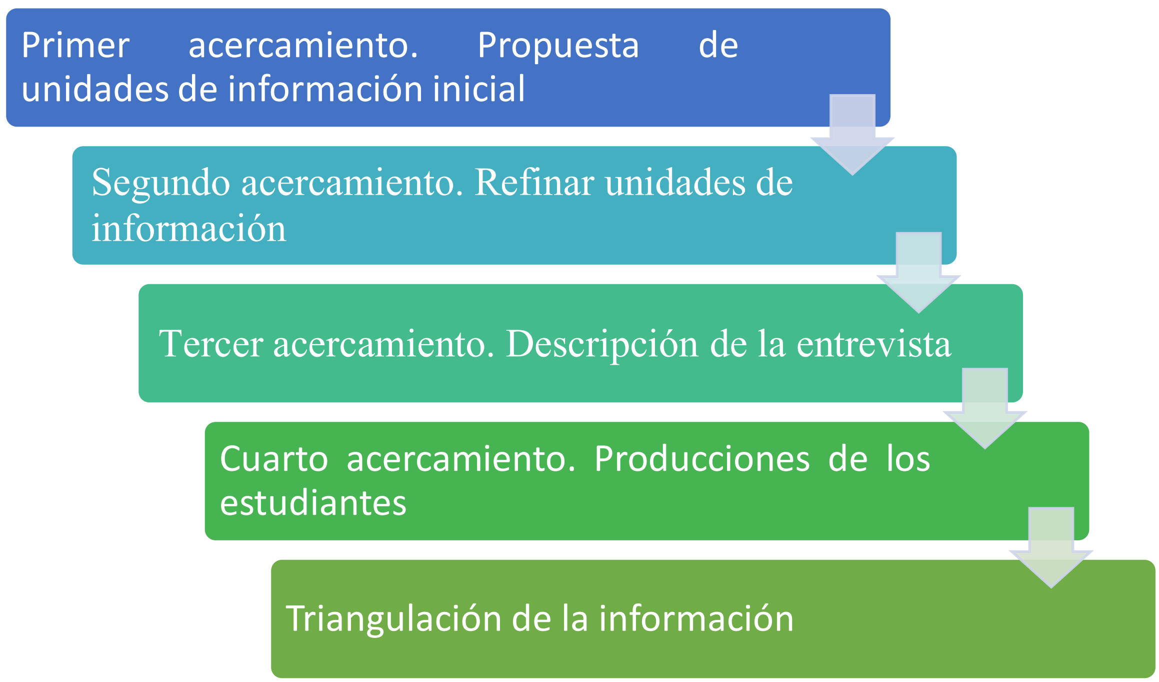
Lo anterior nos llevó a tomar la decisión de optar por hacer solo un cambio en la estructura o seguimiento de las actividades pues se creyó conveniente el dejar una primera noción del proceso para resolver los ejercicios de un valor faltante por lo cual la actividad 1 cambiaria a ser la 3. Otro elemento que consideramos para este cambio fue que se pensó que podría permitir un mejor acercamiento a la definición de ecuación puesto que la actividad 4 refería a la presentación de la balanza pudiendo con esto entender la forma de resolución de las ecuaciones.

Además de lo anterior nos dio una idea de los tiempos en los que debían desarrollarse el total de las actividades y nos permitió afirmar la distribución de estas en 5 sesiones de trabajo para que los estudiantes tuvieran tiempo de participar, responder, reflexionar y profundizar en los saberes en juego.

Tales modificaciones nos dieron como resultado la propuesta final de la planificación de las actividades (Anexo 1) con las que se estaba listo para la fase de preparación de la profesora y la implementación de esta para obtener la información que serviría para el análisis de nuestra investigación.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En este capítulo se describe inicialmente el contexto de la aplicación, seguido del análisis de la información obtenida a partir de los instrumentos utilizados. Este análisis se pretende llevar a cabo bajo diferentes acercamientos. Los primeros dos refieren a la búsqueda de unidades de información a partir de las transcripciones de clase, seguido de la descripción de saberes encontrados dentro de la entrevista. Aunado a esto, complementamos con otro acercamiento a las producciones de los estudiantes finalizando con la triangulación de la información. Esto puede resumirse a lo siguiente.



5.1 Sobre la aplicación (contexto de la aplicación)

La aplicación de la propuesta planificada se llevó a cabo en una secundaria ubicada en el estado de Zacatecas. Esta escuela es de organización completa en la cual se labora en dos turnos, matutino y vespertino, siendo en este último en el que se desarrolló la propuesta.

Lo primero que se llevó a cabo fue la entrevista semiestructurada para que fuera un primer acercamiento al conocimiento de la profesora. Posteriormente, para la aplicación de la propuesta se llevó a cabo una preparación previa de la profesora para que tuviera a bien conocer cuáles eran las finalidades de cada actividad, estableciera puntos de unión o relación entre las actividades y pudiera entender concretamente los propósitos que se habían establecido.

Sobre esto se le explicó que en cada una de las actividades se encontraba un apartado de información en el cual se describía a grandes rasgos los propósitos y algunas sugerencias para el desarrollo e implementación de la o las actividades, así como también aspectos no tan triviales como las aplicaciones de estos saberes o relación con otros contenidos.

Para esto lo primero que se pensó fue que la aplicación pudiera ser en línea debido a las contingencias que habíamos sufrido por el Covid-19. Esto nos invitó a pensar en estrategias que pudieran servir para llevar a cabo tales actividades. Seguido de esto, en la evolución del mismo proceso de aplicación se tuvo la oportunidad de trabajar de manera directa con los estudiantes, pero únicamente en clases de 30 minutos y en diferentes días, por lo que eso impactó directamente en el seguimiento de las actividades.

Posterior a la preparación y la implementación se obtuvieron videograbaciones de cada una de las sesiones de clase, las cuales serían el principal referente de análisis.

5.2 Análisis de las videograbaciones de clase

Para realizar el análisis de las clases video grabadas lo primero que se hizo fue la transcripción puntual de cada una de las sesiones de trabajo. Después, retomando el instrumento de análisis presentado en el capítulo 3 sobre la metodología, se hizo el llenado de los aspectos señalados como parte de un primer acercamiento al análisis de la información.

En cada episodio de clase se detallan los elementos de conocimiento que han podido ser identificados en conjunto con la evidencia que da sustento a tales afirmaciones. Estos elementos son presentados por medio del número de sesión al que pertenece la transcripción de los sucesos.

Además de lo anterior, en cada uno de los conocimientos encontrados tras el análisis de los episodios se puede observar una nomenclatura referida a los indicadores del MTSK (en color rojo) y TRU (en color azul) que corresponden a los que ya se habían propuesto inicialmente y que fueron evidenciados. También se presentan aquellos conocimientos nuevos sin algún color o nomenclatura en específico.

Sesión 1

La sesión 1 se llevó a cabo el lunes 7 de marzo de 2022. En un primer momento se realizó un recordatorio por parte de la profesora acerca de las características que tiene el álgebra haciendo uso de algunos ejemplos de expresiones que se habían visto con anterioridad dando cuenta de que comenzaran con el tema de ecuaciones. Además de esto se llevó a cabo un ejercicio mental en el que debían pensar un número y aplicarle ciertas operaciones. Finalmente se realizan algunos ejercicios para que los alumnos transiten del lenguaje común al algebraico.

Episodio 1: Retomando conocimientos en actividades anteriores. (Línea 1-33)

Objetivo general: Introducir el tema de ecuaciones lineales.

Evento desencadenante: La maestra comienza recordándoles algunos elementos vistos sobre expresiones algebraicas y les invita a hacer un ejercicio mental.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Evidencia:

P: *Muy bien chicos, lo que vamos a trabajar esta semana se llama "Ecuaciones" ¿Cómo?*

Es: *Ecuaciones*

P: *¿Qué vamos a aprender esta semana? Allí mismo, punto y aparte le ponemos*

Esta semana aprenderé… a resolver problemas mediante la formulación y solución… algebraica de ecuaciones. ¡Sale! Fíjense bien, esta semana…

Se acuerdan de que ya hace tiempo habíamos trabajado un poco en el por qué la diferencia de que ahora se llame álgebra. Acuérdense que les decía que ya no se tenía que usar el por de primaria porque aquí ya no significaba eso. Se acuerdan de que ya los por los cambiamos por los paréntesis o por el puntito que está dentro de las dos letras o que un número y una letra significan que se están multiplicando. ¿Alguien recuerda porque ahora se le llama álgebra?

E1: *Porque tiene letras*

P: *Porque vamos a combinar letras, ¿Con qué?*

Es: *Con números*

P: *¿Y qué más? Y operaciones verdad. Se acuerdan de que también les dije que una letra se puede operar como cualquier número, se puede sumar, se puede restar. Se acuerdan también la semana pasada estuvimos viendo lo de los perímetros*

E2: *¡Si!*

P: *Que decíamos a ver si tenemos un pentágono ¿Cuántos lados tiene el pentágono?*

E3: *Cinco*

P: *Y si cada lado vale* a*, ¿cuánto es el perímetro?*

E4: $5a$

P: $5a$ *verdad, cinco veces a o cinco veces ese número que no conocemos. Perfecto, pues esta semana vamos a trabajar algo así.*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocer la diferencia entre la aritmética y el álgebra.

-Saber que la x ya no se usa en álgebra en términos de la multiplicación.

-Conocer que las literales pueden ser números generales con los que es posible operar.

-Conocer que las expresiones algebraicas se pueden usar para el cálculo y representación del perímetro de figuras.

KMLS 3. Conocer que uno de los temas que antecede a las ecuaciones es el uso de letras en distintos problemas con las que es posible operar.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

C4. Las intervenciones del profesor con los estudiantes individuales apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.

AEC 1. El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa.

DC 1. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

API 1. Los estudiantes tienen oportunidad de explicar sus ideas y el razonamiento del maestro ayuda a la apropiación de ideas de los estudiantes en exposición además de que responden y construyen sobre las ideas de los demás.

Evento de término: La maestra concluye con un comentario acerca de que lo que ha mencionado está directamente relacionado con el tema a tratar durante la semana.

Episodio 2: Ejercicio mental (Línea 35-102)

Objetivo general: Introducir el tema de ecuaciones lineales a través de un ejercicio mental.

Evento desencadenante: La maestra les invita a hacer un ejercicio mental.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P:	*[...]*
	Todos piensen un número, no lo digan, el que ustedes quieran. El de su fecha de nacimiento si quieren, ¿Ya lo pensaron?
Es:	*¡Ya!*
P:	*Todos a ese número agréguenle un siete. Súmenle un siete a ese número. ¡Todos! No digan su resultado, ¿Ya tienen su resultado?*
Es:	*¡Ya!*
P:	*Allí en su mente, si necesita escribirlo, pero no lo diga. Ahora si abran sus ojos todos. Levante la mano quien me quiere compartir el resultado final.*
	/Una alumna levanta la mano/
P:	*[…] ¿Cuál fue su resultado?*
E5:	*14*
	/La maestra afirma su número y lo escribe en el pintarrón y después señala a otro alumno/
P:	*[…] ¿Cuál fue su resultado?*
E6:	*15*
	/La maestra lo escribe en el pintarrón y otra alumna levanta la mano/
E7:	*34*
	/La maestra señala a otro estudiante y pregunta…/
P:	*¿Cuál fue su resultado?*
E8:	*23*

P:	*¿Alguien que haya salido su resultado arriba de 100, de 200, de 300? ¿Nadie? Bueno, Ahora sí ¿Cómo podríamos saber o alguien que sepa cuál es el número que pensó […]?*
Es:	*7*
P:	*¿Y por qué 7?*
Es:	*Porque dijo que le sumáramos 7 a nuestro número*
P:	*¿Y eso que tiene que ver?*
Es:	*Porque* $7+7$ *son 14*
	/La maestra afirma su respuesta y la escribe en el pintarrón/
P:	*¿Cuál será el número que pensó […]?*
Es:	*8*
P:	*¿Por qué 8?*
E9:	*Porque* $8+7$ *son 15*
	/La maestra lo escribe en el pintarrón/
P:	*¿Cuál será el número que pensó […]?*
	/Los alumnos empiezan a estimar diciendo 28 y otros 27/
E7:	27 …. 27
P:	*¿Y, por último, que número pensó […]?*
E10:	14
E9:	16
P:	*¿Qué fue lo que hicimos? ¿Qué procedimiento siguieron para saber qué número habían pensado sus compañeros? A ver, […], ¿Que se le ocurre que podemos hacer para poder adivinar el número que pensaron sus compañeros?*
	/Un alumno intenta responder, pero la maestra vuelve a mencionar a la alumna/
E11:	*Restando*
P:	*¿cómo?*
E11:	*Restando*
P:	*¿Qué resto?*
E11:	*el 7 con el resultado*

P:	*El 7 con el resultado dice […]Al resultado que ya tengo le resto 7 ¿Es cierto ese procedimiento?*
Es:	*Si*
P:	*¿Alguien hizo un procedimiento diferente? Que dijera, yo nomas multiplique, yo nomas reste, ¿Nada? Diferente al que ya dijeron*
E6:	*Sumarle 7*
P:	*Sumarle 7, ¿Al resultado?*
	/Una alumna contradice la respuesta de su compañero y dice lo siguiente/
E12:	*Es restarle ¿No?*
P:	*Es restarle verdad. Entonces, para saber el número que pensó […], el número que pensó […]. Lo único que tuvimos que hacer fue al resultado restarle 7. ¡Perfecto! Muchachos. Pues hagan de cuenta que las ecuaciones más o menos trabajan así.*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

KoT 2. Conocer que las propiedades de la igualdad se cumplen también en la resolución de ecuaciones.

KoT 5. Conocer que resolver una ecuación significa encontrar el valor incógnita usando diferentes propiedades.

- Conocer que las propiedades que subyacen de los números reales se aplican para resolver ecuaciones a través de las operaciones aritméticas (suma y multiplicación).

KMLS 1. Conocer cada uno de los conocimientos implicados en este tema es encontrar valor desconocidos.

KMLS 2. Conocer que las ecuaciones lineales se abordan en primero de secundaria solo con una incógnita.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

API1. Los estudiantes tienen oportunidad de explicar sus ideas y el razonamiento del maestro ayuda a la apropiación de ideas de los estudiantes en exposición además de que responden y construyen sobre las ideas de los demás.

DC1. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

AEC1. El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa.

Evento de término: La maestra concluye con un comentario acerca de que en este ejercicio se puede observar cómo se trabaja con ecuaciones.

Episodio 3: Retomando conocimientos en actividades anteriores. (Línea 124-134)

Objetivo general: Traducir del lenguaje común al algebraico y viceversa.

Evento desencadenante: La maestra comienza planteado algunos enunciados en los que deben encontrar una expresión que los represente.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P: *Dijimos, cuando un número y una letra están juntos, ¿Qué operación indica?*

E2: *Una multiplicación*

P: *¿Una qué?*

E2: *Multiplicación*

/La maestra afirma la respuesta del alumno/

P: *Una multiplicación, y si yo por ejemplo a esta expresión le agrego. No sé, un* +3 *sigue siendo una expresión algebraica. ¿Por qué?, ¿Cuál es su principal característica?*

E11: *¿La letra?*

P: *Así es. ¿Puede ser cualquier letra o tiene que ser exclusivamente una letra?*

Es: *Cualquier letra maestra*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

KFLM 2. Saber que una de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico.

- Conocer que un número y una letra juntas significan multiplicación.
- Conocer que una condición necesaria o suficiente para nombrar una expresión como algebraica es el uso de la literal.
- Conocer que se puede definir un objeto matemático a través de sus propiedades.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

AEC 1. El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa.

Evento de término: La maestra concluye en que en las expresiones algebraicas puede usarse cualquier letra.

Sesión 2

La clase 2 se llevó a cabo el miércoles 9 de marzo de 2022. En un primero momento se realizó un recordatorio por parte de la profesora acerca de las características que tienen las expresiones algebraicas. Posteriormente se presentan algunos ejercicios en los que se involucran operaciones con valor faltante y de los cuales los estudiantes deben completar dichas operaciones para que se vuelvan verdaderas.

Episodio 1: Ejercicios de valor faltante para completar la igualdad. (Línea 36-60)

Objetivo general: Introducción a la estructura de las ecuaciones a través de la resolución de ejercicios de valor faltante.

Evento desencadenante: La maestra plantea unos ejercicios en los que deben encontrar valores faltantes para hacer verdadera la igualdad.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P:	*Volvemos, dijimos cuando empezamos a trabajar con algebra, el por de la primaria que es una x ya la tenemos que dejar de lado, ¿Sí? ¿Y ahora que vamos a poner en lugar de ese por?*
Es:	*Paréntesis*
P:	*Entonces, ¿qué operación me indican los paréntesis?*
Es:	*La multiplicación*
P:	*Por lo tanto, ¿aquí que estoy buscando?*
Es:	*Un número que multiplicado con 4 me de 28*
E6:	*Maestra tengo una pregunta*
	¿a quién se le ocurrió juntar números con letras?
P:	*A un señor que se llama…no se*
	/Los alumnos se ríen/
P:	*Alguien que invento el álgebra*
E7:	*Y por qué la hicieron*
P:	*Agradézcanle a los egipcios y griegos que se ponían a filosofar*
	Agradézcanle a Aristóteles, a Platón, a todos ellos
	¿Listos?
Es:	*¡No!*
P:	*Es individual ahora, como que estoy viendo que están socializando mucho*
	/La profesora se acerca con un alumno y le menciona lo siguiente/
P:	*¿Si a 5 le quito 12 me dan 8?*
E8:	*No*

P: *¿Tiene que ser un número menor o mayor a 12?*

E8: *Mayor*

P: *Mayor verdad*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocer que la igualdad se relaciona con las ecuaciones lineales a través de su resolución.

-Conocer el origen de las ecuaciones y el uso de las expresiones algebraicas.

-Conocer el predecesor del álgebra como se conoce hasta ahora.

KFLM 2. Saber que una de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico.

TRU:

EF 2. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la discusión posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando posibles malentendidos.

DC 3. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los presentadores y/o a la clase en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

DC 4. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

Evento de término: La maestra concluye con un comentario acerca de que lo que ha mencionado está directamente relacionado con el tema a tratar durante la semana.

Episodio 2: Ejercicios de valor faltante para completar la igualdad. (Línea 69-124)

Objetivo general: Introducción a la estructura de las ecuaciones a través de la resolución de ejercicios de valor faltante.

Evento desencadenante: La maestra plantea unos ejercicios en los que deben encontrar valores faltantes para hacer verdadera la igualdad.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

E9:	*No maestra pues sabe cuál sea la respuesta*
P:	*De cual*
E9:	*No pues la c*
P:	*Pero está bien fácil, ¿Qué es lo que se le dificulta de la c?*
E10:	*La fracción maestra*
E11:	*Maestra, creo que ahí vamos a poner la otra mitad ¿no?*
	Bueno es $\frac{1}{2}$ *y vamos a poner a lo que equivale la otra mitad y que nos de 2.8*
P:	*Aja, no tanto la otra mitad porque al hablar de mitad hablamos de* $\frac{1}{2}$
	Tenemos un número que es $\frac{1}{2}$
	Necesitamos buscar que número sumado con $\frac{1}{2}$ *me da* 2.8
	Y si $\frac{1}{2}$ *no sabemos a cuanto equivale en decimal, que ya lo trabajamos*
	¿Cuánto equivale $\frac{1}{2}$ *en decimal?*
Es:	*A la mitad de 1*
P:	*A* 0.5
	Si ya tengo 0.5 *aquí, ¿Cuánto me falta para llegar a* 2.8*?*
Es:	*¡Aaaa!*
P:	*¿Quién más? Hojitas por favor*
	Bien ya entréguenme todos los que faltan, vamos a revisar
	Ahora si en la libreta vamos a revisar lo que hicieron cada uno, sale
	Por ejemplo, muchachos, 2 *más que número me da* 25
Es:	25

P:	*¿Cómo supimos que era* 25*? ¿Qué hicimos?*
Es:	*Sumar, Restar*
P:	*¿Cómo?*
Es:	$27 - 2$
P:	*A* 27 *le quito* 2 *y me da* 25 *y es el número que busco aquí, ¿Sí?* *Si aquí la operación me indica suma, ¿acá que estoy haciendo? Restando* *Aquí que hicimos para saber qué número era*
Es:	$12 + 8$
P:	*¿Cuánto es?*
Es:	20
P:	*¿Qué operación estoy haciendo aquí?*
Es:	*Restando*
P:	*¿Y acá?*
Es:	*Sumando*
P:	*Ok,* $\frac{1}{2}$ *más cuanto me da* 2.8
E12:	2.3 *maestra*
P:	*¿Cómo encontramos ese* 2.3*?*
E12:	*Convirtiendo el* $\frac{1}{2}$ *a decimal*
P:	*Ok, este lo convirtió a decimal* 0.5 *¿Y qué más?* *¿Cómo encontró que era* 2.3*?*
E12:	*A pues restando* 0.5 *a* 2.8
P:	*A* 2.8 *le restamos* 0.5 *y nos da* 2.3 *Si aquí estoy sumando, ¿Qué operación estoy haciendo acá?*
Es:	*Restando*
P:	*¿Qué número multiplicado con* 12 *me da* 25.2*?*
E13:	2.1
P:	*¿Cómo encontramos ese* 2.1 *[…]?*
E13:	*Multiplicando*

P:	*Sí, pero ¿Cómo encontré que era* 2.1*?*
E13:	*Haciendo multiplicaciones*
	Fui multiplicando hasta que llego a 25.2
P:	*Multiplico por uno o por dos o ¿por cuánto iba multiplicando?*
E13:	*Lo que tanteé que fuera lo más cercano*
P:	*Ok, por tanteo perfecto*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocer que las propiedades de los números se aplican en las ecuaciones lineales a través de su resolución.

-Conocer que una de las dificultades de los estudiantes al resolver ecuaciones lineales se debe al uso de los números racionales.

KPM 2. Conoce el papel del ensayo y error para resolver una ecuación de primer grado.

TRU:

EF 2. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la discusión posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando posibles malentendidos.

DC 3. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los presentadores y/o a la clase en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

DC 4. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

Evento de término: La maestra concluye con la afirmación de que está bien realizar un proceso de ensayo y error para encontrar es valor que hace verdadera a las igualdades y recalca el uso de las propiedades de forma indirecta.

Episodio 3: Definición de ecuación. (Línea 144-188)

Objetivo general: Definir lo que es una ecuación lineal.

Evento desencadenante: La maestra modifica el planteamiento de unos ejercicios para integrar letras que representan valores desconocidos y con ello definir ecuación.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P:	*No, bueno sí, pero en este caso se conocen como operaciones inversas*
	Para la resta, de la resta a la suma, de la multiplicación a la división
	Bien, muchachos ahora que pasa o que sucedería si a estos ejercicios
	En lugar de ponerle números que no conozco, que aún no se
	Los cambiamos por z, p, a, *¿Qué sucede? ¿Cómo se llaman esas expresiones?*
Es:	*Algebraicas*
P:	*¿Por qué se llaman expresiones algebraicas?*
Es:	*Porque tienen letras, números y operaciones*
P:	*¿Tengo pues que una expresión algebraica es igual a* 27*, ¿sí?*
	Tengo una expresión algebraica que es igual a 27
	¿Por qué se llama expresión algebraica?
Es:	*Porque tiene letras, números…y operaciones*
P:	*Y aquí nos incluyen una cosa más una igualdad*
	A este tipo de expresiones se les llama y se les conoce como ecuaciones
	¿Cómo?
Es:	*Ecuaciones*
P:	*Esta de aquí es una ecuación, toda completita*
	Vamos a sacar qué elementos tiene una ecuación
	¿qué es una ecuación para ustedes?
E14:	*Números sumados, restados, divididos por números*

P: *¿Puros números?*

E14: *Letras*

P: *¿Puras letras?*

Primero que tenemos aquí

Es: *Un igual, una igualdad*

P: *Tenemos una igualdad entre dos expresiones, ¿sí?*

Por lo tanto, ecuación, ¿Qué es una ecuación […]?

E15: *Es una igualdad*

P: *Ecuación es una igualdad ¿entre qué?*

E14: *Números*

P: *¿solo números?*

Es: *Y letras*

P: *Y como se llaman esas expresiones*

Es: *Algebra*

P: *Algebra es lo que engloba a todo, pero estas expresiones tienen un nombre*

¿Cómo se llaman las expresiones que tienen números, letras y operaciones?

E16: *¿Algebraicas?*

P: *Expresiones ¿Qué?*

Es: *Algebraicas*

P: *Por lo tanto, una expresión algebraica está dentro de una ecuación*

Y dijimos, una ecuación es una igualdad ¿entre quién?

E15: *Expresiones algebraicas*

P: *Es una igualdad entre expresiones algebraicas, ¿Cuántas expresiones?*

Es: *Dos expresiones*

P: *Entre dos expresiones algebraicas*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocer que una ecuación se puede definir a través de sus características.

KoT 4. Conocer que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que mantienen una relación.

KSM 2. Conocer que las propiedades que subyacen de los números reales se aplican para resolver ecuaciones a través de las operaciones aritméticas (suma y multiplicación).

TRU:

EF 2. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la discusión posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando posibles malentendidos.

DC 4. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

EF 1. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la instrucción posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes.

