UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Función lineal y sus registros de representación semiótica. Diseño de una secuencia didáctica para el nivel secundaria

Proyecto de desarrollo profesional que para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa

con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

María del Refugio Hernández Fernández

Directoras:

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

M. T. I. Mónica del Rocío Torres Ibarra

Zacatecas, Zac., a 23 de octubre del 2023.

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías

por el apoyo económico brindado mediante la

beca con número de registro de CVU 1085626,

para la realización de mis estudios de Maestría.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 23 del mes de octubre del año 2023, la que suscribe María del Refugio Hernández Fernández, alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 20202346; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado "Función lineal y sus registros de representación semiótica. Diseño de una secuencia didáctica para el nivel secundaria" bajo la dirección de la M. C. Nancy Janeth Calvillo Guevara y M. T. I. Mónica del Rocío Torres Ibarra.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

____

María del Refugio Hernández Fernández

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "Función lineal y sus registros de representación semiótica. Diseño de una secuencia didáctica para el nivel secundaria" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. María del Refugio Hernández Fernández egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 23 de octubre del 2023

M. C. Nancy Janeth Calvillo Guevara	M. T. I. Mónica del Rocío Torres Ibarra

Dedicatorias y agradecimientos

A mi ángel que, aunque físicamente no está conmigo,
su luz y ejemplo de perseverancia, optimismo y valentía
siempre están conmigo.

A mi padre, que siempre me impulsa,
que festeja mis triunfos como suyos y
quien siempre me recuerda
que todo es posible de lograr.

A mi esposo por su apoyo incondicional,
por su paciencia y palabras de aliento
cuando todo parecía estar mal,
por ser mi sostén y compañero de vida.

A mis hijas, por ser mi inspiración
para hacer este mundo mejor,
mi motivación a superarme
en todos los sentidos de mi vida.

A mi asesora, la maestra Nancy,
por su tiempo, compromiso y paciencia,
por ser mi guía a lo largo del desarrollo de este trabajo.

A todos mis maestros de maestría,
por todos los conocimientos que adquirí
y hacer de mí, una profesional con autocrítica,
segura de sí misma e innovadora.

Contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

Engler (2019) y Stroup (2017) mencionan que la función lineal, es un factor unificador en las matemáticas escolares por su relación con otros conceptos matemáticos y ser la base para la comprensión de conocimientos más complejos. Sin embargo, de acuerdo con Higueras (1998), Robledo (2003), Azcárate y Deulofeu (1996) su enseñanza está centrada en la construcción deficiente del concepto, dominio de procesos algorítmicos y ausencia de situaciones significativas, trayendo consigo poca comprensión y dificultades en los alumnos.

Ante tal problemática, el objetivo de este trabajo es diseñar una secuencia didáctica que promueva la conversión y tratamiento de registros de representación semiótica para favorecer la comprensión del concepto de función lineal en el nivel secundaria, pues de acuerdo con Duval (1993) la comprensión de un contenido reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación.

Entre los principales resultados de este trabajo se encuentra la detección de dificultades; sobresaliendo la articulación entre el registro gráfico y algebraico, y capacidades; como la conversión del registro verbal al registro tabular y como tratamiento al registro verbal, identificar tanto la variable dependiente como independiente.

Se encontró también que, de los niveles de comprensión que propone Hitt (1996), los alumnos de primer grado, son capaces de situarse entre el nivel 3 y 4, los cuales indican que se llevan a cabo de forma satisfactoria tareas de conversión de un registro a otro e inclusive conversiones de ida y vuelta.

Palabras clave: comprensión, registros de representación, función lineal.

Abstract

Engler (2019) and Stroup (2017) mention that the linear function is a unifying factor in school mathematics due to its relationship with other mathematical concepts and being the basis for understanding more complex knowledge. However, according to Higueras (1998), Robledo (2003), Azcárate and Deulofeu (1996), their teaching is focused on the poor construction of the concept, mastery of algorithmic processes and absence of significant situations, bringing with it little understanding and difficulties in the students.

Given this problem, the objective of this work is to design a didactic sequence that promotes the conversion and treatment of registers of semiotic representation to promote the understanding of the concept of linear function at the secondary level, since according to Duval (1993) the understanding of A content rests on the coordination of at least two registers of representation.

Among the main results of this work is the detection of difficulties; highlighting the articulation between graphic and algebraic registration, and capabilities; as the conversion of the verbal register to the tabular register and as a treatment for the verbal register, identifying both the dependent and independent variables.

It was also found that, of the levels of understanding proposed by Hitt (1996), first grade students are capable of placing themselves between level 3 and 4, which indicate that conversion tasks from a text are carried out satisfactorily. registration to another and even round-trip conversions.

Keywords: understanding, representation registers, linear function.

Introducción

El interés por el aprendizaje del concepto función surge a raíz de las dificultades que se presentan en su entendimiento, así como el lugar que este concepto ocupa en la comprensión de otros temas como el cálculo. En este documento se desarrolla una secuencia didáctica que prioriza el desarrollo conceptual sobre la realización mecánica de procedimientos y algoritmos. Para su desarrollo, se divide en los siguientes capítulos:

Capítulo 1: En este capítulo se presenta la motivación inicial del estudio, en donde se aborda la relevancia e impacto de la enseñanza de la función lineal en el aprendizaje de los estudiantes. También se incluyen los antecedentes, en los cuales se reportan varias investigaciones, sobre la enseñanza de las matemáticas, la importancia y dificultades encontradas al abordar las funciones y resultados al trabajarlas con representaciones semióticas. Por último, se realiza el planteamiento de la problemática, problema y objetivos de esta investigación.

Capítulo II: Se presenta el Marco Teórico, en el que se describen los elementos a considerar de la Teoría de Representaciones Semióticas (Duval, 2004) como por ejemplo noesis, semiosis, registros de representación, etc. y su aplicación en el tema de Funciones lineales. También se incorpora la definición de comprensión y los niveles en que ésta se puede ir adquiriendo, según Hitt (1996), así como la definición de secuencia didáctica y elementos matemáticos de las funciones lineales.

Capítulo III: Se expone el método de investigación que se eligió para llevar a cabo la investigación: cualitativo, pues se fundamenta en la literatura y en el juicio del docente. También se hace mención de los pasos a seguir para el diseño de la secuencia didáctica.

Capítulo IV: Se muestran el análisis de las evidencias obtenidas y los resultados que se obtuvieron al aplicar la secuencia didáctica a los estudiantes, en torno a los cuatro objetivos particulares.

Por último, se enuncian las conclusiones obtenidas a partir del diseño, aplicación y análisis de la secuencia didáctica desarrollada, además de recomendaciones para trabajar con el tema de funciones lineales, limitaciones y futuras líneas de investigación.

Capítulo I.
Planteamiento del problema de investigación

En este capítulo se presenta la motivación inicial del estudio, en donde se explica por qué se decidió trabajar con el concepto de función lineal desde el ámbito profesional y académico. También se incluyen los antecedentes tomados de diversas investigaciones basadas en la enseñanza de la función lineal y todo lo que esto conlleva. Al final de este capítulo, se realiza el planteamiento de la problemática, problema, pregunta y objetivos de este proyecto. Así como también, su respectiva reflexión y justificación.

1.1 Motivación

La función lineal es un contenido para el primer grado de secundaria, incluido en el eje temático: Número, álgebra y variación, específicamente en el tema: Funciones, cuyo aprendizaje esperado es: Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelen con estos tipos de variación.

Decidí trabajar con este objeto matemático porque es en la rama de las matemáticas donde he tenido un mejor desempeño académico. Además, se considera que éste es uno de los temas en donde los estudiantes presentan menor comprensión.

Recuerdo que cuando era estudiante de secundaria, al abordar este contenido me parecía de lo más sencillo sustituir valores en una expresión y los resultados colocarlos en una tabla y después realizar una gráfica. Podía hacer sin parar un ejercicio tras otro y realmente lo disfrutaba, sin embargo, ahora me percato de que realmente esto lo hacía de manera memorística y que probablemente en ese entonces, no hubiera sido capaz de diferenciar una ecuación que representa a una línea recta de una que representa una parábola, o las características de aquellas que pasan por el origen de otras que no lo hacen.

Son estos hechos los que marcaron mi aprendizaje y que hoy como docente, determinan mi interés en que los estudiantes a los cuales imparto clases comprendan los temas y no solo memoricen procedimientos. Es por ello que me propongo realizar una secuencia en la que por medio de diferentes registros los estudiantes construyan su propio aprendizaje y comprendan el objeto matemático estudiado.

Además, en el nivel secundaria, la función lineal será la base para entender la función cuadrática, mientras que para bachillerato será fundamental para el estudio del cálculo. Es importante que los estudiantes puedan ver que las funciones son de gran utilidad para resolver problemas de la vida diaria y en problemas relacionados con diferentes disciplinas como: finanzas, economía, estadística, ingeniería, medicina, química, física, astronomía y/o cualquier otra donde se requiera relacionar variables.

1.2 Antecedentes

Para abordar el tema de interés se realizó un análisis de trabajos e investigaciones previas con respecto a este tema. De manera inicial, se realizó una investigación en fuentes como repositorios de revistas (Redalyc, Dialnet, Scielo, etc.), además de búsquedas en Google Académico mediante el uso de palabras clave tales como: función lineal, representaciones semióticas y enseñanza de la función lineal.

El reporte de las referencias encontradas se ha dividido en cuatro secciones: Importancia de la función lineal, Consideraciones para la enseñanza de las matemáticas y el concepto función, Dificultades en el aprendizaje de la función lineal y Trabajos realizados sobre la enseñanza de la función lineal.

La primera sección rescata la importancia del concepto función en cuanto a cómo ha sido cimiento para la construcción de nuevos conceptos y su papel como un factor unificador de las matemáticas; en la segunda sección se habla de la enseñanza de las matemáticas y algunas características de ésta que conllevan a dificultades en el aprendizaje de los estudiantes; en la tercera sección se abordan dificultades en el aprendizaje de los estudiantes de corte procedimental, conceptual y sobre el uso de los registros de representación. Por último, en la cuarta sección se muestran las conclusiones a las que han llegado diferentes trabajos en los que se ha potencializado la enseñanza de la función lineal.

Los trabajos de Cano (2012), Farfán y García (2005), Posada y Villa (2006) que en las siguientes secciones se mencionan, siguen siendo la base para el diseño de propuestas didácticas y dificultades sobre la función lineal, como se puede ver en Zuluaga (2020). Así como también se retoma a Duval (2006), López y Sosa (2008), Sastre, Rey y Boubeé (2008) en Tocto (2023) y Roldán (2013), Quintero y Cadavid (2009) en Quintero (2019).

1.2.1 Importancia del estudio del concepto función

A lo largo de los años, el concepto de función ha sido objeto de estudio de numerosos investigadores, los cuales resaltan su importancia en la educación matemática. A continuación, se describen algunos de ellos.

Engler (2019) menciona que el estudio de las funciones constituye uno de los sustentos de la matemática actual, ya que apoya con fuerza la resolución de problemas del mundo real y de las distintas áreas: biología, administración, economía y ciencias sociales. Por ejemplo, un fabricante desea conocer la relación entre la ganancia de su compañía y su nivel de producción, un biólogo se interesa por el cambio de tamaño de cierto cultivo de bacterias con el paso del tiempo y a un químico le interesa la relación entre la velocidad inicial de una reacción química y la cantidad de sustrato utilizado.

Por su parte, Ruíz (1998, como se citó en Farfán & García, 2005) menciona que "tal y como se define actualmente en Matemáticas es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años" (p. 489). Esto último resalta como del entendimiento del concepto función se pueden adquirir y construir conocimiento de otro contenido matemático.

Podemos entender la importancia del concepto como lo describe Stroup (2007, como se citó en Magaña, 2014, p.1):

> Es fundamental en la educación matemática escolar de un individuo debido a su relación con otros conceptos matemáticos como pendiente y variación; además, por ser la base para la comprensión de conocimientos más complejos como proporción, tasa de cambio, que implican la comprensión previa de este concepto y que son fundamentales en el cálculo.

En cuanto al aspecto curricular, de acuerdo con Cuevas y Díaz (2014) es un contenido obligado desde los cursos de enseñanza secundaria hasta los universitarios. A pesar de ello, diversos investigadores reportan serias dificultades en los estudiantes para comprender este concepto, con la consecuente influencia en una mala interpretación de conceptos matemáticos que dependen en gran parte de la comprensión del concepto de función (p.165).

De manera específica, en cuanto a la función lineal, Ospina (2012) da a conocer su relevancia:

> Permite la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos que pueden ser modelados de forma lineal y promueve la comprensión de otros que no se comportan de esta forma. Igualmente, este concepto permite modelar situaciones del mundo real, en las cuales se presenta la relación entre variables. Por ejemplo: la función lineal es utilizada para solucionar problemas de costos, compras, transferencias, cálculos de perímetros, pero sobre todo su aplicación en la vida cotidiana es en el sector empresarial, en el aspecto económico, en el uso de la oferta y la demanda, cuyos comportamientos se comprueban a través de las gráficas lineales crecientes o decrecientes. (p. 10)

De este apartado, se rescata que dada la importancia del concepto función es imprescindible poner énfasis en su enseñanza, pues a partir de su comprensión puede resultar éste un elemento unificador de varios temas en matemáticas. Además, así como es una parte central del rompecabezas matemático también es el centro de grandes dificultades, inclusive en alumnos de alto rendimiento, por tanto, se debe trabajar en acciones que coadyuven a facilitar su entendimiento. Algunas de estas dificultades se abordarán más adelante.

1.2.2 *Consideraciones para la enseñanza de las matemáticas y el concepto de función*

En este apartado se exponen algunas consideraciones que corresponden a la enseñanza de las matemáticas. De igual forma, se abarcan características de la enseñanza de la función lineal que pueden traer consigo dificultades para el aprendizaje.

Spillane (2000, como se citó en Sowder, 2007) proporciona elementos acerca de lo que se puede privilegiar en una clase de matemáticas:

> Se desea que el conocimiento de principios matemáticos, a diferencia del conocimiento procedimental, reciba más atención en el trabajo escolar. El conocimiento procedimental se centra en seguir pasos predeterminados para calcular las soluciones memorísticamente, mientras que el conocimiento de principios se enfoca en las ideas y conceptos matemáticos que apuntalan a los procedimientos matemáticos. En este sentido se propone que los estudiantes resuelvan problemas, realicen conjeturas y razonamientos. En conclusión, se requiere que aprecien más la actividad matemática que hacer cálculos.

El enfoque pedagógico de los actuales planes y programas de estudios (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017) que rigen las matemáticas en la educación básica de nuestro país, prioriza la resolución de problemas como un medio para producir aprendizajes y basar la enseñanza de las matemáticas, considerando que los estudiantes:

> Deben usar conceptos, técnicas y procedimientos basados en sus saberes previos, que les permitan alcanzar conocimientos que no les han sido enseñados con anterioridad. También deben analizar, comparar y obtener conclusiones con ayuda del profesor y resolver problemas significativos basados en su vida cotidiana.

En contraste con las características que anteriormente se han abordado sobre qué se debe privilegiar en la clase de matemáticas, Hitt (1996) habla sobre cómo se ha instruido al profesor de matemáticas:

> Recibe una instrucción formal de la matemática, no se le dio la oportunidad de redescubrirla y no estuvo en ambientes de resolución de problemas en contexto. Al profesor se le mostraba que tal fórmula modelaba tal fenómeno físico, pero no era introducido en el arte de la modelación matemática de fenómenos físicos. (p. 258)

Actualmente, esta formación que se le da al docente no ha cambiado en gran medida, lo cual contribuye a que la enseñanza que éste brinda a sus estudiantes tenga marcada ciertas características. En diversas investigaciones (Higueras, 1998; Robledo, 2003; Azcárate y Deulofeu, 1996) señaladas en (Castro y Díaz, 2011) se han descrito algunos rasgos en la enseñanza del concepto de función, que además cabe señalar que están íntimamente relacionadas con dificultades presentadas en los estudiantes:

- La construcción deficiente que realizan del concepto.
- La falta del uso de situaciones significativas durante su aprendizaje, lo cual está directamente relacionado con el uso de modelos pedagógicos tradicionales usados por los profesores.
- La clase de actividades desarrolladas con los diferentes registros de representación que no propician la comprensión de los elementos inmersos en el concepto.
- La ejercitación de lo simbólico, lo cual propicia el dominio de procesos algorítmicos en las situaciones problema donde se utiliza el concepto de función, pero que, al enfrentarse a situaciones contextualizadas, los estudiantes se encuentran con dificultades para solucionarlas por la poca comprensión de elementos como: dependencia entre las variables, identificación de las variables y la clase de función. (p. 1230)

De lo anterior, es importante resaltar la importancia de enseñar matemáticas con situaciones problemáticas, que además de estar contextualizadas retomen los conocimientos previos de los estudiantes. Así como también, permitir que los alumnos vivencien los aprendizajes por ellos mismos, privilegiando la comprensión sobre la mecanización.

1.2.3 Dificultades en el aprendizaje de la función

En la sección anterior, se han dado a conocer algunas características de la enseñanza de la función lineal, ahora en este espacio se dan a conocer algunas dificultades que se han identificado en los estudiantes.

Para una mejor exploración, se dividen en dificultades surgidas al abordar el concepto de función, en el tránsito del concepto a partir de sus diversas representaciones y en lo procedimental.

a) Al abordar el concepto de función.

López (2008) identifica las siguientes dificultades con relación al significado de su concepto:

- Distinguir entre variable e incógnita
- Enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables
- El manejo operacional arbitrario con funciones, como si fueran ecuaciones, en el desarrollo del tema por parte del profesor
- Discernir entre funciones y ecuaciones
- Que el estudiante enuncie la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los que se define una función. (p. 314)

En esta investigación realizada por López (2008) se puede identificar que los estudiantes se conflictúan al entender la diferencia entre una ecuación y una función, por lo tanto, la idea de variable e incógnita resulta incompresible para ellos. En este sentido, en el proceso de cambio de ecuación a función, los estudiantes no logran establecer las diferencias entre la idea de incógnita que se viene trabajando desde una teoría de ecuaciones a una concepción fundamentada en una matemática ya no estática sino cambiante, con un trasfondo variacional, justificando y conceptualizando la noción de función como lo presenta Ruiz (1998, como se citó en Carvajal y Vega, 2014).

De acuerdo con Ursini (1994) las variables pueden ser empleadas para expresar una relación funcional entre dos cantidades cuyos valores pueden estar cambiando. Lo que caracteriza este uso de las variables es, por un lado, su movimiento dentro de ciertos rangos de valores (aspecto dinámico) y, por el otro, el hecho de que el valor que se asigna a una de las variables afecta el valor de la otra variable (aspecto estático). Con relación a lo anterior, en la Figura 1, Usiskin (1988, como se citó en Ursini, 1994) subraya el carácter multifacético del concepto de variable, y cabe resaltar que se usan los mismos símbolos literales para denotar sus diferentes caracterizaciones. Este uso de los símbolos literales puede contribuir a crear cierta confusión en los estudiantes que inician el estudio del álgebra.

Figura 1.

Los cuatro usos de la variable y sus concepciones dentro del álgebra

CONCEPCIÓN DEL ÁLGEBRA	USO DE LA VARIABLE
Aritmética Generalizada	Generalizadores de patrones (traduce, generaliza)
Medio para resolver problemas	Incógnitas, constantes, (resuelve, simplifica)
Estudio de relaciones	Argumentos, parámetros (relaciona, grafica)
Estructura	Marcas arbitrarias en papel (manipula, justifica).

Nota: Tomado de Ursini (1994, p. 90)

Por lo tanto, los estudiantes deben ser capaces de trabajar con números generales, con constantes, con incógnitas, con variables en una relación funcional y poder pasar de una a otra interpretación, aun cuando estas diferentes caracterizaciones de la variable tengan la misma representación simbólica, el no reconocerlas se torna frecuentemente un obstáculo que bloquea el aprendizaje del álgebra (Martz, 1982).

b) En el tránsito del concepto a través de sus diversas representaciones

Para comprender las dificultades y errores que aquí se presentan, es importante mencionar que el concepto función puede admitir representaciones en diferentes registros. Los registros, de acuerdo con Rey, Boubée, Sastre y Cañibano (2009) "son medios de expresión y de representación y se caracterizan precisamente por las posibilidades ligadas a su sistema semiótico. Un registro da la posibilidad de representar un objeto, una idea o un concepto, no necesariamente matemático" (p. 159).

El objeto matemático función puede representarse en diferentes registros, véase la Figura 2.

Figura 2.
Descripción de los registros de representación semiótica

Tipo de representación	Característica
Lenguaje natural	Representación que utiliza expresiones y palabras propias de la lengua, como, por ejemplo, el cuadrado de un número.
Tablas	Representación horizontal o vertical en la que se identifican valores asociados de la variable independiente y dependiente.
Gráficas	Representación de tipo visual que se apoya en los conceptos de plano cartesiano, par ordenado y otros del mismo estilo.
Fórmulas	Representación de tipo algebraico en la que se visualiza la expresión que relaciona las variables x y y.

Nota: Tomado de Prada, Hernández y Ramírez (2016, p. 193)

López (2008) afirma que "estas representaciones se hacen de manera aislada, trayendo consigo que los estudiantes no logren identificar la función como una relación de correspondencia entre los elementos de uno a otro, ni como relación entre variables" (p. 310). Lo cual está íntimamente relacionado con la enseñanza tradicional, en la que se limita al uso de una regla para probar cuándo una relación constituye una función; en otros, a la sola evaluación de funciones en el contexto algebraico (Prada, Hernández y Ramírez, 2016).

También se puede apreciar problemas para distinguir entre el objeto y alguna de sus representaciones, provocando la mezcla incoherente de éstas últimas (Vinner, 1983, como se citó en Hitt, 1996).

De acuerdo con Rey et al., (2009) "la articulación entre el registro gráfico y algebraico resulta en general la más difícil para los alumnos" (p. 159). Estos problemas podrían superarse si se reconociera la importancia de las reglas de correspondencia semiótica y se establecieran las coordinaciones en distintas direcciones (Prada, Hernández y Ramírez, 2016).

Para reafirmar esto, Duval (1998) menciona que la coordinación de los diferentes registros de representaciones aparece como una condición fundamental para el aprendizaje en aquellas disciplinas donde los datos son representaciones semióticas.

c) Al ejecutar procedimientos y mal uso de conceptos

Alpízar y Morales (2018) exponen las dificultades y errores que presentan los estudiantes de décimo año de la educación secundaria costarricense en el aprendizaje de la función lineal:

- Al utilizar la fórmula para el cálculo del valor numérico de la pendiente, omite el signo negativo cuando alguna de las coordenadas de un par ordenado es un número negativo.
- Error al aplicar algoritmos relacionados con la resolución de ecuaciones lineales.
- Dado el criterio de asociación de una función lineal de la forma $f(x) = \frac{mx+b}{a}$, asocia el valor numérico de la pendiente a m y no a $\frac{m}{a}$.
- Dado criterio de asociación de una función lineal de la forma $f(x) = \frac{mx+b}{a}$, asocia la intersección con el eje de las ordenadas a b y no $\frac{b}{a}$.
- Ubicación incorrecta de pares ordenados en el plano cartesiano al trazar la representación gráfica de la función. (p. 13)

Una vez que se han abordado ejemplos de dificultades y errores presentadas por los estudiantes en diferentes instancias, véase la Figura 3, en donde se reportan algunos factores de naturaleza cognitiva, epistemológica y didáctica que influyen en ciertas dificultades mencionadas anteriormente.

Figura 3.

Factores de naturaleza cognitiva, epistemológica y didáctica que influyen en ciertas dificultades

Dificultad	Cognitivo	Epistemológico	Didáctico
Obtener una expresión analítica o gráfica de una función que modele un fenómeno	Esquemas que responden a situaciones muy similares	La enseñanza el concepto ha tomado una dirección contraria a la génesis del mismo	Los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas o situaciones de variación
Confusión entre función y ecuación	Similitud de gráficas	Función como puente entre la geometría y el álgebra	Operar y manejar funciones como cualquier expresión algebraica. Sintaxis utilizada

Nota: Tomada de López (2008, p. 314)

De todas las dificultades mencionadas, se consideran primordiales para este trabajo las que a continuación se enuncian, debido a la edad de los estudiantes y el grado de complejidad que se abarca.

a) la diferenciación entre ecuación y función, priorizando el uso que se le da a la variable en ambos casos

b) la dificultad de los estudiantes al transitar de un registro a otro sin identificar el objeto matemático

c) la ubicación incorrecta del producto cartesiano.

1.2.4 *Investigaciones realizadas sobre la enseñanza de la función lineal*

Ospina (2012) realiza una investigación con el objetivo de indagar cómo aprenden los estudiantes, qué actividades favorecen la enseñanza de los objetos matemáticos, en particular, del concepto de función lineal, y realiza una reflexión sobre el alcance que éstas tienen en el aprendizaje; para ello, emplea la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Ospina considera que: "El estudiante se apropia del concepto matemático cuando realiza conversiones entre los diferentes registros de representación" (pág. 19).

Algunas conclusiones a las que llega, refieren que el registro privilegiado por los estudiantes es el gráfico, por las numerosas unidades significantes que posee, además, identifican que la simple conversión de éstos, sin que existan condiciones de congruencia entre ellos, no garantiza la comprensión del concepto matemático.

Así pues, se confirma la teoría de Duval, donde se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático (en este caso el concepto de función lineal) y al interior de estas representaciones, se faciliten condiciones de congruencia, se alcanza una mejor comprensión, logrando que el estudiante establezca la diferencia entre la representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático representado, discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, ya que el reconocimiento de la invarianza entre estas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático.

Otro elemento a incorporar, es la propuesta creada por Castro y Díaz (2005) denominada "Planteamiento didáctico del concepto de función para estudiantes de Educación Superior", la cual surge de la necesidad de reducir los altos índices de pérdida y deserción en los primeros semestres de Ingeniería y de la búsqueda de una mayor comprensión del concepto de función. La propuesta de enseñanza se construye bajo referentes epistemológicos y teóricos, y hace énfasis en la identificación de los diferentes elementos del concepto, de las formas y cambios de representación.

La metodología que se llevó a cabo para la aplicación de la propuesta está enmarcada en la resolución de problemas de Charnay (1998), y generó en los estudiantes un análisis crítico frente a las situaciones, lo que les permitía dar respuesta en forma sustentada, tomar decisiones y hacer cambios de registro de representación de manera pertinente.

Por su parte, Gora y Francy (2017) realizan una investigación que tiene como objetivo analizar si una secuencia de actividades favorece la aproximación al concepto de función lineal diseñada con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, ya que brindan elementos necesarios para comprender cómo los estudiantes se aproximan a la noción de función lineal. Para este trabajo, las actividades se diseñan a partir de las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan al estudio de la función lineal. La metodología empleada para alcanzar el objetivo general de investigación, es la Ingeniería Didáctica.

Como resultados de este trabajo se constata cómo los estudiantes, con muy poca ayuda, se van aproximando a la noción de función lineal empleando actividades diseñadas sobre la base de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), las que permitieron a los estudiantes transitar en los diferentes registros de representación: registro de lengua natural, registro numérico, registro algebraico y registro gráfico.

De igual forma se realizan dos recomendaciones: Es importante elaborar actividades diseñadas con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, las cuales contribuyen, en primer lugar, a que los estudiantes se aproximen a la noción de la función lineal y, posteriormente, a que los estudiantes aprendan el concepto de función lineal. Del mismo modo, es necesario empezar el estudio del objeto matemático función lineal tal como se originó hace miles de años: como resultado de situaciones problemáticas cercanas a la realidad de los estudiantes. De esta forma, ellos entenderán para qué sirven las Matemáticas, cuestión que ellos siempre preguntan. No se debería empezar de manera abstracta como se suele iniciar en muchos textos de enseñanza de nivel secundario. Es por ello que el diseño de la secuencia didáctica se partirá de situaciones problema cercana a la realidad de los estudiantes.

Cabral (2016) realizó el diseño de una secuencia con el objetivo de indagar qué elementos pueden construirse de ese universo de gráficas señalado en las aulas de secundaria (12-15 años). Se considera a este trabajo como una primera aproximación a la enseñanza de las funciones lineales en secundaria a través de actividades de modelación desde una perspectiva socioepistemológica.

De este estudio, se obtuvo evidencia de que los estudiantes de este nivel educativo son capaces de adquirir elementos referentes a la modelación - graficación de situaciones de movimiento y de argumentar comportamientos gráficos a partir de variaciones en el movimiento.

De Ávila (2013), derivado a los múltiples problemas detectados en alumnos de preparatoria con el concepto de función, en específico función cuadrática, y las dificultades para realizar las transiciones entre sus diferentes registros de representación, realizó una secuencia didáctica, la cual tiene sus fundamentos en la teoría de Representaciones Semióticas de Raymond Duval y en la teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau. En ella hace uso de la tecnología como herramienta para mejorar y fortalecer el tránsito entre representaciones.

Con la aplicación de esta secuencia, resalta la importancia del uso del software GeoGebra en el aula, puesto que fue fundamental para lograr las diferentes transiciones entre registros de representación de la función cuadrática. Así como también, menciona que las situaciones de acción, formulación y validación son de gran utilidad a los estudiantes para comprender conceptos matemáticos y que se detectó que los problemas para realizar un cambio de registro se deben a insuficiencias aritméticas y algebraicas.

Por último, se hace mención del trabajo de Cano (2012): La definición del concepto de función bajo el enfoque de la enseñanza para la comprensión en estudiantes de grado 11 de una institución educativa oficial de Medellín, cuyos objetivos fueron identificar los elementos que evidencian la comprensión del concepto función en los estudiantes antes y posterior a la aplicación del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

Se pudo constatar la complejidad del concepto de función en sus aplicaciones, las distintas definiciones válidas posibles, las nociones semánticas de la palabra función. De igual forma, del análisis de las entrevistas y los documentos presentados se muestra una evolución significativa en la comprensión del concepto de función.

De las anteriores investigaciones relacionadas con el concepto función, se puede observar cómo van de la mano sus respectivas representaciones semióticas para trabajar la comprensión, así como también el hecho de que estudiantes de diferentes niveles educativos han mostrado dificultad en su tratamiento.

1.3 Reflexión

En este apartado se realiza una reflexión de los antecedentes revisados, lo que se trata de mostrar aquí son los puntos relevantes que se tomarán en consideración y de igual manera, también, puede considerarse una base relevante para incluir en la propuesta.

Se considera que para crear una clase exitosa de matemáticas los docentes deben perder el miedo a innovar y salir de la comodidad, trabajar con los conocimientos que los estudiantes ya poseen y privilegiar el conocimiento de principios antes que el conocimiento procedimental, lo cual implica comprender el objeto matemático y no trabajar de manera mecánica.

A partir de la experiencia personal, en la enseñanza tradicional los estudiantes no alcanzan a apropiarse del verdadero significado del concepto función, pues, según Artigue (1995), tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se ha entendido como la exigencia del desarrollo de habilidades en el manejo de los procedimientos algorítmicos propios de la materia. Ante esto, el contenido pasa a ser una simple fórmula y técnicas algorítmicas memorizadas.

Desde esta perspectiva, resulta importante poner énfasis en la comprensión del contenido, haciendo uso de diferentes recursos como los registros de representación.

El objeto matemático "función" puede ser representado de forma analítica (algebraica), tabular, gráfica o en lenguaje natural. La conversión es la que permite la articulación entre los registros de representación en la enseñanza, y de acuerdo con Duval (2006) "es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas" (p. 166).

Como lo menciona Planchart (2002) el concepto de función se muestra en apariencia sencillo y fácil de entender, sin embargo, gran cantidad de investigaciones se han realizado con respecto a las dificultades que desemboca su entendimiento cabal.

Para el diseño de una secuencia didáctica, se deben tomar en cuenta las dificultades que el estudiante tiene en el tema para darle un debido seguimiento. Con respecto a las dificultades presentadas en este documento, parecen de vital importancia considerar las siguientes: enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, la articulación entre el registro gráfico y algebraico y la ubicación incorrecta del producto cartesiano.

1.4 Planteamiento

1.4.1 Problemática

El estudio de las matemáticas ha resultado ser un proceso complicado para gran cantidad de estudiantes, principalmente por abordar contenidos abstractos. Este hecho se incrementa cuando hay de por medio una enseñanza tradicional, que según Moreano, Asmad, Cruz y Cuglievan (2008) se caracteriza por estar centrada en hechos, contenidos y conocimientos, los cuales el profesor transmite a sus estudiantes esperando que estos adopten su forma de pensar al modelo que les es enseñado sin discusión ni crítica.

Derivado de los resultados de diversas investigaciones se sabe que algunos estudiantes de los diferentes niveles educativos tienen dificultades con el manejo del concepto de función lineal, ya que la manera tradicional de abordar este concepto en las clases es mediante la exposición del docente, quien con base en la manipulación de la expresión $y = mx + b$ que representa a una determinada línea recta, elabora una tabla de valores para luego trazar la gráfica.

Actualmente, estas estrategias de enseñanza utilizadas, especialmente en el contenido de función lineal, son insuficientes para lograr una comprensión adecuada.

Con relación a esto, López (2008) menciona que la forma en que la escuela enseña el concepto de función no incluye la manera en que éste se construye, no se aprecia su naturaleza y funcionalidad para que el alumno pueda entender situaciones de variación lineal y modelarlas mediante una función, trayendo consigo dificultades y concepciones erróneas.

Siguiendo la misma línea, Ruiz Higueras (1993, como se citó en Rey et al., 2009) expresa:

> Nuestros alumnos de secundaria manifiestan en general una concepción de la noción de función como un procedimiento algorítmico de cálculo... Podemos decir que sus definiciones no determinan el objeto función, sino las relaciones que han mantenido con él. Tanto se ha descompuesto el objeto función en segmentos para su enseñanza que el alumno no logra unificarlos dándoles una significación global. El alumno ha visto muchos objetos allí donde sólo debía existir uno. (p. 154)

Por lo tanto, se requiere que los estudiantes comprendan el tema función lineal utilizando diferentes registros de representación, ya que diversos trabajos (Ospina, 2012; Castro y Díaz, 2005; Gora y Francy, 2017; Cabral, 2016; De Ávila, 2013; Cano, 2012) e investigaciones en didáctica de acuerdo con D'Amore (1998) han evidenciado la importancia que tienen las representaciones, y los cambios de un registro de representación semiótico a otro, en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Ante este panorama, se hace evidente la preocupación por ocuparse de la labor docente, de utilizar nuevas estrategias que permitan a los estudiantes un nivel matemático más alto, capaz de ser comprendido y transferido a su vida diaria. Por lo tanto, se propone la realización de una secuencia didáctica en la que los estudiantes logren pasar de un registro a otro identificando en cada uno de ellos el objeto matemático.

1.4.2 Problema

Generalmente en el entorno escolar el concepto de función, de acuerdo con Vasco (1999, como se citó en Ospina, 2012) se concibe a la función lineal como un producto acabado que requiere ser memorizado, por tanto, el problema de esta investigación gira entorno a la comprensión del concepto función lineal a través de diseño de una secuencia didáctica que promueva conversiones y tratamiento de diferentes registros de representación.

1.4.3 Pregunta de desarrollo profesional

¿Cuáles son los niveles de comprensión sobre la función lineal que se favorecen con una secuencia didáctica que promueve la conversión y tratamiento de registros de representación semiótica?

1.4.4 Objetivo general

Diseñar una secuencia didáctica que promueva la conversión y tratamiento de registros de representación semiótica para favorecer la comprensión del concepto de función lineal en el nivel secundaria.

1.4.5 Objetivos particulares

- Determinar las capacidades y dificultades asociadas a la comprensión de la función lineal.
- Seleccionar actividades que impliquen la interrelación entre diferentes registros de representación semiótica (verbal, algebraica, gráfica y tabular) para su conversión y tratamiento.
- Describir los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes en torno al objeto matemático función lineal.

1.5 Justificación

La importancia de trabajar con la comprensión del contenido funciones lineales radica en que éste, es uno de los conceptos fundamentales en el estudio de las matemáticas y en el programa del nivel secundaria es uno de los temas más complejos.

Además, al recordar la forma en que es enseñado este contenido, se llega a la conclusión de que esta enseñanza fue poco o nada significativa. Ahora en la profesionalización, se busca utilizar nuevas alternativas, como la articulación de diversos registros de representación, para favorecer la comprensión del contenido, sin caer en tratamiento mecánico del contenido o a la elaboración de tablas y gráficas sin un sentido.

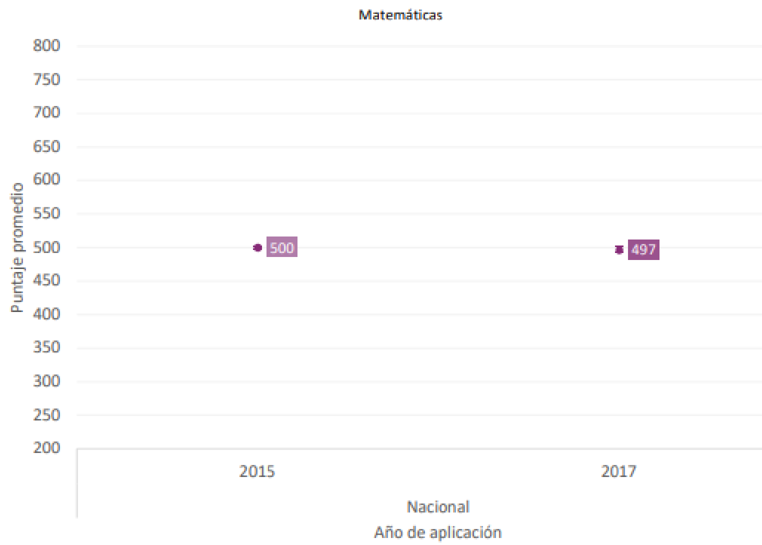
También se debe resaltar que el estudio de la función lineal prepara a los estudiantes para conceptualizar nuevos contenidos como la función cuadrática y en el nivel bachillerato el límite, la continuidad, la derivada y la integral definida como límite de una suma.

Por último, mencionar que de acuerdo con el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) realizada en el 2017 a estudiantes de tercer grado de secundaria, el cual se encarga de recopilar cómo los estudiantes han logrado los conocimientos y las habilidades necesarios para desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo al resolver los diferentes tipos de problemas que se presentan con respecto a los temas y ejes que abarca el currículo nacional de Matemáticas, se obtiene que "a escala nacional, en Matemáticas la puntuación promedio de los alumnos de secundaria fue de 497 puntos en 2017, en contraste con 2015 cuya puntuación promedio fue de 500 puntos" (INEE, 2019, p. 103).

Ambos puntajes se ubicaron en el nivel de logro I (véase la Figura 4)

Figura 4.

Puntajes promedio de los estudiantes en PLANEA tercero de secundaria, 2015-2017



Nota: Tomado de *Informe de Resultados PLANEA 2017* (p. 103)

Es importante mencionar que, para ubicar los resultados de esta prueba, se proponen cinco niveles de logro (Ver Figura 5), que están íntimamente relacionados con los aprendizajes esperados del plan y programa de estudios, y están en función de su relación con lo que saben y son capaces de hacer los estudiantes de tercero de secundaria. Así como también que estos niveles son acumulativos, de tal forma que los alumnos ubicados en un nivel IV también dominan los conocimientos y las habilidades señalados en los niveles anteriores.

Figura 5.
Niveles de logro en matemáticas de acuerdo con la prueba PLANEA

Nivel	Descriptor (extracto)
I	Los alumnos que se ubican en este nivel tienen carencias importantes en el dominio curricular. Ellos logran resolver problemas que implican estrategias de conteo básicas (visuales) o que implican comparar o realizar cálculos numéricos con números naturales. Además, son capaces de expresar en lenguaje natural el significado de fórmulas geométricas comunes y viceversa. Se esperaría que en este nivel los alumnos logren resolver problemas que impliquen las operaciones básicas con números decimales, fraccionarios y números con signo; el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, y problemas de valor faltante que implican relaciones de proporcionalidad directa. Además, que calculen perímetros y áreas, y resuelvan ecuaciones de primer grado de la forma ax+b=c y sus expresiones equivalentes.
II	Los alumnos que alcanzan este nivel, además de los conocimientos y habilidades descritos en el nivel I, resuelven problemas con números decimales, algoritmos elaborados como la raíz cuadrada y el máximo común divisor, y ecuaciones lineales sencillas. Además, reconocen las relaciones de los ángulos de triángulos y los que se forman entre paralelas cortadas por una transversal, así como las secciones que se generan al cortar un cono. También calculan el volumen de cuerpos con caras planas. Por otra parte, reconocen y expresan, de diferentes formas, relaciones de proporcionalidad directa y plantean relaciones sencillas de proporcionalidad inversa.
III	Los alumnos que alcanzan este nivel, además de los conocimientos y habilidades descritos en los niveles II y I, resuelven problemas con números fraccionarios, con signo o potencias de números naturales. Suman o restan expresiones algebraicas e identifican la ecuación o el sistema de ecuaciones que modelan una situación. Además, resuelven problemas que implican el teorema de Pitágoras, la imaginación espacial (sólidos de revolución), propiedades de ángulos en círculos o triángulos y relaciones de semejanza de triángulos. También calculan el perímetro del círculo y de áreas de figuras compuestas. Por otra parte, resuelven problemas de cálculo de porcentajes o reparto proporcional y modelan gráficamente un fenómeno que involucra únicamente funciones lineales.
IV	Los alumnos que alcanzan este nivel, además de los conocimientos y habilidades descritos en los niveles III, II y I, calculan términos de sucesiones y multiplican expresiones algebraicas. Resuelven problemas que implican números fraccionarios y decimales (combinados), el uso de notación científica o de una ecuación o sistema de ecuaciones. Además, resuelven problemas que implican transformaciones de figuras, propiedades de mediatrices y bisectrices, y razones trigonométricas. Calculan el área de sectores circulares y coronas, y el volumen de cuerpos redondos. Por otra parte, resuelven problemas que implican estrategias de conteo, calcular la probabilidad de un evento simple o abstraer información de tablas y gráficas. También modelan gráficamente un fenómeno que involucra funciones lineales y cuadráticas.

Nota: Tomado de *Informe de Resultados PLANEA 2017* (p. 104)

Según el INEE (2019) en Matemáticas, aproximadamente 6 de cada 10 estudiantes se ubicaron en el nivel I (65%), 2 de cada 10 estudiantes se ubicaron en el nivel II (22%), 9 de cada 100 en el nivel III (9%); y sólo 5 de cada 100 en el nivel IV (5%).

El aprendizaje de la función lineal se ubica en el nivel III de logro con un 9% de alcance en los estudiantes, por lo tanto, es importante mejorar la calidad de la enseñanza, mediante el diseño de situaciones que coadyuven a la comprensión, para subir en los estándares de evaluaciones nacionales que reflejan el aprendizaje básico que necesitan los estudiantes para desarrollarse plenamente en la sociedad.

Capítulo II.
Marco Conceptual

En este capítulo se abordan conceptos relacionados con la teoría de Registros de Representación Semiótica, enseguida se explica que es una secuencia didáctica y el orden que ésta contempla, luego se incluye qué se entiende por comprensión y sus respectivos niveles según Hitt (1996), después aparecen los fundamentos matemáticos relacionados con la función lineal y por último orientaciones didácticas del plan y programa de estudio

2.1 Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS)

Las representaciones semióticas para el aprendizaje de las Matemáticas son importantes principalmente por dos razones, "la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos" (Vega, 1985 citado en Socas, 2011, p. 17).

En este sentido, el espacio adecuado para trabajar las representaciones es en el aprendizaje de las matemáticas, pues según Duval (2004) es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

Derivado de lo anterior, es que tiene tal relevancia la TRRS, desarrollada por Raymond Duval, profesor de la Universidad del Litoral, director de estudios de la Academia de Lila (Francia) e investigador del Instituto de Investigaciones en Educación Matemática (IREM de Estrasburgo), quien, en 1995, en su libro Sémiosis et Pensée Humanie. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, introduce el concepto de "Registro de Representaciones semióticas".

Según su autor (Duval, 1998), esta teoría trabaja bajo tres premisas:

1. La falta de coordinación de registros de representación describe y explica las dificultades que tienen los estudiantes en su trayectoria académica.
2. El concepto de un conocimiento tiene múltiples representaciones semióticas.
3. Existen variables específicas de contenidos cognitivos en diferentes registros de representación, estas variables ayudan a realizar propuestas didácticas para el tránsito adecuado entre diferentes registros de representación.

Dado que el objetivo de este trabajo es el diseño de una secuencia didáctica que contemple los diferentes Registros de Representación Semiótica (RRS) para coadyuvar a las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la función lineal, resulta importante hacer hincapié en estas premisas ya que se sabe que la función lineal tiene diferentes RRS, así como el hecho de que la falta de coordinación entre éstos trae consigo dificultades.

A continuación, para comprender esta teoría, se describen algunos de sus principales componentes: representación, representación semiótica, registro de representación semiótica, semiótica y noésis.

2.1.1 Representación y representación semiótica

De acuerdo con Macías (2016), "una representación es una construcción que hace referencia a un objeto o realidad determinada, así como a algunas de sus características y propiedades, permitiendo a los sujetos interaccionar y operar con ellos sin necesidad de su presencia física" (p. 42). Por ejemplo, en la enseñanza de las matemáticas, las fracciones tienen diferentes representaciones: número decimal, porcentaje, razón, representación gráfica, etc.

En este mismo sentido, para Tamayo (2006) "…las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior" (p. 39). Así, relacionado con el estudio de las matemáticas, el signo $+$ representa sumar, el signo $-$ representa restar, el signo $\times$ representa multiplicar, etc.

Este concepto, incluye la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados (Kaput, 1989). Por ejemplo, el concepto es sumar y su representación es $a + b$.

A principios del siglo pasado, la noción de representación aparece en el panorama de la psicología desde sus inicios como disciplina, Hernández (como se citó en Casas, 2019, p. 6) muestra el recorrido que este concepto ha dado:

- Representación mental (1924 - 1926): Piaget recurre a esto como la evocación de los objetos ausentes.
- Representación interna o computacional (1955 - 1960): Uno de los iniciadores fue Broadbent y se concibe desde las teorías que privilegian la transformación que hace un sistema de las informaciones que recibe para que produzcan una respuesta adaptada, es decir, como una codificación de información.
- Representación semiótica (1985): desde el marco de la educación matemática, en particular considerando los problemas de aprendizaje, se presenta como el cambio de la forma en que un conocimiento está representado. (p. 23)

En este sentido, Duval entiende por representación semiótica "la producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (Duval, 1995, p. 175). Por ejemplo, una representación semiótica de una ecuación lineal es $y = 4x + 5$, ya que ésta permite la combinación de signos para expresar una recta.

2.1.2 Registros de representación semiótica

Duval (1993) afirma que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son necesarias, ya que éste no es directamente accesible por la percepción o por medio de nuestros sentidos como lo son los objetos físicos.

Las representaciones semióticas juegan un papel fundamental en la actividad matemática, por ello, Duval (1993) postula que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognoscitivas fundamentales ligadas a la semiosis, entendida ésta como la construcción de una representación: Formación de una representación, tratamiento de la representación y conversión de la representación.

Para Font (2001), el objeto matemático función posee cuatro registros de representación semiótica: expresión verbal, tabla, gráfica y expresión analítica. Al respecto, señala lo siguiente:

> La representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres; la representación en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la representación gráfica se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la Geometría y la Topología; mientras que la expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el Álgebra. (p. 182)

En la Figura 6 se presenta un ejemplo de los registros de representación semiótica para la función lineal. La representación semiótica verbal se refiere a una situación problema, la representación algebraica a una expresión de la forma $y = mx + b$, la tabular a una tabla que relaciona las variables y la gráfica a una recta en el plano cartesiano. Posteriormente, se explicará más a detalle cada una de estas representaciones.

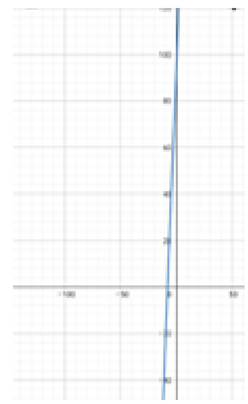
Figura 6.

Registros de representación semiótica verbal, tabular, gráfica y expresión analítica para la función lineal en secundaria

Una persona al inicio de la semana tiene $96.00 y diariamente sus papás le dan $12. ¿Cuánto dinero juntará en los primeros 4 días?

$y = 12x+96$

Días	Saldo
1	
2	
3	
4	



Fuente: Elaboración propia

2.1.3 Semiosis y Noesis

Para este trabajo la existencia de una diversidad de registros de representación semióticos es inseparable del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano, puesto que se pretende fomentar la comprensión a partir de la conversión y tratamiento de estos registros.

Duval (1993) afirma que no puede ser posible una *noesis sin semiosis*, donde, como se ha señalado líneas atrás, *semiosis* es una construcción de una representación, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas, y *noesis* la aprehensión del concepto de los objetos representados, incluyendo las diferentes actividades y procesos cognitivos desarrollados por el sujeto.

En el estudio de la función lineal hablar de noesis hace referencia a la aprehensión de este concepto, mientras que semiosis hace alusión al trabajo en sus diversos registros de representación: tabla o tabular, gráfica, algebraica y verbal. En conclusión, de manera general, un alumno obtendrá la comprensión del concepto función lineal si da tratamiento y realiza conversiones entre sus diversas representaciones. En lo que sigue se describirán algunas características de la noesis y de la semiosis.

Características de la noesis. La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos características:

1. El uso de varios registros de representación semiótica es típico del pensamiento humano.
2. El progreso de los conocimientos se acompaña siempre con la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos, que coexisten más o menos con el primero de entre ellos, el de la lengua natural. (Duval, 1993, p. 183)

   Para explicar la diversidad de registros en el funcionamiento del pensamiento humano, se hace hincapié en lo siguiente:
   - La existencia de varios registros permite hacer cambios entre ellos, y este cambio tiene como objetivo permitir efectuar tratamientos de una manera más económica y más potente.
   - Los registros se complementan. Toda representación es parcial cognitivamente con respecto a los que ella representa y que de un registro a otro no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan.

Ante esto, D´Amore (2005) nos muestra la estrecha interdependencia entre noética y semiótica, pues si bien, no existe noética sin semiótica, ésta última se adapta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética.

Características de la semiótica. Se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica. Como se ha mencionado, para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis (Duval, 1993):

1. La formación de una r*epresentación* identificable como una representación de un registro dado: enunciación de una frase (comprensible en una lengua natural dada), composición de un texto, dibujo de una figura geométrica, elaboración de un esquema, escritura de una fórmula, etc.
2. El *tratamiento* de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
3. La *conversión* de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. (p. 177)

Un ejemplo de la formación de una representación en la función lineal es su representación algebraica $y = mx + b$. El tratamiento al interior del registro algebraico en la función lineal, es reconocer que la expresión algebraica $y = mx + b$ también puede verse como $y = mx$, en los casos que b sea igual a 0. Y una conversión sería proponer diversos valores para la variable x, con los que consecuentemente se obtendrá su imagen y poder representar éstos de manera gráfica o tabular.

Se debe recalcar que la última de estas tres actividades, *la conversión*, según Duval (1993), tiene un carácter fundamental para la noesis y para la comprensión, así como también, que en una fase de aprendizaje juega un papel esencial en la conceptualización. Es por ello que, en matemáticas, no ocurre la adquisición conceptual de un objeto matemático si éste no pasa necesariamente a través de dos o más representaciones semióticas. Por ejemplo, el concepto de función lineal al ser un ente abstracto, requiere de sus diversas representaciones semióticas para facilitar su comprensión: verbal, tabular, gráfica y algebraica.

2.2 Comprensión

Si bien, este trabajo va encaminado a generar comprensión del concepto función lineal, es importante conocer qué significa esta noción. De acuerdo con Hitt (1996) comprender un concepto implica una articulación coherente de las diferentes representaciones que intervienen durante la resolución de problemas, es decir, un concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto mismo.

De igual forma, retomamos la postura de Duval (1993) ya que complementa esta definición, estableciendo que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación, la comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación.

2.2.1 Niveles de comprensión

Hitt (1996) retoma investigaciones realizadas con anterioridad (Vinner, 1983; Markovits, Eylon y Bruckheimer, 1986) para mostrar cinco niveles de comprensión del concepto de función, los cuales están basados en el tipo de representaciones que los estudiantes dominan y emplean, así como con el grado de dichas relaciones. Cabe mencionar que estos niveles son válidos también para otros conceptos:

Nivel 1: Ideas imprecisas sobre un concepto (mezcla incoherente de diferentes representaciones del concepto).
Nivel 2: Identificación de diferentes representaciones de un concepto. Identificación de sistemas de representación.

Nivel 3: Conversiones (transformaciones externas) de una representación de un sistema semiótico a otro.

Nivel 4: Articulación coherente entre dos sistemas de representación.
Nivel 5: Articulación coherente de diferentes sistemas de representación semióticas en la resolución de un problema. (p. 125)

A continuación, en la Tabla 1 se presentan ejemplos de los cinco niveles de comprensión propuestos por Hitt (1996) para el tema de funciones con el fin de coadyuvar en su entendimiento.

Tabla 1.
Instrumento para medir la comprensión de los estudiantes en el tema de función lineal

Niveles de comprensión	**Características**
Nivel 1: Ideas imprecisas sobre un concepto (mezcla incoherente de diferentes representaciones del concepto).	Los estudiantes crean registros, pero de forma incorrecta. Algunos ejemplos son: • Confusión del eje x con el y • Como producto cartesiano obtienen líneas • Confusión entre una expresión algebraica y una función • Identificación de variable dependiente e independiente • Evaluar valores en la función.
Nivel 2: Identificación de diferentes representaciones de un concepto. Identificación de sistemas de representación.	En este nivel, los estudiantes crean registros y realizan tratamientos dentro de un mismo registro de representación. Reconocen que la función lineal puede representarse mediante cuatro registros de representación: verbal, gráfica, algebraica y tabular. Los tratamientos que el estudiante deben realizar son: • Tratamiento en el registro algebraico • Tratamiento en el registro gráfico
Nivel 3: Conversiones (transformaciones externas) de una representación de un sistema semiótico a otro.	En este nivel se sitúan los estudiantes que realizaron de manera satisfactoria tareas de conversión de un registro de representación a otro, comprendiendo que conserva el significado del objeto matemático. Las conversiones que el estudiante debe realizar son: - Del registro verbal al registro tabular - Del registro verbal al gráfico - Del registro verbal al algebraico. - Del registro tabular al registro verbal - Del registro tabular al gráfico - Del registro tabular al algebraico - Del registro gráfico al registro tabular - Del registro grafico al verbal

	-Del registro algebraico al registro tabular. -Del registro algebraico al gráfico. -Del registro algebraico al verbal.
Nivel 4: Articulación coherente entre dos sistemas de representación.	Existe coordinación entre 2 registros, existe tránsito de ida y vuelta entre éstos. - Del registro verbal al registro tabular - Del registro verbal al gráfico - Del registro verbal al algebraico. - Del registro tabular al gráfico - Del registro tabular al algebraico
Nivel 5: Articulación coherente de diferentes sistemas de representación semióticas en la resolución de un problema. (p. 125)	Coordinación entre registros, existe tránsito de ida y vuelta y se aplica en la resolución de problemas. Así como también la creación de un problema propio a partir de otro registro dado.

2.3 Secuencia didáctica

Dado que nuestro propósito es la elaboración de una secuencia didáctica, resulta importante realizar una descripción del significado que ésta retoma para nuestro proyecto.

Una secuencia didáctica "constituye una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo" (Díaz Barriga, 2013, p. 1). Por lo tanto, es una herramienta que requiere se conozca la asignatura, plan y programa de estudios, así como la visión del maestro para crear actividades que propicien el aprendizaje de los alumnos.

2.3.1 Estructura de una secuencia y línea

En este apartado se visualiza el orden interno de las actividades de aprendizaje que constituyen una secuencia didáctica. Se describen los tres tipos de actividades que integran una secuencia didáctica: apertura, desarrollo y cierre.

Actividades de apertura. El sentido de las actividades de apertura es permitir "abrir el clima de aprendizaje, si el docente logra pedir que trabajen con un problema de la realidad, o bien, abrir una discusión en pequeños grupos sobre una pregunta que parta de interrogantes significativas para los alumnos, éstos reaccionarán trayendo a su pensamiento diversas informaciones que ya poseen, sea por su formación escolar previa, sea por su experiencia cotidiana" (Díaz-Barriga, 2013, p. 6).

Se caracteriza por establecer actividades de apertura en los temas (no en cada sesión de clase), así como su flexibilidad de llevarse a cabo mediante tareas que se les pidan a los estudiantes y ser trabajadas de forma individual o en pequeños equipos.

Actividades de desarrollo. Las actividades de desarrollo tienen la finalidad de que el estudiante interaccione con una nueva información. Díaz-Barriga (2013) afirma que hay interacción porque el estudiante cuenta con una serie de conocimientos previos sobre un tema, a partir de los cuáles le puede dar sentido y significado a una información. Para significar esa información se requiere lograr colocar en interacción: la información previa, la nueva información y hasta donde sea posible un referente contextual que ayude a darle sentido actual.

Estas actividades se deben caracterizar por no limitarse a la realización de ejercicios rutinarios o de poca significatividad, además de que durante su ejecución el profesor puede realizar una exposición sobre los principales conceptos, teorías, habilidades, etc. Algunas de estas actividades pueden constituirse en evidencias de aprendizaje para ser consideradas en la evaluación, tanto en la perspectiva formativa, como sumativa (la vinculada con la calificación).

Dos momentos son relevantes en las actividades de desarrollo: el trabajo intelectual con una información y el empleo de esa información en alguna situación problema. El problema puede ser real o formulado por el docente y vinculado al contexto inmediato de los estudiantes.

Actividades de cierre. Las finalidades de las actividades de cierre, de acuerdo con Díaz-Barriga (2013) son:

> Lograr una integración del conjunto de tareas realizadas, permiten realizar una síntesis del proceso y del aprendizaje desarrollado. A través de ellas se busca que el estudiante logre reelaborar la estructura conceptual que tenía al principio de la secuencia, reorganizando su estructura de pensamiento a partir de las interacciones que ha generado con las nuevas interrogantes y la información a la que tuvo acceso. (p. 11)

Este tipo de actividades tienen las siguientes características:

- Se puede reconstruir información a partir de determinadas preguntas y la realización de ejercicios que impliquen emplear información en la resolución de situaciones específicas.
- Pueden ser realizadas en forma individual o en pequeños grupos, pues lo importante es que los alumnos cuenten con un espacio de acción intelectual y de comunicación y diálogo entre sus pares.
- No necesariamente todas las actividades de cierre se deben realizar en el salón de clases
- Posibilitan una perspectiva de evaluación para el docente y el estudiante, tanto en el sentido formativo, como sumativo. De esta manera las actividades propuestas pueden generar múltiple información tanto sobre el proceso de aprender de los alumnos: lo que se ha logrado, deficiencias, dificultades y compromiso que asumen con su responsabilidad de aprender.

2.4 Fundamentos matemáticos

En este apartado se revisan los conceptos y nociones básicas sobre la función lineal, así como también, su historia, génesis y desarrollo.

2.4.1 Historia y evolución del concepto función

Para definir el concepto de función y entender cómo debe ser enseñada es importante conocer los orígenes de este concepto. Por ello, se hace alusión a la trascendencia que ha tenido a largo de los años.

De acuerdo con López (2008) y Díaz (2013) a lo largo de la historia existieron momentos que marcaron su desarrollo~~,~~ hasta su definición formal. De manera breve, algunas de sus transformaciones fueron:

- En un principio, no existía una idea abstracta de variable. El conteo fungía como una correspondencia entre el conjunto de objetos por contar y la secuencia de números para contar.
- En la Edad Media mediante el estudio de fenómenos naturales surgieron ideas alrededor de las variables dependiente e independiente, sin definirlas aún. Pero les faltó el lenguaje del álgebra con el cual expresar la ley de variación o la correspondencia funcional (Boyer, 1946, como se citó en Youschenvttch, 1976).
- En el periodo moderno (finales del siglo XVI) Leibniz en 1673 introdujo por primera vez la palabra función en sus escritos, para designar un objeto geométrico asociado con una curva.

- El concepto formal de función, fue dado en 1718 por Johan Bernoulli como: "Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes" (López, 2008, p. 303).
- Siguiendo la definición de Bernoulli, Euler la definió como: "Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes" (Rüting 1984, como se citó en Díaz, 2013, p. 16)
- En 1822 Fourier la definió como:

  En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas $f(x)$. Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única. (Rüting 1984, como se citó en Díaz, 2013, p. 17)
- En 1829 Dirichlet llega a formular por primera vez el concepto moderno de función $y = f(x)$ de una variable independiente en un intervalo $a < x < b$.
- En 1939, Bourbaki dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios.

De la historia de cómo surge el concepto función, se observa que en cada periodo histórico se usa la función a partir de uno de sus registros de representación, comenzando por el registro verbal a partir de elementos de la naturaleza, luego el gráfico, enseguida la expresión analítica y por último el registro tabular. Esto da pie a entender cómo los estudiantes van adquiriendo comprensión a partir de formar un nuevo registro de representación, pues el primero sirve de base para formar un registro nuevo y así sucesivamente.

Sin duda alguna, el conocer la historia de los objetos matemáticos nos permite reflexionar acerca de algunas dificultades que se pueden presentar dada la forma en la que fue surgiendo el concepto, así como también, un panorama de cómo realizar su enseñanza. Ante esto, Farfán y Hitt (1983, citado en Sastre, 2005) señalan:

> Existen elementos que permiten, e históricamente hicieron posible, la construcción de un concepto: todos estos son andamios de los que se vale el sujeto en su acción sobre el objeto, para acceder al concepto en sí, andamiajes con vida efímera que, circunstancialmente, son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto y donde el "error" y la sensibilidad a la contradicción desempeñan un papel importante. (p. 34)

2.4.2 Objeto matemático: Función

Es importante mencionar que, de acuerdo con D´Amore (2005) “en matemáticas se habla más de *objetos matemáticos* dado que en matemáticas se estudian preferiblemente objetos mucho más que conceptos” (p. 23). D’Amore (2006) define objeto matemático como aquello que es indicado, señalado y nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas.

En este sentido, el objeto matemático función se define de la siguiente manera:

> “Una función f es una regla que se asigna a cada elemento de x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B”. (Stewart, 2010, p.12)

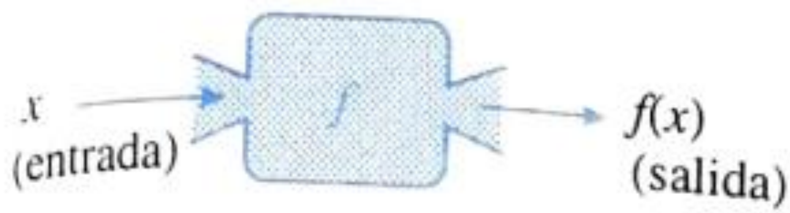
De acuerdo con Stewart (2010) los conjuntos A y B cumplen con las siguientes características:

> Los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El conjunto A se llama dominio de la función. El numero $f(x)$ es el valor de f en x y se lee f de x. El rango de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio A. Un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. Un símbolo que representa un número en el rango de f se llama variable dependiente. (p. 12)

“En algunos textos se presenta la noción de transformación para el concepto de función haciendo una analogía con una máquina: una función puede considerarse como un artefacto que transforma valores, el cual al ser alimentado con un número lo transforma en otro” (Roldán, 2013, p. 34). De esta manera resulta sencillo entender el concepto de dominio y rango, como una entrada y una salida de dicha máquina (véase la

Figura 7). “Si x esta en el dominio de la función f, entonces x entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función”. (Stewart, 2010, p. 13)

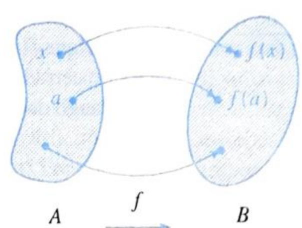
Figura 7.
Analogía de la noción de función con la manera de operar de una máquina



Nota: Tomado de Stewart (2010, p. 13)

Además de representar la función como una máquina, también se suele presentar con un diagrama sagital, donde "cada flecha une un elemento de A con un único elemento de B. La flecha indica que f(x) está asociada con x, $f(a)$ con a, etc. (véase Figura 8)

Figura 8.
Diagrama sagital de una función f



Nota: Tomado de J. Stewart (2010, p. 13)

Existen diferentes tipos de funciones: función constante, función raíz, función polinómica, función racional, entre otras. Dentro de las funciones polinómicas están las funciones lineales, en las cuales se centra este trabajo.

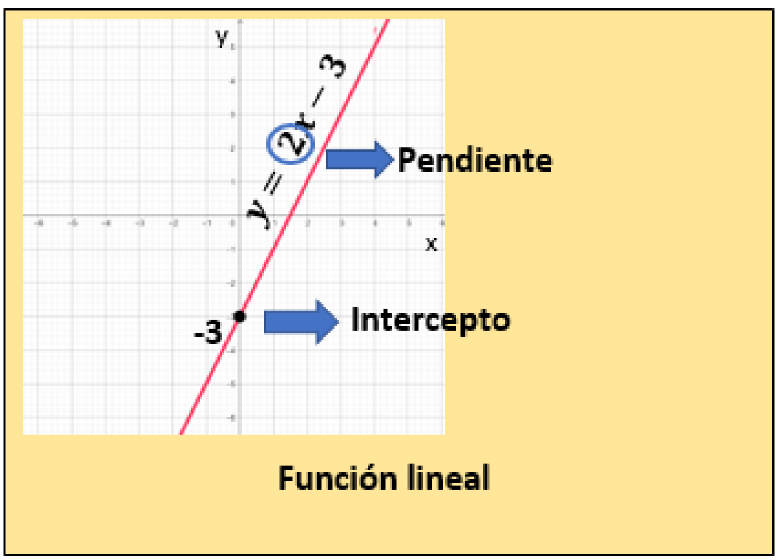
Una función lineal tiene la expresión analítica $y = f\ (x) = mx + b$, donde m y b son números reales y $m \neq 0$.

m es la pendiente o razón de cambio de y con respecto a x y, b es la intersección de la gráfica con el eje vertical (Roldán, 2013, p. 38).

Una función lineal no puede expresarse mediante una ecuación lineal. Ya que esta es una expresión algebraica que contiene dos o más variables, que son iguales a un valor, el propósito de la ecuación es encontrar el valor de las variables. Por ejemplo, $4x - 5 = 11$. Mientras que en una función lineal intervienen forzosamente dos variables, que guardan una correspondencia: a partir de una, se obtiene la otra. Dicha correspondencia se refleja mediante un punto en el plano (x, y). Por ejemplo, $y = \ 6x - 2$.

En la Figura 9 se presenta una descripción de lo anterior.

Figura 9.
Pendiente e intersección en el eje de las ordenadas



Nota: Elaboración propia

Duval (2006) considera que muchos objetos matemáticos se pueden representar en diferentes registros de representación semiótica, lo que ayudará en su comprensión. De esta manera es que en matemáticas accedemos a los conceptos solamente por medio de los registros de representación semiótica de éstos, a diferencia de la construcción de conceptos en otras áreas del conocimiento, por ejemplo, en la biología: célula, átomos, seres vivos, plantas o animales, donde las representaciones de un concepto pueden ser objetos físicos.

En el caso de las funciones lineales tenemos cuatro registros de representación semiótica. En lo que sigue realizaremos la descripción de los elementos matemáticos que destacan en cada uno de dichos registros.

2.4.3 Registros de representación de la función lineal

Dado que la única forma de acceder a los objetos matemáticos es por medio de sus registros de representación, a continuación, se describen aquellos que se tienen para las funciones lineales, ya que, cada uno de éstos permite conocer elementos importantes de este contenido.

Registro algebraico o analítico. Permite representar a la función por medio de "una expresión escrita en la que se explicita la relación entre las variables, esta expresión analítica puede ser algebraica (polinómica) o no y, corresponde a la regla de correspondencia o dependencia entre cantidades o magnitudes". (Roldán, 2013, p. 38). "Una función lineal tiene la expresión analítica $y = f\ (x) = mx + b$, donde m y b son números reales y $m \neq 0$" (Roldán 2013, p. 38). ´

> Se le llama función de proporcionalidad directa o, simplemente, función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x, y). Si su ecuación tiene la forma $y = mx$ o $f(x) = mx$, el factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de pendiente de la función porque indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente. (Ramírez y Toro, 2012, p. 54)

Registro gráfico. Es el registro más común para visualizar una función es su gráfica y se considera como la representación geométrica de la misma. "Si f es una función con dominio A, entonces su gráfica es el conjunto de las parejas ordenadas $(x, f(x))$, tal que x pertenece a A" (Stewart, 2010, p. 12).

Así, la gráfica de una función consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado que cumplen con que $y = f(x)$.

Ante esto, es importante mencionar que para este registro surgen dos elementos que a continuación se describen: conjunto de pares ordenados y plano cartesiano:

Conjunto de pares ordenados. La gráfica de una función consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado. En Roldán (2013) se describen de la siguiente manera:

> En esta representación se hace explícita una a una cada pareja ordenada (x, y) de la función. La primera componente pertenece al conjunto de salida o dominio y

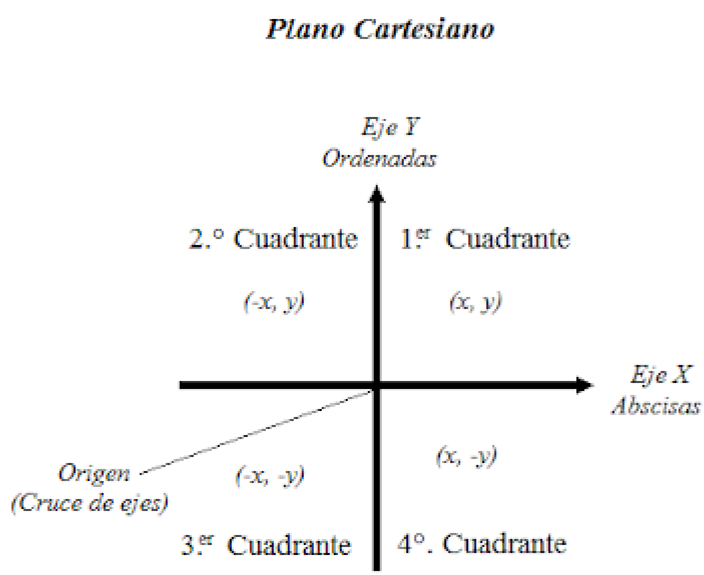
la segunda componente pertenece al de llegada o codominio y es el valor de la función en " x " o $f\ (x)$ y las parejas ordenadas serían entonces de la forma $(x, f\ (x))$. (p. 36)

Plano cartesiano. Para representar puntos en un plano, definidos por un par ordenado de números reales, se utiliza generalmente el sistema de coordenadas rectangulares o también llamado plano cartesiano, en Roldán (2013) se mencionan sus características.

> Se forma al trazar dos rectas numéricas reales una horizontal y otra vertical llamadas ejes formando cuatro ángulos rectos. El punto donde se cruzan los dos ejes recibe el nombre de origen del sistema y se representa con 0, usualmente de este punto hacia la derecha y arriba se consideran las direcciones positivas y abajo e izquierdas negativas; el eje horizontal denominado de las abscisas se conoce como eje x, el eje vertical denominado de las ordenadas se conoce como eje y. De esta manera se hace corresponder cada componente de una pareja ordenada con los ejes así: la primera componente con el eje x y la segunda con el eje y.

Cabe señalar que los ejes coordenados dividen al plano en 4 cuadrantes. Los cuadrantes se designan por I, II, III y IV, enumerándolos al contrario de cómo giran las manecillas del reloj, tal como se muestra en la Figura 10.

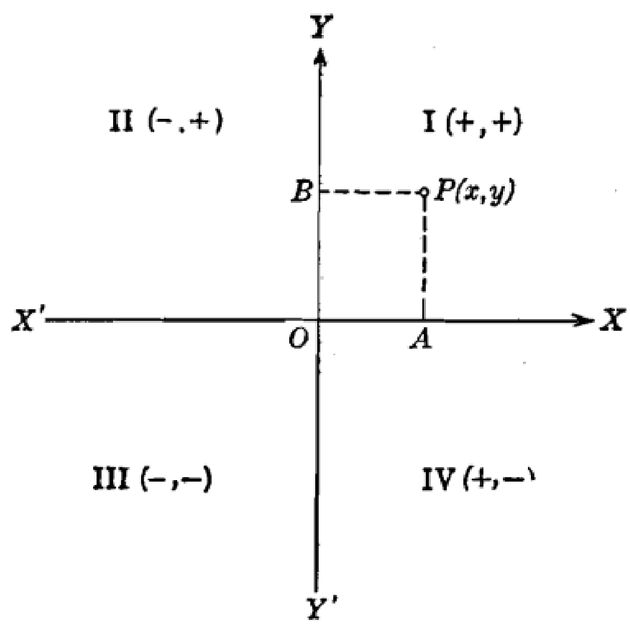
Figura 10.
Cómo se conforma el plano cartesiano



Nota: Tomado de Kindle (1970, p. 1)

Lehmann (1980) describe que la posición de un punto P en el plano cartesiano queda determinado por un par de números reales (x, y), donde los números x y y reciben el nombre de coordenadas del punto P. La primera coordenada, x, recibe el nombre de abscisa de P. La segunda coordenada, y, recibe el nombre de ordenada de P. La abscisa de P corresponde a la distancia dirigida de P al eje y. La ordenada de P corresponde a la distancia dirigida de P al eje x (véase Figura 11).

Figura 11.
Cómo se coloca un punto en el plano cartesiano



Nota: Tomado de Lehmann (1980, p. 6)

Recta. Entre sus principales características se encuentran:

- La pendiente de una recta se define como la relación del cambio vertical con respecto a la horizontal y se denota con la letra m. También se puede definir con base en el ángulo que forma con respecto al eje x. El punto de referencia para medir la inclinación de una recta sería el eje x.

El valor de la pendiente m puede ser calculado por medio de la fórmula (Lehmann, 1989):

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad x_1 \neq x_2$$

- Intercepto en y

El cruce entre el eje vertical y la gráfica de una función lineal determina el punto $(0, f(x))$ que pertenece a esa función.

En la función lineal de forma $y = f\ (x) = mx + b$ se tiene que si $x = 0$ entonces $y = f\ (0) = m \cdot 0 + b$, es decir $y = f\ (0) = b$ lo que significa que la pareja $(0, b)$ esta en la recta que representa a la función y que justamente el valor de b es el intercepto en el eje y (Roldán, 2013, p. 41).

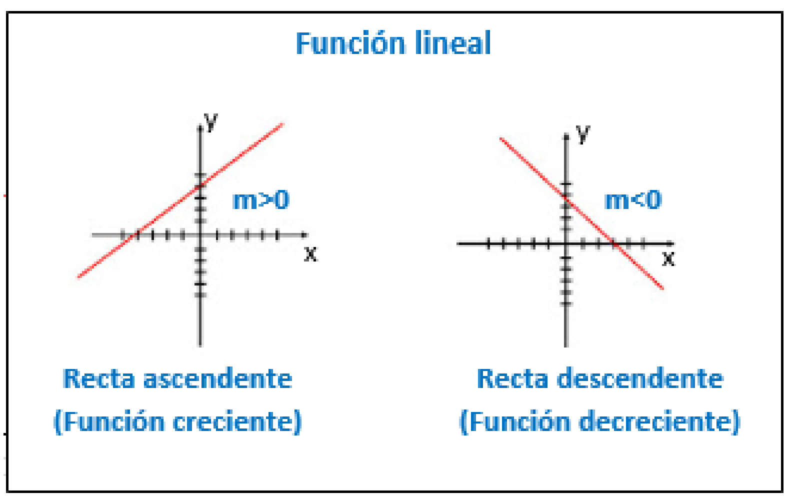
- Intercepto en x

El cruce entre el eje horizontal y la gráfica de una función lineal determina el punto $(x, 0)$ que pertenece a la función.

En la función lineal de forma $y = f\ (x) = mx + b$ se tiene que si $y = 0$ entonces $y = f\ (x) = 0 = mx + b$, es decir $x = \frac{-b}{m}$ lo que significa que la pareja $(\frac{-b}{m}, 0)$ esta en la recta que representa a la función y que justamente el valor de $\frac{-b}{m}$ es el intercepto en el eje x (Roldán, 2013, p.41).

El registro gráfico de una función lineal es una línea recta, que puede ser ascendente o descendente, de acuerdo con el valor de la pendiente. Si $m > 0$ tiene pendiente positiva y la función es creciente, si $m < 0$ la pendiente es negativa y la función es decreciente (véase Figura 12). Por otro lado, el valor de b determina la intersección con el eje de las ordenadas.

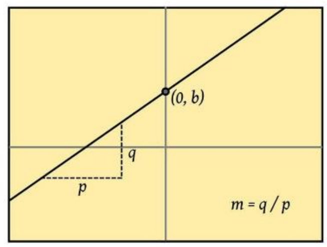
Figura 12.
Inclinaciones de la recta de una función lineal con respecto al valor de la pendiente



Nota: Elaboración propia

En la Figura 13 se muestra una representación de una función lineal, su pendiente y su intercepto con el eje y.

Figura 13.
Pendiente e intercepto en el eje y de una función lineal



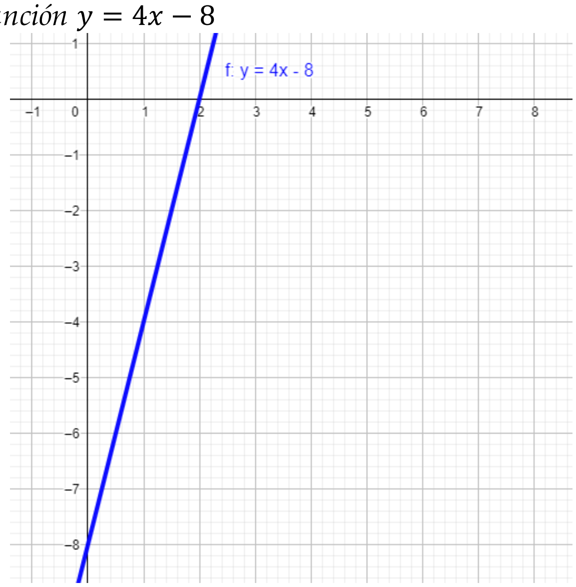
$$y = mx + b$$

Nota: Tomado de Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_lineal)

Una vez que se han descrito estos elementos del registro gráfico, hablemos sobre la importancia y utilidad de dicho registro:

- "La grafica de una función f nos da una imagen útil del comportamiento, o la <historia de la vida de una función>" (Stewart, 2010, p. 13). Una gráfica correspondiente a una función lineal nos permite conocer cuál es la pendiente de la recta, así como su intercepto con el eje y. En la Figura 14 la función de la gráfica es $y = 4x - 8$ y a partir de ello se sabe que la recta tiene como pendiente 4 y ordenada al origen -8.

Figura 14.
Registro gráfico de la función $y = 4x - 8$



Nota: elaboración propia.

- "La gráfica de f también nos permite tener una imagen del dominio y del rango de f sobre el eje x y el eje y, respectivamente" (Stewart, 2010, p. 13). En la Figura 14 la expresión $y = 4x - 8$ está definida para todos los números reales, de modo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales (el cual se denota con $\mathbb{R}$). En la gráfica también se muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.

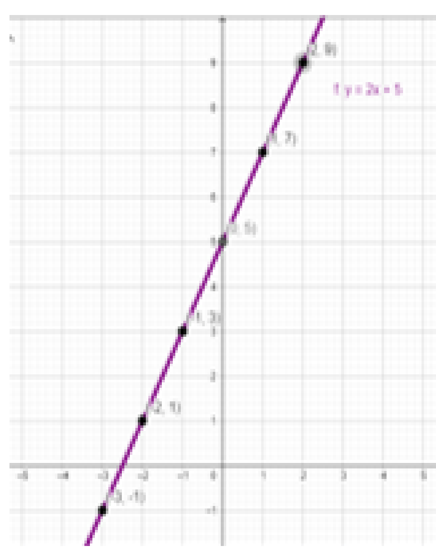
Registro tabular. Una de las ventajas que presenta elaborar tablas es que: "permite descubrir regularidades como son: diferencias constantes, diferencias que crecen (o decrecen) regularmente, productos o cocientes constantes, etc.". (Azcárate, Giménez & Piquet, 1996, como se citó en Roldán, 2013, p. 36)

En las tablas se ordena la información para presentar la correspondencia entre las dos variables x y y ; la primera corresponde al conjunto de entrada y la segunda al de salida. Cada una de estas correspondencias se forman como coordenadas que posteriormente formarán un punto en el plano cartesiano.

"Un rasgo característico de las funciones lineales es que crecen con una razón constante" (Stewart, 2010, p. 28) y es precisamente en el registro tabular y gráfico donde más se percibe tal peculiaridad. Por ejemplo, en la Figura 15 se muestra la gráfica de la función lineal $f(x) = 2x + 5$, y su respectivo registro tabular, nótese que siempre que x se incrementa en 1, el valor de $f(x)$ aumenta en 2, por lo tanto, $f(x)$ crece dos veces más rápido que x. De esta manera, la pendiente de la gráfica $y = 2x + 5$, que es 2, se puede interpretar como la razón de cambio de y con respecto a x.

Figura 15.
Registro tabular y gráfico de la función $f(x) = 2x + 5$

x	$f(x) = 2x + 5$
-3	-1
-2	1
-1	3
0	5
1	7
2	9



Nota: Elaboración propia

Para seguir avanzando en la descripción de cada registro de representación de la función lineal, se da lugar al registro verbal.

Registro verbal. Es una de las cuatro maneras posibles para representar una función, y "se trata de una descripción en palabras" (Stewart, 2010, p. 15), por ejemplo, el planteamiento de un problema: Si Joaquín compra 3 kilogramos de tortillas por $58.50. ¿Cuánto pagará por 7 kilogramos?

De acuerdo con Díaz (2009) se recomienda que en una secuencia didáctica conviene involucrar un uso abundante del lenguaje verbal en el aula de matemáticas, como una poderosa herramienta para mejorar la comprensión, tanto matemática como lingüística.

2.4.4 Definición de la función lineal en los libros de texto

Considerando que el primer acercamiento al concepto de función que tienen los estudiantes sucede en el primer grado de secundaria, se retoma la definición de función que manejan algunos libros de texto:

- Cuando una variable depende del valor de otra variable se dice que está en *función* de ella. Por ejemplo, en una relación de la forma $y = 3x$ o $y = 4x + 5$ el valor de la variable y depende del valor que se dé a la variable x, que es la variable independiente (Alberro & García, 2020).
- Cuando la relación entre las variables que intervienen en una situación se puede presentar con una línea recta se dice que la relación es de variación lineal. La variación lineal se representa por una expresión algebraica de la forma: $ax + b$; donde a es la pendiente o inclinación de la recta y b, la ordenada al origen (Gómez, 2018).
- Tanto en matemáticas como en la vida cotidiana, se puede encontrar que dos cantidades están relacionadas de modo que una depende de la otra. Esta variación se puede representar y analizar en tablas y en gráficos, tal que, al ser graficados en el plano cartesiano, los puntos forman una línea recta (Covarrubias, 2018).
- "Una regla que asigna a cada objeto de un conjunto A, exactamente un objeto de un conjunto B. El conjunto A se denomina dominio de la función y el conjunto B de objetos asignados se denomina rango". (Hoffmann, 2001, como se citó en Quintero y Cadavid, 2009, p. 4)
- "Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x, a un conjunto Y de número reales y, donde el número y es

único para cada valor específico de x" (Leithold, 2006, como se citó en Quintero y Cadavid, 2009, p.4)

Como se puede observar, en los libros de texto, se ofrecen diferentes definiciones sobre el concepto función, pero muy pocas se enfocan en definir a la función lineal. Ésta en algunas ocasiones, aparece por medio de ejemplos, propiciando que el estudiante pueda creer que son el único tipo de función (véase la definición dada por Alberro & García, 2020 y Covarrubias, 2018).

Las primeras tres definiciones ven a la función lineal como una variación, en la que una variable depende de la otra y la representan con una línea recta y con la expresión algebraica $ax + b$, donde a es la pendiente y b la ordenada al origen. Las últimas dos definiciones ven a la función como una correspondencia entre conjuntos y definitivamente se trata de una definición general, no enfocada en la función lineal.

En el apartado de fundamentos matemáticos, con base en la definición de Stewart (2010), se concibe también a la función como una correspondencia entre conjuntos, pero incluye también que el conjunto A se llama dominio de la función y contempla todos los valores de la variable independiente, mientras que el conjunto B se llama rango de una función y abarca los valores de la variable dependiente. Por tanto, las definiciones abordadas en los libros de texto deben ser profundizadas en mayor medida.

2.4.5 Aparición de la función lineal en el plan y programa de estudios de matemáticas 2017

El documento, Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria (2017), se divide en dos partes: el plan y programa de estudios. El plan presta énfasis especial en la articulación entre los tres niveles educativos: preescolar, primaria y secundaria, y con la educación media superior mientras que el programa presenta los propósitos generales y específicos de cada grado escolar, así como orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación. En este apartado, se expondrá lo que concierne de este plan y programa de estudios y resulte importante contemplar en el trabajo que se está realizando.

De acuerdo con el plan de estudios, matemáticas pertenece al componente curricular <campos de formación académica> que a su vez están organizados en tres, siendo el pensamiento matemático el campo que corresponde a esta área.

Este plan (2017) también esboza un conjunto de principios pedagógicos que guían la educación obligatoria, se exponen a continuación.

1. Poner al estudiante y su aprendizaje en el centro del proceso educativo

2. Tener en cuenta los saberes previos de los estudiantes
3. Ofrecer acompañamiento al aprendizaje
4. Conocer los intereses de los estudiantes
5. Estimular la motivación intrínseca del alumno
6. Reconocer la naturaleza social del conocimiento
7. Propiciar el aprendizaje situado
8. Entender la evaluación como un proceso relacionado con la planeación del aprendizaje
9. Modelar el aprendizaje
10. Valorar el aprendizaje informal
11. Promover la interdisciplina
12. Favorecer la cultura del aprendizaje
13. Apreciar la diversidad como fuente de riqueza para el aprendizaje
14. Usar la disciplina como apoyo al aprendizaje. (p. 119)

Estos principios pedagógicos ayudan a promover el conocimiento que debe tener el profesor acerca de cómo enseñar.

En cuanto al programa de estudio (2017) se mencionan los propósitos para la educación secundaria, el que corresponde específicamente al tema de función lineal es "modelar situaciones de variación lineal, cuadrática y de proporcionalidad inversa; y definir patrones mediante expresiones algebraicas" (p. 162).

Esto es importante debido a que se prevé la planeación de actividades que contengan situaciones de la vida real y contextualizadas para su modelación.

Se ubica en el eje temático "Número, álgebra y variación", específicamente en el tema de "Funciones". El aprendizaje esperado es "Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelen con este tipo de variación" (SEP, 2017, p. 178).

Dentro del eje temático (SEP, 2017) se realiza una pequeña exploración de cómo los estudiantes, durante su trayectoria académica, van formando su conocimiento sobre la función lineal.

> Desde los primeros grados de primaria los estudiantes abordan situaciones de variación. Al final de la primaria, en quinto y sexto grado, y en secundaria, continúan estudiando la variación en el contexto de las relaciones de proporcionalidad, ahora de manera explícita y de manera integrada con el estudio de fracciones y decimales. En secundaria el estudio de la proporcionalidad se

> incorpora al de la relación entre variables, en particular al de variación lineal y variación inversamente proporcional. (p. 166)

En las orientaciones didácticas (SEP, 2017), se explica que, para ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas, es necesario trabajar sistemáticamente hasta lograr las siguientes metas:

> 1. Comprender la situación implicada en un problema.
> 2. Plantear rutas de solución.
> 3. Trabajo en equipo.
> 4. Manejo adecuado del tiempo.
> 5. Diversificar el tipo de problemas.
> 6. Compartir experiencias con otros profesores. (p. 169)

En cuanto a la enseñanza específicamente de la función lineal, las orientaciones didácticas determinan los siguientes puntos a considerar (SEP, 2017):

- De la primaria a la secundaria
  Desde los primeros grados de primaria, los alumnos han resuelto problemas que implican una relación entre dos conjuntos de cantidades, en la cual interviene una constante aditiva o multiplicativa y de proporcionalidad. Sin embargo, es hasta la secundaria que se presentan explícitamente esas relaciones como procesos de variación lineal mediante la utilización sistemática de distintas representaciones matemáticas: tablas de variación, gráficas y expresiones algebraicas.
- Antecedentes
  Cuando en la primaria se introdujo el plano cartesiano, los alumnos tuvieron la experiencia de localizar puntos en él. En la secundaria se estudian situaciones que permiten identificar las variables de un fenómeno que se representa mediante una gráfica cartesiana que corresponde a una relación de variación lineal entre dos variables o mediante los datos de una tabla que corresponden a puntos en el plano cartesiano.
- Comparación de distintos tipos de variación lineal y la razón de cambio
  A partir de una tabla de datos que represente el comportamiento de un fenómeno cotidiano, se plantean a los alumnos diversas preguntas que permitan identificar las variables relacionadas. Así como también, que representen los datos de la tabla en el plano cartesiano y que respondan qué forma tiene la gráfica que se obtiene al unir los puntos en el mismo.
- Pendiente e inclinación de la recta
  Los alumnos notarán que la inclinación (pendiente o razón de cambio) de la recta es constante.