API 4. El estudiante tiene amplia oportunidad y agencia para desarrollar sus ideas interactuando con el maestro, llevándolo a la discusión en clase al término del trabajo individual.

Evento de término: La maestra concluye con la definición de ecuación.

Sesión 3

La clase 3 se llevó a cabo el lunes 14 de marzo del 2022. Durante esta clase lo primero que se realizó fue un recordatorio de lo que era una ecuación y cada una de sus partes que la componen. Después se trabajó con la balanza para identificar propiedades de la igualdad que servirían posteriormente para la resolución de algunas ecuaciones.

Episodio 1: Método de la balanza. (Línea 7-21)

Objetivo general: Definir un procedimiento de resolución de ecuaciones lineales.

Evento desencadenante: La maestra les presenta la balanza para identificar su funcionamiento y características relacionadas con la igualdad y las propiedades.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P:	*Dijimos, ¿Qué es lo más importante para que se dé una ecuación?*
E2:	*Que tenga expresiones algebraicas*
P:	*¿Qué tenga qué?*
E2:	*Expresiones algebraicas*
P:	*Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas*
	Pero que es lo más importante de una expresión algebraica
	Sin que elemento no puede ser una expresión algebraica
Es:	*Letras*
P:	*Sin las letras, bien*
	Vamos a continuación traigo un material que vamos a ver
	¿Alguien sabe que es este material que tengo aquí enfrente?
E3:	*Una balanza*
P:	*Una balanza, muy bien*
	¿Alguien sabe cómo se utiliza una balanza?
Es:	*Ponen algo para pesar cosas, con eso pesan cosas*
P:	*a ver de uno en uno*
E4:	*Con ese miden las cosas*
E3:	*Pesan las cosas*
P:	*Para pesar las cosas*
	Pero si se fijan esta balanza tiene algo diferente a las que utilizamos
	Por ejemplo, a las que utilizamos en la carnicería
	Esas tienen un plato grande y le ponen las cosas y vas moviendo la pesita
	O en las digitales nomas pones las cosas y te da el peso en digital
	Este tipo de balanza nos sirve para comparar dos pesos
	El que vaya en este miembro y el que vaya en este otro miembro

Si yo quisiera comparar dos pesos tendría que poner en cada lado

Aquí traigo unas cosas, ejemplo este cubito, aproximadamente pesa 200 g

Si yo pongo este cubito aquí que lado está más inclinado

Es: *El izquierdo*

Si yo agrego otro cubito igual del mismo peso para donde se mueve

E3: *Para abajo*

P: *Pero si se fijan, que tengo que hacer para mantener el equilibrio*

E3: *Poner un cubito del otro lado*

P: *¿Un cubito nada más?*

E3: *Bueno ahí serian dos*

P: *Poner dos cubitos y si se fijan ahí se mantiene la balanza*

Ahí los dos miembros están iguales

Tanto es la misma cantidad en el miembro uno que en el miembro dos

Lo mismo pasa con las ecuaciones

Tienen que valer lo mismo en el miembro uno que en el miembro dos

¿Qué pasa si a una ecuación que es una igualdad yo le quito un cubito?

¿Sigue siendo una igualdad?

Es: *No*

P: *¿Qué tengo que hacer?*

E4: *Poner el cubito*

P: *Poner el cubito o*

Es: *Quitarlo*

P: *Quitar el cubito del otro lado, ¿Sí?*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocimiento de que una condición necesaria para que una expresión pueda llamarse algebraica es que tenga por lo menos una literal.

-**KMT 2**. Conocer que la balanza es un recurso didáctico que puede ayudar a entender el término de igualdad (pero limita una representación cuando los números en las ecuaciones son negativos).

- **KoT 2**. Conocer que las propiedades de la igualdad se cumplen también en la resolución de ecuaciones.

-Conocer que una igualdad es una equivalencia entre dos valores u objetos.

TRU:

DC 4. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

EF 1. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la instrucción posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes.

API 4. El estudiante tiene amplia oportunidad y agencia para desarrollar sus ideas interactuando con el maestro, llevándolo a la discusión en clase al término del trabajo individual.

Evento de término: La maestra concluye con otra explicación más profunda sobre el funcionamiento de la balanza relacionando su funcionamiento con una ecuación.

Episodio 2: Representación de una situación en la balanza. (Línea 69-90)

Objetivo general: Reconocer las propiedades que subyacen a la resolución de ecuaciones.

Evento desencadenante: La maestra relaciona y representa una situación en la que se comparan pesos de objetos específicos para hacer referencia a un método de resolución de ecuaciones.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P:	*¿Cómo represento un número que no sé cuánto vale?*
E6:	*Con una letra*
P:	*Con una letra, ¿cuál quieren?*
Es:	F, a
P:	*¿Una qué?*
E6:	F
P:	*Entonces si son cinco cubitos y cada uno lo vamos a representar con F*
	Y todos pesan lo mismo, ¿Cómo represento el lado de esta ecuación?
E7:	$5F$
P:	$5F =$
	Acuérdense que es una igualdad, ¿Cuánto pesan estos dos juntos?
Es:	$400\ g$
P:	400 *gramos, ahora si fíjense bien*
	Para saber cuánto pesa cada uno de estos cubitos vamos a hacer lo siguiente
	Se acuerdan que había un tipo de operaciones que, ¿Cómo se llamaban?
Es:	*Contrarias, eran operaciones inversas*
P:	*Inversas, operaciones inversas*
	¿Para qué nos van a servir las operaciones inversas?
	Para poder despejar la incógnita
	¿Cuál es la característica principal de la ecuación, encontrar qué?
	Vamos a anotarlo
	Donde su principal objetivo es encontrar el valor de la incógnita

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocer que se puede representar un valor que se desconoce a través del lenguaje algebraico.

-Conocer que el uso de la variable se aplica con diferente significado en las ecuaciones.

KoT 5. Conocer que resolver una ecuación significa encontrar el valor incógnita usando diferentes propiedades.

KoT 4. Conocer que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que mantienen una relación.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

API 1. Los estudiantes tienen oportunidad de explicar sus ideas y el razonamiento del maestro ayuda a la apropiación de ideas de los estudiantes en exposición además de que responden y construyen sobre las ideas de los demás.

DC 4. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

EF 1. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la instrucción posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes.

API 4. El estudiante tiene amplia oportunidad y agencia para desarrollar sus ideas interactuando con el maestro, llevándolo a la discusión en clase al término del trabajo individual.

Evento de término: La maestra les menciona lo que significa resolver una ecuación.

Episodio 3: Representación de una situación en la balanza. (Línea 101-119)

Objetivo general: Reconocer las propiedades que subyacen a la resolución de ecuaciones.

Evento desencadenante: La maestra relaciona y representa una situación en la que se comparan pesos de objetos específicos para hacer referencia a un método de resolución de ecuaciones.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P: *Porque tenemos 5 cubitos y yo solo quiero saber uno solo*

Pero dijimos como es una igualdad si divido el $400 \div 5$

El otro miembro de la igualdad también lo tengo que dividir entre 5

Si me explico, ¿Cuánto es $5 \div 5$*?*

Es: 1

P: 1*, por lo tanto me queda la pura F pero cuando es una el número no se escribe*

$F =$*, ¿* $400 \div 5$*?*

E6: 80

P: $8 * 5 = 40$*, ¿Cuánto vale cada uno de estos?*

E8: $80\ g$

P: 80 *gramos…de tal manera que juntos de dan los 400*

Vamos a ver otra, ¿Quién trae un objeto para medir?

E6: *¿Un celular?*

P: *Si*

/El alumno pasa al frente a poner el celular en la balanza/

P: *Ahí está, vamos a ver cuántos cubitos pesa*

/La maestra pone algunos cubitos y pregunta/

P: *¿Ahí ya pesan lo mismo?*

Es: *Si*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-**KFLM 2**. Saber que una de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

Evento de término: La maestra concluye con la relación del peso de los cubos con el objeto considerado (celular).

Episodio 4: Resolución de ecuaciones con el método de la balanza. (Línea 153-188)

Objetivo general: Aplicar el método de la balanza para resolver ecuaciones lineales.

Evento desencadenante: La maestra propone a los estudiantes algunas ecuaciones que deben resolver utilizando el método de la balanza.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P: *Y siempre hay que mantener esa igualdad*

Si yo quito 7 del primer miembro de la ecuación también lo quito del segundo

/La maestra se dirige a uno de los alumnos y le dice lo siguiente/

P: *Por favor cámbiese de lugar, cámbiese para allá*

Sí, dudas hasta aquí

Vamos a resolver unas ecuaciones para ver si es cierto que vamos entendiendo

Igual les voy a ir ayudando, escriban consigna número tres

De manera individual resuelve las siguientes ecuaciones

/La maestra anota en el pintarrón las ecuaciones/

$C + 7 = 25$

$9x + 7 = 52$

$7.5y - 3.25 = 17$

$5n - 2 = 5.5$

$\frac{2}{7}m = 44$

$47m = 376$

$x + 1 = x - 2$

$5x + 6 = 3x + 12$

P: *Listo, ya las acabaron de anotar*

/Pasa un tiempo y algunos alumnos terminan/

P: *Bien, les voy a ayudar con la primera, ¿listo?*

Fíjense bien, la primera nos dice un número que no conozco más 7 *es* 25

Cuánto vale ese número, si

Dijimos, lo que se trata en una ecuación es encontrar la incógnita

De saber cuánto vale esa letra

Como le vamos a hacer, con las operaciones inversas

Primero para poder dejar la letra sola, que número necesito quitar

E12: *¿Cómo?*

P: *Para poder dejar la letra en el primer miembro de la ecuación que debo quitar*

Es: *El* 7

P: *Y el* 7 *qué está haciendo en esa ecuación*

Es: *Sumar*

P: *Sumar, por lo tanto para poder quitar ese 7 lo tengo que restar*

Pero dijimos lo que hagamos en el primer miembro de la ecuación

También se lo tengo que hacer al segundo

Es decir, en el segundo miembro también tengo que restar

Dudas hasta ahí

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocimiento de que una forma de enseñar las ecuaciones es a través de un ejemplo y reproducción del mismo procedimiento.

-Conocimiento de que el recurso de la balanza debe trascender a un objeto o procedimiento matemático.

-**KFLM 1**. Conocer que los alumnos pueden aprender a resolver ecuaciones lineales a través de problemas contextuales.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

Evento de término: La maestra les muestra cómo se resuelven los ejercicios y después les deja trabajar de manera individual.

Episodio 5: Resolución de ejercicios. (Línea 233-247)

Objetivo general: Que los alumnos puedan resolver algunos ejercicios de ecuaciones y comprueben sus resultados.

Evento desencadenante: La maestra propone algunas ecuaciones que deben resolver y comprobar sus resultados.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P: *Pero dijimos si este va dividido, del otro lado también hay que dividirlo cuanto es* $9 \div 9 =$

Es: 1

P: *Por lo tanto ya me queda la pura letra* x*, ¿Cuánto es* $45 \div 9 =$*?*

Es: 5

P: *Quiere decir que esa letra que yo buscaba vale* 5

Vamos a comprobar a ver si es cierto

$9(5) + 7 = 52$ *en lugar de poner la* x *pongo su valor*

¿Cuánto es $9 * 5 =$*?*

Es: 45

P: $45 + 7 =$

Es: 52

P: *Igual a* 52*, se fijan que se cumple la igualdad*

Nuestra ecuación sigue estando igual

¿Por qué?, porque ya encontramos cuánto vale esa letra

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocer que una forma de comprobar el resultado de una ecuación es a través de la sustitución.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

C4. Las intervenciones del profesor con los estudiantes individuales apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.

Evento de término: La maestra les muestra cómo se resuelve y sustituye en una ecuación para comprobar sus resultados.

Sesión 4

La clase 4 se llevó a cabo el martes 15 de marzo del 2022. Durante esta clase lo primero que se realizó fue recordar a los estudiantes nuevamente lo que era una ecuación. Posteriormente se retomaron los ejercicios inconclusos de la clase pasada para finalizar con su resolución.

Episodio 1: Resolución de ejercicios. (Línea 11-19)

Objetivo general: Que los alumnos puedan resolver algunas ecuaciones.

Evento desencadenante: La maestra propone terminar de resolver algunas ecuaciones que estaban inconclusas de la clase pasada.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P: *En las expresiones algebraicas, ¿Cuál es su principal característica?*

Es: *Encontrar el valor, la letra*

P: *La letra y en la ecuación tenemos que encontrar la incógnita*

En la actividad pasada estaban haciendo unas ecuaciones

E2: *¿Son estas? Maestra*

P: *Así es, esas*

Pregunto, ¿las terminaron?

Es: *No, si*

P: *Levante la mano quién si terminó las ecuaciones*

Dos personas las terminaron, bien

Les voy a dar 10 minutos para que las acaben

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocer que cada objeto matemático recibe un nombre específico dentro de la matemática y sobre todo en el tema de ecuaciones.

KPM 1. Conocer el papel que juega la estrategia para poder plantear un problema matemático.

KoT 5. Conocer que resolver una ecuación significa encontrar el valor incógnita usando diferentes propiedades.

KFLM 4. Conocer que una concepción del estudiante es que siempre hay un resultado correcto.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

C4. Las intervenciones del profesor con los estudiantes individuales apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.

Evento de término: La maestra permite a los estudiantes resolver los ejercicios faltantes.

Episodio 2: Resolución de ejercicios. (Línea 37-54)

Objetivo general: Que los alumnos terminen de resolver las ecuaciones propuestas.

Evento desencadenante: La maestra propone terminar de resolver algunas ecuaciones que estaban inconclusas y atiende las dudas con algunas explicaciones.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P: *Excelente, díctenme la primera ecuación por favor*

Es: $C + 7 = 25$

E1: C *es igual a* 18

P: *Fíjense bien, si queremos encontrar el valor de la incógnita, dijimos*

Tenemos que despejarla o dejarla sola a la incógnita

Es: *Si*

P: *En esa ecuación, ¿qué me está sobrando o faltando en el primer miembro?*

E3: *El* 7

P: *¿El qué?*

E3: *El* 7

P: *¿Y el* 7 *qué operación está haciendo?*

Una

Es: *Resta*

P:	*¿él +7 está restando?*
Es:	*No, está sumando*
P:	*¿Y cómo lo voy a quitar?*
Es:	*Restando*
P:	*Exacto, con su operación inversa*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conocer que el despeje se aplica para encontrar el valor de la incógnita a través de la aplicación de diferentes propiedades

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

DC 1. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

Evento de término: La maestra permite a los estudiantes resolver los ejercicios faltantes.

Episodio 3: Explicación de un ejercicio. (Línea 77-89)

Objetivo general: Que los alumnos terminen atiendan a un orden específico en la resolución de ecuaciones.

Evento desencadenante: La maestra explica uno de los ejercicios para resolverlo y atender a l orden en que debe hacerse.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P:	*Fíjense, primero antes que nada*
	Para dejar sola a la incógnita que debemos quitar
E4:	*El* 5
Es:	*El* 5 *y el* 2
P:	*Vamos a iniciar primero con el dos que es el que no tiene a la literal*
	¿Qué operación está haciendo el dos?
Es:	*Una resta*
P:	*Una resta, ¿Cómo la voy a quitar con su operación inversa?*
Es:	*Con una suma*
P:	$5n - 2 + 2 = 5.5$
	Y dijimos, lo que quite o ponga en el primer miembro de la ecuación
E5:	*Se hace en el segundo*
P:	*También se hace en el segundo sí, igualito*

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conoce que uno de los errores comunes al resolver ecuaciones lineales se debe al orden en que se realizan los despejes.

TRU:

C1. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas.

AEC 4. La atención del profesor está clara y ampliamente disponible para aquellos estudiantes que lo necesiten, lo que resulta en un acceso profundo a las matemáticas.

Evento de término: La maestra apoya a los alumnos en la resolución de un ejercicio y después continúan en el trabajo individual.

Sesión 5

La clase 5 se llevó a cabo el día miércoles 15 de marzo del 2022. Durante esta clase lo primero que se realizó fue el planteamiento de una hoja de trabajo que incluyen problemas contextualizados sobre ecuaciones lineales. Para esto primero la maestra reparte las hojas a los estudiantes y después procede a explicar cómo se realizará cada ejercicio. Finalmente les permite realizar los ejercicios a cada estudiante.

Episodio 1: Resolución de ejercicios contextualizados sobre ecuaciones lineales. (Línea 4-16)

Objetivo general: Que los alumnos resuelvan algunos ejercicios contextualizados a través del planteamiento de ecuaciones.

Evento desencadenante: La maestra presenta la actividad contenida en una hoja de trabajo y explica cómo realizarla.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P:	*Bien, dice resuelve los siguientes ejercicios a través de la formulación…*
	de una ecuación, recuerda que debes encontrar el valor de la incógnita
	Vuelvo a preguntar, ¿qué es la principal característica de una ecuación?
Es:	*La letra*
P:	*¿Y cómo se le conoce a esa letra?*
Es:	*Incógnita*
P:	*¿Y la principal función de una ecuación es…?*
E1:	*Descubrir la incógnita*
P:	*Descubrir la incógnita, perfecto*
	Ahora fíjense bien, tenemos cuatro problemas
	El último problema es como el que hicimos anteriormente en el cuadernillo
	¿Se acuerdan? De cuando poníamos el perímetro de una figura

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-**KoT 5**. Conocer que resolver una ecuación significa encontrar el valor incógnita usando diferentes propiedades.

-**KMLS 3**. Conocer que uno de los conocimientos que antecede a las ecuaciones es el uso de letras en distintos problemas con las que es posible operar.

TRU:

C4. Las intervenciones del profesor con los estudiantes individuales apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.

DC 4. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

API 4. El estudiante tiene amplia oportunidad y agencia para desarrollar sus ideas interactuando con el maestro, llevándolo a la discusión en clase al término del trabajo individual.

EF 4. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y las discusiones posteriores responden a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes.

Evento de término: La maestra comienza con la explicación de los ejercicios de manera puntual.

Episodio 2: Explicación de ejercicios. (Línea 24-63)

Objetivo general: Que los alumnos entiendan como se resuelven los ejercicios de la actividad planteada.

Evento desencadenante: La maestra explica cómo se realiza uno de los ejercicios relacionándolo con un tema visto anteriormente.

Extracto:

P = Profesora

E1, E2, …= Estudiante 1, Estudiante 2

Es = Estudiantes

// = Acciones que suceden entre el diálogo

Evidencia:

P: *¿cómo obtengo yo el perímetro de esa figura?*

E2:	*Sumando*
P:	*Sumando, ¿Qué voy a sumar?*
E2:	*Los lados*
P:	*¿Cuántos lados son?*
Es:	*Seis*
P:	$x + x + x + x + x + x = 48$
	¿Igual a cuánto?
Es:	48
P:	48*, ¿cómo puedo simplificar esta ecuación?*
	¿Cuántas x *son?*
Es:	6
E3:	$x * 6$
P:	$6x = 48$
	Si yo quiero saber cuál es el valor de ese lado
	¿Qué tengo que hacer en esa ecuación?
E4:	*Quitar la* x
P:	*¿Quitar el que?*
E4:	*Digo el* 6
P:	*Quitar el* 6*, ¿Cómo lo quito?*
Es:	*Dividiendo*
P:	*Dividiendo entre* $\frac{6x}{6} = \frac{48}{6}$
	6 *entre* 6 *me da a* 1 *y me queda la pura* x*, ¿Cuánto es* 48 *entre* 6*?*
	¿Cuántas veces cabe el 6 *en el* 48*?*
Es:	8
P:	*Ahora si cuánto vale cada lado*
Es:	8
P:	$6 * 8 = 48$
	Ya hicieron una ecuación y ya la resolvieron, Si
	Ojo, en las otras dos figuras en una es perímetro y en la otra es área

¿Qué operación dijimos que íbamos a indicar en el área?

E5: Una multiplicación

P: Una multiplicación, ¿y en el perímetro?

E6: Una suma

P: Por ejemplo dice el primero

Si tenemos una caja de manzanas y nos comemos 3 da como resultado 18

¿Cuántas manzanas había al inicio? ¿Sabemos cuántas manzanas había?

Es: No

P: ¿Cómo lo representamos?

Es: Con una letra

Conocimientos encontrados:

MTSK:

-Conoce que la simplificación puede ayudar a resolver una ecuación lineal.

KSM 2. Conocer que las propiedades que subyacen de los números reales se aplican para resolver ecuaciones a través de las operaciones aritméticas (suma y multiplicación).

KPM 1. Conocer el papel que juega la estrategia para poder plantear un problema matemático.

KFLM 1. Conocer que los alumnos pueden aprender a resolver ecuaciones lineales a través de problemas contextuales.

KFLM 2. Saber que una de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico.

TRU:

C4. Las intervenciones del profesor con los estudiantes individuales apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas.

DC 4. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas.

API 4. El estudiante tiene amplia oportunidad y agencia para desarrollar sus ideas interactuando con el maestro, llevándolo a la discusión en clase al término del trabajo individual.

EF 4. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y las discusiones posteriores responden a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes.

AEC 4. La atención del profesor está clara y ampliamente disponible para aquellos estudiantes que lo necesiten, lo que resulta en un acceso profundo a las matemáticas.

Evento de término: La maestra concluye con la explicación de los ejercicios y permite que los alumnos trabajen de manera individual.

5.3 Análisis de la entrevista

Para recabar información importante acerca del conocimiento del profesor que es relevante para nuestra investigación y el desarrollo de este tema se consideraron varias preguntas. Estas tenían un objetivo específico dentro de las categorías del MTSK y aspectos relacionados con el TRU. Dicha entrevista consta de 27 preguntas (Véase anexo 3) y de la cual se muestran los resultados obtenidos a continuación.

La nomenclatura en color rojo sigue correspondiendo a los indicadores iniciales del MTSK encontrados en la respuesta de la profesora para cada una de las preguntas. Sobre esta no se consideraron aspectos del TRU dado que los indicadores estaban en función de la manera de trabajar en cada sesión.

Esto no significa que se deja de lado sino más bien ese referente se combinará con los indicadores del MTSK para observar coincidencias entre los mismos marcos y evidenciando aquellos aspectos que prevalecen en relación a una comprensión robusta. Estos también se retoman en el apartado de resultados.

Cada uno de los conocimientos nuevos encontrados en la aplicación de este instrumento se presentan de manera ordenada por pregunta, resaltando lo observado en cursiva y con rojo aquellos que ya se encontraban dentro de los indicadores iniciales.

Pregunta 1

Sobre lo obtenido en esta pregunta podemos decir que la profesora tiene un conocimiento de que las ecuaciones han de aplicarse en el descubrimiento y análisis de situaciones a través de la modelación matemática. Más concretamente, permite la interpretación de modelos matemáticos en situaciones comunes como la compra de productos. De esto deducimos que un indicador reflejado sería el siguiente.

- Conocer que las ecuaciones se usan para interpretar situaciones a través de la modelación matemática.

Pregunta 2

A través de las respuestas de la profesora pudimos encontrar que los saberes que están presentes en el tema de ecuaciones lineales, los que presentan mayor relevancia son los del concepto de igualdad, valor faltante, relación de proporcionalidad y constante de proporcionalidad.

Sobre lo anterior podemos observar que no existe una claridad en cuanto a cómo impacta o concibe la profesora el concepto de igualdad, a lo que nos lleva a pensar que puede ser un indicio de que reconoce la necesidad de usar las propiedades de la igualdad. Cabe resaltar también que de los otros saberes mencionados pueden ser simplemente temas que tengan conexión con el de ecuaciones lineales y para lo cual se reconocen los siguientes indicadores.

- Conocer que el concepto de igualdad se relaciona con las ecuaciones a través del procedimiento de despeje.

- Conocer que las ecuaciones lineales se conectan con la proporcionalidad a través del cálculo del valor faltante

- Conocer que las ecuaciones lineales se conectan con la proporcionalidad a través del cálculo de la constante de proporción.

Pregunta 3

Sobre lo obtenido en esta pregunta pudimos encontrar que la profesora tiene conocimiento de que las propiedades que se ponen en juego a la hora de resolver ecuaciones lineales son las propiedades de igualdad. De esto deducimos el siguiente indicador.

- **KoT 2**. *Conocer que las propiedades de la igualdad se cumplen también en la resolución de ecuaciones.*

Pregunta 4

A través de esta pregunta, la profesora nos expresó que ella conocía una ecuación como una igualdad entre dos expresiones algebraicas y nos hizo referencia a las partes de la ecuación, por lo cual deducimos los siguientes indicadores.

- **KoT 3**. *Conocer que las ecuaciones lineales se representan por medio de letras, números y operaciones.*

- **KoT 4**. *Conocer que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que mantienen una relación.*

Pregunta 5

A partir de la respuesta de la maestra a esta pregunta podemos constatar que tiene conocimiento sobre que en la resolución de una ecuación se encuentran inmersas las propiedades inversas para llevar a cabo un procedimiento llamado despeje. De esto deducimos los siguientes indicadores.

- Conocer que el despeje es un procedimiento que permite obtener el valor de la incógnita a través de la aplicación de diferentes propiedades.

- **KoT 2**. *Conocer que las propiedades de la igualdad se cumplen también en la resolución de ecuaciones.*

Pregunta 6

Sobre la respuesta de la maestra a esta pregunta da cuenta de que tiene conocimiento sobre temas que se conectan con las ecuaciones y de qué manera esto sucede. De esto tenemos los siguientes indicadores.