> Es importante relacionar la inclinación de la recta con la noción de razón de cambio en ejemplos particulares. Finalmente, utilizando la razón de cambio y la ordenada al origen, se deduce con los alumnos la expresión algebraica para las rectas con las que han trabajado ($y = ax + b$), además de interpretar el significado de los parámetros a y b en la expresión (p. 191)

En conclusión, en el plan y programa de estudios se propone que se realicen conversiones y tratamientos entre los registros: verbal, tabular y gráfico. Por tal motivo, en el diseño de la secuencia didáctica se propondrán varias conversiones entre éstos registros incluyendo el verbal, así como también el tratamiento de éstos.

Para cerrar este capítulo de marco conceptual, se hace un resumen de todo lo abordado en él. Primero se comenzó mostrando la Teoría de representaciones semióticas y sus principales conceptos ya que las actividades propuestas para la secuencia didáctica se sustentarán en esta teoría, favoreciendo de esta manera la comprensión, de la cual se habla en el segundo apartado, incluyendo los niveles que propone Hitt (1996). El tercer apartado muestra el tipo de actividades que contemplará la secuencia didáctica, dando lugar, finalmente, al cuarto apartado denominado fundamentos matemáticos que incluye todos los aspectos relacionados con el objeto matemático función lineal: historia, definición y sus elementos, definición en los libros de texto, ubicación en el programa de estudios y las orientaciones didácticas para su enseñanza.

Capítulo III. Método

En este capítulo se define el proceso que se llevará a cabo para realizar el diseño de la secuencia didáctica y así lograr el resultado esperado de este proyecto de desarrollo profesional: lograr comprensión de los estudiantes a partir de favorecer tratamiento y conversión de los registros de representación en las actividades que conforman dicha secuencia didáctica.

Aquí se ubicará este proyecto de desarrollo profesional en cuanto al tipo, temporalidad, enfoque y alcance, también se aborda el contexto y población de estudio, por último, el diseño de la secuencia didáctica basándose en todos los aspectos anteriores.

3.1 Ubicación de la investigación

Este proyecto de desarrollo profesional es de corte cualitativo, pues su propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados (Hernández, Fernández y Baptista, 1997) y se sustenta bajo la Teoría de Registros de Representaciones semióticas de Raymond Duval.

Se eligió este método puesto que la secuencia didáctica se fundamentará en la literatura, pero también en la experiencia y juicio del docente, así como también brinda la oportunidad de valorar procesos y reflexionar en torno a ello.

Para cumplir con los objetivos y dar respuesta a la pregunta de investigación, el tipo de investigación que se emplea es experimental, en la cual "se manipulan intencionalmente una o más variables independientes (supuestas causas antecedentes), para analizar las consecuencias que la manipulación tiene sobre una o más variables dependientes (supuestos efectos consecuentes), dentro de una situación de control para el investigador" (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). En este caso, la variable independiente es el diseño de la secuencia didáctica que promueva la conversión y tratamiento de registros de representaciones semióticas y la variable dependiente la comprensión del concepto función lineal que se produce en estudiantes del nivel secundaria.

El alcance de este trabajo es descriptivo, pues de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014) este tipo de estudios "busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (p. 92). Con el diseño de la secuencia didáctica y su aplicación, se busca describir el nivel de comprensión que alcanzan los estudiantes con respecto al tema de función lineal.

De esta investigación, se recopilarán los datos en un momento único, con la finalidad de describir variables y analizar su incidencia (Hernández, Fernández y

Baptista 2014). Ante esto, se trata de un diseño transversal, ya que se evaluará la comprensión alcanzada tras aplicar la secuencia didáctica.

Los instrumentos para recoger la información serán: hojas de trabajo, entrevistas, grabaciones, evaluación diagnóstica.

3.2 Contexto

La implementación de la secuencia diseñada se realiza en la Escuela Secundaria General "Salvador Vidal", la cual se encuentra ubicada en la Ciudad de Zacatecas, en un contexto con poca marginación y superpoblado. Ante esto, tiene gran demanda de alumnos, por lo que se cuenta con un turno matutino y otro vespertino.

En el turno matutino existe una matrícula de 721 alumnos distribuidos en 18 grupos: 6 grupos de primer grado (grupos A, B, C, D, E y F) 6 de segundo grado (grupos A, B, C, D, E y F) y 6 para tercer grado (grupos A, B, C, D, E y F). En promedio cada grupo está conformado por 35 alumnos.

En el turno vespertino hay una matrícula de 157 alumnos que son distribuidos en 6 grupos: dos para primer grado (grupos G y H), dos para segundo (grupos G y H) y dos para tercero (grupos G y H). En promedio cada grupo está conformado por 11 alumnos.

En el momento de la aplicación, derivado de la pandemia generada por el COVID-19, en el turno matutino cada grupo (desde primero hasta tercer grado) se encuentra dividido en dos equipos de trabajo. En ese momento, cada equipo de trabajo asiste de manera alternada cada semana.

A mediados del mes de octubre, al realizar un consenso entre docentes y directivos se tomó la decisión de incluir a aquellos estudiantes que requieren más apoyo, a clases cien por ciento presenciales.

En contraste al turno matutino, el turno vespertino, por la cantidad de alumnos que tiene cada grupo, les es posible trabajar al 100% de forma presencial.

La escuela cuenta con 19 aulas tradicionales y 6 aulas de tecnologías, un laboratorio, consultorio escolar, un espacio para prefectura, una oficina de trabajo social, una biblioteca, sala de maestros, un comedor, cooperativa escolar, una sala audiovisual, aula de medios, contraloría, plaza cívica, 6 cubículos de oficinas administrativas, 4 baños para alumnos y dos para docentes, una cancha de rebote, una de básquetbol y una de fútbol, dos almacenes y un estacionamiento.

En promedio, el entorno social y económico de los alumnos cumple con las siguientes características: los padres de familia cuentan con un trabajo estable (gran parte labora para la secretaría de educación pública), una escolaridad mínima de preparatoria y poseen un ingreso económico medio.

La participación de padres de familia es regular, pero si se compara con otras escuelas, se puede afirmar que hay interés de gran parte de ellos porque sus hijos aprendan y participan en este proceso.

De acuerdo con los resultados del semáforo educativo de la prueba PLANEA, la escuela, dentro de los 4 niveles que se establecen (excelente, bien, de panzazo y reprobado) se encuentra en el nivel bien.

3.2.1 Población de estudio

El grupo de primero "B" consta de 34 alumnos, el cual está dividido en dos equipos de trabajo, cada uno con 17 estudiantes. Sin embargo, debido a que se tomó la decisión de incluir en ambas semanas a aquellos alumnos que tuvieran más dificultades de aprendizaje, un equipo quedó de 18 alumnos.

La secuencia didáctica es aplicada al segundo equipo, que consta de 18 estudiantes, integrado por 7 hombres y 11 mujeres, cuyas edades oscilan entre los 11 y 12 años, son alumnos de primer grado de secundaria del ciclo escolar 2021-2022.

Se les aplica un test de estilos de aprendizajes, encontrando los siguientes resultados: 35% de los alumnos es visual, 35% auditivos y 30% kinestésicos.

Al inicio del ciclo escolar, se aplica un examen diagnóstico de contenidos básicos de primaria: suma y resta de números enteros, fracciones y decimales; multiplicación y división de fracciones y números decimales; ubicación en la recta numérica, conversión de fracciones a decimales y viceversa, ubicación de puntos en el plano cartesiano. Los resultados fueron muy desfavorables, con un promedio de grupo de 2.29.

El motivo por el cual se decide trabajar con este grupo es debido a que se caracterizan por ser entusiastas y deseosos por aprender, a pesar de que algunos de ellos aún no dominan los procedimientos para resolver multiplicaciones y divisiones. Ante ello, se plantea un gran reto, pero también una satisfacción por contribuir a la mejora de los niveles de comprensión de uno de los temas más complejos de primer grado de secundaria: la función lineal.

3.3 Diseño de la secuencia didáctica

En este apartado, se van exponiendo uno a uno los elementos necesarios para el diseño y creación de la secuencia didáctica.

Los pasos a seguir para la elaboración de la secuencia didáctica son los siguientes:

1. Evaluación diagnóstica.

Guerrero (2023) menciona que esta evaluación permite conocer a los docentes en qué grado los alumnos dominan determinado aprendizaje, antes de iniciar el trabajo con él. Ésta se realiza al inicio del ciclo escolar o de una secuencia didáctica, con la intención de explorar los conocimientos que ya poseen los alumnos. Por lo tanto, esta evaluación es un instrumento que fomenta la mejora constante de los procesos de enseñanza-aprendizaje y la mejora del sistema educativo.

Esta evaluación diagnóstica considera los siguientes aprendizajes previos que poseen los estudiantes:

- Problemas de proporcionalidad directa
- Ubicación de puntos en el plano cartesiano
- Escritura de las coordenadas de un objeto en el plano cartesiano
- Encontrar términos de una sucesión lineal a partir de una regla dada
- A partir de una sucesión, encontrar de forma verbal su regla.
- Operaciones con números reales
- Sustitución de variables.

La evaluación diagnóstica permite considerar los errores y dificultades que presentan los estudiantes para darles un debido tratamiento.

2. Diseño de la secuencia didáctica.

Para ello se toma como base:

  - La estructura propuesta por Díaz-Barriga (2013) en la que se proponen actividades de apertura, de desarrollo y de cierre, junto con las orientaciones didácticas propuestas en el plan y programa de estudios del nivel secundaria (SEP, 2017)
  - El fundamento de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, promoviendo el tránsito entre diferentes registros, así como el tratamiento dentro de ellos.

- De las 10 posibles conversiones que existen para la función lineal, este trabajo se centra en nueve de ellas:
  Registros verbal-gráfico, verbal-tabular, verbal–algebraico,
  Registros tabular-verbal, tabular-gráfico, tabular-algebraico,
  Registros gráfico-verbal, gráfico-tabular, gráfico-algebraico
  Registro algebraico-tabular.
- Se realizará la descripción de las actividades propuestas.

3. Prueba piloto.

Previo a la ejecución de la secuencia didáctica, en el ámbito académico es necesario realizar pruebas de clases cuando la intervención didáctica involucra recursos nuevos, el profesor no tiene experiencia previa en el tema a desarrollar o se enfrenta a un grupo nuevo de alumnos. Hacer el pilotaje brinda una gran oportunidad ya que como lo menciona Mayorga, Virgen, Martínez y Salazar (2020) contribuye a mejorar la validez y confiabilidad de los procedimientos, así como también, a disminuir los posibles errores en la obtención de los datos que pueden orientar a mejorar la secuencia y conocer si son pertinentes y factibles las actividades propuestas.

4. Aplicación de la secuencia didáctica.

La secuencia didáctica está diseñada para 5 sesiones, cada una de 50 minutos. Para su desarrollo se utilizan hojas de trabajo para los estudiantes, así como también el uso de GeoGebra para la manipulación del registro gráfico.

5. Análisis de resultados.

En este momento se busca analizar las conversiones y tratamientos que se dieron, para determinar el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes.

6. Discusión.

3.3.1. Evaluación diagnóstica

Con la finalidad de evidenciar dificultades y capacidades de los estudiantes en torno a los conocimientos previos para trabajar el tema de función lineal, se le pidió al grupo de 1º”B”, equipo 1, que está conformado por 17 alumnos contestar un conjunto de actividades sobre conocimientos que se consideran importantes el estudiante debe dominar.

Las actividades que se proponen para determinar el conocimiento, dificultades y errores que los estudiantes poseen se organizan en 13 ítems. Cabe mencionar que se basan en los aspectos necesarios que el estudiante requiere para la conversión de registros de representación, puede verse dicha evaluación en el Anexo 1.

En la Tabla 2 se muestran los temas que se consideran relevantes para que el estudiante logre trabajar con éxito el tema de función lineal, además, se muestra la cantidad de alumnos con resultados correctos e incorrectos con respecto a cada uno de estos temas.

Tabla 2.
Resultados arrojados del diagnóstico

ÍTEM	Correcta	Incorrecta	No contestó
1. Operaciones básicas	9	8	0
2. Graficar puntos en el plano cartesiano	4	13	0
3. Escritura de coordenadas	7	9	1
4. Llenado de tablas a partir de una situación de proporcionalidad directa	8	9	0
5. A partir de una regla dada, encontrar los primeros 10 términos de una sucesión	10	5	2
6. A partir de una sucesión, determinar su regla para encontrar cualquiera de sus términos.	1	9	7
7. Evaluar valores en expresiones algebraicas	0	11	6
8. Del registro analítico al tabular	12	5	0
9. ¿Qué es una función lineal?	0	10	8
10. Del registro tabular al algebraico	9	3	6
11. Del registro gráfico al algebraico	0	3	15

12. Del registro verbal al tabular y tabular al gráfico	0	6	12
13. Del registro gráfico al algebraico	0	0	18

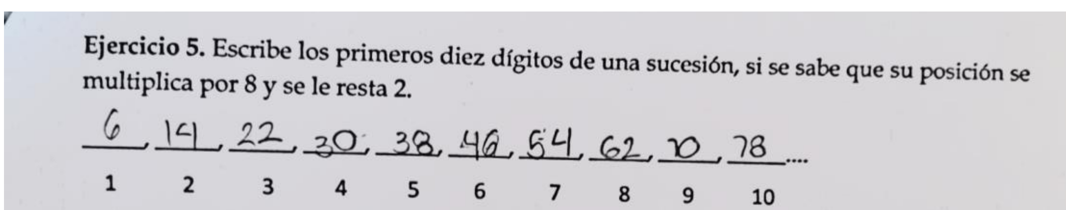
Como puede observarse en la Tabla 2, el ítem que la mayoría de los estudiantes tuvo correcto fue el 5: encontrar los primeros 10 términos de una sucesión a partir de una regla dada, puesto que ésta fue escrita en lenguaje común y se les incluyó cada una de las posiciones que debían multiplicar por ocho y restarle dos para llegar a cada uno de los términos buscados. Mientras que, los ítems que causaron mayor dificultad fueron el 4 y el 6, representar el producto cartesiano y encontrar la regla de una sucesión respectivamente, ya que muchos estudiantes, por cuestiones de la pandemia no trabajaron con el plano cartesiano ni la posición de los términos de la sucesión.

Las principales dificultades y capacidades que se encontraron a partir de esta prueba diagnóstica son:

Capacidades

1. Encontrar los términos de una sucesión a partir de una regla dada en lenguaje común (Figura 16).

Figura 16.
Aplicando correctamente la regla de una sucesión dada en lenguaje común



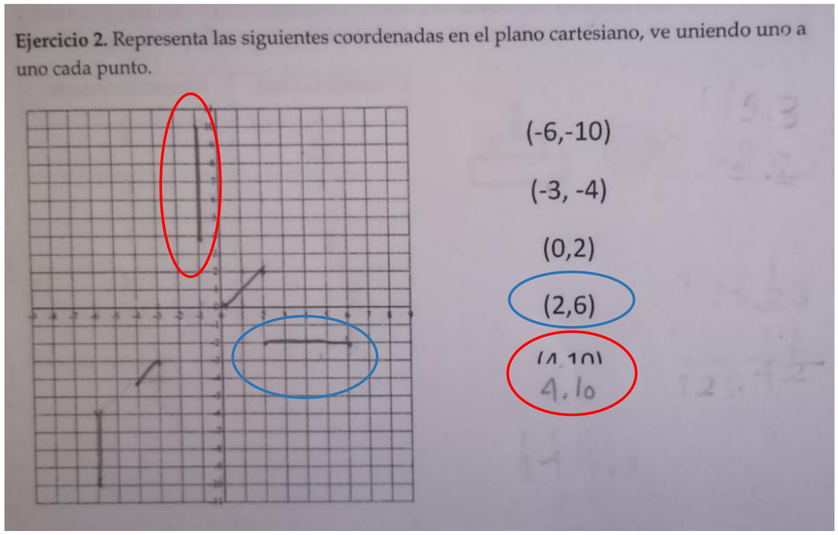
2. Al trabajar sumas y restas con números positivos y negativos, los estudiantes logran multiplicar los signos y sacar el número del paréntesis con éxito
3. Obtención de los términos de una sucesión

Dificultades

1. Representación del producto cartesiano. Se encontró que como producto cartesiano trazan segmentos de recta (Figura 17).

Figura 17.

Error al representar el producto cartesiano como segmentos de recta.



2. Trazo de una recta en el plano cartesiano
   Los estudiantes esperaban obtener en el plano cartesiano una figura, se mostraron dudosos acerca de su procedimiento al trazar una "simple línea". Inclusive tres estudiantes comenzaron graficando correctamente y terminaron cambiando el valor de algunas coordenadas o el valor de su signo para lograr cerrar la figura (véase Figura 18), o bien, agregando líneas extra (véase Figura 19)

Figura 18.

Error al cambiar el valor o signo de las coordenadas para lograr formar una figura

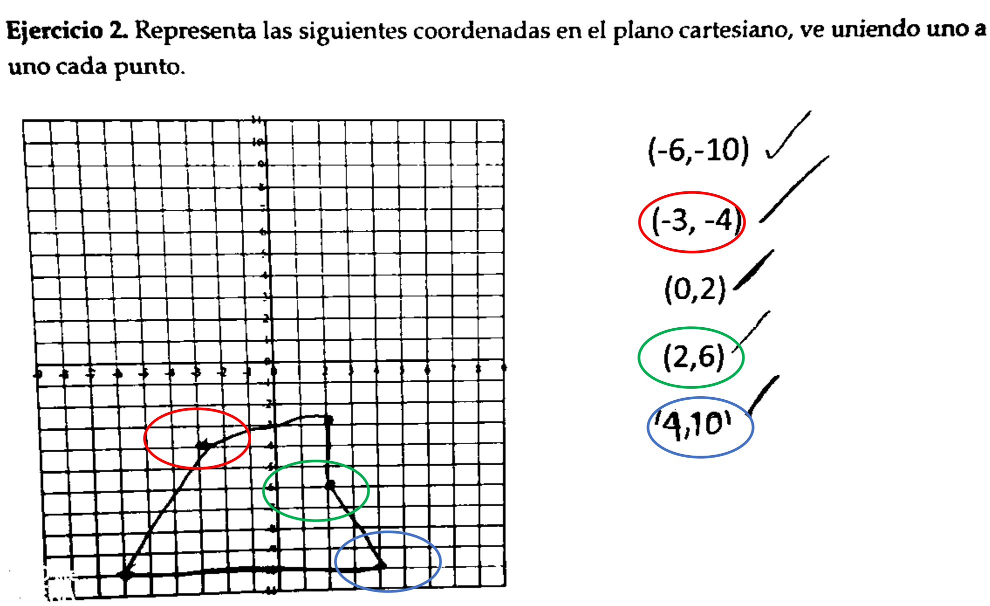
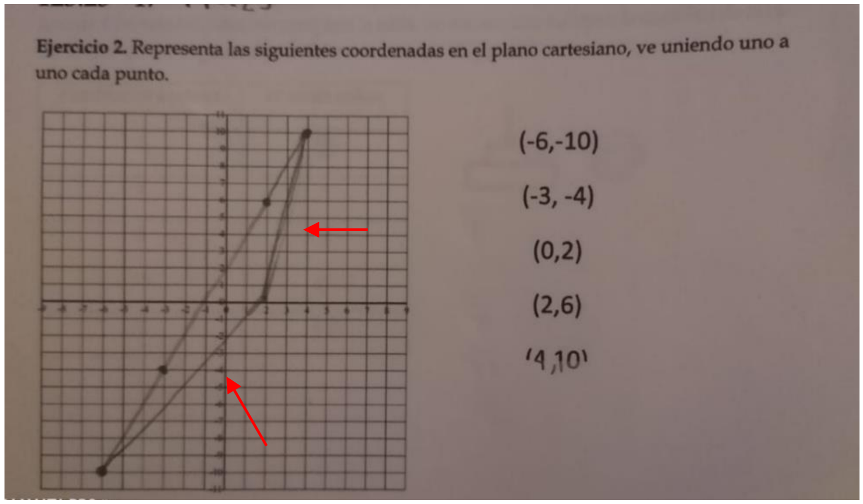


Figura 19.
Error al agregar líneas extras para lograr formar una figura en el plano.



3. Trabajar con el plano cartesiano completo, ya que en la primaria solo trabajaron con el cuadrante I.
4. Identificar en el par ordenado, cual corresponde al eje x y cual al eje y.
5. Colocación del punto decimal en una multiplicación que involucra números decimales.
6. Respetar la jerarquía de operaciones
7. Completar una tabla de proporcionalidad directa, que involucra trabajar con números decimales.
8. Tomar en cuenta la variable independiente para encontrar los valores de la variable dependiente.
9. Establecer la regla de una sucesión tomando en cuenta la posición.
10. Sustituir valores en expresiones algebraicas.

Después de realizar el análisis de las dificultades y capacidades de los estudiantes con respecto a los conocimientos necesarios para trabajar el tema de función lineal, se realizarán mejoras a la secuencia didáctica. Estas adecuaciones serán las siguientes:

- Dedicar tiempo para entender qué son las variables, los tipos de variables: dependiente e independientes y ser capaces de distinguir cada una de ellas en diferentes situaciones.
- Antes de la aplicación de la secuencia didáctica, dedicar una clase para repasar la ubicación de puntos en el plano cartesiano, así como las partes de éste.
- Utilizar una lámina para que los estudiantes puedan estar visualizando cual es el eje de las abscisas y cual el de las ordenadas. Así como también el orden correcto de las coordenadas.

- Dado que los estudiantes ya han trabajado sustitución de valores en las fórmulas para obtener área y perímetro, dar un breve repaso. Así como también, colocar una lámina con información importante para entender el álgebra, como, por ejemplo: un número junto a una literal indica multiplicación.
- Incluir problemas que conlleven trabajar con números decimales para que los alumnos practiquen algoritmos y colocación de puntos decimales.

Ahora, con respecto a las conversiones, después de realizar el análisis de las dificultades y capacidades de los estudiantes, con respecto al tema de función lineal, las adecuaciones que se realizarán a la secuencia didáctica son las siguientes:

- Para la conversión del registro algebraico al tabular, se ayudará a los alumnos a sustituir los valores de la variable x en la expresión algebraica, retomando que un número junto a una variable implica multiplicación
- Formar la definición de la función lineal a partir de cada uno de sus registros de representación
- Para la conversión del registro tabular al algebraico, anunciar a los alumnos que de la función $y = mx + b$, el valor de m representa un valor constante que se calcula sacado diferencias. Una vez hecho esto, este valor se multiplica por los valores de la variable x y mediante preguntas hacer que encuentren el valor de b, por ejemplo: ¿Qué tengo que hacer ahora que ya multiplique para llegar al valor de y? Y se esperan respuestas como: sumarle cinco, restarle 3…
- Para la conversión del registro gráfico al algebraico, hacer hincapié en la intersección de la recta con el eje "y" y éste punto relacionarlo con el valor de b.
- Para la conversión del registro tabular al gráfico, orientar a los alumnos sobre en cual eje se representa la variable independiente y en cual la dependiente.

3.3.2 Pilotaje

El pilotaje se lleva a cabo en la Escuela Secundaria General "Salvador Vidal" con los alumnos del primer grado grupo F, equipo 2, que consta de 18 estudiantes. Para realizarlo se requirieron los siguientes materiales: hojas de trabajo, diapositivas y gráficas realizadas en GeoGebra. El análisis de éste se encuentra en el **Anexo 2**.

A continuación, se presentan algunas de las conclusiones a las que se llegaron.

Para el problema del campo de girasoles, al realizar la pregunta ¿Cuántos centímetros habrá crecido después de 5, 7 y 10 días?, resulta necesario, con anticipación a ésta, hacer preguntas de forma oral que ayuden a comprender el problema a los estudiantes, tales como: ¿Cuántos centímetros median los girasoles antes de aplicar el fertilizante? ¿Cuánto crecieron los girasoles a partir de que se les puso el fertilizante? ¿Cuánto crecieron los girasoles cada día?

Otra mejora que puede hacerse a este problema, es mostrar la tabla y la gráfica del comportamiento de los girasoles, antes de pedir que por ellos mismos las realicen, con la intención de que vayan analizando las características de cada registro. Al mostrarles estos dos registros se pudieran realizar preguntas del tipo:

- ¿Qué variable se acomoda en la primera columna de la tabla? ¿y en la segunda columna?
- En la gráfica ¿Qué variable se acomoda en el eje de las x? ¿y en el eje de las y?
- ¿Cómo se obtuvo tal punto que está en el plano cartesiano?

Del anterior párrafo, se resalta la importancia de que se vayan puntualizando los tratamientos a cada uno de los registros de representación, ya que dentro de la planeación no es precisa la formalización del conocimiento matemático.

En el caso de la tabla, se puede explorar con los estudiantes que cada día que pasa los girasoles van creciendo la misma cantidad de centímetros, que entre más días pasen mayor será la altura del girasol, que la altura depende de los días que pasen. En el caso de la gráfica que puntualicen que no se formó ninguna figura, sino una recta y qué significa ésta, por tanto, resulta imprescindible hacer uso de GeoGebra ya que también es importante repasar que primero se debe ubicar en el eje x los días y posteriormente deslizar su dedo verticalmente hasta tocar la recta y ver en qué punto coincide en el eje y, que representa el crecimiento de la planta. Este ejercicio, fue algo que no se tenía en la planeación, pero que marcó la diferencia entre el llevar a los alumnos a leer la gráfica o verla simplemente como algo totalmente aislado al problema.

De igual forma, se identificó la necesidad de incluir en la secuencia didáctica la socialización de los resultados, pues en este pilotaje no hubo, ya que se dio por hecho que los estudiantes habían comprendido el problema y se siguió avanzando a pesar de los errores cometidos por éstos. Es imprescindible que se retomen los procedimientos de los estudiantes y dado que es su primer acercamiento a la graficación y tabulación de funciones, se les guie en la forma de elaborar correctamente las tablas y gráficas, para que de esta manera puedan proceder a realizar las conversiones, tratamientos y formación de registros de manera correcta.

En cuanto al tratamiento que se dio al registro gráfico fue satisfactorio, no obstante, se pueden incorporar nuevos aspectos. Algunos de estos pudieran ser:

- Relacionar la función con su registro gráfico

- Preguntar cómo se imaginan que sería la función de una recta que sube hacia la izquierda
- Preguntar situación de la vida diaria que pudiera ser representada con una recta horizontal
- Comenzar a trabajar la relación entre el registro gráfico y algebraico.
- Trabajar con el tiempo de la secuencia didáctica, ya que la sesión 1 que se tenía propuesta para un solo módulo de clase, casi abarco dos módulos completos.
- Corregir las gráficas dando valores más pequeños a las coordenadas para que los estudiantes puedan leerlas fácilmente.

Al plantearles a los alumnos la pregunta: ¿Qué sucede con la recta cuando el coeficiente se vuelve más grande o pequeño? Resulta difícil de responder ya que no identificaron lo que era un coeficiente. Por tanto, se trabajará el concepto de pendiente como la inclinación de la recta, de tal manera que se les pueda cambiar la pregunta a los estudiantes como ¿Qué sucede cuando la pendiente de la recta se vuelve más grande o más pequeña?

Otros cambios importantes a realizar son, incluir en las intenciones didácticas los tratamientos que se realizaran a determinados registros y especificar qué conversiones se llevan a cabo en cada sesión. También se reorganizarán el orden en que aparecerán las actividades y se cambiará el problema de los brownies por un problema más contextualizado como es el caso del llenado de un tinaco y por último, la secuencia didáctica se alargará a 5 sesiones para que sea posible desarrollarla en su totalidad.

3.3.3 Secuencia didáctica

En este apartado se presenta la secuencia didáctica que se implementó en la experimentación, después de haberle realizado una serie de modificaciones basándose en los análisis de la evaluación diagnóstica y pilotaje.

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN
ESTADO DE ZACATECAS

SECUNDARIA GENERAL N°2
ZACATECAS
SALVADOR VIDAL

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Escuela Secundaria General “Salvador Vidal”</td></tr>
<tr><td align="center">Clave:32DES001O</td><td align="center">Fecha: del 28 de marzo al 1 de abril.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Maestra Titular: María del Refugio Hernández Fernández</td></tr>
</table>

Campo de Formación Académica: Pensamiento Matemático						
Eje:	**Tema:**	**Periodo:**	**Grado y grupo:**	**Número de sesiones:**	**Alumnos por grupo:**	**Evaluación:**
Número, Álgebra y variación	Funciones	3	1 “F”	5	35	Niveles de comprensión Hitt Resultados hojas de trabajo
Aprendizaje esperado:						
Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación.						
Intenciones didácticas						
Sesión 1 y 2. Que los estudiantes realicen tratamiento en cada uno de los registros. Así como también, realicen conversiones del registro verbal al algebraico, tabular y gráfico y del registro algebraico al tabular y gráfico. Sesión 3 y 4. Que los estudiantes realicen tratamiento en el registro algebraico, gráfico y verbal. Así como también conversiones del registro tabular al verbal, gráfico y algebraico y del registro verbal al tabular y gráfico. Sesión 5. Qué los estudiantes realicen tratamiento en el registro gráfico y algebraico. Además, realicen conversiones del registro gráfico al tabular y verbal.						

Plan de clase (1 y 2 /5)

Intención didáctica: Que los estudiantes realicen tratamiento en cada uno de los registros. Así como también, realicen conversiones del registro verbal al algebraico, tabular y gráfico y del algebraico al tabular.

Sesión 1 y 2

Fecha: 28 y 29 de marzo del 2022

<table>
<tr><th colspan="3">FASE: ACTIVIDADES DE APERTURA</th></tr>
<tr><th>Actividades</th><th>Orientaciones didácticas
Material didáctico</th><th>Tipo de formación, tratamiento y conversión</th></tr>
<tr><td>

Actividad inicial: De manera grupal, dar respuesta a las siguientes preguntas de forma oral.
La maestra reparte las primeras dos hojas de trabajo.
1. La docente comienza la clase preguntando a los estudiantes ¿Qué entienden por variable?
Se espera que los estudiantes mencionen ideas como:
Algo que varía, algo que se mueve, etc.
2. La maestra, mediante una diapositiva muestra la definición de variable y la relaciona con las respuestas que los estudiantes han brindado.
3. La maestra muestra en una diapositiva la siguiente información: En una cafetería aparece el siguiente letrero:

Por cada ingrediente extra que desees agregar a tu crepa se te cobraran 10 pesos más…
*Cajeta
*Miel
*Nutella
*Crema chantilly


La maestra pregunta a los estudiantes:
En esta información aparecen dos variables *¿cuáles son?*
Y posteriormente registra en el pizarrón la respuesta de los estudiantes.
4. La maestra muestra una lámina con definición de variable dependiente e independiente.
Retoma la respuesta que anotó en el pizarrón y pregunta a los estudiantes:
De las variables que aparecen en el letrero de la crepería ¿Cuál es la independiente y cual la dependiente?

</td><td>

Es importante que el estudiante conozca que en la variación lineal interviene la relación funcional de dos variables.

*Ir registrando ejemplos de los estudiantes en el pizarrón

- Hojas de trabajo
- Diapositivas PowerPoint.

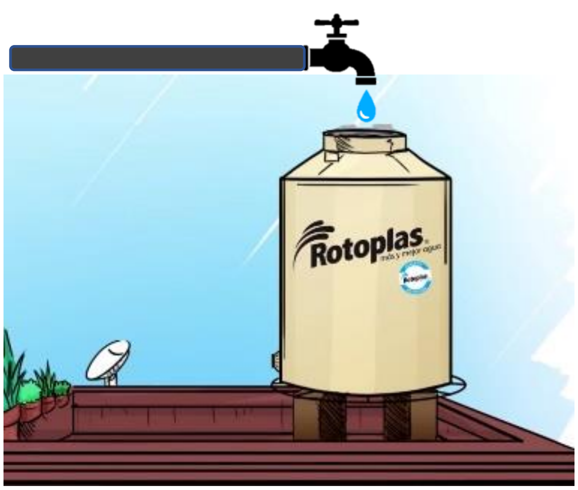
</td><td>

Tratamiento en registro verbal

Tratamiento en registro verbal

</td></tr>
</table>

5. La maestra pide que, en el espacio correspondiente de sus hojas de trabajo, escriban un ejemplo donde intervengan ambas variables y señale cual es cada una de ellas. *6.* Mediante una diapositiva la maestra presenta situaciones, y de manera grupal se va distinguiendo cual es la variable dependiente e independiente que interviene en ellas. 7. Por último, la maestra menciona que la relación entre variables es una parte de la función lineal y ayuda a formar su definición, para ello leen la información contenida en su segunda hoja de trabajo.		

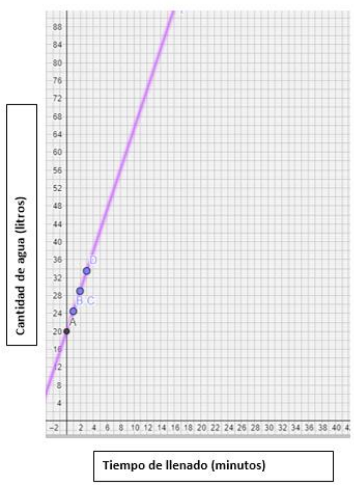
FASE: ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Actividades	**Orientaciones didácticas** **Material didáctico**	**Tipo de formación, tratamiento y conversión**
Actividad 1. De manera grupal, lean el siguiente problema y respondan de manera individual. Un tinaco que tiene 20 litros de agua recibe de una llave 4.5 litros por minuto. ¿Qué cantidad de agua tendrá el tinaco a los 14 minutos? ¿y al cabo de una hora? 	La maestra otorga a los estudiantes un lapso de 3 minutos para que resuelvan el problema, mientras	**Tratamiento en el registro verbal**

<table>
<tr>
<td>
Los estudiantes comienzan a contestar el problema y posteriormente se hace una puesta en común sobre los procedimientos que han utilizado.

Para llevar a cabo esta puesta en común, se elegirán dos o tres procedimientos que han seguido los estudiantes y se les pedirá pasar al pizarrón a estos alumnos.

Posterior a la socialización, de manera individual, los estudiantes responden las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las variables que intervienen en este problema? ¿cuál es la dependiente e independiente?
2. Explica con tus palabras la relación que existe entre estas variables:
3. La siguiente tabla y gráfica muestran la relación entre ambas variables. Analiza sus características

<table>
<tr><th>Tiempo de llenado (minutos</th><th>Cantidad de agua (litros)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>20</td></tr>
<tr><td>1</td><td>24.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>29</td></tr>
<tr><td>3</td><td>33.5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>38</td></tr>
<tr><td>5</td><td>42.5</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>51.5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>56</td></tr>
<tr><td>9</td><td>60.5</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>87.5</td></tr>
<tr><td>37</td><td>110</td></tr>
<tr><td>60</td><td>290</td></tr>
</table>


</td>
<td>tanto pasa por los lugares verificando los procedimientos para realizar la puesta en común.</td>
<td>Conversión del registro verbal al tabular y gráfico</td>
</tr>
<tr>
<td>
4. Si se representa con x el tiempo de llenado y con y la cantidad de litros ¿cuál de las siguientes expresiones permite obtener la cantidad de litros que tendrá el tinaco en cualquier minuto? Subraya la respuesta correcta
$y = x + 20$ $y = \frac{x}{20}$
$y = 20x$ $y = 4.5x + 20$
5. ¿Cómo quedaría la expresión algebraica si antes de abrir la llave, el tinaco tenía 15 litros? Considera que sigue recibiendo 4.5 litros por minuto.
</td>
<td>Para guiar la socialización, la maestra realiza las siguientes preguntas:

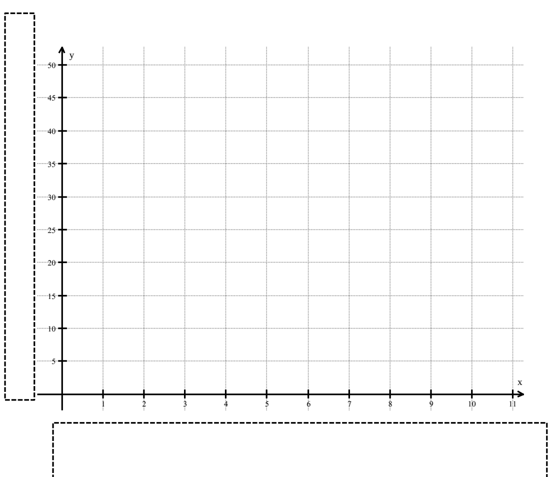
¿Cuánta agua tenía el tinaco antes de que la llave fuera abierta?

¿Cuánta agua recibe por minuto?

Para descartar las diferentes</td>
<td></td>
</tr>
</table>

6. ¿Y cómo quedaría si, en lugar de recibir 4.5 litros por minuto, recibe 5 litros? Considera que el tinaco antes de abrir la lleva tenía ya 50 litros.	expresiones algebraicas que den como respuesta los alumnos, la maestra realiza la comprobación, de acuerdo a los datos que proporciona el problema.	

ACTIVIDADES DE CIERRE		
Actividades	**Orientaciones didácticas** **Material didáctico**	**Tipo de formación, tratamiento y conversión**
7. Con las expresiones que creaste en la pregunta 5 y 6 de la actividad 1, realiza la tabla y gráfica del llenado del tinaco dada cada situación.	La maestra realiza preguntas que guiarán a los estudiantes a identificar los tratamientos realizados en el registro gráfico y tabular: ¿Qué sucede cuando una de las variables aumenta? ¿y cuando disminuye? ¿Cómo es la gráfica de una función lineal? En la tabla ¿Dónde se ubica la variable independiente? ¿y la dependiente? En la gráfica ¿Dónde se ubica la variable independiente? ¿y la dependiente? ¿Cómo se colocan puntos en la gráfica? ¿De dónde salen las coordenadas? ¿Qué punto del eje y toca la recta?	**Tratamiento en los registros tabular y gráfico**



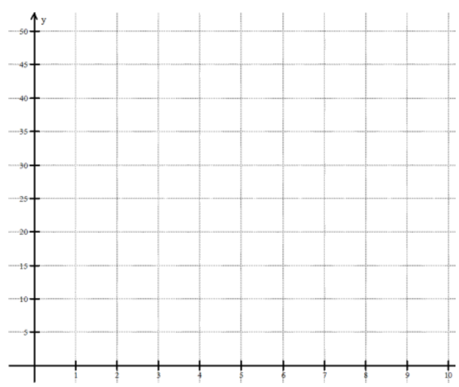
Tiempo de llenado (minutos	**Cantidad de agua (litros)**
0	
1	19.5
2	24
3	28.5
4	33

5	37.5
6	42
7	46.5
8	51
9	55.5
10	60

Las respuestas a estas preguntas, la maestra pedirá a los estudiantes que vayan llenado su hoja de trabajo número 4.

La maestra permitirá que cada estudiante analice cual es la opción correcta y posteriormente se retomarán algunas participaciones en las que cada estudiante afirme el porqué de su elección.

Conversión del registro verbal al analítico



La maestra mostrará una diapositiva en la que se aborde la forma general de una función lineal y el significado de cada una de sus partes: pendiente e intercepto en el eje y. Para ello se realizarán las siguientes preguntas:

Tratamiento en el registro algebraico

Tiempo de llenado (minutos	Cantidad de agua (litros)
0	50
1	55
2	60
3	65
4	70
5	75
6	80
7	85
8	90
9	95

¿Qué relación tiene el valor de b con los puntos que toca la recta?

¿Cómo sería la recta si la pendiente fuera negativa? función fuera negativa?

¿De cuánto en cuanto va aumentando la cantidad de agua minuto a minuto?

¿Cómo se relaciona esto con la representación algebraica de la función?

Para corroborar estas respuestas, se hará uso de GeoGebra.

Conversión del registro algebraico al tabular.

<table><tr><td>10</td><td>100</td></tr></table> Los estudiantes se llevarán de tarea realizar esta conversión, con la finalidad de que pongan en práctica los tratamientos realizados. Posterior a la revisión de la tarea, se realizarán las siguientes preguntas: 8. ¿En qué representación te basaste para llenar la tabla? a) Información que proporciona el problema b) Expresión algebraica (función) c) Otro: ____ 9. ¿En qué representación te basaste para llenar la gráfica? a) Información que proporciona el problema b) Expresión algebraica (función) c) Información que proporciona la tabla d) Otro: ____	Antes de encargar la tarea, la maestra dará un breve repaso sobre cómo se representan puntos en el plano cartesiano.	

Plan de clase (3 y 4 / 5)

Intención didáctica: Que los estudiantes realicen tratamiento en el registro algebraico, gráfico y verbal. Así como también conversiones del registro tabular al verbal, gráfico y algebraico y del registro verbal al tabular y gráfico.

Número de sesiones: 2

Fecha: 30 y 31 de marzo del 2022

FASE: ACTIVIDADES DE APERTURA		
Actividades	**Orientaciones didácticas** **Material didáctico**	**Tipo de formación, tratamiento y conversión**
Actividad 3. La siguiente tabla, obedece al comportamiento que han observado dos	La maestra permite que cada alumno elija	

<table>
<tr>
<td>agricultores sobre el crecimiento de sus girasoles. De manera individual, elige la información correcta que difunde la tabla:

<table>
<tr><th>Tiempo (días)</th><th>Crecimiento (cm)</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4.5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>7.5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>10.5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td>12</td><td>18</td></tr>
<tr><td>15</td><td>22.5</td></tr>
</table>

1. Cada día los girasoles crecen 5 cm
2. Los girasoles crecen el doble de lo que crecieron el día anterior
3. Los girasoles crecen 1.5 cm diariamente.
4. Los girasoles crecen 1 cm diario y a eso se le suma 3.5 cm</td>
<td>el comportamiento que ellos creen se relaciona con el crecimiento de los girasoles y comprueba que las respuestas que han mencionado sean correctas.

Para repasar lo visto en la clase anterior, la maestra pega una lámina de la forma estándar de una función lineal.</td>
<td>Conversión del registro tabular al verbal</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">FASE: ACTIVIDADES DE DESARROLLO</th></tr>
<tr><th>Actividades</th><th>Orientaciones didácticas
Material didáctico</th><th>Tipo de formación, tratamiento y conversión</th></tr>
<tr>
<td>Ahora que ya sabes el crecimiento que tienen los girasoles, completa lo que se te pide:

a) ¿Cómo podríamos expresar algebraicamente la relación representada en la tabla?

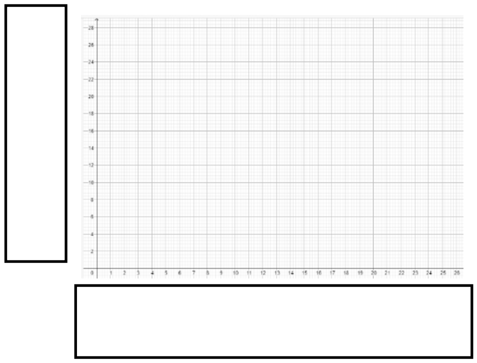
b) ¿Cuánto crecerían los girasoles en 1 mes? ¿y en 45 días?

c) ¿Qué necesitamos para visualizar la situación de forma gráfica?</td>
<td>La maestra anota en el pizarrón algunas de las respuestas que los estudiantes han dado al inciso a) y realiza las siguientes preguntas:

¿Esta función también es lineal?