- Conocer que las ecuaciones cuadráticas se conectan con las ecuaciones lineales a través de su resolución

- Conocer que la proporcionalidad se conecta con las ecuaciones a través de una constante de proporcionalidad.

Pregunta 7

A través de la respuesta de la maestra a esta pregunta observamos que tiene conocimiento de que ciertos saberes de las ecuaciones están conectados con otros temas por ejemplo la regla de tres. Por esto deducimos los siguientes indicadores.

- Conocer que la regla de tres se conecta con las ecuaciones a través de la proporcionalidad

- **KSM 3**. *Conocer que las ecuaciones lineales se relacionan con las razones trigonométricas a través del despeje.*

Pregunta 8

A partir de la respuesta de la maestra a esta pregunta pudimos observar que posee un conocimiento sobre que las ecuaciones se usan de manera indirecta en temas como la proporcionalidad directa, ecuaciones cuadráticas y problemas de tipo valor faltante. De esto que deducimos el siguiente indicador.

- Conocer que las ecuaciones se aplican en temas y ejercicios que de tipo valor faltante.

Pregunta 9

A través de lo descrito por la maestra pudimos encontrar que tiene conocimiento sobre que una condición necesaria y suficiente para considerar una expresión matemática como ecuación lineal es la incógnita. Por esto deducimos el siguiente indicador.

- Conocer que una condición necesaria para que exista una ecuación es el uso de la incógnita.

Pregunta 10

A través de la respuesta de la maestra a esta pregunta pudimos dar cuenta de que posee un conocimiento sobre el uso de las ecuaciones para demostrar otras cuestiones como la resolución de ecuaciones cuadráticas.

- Conocer que la demostración permite validar resultados de ecuaciones por diferentes medios (aritméticos o por propiedades).

Pregunta 11

A partir de la respuesta de la maestra pudimos encontrar que posee un conocimiento sobre cómo determinar una definición. Esta puede ser a través de sus características. También que se puede definir a través de lo que sí es y no es, o a través de sus propiedades haciendo alusión a los Van Hiele.

- Conocer que se puede definir un objeto matemático a partir de sus propiedades o características.

- Conocer que se puede definir a través del saber sobre la demostración de reducción a lo absurdo.

Pregunta 12

A partir de la respuesta de la maestra encontramos un indicio de que posee un conocimiento sobre que sus estudiantes pueden aprender a través de los procesos mentales que conforman el sistema llamado APOE, en el cual realizan una acción sobre un objeto para después encapsularla y hacer un proceso, después se interioriza y se puede convertir en un objeto matemático.

- Conocer que el aprendizaje de los estudiantes se puede desarrollar a partir de transitar sobre las fases de la teoría APOE.

Pregunta 13

De la respuesta a esta pregunta se identifica que la maestra tiene conocimiento de que los estudiantes pueden aprender mejor si se inicia con actividades de tipo valor faltante con igualdad, ya que de manera indirecta usarán las operaciones inversas. De esto deducimos el siguiente indicador.

- **KFLM 1**. *Conocer que los alumnos pueden aprender a resolver ecuaciones lineales a través de problemas contextuales.*

Pregunta 14

De la respuesta de la maestra se encontró que considera que el álgebra en general es una dificultad para los estudiantes. Por ejemplo, el pasar de lo aritmético a lo algebraico y en ocasiones que no entienden que las letras pueden representar números que se desconocen además de que estas mismas letras se pueden operar. De esto encontramos los siguientes indicadores.

- Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es en la operatividad de las literales como números generales.

- **KFLM 2**. *Saber que una de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico.*

Pregunta 15

A partir de la respuesta de la maestra encontramos que posee un saber acerca de que los estudiantes, al enfrentarse a la resolución de ecuaciones lineales, siempre quieren llegar a un resultado numérico. De esto deducimos los siguientes indicadores

- Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es que siempre quieren llegar a un resultado numérico.

Pregunta 16

Sobre esta pregunta y la respuesta de la maestra podemos observar que el aprendizaje de las ecuaciones permite a los estudiantes desarrollar un pensamiento matemático y algebraico y, sobre todo, les dota de conocimiento sobre que hay situaciones que se pueden generalizar y modelar. Sobre esto determinamos el siguiente indicador.

- Conocer que el aprendizaje de las ecuaciones permite robustecer el saber del estudiante sobre la modelación y generalización matemática.

Pregunta 17

A través de lo descrito en esta pregunta por la maestra encontramos que uno de los procedimientos usuales que usan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales es a través de procesos aritméticos sin necesidad de usar las operaciones inversas o a través del ensayo y error. De esto encontramos el siguiente indicador.

- Conocer que uno de los procedimientos usuales de los estudiantes sal resolver ecuaciones lineales es a través del uso de lo aritmético.

- KPM 2. *Conocer el papel del ensayo y error para resolver una ecuación de primer grado.*

Pregunta 18

A través de la respuesta de la maestra a esta pregunta pudimos encontrar que posee un conocimiento sobre que reconoce en los estudiantes una concepción de que las matemáticas son difíciles y que se necesita tener mucho conocimiento para hacer cálculos mentales. De esto deducimos el siguiente indicador.

- Conocer que una concepción del estudiante es que las matemáticas son difíciles.

- **KFLM 4**. *Conocer que una concepción del estudiante es que siempre hay un resultado correcto.*

Pregunta 19

A partir de la respuesta de la maestra a esta pregunta encontramos que para la planificación de las clases considera el contenido a aprender, además de cómo se puede presentar determinado conocimiento en la vida cotidiana y el tipo de material tangible que pueden utilizar. A partir de esto encontramos el siguiente indicador.

- **KFLM 1**. *Conocer que los alumnos pueden aprender a resolver ecuaciones lineales a través de problemas contextuales.*

- Conocer que el aprendizaje de las ecuaciones lineales puede apropiarse a través del uso de material tangible.

Pregunta 20

A través de la respuesta de la profesora lo que encontramos es que el conocimiento que debe dominar el estudiante después de haber cursado ecuaciones lineales es saber que es una igualdad y poder resolverla mediante operaciones inversas. De esto deducimos el siguiente indicador.

- **KoT 4**. *Conocer que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que mantienen una relación.*

- **KoT 5**. *Conocer que resolver una ecuación significa encontrar el valor incógnita usando diferentes propiedades.*

Pregunta 21

A partir de la respuesta de la maestra encontramos que tiene conocimiento de que los temas que anteceden a las ecuaciones lineales son que conozcan los elementos de una expresión algebraica, la distinción de cada elemento (por ejemplo, un coeficiente o un exponente) y que comprendan la función de cada elemento, así como las operaciones básicas. De esto deducimos el siguiente indicador.

- *Conocer que uno de los temas que anteceden a las ecuaciones lineales es el de las expresiones algebraicas.*

- *Conocer que uno de los temas que anteceden a las ecuaciones lineales es el de las operaciones básicas.*

Pregunta 22

A partir de lo descrito por la maestra encontramos que posee un conocimiento sobre temas que se apoyan en las ecuaciones lineales, tales como las ecuaciones cuadráticas, la proporcionalidad directa, regla de tres, manejo de información y modelación. De esto reconocemos el siguiente indicador.

- *Conocer que uno de los temas que se desarrollan después del de ecuaciones lineales es el de ecuaciones cuadráticas.*

- *Conocer que uno de los temas subsecuentes a las ecuaciones lineales es el de proporcionalidad directa.*

Pregunta 23

A través de la respuesta de la maestra a esta pregunta encontramos indicios de que piensa que no existe una fórmula secreta o única para enseñar, pero desde su punto de vista se pueden enseñar las matemáticas tomando en consideración la teoría APOE, representaciones semióticas o la Teoría de situaciones didácticas. De esto encontramos los siguientes indicadores.

- *Conocer que el "las representaciones semióticas" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales.*

- *Conocer que la "teoría APOE" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales.*

- *Conocer que la "teoría de situaciones didácticas" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales.*

Pregunta 24
En esta pregunta no se obtuvo respuesta debido a que era muy similar a la siguiente.

Pregunta 25
A partir de lo descrito como respuesta a esta pregunta encontramos que la maestra conoce que para que los estudiantes aprendan y se involucren se debe promover que sean partícipes de su aprendizaje y que puedan autorregularse. De esto deducimos el siguiente indicador.

- Conocer que la participación del estudiante es un factor fundamental en el proceso de aprendizaje.

Pregunta 26
A partir de lo descrito como respuesta a esta pregunta encontramos que para la maestra el lograr una enseñanza efectiva implica fijarse en el tipo de participación que aportan a la clase los estudiantes, el nivel de preguntas que realizan, los ejemplos que ellos pueden elaborar. De esto encontramos los siguientes indicadores.

- Conocer que la participación hablada en clase es muy importante para el aprendizaje de los estudiantes.

- Conocer que el nivel de preguntas que realizan los estudiantes refiere a un nivel de apropiación de los temas matemáticos.

- Conocer que el dar un ejemplo de algo matemático significa poseer un nivel de aprendizaje mayor.

Pregunta 27
A partir de lo descrito como respuesta a esta pregunta encontramos que posee un conocimiento acerca de recursos que pueden usarse para la enseñanza de las ecuaciones lineales, tales como la balanza, tableros de igualdad y además reconoce sus limitaciones. De esto encontramos los siguientes indicadores.

- **KMT 2**. *Conocer que la balanza es un recurso didáctico que puede ayudar a entender el término de igualdad (pero limita una representación cuando los números en las ecuaciones son negativos).*

Tema	Pregunta	Indicadores
T1	**1.** ¿Qué aplicaciones tienen las ecuaciones lineales?	*- Conocer que las ecuaciones se usan para interpretar situaciones a través de la modelación matemática.*
	2. ¿Qué saberes están presentes en el tema de ecuaciones lineales?	*- Conocer que el concepto de igualdad se relaciona con las ecuaciones a través del procedimiento de despeje.*

		- *Conocer que las ecuaciones lineales se conectan con la proporcionalidad a través del cálculo del valor faltante.* - *Conocer que las ecuaciones lineales se conectan con la proporcionalidad a través del cálculo de la constante de proporción.*
	3. ¿Qué propiedades se ponen en juego en la resolución de ecuaciones lineales?	- **KoT 2**. *Conocer que las propiedades de la igualdad se cumplen también en la resolución de ecuaciones.*
	4. ¿Cómo definiría lo que es una ecuación?	- **KoT 3**. *Conocer que las ecuaciones lineales se representan por medio de letras, números y operaciones.* - **KoT 4**. *Conocer que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que mantienen una relación.*
	5. ¿Qué procedimientos se utilizan para resolver una ecuación lineal?	- *Conocer que el despeje es un procedimiento que permite obtener el valor de la incógnita a través de la aplicación de diferentes propiedades.* - **KoT 2**. *Conocer que las propiedades de la igualdad se cumplen también en la resolución de ecuaciones.*
T2	**6.** ¿Qué otros conocimientos se conectan con las ecuaciones lineales y de qué manera?	- *Conocer que las ecuaciones cuadráticas se conectan con las ecuaciones lineales a través de su resolución* - *Conocer que la proporcionalidad se conecta con las ecuaciones a través de una constante de proporcionalidad.*
	7. ¿Qué procedimientos o razonamientos usados en las ecuaciones lineales se aplican dentro de otros temas matemáticos?	- *Conocer que la regla de tres se conecta con las ecuaciones a través de la proporcionalidad* - **KSM 3**. *Conocer que las ecuaciones lineales se relacionan con las razones trigonométricas a través del despeje.*
	8. ¿En qué otros temas matemáticos se usan o aplican las ecuaciones lineales de manera indirecta?	- *Conocer que las ecuaciones se aplican en temas y ejercicios que de tipo valor faltante.*
T3	**9.** ¿Qué condición es necesaria para considerar una expresión matemática como ecuación lineal?	- *Conocer que una condición necesaria para que exista una ecuación es el uso de la incógnita.*

	10. ¿Qué papel juega la demostración en el conocimiento sobre ecuaciones lineales?	*- Conocer que la demostración permite validar resultados de ecuaciones por diferentes medios (aritméticos o por propiedades).*
	11. A partir de la definición de ecuación que ha dado anteriormente, ¿Qué determina o que caracteriza a una definición?	*- Conocer que se puede definir un objeto matemático a partir de sus propiedades o características.* *- Conocer que se puede definir a través del saber sobre la demostración de reducción a lo absurdo.*
T4	**12.** ¿Cómo cree que aprenden matemáticas sus estudiantes?	*- Conocer que el aprendizaje de los estudiantes se puede desarrollar a partir de transitar sobre las fases de la teoría APOE.*
	13. ¿Cómo cree que aprenden mejor sus estudiantes las ecuaciones lineales?	- **KFLM 1**. *Conocer que los alumnos pueden aprender a resolver ecuaciones lineales a través de problemas contextuales.*
	14. ¿Qué dificultades presentan o han presentado sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas?	*- Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es en la operatividad de las literales como números generales.* - **KFLM 2**. *Saber que una de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico.*
	15. ¿Qué dificultades pueden existir en el aprendizaje de las ecuaciones lineales?	*- Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es que siempre quieren llegar a un resultado numérico.*
	16. ¿En que ayuda a los estudiantes el aprendizaje de las ecuaciones lineales?	*- Conocer que el aprendizaje de las ecuaciones permite robustecer el saber del estudiante sobre la modelación y generalización matemática.*
	17. ¿Qué procesos o estrategias usan habitualmente los estudiantes para la resolución ecuaciones lineales?	*- Conocer que uno de los procedimientos usuales de los estudiantes al resolver ecuaciones lineales es a través del uso de lo aritmético.* **- KPM 2**. *Conocer el papel del ensayo y error para resolver una ecuación de primer grado.*
	18. ¿Qué expectativas tienen sus estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas? ¿Y en específico de las ecuaciones lineales?	*- Conocer que una concepción del estudiante es que las matemáticas son difíciles.* - **KFLM 4**. *Conocer que una concepción del estudiante es que siempre hay un resultado correcto.*

T5	**19.** ¿Qué elementos considera usted para la planificación de la enseñanza de las matemáticas?	- **KFLM 1**. *Conocer que los alumnos pueden aprender a resolver ecuaciones lineales a través de problemas contextuales.* *- Conocer que el aprendizaje de las ecuaciones lineales puede apropiarse a través del uso de material tangible.*
	20. ¿Qué conocimientos deben dominar los alumnos al finalizar la enseñanza de las ecuaciones lineales en primer grado de secundaria?	- **KoT 4**. *Conocer que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que mantienen una relación.* - **KoT 5**. *Conocer que resolver una ecuación significa encontrar el valor incógnita usando diferentes propiedades.*
	21. ¿Qué temas le anteceden al aprendizaje de las ecuaciones lineales?	*- Conocer que uno de los temas que anteceden a las ecuaciones lineales es el de las expresiones algebraicas.* *- Conocer que uno de los temas que le anteceden a las ecuaciones lineales es el de las operaciones básicas.*
	22. ¿Qué temas se apoyan en el conocimiento sobre las ecuaciones lineales?	*- Conocer que uno de los temas que se desarrollan después del de ecuaciones lineales es el de ecuaciones cuadráticas.* *- Conocer que uno de los temas subsecuentes a las ecuaciones lineales es el de proporcionalidad directa.*
T6	**23.** ¿De qué manera enseña comúnmente matemáticas a sus estudiantes?	*- Conocer que el "las representaciones semióticas" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales.* *- Conocer que la "teoría APOE" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales.* *- Conocer que la "teoría de situaciones didácticas" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales.*
	24. ¿Qué actividades o estrategias matemáticas apoyan a los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones lineales?	

	25. ¿Qué acciones o estrategias lleva a cabo como profesor para que todos sus estudiantes se involucren en su aprendizaje y que importancia les da a las ideas que expresan?	*- Conocer que la participación del estudiante es un factor fundamental en el proceso de aprendizaje.*
	26. ¿Qué elementos de los estudiantes considera para lograr una enseñanza efectiva?	*- Conocer que la participación hablada en clase es muy importante para el aprendizaje de los estudiantes.* *- Conocer que el nivel de preguntas que realizan los estudiantes refiere a un nivel de apropiación de los temas matemáticos.* *- Conocer que el dar un ejemplo de algo matemático significa poseer un nivel de aprendizaje mayor.*
	27. ¿Qué recursos pueden usarse para la enseñanza de las ecuaciones lineales? ¿Qué ventajas y desventajas tienen estos al enseñar ecuaciones lineales?	- **KMT 2**. *Conocer que la balanza es un recurso didáctico que puede ayudar a entender el término de igualdad (pero limita una representación cuando los números en las ecuaciones son negativos).*

5.4 Análisis de las producciones de los estudiantes

Para iniciar este apartado debemos aclarar que la mayoría de los aspectos aquí señalados nos han servido para consolidar o encontrar referentes de los procesos que realizan los estudiantes con el único fin de enriquecer el conocimiento del profesor expuesto desde el desarrollo de la propuesta de actividades. Por tal motivo solo nos centramos en fragmentos de evidencia para resaltar estos saberes importantes que se deben dominar a partir de algunas situaciones o dificultades que se presentaron.

En concordancia con lo anterior, podemos observar en algunos de los estudiantes un procedimiento con base en dibujos o esquemas que le permiten desarrollar ciertas operaciones o cálculos, esto con el fin de poder dar solución a los ejercicios de valor faltante (Foto 1). También encontramos otras cuestiones como en el inciso ***c*** en cuanto a que se les dificultó a los estudiantes resolverlo, debido a que no lo contestaron y prefirieron saltarlo dado que incluía una fracción.

Estos planteamientos nos llevaron a identificar otras situaciones en torno a que es importante conocer aquellos posibles procesos que los estudiantes llevan a cabo para intentar responder cuestiones de este tipo. Saber que la representación de los números racionales en este tipo de ejercicios genera una dificultad en un proceso que quizá ya habían memorizado. Aunado a esto podemos decir que aún existe en los alumnos una necesidad de trabajar con algo concreto para poder interiorizarlo.

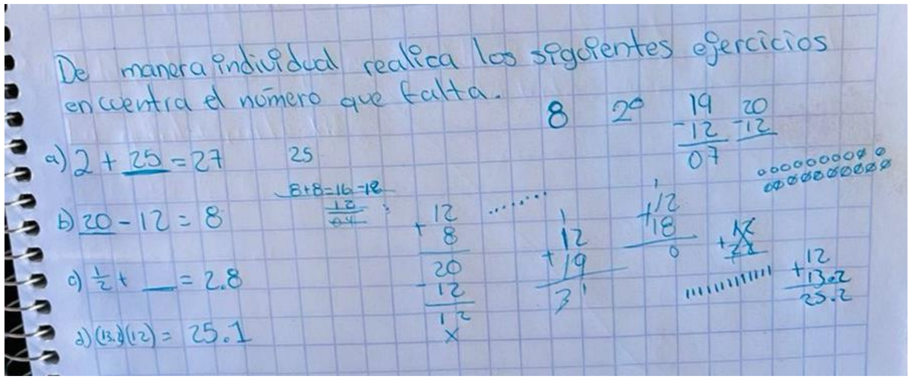


Foto 1. Evidencia de la producción del estudiante

Por otra parte, también podemos observar en los estudiantes procesos más complejos en cuanto al desarrollo de expresiones algebraicas en torno a la conversión del lenguaje común al algebraico, tales como el uso de la simplificación de expresiones, además de observarse un uso claro de los signos de multiplicación como lo es los paréntesis.

Resaltamos entonces que uno de los procesos que el profesor no debe pasar desapercibido es el de la simplificación de expresiones algebraicas aunado con la representación algebraica de un ejercicio o situación, con el fin de que los estudiantes además de resolver ecuaciones puedan interpretar un problema y representarlo de manera algebraica.

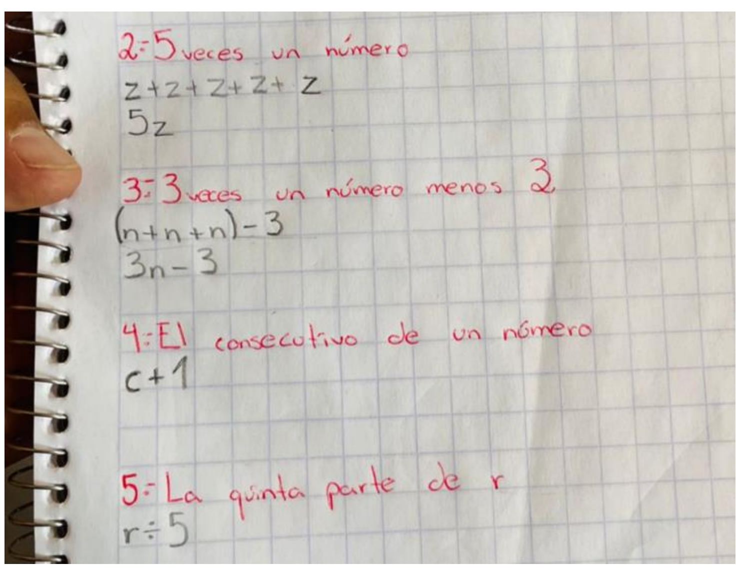


Foto 2. Evidencia de traducción del lenguaje.

En lo que respecta a los ejercicios finales de la sesión 5 se observó que para los estudiantes fue más sencillo la resolución de ecuaciones que el planteamiento de éstas. Como puede observarse en la evidencia (Foto 3) el primero de los ejercicios fue desarrollado por la profesora como ejemplo, pero para que los estudiantes pudieran resolver los otros dos.

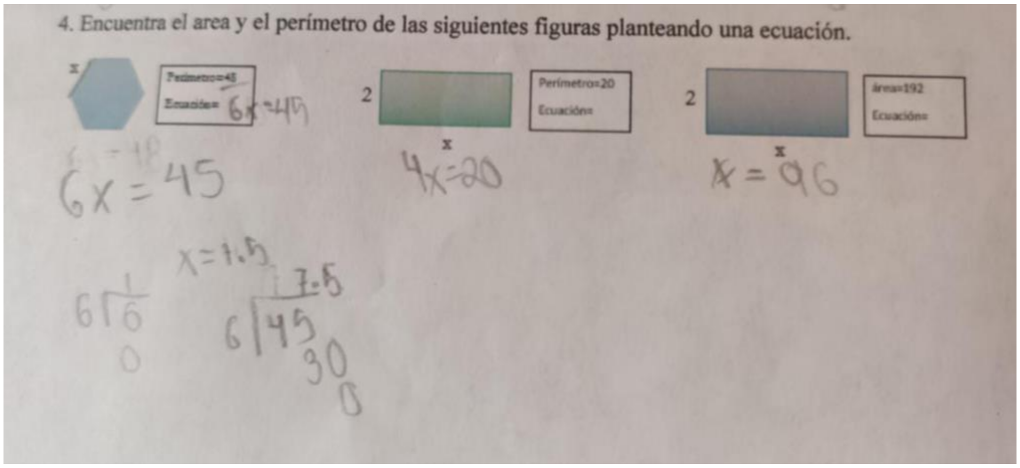


Foto 3. Producción del estudiante sobre planteamiento de ecuaciones.

Como resultado de ello se observó que dicho planteamiento se les dificultó a los estudiantes, lo que los llevó a recurrir a estrategias de relación directa de los valores sin discriminar el concepto que se les pedía. Muy pocos de los estudiantes lograron el planteamiento de la ecuación (Foto 4) del segundo problema, pero al pasar al tercero no se percataron de la diferencia entre el área y el perímetro.

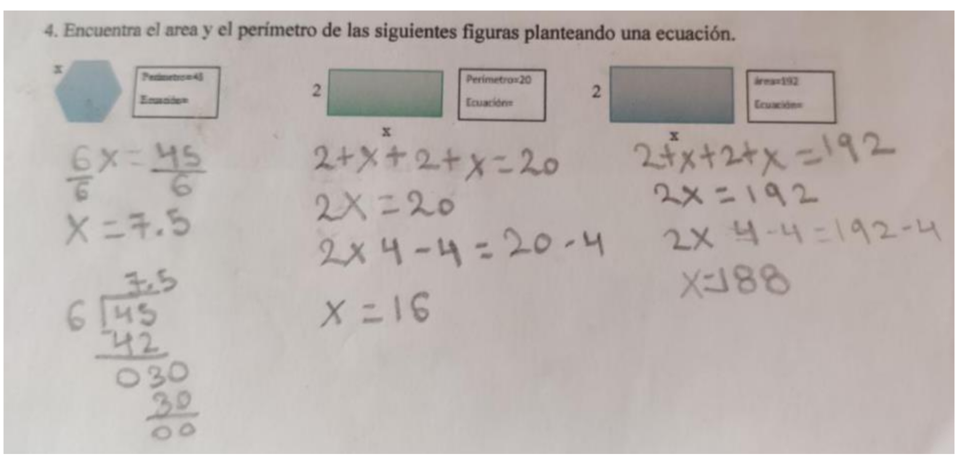


Foto 3. Producción del estudiante sobre planteamiento de ecuaciones.

Todos estos planteamientos relacionados con la producción de los estudiantes son de gran relevancia pues nos permiten observar diferentes perspectivas que afirman algunos de los indicadores identificados inicialmente, por ejemplo, el de la simplificación, o el uso de métodos heurísticos para la resolución de problemas.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de nuestra investigación, empezando por la descripción de los indicadores de conocimiento evidenciados durante las videograbaciones de clase tanto del MTSK y TRU, ubicando en cada una de las sesiones y episodios el momento en el que creemos que se puede mostrar tal conocimiento.

6.1 Indicadores del MTSK encontrados en las clases

A continuación, se presentan los indicadores evidenciados en cuanto al MTSK a partir del análisis de las videograbaciones y transcripciones de clase. Estos están reacomodados a la nomenclatura inicial y no se encuentran estructurados de la misma manera en la que se fueron desarrollando las clases, sino que se han ubicado en cada una de las categorías. Se ha conservado el color de los indicadores iniciales en el análisis además de que se ha agregado en conjunto los indicadores evidenciados tanto en la entrevista (en cursiva), así como también los de cada episodio de clase, considerando también que hubo algunos que se repitieron en ambos momentos.

De la tabla debe entenderse como S1, S2, S3, como "sesión 1", "sesión 2", "sesión 3". También debe entenderse a L como el número de línea al que corresponde la evidencia. Asimismo, T1 como el "tema de la entrevista" y P1, P2, P3, como "pregunta 1", "pregunta 2", "pregunta 3".

Dom.	Subdom.	Categoría	Indicador
MK	**KoT**	**Fenomenología y aplicaciones**	**KoT 1.** Conocer que las expresiones algebraicas se pueden usar para el cálculo y representación del perímetro de figuras. (S1-L 1-33)
			KoT 2. Conocer el origen de las ecuaciones y el uso de las expresiones algebraicas. (S2-L 36-60)
			KoT 3. Conocer el predecesor del álgebra como se conoce hasta ahora. (S2-L 36-60)
			KoT 4. *Conocer que las ecuaciones se usan para interpretar situaciones a través de la modelación matemática. (T1-P1)*
		Propiedades y sus fundamentos	**KoT 5.** Saber que la x ya no se usa en álgebra en términos de la multiplicación. (KFLM) (S1-L 1-33)
			KoT 6. Conocer que las propiedades de la igualdad se cumplen también en la resolución de ecuaciones. (S1-L 35-102) (S3-L 7-21) *(T1-P3) (T1-P5)*
			KoT 7. Conocer que las propiedades que subyacen de los números reales se aplican para resolver ecuaciones

			a través de las operaciones aritméticas (suma y multiplicación). (S1-L 35-102) (S2-L 69-124) **KoT 8.** Conocer que un número y una letra juntas significan multiplicación. (S1-L 124-134)
		Registros de representación	**KoT 9**. *Conocer que las ecuaciones lineales se representan por medio de letras, números y operaciones. (T1-P4)* **KoT 10.** Conocer que las literales pueden ser números generales con los que es posible operar. (S1-L 1-33) **KoT 11.** Conocer que se puede representar un valor que se desconoce a través del lenguaje algebraico. (S3-L 69-90) **KoT 12.** Conocer que el uso de la variable se aplica con diferente significado en las expresiones algebraicas. (S3-L 69-90)
		Definiciones	**KoT 13**. Conocer que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que mantienen una relación. (S2-L 144-188) (S3-L 69-90) *(T1-P4) (T5-P20)* **KoT 14.** Conocer que una igualdad es una equivalencia entre dos valores u objetos. (S3-L 7-21)
		Procedimientos	**KoT 15**. Conocer que resolver una ecuación significa encontrar el valor incógnita usando diferentes propiedades. (S1-L 35-102) (S3-L 69-90) (S4-L 11-19) (S5-L 4-16) *(T5-P20)* **KoT 16.** Conocer que el despeje se aplica para encontrar el valor de la incógnita a través de la aplicación de diferentes propiedades. (S4-L 37-54) *(T1-P5)*
	KSM	**Conexiones de complejización**	
		Conexiones de simplificación	**KSM 1**. Conocer que las propiedades que subyacen de los números reales se aplican para resolver ecuaciones a través de las operaciones aritméticas (suma y multiplicación). (S2-L 144-188) (S5-L 24-63)

			KSM 2. *Conocer que el concepto de igualdad se relaciona con las ecuaciones a través del procedimiento de despeje. (T1-P2)* **KSM 3.** *Conocer que las ecuaciones cuadráticas se conectan con las ecuaciones lineales a través de su resolución. (T2-P6)*
		Conexiones de contenidos transversales	**KSM 4.** Conocer que la igualdad se relaciona con las ecuaciones lineales a través de su resolución. (S2-L 36-60) **KSM 5**. *Conocer que las ecuaciones lineales se conectan con la proporcionalidad a través del cálculo del valor faltante. (T1-P2)* **KSM 6**. *Conocer que la proporcionalidad se conecta con las ecuaciones a través de una constante de proporcionalidad. (T2-P6) (T2-P7)* **KSM 7**. *Conocer que las ecuaciones lineales se relacionan con las razones trigonométricas a través del despeje. (T2-P7)*
		Conexiones auxiliares	
	KPM	**Prácticas ligadas a la matemática en general**	**KPM 1**. Conocer el papel que juega la estrategia para poder plantear un problema matemático. (S4-L 11-19) (S5-L 24-63) **KPM 2.** Conocer que se puede definir un objeto matemático a través de sus propiedades. (S1-L 124-134) (S2-L 144-188) *(T3-P11)*
		Prácticas ligadas a una temática en matemática	**KPM 3.** Conocer que una condición necesaria o suficiente para nombrar una expresión como algebraica es el uso de la literal. (S1-L 124-134) (S3-L 7-21) **KPM 4**. Conocer el papel del ensayo y error para resolver una ecuación de primer grado. (S2-L 69-124) *(T4-P17)* **KPM 5.** Conocer que una forma de comprobar el resultado de una ecuación es a través de la sustitución. (S3-L 233-247)

			KPM 6. *Conocer que una condición necesaria para que exista una ecuación es el uso de la incógnita. (T3-P9)* **KPM 7**. *Conocer que la demostración permite validar resultados de ecuaciones por diferentes medios (aritméticos o por propiedades). (T3-P10)*
PCK	**KFLM**	**Formas de aprender**	**KFLM 1**. Conocer que los alumnos pueden aprender a resolver ecuaciones lineales a través de problemas contextuales. (S5-L 24-63) *(T4-P13) (T5-P19)* **KFLM 2**. *Conocer que el aprendizaje de los estudiantes se puede desarrollar a partir de transitar sobre las fases de la teoría APOE. (T4-P12)* **KFLM 3**. *Conocer que el aprendizaje de las ecuaciones lineales puede apropiarse a través del uso de material tangible. (T5-P19)* **KFLM 4**. *Conocer que la participación del estudiante es un factor fundamental en el proceso de aprendizaje. (T6-P25)*
		Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje	**KFLM 5**. Saber que una de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico. (S1-L 124-134) (S2- L 36-60) (S3-L 101-119) (S5-L 24-63) *(T4-P14)* **KFLM 6.** Conocer que una de las dificultades de los estudiantes al resolver ecuaciones lineales se debe al uso de los números racionales. (S2-L 69-124) **KFLM 7.** Conocer que uno de los errores comunes al resolver ecuaciones lineales se debe al orden en que se realizan los despejes. (S4-L 77-89) **KFLM 8**. *Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es en la operatividad de las literales como números generales. (T4-P14)* **KFLM 9**. *Conocer que una dificultad que presentan los estudiantes es que siempre quieren llegar a un resultado numérico. (T4-P15)*

		Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático	**KFLM 10**. *Conocer que uno de los procedimientos usuales de los estudiantes al resolver ecuaciones lineales es a través del uso de lo aritmético. (T4-P17)*
		Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas	**KFLM 11**. *Conocer que una concepción del estudiante es que las matemáticas son difíciles. (T4-P18)* **KFLM 12**. Conocer que una concepción del estudiante es que siempre hay un resultado correcto. (S4-L 11-19) *(T4-P18)*
	KMT	**Formas de enseñanza**	**KMT 1**. *Conocer que el "las representaciones semióticas" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales. (T6-P23)* **KMT 2**. *Conocer que la "teoría APOE" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales. (T6-P23)* **KMT 3**. *Conocer que la "teoría de situaciones didácticas" permite organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales. (T6-P23)*
		Recursos y materiales	**KMT 4**. Conocer que la balanza es un recurso didáctico que puede ayudar a entender el término de igualdad (pero limita una representación cuando los números en las ecuaciones son negativos). (S3-L 7-21) *(T6-P27)*
	KMLS	**Contenidos matemáticos que se requieren enseñar**	**KMLS 1**. Conocer cada uno de los conocimientos implicados en este tema es encontrar valor desconocidos. (S1- L 35-102) **KMLS 2.** Conocer la diferencia entre la aritmética y el álgebra. (S1-L 1-33)
		Conocimientos del nivel de desarrollo conceptual y	**KMLS 3**. Conocer que las ecuaciones lineales se abordan en primero de secundaria solo con una incógnita. (S1-L 35-102)

		procedimental esperado	**KMLS 4**. *Conocer que el nivel de preguntas que realizan los estudiantes refiere a un nivel de apropiación de los temas matemáticos. (T6-P26)* **KMLS 5**. *Conocer que el dar un ejemplo de algo matemático significa poseer un nivel de aprendizaje mayor. (T6-P26)*
		Secuenciación de diversos temas	**KMLS 6**. Conocer que uno de los temas que antecede a las ecuaciones es el uso de letras en distintos problemas con las que es posible operar. (S1-L 1-33) (S5-L 4-16) **KMLS 7**. *Conocer que uno de los temas que anteceden a las ecuaciones lineales es el de las expresiones algebraicas. (T5-P21)* **KMLS 8**. *Conocer que uno de los temas que anteceden a las ecuaciones lineales es el de las operaciones básicas. (T5-P21)* **KMLS 9**. *Conocer que uno de los temas que se desarrollan después del de ecuaciones lineales es el de ecuaciones cuadráticas. (T5-P22)* **KMLS 10**. *Conocer que uno de los temas subsecuentes a las ecuaciones lineales es el de proporcionalidad directa. (T5-P22)*

Tabla 9. Indicadores encontrados del MTSK

6.2 Indicadores del TRU encontrados en las clases

De esta misma manera se presentan a continuación los indicadores encontrados del TRU evidenciados a partir del análisis de las videograbaciones y transcripciones de clase. Estos se siguen plasmando con la misma nomenclatura utilizada desde los indicadores hipotéticos dado que no encontramos nuevos indicadores. En estos se presentan la evidencia en donde justificamos a través de las transcripciones de clase el indicador (Anexo 2).

Dimensión	Indicador
El contenido	**C1**. Las actividades en el aula apoyan conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando corresponda) y proporciona oportunidades para construir una visión coherente de las matemáticas. (S1-L

	1-33) (S1-L 35-102) (S1-L 124-134) (S3-L 69-90) (S3-L 101-119) (S3- L 153-188) (S3-L 233-247) (S4-L 11-19) (S4-L 37-54) (S4-L 77-89) **C4**. Las intervenciones del profesor con los estudiantes individuales apoyan una visión coherente y conectada de las matemáticas. (S1-L 1-33) (S3-L 233-247) (S4-L 11-19) (S5-L 4-16) (S5-L 24-63)
Demanda cognitiva	**DC 1**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas. (S1-L 1-33) (S1-L 35-102) (S4-L 37-54) **DC 3**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los presentadores y/o a la clase en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas. (S2-L 36-60) (S2-L 69-124) **DC 4**. Las sugerencias o andamios del maestro apoyan a los estudiantes en la lucha productiva para construir entendimientos y participar en prácticas matemáticas. (S2-L 36-60) (S2-L 69-124) (S2-L 144-188) (S3-L 7-21) (S3-L 69-90) (S5-L 4-16) (S5-L 24-63)
Acceso equitativo al contenido	**AEC 1**. El maestro apoya activamente y hasta cierto punto logra una participación matemática amplia y significativa. (S1-L 1-33) (S1-L 35-102) (S1-L 124-134) **AEC 4**. La atención del profesor está clara y ampliamente disponible para aquellos estudiantes que lo necesiten, lo que resulta en un acceso profundo a las matemáticas. (S4-L 77-89) (S5-L 24-63)
Agencia, propiedad e identidad	**API 1**. Los estudiantes tienen oportunidad de explicar sus ideas y el razonamiento del maestro ayuda a la apropiación de ideas de los estudiantes en exposición además de que responden y construyen sobre las ideas de los demás. (S1-L 1-33) (S1-L 35-102) (S3-L 69-90) **API 4**. El estudiante tiene amplia oportunidad y agencia para desarrollar sus ideas interactuando con el maestro, llevándolo a la discusión en clase al término del trabajo individual. (S2-L 144-188) (S3-L 7-21) (S3-L 69-90) (S5-L 4-16) (S5-L 24-63)
Evaluación formativa	**EF 1**. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la instrucción posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes. (S2-L 144-188) (S3-L 7-21) (S3-L 69-90) **EF 2**. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y la discusión posterior responde a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o

	abordando posibles malentendidos. (S2-L 36-60) (S2-L 69-124) (S2-L 144-188) **EF 4**. El maestro solicita el pensamiento del estudiante y las discusiones posteriores responden a esas ideas, aprovechando los inicios productivos o abordando los malentendidos emergentes. (S5-L 4-16) (S5-L 24-63)

Tabla 10. Indicadores evidenciados del TRU

6.3 Relación de conocimientos por subdominio con el TRU

Se muestran a continuación la relación encontrada entre el MTSK y TRU sobre los conocimientos y relaciones encontradas usando la nomenclatura de la tabla anteriormente presentada para la ubicación de los que se mencionan.

6.3.1 Relación MK-TRU

A través del análisis detallado de cada una de las videograbaciones hemos obtenido algunos datos importantes respecto al conocimiento de la profesora Lupita al aplicar la planificación de las ecuaciones lineales propuesta a través de los marcos MTSK-TRU.

Con respecto al subdominio **Conocimiento de los temas (KoT)** podemos identificar que existen un gran enfoque en tres de los indicadores previamente propuestos en la fase inicial de la investigación. El primero trata sobre la justificación de los procedimientos (**KoT 6**) que se llevan a cabo para la resolución de una ecuación, lo cual a través de la evidencia nos hace pensar que la maestra Lupita posee un conocimiento de que eso es importante al aprender las ecuaciones lineales, ya que trata siempre de remarcar el término “operaciones inversas” como sinónimo de la aplicación de las propiedades que subyacen de los números.

De esto es importante señalar que el grado en el que se trabaja y el programa de estudios (2018) estipula que los estudiantes deben familiarizarse con la resolución, pero no se trabajan directamente en la descripción de dichas propiedades, sino que son tratadas como reglas dentro de un *proceso* que debe seguirse para el desarrollo de resolución de una ecuación. Esto nos lleva a identificar que a pesar de que no se integre en actividades concretas si se debe tener una profundización (**C**) de estos en términos de poder conocer la forma de proceder (**KoT 16**) en los diferentes ejemplos que se proponen a los estudiantes.

Además de lo anterior, otro aspecto central de este subdominio es el conocimiento de las propiedades que se cumplen en una igualdad (**KoT 15**). Esto lo reconocemos como relevante dentro del conocimiento de la maestra Lupita, ya que en algunos momentos de la clase se hizo evidente su necesidad de mostrar las características de la igualdad. Un ejemplo de esto ocurrió a través de la explicación el funcionamiento de la balanza en la que, para mantener un equilibrio se mencionó a los estudiantes que debían aplicar el mismo proceso a cada miembro. También es importante resaltar que su conocimiento no está delimitado a solo la igualdad sino también a la aplicación de propiedades que subyacen a los números reales (**KoT 7**).

Por otra parte, en cuanto a la definición de la ecuación (**KoT 13**), encontramos que la profesora tiene un conocimiento de que es muy importante detallar cada una de las partes de los objetos matemáticos, ya que posee la idea de que se puede definir a través de sus partes, lo cual es una acción que creemos tiene que ver con otro saber acerca de cómo se define en matemáticas (**KPM 2**). Esto se logra apreciar de manera recurrente en las sesiones recordando los aspectos que son relevantes para la clase y su inicio productivo en algunas de las actividades (**DC**). Sobre esto, encontramos indicios del uso del término igualdad para definir a la ecuación, pero no se profundizó o se intentó definir como tal (**KoT 14**), dado que puede ser algo sencillo de comprender para los estudiantes.

Aunado a lo anterior, se pudo identificar algunos indicios que nos hacen pensar en que la maestra Lupita pose conocimiento de algunas aplicaciones de las ecuaciones como la representación y modelación de situaciones (**KoT 1, KoT 3, KoT 4**). En particular, nos llama la atención de que aspectos en términos del mismo proceso de evolución de los conceptos son parte de un entendimiento y razonamiento de la importancia del álgebra. Esto lo mencionamos dado que los hechos históricos en los que se producen las invenciones matemáticas tienden a ser poco observadas por los estudiantes y es más una actividad del maestro el recordarles o mencionarles el origen de las cosas.

Algo similar se presenció en una de las clases en cuanto a que fue iniciativa de una de las alumnas el preguntar acerca de quién había inventado el álgebra (**KoT 3**), a lo cual no se tuvo una respuesta directa a ello. En ese mismo sentido resaltamos el contenido matemático (**C**) en términos de su origen como saber necesario en el profesor para que los estudiantes tomen sentido de las cosas y mantengan una visión coherente y conectada de las matemáticas.

Por otra parte, para el caso de los registros de representación usados nos pudimos dar cuenta de que en varias ocasiones la maestra Lupita hace uso de las representaciones algebraica y aritmética bajo el comentario de que las ecuaciones se representaban mediante letras, números y operaciones (**KoT 9**), dando a entender que estas eran sus características principales. Esto lo observamos de manera directa en una de las sesiones, pero en la medida que era necesario la maestra Lupita hacía alusión a esto a partir de preguntas sobre lo que era una ecuación (**EF**). Cabe resaltar que el concepto más recurrente fue el de expresión algebraica dado que lo que se trabajó en clase inicio con ello, aunque no descartamos que usó algunas representaciones pictóricas en los ejercicios de perímetros.

Con respecto a estas representaciones también pudimos observar que la maestra Lupita remarcaba constantemente el uso de las literales (**KoT 10, KoT 11**) haciendo alusión de que con ellas se podría representar valores desconocidos con la posibilidad de poder operar con ellos. Aunado a esto, identificamos indicios de un conocimiento relevante en cuanto a la misma denominación de la incógnita (**KoT 12**), pues al hacer referencia a esto, la maestra Lupita les mencionaba que había un valor para esa letra y que había que encontrarlo.

Finalmente, en lo que respecta al uso de las literales encontramos algunos indicios de que la maestra Lupita conocía que las literales en conjunto con los valores numéricos representan una operación en particular, por lo cual trataba de esclarecer su uso en repetidas ocasiones (**KoT 5, KoT 8**). A esto añadimos que el indicador propuesto en fenomenología y aplicaciones de manera inicial no se evidenció posiblemente por desconocimiento de la maestra Lupita o simplemente porque al ser el primer acercamiento de los estudiantes no se tomó en consideración las posibles formas en que han usado las ecuaciones.

Con respecto al subdominio **Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)** hemos identificado que la maestra Lupita tiene conocimiento de que las propiedades que subyacen a los números (**KSM 1**) es algo que deben entender los estudiantes primero antes de poder resolver una ecuación lineal. Esto lo observamos en cuanto a que de manera recurrente al momento en que la maestra Lupita intenta hacer referencia a la resolución de una ecuación en particular señalando algunas propiedades en forma de pasos que deben seguir.

Otro aspecto importante es el de la igualdad como parte constitutiva de un saber en términos de la resolución de ecuaciones. Esto lo mencionamos puesto que la maestra Lupita mostró indicios de conocer que la igualdad es relevante en el entendimiento de una estructura que se lleva para encontrar el valor de la incógnita (**KPM 4**). Un ejemplo de esto fue cuando la maestra Lupita propuso algunos ejercicios de valor faltante o cuando dio a conocer el funcionamiento de la balanza, pues hacía referencia a que lo que se hacía en uno de los miembros debía hacerse en el otro.

Es importante señalar también que existieron algunos conocimientos que la maestra Lupita evidenció respecto a la relación que existe entre otros saberes matemáticos. Consideramos como indicio estos aspectos dado que donde se evidenciaron fue en la entrevista, pero no se logró observar en ninguna de las sesiones de clase (**KSM 2, KSM 3, KSM 5, KSM 6**). Esto puede deberse a que siendo este el primer acercamiento a las ecuaciones lineales se puso un énfasis mayor a la definición y resolución de estas que a encontrar otro tipo de relaciones.

Con respecto a lo anterior, tanto el indicador inicial de la categoría de conexiones de simplificación como en la de conexiones auxiliares no se lograron evidenciar dado que encontramos ese énfasis detallado con anterioridad. A pesar de ello, el conocimiento sobre estos aspectos debe permitir una mayor correlación entre conocimientos posteriores que se desarrollan con los estudiantes, por lo que el profesor debe estar consciente de ellos ya que con estos puede encontrarse una estructura en las actividades que permitan transitar de lo simple a lo complejo (**DC**).

Sobre esto también hubo un aspecto en particular que coincidió con lo estipulado de manera inicial respecto al indicador en la categoría de conexiones de contenidos transversales (**KSM 7**), pues fue uno de los conocimientos que la maestra Lupita expuso como relevante dentro de la entrevista pero que como en el caso anterior no se evidenció en las sesiones de clase. El dominio sobre estos aspectos le pueden permitir posteriormente relacionar saberes con otros más avanzados (**C**).

Con respecto al subdominio **Conocimiento de la práctica matemática (KPM)** podemos observar un aspecto muy importante que tiene que ver con la definición de ecuación lineal, puesto que en repetidas ocasiones se logró evidenciar que la maestra Lupita poseía un conocimiento acerca de que se podría arribar a la definición a través de sus características o propiedades particulares (**KPM 2**). Esto se logra evidenciar en varias de sus intervenciones en las que a través de preguntas intenta que los estudiantes observen dichos aspectos y con ellos reiterar la definición de ecuación o de expresión algebraica.

Aunado a lo anterior, reconocemos que para la maestra Lupita es importante el reconocimiento de los estudiantes de que una condición necesaria y suficiente para que una expresión pueda llamarse algebraica es el uso de las literales (**KPM 3**). Esto se evidenció en algunos momentos de la clase en cuanto a que a través de cuestionamientos los iba encaminando al reconocimiento de la incógnita como característica principal de este tipo de expresiones. Esto impacta en la manera en la que los estudiantes se van apropiando del contenido matemático, puesto que entre más rico sea el saber matemático en juego, será de gran ayuda para que lo estudiantes puedan entender (**API**) conceptos o procesos más complejos.

En cuanto a este tipo de procesos, refiriéndonos a la resolución de ecuaciones pudimos observar que la maestra Lupita poseía conocimiento de que el plantear problemas matemáticos requería de una estrategia basada en un saber matemático sólido (**KPM 1**). Pues esto, aunque no se evidenció de manera directa, se logró ver sobre la manera en la que iba desarrollando los ejercicios propuestos con los estudiantes y cómo este conocimiento le permitía hacer cuestionamientos al respecto (**AEC**).

Al hablar de procesos de resolución de ecuaciones lineales, identificamos que la maestra Lupita reconoce que los estudiantes pueden optar por buscar los valores al azar (**KPM 4**) hasta que den con aquel que permita resolver la ecuación. Esto se observa en el planteamiento de los ejercicios de valor faltante, pues al socializar con los estudiantes identifica (**EF**) que algunos lo realizan de esa manera e intenta responder con un proceso un poco más centrado en el uso de propiedades que justifican su manera de resolverse. Tal situación se evidencia cuando la maestra en reiteradas ocasiones menciona a los estudiantes que lo que debe hacerse de un lado lo deben hacer del otro, o cuando les menciona que primero comenzaran a operar con determinados valores.

Un aspecto que se reconoce dentro de la entrevista tiene que ver con que la maestra Lupita tiene conocimiento de que la demostración permite validar los resultados que se tienen sobre un proceso (**KPM 7**), lo que también lleva al reconocimiento de condiciones necesarias y suficientes para que se pueda catalogar a un concepto (**KPM 6**). Aunado a esto, también se identificó como relevante el conocimiento de la maestra Lupita acerca de que una manera de comprobar el resultado de una ecuación es a través de la sustitución, pero esto solo se logró evidenciar en una de las sesiones, lo que no permitió saber si los estudiantes habían aprendido a comprobar si la ecuación era verdadera con ese valor.

6.3.2 Relación PCK-TRU

Con respecto al **Conocimiento de las características de aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)**, pudimos encontrar dos aspectos importantes en la enseñanza de la maestra Lupita. Por ejemplo, a través de la relación de los indicadores evidenciados encontramos que posee un conocimiento acerca de que una de las dificultades principales que presentan los estudiantes al trabajar con ecuaciones se debe al uso del lenguaje algebraico (**KFLM 5**). Esto porque en varios momentos de la clase se les menciona algunas características sobre que se puede representar un valor que se desconoce con una letra o simplemente que una letra y un número juntos significan una multiplicación (**C**).

Con relación a lo anterior, la maestra posee un conocimiento acerca de que estas situaciones de dificultad se pueden atender a través del establecimiento de problemas contextuales (**KFLM 1**) que le ayuden a significar los procesos que se llevan a cabo (**API**). Sobre esto encontramos que recurrentemente la maestra Lupita se cerciora de que los alumnos comprendan las situaciones algebraicas a partir del uso correcto del lenguaje, significados e interpretaciones involucrándolos a una participación más activa (**AEC**).