¿Qué le falta?</td>
<td>Conversión del registro tabular al algebraico

Tratamiento en el registro algebraico</td>
</tr>
</table>

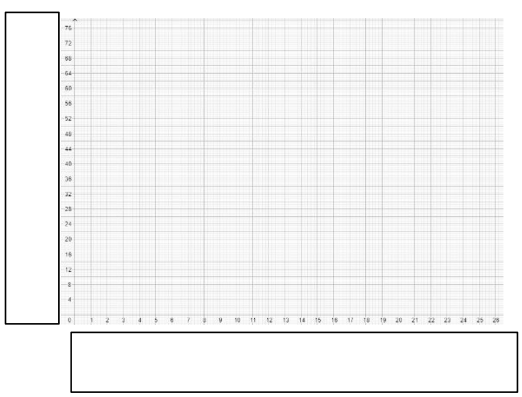
Realízalo en el espacio correspondiente  d) A partir de la gráfica de la función ¿puede saberse el crecimiento de los girasoles en cualquier día? e) Utilizando la gráfica ¿Qué tendría que hacerse para saber el crecimiento de la planta a los 18 días? f) Utilizando la gráfica ¿Qué tendría que hacerse para saber en qué momento la planta tendrá una altura de 28 cm? g) Analizando la situación inicial que plantea el problema ¿Cómo se interpreta el hecho de que la gráfica sea una recta que sube por la derecha? h) ¿Cómo se interpretará la situación si la gráfica fuera una recta horizontal?	En el plano cartesiano ¿Por dónde creen que vaya a pasar? Láminas de las gráficas del llenado del tinaco y de los girasoles ¿En qué punto toca la recta al eje y? ¿Qué diferencia hay entre la gráfica del llenado del tinaco y la gráfica de los girasoles? ¿Cuál tiene una pendiente mayor? ¿Cómo tiene que ser la pendiente para que la recta tenga una mayor inclinación con respecto al eje x? Para responder estas preguntas, la maestra muestra las gráficas del llenado del tinaco para facilitar la comparación de las pendientes.	**Conversión del registro tabular al gráfico** **Tratamiento en el registro gráfico y algebraico.** **Tratamiento en el registro gráfico**

ACTIVIDADES DE CIERRE		
Actividades	**Orientaciones didácticas** **Material didáctico**	**Tipo de formación, tratamiento y conversión**
Actividad 4: En parejas, lean el siguiente problema y contesten lo que se les pide, al final compartan sus resultados con el resto del grupo:	Se espera que algunos estudiantes cometan el	

Los agricultores, que se dedican a la venta de los girasoles, deciden aumentar su producción rociando el campo de girasoles con un fertilizante que hará crezcan más rápido. Al inicio del experimento, los girasoles tenían una altura de 12 cm, se les roció el fertilizante, y al cabo de tres días se han percatado que ya medían 19.5 cm. 1. *¿Cuáles son las variables que intervienen en este problema? ¿cuál es la dependiente e independiente?* 2. *¿Cuántos centímetros habrán crecido después de 5 días? ¿y después de 7 días? ¿y de diez?*  Los estudiantes comparten sus respuestas con sus compañeros 3. Completa la tabla y gráfica que muestra el crecimiento de los girasoles utilizando el fertilizante a lo largo de varios días	error de realizar la división de 19.5 entre 3, es decir, el crecimiento que tiene la planta entre los tres días que han transcurrido, no contemplando que la planta ya tenía un crecimiento de 12 cm antes de usar el fertilizante. Para encaminar a los estudiantes en la socialización y descubran cuál de los procedimientos expuestos es el correcto, se realizarán las siguientes preguntas: **¿Cuántos centímetros tenían los girasoles antes de aplicar el fertilizante? **A partir de qué se pone el fertilizante ¿Cuántos centímetros creció la planta? **Entonces ¿Cuál fue el crecimiento por día? Al mostrar la tabla es muy importante que la maestra y estudiantes	**Tratamiento en el registro verbal** **Conversión del registro verbal al tabular y gráfico**

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th>Tiempo (días)

x</th><th>Crecimiento (cm)

y</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>24.5</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>29.5</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>37</td></tr>
<tr><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>100</td><td></td></tr>
</table>


4. Si se representa con x los días y con y el crecimiento de los girasoles ¿cómo sería su función? Escríbela

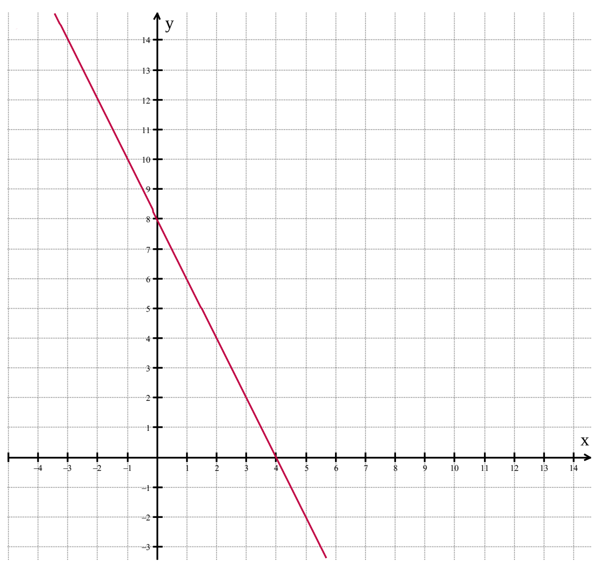
Con la información que tienes ¿Cuántos días tendrían que transcurrir para que los girasoles alcancen su altura máxima de 3 metros? ¿Cómo lo supiste?
</td>
<td>esclarezcan qué significa el día cero en el contexto del problema.</td>
<td>Conversión del registro tabular al algebraico</td>
</tr>
</table>

Plan de clase (5/5)

Intención didáctica: Qué los estudiantes realicen tratamiento en el registro gráfico y algebraico. Además, realicen conversiones del registro gráfico al tabular y verbal.

Número de sesiones: 1

Fecha: 1 de abril del 2022

FASE: ACTIVIDADES DE APERTURA		
Actividades	**Orientaciones didácticas** **Material didáctico**	**Tipo de formación, tratamiento y conversión**
Actividad 5. Revisa la siguiente gráfica y a partir de ella realiza lo que se te pide.  a) Localiza cinco puntos que estén sobre la gráfica, márcalos con colores y nómbralos con las letras A, B, C, D y E. b) Con estos puntos, completa la siguiente tabla:	Hojas de trabajo Lápices de colores Lamina con las partes del plano cartesiano	**Tratamiento en el registro gráfico**

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th>PUNTO</th><th>COORDENADAS</th><th>Variable
x</th><th>Variable
y</th></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td>Conversión del registro grafico al tabular

Tratamiento en el registro tabular</td>
</tr>
</table>

FASE: ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Actividades	**Orientaciones didácticas** **Material didáctico**	**Tipo de formación, tratamiento y conversión**
a) Inventa un problema con los datos de la gráfica y la tabla. En este problema plantea preguntas que puedan resolverse leyendo la gráfica. b) ¿Cuáles son las variables que intervienen en tu problema? ¿Cuál es la variable dependiente y cual la independiente?	La maestra pregunta a los estudiantes sobre si la recta es creciente o decreciente. La maestra pide ejemplos sobre situaciones que involucren variables que pueden decrecer y las va anotando en el pizarrón.	**Conversión del registro gráfico y tabular al verbal**

ACTIVIDADES DE CIERRE		
Actividades	**Orientaciones didácticas** **Material didáctico**	**Tipo de formación, tratamiento y conversión**

c) Escribe características importantes para crear una expresión mediante la cual puedas encontrar el valor de "y" dado cualquier valor de "x". Apóyate de los siguientes datos: ¿Qué características tiene la pendiente? ________ ¿Cuál es la ordenada al origen? __________ ________	La maestra planteará preguntas a los estudiantes con la finalidad de que no olviden donde se representan los valores contenidos en el eje de las abscisas y de las ordenadas.	**Tratamiento en el registro gráfico y algebraico**

Capítulo IV.
Análisis y Resultados de la Experimentación

En este capítulo se presenta el análisis de la experimentación de la secuencia didáctica para lograr el resultado esperado de este proyecto de desarrollo profesional: lograr comprensión de los estudiantes a partir de favorecer tratamiento y conversión de los registros de representación en las actividades que conforman dicha secuencia didáctica.

La aplicación de la secuencia didáctica se lleva a cabo con 18 estudiantes del grupo de 1°"B" de la Escuela Secundaria General "Salvador Vidal". Estos alumnos son solo la mitad del grupo, puesto que a causa de la pandemia por COVID, están divididos en dos equipos de trabajo.

La aplicación de este trabajo en el tiempo planeado, se vio afectada por necesidades de la escuela, tal como la aplicación de una prueba estandarizada para secundarias del país. Sin embargo, estos contratiempos no afectaron el desarrollo ni resultados de las actividades.

El desarrollo de este capítulo se divide en dos secciones. La primera de ellas es el análisis descriptivo de cada una de las cinco sesiones que componen la secuencia didáctica, considerando para su orden los tres tipos de actividades, según Díaz-Barriga (2013): apertura, desarrollo y cierre. Mientras que la segunda sección, corresponde a los resultados obtenidos de estos análisis en términos de las capacidades y dificultades encontradas, la selección de las actividades y los niveles de comprensión alcanzados.

4.1 Análisis de la experimentación

Para un mayor entendimiento de los análisis que a continuación se desarrollan, debe considerarse que el registro analítico durante las clases también es llamado registro algebraico o función.

Además, cada una de las conversiones y tratamientos son abreviadas de la siguiente manera:

TRV Tratamiento registro verbal

TRT Tratamiento registro tabular

TRG Tratamiento registro gráfico

TRA Tratamiento registro analítico o algebraico

RV-RT Conversión del registro verbal al registro tabular

RV-RA Conversión del registro verbal al analítico/algebraico

RV-RG Conversión del registro verbal al registro gráfico

RT-RV Conversión del registro tabular al registro verbal

RT-RA Conversión del registro tabular al registro analítico/algebraico

RT-RG Conversión del registro tabular al registro gráfico

RA-RV Conversión del registro algebraico al registro verbal

RA-RT Conversión del registro algebraico al registro tabular

RA-RG Conversión del registro algebraico al registro gráfico

RG-RV Conversión del registro gráfico al registro verbal

RG-RT Conversión del registro gráfico al registro tabular

RG-RA Conversión del registro gráfico al registro algebraico

A continuación, se presenta el análisis correspondiente a cada una de las cinco sesiones de la secuencia didáctica.

4.1.1 Sesión 1

La intención didáctica de la sesión uno, es que los estudiantes realicen tratamiento en el registro verbal de una función lineal. De acuerdo con Duval (1993), el *tratamiento* de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro, por ejemplo, en el registro verbal: Dos kilos de manzana cuestan $4, lo podemos transformar deduciendo que los kilos de manzana son la variable independiente y el costo la variable dependiente.

Dado que una función es una correspondencia entre variables, fue importante que los estudiantes trabajaran con el concepto de variable dependiente e independiente para que les fuera sencillo identificarlas en un problema, así como también la relación entre ambas.

En la Tabla 3, se muestran las características del tratamiento verbal que se pretende desarrollar con los estudiantes.

Tabla 3.
Características del tratamiento del registro verbal realizado en la sesión 1

No. Sesión	Ítem	Tratamiento	Características	Material utilizado
1	**1**	TRV	Conocimiento de las variable dependiente e independiente. Identificación de estas variables en problemas. Escritura de ejemplos.	Presentación PowerPoint

Actividad de apertura. La clase comienza con una pregunta que los alumnos, al relacionarla con su contexto inmediato, podrán contestar:

> Mtra.: En su hoja de trabajo, en la actividad 1, escriban la pregunta ¿Qué es una variable? Y denle respuesta a partir del uso que ustedes le dan a esta palabra. ¿Alguien quiere compartir su respuesta?
>
> Ao 1: Es lo contrario a las ecuaciones
>
> Ao 2. Muchos resultados que se obtienen al realizar una operación
>
> Ao 3: Algo que tiene muchas opciones
>
> Ao 4: Algo que no es exacto
>
> Ao 5: Algo que puede cambiar

La maestra va registrando cada respuesta en el pizarrón, para finalmente abordarlas todas y encontrar en ellas particularidades.

> Mtra.: Si ustedes recuerdan, en tema anterior que trabajamos, ecuaciones lineales, al resolver una ecuación, ¿una incógnita cuántos valores podía tomar?
>
> Aos (todos): ¡uno!
>
> Mtra.: En efecto, y esa es una diferencia entre una función y una ecuación, la incógnita tiene un solo valor, mientras que una variable, como ustedes ya lo mencionan, puede tomar varios valores. Así que, en ese sentido, sí podemos decir que son totalmente lo opuesto. A continuación, les muestro la definición de variable, la cual está muy relacionada con sus participaciones.

Mediante una presentación PowerPoint, se muestra la siguiente definición:

> *Variable: Es una magnitud que puede tomar cualquier valor de los comprendidos en un conjunto.*

Fue importante esclarecer con los estudiantes las diferencias de las literales en el contexto de las ecuaciones y funciones, dado que, al ser el tema anterior, en los estudiantes puede causar dudas e inclusive dificultades.

Actividades de desarrollo. Posteriormente, con la intención de que los estudiantes, distingan las variables, es decir, aquellas magnitudes que pueden tomar cualquier valor, se les muestra un cartel publicado en una cafetería (véase Figura 20).

Figura 20.
Situación planteada para encontrar las dos variables que intervienen

Al cuestionar la maestra al grupo, varios alumnos levantan las manos y coinciden en que una de la variable son los ingredientes y la otra el costo.

Mtra.: ¿Qué variables encuentran en esta información presentada?

Ao 4: los ingredientes

Ao 6: la crepa

Aos (gran parte del grupo): no esa no es

Ao 3: la otra es el costo

Mtra.: En efecto, las variables incluidas en la información son la cantidad de ingredientes que desees agregarle a tu crepa y lo que debes pagar por ello, la crepa no puede ser, porque no se mencionan características de ésta.

La maestra escribe ambas variables sobre el pizarrón y posteriormente muestra a los estudiantes los tipos: variable dependiente e independiente (Figura 21).

Figura 21.
Lámina con definiciones de la variable dependiente e independiente

Mtra.: (después de leer grupalmente las definiciones) Para entender mejor la definición de las variables les haré una pregunta ¿ustedes son dependientes o independientes económicos de sus papás?

Aos (todos): ¡dependientes!

Mtra.: ¿Por qué?

Ao 1: Porque nosotros aún no podemos trabajar.

Mtra.: Exactamente, por ahora su prioridad es estudiar, por tanto, dependen de sus papás, así como la variable dependiente depende de ¿quién?

Ao 7: de la variable independiente

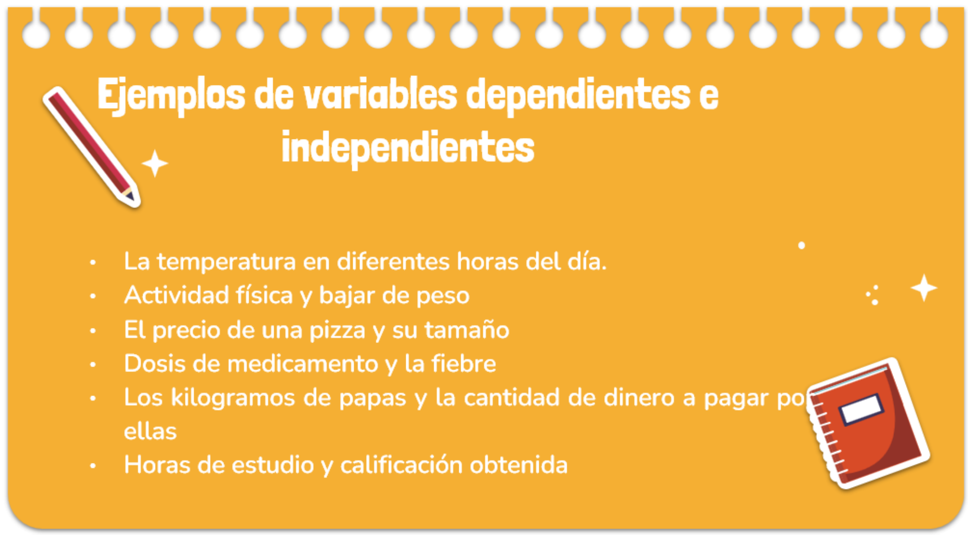
Mtra.: Correcto, en este sentido la variable independiente es libre, ésta no depende de ninguna otra variable. De las variables encontradas en el letrero de la cafetería ¿Cuál es la variable dependiente e independiente?

Ao 3: La variable dependiente es el costo, porque va a depender de los ingredientes que se pongan a la crepa.

Del anterior fragmento de diálogo, puede rescatarse el tratamiento que se llevó a cabo del registro verbal, de manera grupal los estudiantes lograron identificar cuáles son las dos variables que intervienen en una situación y posteriormente, analizar cuál de ellas es la variable dependiente y cual la independiente.

Para reforzar este tratamiento, se les muestra una a una las situaciones que aparecen en la Figura 22 de las cuales, de manera grupal, van determinando cual es la variable dependiente e independiente y el porqué.

Figura 22.
Situaciones para distinguir la variable dependiente e independiente



Actividad de cierre. Para permitir que los estudiantes de forma individual logren identificar de una situación, la variable dependiente y la independiente, se les pide escribir un ejemplo en su hoja de trabajo.

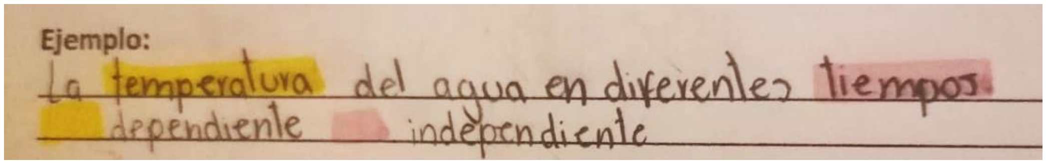
En la Tabla 4, se muestran los resultados de la actividad número uno, que integra a la secuencia didáctica. Se utiliza el 1 para indicar que el estudiante lo logró y el 0 para indicar que el estudiante no lo logró.

Tabla 4.
Resultados de la actividad 1: escribir una situación donde intervenga una variable dependiente y una independiente

Estudiantes	Logra escribir una situación de variación lineal e identifica ambas variables	Logra escribir una situación de variación lineal pero no identifica cada una de las variables	No escribe una situación de variación lineal	Prefiere no contestar
E_1	0	1	0	0
E_2	0	1	0	0
E_3	1	0	0	0
E_4	0	1	0	0
E_5	0	1	0	0
E_6	1	0	0	0
E_7	0	0	1	0
E_8	1	0	0	0
E_9	0	1	0	0
E_10	1	0	0	0
E_11	0	0	1	0
E_12	0	0	0	1
E_13	0	0	0	1
E_14	0	0	1	0
E_15	0	1	0	0
E_16	1	0	0	0
E_17	0	1	0	0
E_18	1	0	0	0
TOTALES	6	7	3	2

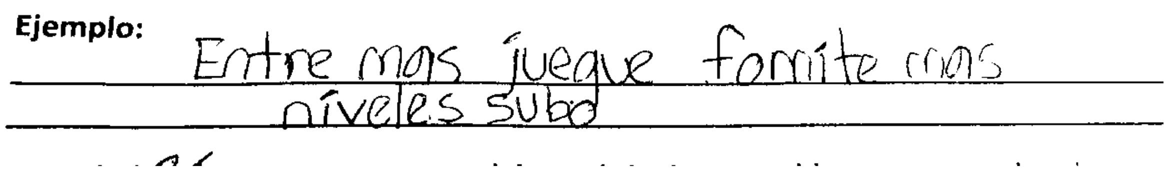
A partir de los resultados obtenidos, se puede apreciar que seis estudiantes escribieron situaciones de variación lineal y además determinaron cuál es la variable dependiente e independiente. Además, estos ejemplos, dan cuenta que los estudiantes relacionan estas situaciones con una proporcionalidad directa: cuando una magnitud aumenta o disminuye, la otra también lo hace en la misma proporción (véase la Figura 23).

Figura 23.
Identificación de la variable dependiente e independiente en una situación de variación lineal



En cuanto aquellos siete estudiantes que escribieron una situación en donde intervienen dos variables, el hecho de que no hayan indicado cuál es la variable dependiente e independiente, al estar observando la participación en clase de algunos de ellos, pudo apreciarse que esto fue a causa de una omisión y no porque no supieran identificar las variables. Inclusive se les escuchó apoyando a otros compañeros haciéndoles preguntas como ¿al tiempo lo podemos afectar? ¿Qué depende de esto? Un ejemplo de estas situaciones puede observase en la Figura 24.

Figura 24.
Ejemplo de la relación entre una variable dependiente y una independiente.



De los tres estudiantes que no lograron escribir una situación de variación lineal, se tiene que uno de ellos sí trató de escribirla, pero le faltó desarrollar más la idea, de tal manera, que la relación entre dos variables se hiciera evidente (véase Figura 25). Otro estudiante en lugar de escribir una situación que expresara causa-efecto, escribió una situación en términos de necesidad (véase Figura 26). Y la última estudiante sí planteó una situación donde intervienen dos variables, pero relacionadas mediante una relación de proporcionalidad inversa: cuando una variable aumenta la otra disminuye o viceversa en la misma proporción (véase Figura 27).

Figura 25.
Dificultad para articular la relación entre las variables dependiente e independiente

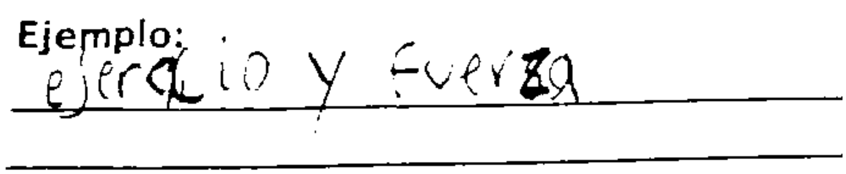


Figura 26.
Dificultad para escribir una situación en donde interviene una variable dependiente e independiente

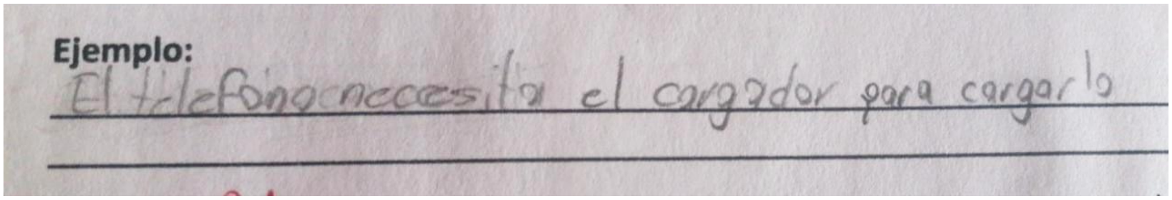
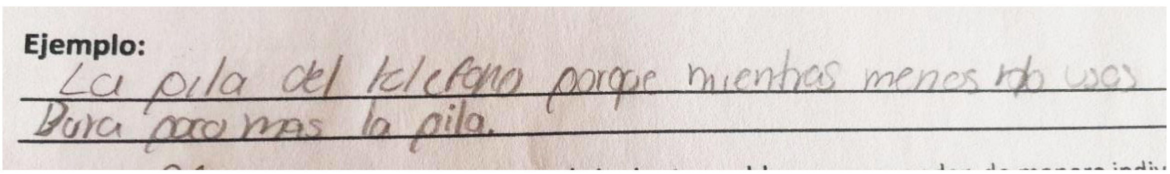


Figura 27.
Ejemplo de una situación donde intervienen dos variables, relacionadas mediante la proporcionalidad inversa



Con esta actividad se concluye la primera sesión de clase.

4.1.2 Sesión 2

La intención didáctica de esta sesión es que los estudiantes partan del registro verbal para realizar conversiones al registro tabular, gráfico y algebraico. Así como también realicen tratamientos de estos últimos registros.

La Tabla 5, muestra el ítem, materiales y características de cada una de las conversiones y tratamientos realizados en esta sesión; es importante mencionar que de forma secundaria aparecen otras conversiones no incluidas en la intención didáctica.

Tabla 5.
Conversiones y tratamientos realizados en la sesión 2

Ítem	Tratamientos y conversiones	Características	Material utilizado
2.1 2.2	TRV	Resolución de problema Identificación y relación de la variable dependiente e independiente	
2.3	RV - RT	Interpretación de la conversión del registro verbal al tabular. Completar datos del registro tabular	Hojas de trabajo

2.3	RV- RG	Interpretación de la recta con respecto al registro verbal	Hojas de trabajo
2.3	TRT	Localización de la variable dependiente e independiente en el registro tabular. Obtención de la primera diferencia Comprensión del problema Para cada valor de x, solo le corresponde un valor en y Para encontrar el valor de y, considerar a x	Hojas de trabajo
2.3	TRG	Ubicación de las variables dependiente e independiente en cada uno de los ejes. Partes que componen el plano cartesiano Ubicación de puntos en el plano cartesiano. Interpretación del porque se obtiene una recta	Hojas de trabajo
2.4	RV - RA	Se contemplan los datos que brinda el problema, así como el reconocimiento de las dos variables y se elige la función que relacione estas variables de acuerdo a lo citado en el problema	Hojas de trabajo
2.4	TRA	Forma estándar de la función lineal.	Hojas de trabajo
2.5 2.6	RV-RA	Relación de los datos del problema con su representación algebraica.	Hojas de trabajo
2.7	RA - RT	Sustitución de los valores de x en la función encontrada	Hojas de trabajo
2.7	RT - RG	Colocación de puntos a partir de los datos encontrados en la tabla	Hojas de trabajo
2.7	TRG	Intersección en el eje y. Inclinación de la recta dadas diferentes valores de la pendiente	GeoGebra Hojas de trabajo

Dado que con cada conversión se obtiene un nuevo registro, es importante que se vaya dando tratamiento a cada nuevo registro de manera paulatina, de tal manera que el estudiante vaya adquiriendo conocimientos, que, a su vez, le permitan seguir aprendiendo.

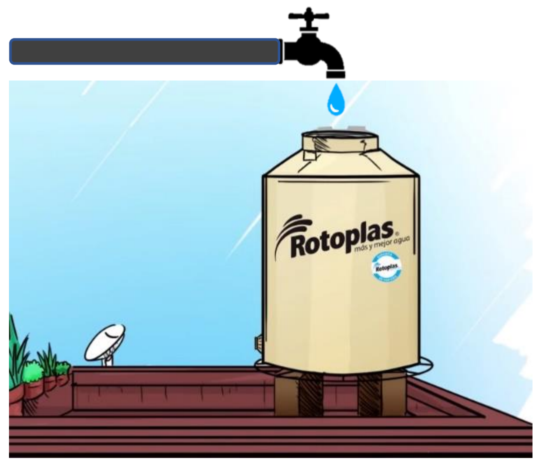
Para esta sesión, se propuso la resolución de un problema sobre el llenado de agua de un tinaco que incluye preguntas para ir guiando al estudiante, así como también, el registro tabular, gráfico y algebraico.

Actividad de apertura. La maestra pide a un estudiante que lea el problema, mientras todos los demás lo van siguiendo. Posteriormente pide que de manera individual sea respondido ya que cuentan con conocimientos previos que les permite hacerlo por sí mismos como el dominio de las operaciones básicas. Los estudiantes comienzan a contestar el problema y la maestra pasa por sus lugares para observar los procedimientos realizados.

Actividad 2: De manera grupal, lean el siguiente problema y respondan de manera individual.

Un tinaco que tiene 20 litros de agua recibe de una llave 4.5 litros por minuto. ¿Qué cantidad de agua tendrá el tinaco a los 5 minutos? ¿y a los 10? ¿y al cabo de una hora?

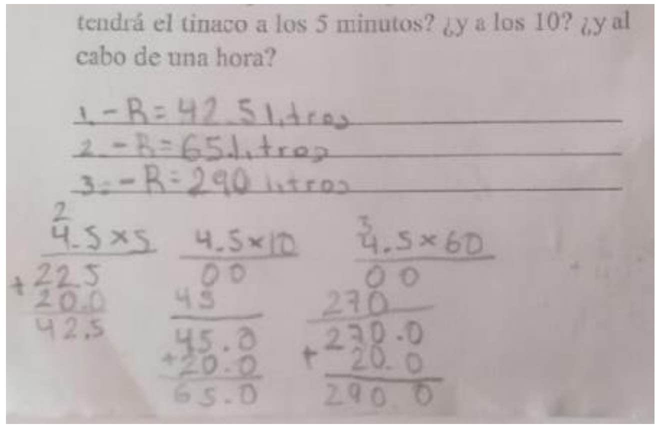
____
____
____



La profesora pasó por los lugares de los estudiantes e identifica dos estrategias de resolución:

a. Consideran que como a cada minuto la llave está proporcionando 4.5 litros al tinaco, 12 estudiantes multiplican 4.5 por los minutos que les plantea el problema, es decir, por 5, 10 y 60 minutos. Algunos de éstos, a pesar de seguir el mismo procedimiento cometieron errores en la ubicación del punto decimal o en el uso de las tablas de multiplicar.
b. Después de multiplicar los 4.5 litros por los minutos, 3 estudiantes agregaban a esta cantidad los 20 litros que ya tenía el tinaco antes de que la llave se abriera. Los 3 alumnos restantes no contestaron el problema porque no le entendieron.

Figura 28.
Respuestas. Problema del tinaco, estrategia a

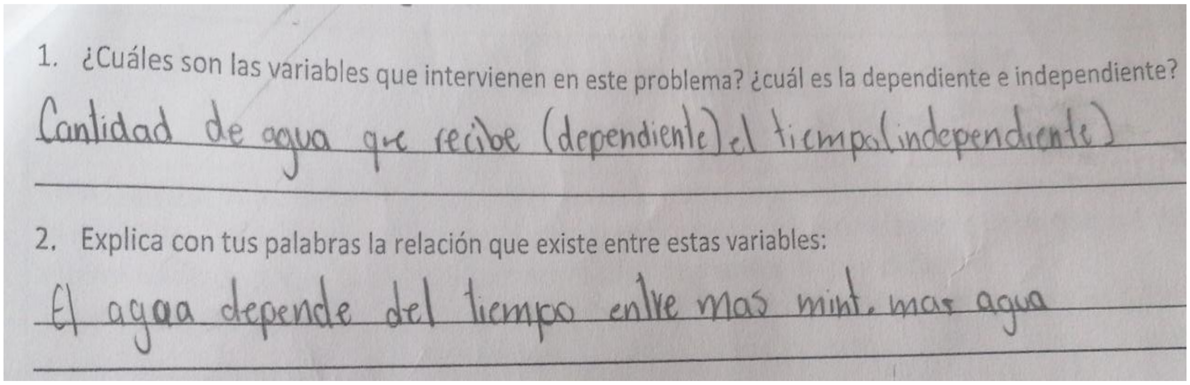


Alguno de estos alumnos que no contestaron el problema mencionó que le parecía incongruente el problema, pues si al tinaco le cabían 20 litros de agua como era posible que a los 5 minutos le diera una cantidad mayor. Claramente existió una mala interpretación del problema.

La maestra realizó una puesta en común, pasó a uno de los 12 estudiantes que resolvieron igual el problema, les comentó que sería el representante de una mayoría del grupo y eligió otro estudiante de los 3 que agregaron un paso extra a ese procedimiento. Ambos estudiantes pasaron al pizarrón, el primero explicó su procedimiento y la mayoría del grupo estuvo de acuerdo, sin embargo, cuando el segundo alumno les explicó que él hizo lo mismo, pero le sumó los 20 litros que ya tenía el tinaco, los estudiantes se dieron cuenta que se les pasó por completo ese dato e inmediatamente se dieron a la tarea de completar sus resultados.

Una vez que hubo comprensión del problema, se procedió a dar respuesta a dos preguntas ¿cuáles son las variables que intervienen en este problema? y ¿cuál es la relación que existe con estas variables? Con las respuestas a estas preguntas, se identifica que los estudiantes en su totalidad, distinguen cuál es la variable dependiente e independiente y explican que la relación entre ambas es que una depende de la otra y que entre mayor tiempo la llave este abierta más agua tendrá el tinaco (véase Figura 29).

Figura 29.
Ejemplo en el que se distingue a ambas variables y además se explica la relación entre ambas


1. ¿Cuáles son las variables que intervienen en este problema? ¿cuál es la dependiente e independiente?

Cantidad de agua que recibe (dependiente) el tiempo (independiente)

2. Explica con tus palabras la relación que existe entre estas variables:

El agaa depende del tiempo entre mas mint. mas agua

Actividad de desarrollo. Como se había abordado anteriormente, el tema de función lineal es el primer acercamiento que tienen los estudiantes con las funciones, por tanto, tabular, graficar y trabajar con expresiones algebraicas para los estudiantes de primer grado de secundaria es realmente novedoso. Para ayudar a los estudiantes con estas tareas, para este problema del tinaco se incluyen el registro tabular, gráfico y algebraico.

De estos registros que se incluyen, se realizará su respectivo tratamiento para que los estudiantes obtengan las habilidades necesarias para que por ellos mismos puedan realizar conversiones y formen sus propios registros.

> Mtra.: Vamos a ubicarnos en la tabla, si se fijan esta relacionando la variable dependiente e independiente que intervienen en el problema del tinaco. Corroboren los resultados que están ahí con los que ustedes obtuvieron y contesten los espacios faltantes
>
> Ao 8: Yo ya maestra
>
> Mtra.: ¿Cómo le hizo para obtener la cantidad de agua a los 6 minutos?
>
> Ao 8.: Yo me fije que a los 5 minutos tenía 42.5 litros, entonces a esa cantidad solo le sume 4.5 y me dio 47.
>
> Mtra.: Muy bien, levanten la mano los que hicieron lo mismo. ¿Quién lo hizo de manera diferente?
>
> Ao 1: yo multiplique 6 por 4.5 y le sume los 20 litros ya que ya tenía el tinaco.
>
> Mtra.: Muy bien, ambos procedimientos son correctos y nos llevan al mismo resultado.

El primer tratamiento a realizar fue en el registro tabular, se desea que los estudiantes identifiquen este registro como la relación entre dos variables donde una se representa con x y la otra con y, cuya relación se va dando de manera lineal, es decir, va aumentando la misma cantidad. Así como también que, para cada valor de x, solo hay un único valor en y.

Mtra.: ¿Recuerdan con que letra se representa a la variable independiente?

Ao 3.: Con la x

Mtra.: Muy bien, y en nuestro problema, ¿quién es la variable independiente?

Ao 2: el tiempo

Mtra.: Así es, por favor en su tabla, donde aparece el tiempo, pónganle una x. ¿Y la variable dependiente con que letra se representa?

Ao 1: con la y

Mtra.: Muy bien, por lo tanto, en la tabla donde aparece la cantidad de agua, que es la variable dependiente, coloquen la letra y.

Mtra.: Les voy a pedir que por favor todos se ubiquen en su tabla ¿Cómo va transcurriendo el tiempo?

Ao 9.: Va avanzando de 1 minuto en 1 minuto

Mtra.; Así es, y como va avanzando de 1 en 1, podemos identificar lo siguiente. Vamos a sacar diferencias, ahora de la variable dependiente. Saquen la diferencia de agua que hay de 1 minuto a 0 minutos, luego de 2 minutos a 1 y así sucesivamente (maestra va indicando cómo en el pizarrón)

Ao 7: Maestra siempre es lo mismo, es 4.5

Mtra.: Y la diferencia de agua del minuto 10 al 15 ¿sigue siendo igual?

Aos (todos): No

Mtra. ¿A qué se debe esto?

Aos: A que ya no aumento 1 minuto sino 5

Mtra.: Entonces siempre la variable dependiente va a depender del valor que le demos a la variable independiente, no lo olviden.

Mtra.: En su hoja de trabajo 4, anoten: para saber que una tabla corresponde a una función lineal, al obtener diferencias de ambas variables, se obtiene un valor constante, es decir, siempre es el mismo. Para ello se debe procurar que los valores de la variable independiente vayan aumentando en la misma proporción.

Del anterior fragmento de diálogo, se rescata que la maestra trabaja la posición en la que se ubica la variable dependiente e independiente dentro de la tabla, así como también la literal con la que se representa cada una de estas, que más adelante los estudiantes comprenderán están relacionadas con la forma de escribir una coordenada y su localización con respecto a cada uno de los ejes del plano cartesiano. También la maestra trabaja la obtención de las primeras diferencias que más adelante serán relacionadas con el registro analítico. Y, por último, la maestra trata que los estudiantes identifiquen la dependencia de una variable con la otra mediante el registro tabular y que no se confundan al pensar que solo se va sumando 4.5 a cada valor.

Es importante mencionar que todos los tratamientos que se van realizando al registro tabular, los estudiantes los van registrando en la hoja de trabajo número 4, la cual precisamente consiste en que los estudiantes vayan añadiendo características a cada uno de los registros, y que posteriormente estos apuntes los utilicen para completar nuevas actividades (véase Figura 30).

Figura 30.
Apuntes elaborados por los estudiantes acerca del tratamiento del registro tabular

Características de la tabla	Cuando sacamos diferencias de la variable dependiente se obtiene un valor constante. La variable independiente siempre se representa en la columna izquierda y la dependiente en la derecha.

Mtra.: ¿la cantidad de agua obtenida a los 5 minutos, será la misma para cualquier otro minuto? Observen su tabla

Aos: No maestra

Mtra.: ¿En algún momento la cantidad de agua será la misma?

Ao 6: No, porque el agua siempre va aumentando

Mtra.: Así es. Aquí encontramos otra característica de la función lineal, cada valor de y, es decir de la cantidad de agua será único para cada valor de x, es decir, el tiempo.

En el fragmento de diálogo, la intención de la maestra es que los estudiantes entiendan al registro tabular como aquella relación entre un elemento de un grupo A y otro elemento de un grupo B, donde siempre se vincularán de manera única y exclusiva.

Mtra.: Tengo aquí esta tabla (véase Figura 31), analícenla y platíquenme si expresa una relación correspondiente a una función lineal

Aos: Sí…

Ao 10: Yo digo que no, porque no suma lo mismo

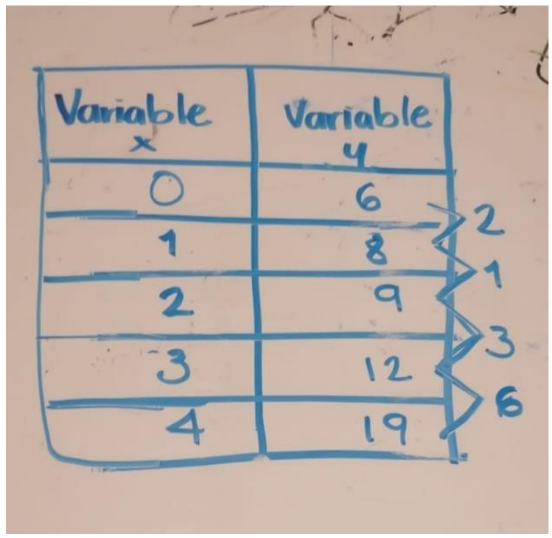
Mtra.: Observen la variable independiente ¿va aumentando lo mismo?

Aos: Sí

Mtra.: Entonces pueden sacar diferencias, háganlo…

Aos: No, no es, no hay un valor constante.

Figura 31.
Ejemplo de una tabla en la que sus diferencias no son constantes.



El fragmento anterior fue base para que los estudiantes realizaran tratamiento al registro tabular al analizar si existía correspondencia entre las variables, poniendo en práctica la obtención de diferencias.

Hasta el momento, estos fueron los tratamientos que se realizaron en el registro tabular. La maestra retoma el registro gráfico y lleva a los estudiantes a la ejecución de algunos tratamientos: ubicación de la variable dependiente e independiente en cada uno de los ejes, ubicación de puntos en el plano cartesiano e interpretación del porque se obtiene una recta.

Mtra.: ¿Ustedes conocen el plano cartesiano? ¿Cuántos cuadrantes tiene?

Ao 2: Dos

Ao 1: Uno

> Mtra.: En realidad, el plano cartesiano se compone de cuatro cuadrantes. El cuadrante I, el cuadrante II, el cuadrante III y el cuadrante IV (pega sobre la pared una lámina de las partes que componen el plano cartesiano). Nosotros solo estamos trabajando en el primer cuadrante. ¿Recuerdan cómo se le llama a cada uno de sus ejes? ¿Cómo se le llama al horizontal?
>
> Aos (varios): eje "y"
>
> Ao 7: No, es el eje "x"
>
> Mtra.: Así es, el horizontal es el eje "x" o eje de las abscisas (señala la lámina sobre la pared). ¿y el eje vertical?
>
> Aos (varios): eje "y"
>
> Mtra.: Muy bien, eje "y" o de las ordenadas ¿y cómo se le llama al punto en donde se cruzan los dos ejes?

Fue importante realizar con los estudiantes estas puntualizaciones, puesto que gran parte de ellos abordaron con poca profundidad el conocimiento del plano cartesiano, e inclusive algunos, no lo habían trabajado derivado a la situación de la pandemia por Covid19. Cabe resaltar también, que, de acuerdo con los libros de texto, los estudiantes no han trabajado la graficación de funciones, solo datos estadísticos mediante gráficas de barras.

> Mtra.: ¿En qué eje se ubica a la variable independiente?
>
> Ao 4: En el eje "x"
>
> Mtra.: ¿y la variable dependiente?
>
> Ao 1: en el eje "y"
>
> Mtra.: ¿Qué forma tiene la gráfica?
>
> Ao 9: Una línea
>
> Mtra.: Se conoce como recta. ¿y de dónde creen que haya salido?
>
> A 10: Del origen
>
> Aos (varios): De la tabla

De manera grupal, se trabaja con los estudiantes como la recta surge de la unión de infinitos puntos, en ese caso, de los contenidos en la tabla. Se explica a los estudiantes que un punto en el plano surge de una coordenada (x, y) dadas por la relación de una variable independiente y una variable dependiente, así como también el cómo colocar el punto dentro del plano cartesiano.

Mtra.: ¿Ustedes creen que siempre que se trabaje una situación correspondiente a un comportamiento lineal, su gráfica sea siempre una recta?

Aos (todos): ¡No!

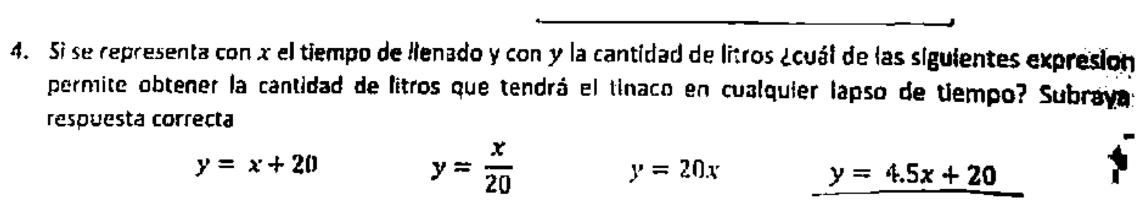
Mtra.: La respuesta a esta pregunta la validaremos más adelante.

Como puede apreciarse, los estudiantes están totalmente seguros que no siempre se va a formar una recta al trabajar la función lineal, seguramente porque no están acostumbrados a este tipo de gráficas, la maestra no desmintió su respuesta para permitirles por ellos mismos experimentar y darse cuenta del error.

Después de trabajar con el registro gráfico y tabular, la maestra solicita ya una estudiante que lea la pregunta 4 del problema del tinaco, la cual pide que los estudiantes elijan de las cuatro opciones que se presentan, la expresión algebraica que permita obtener la cantidad de litros que tendrá el tinaco en cualquier lapso de tiempo.

La maestra pregunta a varios estudiantes la expresión algebraica que han elegido, siendo estas: $y = x + 20, y = 20x$ y $y = 4.5x + 20$. Con la finalidad de encontrar la respuesta correcta y enseñar a los estudiantes a utilizar una función, en el pizarrón la maestra realiza las comprobaciones con las tres expresiones elegidas por el grupo. La maestra a través de una presentación PowerPoint, presenta la tabla del comportamiento del llenado del tinaco y en la primera función sustituye tres valores de "x", probando que no se obtenían con ella, los valores de "y". Lo mismo, realizó con las otras dos funciones, mostrando así que la función correcta era $y = 4.5x + 20$ (véase Figura 32).

Figura 32.
Ejemplo de Conversión del Registro Verbal al Algebraico


4. Si se representa con x el tiempo de llenado y con y la cantidad de litros ¿cuál de las siguientes expresion permite obtener la cantidad de litros que tendrá el tinaco en cualquier lapso de tiempo? Subraya respuesta correcta

$y = x + 20$ $\quad$ $y = \frac{x}{20}$ $\quad$ $y = 20x$ $\quad$ $y = 4.5x + 20$

Mtra.: Hace un rato mencionaron qué operaciones tenían que realizar para completar el dato faltante de la tabla, la cantidad de agua a los seis minutos. ¿se acuerdan?

Ao 8: Sí, se multiplica 4.6 por 6 y se le suma 20.

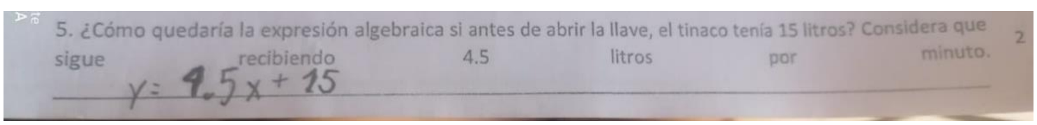
Mtra.: Así es, y esta expresión nos dice exactamente eso, recuerden que "y" es la cantidad de agua y "x" el tiempo. Entonces la función $y = 4.5x + 20$ dice que, la cantidad de agua es igual a multiplicar 4.5 por el tiempo y sumarle 20.