Por otra parte, logramos identificar en la maestra Lupita un conocimiento sobre otras dificultades presentes en el desarrollo del tema matemático. Estas iban encaminadas al uso de las literales en cuanto a su operatividad (**KFLM 8**) pues, a pesar de que esto solo se evidenció en la entrevista, pensamos que ella es consciente de que para algunos estudiantes la combinación de letras y números les genera confusión y en ocasiones tienden a solo cambiar las letras por valores al azar para llegar a un resultado concreto (**KFLM 9, KFLM 10**).

Una dificultad que en particular nos ha llamado la atención fue en la que en una de las sesiones un estudiante se atrevió a comentar que se le dificultaba resolver un ejercicio que contenía un número racional (**KFLM 6**), a lo que la maestra Lupita a través de cuestionamientos intentó guiarlos para que pudieran resolverla. Esto no lo atendió solo con ese estudiante, sino con todos en general, por lo que de alguna manera nos hace pensar que ella tomó conciencia de que quizá podía ser una duda general (**EF**).

Sobre el proceso de la evolución de las sesiones, en una clase también observamos un indicio de que la profesora pose un conocimiento de que en el proceso de resolución de las ecuaciones lineales se debe llevar un orden específico (**KFLM 7**), ya que en reiteradas ocasiones les sugiere empezar con un término en particular (Por ejemplo, la suma de un 7). Esto lo atribuimos a que sabe que los estudiantes pueden caer en un proceso invalidó al aplicar una propiedad indistintamente, lo que los llevaría a cometer un error en la resolución de ecuaciones (**EF**).

Lo anterior se relaciona también con lo encontrado respecto a las concepciones que puede llegar a generarse en los estudiantes a partir del desarrollo de diferentes temas. En este caso, observamos que una de las concepciones que la maestra Lupita generaba en los estudiantes era que siempre existía un valor específico para la incógnita sin hacer referencia de que ese valor hacia verdadera una igualdad (**KFLM 12**). De esto identificamos como un conocimiento necesario para el profesor de matemáticas el tener conciencia de que algunas formas en que se abordan los conceptos o en la manera en que se atienden a ideas matemáticas impactan en lo que el estudiante concibe sobre las matemáticas (**API**) o en su caso tienden a afianzar cuestiones como que las matemáticas son difíciles (**KFLM 11**).

Finalmente, en lo que respecta al conocimiento de la maestra Lupita respecto a la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas hemos identificado que reconoce a la teoría APOE (**KFLM 2**) como medio por el cual los estudiantes pueden aprender las matemáticas a través de sus diferentes fases. Esto, se evidenció de alguna manera en cuanto a la forma en la que les permitía a los estudiantes interactuar con la matemática pues en la mayoría de las ocasiones les proponía algunos ejemplos (**AEC**) y después ellos debían enfrentarse al reto de hacer ejercicios más complejos.

Otro conocimiento respecto al aprendizaje que identificamos en la maestra Lupita es que posee la idea de que a través de la manipulación de objetos tangibles (**KFLM 3**), los estudiantes pueden arribar a mejores aprendizajes (**API**). Esto también nos permite identificar un proceso más cognitivo que identifica la maestra, pues los estudiantes a cierta edad tienen la necesidad de trabajar con cosas físicas. Para esto también encontramos como algo relevante la participación activa de los estudiantes como medio para que se dé un aprendizaje en ellos (**KFLM 4**), lo cual se ve reflejado en todas las sesiones en cuanto a que realiza diferentes tipos de cuestionamientos hacia los alumnos en general y hacia algunos en específico (**AEC**).

Por otro lado, con respecto al **Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT)**, pudimos observar dentro de las sesiones de clase que la maestra Lupita posee un conocimiento sólido del uso y aplicación de la balanza como medio para favorecer el aprendizaje de las ecuaciones lineales (**KMT 4**). Esto lo mencionamos porque cuando se presentó este material a los estudiantes, la maestra hizo mucho hincapié en su funcionamiento, permitiendo a los que comprendieran el significado de la igualdad a través de la comparación de objetos que se tenían presentes (**API**). De esto algo de lo que no encontramos evidencia es si conoce las limitaciones de este material, a lo que intuimos que posiblemente si lo sepa debido a que en los ejemplos que ella utilizo jamás integró un número negativo.

Por otro lado, hemos identificado en la práctica de la maestra Lupita que su enseñanza estaba encaminada a la resolución de ejercicios poniendo como ejemplo algunos de ellos para posteriormente permitir que los estudiantes intentaran resolver algunas situaciones. Dado esta metodología encontramos que ella concibe como importante un conocimiento sobre la teoría APOE (**KMT 2**), lo cual le permite organizar la enseñanza a través de sus fases de aprendizaje. Asimismo, obtuvimos como indicio que posee un conocimiento sobre teorías como la de representaciones semióticas o teoría de situaciones didácticas dado que aportan en el aprendizaje y esto es evidente cuando la maestra les menciona ciertos ejemplos de lo que deben hacer alguna manipulación para poder aprenderlo (**KMT 3, KMT 1**).

De lo anterior, también identificamos que una forma de enseñanza que se promueve más por la maestra Lupita tiene que ver con la constante repetición de las características de los objetos matemáticos, que, si bien pueden estar fundamentadas en las teorías anteriores, este conocimiento lo promueve de manera recurrente. Un ejemplo de esto es cuando la profesora les recuerda en momentos específicos de la clase, que se debe hacer el mismo proceso en ambos miembros de una ecuación o que una característica principal de la expresión algebraica es el uso de las literales (**API**).

En estos términos, hubo un indicador que no vimos reflejado en ninguna de las sesiones ni en la parte de la entrevista el cual refiere al conocimiento sobre el uso del Análisis Didáctico como medio que permite la organización de la enseñanza de las ecuaciones lineales. Esto, aunque lo consideramos inicialmente pensamos que no se vio por el hecho de que la maestra Lupita pueda tener desconocimiento de él o que simplemente posea un conocimiento más sólido sobre otras teorías.

Finalmente, con respecto al **Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)**, pudimos encontrar la maestra Lupita posee un conocimiento sobre el orden en el que se presentan los conocimientos en planes y programas de estudio (**KMLS 6**). Esto lo mencionamos por el hecho de que en más de una ocasión se les hacía hincapié en la relación que se observaba temas anteriores con el de las ecuaciones lineales (**C**). Un ejemplo de esto es cuando la maestra Lupita les recuerda que llevaron a cabo unas actividades en torno a la operatividad de las literales.

Considerando el aspecto de secuenciación de temas, también encontramos indicios dentro del conocimiento de la maestra Lupita de que sabe que algunos temas como las operaciones básicas, la proporcionalidad directa o incluso las expresiones algebraicas (**KMLS 7, KMLS 8, KMLS 10**) se ven primero que el tema de ecuaciones lineales o que temas como el de ecuaciones cuadráticas se ven posteriormente. Estos elementos los consideramos como indicios puesto que es algo que logramos reconocer en la entrevista mas no se logró visualizar dentro de este primer acercamiento a las ecuaciones lineales con los estudiantes.

De lo anterior, logramos identificar también que la maestra Lupita posee un conocimiento de que uno de los saberes dentro de los contenidos que se deben desarrollar en los estudiantes es el de la posibilidad de encontrar valores desconocidos (**KMLS 1**) como parte del entendimiento de la incógnita en la resolución de ecuaciones (**C**). Además de esto también identificamos que sabe que la ecuación lineal en primero de secundaria se aborda solo con una incógnita dado que en ningún momento integra ejercicios de diferente tipo que no sean del tipo lineal.

Otro conocimiento que se evidenció en la clase de la maestra Lupita es el relacionado con la diferencia entre la aritmética y el álgebra (**KMLS 2**), pues en repetidas ocasiones se hizo referencia a que en álgebra ya no se usaba la letra "x" en términos de una multiplicación sino como una incógnita que adquiere un valor especifico (**API**). Otro ejemplo de esto es que cuando se abordaron los ejercicios introductorios de las tres primeras actividades la maestra Lupita intentaba relacionar lo visto en el nivel primaria con respecto a lo que se estaba viendo en el momento sobre ecuaciones lineales haciendo hincapié en el uso de las literales (**C**).

Un aspecto importante que no podemos dejar de lado es el hecho de que sabe que una manera de corroborar si el estudiante tiene un determinado nivel de desarrollo conceptual o procedimental (**KMLS 4, KMLS 5**) es a través de su posibilidad de crear ejemplos del tema en cuestión, o también a partir de la formulación de preguntas que realiza (**EF**). Un ejemplo que podemos asociar dentro de las clases es cuando la maestra Lupita va guiando por medio de cuestionamientos a los estudiantes para que realicen un proceso o lleguen a una característica o definición.

6.4 Relación MTSK-TRU y la planificación de la enseñanza

Con respecto a la integración de los marcos para la generación de la propuesta planificada podemos encontrar que existe una relación entre los dominios del **MTSK** y las dimensiones del **TRU**. Al respecto, observamos que el dominio **MK** que presenta la maestra Lupita se centra mucho en la apropiación del contenido matemático desde los conceptos, la práctica matemática y su estructura matemática. Estos permean en la profundización de los saberes que se manejan en la dimensión del contenido (**C**) dado que entre más conexiones entre conceptos moviliza la maestra Lupita, mejores aprendizajes matemáticos podrá generar.

Otra relación que encontramos está asociada con las conexiones de complejización y simplificación, pues a partir de estas podemos identificar que se pueden integrar diferentes conocimientos matemáticos a una misma situación y hacer más rico el aprendizaje de las ecuaciones lineales. Esto impacta directamente en términos de la demanda cognitiva (**DC**) que se movilice desde la integración y desarrollo de actividades que se presentan a los estudiantes.

Además de esto logramos identificar otra relación directa entre el subdominio **KMLS** y la dimensión del contenido dentro del **TRU**. Esto lo mencionamos debido a que se observaba como el conocer, por ejemplo, la secuenciación de temas le permite ligar contenidos que ya se habían visto con el de ecuaciones lineales. Consideramos que este proceso llevado a cabo por la maestra Lupita genera en los estudiantes un mayor significado, lo cual impacta en su agencia, propiedad e identidad (**API**) que genera del tema que se está tratando.

En lo que respecta a la dimensión del acceso equitativo al contenido (**AEC**) encontramos que existe una relación directa con el dominio **PCK** específicamente en el **KFLM** en cuanto a que la maestra Lupita a través de cada sesión de clase plantea distintos cuestionamientos que permiten a los estudiantes pensar y reflexionar sobre el uso del lenguaje algebraico, las interpretaciones de un problema, de cómo llevar a cabo un proceso o cuando explica para todos las dudas que presentó un alumno en relación con la fracción.

Lo anterior no solo se limita a estas cuestiones, sino que además este conocimiento sobre el acceso equitativo al contenido en conjunto con el subdominio **KPM** le permite a la maestra Lupita encontrar y formular una pregunta que refiera a algo matemático, por ejemplo, cuando se les cuestionó a los estudiantes acerca de las características de una expresión como parte del descubrimiento de una condición necesaria o suficiente para que pueda llamarse algebraica.

En lo que respecta a la dimensión de agencia, propiedad e identidad (**API**) encontramos que se relaciona directamente con el subdominio **KFLM**, puesto que en reiteradas ocasiones la maestra Lupita realizaba cuestionamientos que hacían a los estudiantes apropiarse de manera más profunda. Esto también lo relacionamos con su conocimiento respecto a las dificultades que pueden presentar los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales, pues esto le permite establecer problemas contextuales que aborden esas situaciones.

Con relación a esta misma dimensión, encontramos que la forma en la que la maestra Lupita presenta a los estudiantes las ideas matemáticas impacta en las concepciones que poseen lo estudiantes, potenciando o limitando su propio aprendizaje. Aunado a esto, posee un conocimiento de que a partir de la manipulación de objetos ellos pueden adquirir una propiedad del saber en juego y que así les resulte más significativo.

Con respecto a la dimensión de evaluación formativa (**EF**) encontramos una relación entre esta y el **KPM** pues la maestra Lupita reconoce el papel del ensayo y error al intentar resolver una ecuación lineal. Puesto que esto de manera inicial les puede permitir encontrar una vía de resolución, pero la maestra al tener conocimiento de esto evalúa la situación e interviene por medio de cuestionamiento para que los estudiantes puedan arribar a proceso más complejos.

Otra relación que encontramos de manera directa con esta dimensión es la existente con el **KFLM**, pues en varios momentos de la clase la maestra Lupita abordaba de manera general algunas dificultades que se presentaban, incluso si estas las veía en un solo estudiante. Esto hace pensar que la maestra conoce que esa dificultad presentada puede generalizarse a los demás estudiantes y al evaluar dicha situación decide hacer una explicación general.

Finalmente, otro aspecto que nos parece relevante en relación a la evaluación formativa es que se relaciona muy directamente con aspectos del **KMLS**, pues la maestra Lupita al mostrar dominio de los saberes en determinado en este nivel de secundaria, se le facilita reconocer en los estudiantes determinado nivel de desarrollo conceptual. Esto, la maestra lo reconoce a través de preguntas que los estudiantes formulan o a través de los ejemplos que pueden llegar a establecer del tema matemático.

7. CONCLUSIONES

7.1 Sobre el desarrollo de la investigación

A través de lo encontrado en los resultados de nuestra investigación podemos concluir que la planificación en términos de la integración de dos marcos potentes como lo son el MTSK y el TRU nos han permitido reconocer la complejidad que tiene la intención de poder desarrollar una comprensión robusta en los estudiantes.

Por un lado, cada uno de los dominios de conocimiento del MTSK vistos desde una perspectiva integradora en actividades que se desarrollan para la enseñanza de las ecuaciones lineales presenta ya en si un gran reto. El poder entender primeramente el significado de cada uno de los dominios, subdominios y categorías nos hacen partir de una autoevaluación de los saberes que se poseen.

Por otro lado, cada una de las dimensiones del TRU nos han permitido situarnos en un contexto de enseñanza bastante complejo y reflexionar acerca de la manera en la que el profesor de matemáticas presenta los contenidos a los estudiantes, sobre cómo se logra una participación de todos los estudiantes y a su vez de qué manera puede aprovecharse las situaciones imprevistas para que el profesor logre que sus estudiantes sigan aprendiendo.

A través del problema de investigación detectado y tomando como base la pregunta y objetivos planteados podemos concluir que con respecto a la creación de indicadores nos ha permitido encontrar un referente principal con el cual establecer un punto de partida en cuanto a la enseñanza de las ecuaciones lineales. Si bien este proceso se ha llevado a cabo en otras investigaciones bajo diferentes condiciones o marcos, en particular consideramos que nuestra investigación tiene un referente de ser muy descriptiva en cuanto al Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento didáctico del Contenido (PCK) que hay que emplear o movilizar en la enseñanza y sobre todo involucrando una profundización en cuanto a la mejor manera de poder presentarlo a los estudiantes para que aprendan a resolver ecuaciones lineales (TRU).

La relación de esos saberes en conjunto con la forma que se establece la integración de los indicadores encontrados nos dio pauta para hacer la elección de las actividades que conformaron la versión final de la propuesta de actividades, permitiendo así un punto de ubicación de aspectos que recurrentemente se dejan de lado, por ejemplo aquellas prácticas matemáticas que son de dominio general del profesor y que de alguna manera hacen que en nuestra clase los procesos sean cada vez más completos.

Sobre esta complementación mencionada puedo decir que se trató de que cada uno de los indicadores estuvieran presentes. Sin embargo, dado el saber que se puso en ejecución obtuvimos algunas evidencias para afirmar ciertos conocimientos, además de que en otras ocasiones nos permitió obtener indicios de un saber que quizá se pueda interpretar y ubicar en el saber del profesor.

Con respecto a la aplicación podemos observar claramente una relación importante entre el MTSK y el TRU dado que conforme se desarrollan las sesiones, en estas se pueden presentar situaciones en las que los estudiantes nos cuestionan acerca de un hecho histórico o algún proceso, de lo cual debemos de alguna manera estar preparados para ello. Sobre esto, es importante puntualizar que, si bien el MTSK nos permite ubicar algunos saberes necesarios a desarrollar en la enseñanza, en el caso particular del TRU nos ayuda, a través de su estructura en las cinco dimensiones, a pensar en la manera más adecuada en que el profesor de matemáticas puede presentar un conocimiento para que los estudiantes logren aprender a resolver ecuaciones lineales.

A partir de lo anterior, podemos afirmar que nuestra hipótesis era certera, pues en cuanto a lo encontrado en los resultados podemos decir que, si se tiene la intención de lograr en los estudiantes una comprensión robusta a través de la enseñanza, debe no solo integrar conocimientos sino reflexionar a través de las cinco dimensiones del TRU en cuanto a la manera la presentación y profundización del contenido matemático.

7.2 Limitaciones o condiciones de la investigación

A través del mismo desarrollo de la investigación hemos reconocido que una de las limitaciones que se presentaron para el desarrollo de la presente investigación fueron los tiempos, puesto que había cuestiones como las categorías del MTSK o las Dimensiones del TRU que había que comprender y analizar antes de poder desarrollar cada uno de los indicadores.

A su vez, el tiempo también fue limitante en cuanto al desarrollo de los indicadores de conocimiento, pues estos por sí mismo al referirse a cosas especificas requerían de un cierto tiempo de maduración para poder encontrar y refinar esos saberes que habían de ponerse en juego a la hora de desarrollar las actividades y también de integrarlas en conjunto con las desarrolladas a partir de las dimensiones del TRU.

Una limitante que se presentó en el transcurso del de la investigación fue las condiciones de trabajo que se presentaron por la contingencia del Covid-19 y por la forma en la que nos encontrábamos trabajando a distancia. Esto porque el ambiente en el que se aplicó la prueba piloto no fue el mismo en el que se aplicó la versión final y esto pudo haber cambiado un poco la perspectiva para mejorar quizá la estructura de las actividades e integrar nuevos conocimientos.

Otra limitante encontrada fue en el mismo desarrollo de la aplicación en un contexto real, pues era una cuestión en la que había que adecuarse a las condiciones de trabajo de la maestra Lupita en su centro de trabajo. En este sentido, un aspecto que influyo en el desarrollo de las sesiones fue el que las clases se redujeron a 30 minutos siendo un tiempo muy limitado con el que se pudo haber profundizado en el contenido.

7.3 Aportes principales y consideraciones para investigaciones futuras

Considero que uno de los principales aportes de nuestra investigación es en cuanto a la destilación de saberes en términos de indicadores que deben promoverse en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales como producto de una aplicación y análisis de clases en las que existió una integración y puesta en marcha de estos.

Lo anterior en conjunto con las actividades propuestas puede ser un referente para que en futuras investigaciones puedan revisarse y complementarse o de ser necesario integrar nuevos elementos que permitan desarrollar en los estudiantes niveles de conocimiento aún más completos y robustos.

Otro aspecto importante por resaltar fue el proceso metodológico que se ha seguido pues de alguna manera algunas cuestiones realizadas inicialmente fueron normadas por el mismo investigador. Esto nos hace pensar en la posibilidad de aplicar la propuesta de diferentes maneras para poder corroborar la existencia de los indicadores señalados o la descripción de las condiciones para que estos puedan darse.

Con respecto a investigaciones futuras sería importante realizar una revisión nuevamente de los indicadores de conocimiento y sobre todo llevar a cabo la aplicación de una prueba piloto en un contexto áulico y no virtual dado que aún no contamos con el precedente de si el aprendizaje a distancia o en línea tiene una efectividad potente en cuanto a los saberes que se promueven.

7.4 Conocimiento profesional adquirido

Con respecto a los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de esta investigación puedo citar algunos en cuanto al marco teórico utilizado y la propuesta de planificación. Primero en cuanto mi propio descubrimiento y descripción de los saberes que poseía sobre las ecuaciones lineales dado que desconocía en su totalidad esas categorías presentes en el MTSK y que ahora logro comprender un poco sus características y relaciones con el objeto matemático.

Otro aspecto central de esto y que fue más bien un reto como investigador fue el hecho de poder describir conocimientos que no sabía que eran relevantes para la enseñanza de las ecuaciones lineales. Esto lo mencionamos dado que en categorías presentes en el KSM y KPM no fueron fáciles de discernir y mucho menos son comunes en la integración de estos en la enseñanza.

Con respecto al proceso metodológico fue un gran aporte para mi crecimiento profesional en el sentido que principalmente el desconocimiento de un estudio de caso como el que se realizó, nos hizo ser un poco más investigativos en el sentido de poder dominar un poco aquellos aspectos relevantes que se dan bajo este tipo de estudio. Además de esto, algo importante a resaltar es que he obtenido mucha mayor conciencia del proceso de una investigación dado que siempre me había llamado la atención.

Otro aspecto relevante en cuanto a lo aprendido ha sido en la organización de la información, pues el estarse cuestionando y corrigiendo la presentación del informe final de este trabajo, nos hizo ser un poco más críticos en la manera en que se presenta la información. Sobre esto mismo también logro identificar un crecimiento personal en cuanto a una mayor organización personal del proceso que llevo a cabo para la realización de actividades académicas puesto que me cuestiono más cosas acerca de lo que propongo con mis estudiantes.

Algo que permea en todo el proceso de investigación fueron las situaciones en las que la misma aplicación y desarrollo me permitió reconocer nuevas vertientes y posibilidades en cuanto a la forma en la que se podía presentar y organizar un contenido matemático y en caso particular de las ecuaciones lineales.

Finalmente destaco el aprendizaje con respecto a que el nivel de reflexión alcanzado desde los marcos utilizados me ha permitido cuestionarme acerca de los conocimientos que promuevo con mis estudiantes, sobre aquellas prácticas que no permiten potenciar el aprendizaje de los estudiantes y sobre todo nuestro propio aprendizaje.

8. REFERENCIAS

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Bello, I. (1999). *Álgebra elemental*. México: Internacional Thomson Editoriales.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*.

Cázares, L. (2011). *La planeación didáctica como medio que favorece la organización del trabajo docente* [Tesis Doctoral, Universidad Pedagógica Nacional]. http://200.23.113.51/pdf/31176.pdf

De Moreno, I., y De Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA*, 2(3) 247-258.

Denny, T. (1978). *Storytelling and educational understanding, address delibered at national meeting of International Reading Association*. Houston, Texas.

Denzin, N. k. y Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: entering the Field of Qualitative Research. En N. K. Denzin e Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. Londres: Sage (p. 1-18).

Flores, A. A. (2020). La planeación didáctica desde el enfoque por competencias en educación básica. *Educando para educar*, (32), 3-12.

Fuentes, Y. Y., González, A. C., Graus, M. E. G., & Rodríguez, G. O. (2016). Alternativa didáctica para contribuir al perfeccionamiento de la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la carrera Licenciatura en Educación Matemática-Física. *Revista Boletín Redipe*, 5(5), 147-164.

Grossman, P. L., Wilson, S. M., & Shulman, L. S. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para enseñanza. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 9(2).

Guba, E. G. y Lincoln, Y. S. (1981). *Effective evaluation*. San francisco, CA: Jossey-Bass.

Guzmán Gonzales, M. D., & Huertas Lluncor, Y. M. (2020). Propuesta de una secuencia didáctica fundamentada en la teoría de situaciones didácticas para la resolución de problemas con ecuaciones lineales.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Klein, F. (1933). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus [Elementary mathematics from a higher viewpoint]. Berlin: Springer.

León Gómez, N., Bara, M., & Azocar, K. (2013). Planificación de la matemática escolar como elemento clave en la formación del docente. *Paradígma*, 34(2), 177-200.

Mata, R., Alfonso García, M. R., Rodríguez Sánchez, J. L., Lujano Gutiérrez, L., & Pérez López, J. J. (2019). La perspectiva del docente sobre su planeación didáctica: experiencia del grupo focal. *Revista Electrónica de Investigación e Innovación Educativa*.

Mora, Angela; Ortiz, José (2013). Aprender a enseñar matemáticas desde la planificación. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 381-389). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pochulu, M., D'Andrea, L., & Ferreyro, M. (2019). Indicadores de referencia para valorar planificaciones de matemática orientadas al desarrollo de competencias en ingeniería. *Revista Electrónica de Divulgación de Metodologías emergentes en el desarrollo de las STEM*, 1(1), 66-83.

Ress, P., Sparks, F. y Sparks, C. (1991). *Algebra*. México: McGRAW-HILL.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33, 11-27.

Rivera, M. I., García, J., y Navarro, C. (2010). Una propuesta para coadyuvar la introducción de ecuaciones lineales: el caso de la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Granada: Aljibe.

Schoenfeld, A. H., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Berkeley, CA: Graduate School of Education. Retrieved from http://truframework.org or http://map.mathshell.org/trumath.php.

Schoenfeld, A. H., Floden, R. E., & the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2014). The TRU Math Scoring Rubric. Berkeley, CA & E. Lansing, MI: Graduate School of Education, University of California, Berkeley & College of Education, Michigan State University. Retrieved from http://ats.berkeley.edu/tools.html.

SEP. (2011). *Plan de Estudios 2011*. Educación Básica, Primaria, México: SEP.

Serrano, A., Moreno, E., Santoyo, S., Hernández, Y., Gutiérrez, Y., & Lupiáñez, J. (2012). *Ecuaciones de primer grado con una incógnita*. P. Gómez, Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD, 1.

Sosa Guerrero, L. (2011). Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos. Tesis de Doctorado. Huelva: Universidad de Huelva.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. Educación Matemática, 28(2), 151-174.

Soto, A. P. (2017). Propuesta Didáctica para el trabajo de Ecuaciones de Primer Grado en $\aleph$, por estudiantes de entre 10 y 11 años. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Facultad de Ciencias Instituto de Matemáticas]. http://repositorio.ucv.cl/handle/10.4151/65235.

Stake, R. (2013). Los estudios de casos cualitativos. En N. Denzin & Y. Lincoln (Coords.). Manual de investigación cualitativa Volumen III. Las estrategias de investigación cualitativa (pp. 154-197). Barcelona: Editorial Gedisa

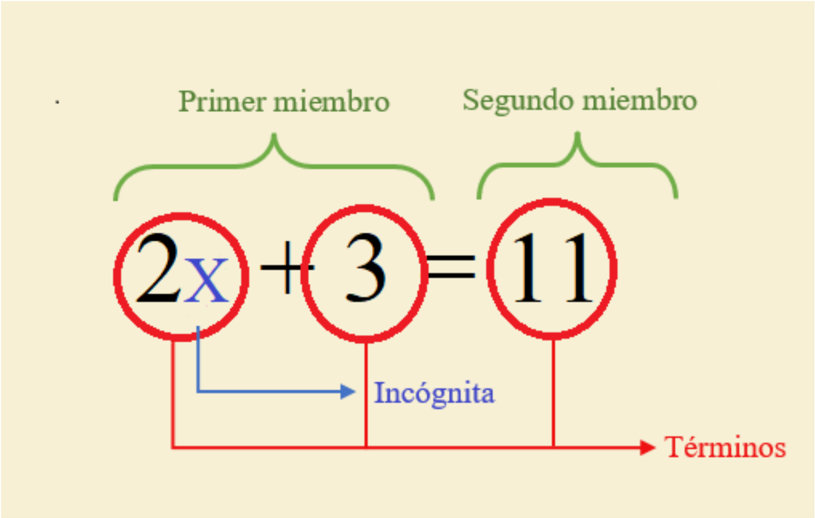
Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Buenos Aires: Paidós.

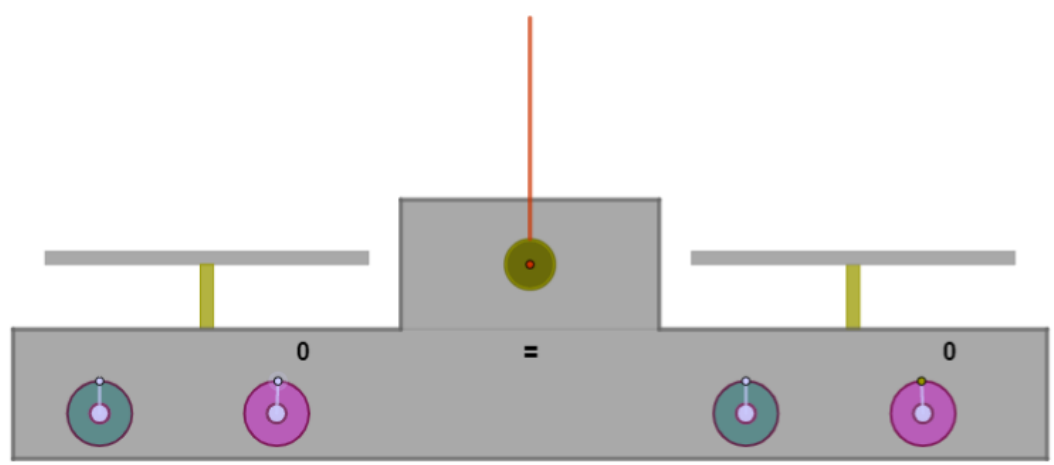
9. ANEXOS

Anexo 1. Planificación de actividades

Indicador MTSK	Indicador TRU	Propuesta de enseñanza	Justificación
KoT 1 **KoT 3** **KMLS 1** **KMLS 2** **KMLS 3**	**C1** **AEC1** **DC1** **C4** **API1**	Para inicial la clase el profesor plantea el nombre del tema que se va a trabajar en conjunto con el aprendizaje esperado que se pretende alcanzar: “**Ecuaciones lineales**” **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones. 1. Para introducir a los estudiantes al tema se plantean los siguientes ejercicios: (individual) Instrucciones: De manera individual realiza los siguientes ejercicios: encuentra los números que faltan. (10 min.) **a)** $2 + \_ = 27$ **b)** $\_ - 12 = 8$ **c)** $\frac{1}{2} + \_ = 2.8$ **d)** $\_ * 12 = 25.2$ <u>Expresión algebraica</u>: es una combinación de símbolos matemáticos (Literales, números y operaciones) y que tienen alguna relación. **Intervención del profesor**: Se pretende que el profesor socialice cada uno de los ejercicios privilegiando el proceso que lleva a cabo el alumno en lo individual más que el resultado mismo. Posteriormente se toman estos mismos ejercicios y cambia el espacio	Se comienza con una actividad que relaciona ejercicios comúnmente vistos en primaria (**C1**) en los cuales se debe encontrar un valor que se desconoce (**KoT 1**), lo cual puede resultar familiar para el estudiante y le apoye a tener una visión coherente de las matemáticas (**C4**). Esto se relaciona directamente con que el profesor sepa o reconozca el seguimiento de este tema dentro de los planes de estudio (**KMLS 2**). Observamos también que se ve como necesario detallar lo que es una expresión algebraica en la que se ven involucrados letras, signos u operaciones (**KoT 3**). Se reconoce también que el profesor debe saber lo que deben aprender sus

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>por una letra (por ejemplo, x, y, z) para poder ejemplificar lo que es una expresión algebraica y poder definirla. Posteriormente dejar una idea de que hay diferentes tipos de expresiones y en particular estas se llaman ecuaciones.</td>
<td>estudiantes en este nivel (primero de secundaria) así como las implicaciones que tienen determinadas expresiones en las que se debe encontrar valores desconocidos (KMLS 1), preparando el terreno para que los alumnos puedan operar con las letras (KMLS 3).
Esto le permite hacer/dar ejemplos que involucren a todos los estudiantes (AEC1) y además contribuyan a su entendimiento sobre ecuaciones lineales (DC1) dándole oportunidades de explicar sus ideas (API1).</td>
</tr>
<tr>
<td>KoT 4
KSM 1
KSM 2
KSM 4
KFLM 1
KFLM 2</td>
<td>DC3
DC4
API2
EF1
EF2</td>
<td>2. Se plantean algunos ejercicios a los estudiantes para que los puedan representar algebraicamente y de manera contextual. Esto lo pueden trabajar en parejas para que puedan compartir ideas relacionadas con los ejercicios.
<table>
<tr><td>El triple de un número.
Cinco veces un número.
Tres veces un número, menos 3.
El consecutivo de un número.
La quinta parte de r.</td><td>$y+5$
$2x+2$
$34x$
$x-1$
$12a-5$</td></tr>
</table>
3. Pedir a todos los alumnos que lleven a cabo el siguiente ejercicio mental:</td>
<td>Se pretende que con estos planteamientos los estudiantes puedan abordar la abstracción de elementos dentro de lo textual para representarlo mediante expresiones algebraicas y viceversa, ya que esto es una dificultad que se presenta en los estudiantes (KFLM 2). Para lograrlo el maestro debe apoyar con sugerencias que</td>
</tr>
</table>

		"Todos, piensen un número, súmenle 7, que nos da igual a…" A partir de la socialización de los ejercicios definir lo que es ecuación y cada una de sus partes. <u>Ecuación lineal</u>: Una ecuación lineal es una afirmación que establece que dos expresiones son iguales. Esta puede representarse como: $ax + b = c$ donde a, b y c son números reales, además $a \neq 0$  **Intervención del profesor**: Se pretende que el profesor pueda preparar el terreno en que los alumnos puedan transitar del lenguaje común al algebraico y viceversa. Se espera que pueda socializar por lo menos un ejemplo por pareja. Asimismo, que socialice algunos de	le permitan pensar en un ejemplo propio para poder representarlo (**DC3**). Este aspecto se relaciona directamente con la resolución de problemas contextuales (**KFLM 1**) en las que se vuelve necesario identificar datos, lo cual puede ser una actividad compartida entre alumnos (**DC4**) abordando los posibles malentendidos (**EF2**). Lo hemos considerado de esta manera para que al pasar posteriormente al concepto de ecuación lineal (**KoT 4**) sea más fácil de comprender cada una de sus partes que las conforman y que a su vez esto apoye a generar conexiones significativas entre contenidos (**KSM 1, KSM 4**). Posteriormente se pretende que con los ejercicios de la segunda parte los alumnos puedan razonar (**EF 1**) en cuanto a cómo pueden representar dichas situaciones en una ecuación dando oportunidad

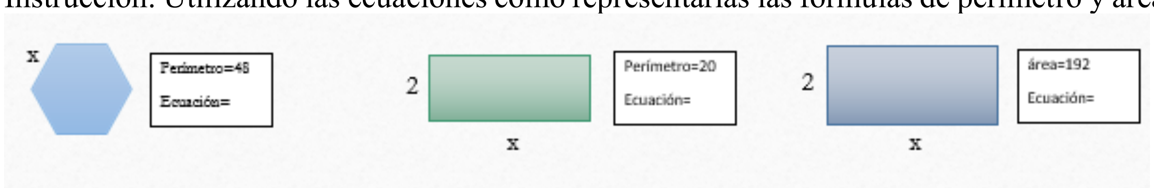
		los ejemplos usados por los estudiantes en el ejercicio mental y representarlos mediante una ecuación. Estos ejemplos serán el punto de partida que genere las condiciones para poder definir lo que es una ecuación y cada una de sus partes. Sobre la definición de ecuación se puede mencionar a los alumnos a que se refiere con números reales y la existencia de otros conjuntos de números. Finalmente se espera que a partir de esto se pueda mencionar a los alumnos la importancia que tiene el aprendizaje de estas y su relación con temas como por ejemplo las matrices o teorema de Pitágoras.	de que expongan y defiendan sus ideas (**API2**). En lo que respecta a la definición de ecuación lineal se pretende ampliar el saber del alumno con respecto a los conjuntos de números que se trabajan en el tema y que posteriormente periten rescatar propiedades subyacentes que permiten resolver ecuaciones a través de operaciones como la suma y multiplicación (**KSM 2**).
Kot 2 **KoT 5** **KSM 3** **KMT 2**	**C2** **DC2** **AEC2** **API 4** **EF4**	4. Presentar a los alumnos una balanza con la intención de rescatar su funcionamiento y relacionarlo con la resolución de ecuaciones lineales y el concepto de igualdad.  Fuente: https://www.geogebra.org/m/wauTpZ9Z	Se plantea un ejercicio con la balanza pues se sabe que esta analogía apoya el sentido y la forma en la que se pueden resolver ecuaciones lineales (**KoT 5**) y a entender el concepto de igualdad (**KoT 5, KMT 2**), todo esto a partir de la oportunidad de dialogo que generan las preguntas planteadas (**API4, EF4**). A través de la balanza se pretende que puedan hacer despejes simples (**KSM 3**) de manera indirecta y posteriormente ir avanzando a ejercicios más complejos

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<ol start="5">
Plantear las siguientes preguntas a los alumnos:

¿Alguien sabe cuál es el funcionamiento de una balanza? ¿Qué características tiene? ¿Cómo se utiliza?
<ol start="6">
Dejar que los alumnos puedan interactuar con la balanza, sea en físico o en digital. Esto puede ser en parejas o triadas.
Proponer un ejemplo que pueda representarse por medio de la balanza como por ejemplo $3 + x = 9$ y hacer el proceso de quitar y poner para mantener la igualdad.

Pensar en un material tres cubitos para de allí desprender esto de la ecuación.
Explicarles operaciones inversas
Intervención del profesor: Se pretende que el profesor presente a los estudiantes la balanza enfatizando en su funcionamiento y en el concepto de igualdad entre expresiones o miembros. Se pretende utilizar esta herramienta como medio para rescatar con ayuda de los estudiantes el proceso de resolución al aplicar indirectamente las propiedades de la igualdad. Se espera también que los alumnos tengan la oportunidad de practicar con la resolución de ecuaciones lineales y arribar a significados de lo que implica una resolución de ecuaciones y como el despeje se aplica en otros temas como en las razones trigonométricas.
</td>
<td>trascendiendo el uso de la balanza. Esto se ve apoyado con el trabajo en conjunto de los pares de alumnos que se plantea tengan oportunidad de dialogar (AEC2) y pensar (DC2) con respecto al funcionamiento de la balanza (C2).
Se reconoce entonces que la balanza puede ser un recurso didáctico poderoso para entender</td>
</tr>
</table>

KoT 1 **KoT 5** **KPM 1** **KPM 2** **KFLM 3** **KFLM 4**	**C3** **DC1** **AEC3** **API3** **EF3**	8. Pedir a los estudiantes que resuelvan los siguientes ejercicios para que puedan practicar con la resolución de ecuaciones usando las propiedades anteriormente encontradas y posteriormente presentaran al azar alguna de ellas y su resolución. **a)** $C + 7 = 25$ **b)** $9x + 7 = 52$ **c)** $7.5y - 3.25 = 17$ **d)** $5n - 2 = 5.5$ **e)** $\frac{2}{7}m = 44$ **f)** $47m = 376$ **g)** $3x + 1 = x - 2$ **h)** $5x + 6 = 3x + 12$ 9. Se promoverá la participación de todos por medio de preguntas como: ¿Cuál fue la estrategia que tomaron para resolver este ejercicio? ¿Qué aplicaron? ¿Cómo creen que pudiera resolverse? **Intervención del profesor**: Se pretende que el profesor presente estos ejercicios con la finalidad de que los alumnos vayan apropiándose de métodos heurísticos y de manera natural hacia la resolución de ecuaciones lineales. Si bien habrá algunos que no podrán desarrollar, se dará oportunidad a los estudiantes de exponer sus respuestas por medio de láminas, ya que serán el punto de partida para poder detallar con más precisión las propiedades aplicadas y con ello permitir que todos los estudiantes sigan mejorando y profundizando en su propio aprendizaje.	Se presentan una serie de ejercicios (**KPM 1**) para que los alumnos puedan practicar con el procedimiento de resolución de ecuaciones poniendo énfasis en que resolverlas significa encontrar el valor de la incógnita (**KoT 5**). Si bien habrá algunos que no puedan desarrollar de manera adecuada (**KFLM 3, EF3**) o lo hagan proponiendo números al azar (**KoT 1, KPM 2**), se podrán establecer cuestionamientos o sugerencias que apoyen un buen sentido de su resolución (**KFLM 4, DC1**). Para permitir el dialogo entre alumnos y en general con el profesor se plantea la actividad primeramente en parejas o equipos, los cuales harán la presentación (**API3**) de sus procesos y resultados (**AEC3**) y poder profundizar en su conocimiento y conexiones significativas por medio de preguntas (**C3**).

KFLM 2	**AEC4**	10. Se presentan a los alumnos los siguientes ejercicios contextuales en los que deben representarlos por medio de una ecuación para después resolverla de manera individual. Instrucción: Utilizando ecuaciones, resuelve los siguientes ejercicios. Problemática: Si tenemos una caja de manzanas y nos comemos 3 nos da como resultado 18 manzanas sobrantes, ¿Cuántas manzanas había en un inicio? Si tengo una bolsa con canicas y le añado otras 5 tengo como resultado 13, entonces ¿Qué cantidad de canicas tenía al inicio? Juan compro una bolsa de manzanas para competirlas con sus familiares que venían de visita a la casa. Después de unos instantes se dio cuenta de que no ajustaría de manzanas con esa bolsa así que decidió comprar otras dos. Al llegar a la casa se da cuenta de que otro de sus familiares decidió llevar 25 manzanas más. Juan decide juntar todas las manzanas por lo que se da cuenta de que son 40 en total. ¿Cuántas manzanas tenía cada bolsa? Instrucción: Utilizando las ecuaciones como representarías las fórmulas de perímetro y área.  ¿Cuánto vale x? **Intervención del profesor**: Se pretende que el profesor presente estas situaciones con la intención de que los alumnos aprendan a rescatar de problemas contextuales algunos datos que le permitan formular y resolver ecuaciones relacionadas a un problema matemático.	Para tomar sentido al resultado el profesor debe considerar relacionar el valor obtenido con los problemas para que desde un inicio se afirme si la ecuación planteada es la adecuada (**KFLM 2**). Esto también tienen una connotación en el aprendizaje y participación de todos los estudiantes, pues será de vital importancia que el profesor esté disponible y al tanto de lo que hacen sus estudiantes para poder guiarlos en su aprendizaje (**AEC4**).

		Esto se trabajará de manera individual para lograr apreciar lo que cada alumno logra hacer y como con ayuda de la participación del profesor se puede guiar u orientar con preguntas o sugerencias.	

Anexo 2. Transcripciones de las videograbaciones

P = profesora, Es = estudiantes, E1 = estudiante uno, E2 = estudiante 2 y así sucesivamente. Además // = acciones que suceden durante el dialogo.

Clase Lunes 7 de marzo del 2022

L		Transcripción
1	P:	Muy bien chicos, lo que vamos a trabajar esta semana se llama "Ecuaciones"
2		¿Cómo?
3	Es:	Ecuaciones
4	P:	¿Qué vamos a aprender esta semana?
5		Allí mismo, punto y aparte le ponemos
6		Esta semana aprenderé…
7		a resolver problemas mediante la formulación y solución…
8		algebraica de ecuaciones. ¡Sale! Fíjense bien, esta semana…
10		Se acuerdan de que ya hace tiempo habíamos trabajado un poco en el por qué…
11		la diferencia de que ahora se llame algebra.
12		Acuérdense que les decía que ya no se tenía que usar el por de primaria
13		porque aquí ya no significaba eso.
14		Se acuerdan de que ya los por los cambiamos por los paréntesis
15		o por el puntito que está dentro de las dos letras
16		o que un número y una letra significan que se están multiplicando.
17		¿Alguien recuerda porque ahora se le llama algebra?
18	E1:	Porque tiene letras
19	P:	Porque vamos a combinar letras, ¿Con qué?
20	Es:	Con números
21	P:	¿Y qué más?
22		Y operaciones verdad
23		Se acuerdan que también les dije que una letra se puede operar
24		como cualquier número, se puede sumar, se puede restar
25		Se acuerdan también la semana pasada estuvimos viendo lo de los perímetros
26	E2:	Si!
27	P:	Que decíamos a ver si tenemos un pentágono
28		¿Cuántos lados tiene el pentágono?
29	E3:	Cinco
30	P:	Y si cada lado vale a, ¿cuánto es el perímetro?
31	E4:	$5a$
32	P:	$5a$ verdad, cinco veces a o cinco veces ese número que no conocemos
33		Perfecto, pues esta semana vamos a trabajar algo así
34		A ver todos, todos cierren sus ojitos
35		Todos piensen un número, no lo digan, el que ustedes quieran
36		El de su fecha de nacimiento si quieren, ¿Ya lo pensaron?
37	Es:	¡Ya!
38	P:	Todos a ese número agréguenle un siete
39		Súmenle un siete a ese número. ¡Todos!

40		No digan su resultado…¿Ya tienen su resultado?
41	Es:	Ya!
42	P:	Allí en su mente, si necesita escribirlo escríbalo pero no lo diga.
43		Ahora si abran sus ojos todos
44		Levante la mano quien me quiere compartir el resultado final
45		/Una alumna levanta la mano/
46	P:	[…] ¿Cuál fue su resultado?
47	E5:	14
48		/La maestra afirma su número y lo escribe en el pintarrón/
49		/La maestra señala a otro alumno y pregunta/
50	P:	[…] ¿Cuál fue su resultado?
51	E6:	15
52		/La maestra lo escribe en el pintarrón y otra alumna levanta la mano/
53	E7:	34
54		/La maestra señala a otro estudiante y pregunta…/
55	P:	¿Cuál fue su resultado?
56	E8:	23
57	P:	¿Alguien que haya salido su resultado arriba de 100, de 200, de 300? ¿Nadie?
58		Bueno, Ahora sí
59		¿Cómo podríamos saber o alguien que sepa cuál es el número que pensó […]?
60	Es:	7
61	P:	¿Y por qué 7?
62	Es:	Porque dijo que le sumáramos 7 a nuestro número
63	P:	¿Y eso que tiene que ver?
64	Es:	Porque 7 + 7 son 14
65		/La maestra afirma su respuesta y la escribe en el pintarrón/
66	P:	¿Cuál será el número que pensó […]?
67	Es:	8
68	P:	¿Por qué 8?
69	E9:	Porque 8 + 7 son 15
70		/La maestra lo escribe en el pintarrón/
71	P:	¿Cuál será el número que pensó […]?
72		/Los alumnos empiezan a estimar diciendo 28 y otros 27/
73	E7:	27 …. 27
74	P:	¿Y por último, que número pensó […]?
75	E10:	14
76	E9:	16
77	P:	¿Qué fue lo que hicimos?
78		¿Qué procedimiento siguieron para saber qué número habían pensado sus compañeros?
79		A ver, […],
80		¿Qué se le ocurre que podemos hacer para poder adivinar el número que pensaron sus compañeros?
81		/Un alumno intenta responder pero la maestra vuelve a mencionar a la alumna/

82	E11:	Restando
83	P:	¿cómo?
84	E11:	Restando
85	P:	¿Qué resto?
86	E11:	el 7 con el resultado
87	P:	El 7 con el resultado dice […]
88		Al resultado que ya tengo le resto 7
89		¿Es cierto ese procedimiento?
90	Es:	Si
91	P:	¿Alguien hizo un procedimiento diferente?
92		Que dijera, yo nomas multiplique, yo nomas reste, ¿Nada?
93		Diferente al que ya dijeron
94	E6:	Sumarle 7
95	P:	Sumarle 7, ¿Al resultado?
96		/Una alumna contradice la respuesta de su compañero y dice lo siguiente/
97	E12:	Es restarle ¿No?
98	P:	Es restarle verdad
99		Entonces, para saber el número que pensó […], el número que pensó […]
100		Lo único que tuvimos que hacer fue al resultado restarle 7
101		¡Perfecto! Muchachos
102		Pues hagan de cuenta que las ecuaciones más o menos trabajan así.
103		Bueno, vamos a realizar la siguiente actividad
104		Anótenle, Consigna número 1
105		En parejas escriban una expresión algebraica para los siguientes enunciados
106		Punto y aparte, número 1
107		El triple de un número
108	E9:	¿Dejamos espacio?
109	P:	Este... Así pueden hacerlo en forma de lista
110		Número 2, cinco veces un número
111		/Los estudiantes escriben/
112	P:	Número 3, Tres veces un número menos 3
113		Número 4, el consecutivo de un número
114		Y número 5, la quinta parte de r
115		Fíjense bien, primero vamos a retomar ¿Qué es una expresión algebraica?
116		¿Qué dijimos que combinan las expresiones algebraicas?
117	Es:	Letras, números y operaciones
118		/La maestra reafirma las respuestas de los estudiantes/
119	P:	¡Letras, números y operaciones! Ejemplo…
120		Tengo un número, tengo una letra
121		/La maestra escribe en el pintarrón $5w$ a la par de su discurso/
122	P:	¿Qué operación tengo en ese número y esa letra?
123		/Algunos alumnos murmullan que multiplicación/
124	P:	Dijimos, cuando un número y una letra están juntos, ¿Qué operación indica?
125	E2:	Una multiplicación
126	P:	¿Una qué?