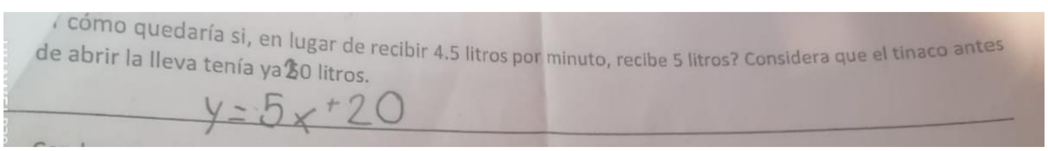
Actividad de cierre. Para concluir con la sesión número dos, se propuso a los estudiantes, una variación del problema del tinaco cambiando algunos datos como la cantidad de agua recibida por minuto y la cantidad de agua contenida en el tinaco antes de abrir la llave, logrando así, la conversión del registro verbal al algebraico y posteriormente al tabular y gráfico. Las preguntas que se proponen para este fin son las siguientes:

- ¿Cómo quedaría la expresión algebraica si antes de abrir la llave, el tinaco tenía *15* litros? Considera que sigue recibiendo *4.5* litros por minuto.
- ¿Y cómo quedaría si, en lugar de recibir 4.5 litros por minuto, recibe *5* litros? Considera que el tinaco antes de abrir la lleva tenía ya *50* litros.

Dar respuestas a estas preguntas fue la primera conversión realizada por los estudiantes, la Tabla 6 muestra los resultados de los alumnos que fueron capaces de lograrla. Los estudiantes que lograron hacerlo, tomaron como ejemplo la expresión algebraica del problema inicial del tinaco, identificando en esta, las partes que la integran y relacionándola con las condiciones que relata el problema, el valor de m lo asociaron a la cantidad de agua que cae por minuto y el valor de b, a la cantidad de agua que poseía el tinaco antes de ser abierto (véase Figura 33).

Figura 33.
Ejemplos de la conversión del registro verbal al registro algebraico





Aquellos estudiantes que omitieron escribir la variable x o y, fue porque no significaron el papel de cada una de estas variables dentro de la función creada, mientras que algunos otros cometieron error por despiste.

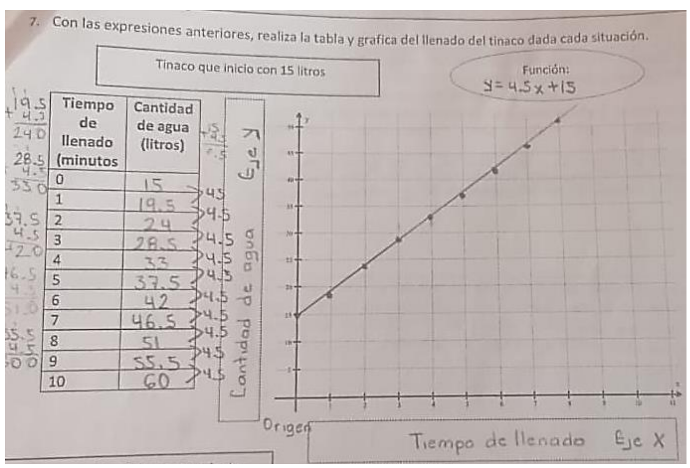
Tabla 6.
Resultados de la conversión registro verbal al algebraico

	Expresión algebraica correcta	Omisión de la variable "y"	Omisión de la variable "x"	Prefieren no responder
Cantidad de estudiantes	12	2	2	2

Ahora se mostrarán los resultados obtenidos de las conversiones del registro verbal al registro tabular y gráfico. En la

Figura ***34***, se muestran un ejemplo de dichas conversiones.

Figura 34.
Ejemplo de conversiones partiendo del registro verbal



Para partir a la conversión del objeto matemático en el registro tabular, los estudiantes se basaron tanto en el registro verbal como en el algebraico, la Tabla 7, muestra los resultados obtenidos a partir de cuestionar a los estudiantes en qué registro se habían basado.

Tabla 7.
Elección del registro que utilizan los estudiantes para convertir el objeto matemático en el registro tabular.

	Conversión del registro verbal al tabular	Conversión del registro algebraico al tabular
Cantidad de alumnos	8	10

Si bien la intención de la actividad fue que los estudiantes trabajaran con la conversión del registro verbal al tabular, puede notarse que una mayoría optó por utilizar la expresión algebraica. Esta actividad corrobora que el tránsito entre las representaciones se realiza de forma natural, es decir, ellos realizan todas conversiones posibles.

En cuanto a la conversión del objeto matemático al registro gráfico, los estudiantes se valieron del registro verbal y tabular. La Tabla 8 muestra el registro predominante en la conversión de los estudiantes.

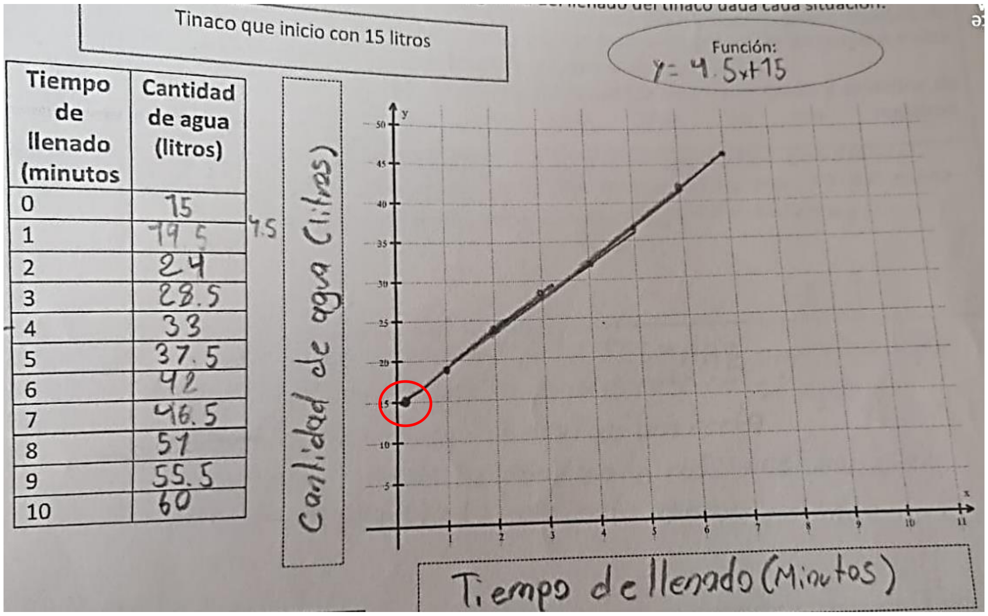
Tabla 8.
Resultados de la conversión al registro gráfico

	Conversión del registro verbal al gráfico	Conversión del registro tabular al gráfico
Cantidad de alumnos	3	15

A partir de los resultados obtenidos, se encuentra dificultad en la conversión del registro verbal al gráfico, lo cual es entendible ya que el registro tabular permite visualizar mejor la información retomada del problema. Sin embargo, surge la necesidad de hacer más énfasis en esta conversión brindando a los estudiantes elementos que les permitan realizar esta conversión de una manera fácil.

En los productos entregados por los estudiantes, se hace notorio que, para el llenado de la tabla, algunos estudiantes no consideraron el valor de la variable independiente, sino que, para encontrar la cantidad de agua, fueron sumando un valor constante de acuerdo con el agua que cae al tinaco en cada minuto. En cuanto al registro gráfico, se identifica el desconocimiento que tienen los estudiantes sobre la ubicación del 0 en el eje y, en la Figura 35 se observa como colocan el punto muy cerca del eje "y" pero no sobre éste.

Figura 35.
Dificultad para ubicar el cero en el eje y.

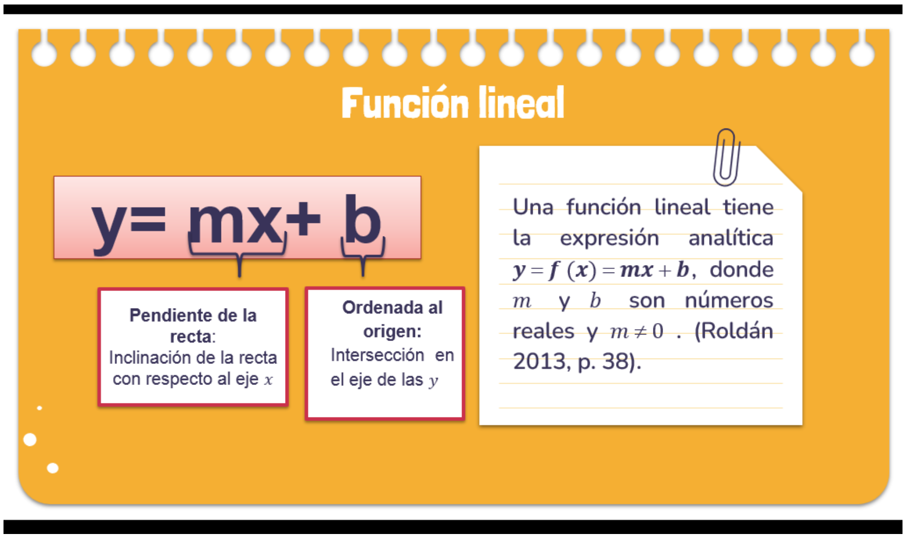


Retomando el hecho de que los estudiantes, con esta actividad ya han elaborado el registro algebraico, tabular y gráfico, la maestra los aprovecha para realizar tratamientos.

> Mtra. Obtengan las diferencias de cada una de las tablas. Considerando la primera tabla ¿Cómo fueron las diferencias?
>
> Aos (todos): iguales
>
> Mtra.: ¿Cuál fue el valor constante obtenido?
>
> Aos (todos): 4.5
>
> Mtra. ¿Pasa lo mismo con las diferencias de la segunda tabla?
>
> Aos (todos): Sí
>
> Mtra.: ¿y qué relación tiene este valor constante con las funciones correspondientes a cada una de las situaciones? (la maestra anota en el pizarrón ambas funciones)
>
> Ao 5: Pues que también tienen el 4.5 y la otra el 5
>
> Ao 7: Sí, es el mismo número que esta con la equis.

Mediante las preguntas anteriores, la maestra guío a los estudiantes a encontrar que el valor de la pendiente puede obtenerse sacando la primera diferencia de los valores que representan a la variable independiente. Para lograr que los estudiantes, además de saber cómo encontrar el valor de m, supieran que significa, mediante diapositivas mostró a los estudiantes la forma estándar de una función lineal (véase Figura 36).

Figura 36.
Diapositiva de la forma estándar de una función lineal



Mtra.: Esta es la forma estándar de una función lineal, en la función y=4.5x+20 ¿Cuánto vale m?

Aos (todos): cuatro punto cinco

Mtra.: ¿y el valor de b?

Aos: ¡20!

Mtra.: Muy bien, fíjense que el valor de m, indica la pendiente de la recta, es decir, su inclinación. De las dos gráficas que tienen ahí en su hoja de trabajo ¿Cuál de las dos rectas tiene una mayor inclinación?

Ao 3: La segunda

Mtra.: ¿Cuánto vale su pendiente?

Aos: Cinco

Mtra.: Entonces, entre más grande sea el valor de la pendiente, ¿Cómo será la inclinación?

Ao 7: Mayor

Mtra.: Ahora el valor de b, como podemos observar es la ordenada al origen, es decir, el punto donde la recta toca o se cruza con el eje y. Observen sus gráficas, las rectas en qué punto cruzan por el eje *y* y comparen ese valor con el de la expresión algebraica.

Es importante recordar que la secuencia fue aplicada con estudiantes de primer grado, por tanto, solo se trabaja la noción de pendiente e inclinación. Para reafirmar a lo que llegan los estudiantes, mediante GeoGebra se grafican varias funciones que proponen los estudiantes, algunas con pendientes muy grandes y otros con pendientes muy pequeñas.

Mtra.: ¿qué pasa con la recta que tiene la pendiente muy grande?

Ao 2: Se ve más paradita

Mtra.: ¿A qué eje se acerca?

Ao 1: Al eje y

Mtra.: la función y=50x+9 ¿en qué punto toca al eje y?

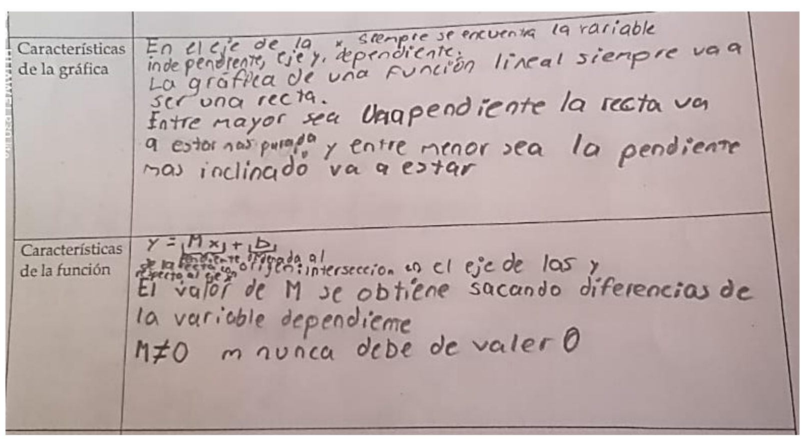
Ao 5: en el 9

Mtra.: Muy bien y ¿Cómo es la recta que tiene una pendiente pequeña?

Ao 7: Esta más acostada

Todos los tratamientos realizados al registro gráfico y algebraico, al igual que lo hicieron con los del registro tabular, los estudiantes las registraron en su hoja de trabajo número cuatro (véase Figura 37).

Figura 37.
Apuntes sobre el tratamiento en el registro gráfico y algebraico



Características de la gráfica	En el eje de la x siempre se encuentra la variable independiente, eje y, dependiente. La gráfica de una función lineal siempre va a ser una recta. Entre mayor sea Una pendiente la recta va a estar mas parada y entre menor sea la pendiente mas inclinado va a estar
Características de la función	y = Mx + b (pendiente de la recta con respecto al eje x; ordenada al origen: intersección en el eje de las y) El valor de M se obtiene sacando diferencias de la variable dependiente M≠0 m nunca debe de valer 0

Con esta actividad se concluye la sesión 2.

4.1.3 Sesión 3

La intención didáctica de la sesión tres, es que los estudiantes partiendo del registro tabular realicen conversiones al registro verbal, gráfico y algebraico. Así como también, tratamiento al registro gráfico.

En la Tabla 9, se exponen los tratamientos y conversiones planeados para esta sesión con sus respectivas características y material.

Tabla 9.
Conversiones y tratamientos realizados en la sesión 3

Ítem	**Tratamientos y conversiones**	**Características**	**Material utilizado**
3.1	RT-RV TRV	Dada una representación tabular, encontrar una situación cuya relación de variables coincida con su contenido. Corroboran si se cumplen las sentencias que eligieron.	Hoja de trabajo
3.1.a	RT-RA	Representación analítica de una función cuando b=0	Hoja de trabajo GeoGebra
3.1.a 3.1.b	TRA	Características de una función cuando b=0 Sustitución de valores	Hoja de trabajo
3.1.c	RT-RG	Representación gráfica cuando b=0	Hoja de trabajo GeoGebra
3.1.d 3.1.e 3.1.f	TRG	Interpretación de los datos obtenidos en la gráfica Leer datos a partir de una gráfica Prolongación a partir de la recta	Hojas de trabajo GeoGebra

3.1.g 3.1.h		Características de la grafica cuando m<0 Características de la gráfica cuando m>0 Características de la gráfica cuando m=0	

Actividad de apertura. Para cumplir dicha intención didáctica, se propuso una actividad en la que se les muestra a los estudiantes una tabla que contiene el crecimiento de los girasoles y enseguida se les pide relacionar su contenido con alguna de las cuatro situaciones planteadas.

Actividad 3: La siguiente tabla, obedece al comportamiento que han observado dos agricultores sobre el crecimiento de sus girasoles. De manera individual, elige y subraya la información correcta que difunde la tabla:

Tiempo (días)	Crecimiento (cm)
2	3
3	4.5
5	7.5
7	10.5
10	15
12	18
15	22.5

1. Cada día los girasoles crecen 5 cm
2. Los girasoles crecen el doble de lo que crecieron el día anterior.
3. Los girasoles crecen 1.5 cm diariamente.
4. Los girasoles crecen 1 cm diario y a eso se le suma 3.5 cm

Mtra.: ¿Usted cual opción eligió Ao 11?
Ao 11: La tres
Mtra.: ¿Y usted Ao 12?
Ao 12: La dos
Mtra.: ¿Alguien eligió una diferente de la 3 y la 2?
Ao 4: La cuatro
Mtra.: Muy bien, para saber cuál es la situación que corresponde a los datos proporcionados por la tabla, vamos a hacer una comprobación. Comenzamos con

la situación dos, si sabemos que en el día 2 los girasoles miden 3 cm, ¿Cuál es el doble de 3? Esa será la medida que tendrá al tercer día

Aos (todos): ¡seis!

Mtra.: ¿Coincide con los datos?

Aos (todos): ¡No!

Mtra.: no verdad, no coincide, ahora hagamos la comprobación con la situación tres, se sabe que, en dos días, crecieron tres centímetros, por tanto, ¿Cuánto medirían en el primer día?

Aos (todos): uno punto cinco

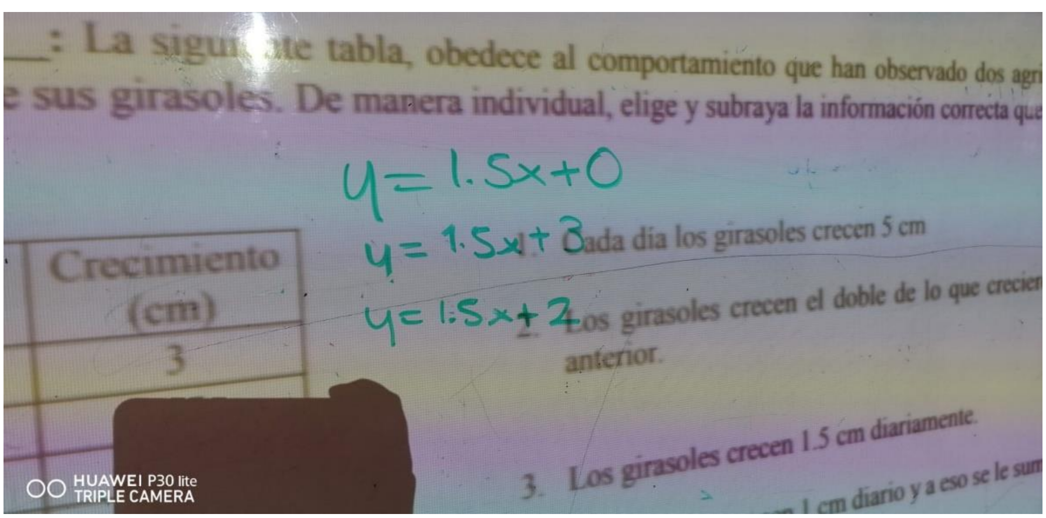
Mtra.: ¿y en cuatro días? ¿y en cinco?

Ao 6: Sí coinciden los datos con esta situación.

Como puede observarse, en el grupo relacionaron la tabla con tres situaciones diferentes, específicamente 13 estudiantes con la tercera opción, la correcta. Fue importante que en el proceso se realizara la comprobación con las características que cada una de las situaciones requería, para que, de esta manera, los estudiantes que tenían una respuesta errónea pudieran continuar hacia la conversión del registro tabular al algebraico.

Actividad de desarrollo. Para dar paso a la conversión del registro tabular al algebraico, se les planteó a los estudiantes la forma en que se podría expresar de manera algebraica la relación entre el tiempo (x) con el crecimiento de los girasoles (y). Ante esto, en el grupo se plantearon las funciones que se muestran en la Figura 38.

Figura 38.
Funciones planteadas por los estudiantes ante el problema 3 de la secuencia didáctica



En la Tabla 10 se exponen los resultados obtenidos de la conversión del registro tabular al algebraico. Como puede apreciarse, en esta conversión, no hubo respuesta por la mayoría de los estudiantes.

Tabla 10.
Resultados de la conversión del registro tabular al algebraico

	Expresión y=1.5x+0	**Expresión y=1.5x+3**	**Expresión y=1.5x+2**	**No respondió**
Total de alumnos	3	1	1	13

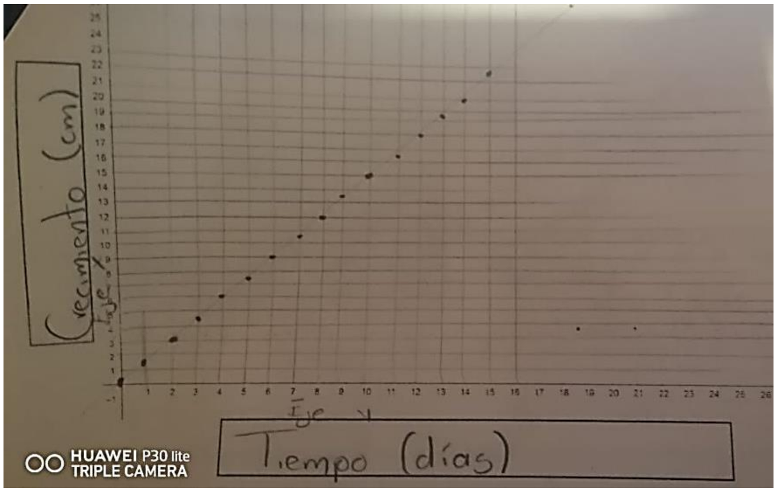
Se realizó la comprobación de las tres funciones y se compararon los resultados con los obtenidos en la tabla, esta comprobación fue también utilizada para que los estudiantes aprendieran a utilizar la función para obtener los datos de una tabla, es decir, a transitar del registro algebraico al tabular. Como puede observarse, en las participaciones que hubo, un estudiante formula la función $y = 1.5x + 0$, al reconocer los estudiantes que esta era la correcta, la maestra realizó la siguiente pregunta.

> Mtra.: ¿Entonces por dónde creen que la recta de esta función vaya a atravesar el eje y?
>
> Ao 10: Por el origen
>
> Ao: 2: Por el cero
>
> Mtra.: Muy bien, en efecto, va a cruzar la coordenada (0,0) es decir, el origen. La función planteada es correcta, solo que cuando b vale 0, no se pone nada, se sobreentiende que es 0. Por tanto, la función quedaría de la forma $y = mx$, en esta forma también se puede ver a una función lineal. Pueden escribir la función como $y = 1.5x + 0$ o $y = 1.5x$

En el diálogo anterior, puede notarse que se continuó realizando tratamiento en el registro gráfico, y para favorecer la comprensión, se da sentido a la conversión al registro algebraico.

Luego, el grupo completo realizó la conversión del registro tabular al gráfico exitosamente (véase Figura 39). Es de reconocerse el avance que tuvieron, pues cabe recordar que, en la prueba diagnóstica, los estudiantes mostraron confusión al identificar cada uno de los ejes, construían figuras o gráficas de barras, entre otras dificultades al trabajar con el plano cartesiano.

Figura 39.
Ejemplo de la conversión del registro tabular al gráfico



Actividad de cierre. Para realizar tratamiento al registro gráfico, se propusieron las siguientes preguntas:

a) A partir de la gráfica de la función ¿puede saberse el crecimiento de los girasoles en cualquier día?
b) Utilizando la gráfica ¿Qué tendría que hacerse para saber el crecimiento de la planta a los 18 días?
c) Utilizando la gráfica ¿Qué tendría que hacerse para saber en qué día la planta tendrá una altura de 28 cm?

Al leer la primera pregunta, el grupo sin dudarlo y pensarlo afirmaron que era posible conocer el crecimiento del girasol a partir de la gráfica.

Mtra.: Si dicen que es posible, ¿cómo contestarían la segunda pregunta?

Ao 5: Pues sustituimos el valor en la función

Mtra.: Si, pero la pregunta dice a partir de la gráfica, no de la función.

Ao 9: ¡yo!

Mtra.: Pase por favor a explicarnos al pizarrón. Por favor todos vayan haciendo lo mismo que su compañero

Ao 9: (pasa al pizarrón donde se está proyectando la gráfica) ¡Ah! ubicamos el día 18 en la gráfica, vemos a donde llega (apunta a la recta) y vemos a que altura llegó (desliza su dedo hacia el eje y)

Aos (todos): ¡Es 27!

Mtra.: ¿y si quisiéramos ahora saber la altura a los 21 días? Prolonguen su recta, háganla más grande con ayuda de una regla.

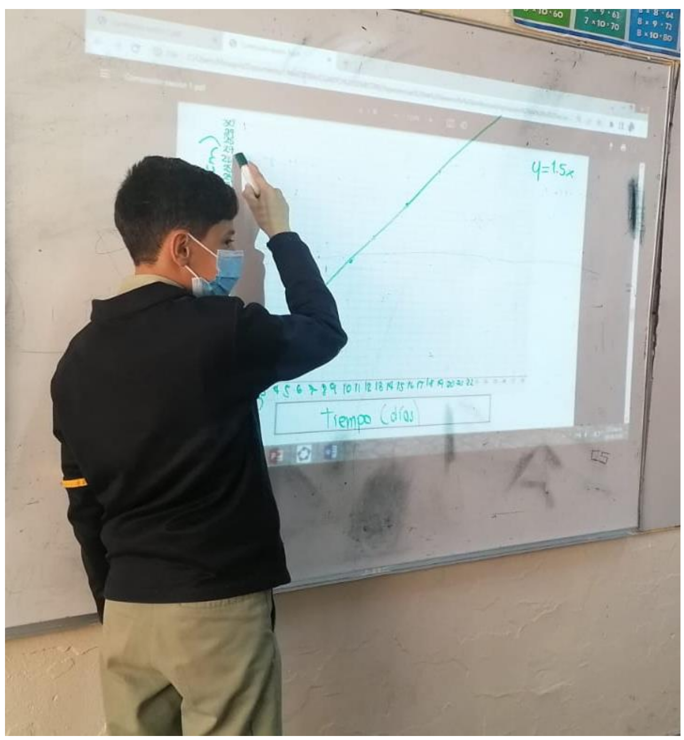
Ao 6: 31.5 mediría.

Mtra.: y la tercera pregunta ¿Cómo la contestarían?

Ao 4: Pues se hace lo mismo, pero ahora al revés, ahora ubicamos la altura de 28 cm y vemos en que día cae

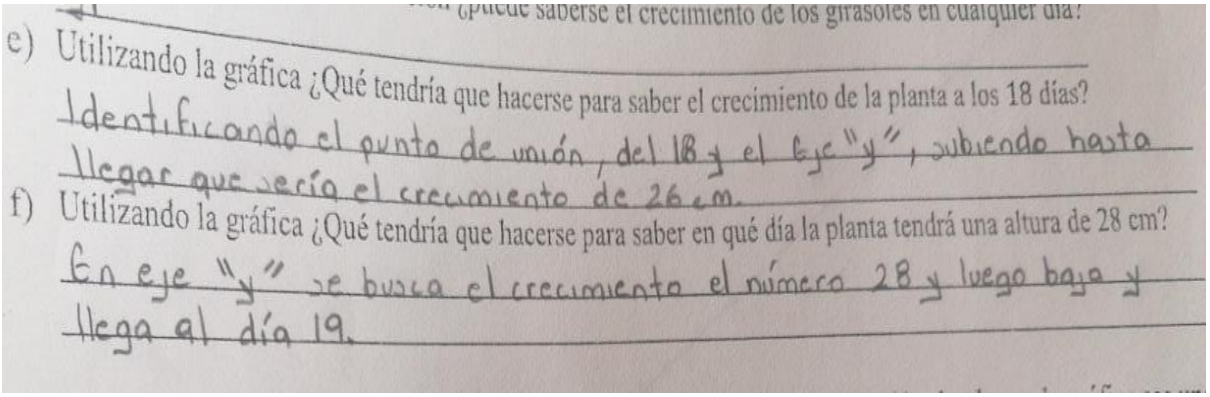
Es importante analizar el hecho de que los estudiantes están leyendo su gráfica (véase Figura 40), aspecto que en muchas pocas ocasiones los maestros no toman cuenta, llevan a los estudiantes a pasar de un registro a otro, pero pocas veces se detienen a interpretar cada registro. Con esta acción, se abona en gran medida al objetivo central de esta secuencia, que es el propiciar comprensión.

Figura 40.
Alumno explicando a sus compañeros como leer el registro gráfico



Después de la explicación de su compañero, los estudiantes con sus propias palabras escriben como leer la gráfica (véase Figura 41).

Figura 41.
Ejemplo de la explicación de una estudiante acerca de cómo se lee el registro gráfico

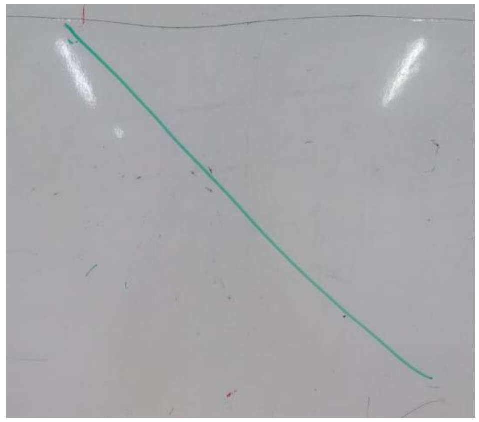


Para continuar analizando la gráfica, se realizan las siguientes preguntas:

a) Analizando la situación inicial que plantea el problema ¿Cómo se interpreta el hecho de que la gráfica sea una recta que sube por la derecha?
b) ¿Cómo se interpretará la situación si la gráfica fuera una recta horizontal?

Ao 1: La gráfica sube por la derecha porque cada día los girasoles están creciendo
Ao 3: que va ascendiendo, porque los girasoles crecen hacia arriba
Ao 13.: Que cada día los girasoles crecen 1.5 cm y eso es lo que va aumentado
Mtra.: ¡Muy bien! La gráfica nos ayuda a entender que los girasoles van creciendo y siempre lo mismo. Oigan y ¿Cómo sería la recta si en lugar de que los girasoles fueran creciendo, fueran encogiendo?
Ao 7: Pues al revés
Mtra.: A ver pase a dibujar como cree usted que se vería la recta
Ao 7: Yo pienso que así (véase Figura 42)
Mtra.: ¿Están de acuerdo?
Aos (todos): ¡Sí!
Mtra.: Así es, se percibe como va disminuyendo, más adelante trabajaremos con la recta decreciente. Chicos y ¿qué contestaron en la última pregunta? Para que entiendan mejor, les mostraré la gráfica (mediante GeoGebra la maestra muestra una gráfica correspondiente a una función constante)
Ao 5: Que nunca crece
Ao 9: Que no aumenta ni disminuye
Ao 7: Que no pasan los días
Ao 1: No si pasan
Mtra.: Si mire (señala el eje x), estos serían los días y si van transcurriendo
Ao 4: Lo que no aumenta ni disminuye es el tamaño
Ao 10: Yo creo son girasoles de plástico, esos ya no crecen.

Figura 42.
Trazo de una recta que utiliza una estudiante para explicar el comportamiento si los girasoles fueran disminuyendo su tamaño.



Además de que los estudiantes lograron leer su gráfica, con este fragmento de diálogo tomado de la clase, se demuestra que también logran identificar las características de la pendiente en la gráfica y por consiguiente realizar tratamiento en este registro e inclusive asociarlas a situaciones de la vida diaria, como el alumno que relaciona el comportamiento constante con flores artificiales. Para incrementar el conocimiento de los estudiantes, la maestra pega sobre la pared, una lámina sobre las funciones crecientes, decrecientes y constantes, considerando el valor de m para cada una de ellas. De esta manera es como se llevó a cabo el tratamiento del registro gráfico.

4.1.4 Sesión 4

En las actividades realizadas en las sesiones anteriores siempre se les dio la oportunidad de trabajar a los estudiantes de manera individual y posteriormente constatar sus respuestas con sus demás compañeros. Así que para tener mayor certeza de las conversiones posibles que los estudiantes podían lograr, se propuso una sesión 4, la cual fue realizada en casa, cuya intención didáctica fue que los estudiantes, a partir del registro verbal, realizaran las conversiones pertinentes para formar el registro tabular, gráfico y algebraico.

En la

Tabla ***11***, se exponen los tratamientos y conversiones planeados para esta sesión con sus respectivas características y material.

Tabla 11.
Conversiones y tratamientos realizados en la sesión 4

Ítem	*Tratamientos y conversiones*	*Características*	*Material utilizado*
4.1.1	TRV	Identificación de variables	Hoja de trabajo
4.1.2		Resolución de problema	
4.2	RV-RT	Completar datos de la tabla con respeto a la información proporcionada	Hoja de trabajo
4.2	RT-RG	Identificación de datos brindados en el problema en la gráfica por medio de coordenadas	
4.3	RV-RA	Identificación y relación algebraica entre ambas variables	Hoja de trabajo
4.4	TRA	Sustitución de valores	

Actividad de inicio. Comienza la clase con la actividad número 4 que a continuación se enuncia.

Actividad 4: Lean el siguiente problema y contesten lo que se les pide, al final compartan sus resultados con el resto del grupo:

Los agricultores, que se dedican a la venta de los girasoles, deciden aumentar su producción rociando el campo de girasoles con un fertilizante que hará crezcan más rápido. Al inicio del experimento, los girasoles tenían una altura de 12 cm, se les roció el fertilizante, y al cabo de tres días se han percatado que ya medían 19.5 cm.

1. *¿Cuáles son las variables que intervienen en este problema? ¿cuál es la dependiente e independiente?*
   ____
   ____

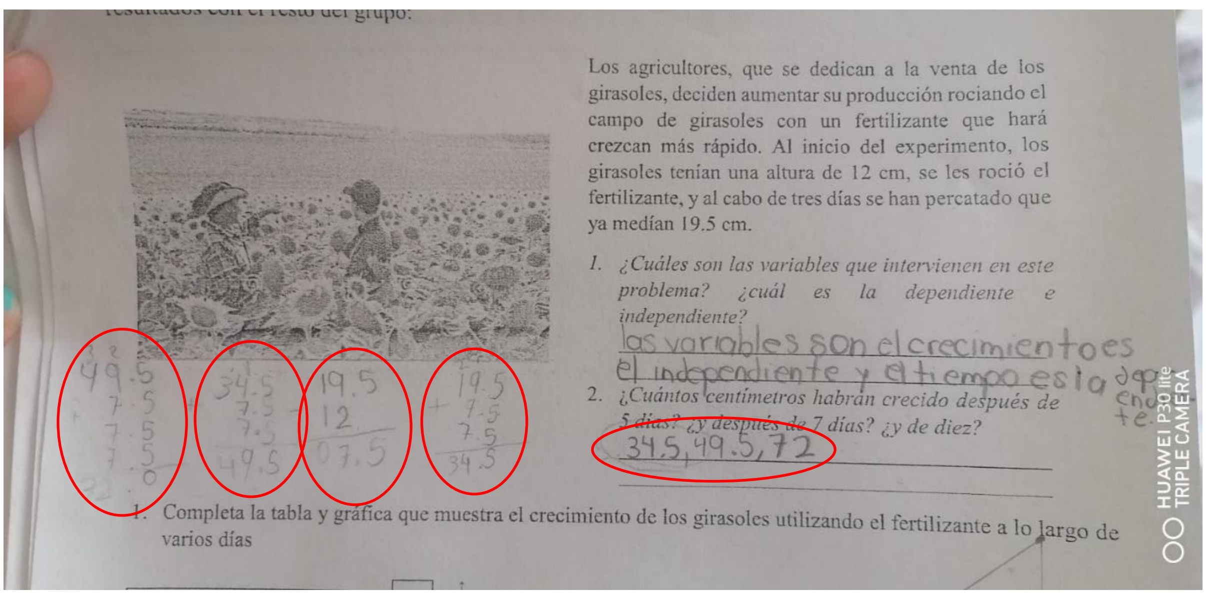
2. *¿Cuántos centímetros habrán crecido después de 5 días? ¿y después de 7 días? ¿y de diez?*
   ____
   ____

Como puede observarse, lo primero que el problema solicita es encontrar la variable dependiente e independiente que en él intervienen, ante lo cual 13 estudiantes logran distinguir que la variable dependiente es el crecimiento de los girasoles y que la variable independiente son los días. De los otros cinco estudiantes, dos no contestaron nada, un estudiante involucra el fertilizante como variable dependiente y el resto de los estudiantes, escribe correctamente ambas variables, sin embargo, no explica cuál es la dependiente e independiente.

Ante estos resultados, puede clasificarse como una capacidad el hecho de distinguir del registro verbal, las variables que intervienen en él.

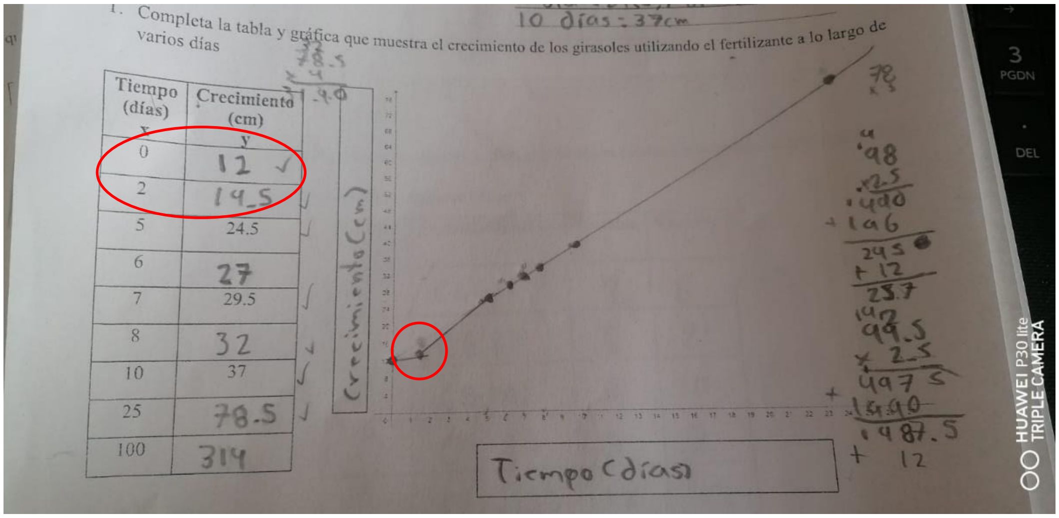
En cuanto a la segunda pregunta que pide el crecimiento de los girasoles en diversos días, debe mencionarse que surgieron algunas dificultades en su resolución. Una de ellas, surgida en 7 estudiantes, es que obtuvieron la diferencia de lo que creció el girasol en tres días tras aplicar el fertilizante con respecto a la altura que tenían antes de aplicarlo, dicha diferencia fue de 7.5 y este valor lo tomaron como si fuera el correspondiente a lo que crece el girasol en un día, por tanto, lo fueron multiplicando por los días solicitados (véase Figura 43).

Figura 43.
Error al resolver el problema de la actividad 4, al considerar equívocamente lo que crecen los girasoles diariamente



Actividad de desarrollo. Otra dificultad identificada es que algunos estudiantes, consideran únicamente el valor constante que existe entre cada uno de los valores de la variable independiente, sin contemplar los valores que se le den a la variable dependiente (véase Figura 44) en ella puede identificarse que el alumno no considera que del día cero, se brinca del día 1 al día 2, por tanto, tendría una altura de 17 y no de 14.5.

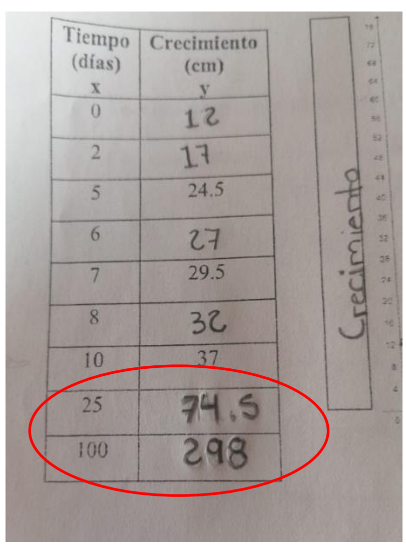
Figura 44.
Dificultad presentada en un estudiante, al no considerar a la variable independiente para obtener los valores de la variable dependiente y como consecuencia, colocación errónea de la coordenada.



También puede identificarse que trataron de aplicar la proporcionalidad, en la

Figura 45, además, se observa que para 25 días el crecimiento será de 74.5 cm. El estudiante hace la relación, 25 multiplicado por 4, nos da 100, por lo tanto, para calcular el crecimiento a los 100 días, multiplica los 74.5 cm por 4, pero sigue sin considerar el crecimiento que ya tenían los girasoles antes de aplicar el fertilizante.

Figura 45.
Dificultad presentada al aplicar proporcionalidad directa, sin contemplar que antes de la aplicación del fertilizante los girasoles ya tenían una altura de 12 cm.



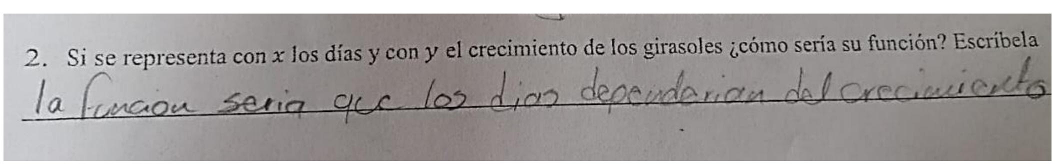
En cuanto al registro gráfico, los estudiantes siguen demostrando progreso en el uso del plano cartesiano, sin embargo, los valores erróneos contenidos en la tabla, anteriormente descritos, fueron los causantes de que graficaran incorrectamente, remítase a Figura 44.

Actividad de cierre. En lo que respecta a la conversión al registro algebraico, se obtuvieron cuatro diferentes funciones, la primera de ellas $y = 2.5x + 12$ la cual es la correcta y se relaciona con las operaciones que realizaron los alumnos para llenar su tabla; la segunda función fue $y = 7.5x + 12$, la cual es errónea pues tomaron los 7.5 cm como aquella medida que crecían diariamente los girasoles cuando en realidad indican los centímetros alcanzados en tres días; la tercera función $y = 2.5x$ indica que solo se consideraron los centímetros que crece el girasol diariamente pero omitieron la altura que tenían antes de aplicarse el fertilizante; por último, la cuarta función $y = 12x + 2.5$ significa que se ordenó incorrectamente los valores, aun no hay noción de que el coeficiente de x es aquel valor constante, es decir, la medida que crecen los girasoles diariamente.

De las anteriores funciones que propusieron los estudiantes, es importante recalcar que, a pesar de algunas son incorrectas por resolver inadecuadamente el problema, se puede identificar un logro, los estudiantes están realizando correctamente la conversión del registro verbal al algebraico. Ahora lo importante, sería trabajar en la comprensión de los problemas.

Además de proponer estas cuatro diferentes funciones, hubo aquellos estudiantes que no comprendieron la pregunta, seguramente por el cambio de lenguaje utilizado por la docente, a veces decía expresión algebraica y en otras ocasiones función, ante lo cual los estudiantes mencionan respuestas como las que se muestran en la Figura 46. Para visualizar la cantidad de estudiantes que se mantuvo en cada respuesta, véase la Tabla ***12***.