127	E2:	Multiplicación
128		/La maestra afirma la respuesta del alumno/
129	P:	Una multiplicación, y si yo por ejemplo a esta expresión le agrego…
130		No sé, un $+3$ sigue siendo una expresión algebraica
131		¿Por qué?, ¿Cuál es su principal característica?
132	E11:	¿La letra?
133	P:	Así es. ¿Puede ser cualquier letra o tiene que ser exclusivamente una letra?
134	Es:	Cualquier letra maestra
135		/La maestra afirma la respuesta y después pregunta directamente a un alumno/
136	P:	¿[…] dígame una letra?
137	E3:	La L
138		/La maestra escribe en el pintarrón un ejemplo con la letra L/
139	P:	8 veces l más 3
140		¿[…] una letra?
141	E14:	La a
142		/La maestra afirma la respuesta y escribe un ejemplo en el pintarrón/
143	P:	2 veces a menos 1
144		¿[…] una letra?
145	E15:	La F
146		/La maestra escribe en el pintarrón un ejemplo de expresión con la letra /
147	P:	5 veces F más 3
148		¿sí? Y todas siguen siendo expresiones algebraicas
149		¿Por qué? Porque tienen letras, números y operaciones
150		Ahora sí, yo les voy a ayudar con el primer ejemplo
151		Después ustedes en parejas van a hacer los demás
152		Dice el primer ejemplo
153		[…] me lee el primer ejemplo por favor
154	E15:	El triple de un número
155	P:	Dice el triple de un número, ¿conozco ese número?
156	Es:	No
157	P:	¿Cómo represento ese número que no conozco?
158	E3:	Con una letra
159	P:	¿Cuál letra?
160	E2:	La z
161		/La maestra escribe la letra mientras realiza otra pregunta/
162	P:	Entonces decimos tengo un número, ¿Cuántas veces ese número?
163	E15:	¿3?
164	P:	3 veces ese número, ¿Cómo represento tres veces ese número?
165	E3:	3
166		/La maestra escribe la respuesta que da el alumno en el pintarrón/
167	P:	Y ya tengo la expresión algebraica de ese enunciado, el triple de un número
168		¿Dudas?
169	Es:	No
170	P:	A ver si es cierto, cuento hasta 10 y todos tienen pareja si no yo les pongo una
171		/La maestra empieza a contar hasta el 10 mientras los alumnos se juntan/

172	P:	¿Quién se quedó sin pareja?
173		Levante la mano quien se quedó sin pareja
174		/La maestra reúne a los alumnos que faltaron de pareja para el trabajo/
175	P:	Ahora si, 5 minutos para que terminen los otros cuatro enunciados que faltan
176		Si tienen dudas pregunten
177		/Los alumnos empiezan a trabajar en equipo y la maestra recorre los lugares/
178	Es:	Maestra, ¿Qué es el consecutivo?
179	P:	Es el número que sigue, por ejemplo el 7 que es consecutivo del 6, el 8 del 7/
180		/Pasa el tiempo de la actividad la maestra exclama que ya van a revisar/
181	P:	Bien, vamos a revisar, todos poniendo atención al frente
182		Dice, número dos, 5 veces un número
183		[…] ¿Cómo represento cinco veces un número?
184	E9:	5n
185		/La maestra escribe en el pintarrón la expresión y dice/
186	P:	n ¿Es la letra que escogió?
187	E9:	Si
188	P:	Muy bien, siempre que nos digan veces vamos a tener una multiplicación
189		Siguiente, tres veces un número menos tres,
190		¿Cómo quedaría mi expresión algebraica?
191		/La maestra pide a un alumno especifico que conteste a la pregunta/
192		[…]
193	E16:	Yo le puse $3j - 3$
194		/La maestra lo escribe en el pintarrón mientras afirma/
195	P:	Tres veces un número, ¿Qué número?
196		No sé pero lo represento con una letra menos 3
197		La siguiente dice, el consecutivo de un número
198		/La maestra se dirige a una pareja en específico y pregunta/
199		[…] y […], ¿Cómo represento el consecutivo de un número?
200	Es:	$a + 1$
201		/La maestra lo escribe en el pintarrón/
202	P:	¿Por qué $a + 1$? Porque a es el número
203		y para encontrar su consecutivo vamos sumando uno, uno, uno y uno, ¿Sale?
204	Es:	Si
205	P:	Y la última súper facilísima
206		[…] y […], ¿Cómo represento la quinta parte de r?
207	Es:	¿$\frac{r}{5}$?
208		/La maestra lo escribe en el pintarrón y después dice…/
209	P:	Si me pidieran la sexta parte de h, ¿Cómo lo represento?
210	Es:	$\frac{h}{6}$
211	P:	H entre 6, a ver allá atrás, ¿Y si me piden la mitad de a cómo lo represento?
212	E17:	¿Con un número?
213	P:	¿Cuál?
214		/La maestra vuelve a preguntar a todos en general/
215		¿Cómo represento la mitad de a?

216	Es:	$\frac{a}{2}$
217	P:	Excelente, continuamos con la siguiente actividad por favor.
218		Ahí mismo, ahora fíjense bien.
219		/La maestra les dicta y los alumnos escriben/
220	P:	Redacta un enunciado para las siguientes expresiones algebraicas
221		/La maestra escribe en el pintarrón las expresiones y después dice/
222	P:	Allí están las expresiones, las anotamos por favor un minutito para anotarlas
223		¿Listo?... Bien les apoyo con el primero
224		El primero, ¿ahora cómo voy a redactar yo un enunciado?
225		Ya tenemos la expresión, ahora vamos a redactar un enunciado
226		¿Cómo creen que podría quedar el primero?
227		Alguien que levante la mano que diga yo creo que quedaría así el enunciado
228	E11:	¿Multiplicando?
229	P:	Pero ahora queremos hacer un enunciado
230	E13:	Un número más cinco
231	P:	Bien, el primer enunciado podría quedar como un número más cinco
232		Ahora si en parejas, los que siguen…cinco minutos
233		/Los alumnos comienzan a trabajar en parejas/
234		/La maestra observa que una alumna no junta a su compañero y dice/
235	P:	[…] junte a su compañero, ahorita le voy a preguntar y ambos deben saber
236		/Los alumnos trabajan por algunos minutos y después dice/
237		Bien, vamos a revisar a ver qué tal lo hicieron
238		[…] Cómo podemos poner lo del inciso b
239	E18	Un número multiplicando…multiplicando 2+2
240	P:	Lo que me acaba de decir quedaría de la siguiente manera
241		$x(2+2)$
242		¿Esta expresión se parece a esta de acá?
243	Es:	No
244	P:	No, ¿Cómo quedaría el enunciado?
245		La maestra se dirige a una alumna y le dice
246		[…] ¿Cómo quedaría el enunciado del inciso b?
247	E19:	Dos números más dos
248	P:	Quedaría así, dos números a y b +2
249		/Algunos alumnos se inquietan por querer participar pero la maestra menciona/
250		Espérenme, […]
251	E19:	¿Era un número que se multiplica por dos y se le suma dos?
252	P:	Bien, si esa queda
253		Bien, ¿otra opción?
254	E3:	Pero que no $2x$ es el número maestra?
255	P:	x es el número, así es
256		Un número que se multiplica por 2 y se le suman 2
257		/Después de la aclaración de la maestra su compañera le dice/
258	E5:	El 2 son las veces que se multiplica chavo

259	P:	¿Otra opción?
260	E3:	Dos veces un número más 2
261	P:	Bien, podemos simplificar fíjense bien
262		Esta parte que […] aquí enumera todo
263		Un número que se multiplica dijimos
264		Cuando hablemos de dos veces estamos hablando de una multiplicación.
265		Entonces lo podemos resumir como, ¿Cómo quedaría […]?
266	E3:	Dos veces un número más 2
267	P:	Exacto
268		/La maestra lo escribe en el pintarrón/
269	P:	Es la misma idea de […] simplemente que aquí ya lo estamos trabajando con un lenguaje
270		Que dice dos veces un número
271		Al hablar de dos veces un número se entiende que ese número se multiplica
272		Bien, […] y […] inciso c ¿cómo queda?
273	Es:	Esa es a la que no le entendimos
274	P:	¿Alguien más que tenga el inciso c?
275		Acá ustedes, como queda
276	E13:	Treinta y cuatro veces un número
277		/La maestra lo escribe en el pintarrón/
278	P:	Inciso d
279	E13:	Un número menos 1
280		/La maestra escribe en el pintarrón y menciona lo siguiente/
281	P:	Se acuerdan que en el ejercicio anterior teníamos el consecutivo de un número
282		$a + 1$
283		¿Cómo se llama el número que esta antes de otro número?
284		/Los alumnos se quedan callados/
285	P:	Se llama antecesor
286		¿Cómo podría quedar otro enunciado para esa expresión?
287	E9:	El antecesor de un número?
288	P:	El antecesor de un número, bien y por último quien el ultimo
289	E3	Doce veces un número menos cinco
290	P:	¿Facilísimo no? ¿Fácil o difícil?
291	Es:	Fácil
292	P:	¿Que se les hizo más fácil?, ojo
293		Pasar de una expresión a un enunciado o del enunciado a la expresión
294		Levante la mano quien se le hace más fácil de la expresión al enunciado
295		/Solo dos alumnos levantan la mano/
296	P:	A ustedes dos
297		Levante la mano quien se le hizo más fácil del enunciado a la expresión
298		/La mayoría levantan la mano/
299	P:	Perfecto, muy bien muchachos
300		Por ejemplo esta semana vamos a estar trabajando este tipo de actividades
301		Por hoy ya se acabó la clase pero el día de mañana continuamos
302		Pueden guardar sus cosas

303		Acomódense y recuerden guardar su sana distancia

Clase Miércoles 9 de marzo del 2022

L		Transcripción
1	P:	Bien, muchachos, continuamos. El otro día en clase nos quedamos en que…
2		Una expresión algebraica se compone de…
3	Es:	Letras
4		Números y operaciones
5		/La maestra afirma la respuesta de los alumnos y escribe en el pintarrón/
6	P:	Ejemplo $10P + 3$ es una expresión algebraica
7		$5h$ es una expresión algebraica, ¿sí?
8		$4t - 1$ es una expresión algebraica
10		Y que toda expresión algebraica la podemos expresar en un lenguaje verbal
11		Ejemplo, ¿cómo expresaría esto en lenguaje verbal?
12	Es:	Diez P más tres
13	P:	Pero, el P que representa
14	E1:	Multiplicación
15	Es:	Un número
16	P:	Un número que no conocemos
17	E2:	Diez veces un número más tres
18		/La maestra escribe la respuesta en el pintarrón/
19	P:	Excelente, gracias
20		¿La siguiente como la puedo representar?
21	Es:	Cinco veces un número, cinco veces h
22	P:	Seria cinco veces un número
23		/La maestra se dirige a una alumna y le pregunta/
24	P:	¿y la última como quedaría […]?
25		/La alumna no responde y señala a otro estudiante/
26	E3:	Seria cuatro veces un número menos uno
27	P:	Excelente, entonces anotamos consigna número 2
28		/La maestra dicta mientras que los estudiantes escriben en sus libretas/
29		De manera individual anota el número que falta en los siguientes ejercicios
30		Y anotamos estos de aquí
31		/La maestra anota los ejercicios en el pintarrón/
32	P:	¿Listo? ¿Ya terminaron?
33	E4:	El paréntesis y eso como le hacemos
34	P:	¿Qué dijimos?
35	E5:	Significa multiplicación
36	P:	Volvemos, dijimos cuando empezamos a trabajar con algebra
37		el por de la primaria que es una x ya la tenemos que dejar de lado, ¿Sí?
38		¿Y ahora que vamos a poner en lugar de ese por?
30	Es:	Paréntesis
40	P:	Entonces, ¿qué operación me indican los paréntesis?
41	Es:	La multiplicación

42	P:	Por lo tanto, ¿aquí que estoy buscando?
43	Es:	Un número que multiplicado con 4 me de 28
44	E6:	Maestra tengo una pregunta
45		¿a quién se le ocurrió juntar números con letras?
46	P:	A un señor que se llama…no se
47		/Los alumnos se ríen/
48	P:	Alguien que invento el algebra
49	E7:	Y por qué la hicieron
50	P:	Agradézcanle a los egipcios y griegos que se ponían a filosofar
51		Agradézcanle a Aristóteles, a Platón, a todos ellos
52		¿Listos?
53	Es:	No!
54	P:	Es individual ahora, como que estoy viendo que están socializando mucho
55		/La profesora se acerca con un alumno y le menciona lo siguiente/
56	P:	¿Si a 5 le quito 12 me dan 8 ?
57	E8:	No
58	P:	¿Tiene que ser un número menor o mayor a 12?
59	E8:	Mayor
60	P:	Mayor verdad
61		Les voy a dar un papelito para que todo lo que están haciendo lo escriban allí
62		Su respuesta, la que tengan ahorita que ustedes consideren que está bien
63		Si está mal o está bien no me interesa, necesito que tengan allí su respuesta
64		Pongan el procedimiento también
65		/Los alumnos trabajan de manera individual/
66		¿Ya escribieron su respuesta en la hojita?
67	Es:	No
68	P:	Por favor, ya entreguen las hojitas, pásenlas de atrás para adelante
69	E9:	No maestra pues sabe cuál sea la respuesta
70	P:	De cual
71	E9:	No pues la c
72	P:	Pero está bien fácil
73		¿Qué es lo que se le dificulta de la c?
74	E10:	La fracción maestra
75	E11:	Maestra, creo que ahí vamos a poner la otra mitad ¿no?
76		Bueno es $\frac{1}{2}$ y vamos a poner a lo que equivale la otra mitad y que nos de 2.8
77	P:	Aja, no tanto la otra mitad porque al hablar de mitad hablamos de $\frac{1}{2}$
78		Tenemos un número que es $\frac{1}{2}$
79		Necesitamos buscar que número sumado con $\frac{1}{2}$ me da 2.8
80		Y si $\frac{1}{2}$ no sabemos a cuanto equivale en decimal, que ya lo trabajamos
81		¿Cuánto equivale $\frac{1}{2}$ en decimal?
82	Es:	A la mitad de 1
83	P:	A 0.5

84		Si ya tengo 0.5 aquí, ¿Cuánto me falta para llegar a 2.8?
85	Es:	¡Aaaa!
86	P:	¿Quién más? Hojitas por favor
87		Bien ya entréguenme todos los que faltan, vamos a revisar
88		Ahora si en la libreta vamos a revisar lo que hicieron cada uno, sale
89		Por ejemplo muchachos, 2 más que número me da 27
90	Es:	25
91	P:	¿Cómo supimos que era 25? ¿Qué hicimos?
92	Es:	Sumar, Restar
93	P:	¿Cómo?
94	Es:	$27 - 2$
95	P:	A 27 le quito 2 y me da 25 y es el número que busco aquí, ¿Sí?
96		Si aquí la operación me indica suma, ¿acá que estoy haciendo? Restando
97		Aquí que hicimos para saber qué número era
98	Es:	$12 + 8$
99	P:	¿Cuánto es?
100	Es:	20
101	P:	¿Qué operación estoy haciendo aquí?
102	Es:	Restando
103	P:	¿Y acá?
104	Es:	Sumando
105	P:	Ok, $\frac{1}{2}$ más cuanto me da 2.8
106	E12:	2.3 maestra
107	P:	¿Cómo encontramos ese 2.3?
108	E12:	Convirtiendo el $\frac{1}{2}$ a decimal
109	P:	Ok, este lo convirtió a decimal 0.5 ¿Y qué más?
110		¿Cómo encontró que era 2.3?
111	E12:	A pues restando 0.5 a 2.8
112	P:	A 2.8 le restamos 0.5 y nos da 2.3
113		Si aquí estoy sumando, ¿Qué operación estoy haciendo acá?
114	Es:	Restando
115	P:	¿Qué número multiplicado con 12 me da 25.2?
116	E13:	2.1
117	P:	¿Cómo encontramos ese 2.1 […]?
118	E13:	Multiplicando
119	P:	Sí, pero ¿Cómo encontré que era 2.1?
120	E13:	Haciendo multiplicaciones
121		Fui multiplicando hasta que llego a 25.2
122	P:	Multiplico por uno o por dos o ¿por cuánto iba multiplicando?
123	E13:	Lo que tanteé que fuera lo más cercano
124	P:	Ok, por tanteo perfecto
125		Muchachos si les digo que aquí estábamos sumando y acá restando
126		Si aquí estábamos multiplicando, ¿Cuál es la operación inversa?
127	Es:	Dividir

128	P:	Por ejemplo, 25.2 entre 12
129		¿Cuántas veces cabe el 12 en el 25?
130	Es:	2
131	P:	$2 * 12 = 24$
132		Total que me queda 1.2, aquí subo el punto por lo tanto son 12
133		$12 \div 12 =$
134	Es:	Una
135	P:	¿Cuántas veces cabe el 12 en el 12?
136	Es:	Una
137	P:	¿Qué número multiplicado por 4 me da 28?
138	Es:	7
139	P:	Muy bien, $28 \div 7$ me da 4
140		Si aquí multiplicaba, ¿acá que hacía?
141	Es:	Dividía
142	P:	Que esas se llaman operaciones
143	E9:	Básicas
144	P:	No, bueno si pero en este caso se conocen como operaciones inversas
145		Para la resta, de la resta a la suma, de la multiplicación a la división
146		Bien, muchachos ahora que pasa o que sucedería si a estos ejercicios
147		En lugar de ponerle números que no conozco, que aún no se
148		Los cambiamos por z, p, a, ¿Qué sucede? ¿Cómo se llaman esas expresiones?
149	Es:	Algebraicas
150	P:	¿Por qué se llaman expresiones algebraicas?
151	Es:	Porque tienen letras, números y operaciones
152	P:	¿Tengo pues que una expresión algebraica es igual a 27, ¿sí?
153		Tengo una expresión algebraica que es igual a 27
154		¿Por qué se llama expresión algebraica?
155	Es:	Porque tiene letras, números…y operaciones
156	P:	Y aquí nos incluyen una cosa más una igualdad
157		A este tipo de expresiones se les llama y se les conoce como ecuaciones
158		¿Cómo?
159	Es:	Ecuaciones
160	P:	Esta de aquí es una ecuación, toda completita
161		Vamos a sacar qué elementos tiene una ecuación
162		¿qué es una ecuación para ustedes?
163	E14:	Números sumados, restados, divididos por números
164	P:	¿Puros números?
165	E14:	Letras
166	P:	¿Puras letras?
167		Primero que tenemos aquí
168	Es:	Un igual, una igualdad
169	P:	Tenemos una igualdad entre dos expresiones, ¿sí?
170		Por lo tanto ecuación, ¿Qué es una ecuación […]?
171	E15:	Es una igualdad
172	P:	Ecuación es una igualdad ¿entre qué?

173	E14:	Números
174	P:	¿solo números?
175	Es:	Y letras
176	P:	Y como se llaman esas expresiones
177	Es:	Algebra
178	P:	Algebra es lo que engloba a todo, pero estas expresiones tienen un nombre
179		¿Cómo se llaman las expresiones que tienen números, letras y operaciones?
180	E16:	¿Algebraicas?
181	P:	Expresiones ¿Qué?
182	Es:	Algebraicas
183	P:	Por lo tanto, una expresión algebraica está dentro de una ecuación
184		Y dijimos, una ecuación es una igualdad ¿entre quién?
185	E15:	Expresiones algebraicas
186	P:	Es una igualdad entre expresiones algebraicas, ¿Cuántas expresiones?
187	Es:	Dos expresiones
188	P:	Entre dos expresiones algebraicas
189		Ahora sí, vamos a ver qué elementos tienen por ejemplo
190		$2 + a = 27$
191		Todo esto junto se llama ecuación
192		La ecuación tiene miembros, este es miembro uno
193		Y del lado derecho se llama miembro dos
194		¿Dudas hasta aquí?
195		Además de tener miembros, miembro uno y miembro dos
196		Cada miembro puede tener términos, este de aquí es un término
197		Y este de acá es otro termino,
198		¿Cómo distingo un término? Esta separado por suma o resta
199		Y además de todo eso también tienen letras que se conocen como literales
200		¿Qué pasaría si no tiene esa literal?
201	E16:	Ya no es una ecuación
202	P:	Ya no es una ecuación, ¿Por qué?
203	E16:	Porque no está completa
204	P:	Porque no es una expresión algebraica verdad
205		Porque dijimos el álgebra ahora se trata de números, letras y operaciones
206		Entonces si ya no tiene esa letra, ya no es algebra
207		Simplemente sería una suma normal como la conocemos
208		Pero como ya tiene letras se conoce como expresiones algebraicas
209		Y en específicamente esas igualdades entre dos expresiones algebraicas
210		¿se conocen cómo?
211	Es:	Ecuaciones
212	P:	Anotamos esto en su cuaderno
213		Miembro uno, miembro dos, términos, incógnita y todo eso es una ecuación
214	Es:	¿Nos lo va a revisar?
215	P:	Ahorita
216		Listo, ¿ya acabaron?
217		Los que ya acabaron pasen para revisarles

Clase Lunes 14 de marzo del 2022

L		Transcripción
1	P:	A ver iniciamos, ¿Qué vimos la clase pasada?
2	Es:	Sobre las ecuaciones
3	P:	¿Qué de las ecuaciones?
4	E1:	Las partes de las ecuaciones
5	P:	¿Cuáles son las partes de las ecuaciones?
6	Es:	Miembro uno, miembro dos, incógnita y termino
7	P:	Dijimos, ¿Qué es lo más importante para que se dé una ecuación?
8	E2:	Que tenga expresiones algebraicas
9	P:	¿Qué tenga qué?
10	E2:	Expresiones algebraicas
11	P:	Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas
12		Pero que es lo más importante de una expresión algebraica
13		Sin que elemento no puede ser una expresión algebraica
14	Es:	Letras
15	P:	Sin las letras, bien
16		Vamos a continuación traigo un material que vamos a ver
17		¿Alguien sabe que es este material que tengo aquí enfrente?
18	E3:	Una balanza
19	P:	Una balanza, muy bien
20		¿Alguien sabe cómo se utiliza una balanza?
21	Es:	Ponen algo para pesar cosas, con eso pesan cosas
22	P:	a ver de uno en uno
23	E4:	Con ese miden las cosas
24	E3:	Pesan las cosas
25	P:	Para pesar las cosas
26		Pero si se fijan esta balanza tiene algo diferente a las que utilizamos
27		Por ejemplo, a las que utilizamos en la carnicería
28		Esas tienen un plato grande y le ponen las cosas y vas moviendo la pesita
29		O en las digitales nomas pones las cosas y te da el peso en digital
30		Este tipo de balanza nos sirve para comparar dos pesos
31		El que valla en este miembro y el que vaya en este otro miembro
32		Si yo quisiera comparar dos pesos tendría que poner en cada lado
33		Aquí traigo unas cosas, ejemplo este cubito, aproximadamente pesa 200 g
34		Si yo pongo este cubito aquí que lado está más inclinado
35	Es:	El izquierdo
36		Si yo agrego otro cubito igual del mismo peso para donde se mueve
37	E3:	Para abajo
38	P:	Pero si se fijan, que tengo que hacer para mantener el equilibrio
39	E3:	Poner un cubito del otro lado
40	P:	¿Un cubito nada más?
41	E3:	Bueno ahí serian dos
42	P:	Poner dos cubitos y si se fijan ahí se mantiene la balanza
43		Ahí los dos miembros están iguales

44		Tanto es la misma cantidad en el miembro uno que en el miembro dos
45		Lo mismo pasa con las ecuaciones
46		Tienen que valer lo mismo en el miembro uno que en el miembro dos
47		¿Qué pasa si a una ecuación que es una igualdad yo le quito un cubito?
48		¿Sigue siendo una igualdad?
49	Es:	No
50	P:	¿Qué tengo que hacer?
51	E4:	Poner el cubito
52	P:	Poner el cubito o
53	Es:	Quitarlo
54	P:	Quitar el cubito del otro lado, ¿Sí?
55		Quiere decir que si yo al cubito este le agrego otro cubo más pequeño
56		Lo mismo hay que hacer en el otro miembro para que se mantenga la igualdad
57		Si a este miembro uno le agrego dos cubitos pequeños, ¿Qué tengo que hacer?
58	Es:	Agregarle dos cubitos pequeños
59	P:	Agregarle dos cubitos pequeños, pero ya no tengo solo uno
60		¿Entonces aquí que hago?
61		Le quito un cubito para que la igualdad se siga manteniendo
62		Ahora si yo les digo que estos cubitos de los grandes cada uno pesa $200\ g$
63		Y estos cubitos chiquitos no sé cuánto pesan solo sé que son iguales
64		Aquí en el miembro uno, ¿Cuántos cubitos tengo?
65	P:	Pásele por favor, en el miembro uno ¿Cuántos cubitos tenemos?
66	E5:	5
67	P:	Y sabemos cuánto pesa cada cubito
68	Es:	No
69	P:	¿Cómo represento un número que no sé cuánto vale?
70	E6:	Con una letra
71	P:	Con una letra, ¿cuál quieren?
72	Es:	F, a
73	P:	¿Una qué?
74	E6:	F
75	P:	Entonces si son cinco cubitos y cada uno lo vamos a representar con F
76		Y todos pesan lo mismo, ¿Cómo represento el lado de esta ecuación?
77	E7:	$5F$
78	P:	$5F =$
79		Acuérdense que es una igualdad, ¿Cuánto pesan estos dos juntos?
80	Es:	$400\ g$
81	P:	400 gramos, ahora si fíjense bien
82		Para saber cuánto pesa cada uno de estos cubitos vamos a hacer lo siguiente
83		Se acuerdan que había un tipo de operaciones que, ¿Cómo se llamaban?
84	Es:	Contrarias, eran operaciones inversas
85	P:	Inversas, operaciones inversas
86		¿Para qué nos van a servir las operaciones inversas?
87		Para poder despejar la incógnita
88		¿Cuál es la característica principal de la ecuación, encontrar qué?