Figura 46.
Dificultad presentada para expresar la función correspondiente al crecimiento de los girasoles una vez que se les aplicó el fertilizante


2. Si se representa con x los días y con y el crecimiento de los girasoles ¿cómo sería su función? Escríbela

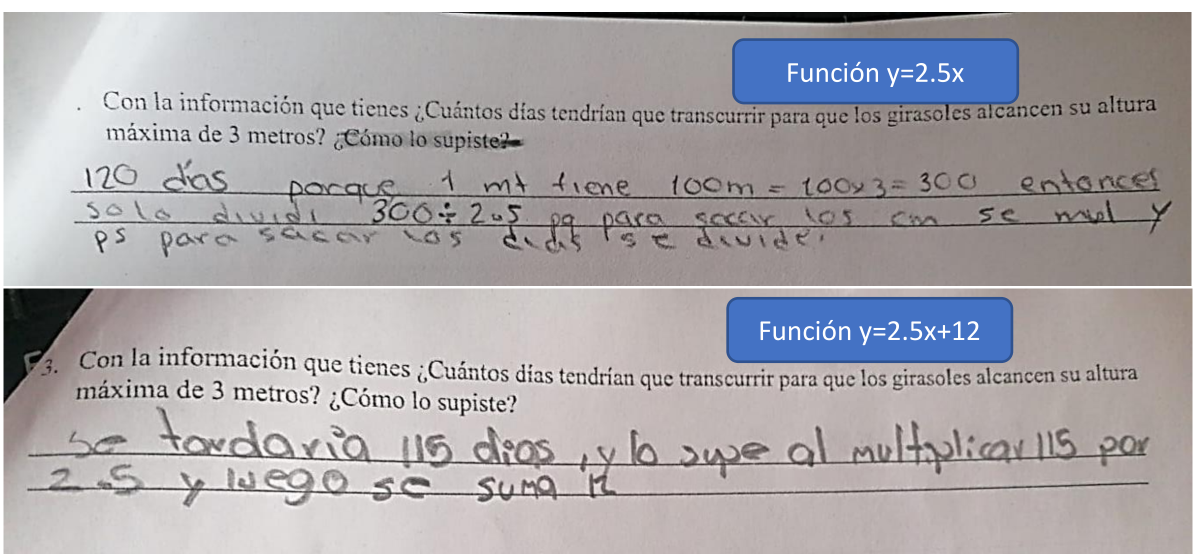
la funcion seria que los dias dependerian del crecimiento

Tabla 12.
Resultados obtenidos de la conversión al registro algebraico

	Función y=2.5x+12	Función y=7.5x+12	Función y=2.5x	Función y=12x+2.5	No comprendieron la pregunta	No contestaron
Total de alumnos	8	1	2	1	3	3

Por último, se pidió a los estudiantes dar respuesta a la pregunta: ¿Cuantos días tendrían que transcurrir para que los girasoles alcancen su altura máxima de tres metros? Para lo cual, los estudiantes utilizaron la función que crearon y fueron buscando números al azar, hasta que alguno se acercara a los 300 centímetros que representa los tres metros. En la Figura 47, el primer procedimiento es incorrecto pues la función no corresponde al problema, sin embargo, resulta importante que de manera aritmética se está haciendo un despeje de la variable independiente (días). Por otro lado, en el procedimiento 2, los días fueron calculados por ensayo y error, multiplicando este valor por 2.5 y luego sumándole 12.

Figura 47.
Procedimientos que siguieron dos estudiantes para encontrar en que día los girasoles alcanzarían su altura máxima, ambos utilizaron la función que relacionaron con el problema.



4.1.5 Sesión 5

La intención didáctica de esta sesión es que los estudiantes a partir del registro gráfico, realicen conversiones al registro tabular y verbal. Así como también tratamiento en los registros gráfico y algebraico.

En la Tabla 13, se exponen los tratamientos y conversiones planeados para esta sesión con sus respectivas características y materiales.

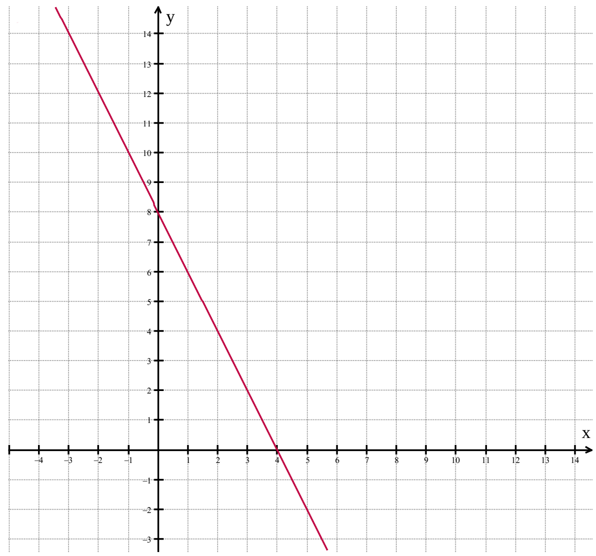
Tabla 13.
Conversiones y tratamientos de la sesión 5.

Ítem	Tratamientos y conversiones	Características	Material utilizado
5.1	TRG	Recta creciente y decreciente	Hojas de trabajo
5.1.a 5.1.b	RG – RT	Dada una gráfica, los estudiantes eligen las coordenadas de 5 puntos. Relación de las coordenadas con el llenado del registro tabular.	Hojas de trabajo
5.1.c	RG – RV	Escritura de un problema dado el registro gráfico	Hoja de trabajo
5.1.d	TRV	Identificación de las variables dependiente e independiente	Hoja de trabajo
5.1.e	TRA	Escritura de las características del registro algebraico	Hoja de trabajo

La anterior intención didáctica, no contempla la conversión del registro gráfico al algebraico, puesto que los estudiantes de secundaria no trabajan con la fórmula para encontrar la pendiente de una recta, ni su cálculo de forma geométrica. Por tanto, al realizar la secuencia didáctica, se creyó que los estudiantes no serían capaces de realizar tal conversión, sin embargo, en la práctica demostraron lo contrario. Más adelante se explicará cómo se llevó a cabo esta conversión.

Actividad de apertura. La clase comenzó entregando la hoja de trabajo que contenía la actividad 5, la cual comenzaba por mostrar a los estudiantes la gráfica de una función decreciente.

Actividad 5: Revisa la siguiente gráfica y a partir de ella realiza lo que se te pide.



Mtra.: ¿Qué diferencia encuentran entre esta gráfica y las que hemos trabajado anteriormente?

Ao 1: Que la recta está al otro lado
Mtra.: ¿y a qué creen que se deba?
Ao 8: ¿A que está bajando?
Mtra.: Si, ¿se acuerdan del ejemplo que les di de los girasoles? ¿Cómo sería la recta si en lugar de crecer disminuyeran su tamaño? ¿Con qué otra situación podríamos relacionar esta recta?
Ao 2: Los casos de Covid
Ao 5: La comida en el receso
Ao 12: Las estaturas, los viejitos se hacen chiquitos
Ao 3: El sol va bajando
Ao 13: La temperatura en los lugares fríos
Ao 4: El valor de un auto con los años
Ao 6: las rebajas
Ao 10: Un elevador
Mtra.: ¡Muy bien! Preparen cada quien una situación, porque lo van a necesitar en un rato mas

Luego se les pidió a los estudiantes proseguir con el inciso a) y b) de la actividad, los cuales consisten en lo siguiente:

a) Localiza cinco puntos que estén sobre la gráfica, márcalos con colores y nómbralos con las letras A, B, C, D y E.
b) Con estos puntos, completa la siguiente tabla:

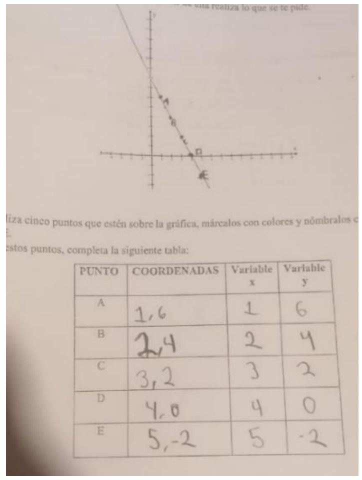
PUNTO	**COORDENADAS**	**Variable x**	**Variable Y**
A			
B			
C			
D			
E			

Con esta parte de la actividad, se pretende que los estudiantes realicen la conversión del registro gráfico al tabular, así como también realicen tratamiento en el registro verbal, pues están repasando que las coordenadas es la correspondencia entre los valores de una tabla y viceversa.

De esta conversión, los dieciocho estudiantes logran realizarlo con éxito (véase lores a un punto sobre la recta, aun así se logró el objetivo de transitar del registro gráfico al tabular.

Figura 48), cabe mencionar que para hacerlo surgieron dificultades no relacionadas con el contenido, sino debido a la calidad de la impresión de la hoja de trabajo, ya que la cuadricula del plano cartesiano se visualizaba de manera muy tenue, y los estudiantes tendían a equivocarse al asignar valores a un punto sobre la recta, aun así se logró el objetivo de transitar del registro gráfico al tabular.

Figura 48.
Ejemplo de la conversión del registro gráfico al tabular



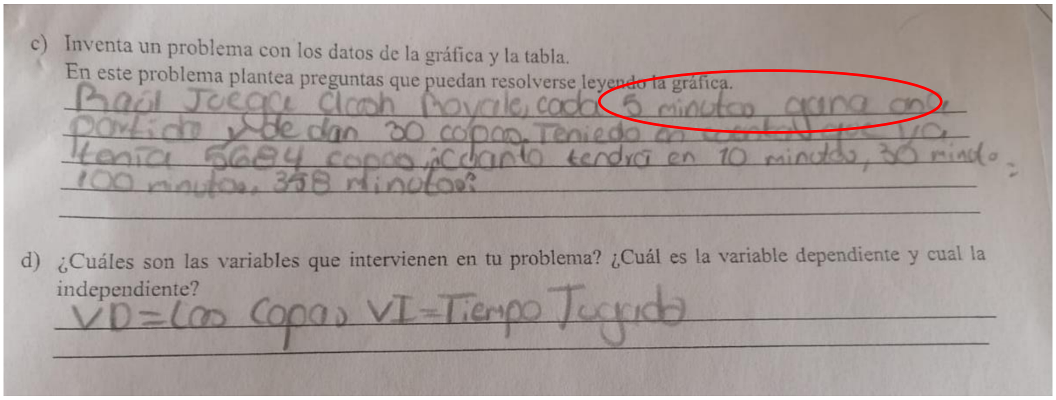
Con respecto al tratamiento en el registro tabular, solo dos estudiantes presentaron confusión en distinguir a partir de la coordenada, cuál era la variable x y cual la variable y. Si se realiza una comparación de la actividad diagnostica con la evidencia obtenida de esta secuencia didáctica, se puede obtener un gran progreso, desde la identificación correcta de los ejes del plano cartesiano hasta el escribir correctamente una coordenada y éstas relacionarlas con la variable dependiente e independiente de un problema.

Actividad de desarrollo. Posteriormente, se les da la indicación a los estudiantes de proseguir con el inciso c) de la actividad, el cual solicita inventarse un problema relacionando los valores de la gráfica.

Las respuestas de los estudiantes con respecto a esta conversión del registro gráfico al verbal, pueden clasificarse en cuatro tipos:

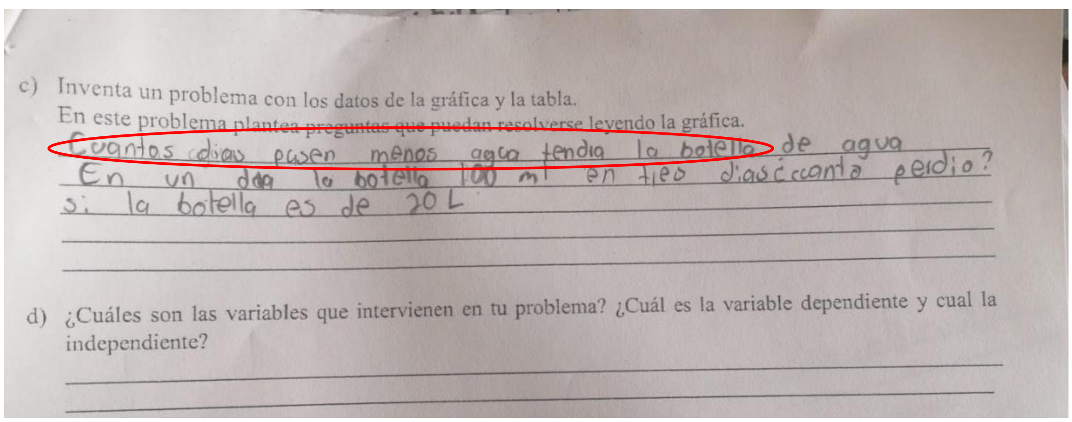
A) Algunos estudiantes no formulan problemas decrecientes ni tampoco asocian los datos a la gráfica, tal como se muestra en la Figura 49.

Figura 49.
Dificultad para redactar situaciones decrecientes y asociar los datos a los valores de la gráfica.



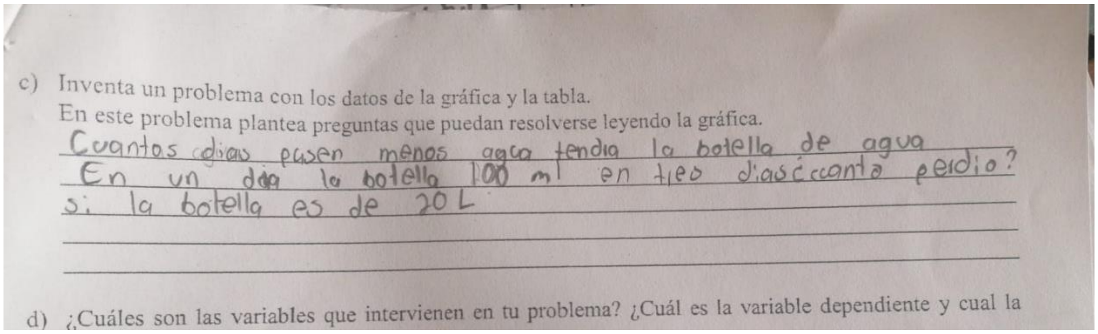
B) Otros estudiantes logran encontrar situaciones que, en efecto, decrecen, sin embargo, no utilizan los valores proporcionados por la gráfica (véase la Figura 50)

Figura 50.
Dificultad presentada para incorporar al problema los datos obtenidos de la gráfica



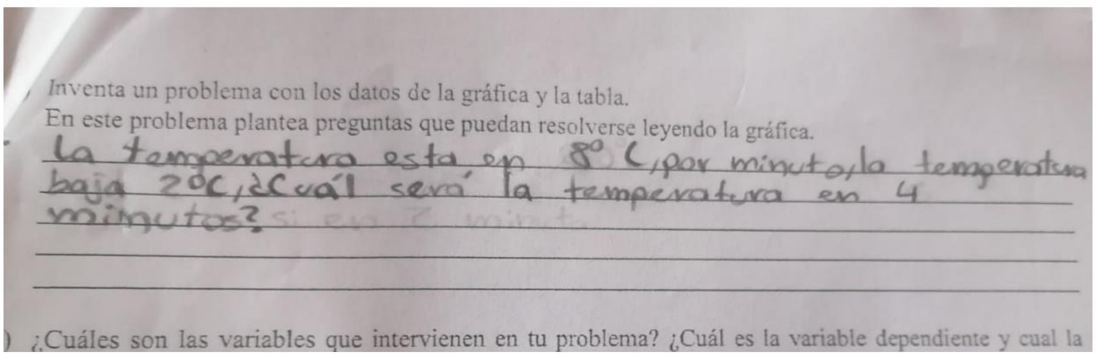
C) Algunos alumnos formulan una situación decreciente e incorporan los datos proporcionados por la gráfica, sin embargo, al problema le faltan algunos datos para poder ser contestados. Por ejemplo, en el problema que se muestra en la Figura 51, faltó mencionar en qué día el tinaco tenía 8 litros de agua, lo mismo con el problema de la Figura 52, no se menciona en qué minuto la temperatura es de 8°C.

Figura 51.
Dificultad para incorporar los datos necesarios a un problema para su resolución


c) Inventa un problema con los datos de la gráfica y la tabla.
En este problema plantea preguntas que puedan resolverse leyendo la gráfica.
Cuantos dias pasen menos agua tendria la botella de agua
En un dia la botella 100 ml en tieo diasccanta perdio?
si la botella es de 20 L

d) ¿Cuáles son las variables que intervienen en tu problema? ¿Cuál es la variable dependiente y cual la

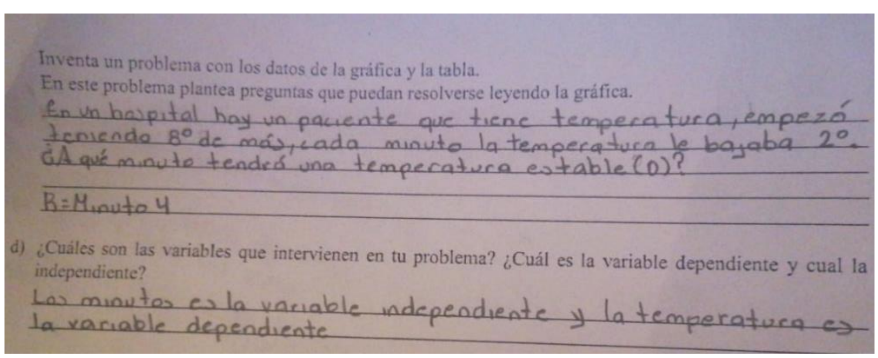
Figura 52.
Dificultad para incorporar al registro verbal los datos necesarios para su resolución


Inventa un problema con los datos de la gráfica y la tabla.
En este problema plantea preguntas que puedan resolverse leyendo la gráfica.
La temperatura esta en 8° C, por minuto, la temperatura baja 2°C, ¿Cuál será la temperatura en 4 minutos?

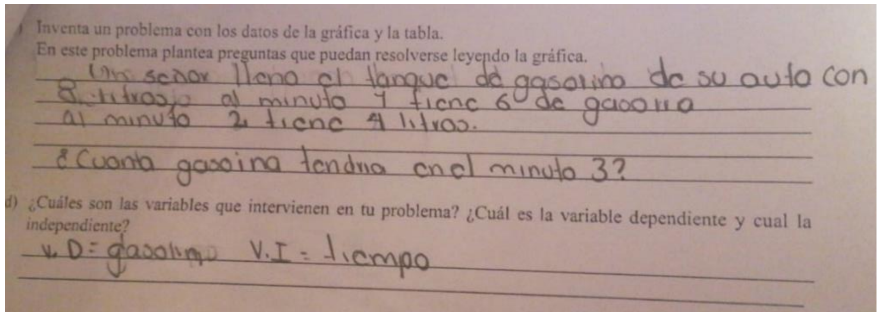
) ¿Cuáles son las variables que intervienen en tu problema? ¿Cuál es la variable dependiente y cual la

D) Logran plantear un problema que utiliza los datos proporcionados de la gráfica, es congruente, puede darse solución a éste y se identifica la relación entre una variable dependiente e independiente, algunos ejemplos se muestran en la Figura 53.

Figura 53.
Problemas planteados por los estudiantes utilizando situaciones decrecientes y los datos contenidos en la gráfica.

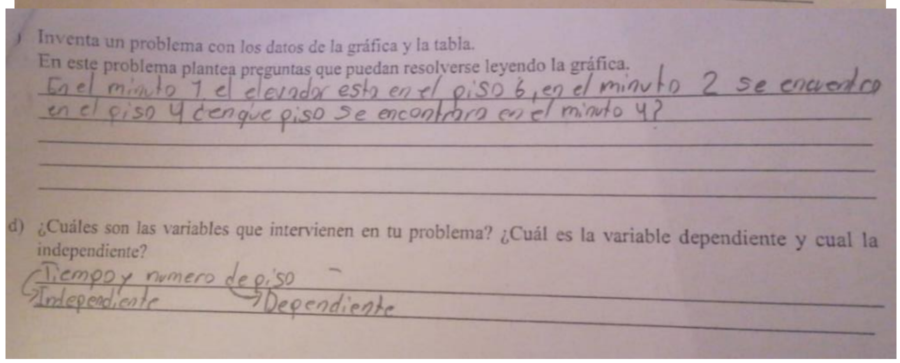

Inventa un problema con los datos de la gráfica y la tabla.
En este problema plantea preguntas que puedan resolverse leyendo la gráfica.
En un hospital hay un paciente que tiene temperatura, empezó teniendo 8° de más, cada minuto la temperatura le bajaba 2°.
¿A qué minuto tendrá una temperatura estable (0)?
R= Minuto 4

d) ¿Cuáles son las variables que intervienen en tu problema? ¿Cuál es la variable dependiente y cual la independiente?
Los minutos es la variable independiente y la temperatura es la variable dependiente



Inventa un problema con los datos de la gráfica y la tabla.
En este problema plantea preguntas que puedan resolverse leyendo la gráfica.
Un señor llena el tanque de gasolina de su auto con 8 litros al minuto 1 tiene 6 de gasolina al minuto 2 tiene 4 litros.
¿Cuanta gasoina tendria en el minuto 3?

d) ¿Cuáles son las variables que intervienen en tu problema? ¿Cuál es la variable dependiente y cual la independiente?
V.D = gasolina V.I = tiempo



Inventa un problema con los datos de la gráfica y la tabla.
En este problema plantea preguntas que puedan resolverse leyendo la gráfica.
En el minuto 1 el elevador esta en el piso 6, en el minuto 2 se encuentra en el piso 4 ¿en que piso se encontrara en el minuto 4?

d) ¿Cuáles son las variables que intervienen en tu problema? ¿Cuál es la variable dependiente y cual la independiente?
Tiempo y numero de piso
Independiente Dependiente

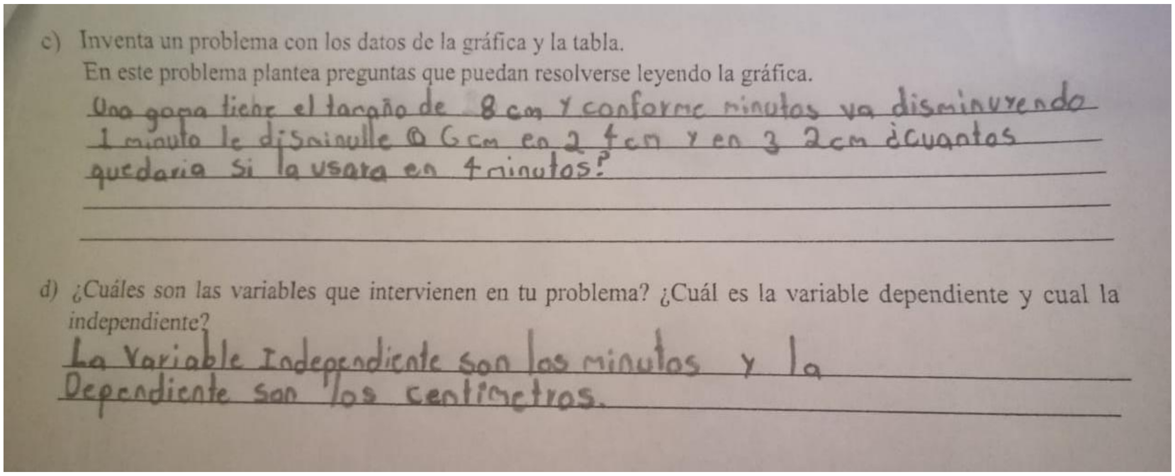
En la Tabla 14, se muestra la relación de estudiantes que estuvieron en cada tipo de planteamiento del problema que se menciona anteriormente.

Tabla 14.
Relación de las respuestas de los estudiantes, de acuerdo a los cuatro tipos de planteamientos presentados.

	Respuesta del tipo A	Respuesta del tipo B	Respuesta del tipo C	Respuesta del tipo D
Cantidad de alumnos	2	4	3	9
TOTAL		18		

Dado que una notable mayoría, logra crear un problema involucrando ambas variables y los datos proporcionados por la gráfica, la conversión del registro gráfico al verbal se considera una capacidad lograda por los estudiantes. Es importante mencionar que se debe trabajar con los estudiantes situaciones en las que ambas variables decrezcan de forma lineal en la vida diaria, pues algunos estudiantes escriben problemas que en la vida real no tienen un comportamiento lineal, como es el caso del desgaste de un borrador (véase Figura 54).

Figura 54.
Situación decreciente que involucra un comportamiento no lineal en la vida cotidiana.


c) Inventa un problema con los datos de la gráfica y la tabla.
En este problema plantea preguntas que puedan resolverse leyendo la gráfica.
Una goma tiene el tamaño de 8 cm y conforme minutos va disminuyendo 1 minuto le disminulle 6 cm en 2 4cm y en 3 2cm ¿cuantos quedaria si la usara en 4 minutos?

d) ¿Cuáles son las variables que intervienen en tu problema? ¿Cuál es la variable dependiente y cual la independiente?
La Variable Independiente son los minutos y la Dependiente son los centimetros.

Actividad de cierre. Para terminar con la secuencia didáctica, se pretendía que los estudiantes realizaran tratamiento en el registro algebraico, tomando en cuenta las características de la gráfica. No se planeó una conversión del registro gráfico al registro algebraico, puesto que los estudiantes de primer grado de secundaria no trabajan con la fórmula para determinar cuánto mide la pendiente, solo se trabajan nociones de ésta, como se ha hecho evidente en el transcurso del análisis de esta secuencia.

Para lograr el fin anterior, se añadió el siguiente inciso, en el cual solo se pide a los estudiantes que escriban características de la recta, por ejemplo, como es su pendiente y a partir de la intersección de la recta con el eje y, pueden encontrar el valor de b.

c) Escribe características importantes para crear una expresión mediante la cual puedas encontrar el valor de "y" dado cualquier valor de "x".

Apóyate de los siguientes datos:

¿Qué características tiene la recta? ________________________________

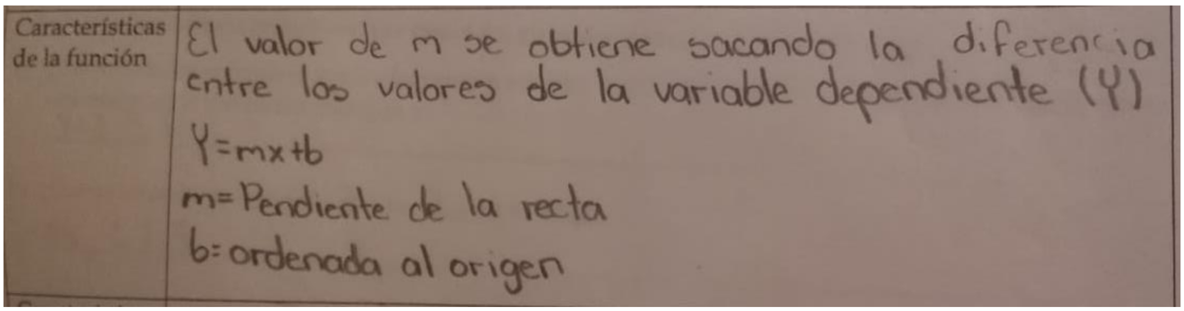
¿Cuál es la ordenada al origen? _____________ ¿cuál es el valor de b? __________

Mtra.: Hay una fórmula para encontrar la pendiente de la recta, es decir el valor de m, sin embargo, de acuerdo a los programas de estudio, no se trabaja en primero, así que solo escribiremos características de cómo es, si es pequeña o grande, si se acerca al eje y o al eje x, etc.

Ao 5.: Mtra. pero ¿no podemos sacar diferencias?

Con la pregunta realizada por el estudiante, le hizo ver a la maestra que eran capaces de encontrar la pendiente de la recta, quizá no era posible hacerlo desde el registro gráfico, pero si desde el registro tabular. Como se mencionó anteriormente, en la sesión dos, los estudiantes encontraron que la primera diferencia entre los valores de la variable dependiente y el valor de m de la forma estándar de una función lineal eran el mismo valor. Los estudiantes ya tenían estos apuntes en su hoja de trabajo número 4, donde registraban todas las características de cada uno de los registros (véase Figura 55)

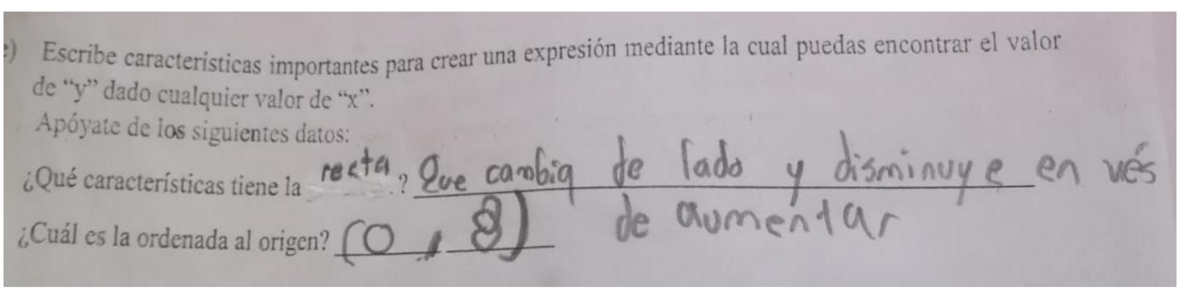
Figura 55.
Apuntes sobre las características del registro algebraico.


Características de la función

El valor de m se obtiene sacando la diferencia entre los valores de la variable dependiente (Y)
Y=mx+b
m= Pendiente de la recta
b: ordenada al origen

Ante el comentario del estudiante, la maestra dejo que por sí mismos contestaran las dos preguntas, a las cuales, los estudiantes escriben como características de la recta que va bajando, que va disminuyendo, que se encuentra hacia el otro lado, que por la posición en que se encuentra tiene una pendiente pequeña; además logran escribir la coordenada en la que la recta intercepta al eje y (véase la Figura 56).

Figura 56.
Descripción de las características de la recta, de acuerdo con un estudiante


Escribe características importantes para crear una expresión mediante la cual puedas encontrar el valor de "y" dado cualquier valor de "x".
Apóyate de los siguientes datos:
¿Qué características tiene la recta? Que cambia de lado y disminuye en vés de aumentar
¿Cuál es la ordenada al origen? (0 , 8)

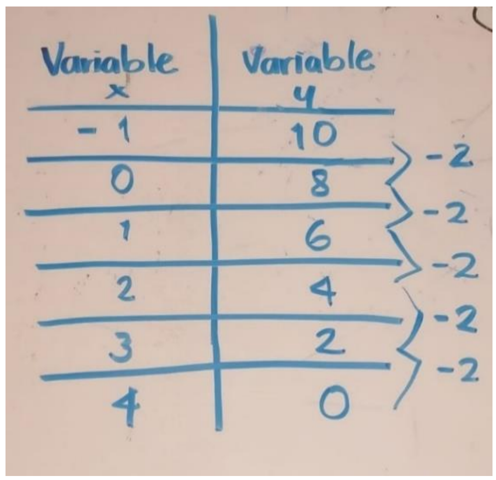
Posterior a que los estudiantes terminaron de contestar dichas preguntas, la maestra realizó las siguientes preguntas, las cuales encaminan a realizar una conversión del registro tabular al algebraico y es importante mencionar que no estaba contemplado en la planeación.

Mtra.: ¿Cuál es la diferencia entre los valores de la variable dependiente?

Aos (todos): (Se quedan pensando, ya que los cinco puntos sobre la recta los pusieron al azar, sin un orden)

Mtra.: A ver para poder encontrar las diferencias, vamos a ordenar los valores, haciendo una tabla aquí en el pizarrón, será la misma que ustedes hicieron, solo que quizá algunos valores coincidan y otros ustedes no los tengan, pero todo será sacado de la gráfica. (la maestra realiza la tabla que se muestra en la Figura 57 con ayuda de los estudiantes)

Figura 57.
Obtención de las diferencias constantes del registro tabular



Mtra. ¿Cuál es la diferencia de 8 a 10?

Ao 9: Dos

Mtra.: ¡No! La diferencia de 10 a 8 si es dos, pero recuerden que, para sacar diferencias, al segundo término le restamos el primero y así sucesivamente…

Ao 2: Es menos dos

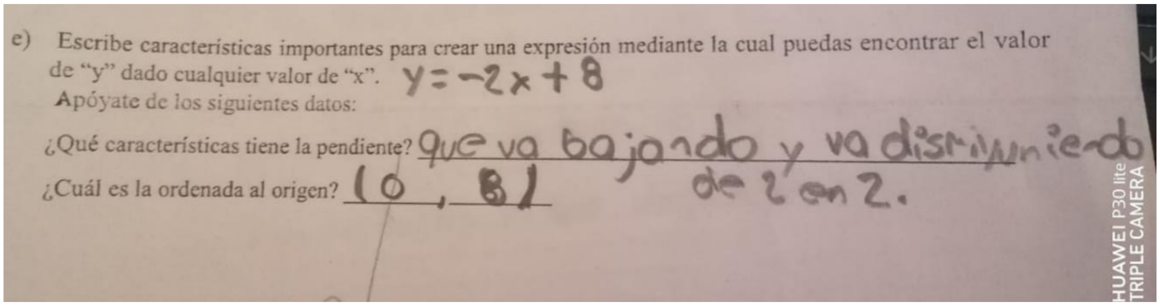
Mtra.: ¿y de 6 a 8?

Ao (todos): ¡menos dos!

Mtra.: ¿Recuerdan la forma en que podíamos obtener el valor de m y b de la forma estándar de una función lineal? Si lo recuerdan, van a poder crear la expresión algebraica de este problema, si logran descifrar cual es, anótenla abajito de las dos preguntas.

Esta conversión, es decir, del registro tabular y gráfico al algebraico, lograron realizarla 7 estudiantes de los 18 que son, por tanto, no se puede considerar una capacidad, pero sin duda, se puede seguir trabajando con ello, y lograr que, en su mayoría, puedan realizar con éxito esta conversión. En la Figura 58, se observa la función formulada por los estudiantes.

Figura 58.
Función formulada por los estudiantes, tras realizar la conversión del registro tabular y gráfico



Y con esta actividad se concluye la fase de experimentación de este trabajo.

4.2 Resultados de la experimentación

Ha llegado el momento de mostrar los resultados obtenidos en cada uno de los análisis de las sesiones de la secuencia didáctica. Para su presentación, se realizan en tres sentidos: capacidades y dificultades encontradas, selección de actividades y niveles de comprensión alcanzados.

De manera general, se ha encontrado que en la secuencia didáctica se favoreció la conversión del registro verbal hacia los demás registros, pues tanto en la sesión 1 y 4 se considera la misma intención didáctica. Es posible que esta decisión tenga efectos favorables en la facilidad que tuvieron los estudiantes al trabajar con estas conversiones.

4.2.1 De las capacidades y dificultades

Para mostrar los resultados obtenidos en cada una de las sesiones, es necesario mencionar que surgieron algunas dificultades y capacidades que no se relacionan con la intención didáctica, sin embargo, los alumnos produjeron algunos cambios en las conversiones. Así como también, mencionar que en las primeras sesiones surgieron algunas dificultades que más tarde se convirtieron en capacidades.

Sesión 1. La intención didáctica de esta primera sesión fue que los estudiantes realizaran tratamiento en el registro verbal de una función lineal, específicamente que identificaran las variables que intervienen y cual dependía de la otra.

Es imprescindible mencionar, que la función lineal se define a partir de cada una de sus representaciones, por ello, al realizar este tratamiento, los estudiantes estarán comprendiendo una parte de este objeto matemático.

A partir de esta intención didáctica, se puede concluir que, del total de los estudiantes, un 33.3% logró identificar variable independiente y dependiente a partir de una situación que ellos mismos escribieron; un 38.8% logró escribir una situación que relaciona ambas variables, pero no las identifican; mientras que un 16.6% escribió una situación errónea y el otro 16.6% optó por no contestar, seguramente porque existían dudas.

También se reconoce que solo se consideraron situaciones relacionadas a una función lineal creciente y las decrecientes se abordaron posteriormente. Por tal motivo, al hacer el análisis no se identifica el momento en que los estudiantes mencionan las características del registro verbal de una función lineal creciente y sus diferencias con respecto a las características de una función lineal decreciente.

Con los resultados obtenidos del tratamiento verbal que realizaron los estudiantes, se determinan las siguientes capacidades:

- Identificar, dada una situación, cuáles son las dos variables que intervienen.
- Entender la relación entre una variable dependiente y una variable independiente.
- Escribir situaciones en donde intervienen dos variables: dependiente e independiente.

Así como también, se determinan algunas dificultades:

- Expresar situaciones de proporcionalidad inversa para describir una relación de variación lineal.
- Determinar cuál es la variable dependiente e independiente.
- Escribir situaciones en las que ambas variables tengan un comportamiento lineal.

Sesión 2. La intención didáctica de esta sesión fue que los estudiantes partan del registro verbal para realizar conversiones al registro tabular, gráfico y algebraico. Así como también realicen tratamientos de estos últimos registros.

La intención didáctica de esta sesión fue que los estudiantes partan del registro verbal para realizar conversiones al registro tabular, gráfico y algebraico. Así como también realicen tratamientos de estos últimos registros.

De este análisis es importante recalcar la importancia de trabajar primero la conversión del registro verbal al gráfico, pues en esta secuencia didáctica, se hizo notorio que, al tener el registro tabular, 15 estudiantes ya no contemplaron el registro verbal para realizar la conversión al registro gráfico. Claro que, para llevar este tránsito, se debe de dotar con anticipación a los estudiantes de algunos conocimientos, tales como uno de los Postulados de Euclides: Dos puntos distintos cualesquiera determinan un segmento de recta y que un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

De igual forma, de esta sesión se realiza el reconocimiento capacidades y dificultades.

Comenzamos mencionando las capacidades:

- Conversión del registro verbal al tabular.
    - Encontrar valores faltantes en una tabla a partir de la información que brinda el problema. Este proporciona un procedimiento a seguir para encontrar los valores.
- Conversión del registro verbal al algebraico.
    - Del registro verbal, los estudiantes distinguen cada una de las variables y las asocian a su representación algebraica.
    - Distinguen el procedimiento a seguir para resolver el problema y esto lo transforman en lenguaje algebraico.
- Conversión del registro algebraico al tabular.
    - Sustituir valores en la expresión algebraica y generar con ello los pares de valores de la tabla.
- Tratamiento en el registro tabular.
    - Calculo de las diferencias entre los valores del registro tabular
    - Localización de ambas variables en el registro.
    - A cada valor de x, solo le corresponde un valor en y.
- Tratamiento en el registro verbal
    - Identificación y relación de la variable dependiente e independiente
- Tratamiento en el registro gráfico
    - Ubicación de puntos en el plano cartesiano
    - Localización de la intersección de la recta con el eje y
    - Características de la recta dados diferentes valores para la pendiente.
    - Obtención de valores específicos a partir de su ubicación en la gráfica.

Ahora se enuncian las dificultades:

- Conversión del registro tabular al gráfico.

    - Relación de cada variable con su respectivo eje
    - Dificultad para ubicar el producto cartesiano en el plano cartesiano.
- Conversión del registro verbal al gráfico
    - Faltan elementos para hacer posible esta conversión.
- Tratamiento en el registro verbal.
    - Falta de comprensión lectora para la resolución de los problemas
- Tratamiento en el registro gráfico.
    - Ubicación del 0 en el eje x y y.
    - Desconocimiento de una recta como representación gráfica de una función lineal
- Tratamiento del registro tabular.
    - Para la formación del registro tabular, no consideran en su totalidad a la variable independiente, encuentran los primeros valores y a partir de su diferencia, calculan los otros valores.

Sesión 3. De la sesión 3 la intención didáctica es que los estudiantes, a partir del registro tabular, realicen conversiones al registro verbal, gráfico y algebraico; así como también, tratamiento al registro gráfico.

El registro tabular ha sido uno de los más fáciles de trabajar para los estudiantes, a partir de él, fácilmente procedieron a realizar conversiones al registro verbal, gráfico y algebraico. Sin embargo, es importante mencionar que de estas conversiones la más complicada para los estudiantes fue la conversión al registro algebraico.

Se puede determinar, a partir de su análisis que, para conseguir el tránsito del registro tabular al algebraico, que solo 4 estudiantes lograron, se debió hacer énfasis en la obtención del valor de y cuando x vale 0, ya que este valor es el mismo que b, además de realizar preguntas para que pongan en práctica la relación anteriormente aprendida entre la diferencia constante y el valor de m.

A continuación, se enuncian las capacidades identificadas:

- Conversión del registro tabular al verbal.
    - Relación de los valores de la tabla con los proporcionados en el problema.
- Conversión del registro tabular al gráfico.
    - Relación de cada variable con su respectivo eje
    - Ubicación del producto cartesiano en el plano cartesiano.
- Tratamiento en el registro algebraico
    - Forma de la función cuando b es igual a 0.
- Tratamiento en el registro gráfico
    - Lectura de datos

  - Prolongación de la recta
  - Características de la recta dados varios valores a la pendiente.

En esta sesión, la dificultad encontrada fue la siguiente:

- Conversión del registro tabular al algebraico.
  - Obtención del valor de y cuando x vale 0 para el valor de b
  - Obtención de la primera diferencia para el valor de m

Sesión 4. La intención didáctica de la sesión 4 es que los estudiantes a partir del registro verbal, realizaran las conversiones para formar el registro tabular, gráfico y algebraico. Por tanto, en los resultados de su análisis, al igual que en el análisis de la sesión 2, una de las dificultades abordadas fue que no se considera a la variable independiente para calcular los valores de la variable dependiente, por lo cual, resulta importante, otorgarle al registro tabular valores no consecutivos para la variable independiente, para que, de esta manera, el alumno sienta la necesidad de utilizar estos valores para encontrar a la variable dependiente.

De esta sesión, se pueden identificar logros, pero también algunas dificultades, algunas de estas recurrentes en otras sesiones como es el caso de la comprensión que se les da a los problemas.

Dar espacio para que los estudiantes realizaran en casa estas conversiones, fue importante para corroborar su progreso con respecto a algunas conversiones y tratamientos. A continuación, se mencionan las capacidades y dificultades que se identificaron.

Capacidades:

- Conversión del registro verbal al tabular
  - Encontrar valores faltantes en una tabla a partir de la información que brinda el problema. Este proporciona un procedimiento a seguir para encontrar los valores.
- Conversión del registro verbal al algebraico
  - Del registro verbal, los estudiantes distinguen cada una de las variables y las asocian a su representación algebraica.
  - Distinguen el procedimiento a seguir para resolver el problema y esto lo transforman en lenguaje algebraico.
- Tratamiento en el registro verbal.
  - Identificación de la variable dependiente e independiente
- Tratamiento en el registro algebraico
  - Sustituir valores para encontrar resultados

Dificultades:

- Conversión del registro verbal al gráfico
- Tratamiento en el registro verbal
    - Resolución del problema
- Tratamiento en el registro tabular
  No se considera a la variable independiente para calcular los valores de la variable dependiente

Sesión 5. En esta sesión, los estudiantes parten del registro gráfico para realizar conversiones al registro tabular y verbal, así como también tratamiento en el registro verbal y algebraico.

De este análisis, se resalta la importancia de realizar preguntas, escritas u orales, para lograr que los alumnos lleven a cabo la conversión al registro algebraico, ya que esto conlleva a la movilización de todos los tratamientos trabajados.

De esta sesión se obtienen las siguientes capacidades:

- Conversión del registro gráfico al tabular.
    - Escritura correcta de las coordenadas de los puntos seleccionados
- Conversión del registro gráfico al verbal
    - Asociación correcta de una situación de la vida diaria con una recta decreciente.
- Tratamiento en el registro verbal
    - Distinción de situaciones crecientes de las decrecientes.
    - Identificación de las variables dependiente e independiente

Por último, se muestran las dificultades:

- Conversión del registro grafico al verbal.
    - No se consideran los valores de cada una de las variables, solo lo asocian a una situación que decrece.
- Conversión del registro gráfico al algebraico
- Conversión del registro tabular al algebraico

4.2.2 De la selección de actividades

El segundo objetivo particular de este proyecto de desarrollo profesional, precisamente es seleccionar actividades que impliquen diferentes registros de representación semiótica (verbal, algebraica, gráfica y tabular) para su conversión y tratamiento. Por lo tanto, en este apartado se muestran las características de las actividades que se seleccionaron para formar parte de la secuencia didáctica.

Considerando el enfoque pedagógico de los actuales planes y programas de estudios (SEP, 2017) que rigen las matemáticas en la educación básica de nuestro país y las orientaciones didácticas sobre el tema función lineal (SEP, 2017), se seleccionaron actividades realizadas por cuenta propia, en las que se contempló la resolución de problemas y el uso e interpretación de la función lineal en sus diversos registros de representación (verbal, gráfica, algebraica y tabular) permitiendo realizar tratamientos y conversiones entre éstos, tales como: trabajar con las variables dependiente e independiente, proponer problemas que correspondan a gráficas que representen situaciones de variación lineal, relación del signo de la variación con el crecimiento o decrecimiento de la recta, significado de la pendiente en distintos contextos, deducción de la expresión algebraica, además de interpretar el significado de los parámetros m y b en la expresión.

De las doce posibles conversiones que se pueden realizar entre los diferentes registros de representación, en la secuencia didáctica se incluyeron 10 (véase Tabla 15). De estas 10 conversiones seleccionadas, solo se logró propiciar 4 conversiones de ida y vuelta (marcadas con colores). Las conversiones marcadas con color verde, no fueron incluidas en la secuencia didáctica.