89		Vamos a anotarlo
90		Donde su principal objetivo es encontrar el valor de la incógnita
91		¿Cómo la vamos a encontrar?, con las operaciones inversas
92		Es decir, si aquí ya tengo $5F = 400$
93		Si quiero saber cuánto vale una sola F, ¿Qué tengo que hacer?
94	E6:	¿Dividir?
95	P:	Dividir entre quien
96	E8:	El resultado
97	P:	El resultado entre cual
98	E8:	Entre 5
99	P:	¿Por qué entre 5?
100	E6:	Porque tenemos 5 cubitos
101	P:	Porque tenemos 5 cubitos y yo solo quiero saber uno solo
102		Pero dijimos como es una igualdad si divido el $400 \div 5$
103		El otro miembro de la igualdad también lo tengo que dividir entre 5
104		Si me explico, ¿Cuánto es $5 \div 5$?
105	Es:	1
106	P:	1, por lo tanto me queda la pura F pero cuando es una el número no se escribe
107		$F =$, ¿$400 \div 5$?
108	E6:	80
109	P:	$8 * 5 = 40$, ¿Cuánto vale cada uno de estos?
110	E8:	$80\ g$
111	P:	80 gramos…de tal manera que juntos de dan los 400
112		Vamos a ver otra, ¿Quién trae un objeto para medir?
113	E6:	¿Un celular?
114	P:	Si
115		/El alumno pasa al frente a poner el celular en la balanza/
116	P:	Ahí está, vamos a ver cuántos cubitos pesa
117		/La maestra pone algunos cubitos y pregunta/
118	P:	¿Ahí ya pesan lo mismo?
119	Es:	Si
120	P:	Le falta poquitillo, le voy a poner ahora de los chiquitos
121		Aquí si se fijan tiene un nivelador la balanza
122		Ahí está, cuanto equivale el celular de su compañero
123	Es:	A un cubo grande y uno pequeño
124	P:	¿Cuánto equivale el cubo grande?
125	E9:	$200\ g$
126	P:	200 gramos si, y el pequeño
127	Es:	80
128	P:	Es decir el celular de su compañero ¿cuánto pesa?
129	Es:	$280\ g$
130	P:	280 gramaos si, un solo celular
131		Otro celular
132	Es:	Yo, yo
133	P:	El que llegue primero

134		Bien, ahora vamos a quitar un cubito pequeño
135		Ahí ya pesan lo mismo
136	Es:	No
137		/La maestra agrega otro cubito y pregunta/
138	P:	Ahí ¿ya pesan lo mismo?
139	Es:	Ya
140	E11:	No, le falta poquito maestra
141	P:	Le falta una nadita
142	E11:	Ya
143	P:	Ahora si ya pesan lo mismo verdad
144		Entonces ahora el celular de su compañera se agregó de este lado
145		Y del otro lado que se agrego
146	Es:	Dos cubos
147	P:	Dos cubos grandes, ¿Cuántos gramos más se agregaron?
148	E6:	¿ 400?
149	P:	400 gramos, ahora ya en total entre los dos celulares pesan $680\ g$
150		¿Cómo hicimos para encontrar esto a través de la balanza?
151		Ya dijimos pues que es una ecuación, ¿Qué es una ecuación?
152	Es:	Es una igualdad
153	P:	Y siempre hay que mantener esa igualdad
154		Si yo quito 7 del primer miembro de la ecuación también lo quito del segundo
155		/La maestra se dirige a uno de los alumnos y le dice lo siguiente/
156	P:	Por favor cámbiese de lugar, cámbiese para allá
157		Sí, dudas hasta aquí
158		Vamos a resolver unas ecuaciones para ver si es cierto que vamos entendiendo
159		Igual les voy a ir ayudando, escriban consigna número tres
160		De manera individual resuelve las siguientes ecuaciones
161		/La maestra anota en el pintarrón las ecuaciones/
162		$C + 7 = 25$
163		$9x + 7 = 52$
164		$7.5y - 3.25 = 17$
165		$5n - 2 = 5.5$
166		$\frac{2}{7}m = 44$
167		$47m = 376$
168		$x + 1 = x - 2$
169		$5x + 6 = 3x + 12$
170	P:	Listo, ya las acabaron de anotar
171		/Pasa un tiempo y algunos alumnos terminan/
172	P:	Bien, les voy a ayudar con la primera, ¿listo?
173		Fíjense bien, la primera nos dice un número que no conozco más 7 es 25
174		Cuánto vale ese número, si
175		Dijimos, lo que se trata en una ecuación es encontrar la incógnita
176		De saber cuánto vale esa letra
177		Como le vamos a hacer, con las operaciones inversas

178		Primero para poder dejar la letra sola, que número necesito quitar
179	E12:	¿Cómo?
180	P:	Para poder dejar la letra en el primer miembro de la ecuación que debo quitar
181	Es:	El 7
182	P:	Y él 7 que está haciendo en esa ecuación
183	Es:	Sumar
184	P:	Sumar, por lo tanto para poder quitar ese 7 lo tengo que restar
185		Pero dijimos lo que hagamos en el primer miembro de la ecuación
186		También se lo tengo que hacer al segundo
187		Es decir, en el segundo miembro también tengo que restar
188		Dudas hasta ahí
189	Es:	No
190	P:	Lo que le haga al primer miembro se lo hago también al segundo
191		Si aquí quito 7 acá también quito 7
192		Si aquí pongo acá también pongo, como lo hicimos con los cubitos
193		Ahora sí, a 7 le quito 7 cuanto me queda
194	Es:	0
195	P:	Ahora si dejo aquí la pura letra
196		A 25 le quito 7 cuánto vale esa letra
197	Es:	18
198	P:	Que hice, utilizar las operaciones inversas
199		Vamos a checar esta, esa que ya tiene más números
200		Dice $9x + 7 = 52$
201		Primero que números me están ahí
202		Que números necesito quitar para dejar sola a la letra
203	Es:	El 7
204	P:	El 7 y cual otro
205	Es:	El 9
206	P:	Y el 9, vamos a empezar por el 7, ¿Qué operación está haciendo el 7?
207	Es:	Sumando
208	P:	Sumando, ¿Cómo lo quito?
209	Es:	Restando
210	P:	Restando, a $9x + 7$ le voy a quitar 7
211		Pero dijimos que lo que se le quita de un lado de la ecuación
212		También se le quita al otro $9x + 7 = 52 - 7$
213		A 7 le quito 7 cuantos me quedan
214	Es:	0
215	P:	0, y ya solo de este lado nada más me queda $9x =$
216		$52 - 7$
217	Es:	45
218	P:	45, si hasta ahí ¿dudas?
219		Pero si se fijan la x todavía no está sola, ¿Qué número falta quitar ahí?
220	Es:	El 9
221	P:	¿Qué operación está haciendo el 9?
222		Cuando un número y una letra están juntos que operación están haciendo

223	E13:	Multiplicando
224	P:	¿Una qué?
225	Es:	Una multiplicación
226	P:	Y cuál es la operación inversa de la multiplicación
227	Es:	La división
228	P:	Es decir que este miembro de la ecuación lo tengo que dividir entre cuanto
229		¿Qué número quiero quitar?
230	Es:	9
231	P:	Entre cuanto tengo que dividir
232	Es:	Entre 9
233	P:	Pero dijimos si este va dividido, del otro lado también hay que dividirlo
234		cuanto es $9 \div 9 =$
235	Es:	1
236	P:	Por lo tanto ya me queda la pura letra x, ¿ Cuánto es $45 \div 9$?
237	Es:	5
238	P:	Quiere decir que esa letra que yo buscaba vale 5
239		Vamos a comprobar a ver si es cierto
240		$9(5) + 7 = 52$ en lugar de poner la x pongo su valor
241		¿Cuánto es $9 * 5 =$?
242	Es:	45
243	P:	$45 + 7$
244	Es:	52
245	P:	Igual a 52, se fijan que se cumple la igualdad
246		Nuestra ecuación sigue estando igual
247		¿Por qué?, porque ya encontramos cuánto vale esa letra
248		Ahora si de manera individual van a intentar resolver las siguientes
249		Acuérdense operaciones inversas, de la suma a la resta
250		de la multiplicación a la división
251	E6:	Maestra entonces el número que debemos quitar se lo restamos al miembro 2
252	P:	Sí, pero depende de la operación que esté haciendo
253		Si por ejemplo está sumando, hay que restarlo
254		Si el numero está dividiendo hay que multiplicarlo
255		Lo contrario hay que hacer para poderlo quitar
256		/Los alumnos empiezan a trabajar pero minutos después se termina la clase/

Clase Martes 15 de marzo del 2022

L		Transcripción
1	P:	Bien, todos saquen su libreta por favor
2		A ver escuchamos, la clase pasada estuvimos trabajando con…
3	Es:	Ecuaciones
4	P:	Y que dijimos que es una ecuación
5		¿Una qué?

6	Es:	Una igualdad, de expresiones
7	P:	¿Entre quién?
8	Es:	Expresiones algebraicas, incógnitas
9	P:	Exacto, y dijimos que, a ver todos escuchamos
10	E1:	Donde tenemos que encontrar el valor de la incógnita
11	P:	En las expresiones algebraicas, ¿Cuál es su principal característica?
12	Es:	Encontrar el valor, la letra
13	P:	La letra y en la ecuación tenemos que encontrar la incógnita
14		En la actividad pasada estaban haciendo unas ecuaciones
15	E2:	¿Son estas? Maestra
16	P:	Así es, esas
17		Pregunto, ¿las terminaron?
18	Es:	No, si
19	P:	Levante la mano quien si termino las ecuaciones
20		Dos personas las terminaron, bien
21		Les voy a dar 10 minutos para que las acaben
22		Nada más les voy a recordar tantito
23		Acuérdense que cuando dijimos que trabajábamos con las ecuaciones
24		Para resolverlas utilizábamos que tipo de operaciones
25		¿Cómo se llaman esas operaciones que usábamos para resolver ecuaciones?
26	Es:	Inversas
27	P:	¿Cómo?
28	Es:	Inversas
29	P:	Inversas, muy bien y de la suma dijimos su operación inversa es
30	Es:	Resta
31	P:	¿De la resta?
32	Es:	La suma
33	P:	De la multiplicación
34	Es:	La división
35	P:	¿y de la división?
36	Es:	La multiplicación
37	P:	Excelente, díctenme la primera ecuación por favor
38	Es:	$C + 7 = 25$
39	E1:	C es igual a 18
40	P:	Fíjense bien, si queremos encontrar el valor de la incógnita, dijimos
41		Tenemos que despejarla o dejarla sola a la incógnita
42	Es:	Si
43	P:	En esa ecuación, ¿qué me está sobrando o faltando en el primer miembro?
44	E3:	El 7
45	P:	¿El qué?
46	E3:	El 7
47	P:	¿Y él 7 que operación está haciendo?
48		Una
49	Es:	Resta
50	P:	¿él $+7$ está restando?

51	Es:	No, está sumando
52	P:	¿Y cómo lo voy a quitar?
53	Es:	Restando
54	P:	Exacto, con su operación inversa
55		$C + 7 - 7 = 25$, ¿Pero qué más?
56	E4:	Pero se tiene que también quitar lo del resultado
57	P:	Exacto, en el segundo miembro si aquí quite 7 acá también debo quitar 7
58		A 7 le quito 7
59	Es:	0
60	P:	Por lo tanto me queda solo la letra C en el miembro uno
61		A 25 le quito 7
62	Es:	18
63	P:	¿cuánto vale esa C?
64	Es:	18
65		Ya lo tengo maestra, yo también
66	P:	Ahora si, 10 minutos para que individual hagan las otras ecuaciones
67	E4:	¿En parejas?
68	P:	No, individual la indicación es que sea individual
69		/Los alumnos trabajan en los ejercicios faltantes/
70	P:	¿Cómo vamos?
71	Es:	Mal maestra
72	P:	¿Por qué?
73	E4:	En el d maestra
74	P:	A, el inciso d
75	E4:	Es $5n - 2 = 5.5$
76		/La maestra la escribe en el pintarrón y después menciona lo siguiente/
77	P:	Fíjense, primero antes que nada
78		Para dejar sola a la incógnita que debemos quitar
79	E4:	El 5
80	Es:	El 5 y el 2
81	P:	Vamos a iniciar primero con el dos que es el que no tiene a la literal
82		¿Qué operación está haciendo el dos?
83	Es:	Una resta
84	P:	Una resta, ¿Cómo la voy a quitar con su operación inversa?
85	Es:	Con una suma
86	P:	$5n - 2 + 2 = 5.5$
87		Y dijimos, lo que quite o ponga en el primer miembro de la ecuación
88	E5:	Se hace en el segundo
89	P:	También se hace en el segundo sí, igualito
90		A -2 le sumo 2, ¿Cuánto me queda?
91	Es:	0
92	P:	Operaciones inversas siempre me van a dar 0 cuando sean la misma cantidad
93		$5n = 5.5 + 2$
94	Es:	7.5
95	P:	7.5, hasta ahí vamos bien si

96		¿Qué operación están haciendo el número y la letra juntos?
97	Es:	Multiplicación
98	P:	Una multiplicación, ¿Cuál es la operación inversa de la multiplicación?
99	Es:	La división
100	P:	Entre cuanto tengo que dividir
101	Es:	Entre 7, entre 5
102	P:	¿Qué número quiero quitar aquí?
103	Es:	El 5
104	P:	¿Entre cuanto tengo que dividir?
105	E6:	¿Entre 5?
106	P:	Entre 5, pero dijimos lo que haga en el primer miembro
107		También lo tengo que hacer en el segundo
108		$5 \div 5$ cuanto me da
109	Es:	0, 1
110	P:	Me da 1, pero como no se escribe el 1 nada más se escribe la letra n
111		¿Cuántas veces cabe el 5 en el 7.5?
112	E6:	Una vez
113	P:	Una vez, $5 * 1 = 5$, ¿para 7?
114	Es:	2
115	P:	¿Cuántas veces cabe el 5 en el 25 ?
116	Es:	5
117	P:	$5 * 5 = 25$, ¿para 25?
118	Es:	0
119	P:	$n = 1.5$ y solo hice dos operaciones
120		/Los alumnos continúan trabajando/
121	P:	Ya terminaron las demás para revisarlas
122	Es:	Ya casi acabo, ya casi
123	E7:	Maestra aquí tenemos que quitar estas verdad
124	P:	Aja, si exacto ahí que número es
125	E7:	El 47
126	P:	Sí, que operación están haciendo
127	E7:	Restar
128	Es:	Multiplicación
129	P:	¿Cómo voy a quitar ese 47 si está multiplicando?
130	E7:	Entre 47
131	P:	Entre 47 muy bien
132		/Los alumnos terminan y se forman en el escritorio para que les revisen/

Clase Miércoles 16 de marzo del 2022

L		Transcripción
1	P:	Muy bien, vamos a comenzar
2		El día de hoy vamos a resolver unos ejercicios de ecuaciones lineales

3		/La profesora reparte las hojas de trabajo y les menciona lo siguiente/
4	P:	Bien, dice resuelve los siguientes ejercicios a través de la formulación…
5		de una ecuación, recuerda que debes encontrar el valor de la incógnita
6		Vuelvo a preguntar, ¿qué es la principal característica de una ecuación?
8	Es:	La letra
9	P:	¿Y cómo se le conoce a esa letra?
10	Es:	Incógnita
11	P:	¿Y la principal función de una ecuación es…?
12	E1:	Descubrir la incógnita
13	P:	Descubrir la incógnita, perfecto
14		Ahora fíjense bien, tenemos cuatro problemas
15		El ultimo problema es como el que hicimos anteriormente en el cuadernillo
16		¿Se acuerdan? De cuando poníamos el perímetro de una figura
17		Cuantos lados tiene por ejemplo la primer figura cuantos lados tiene
18	Es:	6
19	P:	¿Cuánto vale cada lado?
20	Es:	x, no se sabe
21	P:	Tenemos una figura que tiene 6 lados y que cada uno vale x que no sabemos
22		Pero sabemos que el perímetro es igual a cuanto
23	Es:	48
24	P:	¿cómo obtengo yo el perímetro de esa figura?
25	E2:	Sumando
26	P:	Sumando, ¿Qué voy a sumar?
27	E2:	Los lados
28	P:	¿Cuántos lados son?
29	Es:	Seis
30	P:	$x + x + x + x + x + x = 48$
31		¿Igual a cuánto?
32	Es:	48
33	P:	48, ¿cómo puedo simplificar esta ecuación?
34		¿Cuántas x son?
35	Es:	6
36	E3:	$x * 6$
37	P:	$6x = 48$
38		Si yo quiero saber cuál es el valor de ese lado
39		¿Qué tengo que hacer en esa ecuación?
40	E4:	Quitar la x
41	P:	¿Quitar el que?
42	E4:	Digo el 6
43	P:	Quitar el 6, ¿Cómo lo quito?
44	Es:	Dividiendo
45	P:	Dividiendo entre $\frac{6x}{6} = \frac{48}{6}$
46		6 entre 6 me da a 1 y me queda la pura x, ¿Cuánto es 48 entre 6?
47		¿Cuántas veces cabe el 6 en el 48?

48	Es:	8
49	P:	Ahora si cuánto vale cada lado
50	Es:	8
51	P:	$6 * 8 = 48$
52		Ya hicieron una ecuación y ya la resolvieron, Si
53		Ojo, en las otras dos figuras en una es perímetro y en la otra es área
54		¿Qué operación dijimos que íbamos a indicar en el área?
55	E5:	Una multiplicación
56	P:	Una multiplicación, ¿y en el perímetro?
57	E6:	Una suma
58	P:	Por ejemplo dice el primero
59		Si tenemos una caja de manzanas y nos comemos 3 da como resultado 18
60		¿Cuántas manzanas había al inicio? ¿Sabemos cuántas manzanas había?
61	Es:	No
62	P:	¿Cómo lo representamos?
63	Es:	Con una letra
64	P:	Con una letra, por ejemplo puede ser m de manzana
65		m representa las manzanas del inicio
66		Sabemos que esas manzanas que había al inicio, ¿me comí cuantas?
67	Es:	3
68	P:	Y comerme 3 es suma, resta, multiplicación o división
69	Es:	Resta
70	P:	Restarlos verdad porque esas ya no las voy a tener
71		Y después de comerme esas 3, ¿Cuantas?
72	Es:	18
73	P:	Es decir que de las manzanas del inicio menos estas 3 ahora me quedan 18
74		Esta es la ecuación $m - 3 = 18$
75		Ahora sí que voy a hacer yo,
76	E6:	Encontrar el primer número
77	P:	Tengo que saber cuántas manzanas había ala inicio
78		¿cómo?, despejando a la incógnita
79		¿Qué número me está estorbando aquí?
80	Es:	El 3
81	P:	¿Cómo lo quito?
82	E7:	Sumando
83	P:	Con una…
84	Es:	Suma
85	P:	Suma, porque aquí está restando su operación inversa la suma
86		Pero dijimos, si sumo en un miembro de la ecuación
87	Es:	También se suma del otro lado
88	P:	$m - 3 + 3 = 18 + 3$
89		A 3 le quito 3
90	E8:	0
91	P:	Cero, por lo tanto me queda la pura letra
92		A 18 le sumo 3

93	Es:	21
94	P:	¿Cuántas manzanas había al inicio?
95	Es:	21
96	P:	21 manzanas verdad, ahora si solitos van a hacer el ejercicio 2, el 3
97		Y también los dos que faltan del ejercicio 4
98		Sale, a trabajar entonces de manera individual
99		/Los alumnos terminan la hoja, la entregan a la profesora y termina la clase/

Anexo 3. Respuestas de la entrevista aplicada

Cuestionario sobre ecuaciones lineales

1. ¿Qué aplicaciones tienen las ecuaciones lineales?

   Las ecuaciones lineales permiten la interpretación de modelos matemáticos para la resolución de una finalidad de situaciones que contenga el mismo caso, es decir resolver a partir de encontrar una variable, en dichos casos de aplicación es muy común en la compra de varios productos, en comida, ropa, verduras, en donde de manera inconsciente comienzas a hacer deducción de cuánto cuesta cada producto.

2. ¿Qué saberes están presentes en el tema de ecuaciones lineales?
- Concepto de igualdad
- Valor faltante
- Relación de proporcionalidad
- Constante de proporción

3. ¿Qué propiedades se ponen en juego en la resolución de ecuaciones lineales?
- Propiedades de igualdad, donde todas las operaciones que se le hagan a un miembro de la ecuación se deben realizar con las otras.

4. ¿Cómo definiría lo que es una ecuación?
Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que consta de operaciones, incógnitas y coeficientes.

5. ¿Qué procedimientos se utilizan para resolver una ecuación lineal?
Mediante el procedimiento del despeje y las operaciones inversas.

6. ¿Qué otros conocimientos se conectan con las ecuaciones lineales y de qué manera?
Las ecuaciones cuadráticas, la proporcionalidad, la regla de tres. En todas existe una constante de proporción que sería el coeficiente y se trata de buscar un valor faltante.

7. ¿Qué procedimientos o razonamientos usados en las ecuaciones lineales se aplican dentro de otros temas matemáticos?
Las operaciones inversas, como es la regla de tres.

8. ¿En qué otros temas matemáticos se usan o aplican las ecuaciones lineales de manera indirecta?
Proporcionalidad directa, ecuaciones cuadráticas, problemas del tipo valor faltante.

9. ¿Qué condición es necesaria para considerar una expresión matemática como ecuación lineal?
Una incógnita

10. ¿Qué papel juega la demostración en el conocimiento sobre ecuaciones lineales?
Saber resolver una ecuación cuadrática por diferentes medios, desde la manera aritmética, hasta por las propiedades matemáticas como operaciones inversas.

11. A partir de la definición de ecuación que ha dado anteriormente, ¿Qué determina o que caracteriza a una definición?

Sus propiedades, que, si es una ecuación y qué no es una ecuación, como mencionaban los esposos Van hiele, un concepto se define a través de sus propiedades.

12. ¿Cómo cree que aprenden matemáticas sus estudiantes? ¿Qué proceso mental debe hacer el estudiante para aprender ecuaciones lineales?
Desde mi punto de vista a través de un sistema llamado APOE realizan una acción sobre el concepto a trabajar, una acción que puede ser externa, para posteriormente encapsular esa acción y hacerlo un proceso que ya se interioriza y se pueda convertir en un Objeto matemático, el concepto en sí.

13. ¿Cómo cree que aprenden mejor sus estudiantes las ecuaciones lineales? ¿Qué seguimiento o estructura debe tener el contenido para que los estudiantes se apropien de él?
Iniciar con actividades de valor faltante donde las operaciones inversas sean restas y sumas, que lo puedan hacer de manera directa, como por ejemplo 5 + ___ = 8 qué número falta. De manera indirecta usaran las operaciones inversas para resolver la ecuación.

14. ¿Qué dificultades presentan o han presentado sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas? ¿Cuál podría ser un ejemplo de ello? ¿Cómo puede o podría atenderlos?
De las matemáticas en general, la dificultad siempre es algebra, pasar de lo aritmético a lo algebraico, es decir entender que las letras representan números que no conocemos pero que los podemos expresar en letras, y que estas mismas se pueden operar, es decir, las podemos sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.

15. ¿Qué dificultades pueden existir en el aprendizaje de las ecuaciones lineales? ¿Cuál podría ser un ejemplo de ello? ¿Cómo puede o podría atenderlos?
Los alumnos siempre quieren o tienen la necesidad de llegar a un resultado numérico, y se les dificulta mucho expresar una cantidad que no conocen con una letra, para posteriormente darle un valor numérico a la letra, es decir, que la igualdad de una letra con un número es real.

16. ¿En que ayuda a los estudiantes el aprendizaje de las ecuaciones lineales?
Desarrollar su pensamiento matemático, y algebraico. Saber que hay situaciones que se pueden generalizar con fórmulas matemáticas y de acuerdo a sus características se pueden modelar situaciones.

17. ¿Qué procesos o estrategias usan habitualmente los estudiantes para la resolución ecuaciones lineales?
Optan por usar la aritmética, sin necesidad de hacer procesos matemáticos como las operaciones inversas. La mayor parte del tiempo encuentran los resultados a través de ensayo y error.

18. ¿Qué expectativas tienen sus estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas? ¿Y en específico de las ecuaciones lineales?
Que son difíciles, que se necesita tener mucho conocimiento para realizar cálculos matemáticos.

19. ¿Qué elementos considera usted para la planificación de la enseñanza de las matemáticas?
El contenido a aprender, cómo se los puedo presentar en situaciones cotidianas de la vida y qué tipo de material tangible puedo utilizar.

20. ¿Qué conocimientos deben dominar los alumnos al finalizar la enseñanza de las ecuaciones lineales en primer grado de secundaria?
Que una ecuación es una igualdad y que para resolverla deben conocer las operaciones inversas.
21. ¿Qué temas le anteceden al aprendizaje de las ecuaciones lineales?
Que conozcan los elementos de una expresión algebraica, qué representa cada elemento, que distingan un coeficiente de un exponente y que comprendan la función de cada elemento, así como las operaciones básicas.

22. ¿Qué temas se apoyan en el conocimiento sobre las ecuaciones lineales?
Ecuaciones cuadráticas, proporcionalidad directa, regla de tres, manejo de la información, modelaciones.
23. ¿De qué manera enseña comúnmente matemáticas a sus estudiantes? ¿Qué pasos se deben seguir en genera para enseñar cualquier tema matemáticas?
No existe una fórmula secreta para enseñar matemáticas, depende de la manera que cada maestro enseñe la materia, desde mi punto de vista las matemáticas se pueden enseñar desde la teoría APOE, Representaciones semióticas y Teoría de situaciones didácticas.

24. ¿Qué actividades o estrategias matemáticas apoyan a los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones lineales? ¿Cómo las lleva a cabo en el aula?

25. ¿Qué acciones o estrategias lleva a cabo como profesor para que todos sus estudiantes se involucren en su aprendizaje y que importancia les da a las ideas que expresan?
Es importante que los alumnos sean partícipes de su aprendizaje y se autorregulen, es por eso que su participación activa en el proceso es importante.

26. ¿Qué elementos de los estudiantes considera para lograr una enseñanza efectiva? ¿esto cómo lo aplica dentro de su planificación de clase?
El tipo de participación que aportan en clase, el nivel del tipo de preguntas que realizan o los ejemplos que ellos puedan dar para apropiarse del tema. Sin semiosis no hay noesis.

27. ¿Qué recursos pueden usarse para la enseñanza de las ecuaciones lineales? ¿Qué ventajas y desventajas tienen estos al enseñar ecuaciones lineales?
La balanza, tableros de igualdad. Como todo recurso físico existen errores de medición que se pueden salir de las manos y no funcionen en el momento o pace un percance.