Tabla 15.
Resultados de las conversiones logradas y no logradas por los estudiantes

Conversiones	Fueron logradas	ÍTEM	Observaciones
1. Registro verbal al tabular	Sí	2.3, 3.2 y 4.2	
2. Registro tabular al verbal	Sí	3.1	
3. Registro verbal al gráfico	No	2.3, 3.2 y 4.2	Faltan condiciones
4. Registro grafico al verbal	Sí	5.1.c	
5. Registro verbal al algebraico	Sí	2.4 y 4.2	
6. Registro tabular al gráfico	Sí	2.7 y 3.1.c	
7. Registro gráfico al tabular	Sí	5.1.a y 5.1.b	
8. Registro tabular al algebraico	No	3.1.a	Dificultad
9. Registro algebraico al tabular	Si	2.7	
10. Registro gráfico al algebraico	No	5.1.e	Faltan condiciones
11. Registro algebraico al gráfico	No		**No se trabajó**
12. Registro algebraico al verbal	No		**No se trabajó**

A partir de la tabla, puede observarse que, de las 10 conversiones propuestas en la secuencia didáctica, se lograron siete de ellas. Las dos últimas conversiones (11 y 12), como ya se mencionó, no fueron incluidas, la primera de ellas porque los estudiantes de primer grado de secundaria trabajan con el concepto base de pendiente: inclinación de la recta, además, dado su proceso de madurez cognitiva no se trabaja la pendiente como cociente entre el cambio de las coordenadas en el eje x, y el cambio de las correspondientes coordenadas en el eje y. La segunda de ellas no se incluyó debido al tiempo y organización de la secuencia.

En cuanto a los tratamientos realizados, se muestra la Tabla 16 que contiene cuáles fueron posibles y cuáles no. Es importante mencionar, que algunos tratamientos se consideraron como dificultad en las primeras sesiones, sin embargo, en el transcurso de la secuencia didáctica se transformaron en una capacidad, por tanto, ya no se presentan como dificultades.

Tabla 16.
Resultados de los tratamientos logrados y no logrados por los estudiantes.

Tratamientos realizados	Fueron logradas	Observaciones
Registro Verbal		
1. Conocimiento de las variables dependiente (VD) e independiente (VI)	Sí	Identifican que la VD, cambia a partir de la VI
2. Identificación de estas variables en problemas	Sí	Identifican las variables involucradas y las catalogan
3. Determinar cuál es la relación entre ambas variables	Sí	Una depende de la otra
4. Escritura de situaciones donde intervienen dos variables: dependiente e independiente	Sí	Partiendo de su vida cotidiana, identifican una situación en donde intervengan variables
5. Comprensión en la resolución de problemas	No	Hubo dificultades en la comprensión de los enunciados de los problemas, sin embargo, una vez aclarado, pudieron resolverlos.
Registro tabular		

6. Localización de la variable dependiente e independiente en el registro tabular.	Sí	La variable x representa a la VI y la y a la VD
7. Obtención de la primera diferencia	Sí	Cálculo de la diferencia en los valores de y, cuando x aumenta de forma consecutiva.
8. Utilización de los valores de la variable independiente para encontrar los valores de la variable dependiente.	No	En tablas incluidas en las hojas de trabajo, los valores asignados a la variable independiente siempre fueron de 1 al 10.
9. Los valores de la VI y los VD se vinculan de manera única y exclusiva	Sí	Para cada valor de x, hay un solo valor en y
Registro algebraico		
10. Forma estándar de la función lineal	Sí	Se representa como $y = mx + b$, donde m es la inclinación de la recta y b el corte en el eje y
11. Características de la función cuando $b = 0$	Sí	Se representa como $y = mx$
Registro gráfico		
12. Ubicación de la variable dependiente e independiente en cada uno de los ejes.	Sí	Eje horizontal representa a la VI, eje vertical representa a la VD
13. Valor de b como intersección en eje y	Sí	La recta toca al eje y exactamente en el valor de b de la expresión algebraica
14. Valor de m como pendiente de la recta.	No	El valor de m representa la inclinación que tendrá la recta.
15. Características sobre la Inclinación de la recta dados diferentes valores de la pendiente: $m > 0$, $m<0$	Sí	Cuando el valor de $m > 0$ la recta es creciente y cuando $m<0$ la recta es decreciente
16. Lectura e interpretación de datos de registro gráfico	Sí	Relacionar un punto en el plano con la VD y la VI
17. Prolongación de la recta	Sí	Una recta es infinita

4.2.3 De los niveles de comprensión alcanzados

El último de los objetivos particulares es describir los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes en torno al objeto matemático función lineal, por lo que en esta sección se muestran los resultados obtenidos tras revisar las conversiones y tratamientos logrados por cada uno de los estudiantes.

Para analizar el nivel de comprensión que alcanzaron los estudiantes se muestra la Tabla 17 que contiene las conversiones realizadas por cada uno de ellos. En la última columna (color rosa) se muestra el total de conversiones de ida y vuelta que logra realizar cada alumno y es esta información la que nos permite determinar su nivel de comprensión.

Tabla 17.
Conversiones logradas por cada estudiante.

Alumno	Registro verbal al tabular	Registro verbal al gráfico	Registro verbal al algebraico	Registro tabular al verbal	Registro tabular al grafico	Registro tabular al algebraico	Registro grafico al verbal	Registro grafico al tabular	Registro grafico al algebraico	Registro algebraico al tabular	TOTAL DE CONVERSIONES	TOTAL DE CONVERSIONES IDA Y VUELTA
E_1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	7	**2**
E_2	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	7	**2**
E_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	**4**
E_4	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	4	**1**
E_5	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	9	**3**
E_6	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	8	**3**
E_7	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	8	3
E_8	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	8	3
E_9	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	7	2
E_10	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	9	3
E_11	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	4	1
E_12	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	4	1
E_13	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	5	2
E_14	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	9	3
E_15	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	5	2

E_16	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	4	1
E_17	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	9	3
E_18	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	5	2
TOTALES	15	3	12	15	18	7	9	18	7	18		

En la tabla anterior, se muestran con colores las conversiones de ida y vuelta realizadas por los estudiantes, logrando así dar cuenta del nivel de comprensión alcanzado por cada uno de ellos.

Para esto, se consideró que ningún estudiante puede estar en el nivel 5 puesto que Hitt (1996) hace énfasis en la articulación coherente entre todos los registros de representación y en la secuencia no se trabajan todas las posibles conversiones, además, al ser el primer acercamiento de los alumnos al tema y al poco tiempo que se tiene para el desarrollo de la secuencia no puede ser trabajado de manera exhaustiva. Se considera que los estudiantes con la retroalimentación a este tema en grados académicos posteriores alcanzarán un mayor nivel de comprensión.

A continuación, en la Tabla 18 se especifica el nivel de comprensión alcanzado por cada uno de los estudiantes. Es importante mencionar, que, para llegar al nivel actual, los estudiantes tuvieron que ir recorriendo cada uno de ellos.

Tabla 18.
Niveles de comprensión de Hitt (1996) alcanzados por cada uno de los estudiantes.

Alumno	**Niveles de comprensión**				
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
E_1					
E_2					
E_3					
E_4					
E_5					
E_6					
E_7					
E_8					
E_9					
E_10					
E_11					
E_12					
E_13					

E_14					
E_15					
E_16					
E_17					
E_18					

Como puede observarse, los dieciocho se posicionan en el nivel 3 de comprensión, el cual refiere a aquellos que fueron capaces de realizar tareas de conversión, en este caso lograron hasta 4 conversiones y solo 1 de ida y vuelta. Por último, un total de catorce estudiantes se ubican en el nivel 4, el cual corresponde a la coordinación entre 2 registros existiendo tránsito de ida y vuelta entre éstos. Si bien para posicionarse en este nivel solo son necesarias dos conversiones de ida y vuelta, también se consideraron en este nivel a aquellos estudiantes que fueron capaces de realizar tres y cuatro conversiones de ida y vuelta, por lo anteriormente mencionado.

Reflexiones finales

La Teoría de registros de representación semiótica (TRRS) fue el sustento y la base para llevar a cabo este proyecto de desarrollo profesional. Para dar evidencia de ello, en primer lugar, se retoma la pregunta que guío el proyecto:

¿Cuáles son los niveles de comprensión sobre la función lineal que se favorecen con una secuencia didáctica que promueve la conversión y tratamiento de registros de representaciones semióticos?

Dado a que se constituyó una secuencia didáctica con actividades que implican diferentes registros de representación semiótica (verbal, algebraica, gráfica y tabular) para su conversión y tratamiento, los niveles de comprensión alcanzados que propone Hitt (1996) sobre el tema de funciones, fueron el nivel 3 y 4, siendo este último en el que la mayoría de los estudiantes se situaron.

En el nivel 3, se sitúan los estudiantes que realizaron de manera satisfactoria tareas de conversión de un registro de representación a otro, conservando el significado del objeto matemático. En este nivel no se piden mínimos y máximos de conversiones, por lo tanto, se puede afirmar que todos nuestros 18 estudiantes llegaron a este nivel.

Las conversiones que los 18 estudiantes lograron hacer con éxito fueron: gráfico al tabular y tabular al gráfico. A pesar de que el escribir coordenadas y graficar puntos en el plano cartesiano, en el diagnóstico eran una dificultad para los estudiantes, ahora se muestran como una capacidad, dado a que se les dio énfasis en la secuencia a trabajar las variables y su ubicación en el plano. La conversión a la que menor cantidad de estudiantes pudo acceder es del registro verbal al gráfico, dado que para graficar se tienen que deducir datos

En el nivel 4, existe articulación coherente entre al menos dos sistemas de representación. Esto quiere decir que los estudiantes son capaces de realizar dos conversiones de ida y vuelta. Si bien, se piden solo dos conversiones ida y vuelta, hay estudiantes que realizan hasta 4, sin embargo, para estar en el siguiente nivel es absolutamente necesaria la articulación coherente entre todos los registros. Solo 4 de 18 estudiantes no alcanzan este nivel.

Las conversiones de ida y vuelta que mayor cantidad de estudiantes logró realizar (13 alumnos) fueron: registro verbal ↔ tabular y registro gráfico ↔ tabular. Aquellas que fueron logradas, pero con menor afluencia fueron registro verbal ↔ gráfico y registro tabular ↔ algebraico (3 y 7 alumnos, respectivamente). Dado que las conversiones del registro algebraico al gráfico y del registro algebraico al verbal, no fueron incluidas en la secuencia didáctica debido a la madurez cognitiva de los estudiantes y cuestiones de tiempo, no fue posible analizar si para ellos sería posible su articulación coherente.

Con respecto a los objetivos particulares, se da muestra de que en esta secuencia didáctica se determinaron dificultades y capacidades en los estudiantes, desde el diagnóstico hasta la experimentación.

Las principales dificultades que se encontraron fueron: conversión del registro verbal al gráfico y viceversa, conversión del registro tabular al algebraico, conversión del registro gráfico al algebraico, no se considera a la variable independiente para calcular los valores de la variable dependiente, entre otras. En cuanto a las capacidades, éstas son: identificar, dada una situación, cuáles son las variables dependiente e independiente; conversión del registro tabular al gráfico; lectura de datos a partir de la gráfica; conversión del registro verbal al tabular, etc.

Así como también, se seleccionaron actividades que permitieron la conversión y tratamiento de los diferentes registros de representación. Para esto, se siguió un proceso, comenzando por identificar todos los conceptos inmersos en el tema, luego relacionar éstos a cada uno de los registros, después analizar el proceso que seguirán los alumnos para convertir un registro en otro, así como los tratamientos de cada uno. Posteriormente, elegir el orden para trabajarlos, plantear los problemas y diseñar la secuencia didáctica, todo esto en sintonía con el enfoque pedagógico de los actuales programas de estudio. Por último, se sometió a las actividades a un pilotaje y con base en su análisis, se realizaron las debidas correcciones.

Una vez que se obtuvieron evidencias de las actividades contestadas por los alumnos, el tercer objetivo, determinar los niveles de comprensión alcanzados, se consiguió.

Del objetivo general, al contrastarlo con los resultados, se puede afirmar que, en esta secuencia, para favorecer la comprensión del concepto función en el nivel secundaria se promovió la conversión del registro verbal al tabular, gráfico y algebraico; del registro tabular al verbal, gráfico y algebraico; del registro gráfico al verbal, tabular y algebraico; y del registro algebraico al tabular. Así como tratamientos al registro verbal: identificación de las variables y su relación; al registro tabular: localización de las variables, obtención de la primera diferencia, dependencia de las variables; al registro algebraico: forma estándar de la función lineal, características de la función cuando $b = 0$; y al registro gráfico: ubicación de las variables en los ejes, b como intersección en el eje y, m como pendiente de la recta, inclinación de la recta dados diferentes valores a m, lectura e interpretación de datos, prolongación de la recta.

En cuanto a los alcances de este proyecto, es importante hacer hincapié en la enseñanza tradicional que domina al trabajar el tema función lineal puesto que esta secuencia didáctica es rica en conversiones y tratamientos, permitió a los estudiantes modelar situaciones en sus diferentes registros y la noción de función no se trabaja como un procedimiento algorítmico de cálculo sino como las relaciones que tiene el objeto matemático con cada una de sus representaciones.

Así como este proyecto cumplió con sus objetivos y tuvo sus propios alcances, también presentó limitaciones, una de las principales fue el tiempo destinado para desarrollar la secuencia y la cantidad de contenido por abarcar, ya que es bien sabido que los estudiantes presentaban muchas dificultades en el diagnóstico, por ejemplo: el desconocimiento total del plano cartesiano, pese a que se trabaja desde primaria, así que fue todo un reto que los estudiantes aprendieran a formar un registro y además realizaran conversiones y tratamientos con ellos.

Otra de las limitaciones del proyecto, es que la secuencia didáctica no incluye todas las conversiones posibles ni tampoco incorpora el cálculo de la pendiente de manera algebraica y geométrica, debido al tiempo para implementar la secuencia y a la madurez cognitiva de los estudiantes.

Por último, es deseable realizar un contraste de este trabajo con respecto a otros, tales como Higueras (1998), Robledo (2003), Azcárate y Deulofeu (1996), los cuales describen dificultades presentadas por los estudiantes en el tema de función, algunas de ellas: la dependencia entre las variables e identificación de las mismas. Dichas dificultades no se presentaron en esta secuencia didáctica, por el contrario, fueron catalogadas como capacidades del tratamiento al registro verbal.

Otras de las dificultades mencionadas por López (2008) que no se hicieron presentes en esta secuencia didáctica fue el enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, así como el enunciar la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los que se define una función. En este trabajo se dio evidencia de que, a partir de la secuencia propuesta, los estudiantes logran realizar conversiones del registro gráfico al verbal, así como también del registro verbal al algebraico.

Así como este trabajo difiere en algunas dificultades, también coincide con algunas. Con Rey et al., (2009) se concuerda en que “la articulación entre el registro gráfico y algebraico resulta en general la más difícil para los alumnos” (p. 159) y con Alpízar y Morales (2018) en la ubicación incorrecta de pares ordenados en el plano cartesiano al trazar la representación gráfica de la función (p. 13), aunque es necesario mencionar que posteriormente, en este trabajo, ésta última se convirtió en capacidad.

Para finalizar, se coincide con los autores Ospina (2012), Gora y Francy (2017), De Ávila (2013), entre otros, en que el primer umbral para comprender funciones lineales, es realizar conversiones rentre los diferentes registros de representación, pues son el lenguaje de las matemáticas y la implementación de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para favorecer la comprensión en los estudiantes de secundaria.

Ideas para futuras investigaciones

La secuencia didáctica diseñada en este proyecto de desarrollo profesional puede ser fácilmente adaptable para trabajar en diferentes contextos y grados escolares. Si bien es una secuencia didáctica pensada en estudiantes de primer grado de secundaria, se puede incrementar el nivel de complejidad para otros grados, además de incluir la conversión del registro gráfico al algebraico y viceversa.

Sería importante también que se reconsiderara el orden de algunas conversiones, tal es el caso del registro verbal al gráfico, antes de trabajar con el registro tabular, además de retomar postulados de Euclides como: Dos puntos distintos cualesquiera determinan un segmento de recta y que un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

Este trabajo se podría complementar realizando una comparación de los niveles de comprensión alcanzados con respecto a los niveles de comprensión alcanzados mediante una secuencia didáctica tradicional. Así como también identificar dificultades y capacidades en la conversión del registro grafico al algebraico y del algebraico al gráfico.

Reflexión

Al momento de escribir esta última reflexión de la maestría, viene a mi mente el momento cuando realizaba la primera de ellas, ésta consistía en escribir los motivos por los cuales quería entrar a la maestría, fue realmente difícil escribirla. Sabía que era deseable seguirme preparando para mejorar mis condiciones laborales y ser una buena docente, sin duda alguna ese panorama era muy corto para lo que más adelante venía.

Son muchas las sensaciones que siento en este momento, reviso mis anteriores escritos y apenas puedo creer cuanto he mejorado, cuando me ha costado estar aquí y por cuantas cosas he pasado.

Estar en la maestría despertó en mí la emoción del ser docente, me hizo recordar porque elegí serlo y cuanto amo mí profesión. Ahora cada día que llegó a mi salón de clases lo veo de forma diferente, como una nueva oportunidad para corregir todo aquello en lo que fallé sin darme cuenta, como un espacio para aprender, disfruto encontrar dificultades en los estudiantes y los medios para redimirlas.

Estar en la maestría fue un vaivén de emociones, sentirme estresada por el trabajo y a la vez alegre por aprender cada día cosas nuevas, nostalgia por ver a mis compañeros y maestras a la distancia, tranquilidad de poder estar en mi casa, pero a la vez insatisfacción por no poder viajar para participar en los congresos de forma presencial. Soledad y miedo por no saber si estaba haciendo bien los trabajos y no tener a quien preguntarle.

Pero también estar en la maestría, significó un cambio total en mi forma de pensar inclusive hasta en mi forma de ser. Reconozco que ahora como profesora tengo más habilidades y conocimientos que antes, me ha brindado seguridad y mayor capacidad. Sé que soy una profesora que se preocupa y ocupa por sus estudiantes, que está deseosa por seguir aprendiendo y da todo de sí por ello. Mi experiencia en la maestría ha sido reconfortante y me alegro de haberla cursado. Sigue en puerta, el seguir creciendo no solo profesionalmente sino como persona.

Esta experiencia creció más al adentrarme a la TRRS para la realización de mi proyecto de desarrollo profesional, pues supe de la riqueza que conlleva el incorporar diferentes registros de representación en los temas matemáticos y más aún cuando se trata de enseñar estudiantes de secundaria.

Combinar mi forma de planear con esta teoría, fue un reto, pues como docentes estamos acostumbrados a trabajar siempre de la misma manera, nos resulta complicado salir de lo cotidiano. Había trabajado con diferentes conversiones, las típicas, del registro verbal al algebraico, luego al tabular y finalmente al gráfico. Me sorprendí de todo lo que los estudiantes son capaces, ya que, en muchas ocasiones, por sentir que mis estudiantes no lo eran, no trabaje de ciertos temas aspectos <<complejos>>, por así llamarlos.

Entiendo que actualmente, el reto que como docentes tenemos, es salir de esa cotidianeidad y nos arriesguemos a cambiar de estrategias para fomentar la comprensión. Pero, además, compartir nuestros conocimientos con otros docentes, que al igual que nosotros están en la búsqueda de mejorar su práctica docente.

Termino esta reflexión mencionando, que la maestría solo es el punto de partida para mejorar mi práctica docente y que aquello que aprendí con la TRRS la aplicaré en los demás temas de los programas de estudio para secundaria.

Referencias

Alberro, A., & García, R. (2020). *Matemáticas I. Edición para docentes.* México: Correo del maestro.

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. y Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigacion y divulgación en matemática educativa*, 9(1), 6-19 http://funes.uniandes.edu.co/14091/1/1._RIDEME_Funci%C3%B3n_Lineal.pdf

Cabral, A. (2016). *Análisis de gráficas de funciones lineales en nivel básico mediante el uso del software C-ÍMAZ*. [Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas]. México.

Cano, J. M. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión en estudiantes de Grado 11 de una institución educativa oficial de Medellín.* [Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia]. Colombia. http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7497/1/JhonyCano_2012_conceptofuncion.pdf

Carvajal, J. y Vega J. (2014). *El concepto de función: Un análisis epistemológico de algunos textos de la reforma de las matemáticas modernas y algunos textos actuales en Colombia.* [Tesis de licenciatura no publicada, Universidad del valle Instituto de educación y pedagogía]. Colombia. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/7641/3469-0473471.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Casas, L.X. (2019). Recorrida histórico de la teoría de representaciones semióticas. En La educación y la pedagogía en el bicentenario de la independencia. En *V Congreso Internacional de Investigación y Pedagogía* (pp. 1-19). Universidad pedagógica y tecnológica de Colombia. https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/handle/001/5069/Recorrido_historico_de_la_teoria_de_representaciones_semioticas.pdf;jsessionid=7FAA182052317B75B2B5EFA3A833FB63?sequence=1

Castro, C. C., Díaz, L., y Céspedes, Y. (26-30 de junio de 2011). *Análisis del concepto función, para la construcción de una propuesta de enseñanza* [Sesión de conferencia]. XIII Conferencia Interamerica de educación matemática, Recife, Brasil.

Covarrubias, E. M. (2018). *Matemáticas 1 Guía para docentes.* Editorial Castillo.

D´Amore, B. (1998). Objetos relacionales y registros reprsentativos distintos: Dificultades cognitivas y obstáculos. *Uno*, 15. 63-78.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* Editorial Reverté.

D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(extraordinario 1), 177-195. http://funes.uniandes.edu.co/9706/1/D%60Amore2006Objetos.pdf

De Ávila, J. (2013). *Secuencia Didáctica de la Función Cuadrática y sus Diferentes Representaciones, Mediante Geogebra, Aplicada en Bachillerato* [Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas]. México.

Díaz, H. H. (2009). El lenguaje verbal como instrumento matemático. *Educación y Educadores*, 12(3), 13-31. https://www.redalyc.org/pdf/834/83412235003.pdf

Díaz, J. L. (2013) El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El cálculo y su enseñanza*, 4, 13-25. http://funes.uniandes.edu.co/14913/1/Diaz2013El.pdf

Díaz- Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. Comunidad de conocimiento UNAM.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Peter Lang.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española;* 9(1), 143-168. http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. & Hecklein, M. (2019). *Funciones.* Editorial Universiodad Nacional del Litoral.

Farfán, R. y García, M.A. (2005). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. En: J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.). *Acta latinoamericana de investigación en matemática educativa* (Vol. 18, pp. 489-494). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de las gráficas. El caso de la parábola. *Revista de innovación en educación matemática*. 6(2), 180 – 200. http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/%2804%29RD.pdf

Gómez, I. (2018). *Infinita Secundaria Matemáticas I.* Ediciones Castillo.

Gora, C. & Francy, A. (2017). *Función lineal: una aproximación por medio de los registros de representaciones semióticas con estudiantes de nivel secundario* [Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú Escuela de Posgrado]. Perú. http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/9756/Chac%c3%b3n%20Gora_Funci%c3%b3n_lineal_aproximaci%c3%b3n1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Guerrero, J. A. (18 de mayo de 2023). *Evaluación diagnóstica, formativa y sumativa: definiciones y ejemplos.* Docentes al día. https://docentesaldia.com/2019/02/05/evaluacion-diagnostica-formativa-y-sumativa-definiciones-y-ejemplos/

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (1997). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la* investigación. Sexta edición. McGraw-Hill.

Hitt, F. (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemólogicos y didácticos.* Grupo Editorial Iberoamerica.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2019). *Informe de resultados PLANEA 2017. El aprendizaje de los alumnos de tercero de secundaria en México. L enguaje y Comunicación y Matemáticas*. México: autor. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/08/P1D321.pdf

Kaput, J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra, en S. Wagner. y C. Kieran (Eds.), 167-194.

Kindle, J. H. (1970). *Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio*. McGraw Hill.

Lehmann, C. H. (1980). *Geometría analítica*. Editorial Limusa.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 308-318). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/4946/1/L%C3%B3pezDificultadesALME2008.pdf

Macías, J. (2016). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos* [Tesis de doctorado no publicada, Universidad Complutense De Madrid]. https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=127304

Magaña, W. (2014). *Diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la función lineal, conceptos asociados y aplicaciones* [Tesis de maestría no publicada, Universidad de Quintana Roo]. http://risisbi.uqroo.mx/handle/20.500.12249/125

Mayorga, R. B., Virgen, A. K., Martínez, A., y Salazar, D. (2020). Prueba Piloto. *Educación y Salud Boletín Científico Instituto de Ciencias de la Salud Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*, 9(17), 69-70.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G., y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primariade escuelas estatales. *Revista de psicología*, 26(2), 299-336.

Martz, M. (1982). Towards a Porcess Model for High School Algebra Errors. En D. Sleeman, D. & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring System*, (pp. 25-50). Academic Press.

Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal* [Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Manizales]. https://repositorio.autonoma.edu.co/bitstream/11182/477/4/Representaciones_semi%c3%b3tica_aprendizaje_concepto_funcional_lineal.pdf

Planchart, O. (2002). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función* [Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma del Estado de Morelos]. http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf

Posada, F. & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* [Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia]. http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7093

Prada, R., Hernández, C. & Ramírez, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*, 25, 188-205.

Quintero, C. P. y Cadavid, L. A. (2009). Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado. *Asociación Colombiana de Matemática Educativa*.

Quintero, C. J. (2019). *Proyecto de aula que contribuya a la enseñanza de la función lineal y afín, por medio del aula invertida*. [Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/77158/43629439.2019.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ramírez, R. E. y Toro J. J. (2012). *La función lineal, una noción que emplea los registros de representación semiótica para modelar la variación* [Tesis de licenciatura no publicada, Universidad del Valle]. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/13793/0503276.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Rey, G., Boubée, C., Sastre, P. y Cañibano, A. (2009). Ideas para enseñar. Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista Iberoamericana de educación matemática,* (20), 153-162. http://funes.uniandes.edu.co/15174/1/Rey2009Aportes.pdf

Roldán, E. O. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8º y 9º de educación básica* [Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/21934/1186875.2013.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sastre, P., Boubée, C., Rey, G., Maldonado, S. y Villacampa, Y. (2005). Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 22-27. http://funes.uniandes.edu.co/5308/1/BoubeeEvolucionAlme2006.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave para la educación integral. Matemáticas. Educación Secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.*

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas. 77*, 5-34.

Sowder. J. T. (2007). *The mathematical education and development of teachers*. Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A proyect of the National Council of Teachers of Mathematics.

Stewart, J. (2010). *Cálculo. Conceptos y contextos*. Cengage Learning Editores.

Tamayo, Ó. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Educación y Pedagogía*, 18(45), 37 - 49.

Tocto, J., Vivanco, J., Quizphe, I. (2023). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de pedagogía de las matemáticas y la física. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*. 7(2), 7225- 7244. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i2.5864

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática, 6*(3), 90-108.

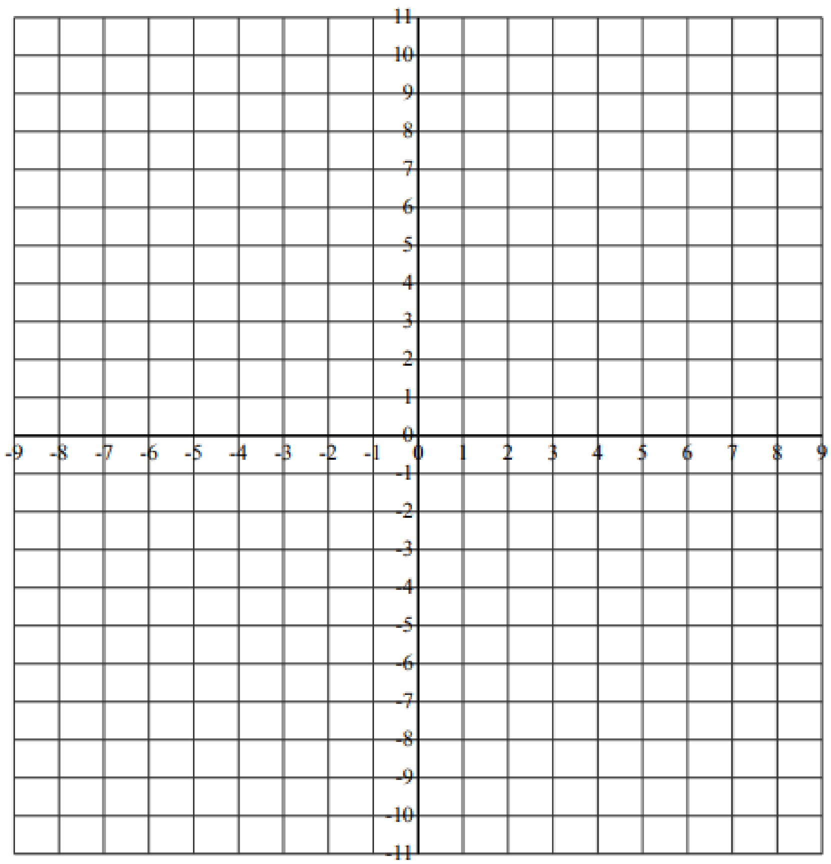
Youschenvttch, A. (1976). The concept of function up the middle of the 19th century. *Archive for history of exact sciences*. 16(1), 37-85.

Zuluaga, F. (2020). *Comprensión del concepto de función a partir de representaciones por estudiantes de grado noveno mediante situaciones y un ejecutable virtual* [Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/17400/6/ZuluagaFredy_2020_Matem%C3%A1ticasFunci%C3%B3nComprensi%C3%B3n.pdf

Anexos

Anexo 1. Evaluación diagnóstica y evaluación

Ítem 1. Representa las siguientes coordenadas en el plano cartesiano, ve uniendo uno a uno cada punto.



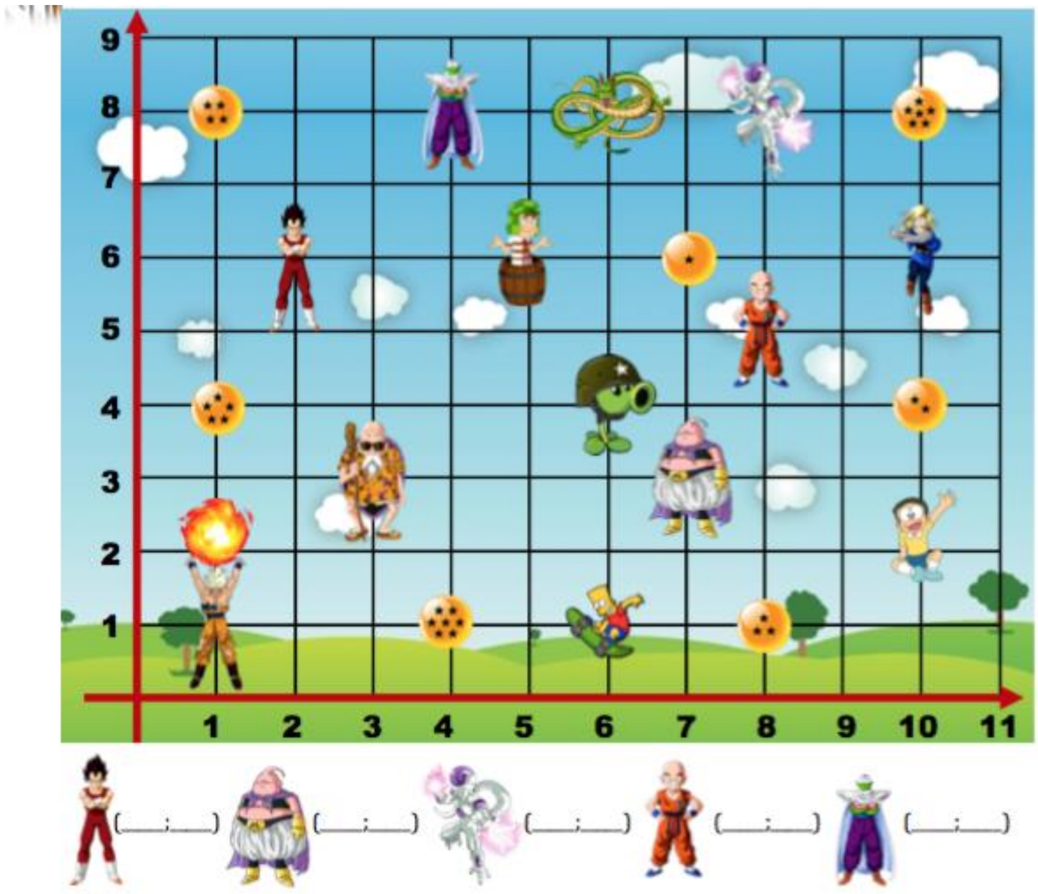
(-6,-10)
(-3, -4)
(0,2)
(2,6)
(4,10)

Ítem 2. Escribe los primeros diez dígitos de una sucesión, si se sabe que su posición se multiplica por 8 y se le resta 2.

______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______....

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Item 3. Escribe la coordenada que corresponde a cada una de las figuras que se piden abajo del plano cartesiano



Ítem 4. Lee el problema y con base en él, completa la tabla.

Para la elaboración de tres pasteles se requiere de 4 tazas de azúcar. Con esta información completa la tabla.

Cantidad de pasteles	Tazas de azúcar
1	
3	4
6	
10	
15	

Ítem 5. A partir de la sucesión dada, escribe una regla para obtener cada término considerando la posición de cada uno de éstos.

3,5,7,9,11,13 ….

Ítem 6. Resuelve las siguientes operaciones

(-3) + (+9) =

(-5) + (-3) =

145.3 x 62=

12+3x10=

123.25 +17=

Ítem 7. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, sustituye en ellas los valores que se te indican y calcula cual sería el resultado.

1. 2a+9 = ________ a=4
2. 5b-2= _________ b=6
3. 7x+1=_________ x=2

Ítem 8. A partir de las expresiones analíticas, completa cada una de las siguientes tablas (Tomado de Block, García y Balbuena, 2019).

$y = 5x + 1$	
x	y
1	
5	
10	

$y = x^2$	
x	y
1	
5	
10	

$y = -6x$	
x	y
1	
5	
10	

a) ¿Cuál o cuáles de las funciones anteriores es lineal? ¿Por qué?

____

Ítem 9. Contesta lo que se te pide

a) Menciona una situación donde se relacione una variable dependiente y otra independiente.

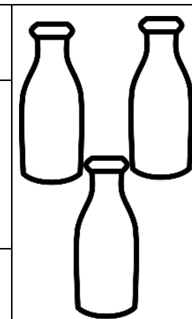
____

b) ¿Qué entiendes por función lineal

____

Ítem 10. Cada tabla muestra una relación entre dos conjuntos de cantidades, realiza con ellas lo que se te pide:

a) Anota las cantidades que faltan en las tablas.
b) Encierra la regla de correspondencia para las variables involucradas que le corresponde a cada tabla. Justifica tu respuesta.

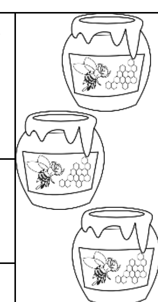
Tabla 1	**Costo de la leche**					
Litros de leche (ℓ)	2	3	5		20	
Costo en pesos (c)	\$38	\$57	\$95	\$190		

$c = 19\,\ell + 19$ $\qquad$ $c = 19\,\ell$ $\qquad$ $c = 5\ell - 8$

Justificación:

____

____

Tabla 2	**Venta de recipientes con miel a \$50 más \$10 con el envío a domicilio (sea cual sea a cantidad de recipientes de miel enviada)**					
Recipientes de miel (m)	3	5	8		15	
Costo en pesos (c)	160		410	560		

$c = 50\,m$ $\qquad$ $c = m + 10$ $\qquad$ $c = 50m + 10$

Justificación:

____

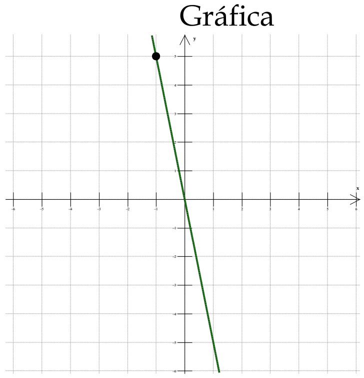
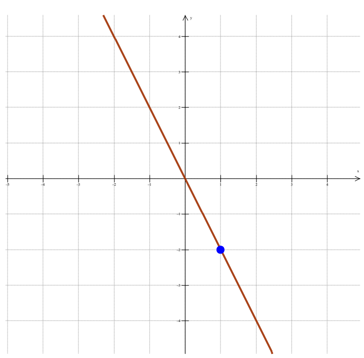
____

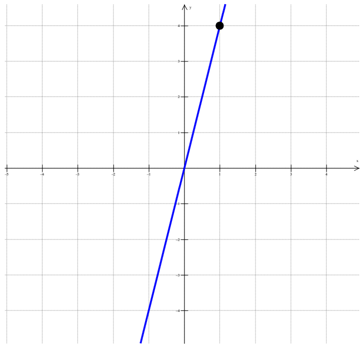
Tabla 3	**Tarifa de taxi: el servicio por $15 más $10 por kilómetro recorrido**					
Kilómetros recorridos (k)	3	5	7		36	
Costo (c)	45	65		165		

$c = 10k + 15$ $\qquad$ $c = 15k + 10$ $\qquad$ $c = 10k$

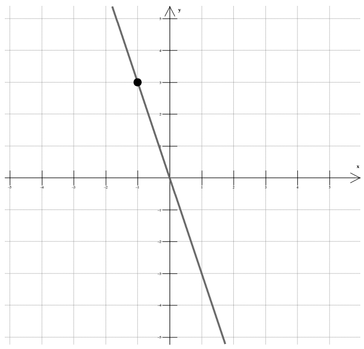
Justificación:
____
____

Ítem 11. Observa las siguientes gráficas, relaciónalas con su expresión algebraica y escribe el por qué (Tomada de Roldán (2013)).

Gráfica	Función	Justificación
	$y = f(x) = -2x$	
	$y = f(x) = 4x$	



$y = f(x) = -3x$



$y = f(x) = -5x$

Ítem 12. Contesta como corresponde.

Mary comenzó un ahorro para comprarse una bocina. Al inicio tenía $70 pesos y cada semana fue ahorrando la misma cantidad. Ella fue anotando en una tabla el total de dinero que tenía ahorrado cada semana.

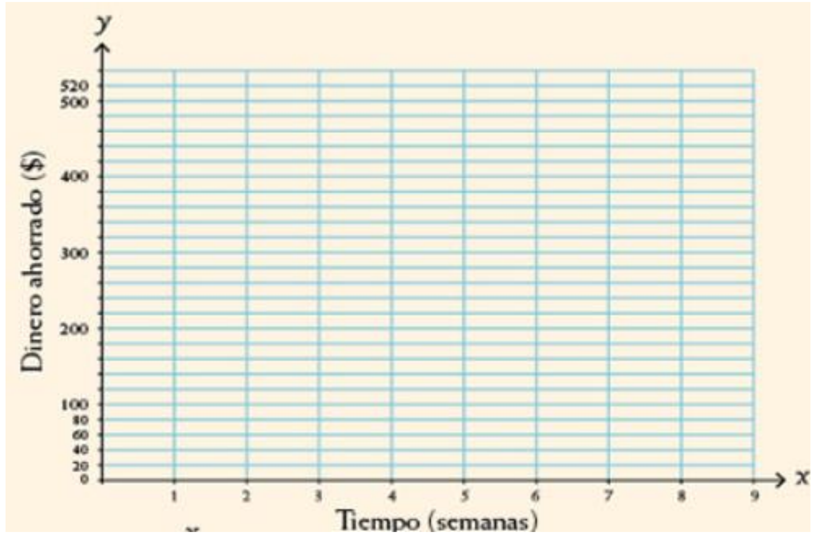
a) ¿Cuánto ahorró en la semana 6? ____

b) ¿Cuánto ahorró en la semana 10? _______________________________________

c) Traza la gráfica correspondiente.

d) Escribe la expresión algebraica que representa su ahorro.

Tiempo (semanas)	Dinero ahorrado
0	$ 70.00
1	$ 125.00
2	$ 180.00
3	$ 235.00
4	$ 290.00
5	$ 345.00
6	
⋮	
10	



Expresión algebraica:

Justificación.

Tomado de Alberro y García (2020)

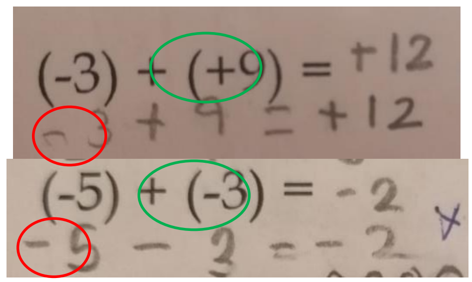
Resultados de la evaluación diagnóstica

A continuación, se describen capacidades y dificultades encontradas en cada uno de los temas.

1. Operaciones básicas.
   Objetivo: Ejecución de operaciones básicas con números positivos y negativos respetando el orden jerárquico. De los datos obtenidos se resalta que:

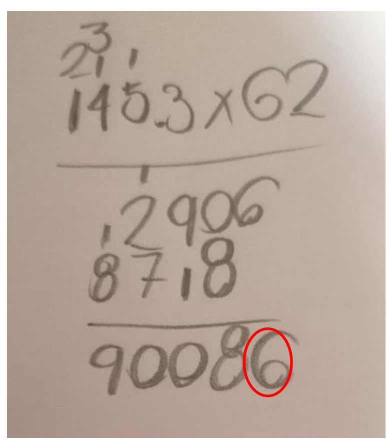
- Al trabajar sumas y restas con números positivos y negativos, los estudiantes logran multiplicar los signos y sacar el número del paréntesis con éxito, sin embargo, para obtener el resultado, omiten el valor negativo de uno de los sumandos.

Figura 59.
Correcta multiplicación de signos y omisión del signo de uno de los sumandos.



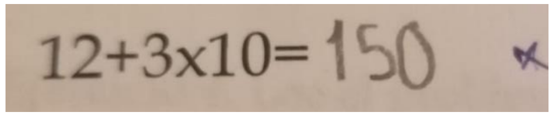
- Al trabajar con la multiplicación de 145.3 por 62, realizan correctamente el algoritmo, sin embargo, algunos estudiantes omiten la colocación del punto decimal y algunos otros lo ubican de forma incorrecta.

Figura 60.
Omisión del punto decimal



- Revisando la cronodosificación de la docente titular del grupo, los estudiantes aún no trabajan jerarquía de operaciones, por tal motivo los estudiantes resuelven las operaciones de izquierda a derecha. Solo un estudiante respeta el orden jerárquico, obteniendo como resultado 42.

Figura 61.
Resolución de operaciones sin respetar la jerarquía

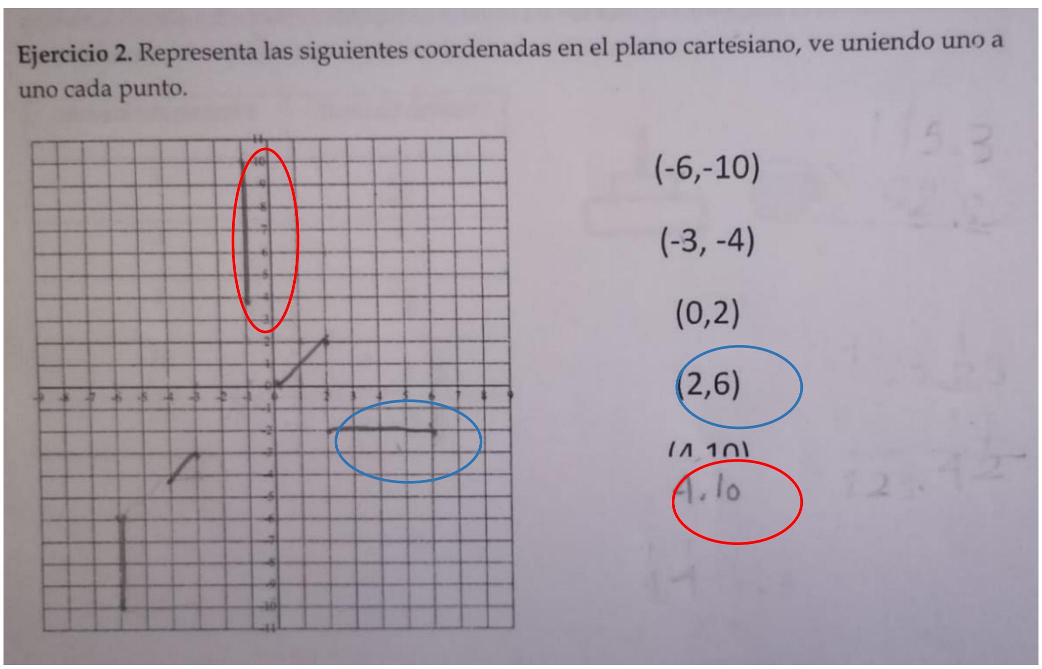


2. Graficar puntos en el plano cartesiano

Objetivo: Que el estudiante lea correctamente coordenadas y las represente en el plano cartesiano. De los resultados obtenidos se resalta que:

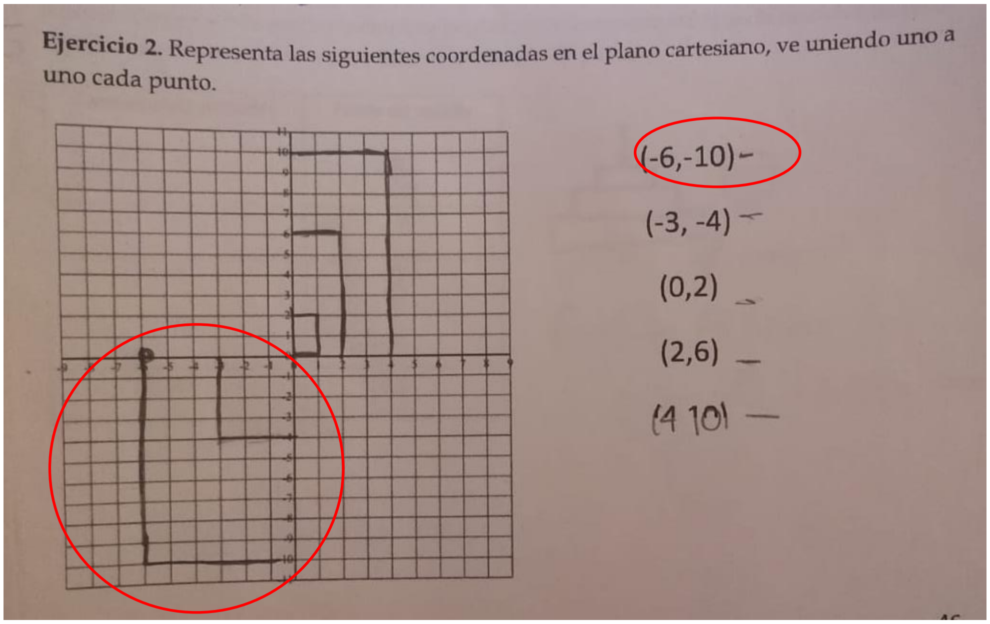
- Se encontró que como producto cartesiano trazan segmentos de recta.
  Sin contemplar si es en el eje de las abscisas o de las ordenadas, el estudiante marca coordenada x y en ese mismo eje a la coordenada y, posteriormente une ambos puntos con un segmento (véase Figura 62).

Figura 62.
Error al representar el producto cartesiano mediante segmentos de recta



- Otra forma en que representan el producto cartesiano es mediante líneas que unen a ambas coordenadas, tomando en cuenta la posición de los ejes (véase *Figura 63*).

Figura 63.
Error al representar el producto cartesiano con líneas que unen a la coordenada x y y



En ambos casos, los estudiantes no identifican que el producto cartesiano son puntos en el plano. Solo 4 estudiantes logran representar correctamente los 5 puntos que se les pidieron y al unirlos, forman correctamente una recta.

- Para algunos estudiantes, es necesario que al graficar se forme una figura.

En la aplicación del diagnóstico los estudiantes esperaban obtener en el plano cartesiano una figura, se mostraron dudosos acerca de su procedimiento al trazar una "simple línea". Inclusive tres estudiantes comenzaron graficando correctamente y terminaron cambiando el valor de algunas coordenadas o el valor de su signo para lograr cerrar la figura (véase Figura 64), o bien, agregando líneas extras (véase Figura 65)

Figura 64.
Error al cambiar el valor o signo de las coordenadas para lograr formar una figura.

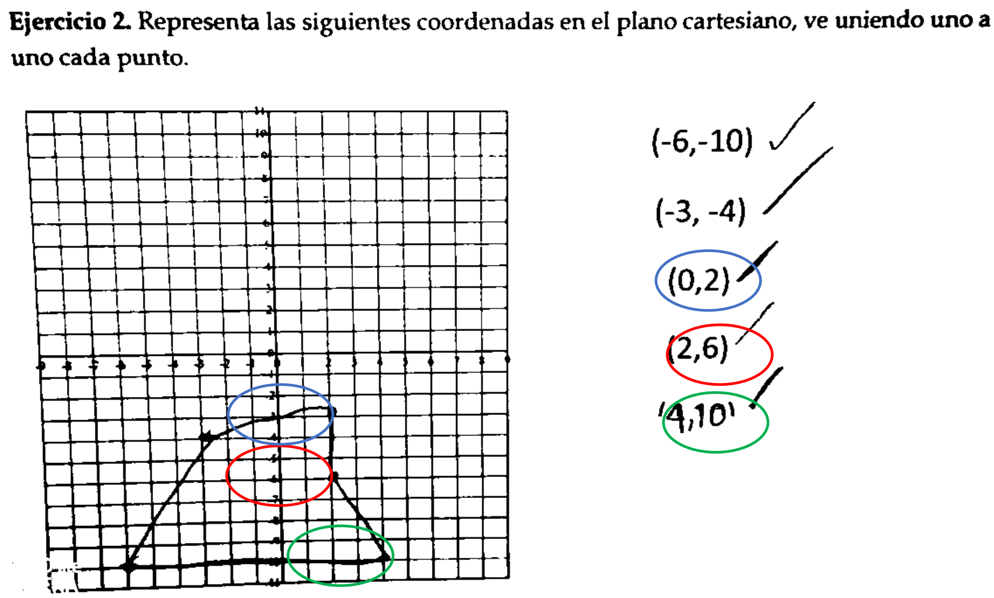
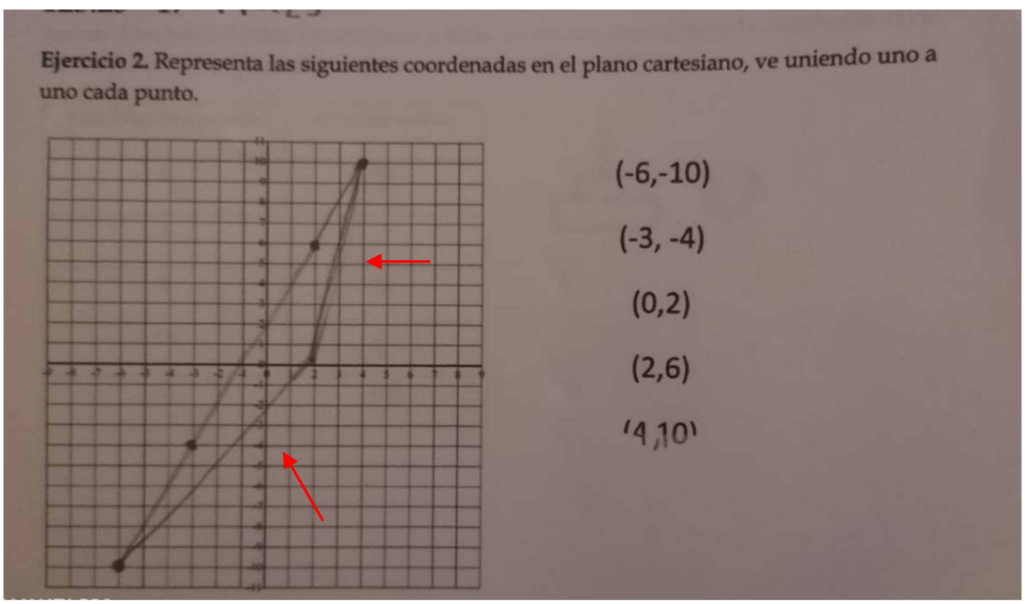


Figura 65.
Error al agregar líneas extras para lograr formar una figura en el plano



Al explorar los libros de texto de quinto y sexto de primaria se aprecia que se trabaja la graficación de puntos que conllevan a la formación de figuras, ante esto, Cordero y Flores (2007) al analizar el currículo del Sistema Educativo Nacional encuentran que:

> En educación primaria las gráficas de las funciones no son consideradas curricularmente, pero a cambio se realizan ciertos tratamientos temáticos sobre gráficas sin hacer alusión explícitamente al concepto de función. (…) En quinto y sexto grados se recopila y organiza la información de diversas fuentes mediante tablas, diagramas, gráficas de barras o pictogramas para analizar las tendencias: promedios, valor más frecuente y la mediana. También se introduce al estudiante al planteamiento y resolución de problemas que impliquen la elaboración de tablas y gráficas de variación proporcional y no proporcional. En estos últimos grados escolares aparecen los ejes coordenados para ubicar elementos, dependiendo del contexto del problema (p. 11)

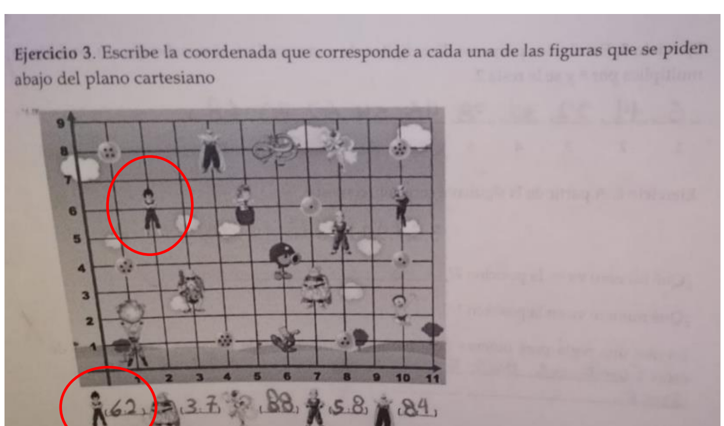
Por tanto, es en primer grado de secundaria donde los estudiantes tienen el primer acercamiento a las funciones. Es importante mencionar también que, en el nivel primaria, los estudiantes trabajaron únicamente con el cuadrante I, por tanto, el graficar coordenadas que involucran números negativos causó dificultad.

3. Escritura de coordenadas

Objetivo: Que los estudiantes, al distinguir cuál es el eje de las abscisas y eje de las ordenadas, escriban de manera correcta las coordenadas de un objeto en el plano cartesiano. De los resultados obtenidos se resalta que:

- La confusión que tienen los estudiantes sobre cuál es el eje x y cuál es el eje y (véase Figura 66). En algunos casos, al preguntarle a algunos estudiantes cuál era cada uno de los ejes, respondían de forma correcta, sin embargo, la confusión estaba en cuál coordenada se coloca primero, la x o la y.

Figura 66.
Error al escribir las coordenadas de un objeto en el plano cartesiano



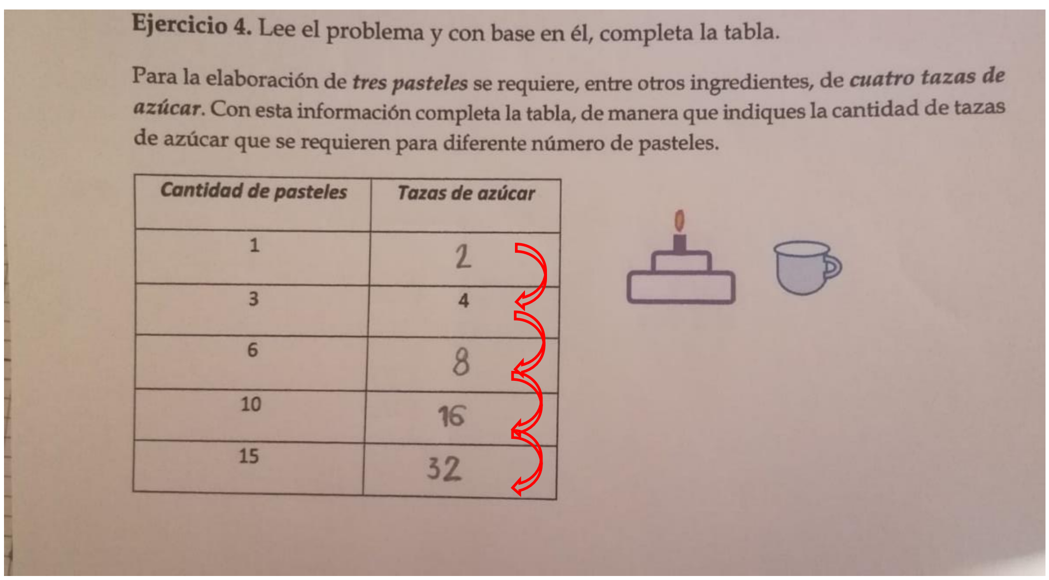
4. Llenado de tablas a partir de una situación de proporcionalidad directa.

Objetivo: Que los estudiantes encuentren la constante de proporcionalidad y a partir de ésta, completen los datos de la tabla. Que los estudiantes relacionen las variables que intervienen en el problema.

Al respecto, se encontró lo siguiente:

- Solo tres estudiantes logran completar correctamente la tabla.
- Seis estudiantes no relacionaron la variable independiente (cantidad de pasteles) con la variable dependiente (tazas de azúcar).
  Al identificar que con tres pasteles se necesitaban 4 tazas de azúcar, supieron que con 6 pasteles necesitarían 8. Ante esto, encontraron un patrón, por lo que, para calcular las tazas de azúcar, fueron poniendo el doble del número anterior (véase Figura 67)

Figura 67.
Error al no considerar la variable independiente para calcular la variable dependiente



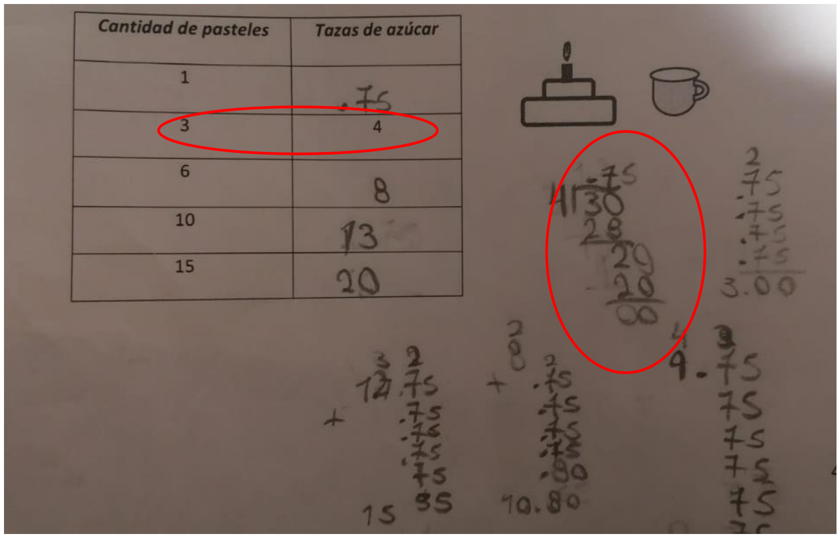
Ejercicio 4. Lee el problema y con base en él, completa la tabla.

Para la elaboración de ***tres pasteles*** se requiere, entre otros ingredientes, de ***cuatro tazas de azúcar***. Con esta información completa la tabla, de manera que indiques la cantidad de tazas de azúcar que se requieren para diferente número de pasteles.

Cantidad de pasteles	Tazas de azúcar
1	2
3	4
6	8
10	16
15	32

- Los demás estudiantes, calcularon incorrectamente la constante de proporcionalidad.
  En lugar de dividir las tazas de azúcar entre el pastel, dividieron los pasteles entre las tazas de azúcar y este resultado lo fueron multiplicando por la cantidad de pasteles.

Figura 68.
Error al calcular la constante de proporcionalidad



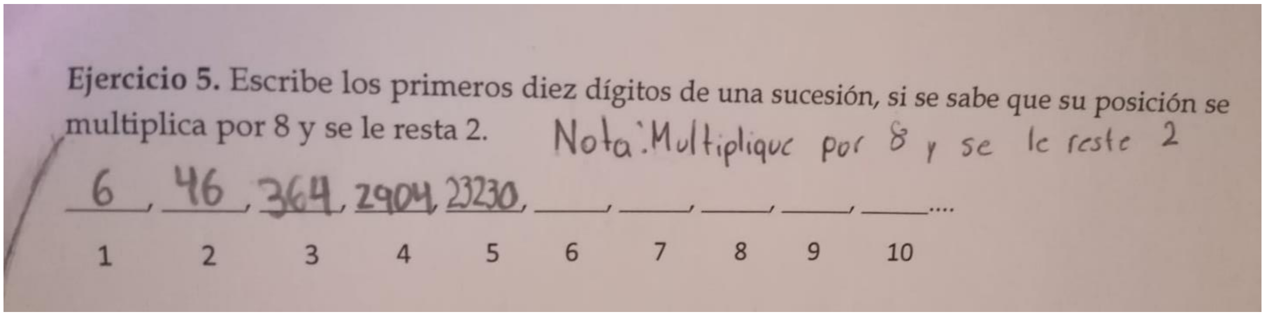
5. A partir de una regla dada, encontrar los primeros 10 términos de una sucesión

Objetivo: Qué el estudiante, a partir de una regla dada, la relacione con la posición y encuentre cualquier término de una sucesión.

De los resultados obtenidos se resalta que:

- Algunos estudiantes escriben como primeros tres términos los números: 6,46,364… esto significa que no contemplaron la posición de cada uno de los términos.
  Dado que la regla dada fue: la posición se multiplica por ocho y se le resta dos, los alumnos comenzaron por restarle dos al ocho, dando como resultado el primer término de la sucesión: el número 6, posteriormente, utilizaron éste como punto de partida para encontrar los demás términos, multiplicaron el 6 por 8 y le restan dos y así sucesivamente (véase Figura 69). Al igual que en la actividad anterior, no hay relación entre las dos variables.

Figura 69.
Error en la sucesión al no contemplar la posición para encontrar cada uno de los términos.


Ejercicio 5. Escribe los primeros diez dígitos de una sucesión, si se sabe que su posición se multiplica por 8 y se le resta 2. Nota: Multiplique por 8 y se le reste 2

6, 46, 364, 2904, 23230, ____, ____, ____, ____, ____....

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

6. A partir de una sucesión, determinar su regla para encontrar cualquiera de sus términos.

Objetivo: Que los estudiantes logren obtener la regla de la sucesión.

De los resultados se obtuvo lo siguiente:

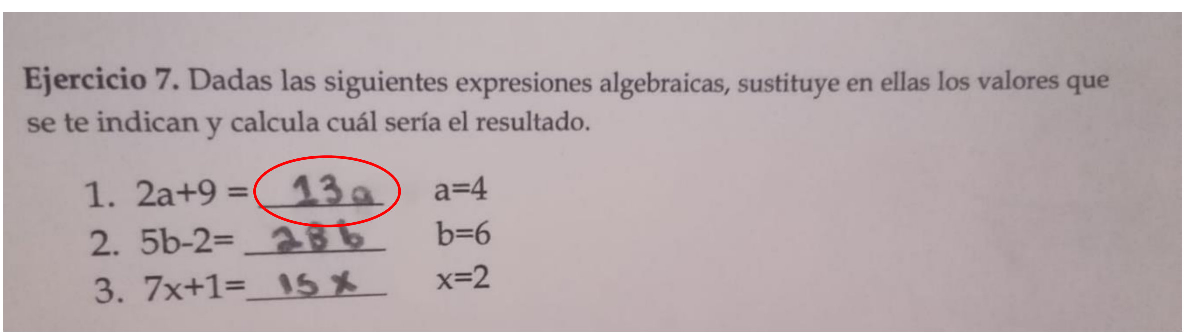
- La mayoría de los estudiantes logra obtener con éxito algunos términos de la sucesión, sin embargo, al pedirles una regla, ningún alumno logra relacionar la posición. Escriben reglas del tipo: va de dos en dos.

7. Evaluar valores en expresiones algebraicas

Objetivo: Que los estudiantes sustituyan valores en las expresiones algebraicas

De los resultados se obtuvo lo siguiente:

Figura 70.
Error al sustituir valores en expresiones algebraicas

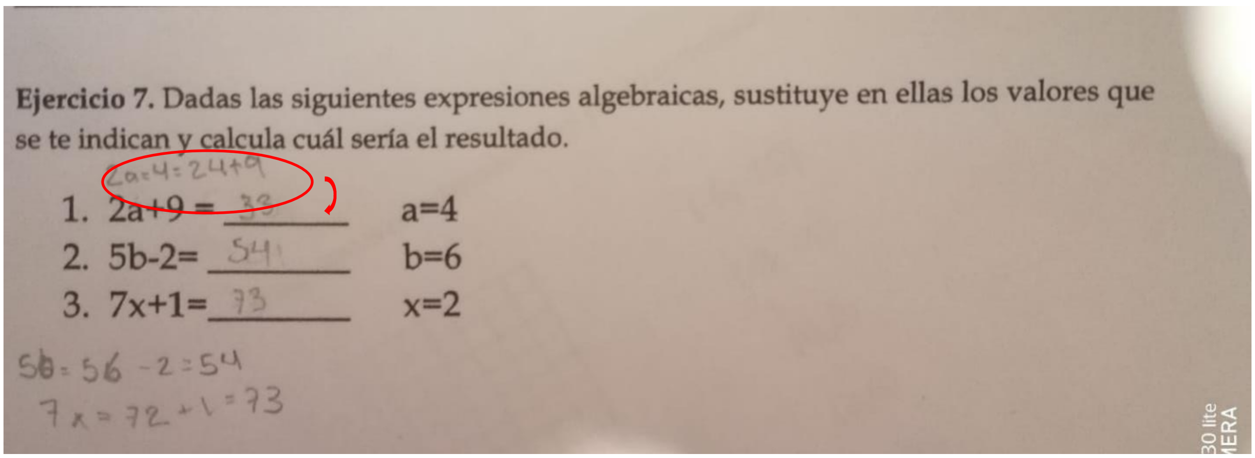

Ejercicio 7. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, sustituye en ellas los valores que se te indican y calcula cuál sería el resultado.

1. 2a+9 = 13a a=4
2. 5b-2= 28b b=6
3. 7x+1= 15x x=2

- En la Figura 70, como lo menciona Ruano, Socas y Palarea (2008), puede observarse que los estudiantes no aceptan que una expresión no pueda cerrarse, sienten la necesidad de completarla, de cerrarla, por tal motivo, en el ejercicio 1, el estudiante multiplica el coeficiente por el valor de la literal y a este valor le suma 9, sin embargo, al no saber trabajar con letras incorpora la literal a pesar de que esta ya no es necesaria.

- También se hace evidente que los estudiantes aún no tienen un acercamiento al álgebra, ya que al evaluar en la expresión determinado valor, no multiplican el coeficiente y la literal, sino que forman un número con ambas partes de la expresión (véase Figura 71).

Figura 71.
Error al no saber que un número junto a una literal indican multiplicación



Después de realizar el análisis de las dificultades y capacidades de los estudiantes con respecto a los conocimientos necesarios para trabajar el tema de función lineal, se realizarán mejoras a la secuencia didáctica. Estas adecuaciones serán las siguientes:

- Dedicar tiempo para entender qué son las variables, los tipos de variables: dependiente e independientes y ser capaces de distinguir cada una de ellas en diferentes situaciones.
- Antes de la aplicación de la secuencia didáctica, dedicar una clase para repasar la ubicación de puntos en el plano cartesiano.
- Utilizar una lámina para que los estudiantes puedan estar visualizando cual es el eje de las abscisas y cual el de las ordenadas.
- Dado que los estudiantes ya han trabajado sustitución de valores en las fórmulas para obtener área y perímetro, dar un breve repaso. Así como también, colocar una lámina con información importante para entender el álgebra, como, por ejemplo: un número junto a una literal indica multiplicación.

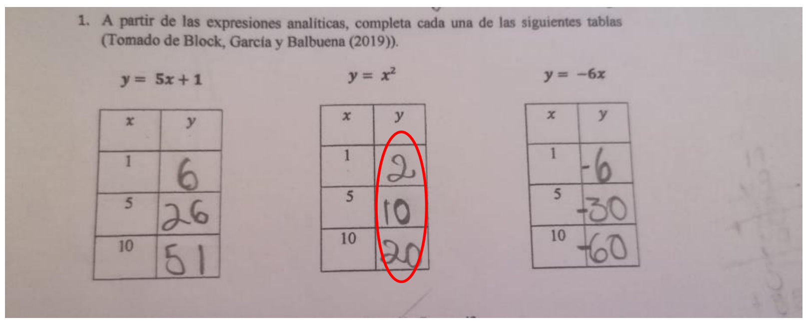
Ítem 8. Del registro analítico al tabular

Objetivo: Que los estudiantes a partir de tres distintas funciones, realicen el llenado de tablas e identifiquen cuál de ellas es una función lineal

De este ítem es importante recalcar los siguientes aspectos:

- Los estudiantes son capaces de sustituir los diferentes valores que proporciona cada tabla en las expresiones y obtener el resultado correcto. Donde presentan mayor dificultad es en evaluar valores en la función cuadrática, ya que tres estudiantes, en lugar de multiplicar el número por sí mismo, lo han multiplicado por dos.

Figura 72.
Error al sustituir valores en una función cuadrática.



- No son capaces de distinguir cual función es lineal.

Ítem 9. ¿Qué es una función lineal?

Objetivo: Qué el estudiante describa características de la función lineal, así como también sobre sus diferentes representaciones. Distinga que es una variable dependiente e independiente y proporcione ejemplos.

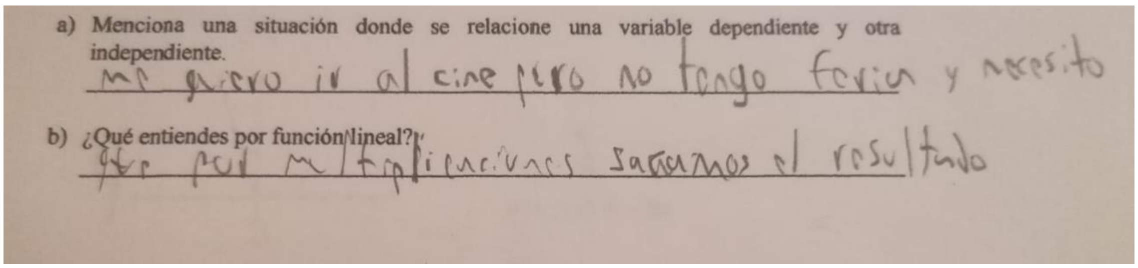
- Dado que, a nivel curricular, las funciones son trabajadas hasta primero de secundaria, los estudiantes no conocen que es una función lineal ni sus representaciones. Algunos relacionan este concepto con un número negativo, con una única forma de solución, con una línea, con una operación que se resuelve en forma recta, aquella que se da por una multiplicación y sustitución, aquello que tiene orden (véase Figura 73)

Si bien, varias nociones de las que mencionan los estudiantes se relacionan con el concepto función lineal, formalmente los estudiantes carecen de elementos para entender a una función como una relación entre dos variables, donde una depende de la otra, aquella que se representa mediante una expresión analítica de la forma $y = mx + b$ o mediante una recta en el plano cartesiano.

- La mayoría de los estudiantes no son conscientes que existen dos tipos de variable: dependiente e independiente y lo que implica cada una de ellas. Pero hay jóvenes que, a su manera, con ejemplos sencillos tratan de explicar lo que para ellos significan estos conceptos (véase Figura 73).

Figura 73.

Significado que los estudiantes dan al concepto de función lineal y variable dependiente e independiente



a) Menciona una situación donde se relacione una variable dependiente y otra independiente.

me quiero ir al cine pero no tengo feria y necesito

b) ¿Qué entiendes por función lineal?

que por multiplicaciones sacamos el resultado

Ítem 10. Del registro tabular al algebraico

Objetivo: Qué los estudiantes completen los datos de las tablas y relacionen los valores de ambas variables para encontrar la regla de correspondencia correcta.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se resalta lo siguiente:

- A pesar de que, al final de cada tabla se muestran tres diferentes reglas de correspondencia, algunos estudiantes las omiten y prefieren con sus palabras describir el procedimiento que realizaron (véase Figura 74). Este aspecto resalta el hecho de que los estudiantes han trabajado muy poco el tránsito del lenguaje común al algebraico.

Figura 74.

Uso de lenguaje común para escribir la regla de correspondencia entre variables

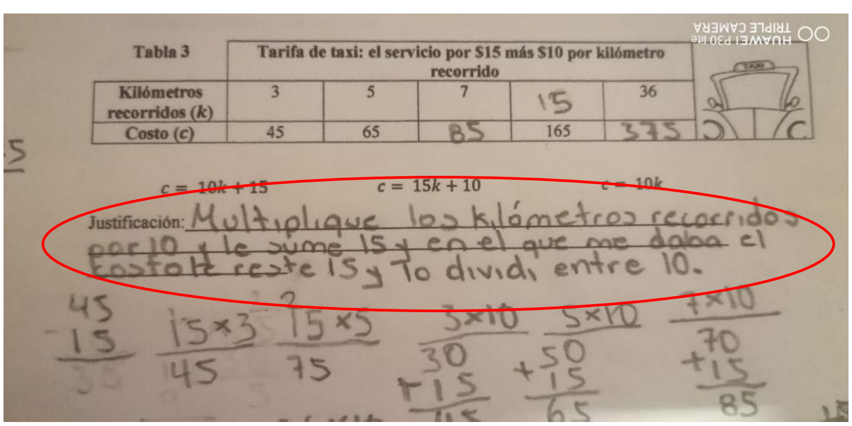


Tabla 3	Tarifa de taxi: el servicio por $15 más $10 por kilómetro recorrido				
Kilómetros recorridos (k)	3	5	7	15	36
Costo (c)	45	65	85	165	375

~~$c = 10k + 15$~~ $c = 15k + 10$ ~~$c = 10k$~~

Justificación: Multiplique los kilómetros recorridos por 10 y le sume 15 y en el que me daba el costo le reste 15 y lo dividi entre 10.

Ítem 11. Del registro gráfico al algebraico

Objetivo: Que los estudiantes, a partir de ver la dirección de la recta y la pendiente, la relacionen con su correcta función.

De los resultados obtenidos, se expresa lo siguiente:

- Es importante mencionar que, el primer acercamiento de los estudiantes al estudio de las funciones, es hasta primer grado de secundaria específicamente con la función lineal, por lo tanto, los estudiantes desconocen completamente todo acerca de la recta.
- Sería importante que, para el pilotaje, también se contemplaran funciones de la forma $y = mx + b$, probablemente al ver el valor del intercepto en el eje y, para los estudiantes será más fácil relacionar las gráficas con su respectiva función.

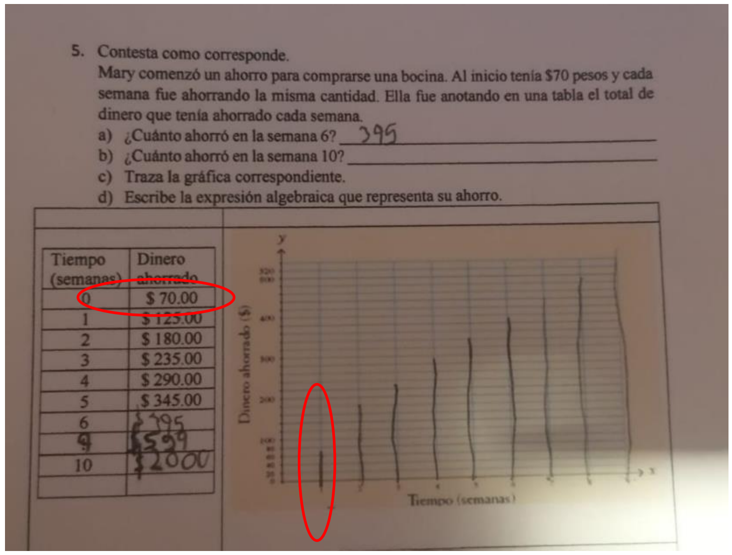
Ítem 12. Del registro verbal al tabular y tabular al gráfico.

Objetivo: Que los estudiantes a partir de un problema, completen la tabla y posteriormente grafiquen los valores de ésta.

- Solo tres estudiantes intentaron graficar, de los cuales solo dos logran hacerlo correctamente colocando puntos en el plano cartesiano, posteriormente uniéndolos y formando una línea recta. El tercer estudiante traza segmentos desde el eje de las abscisas y las prolonga hasta el valor de la coordenada y (véase Figura 75)

Figura 75.

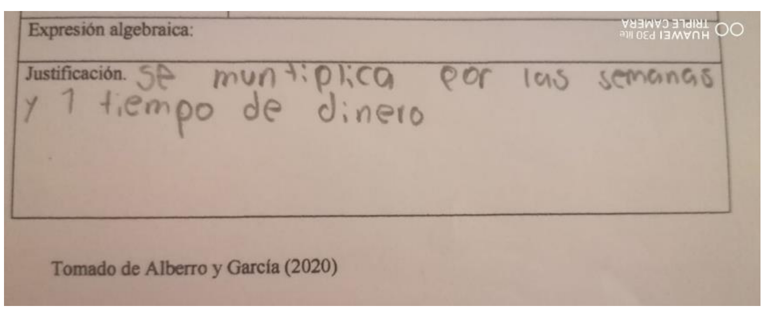
Error al representar puntos en el plano cartesiano



- Solo una estudiante trata de escribir una expresión que relacione el tiempo y el dinero, pero prefiere escribirla con lenguaje común, en ésta se puede apreciar que intenta relacionar ambas variables, sin embargo, no especifica qué valor es el que se tiene que multiplicar (véase Figura 76)

Figura 76.

Regla de correspondencia en lenguaje común



Ítem 13. Del registro gráfico al algebraico

Objetivo: Que los estudiantes a partir del registro gráfico puedan mencionar características del registro algebraico.

Dado que ningún estudiante intento contestar, se hace imprescindible la necesidad de dar tratamiento al registro gráfico, ya que éste es uno de los más desfavorecidos.

Anexo 2. Análisis de la prueba piloto

Como se ha señalado, el pilotaje fue llevado a cabo en la Escuela Secundaria General "Salvador Vidal" con los alumnos del primer grado grupo F, equipo 2, que consta de 18 estudiantes. Para llevarlo a cabo se requirieron los siguientes materiales: hojas de trabajo, diapositivas y gráficas realizadas en GeoGebra.

Es importante mencionar que, durante la aplicación de esta prueba piloto, surge como inconveniente la aplicación de la prueba estandarizada para estudiantes del nivel secundaria (anteriormente SISAT) por lo cual, no se alcanzó a implementar en su totalidad a la fecha acordada. A continuación, se presenta el análisis de lo sucedido.

Actividad de inicio

Sesión 1

Intención didáctica: Que los estudiantes, a partir del registro verbal, realicen conversiones al registro tabular, gráfico y algebraico.

La clase comienza preguntando a los alumnos ¿Qué es una variable?, a lo que los alumnos responden ideas como las siguientes:

Ao 1: Es algo que tiene opciones

Ao 2: Puede ser el tamaño entre las personas

Ao 3: Algo que puede cambiar

Ao 4: Algo diferente

A pesar de que la pregunta es directa y no hubo un contexto anterior a ésta, se cumplió lo esperado, que los estudiantes relacionaran el concepto con su vida diaria, con una palabra que escuchan a menudo y de esta manera poder guiarlos hacia lo que son las variables en el contexto matemático.

La maestra precisa que en efecto las variables pueden tomar diferentes valores y muestra una definición formal sobre el concepto de variable. Retoma la participación sobre el tamaño de las personas para afirmar que es un claro ejemplo de una variable y pide a los estudiantes que mencionen otros ejemplos.

Ao 2: El color de la piel

Ao 5. Nuestra edad

Ao 6: El país en donde vivimos

Posteriormente, en una diapositiva se les mostró un letrero publicado en una heladería (Figura 77). Y se les preguntó cuáles eran las dos variables que intervenían en la información mostrada.

Figura 77.
Distinguir cual es la variable dependiente e independiente

Ao 1: El tipo de guarniciones

Mtra.: Una variable tiene ser una magnitud, es decir, algo que se pueda contar, medir, etc. ¿Entonces cómo podríamos expresar como variable las guarniciones?

Ao 5: ¿Cantidad de guarniciones?

Ao 2: y el costo

Mtra.: Muy bien, en efecto las variables son la cantidad de guarniciones que se elijan y el costo (los anota en el pizarrón)

Posteriormente se les muestra una siguiente diapositiva con la definición de los tipos de variables: variable dependiente e independiente. Una alumna dio lectura a cada una de éstas.

Figura 78.
Definición de variable independiente y dependiente

En el espacio designado en las hojas de trabajo, se les pidió a los estudiantes tomar apuntes sobre el concepto de variables y los tipos de ésta. Algunos estudiantes intentaron mencionar con sus palabras lo que habían entendido sobre la definición de cada una.

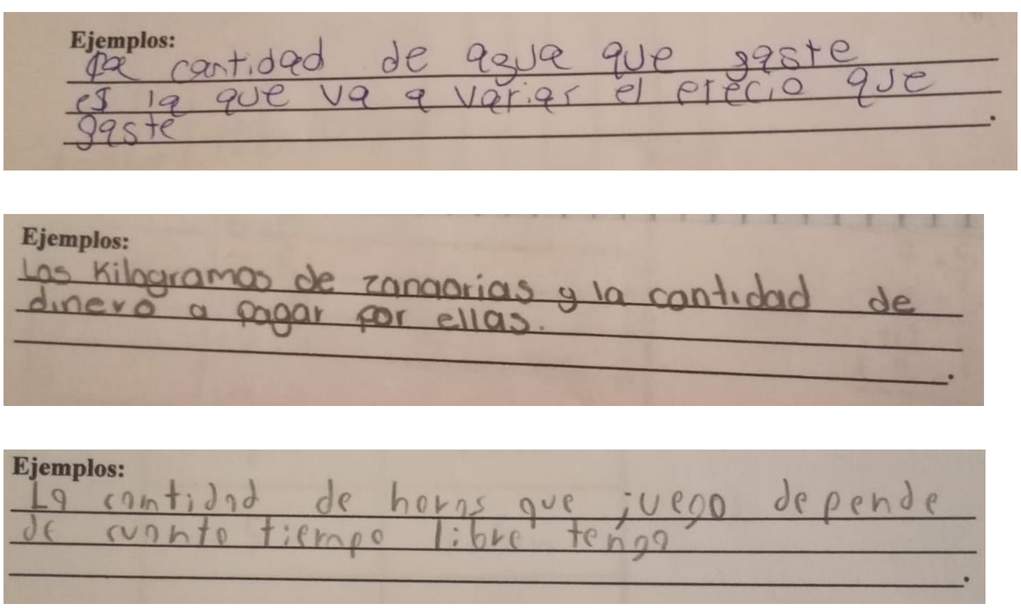
> Mtra.: Tomando en cuenta el letrero que se encuentra en la heladería ¿cuál de las variables es la independiente y cual la dependiente?
>
> Ao 3: Lo que va a pagar depende de la cantidad de dulces que pida.
>
> Ao 7: Sí, entre más dulces más dinero.
>
> Mtra.: Muy bien. Entonces el costo depende de la cantidad de dulces que se elijan poner en el helado (lo escribe en el pizarrón)

Con la finalidad de esclarecer posibles dudas de los estudiantes y/o reafirmar lo que acababan de trabaja, se les mostró en una diapositiva algunas situaciones en las cuales, de manera grupal, tenían que definir de cada una de ellas cual era la variable dependiente y cual la independiente. Los estudiantes se mostraron interesados en la actividad y muy participativos.

Figura 79.
Ejemplos de variables independientes y dependientes

Para culminar esta actividad de inicio se les pidió a los estudiantes escribir en sus hojas de trabajo un ejemplo donde intervinieran una variable dependiente y una independiente. Algunos ejemplos que escribieron los estudiantes pueden verse en la Figura 80.

Figura 80.
Ejemplos de variables dados por los estudiantes



Actividades de desarrollo

Se les pide a los estudiantes dar lectura al problema de los girasoles y posteriormente contestar la pregunta inicial. Se da oportunidad de que los estudiantes contesten el problema por sí mismos.

Actividad 1. En un campo de girasoles se analiza el crecimiento que tienen éstos con ayuda de un fertilizante. Al inicio del experimento, los girasoles tenían una altura de 10 cm, se les roció el fertilizante, y al cabo de tres días se han percatado que ya medían 17.5 cm.

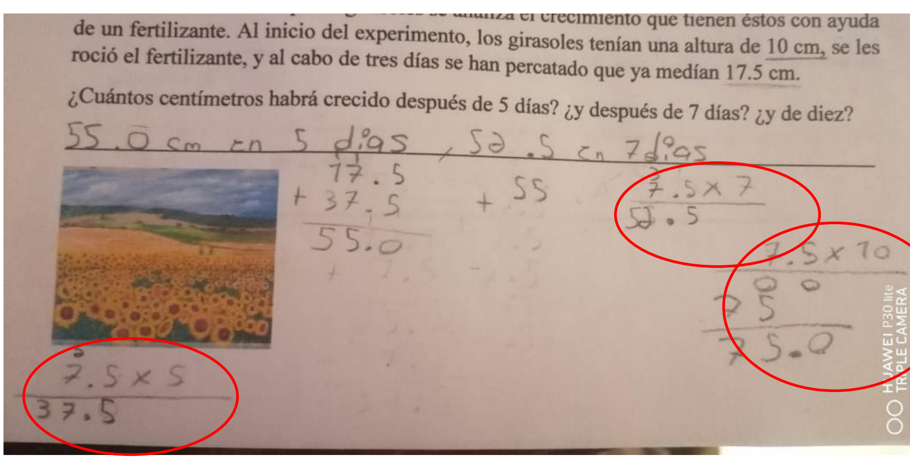
¿Cuántos centímetros habrá crecido después de 5 días? ¿y después de 7 días? ¿y de diez?

____

Un error común de los estudiantes fue pensar que los 7.5 cm que creció la planta después de los tres días que se aplicó el fertilizante, era la medida que crecería diariamente, por tanto, para calcular cuánto crecerían los girasoles en 5, 7 y 10 días las operaciones que se realizaron fueron una multiplicación de 7.5 por cada uno de los días.

Figura 81.

Error de los estudiantes al no contemplar el crecimiento de la planta diariamente



de un fertilizante. Al inicio del experimento, los girasoles tenían una altura de 10 cm, se les roció el fertilizante, y al cabo de tres días se han percatado que ya medían 17.5 cm.

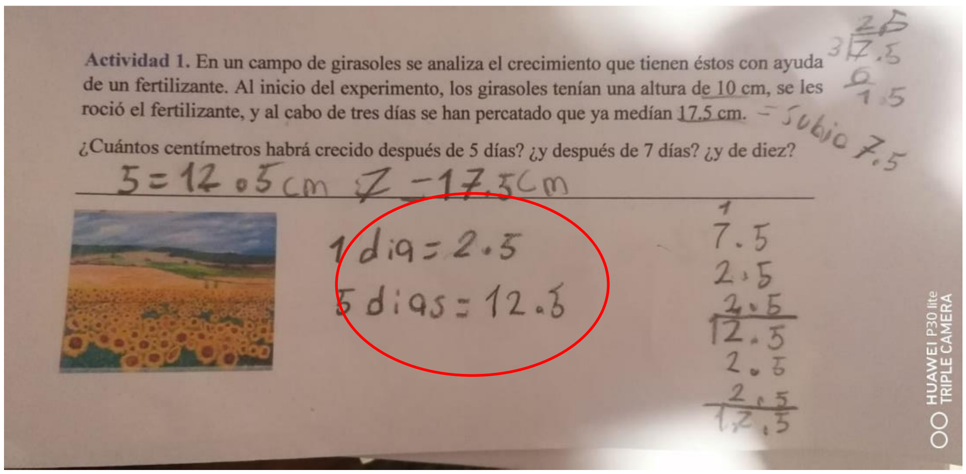
¿Cuántos centímetros habrá crecido después de 5 días? ¿y después de 7 días? ¿y de diez?

55.0 cm en 5 días, 52.5 en 7 días

Otro error común fue, encontrar cuanto habían crecido los girasoles cada día después de la aplicación del fertilizante, es decir, dividir 7.5 entre tres, y este resultado irlo multiplicando por el número de días sin considerar que la planta ya tenía una altura de 10 cm antes de que se aplicara el fertilizante.

Figura 82.

Error del alumno al no contemplar la altura que ya tenía el girasol



Posterior a esta pregunta y con la intención de que los estudiantes, en caso de haber cometido algún error, rectificaran sus respuestas, en las hojas de trabajos se les trató de guiar con preguntas sencillas como ¿Cuántos centímetros median los girasoles antes de aplicar el fertilizante? ¿Cuánto crecieron los girasoles a partir de que se les puso el fertilizante? ¿Cuánto crecieron los girasoles cada día?

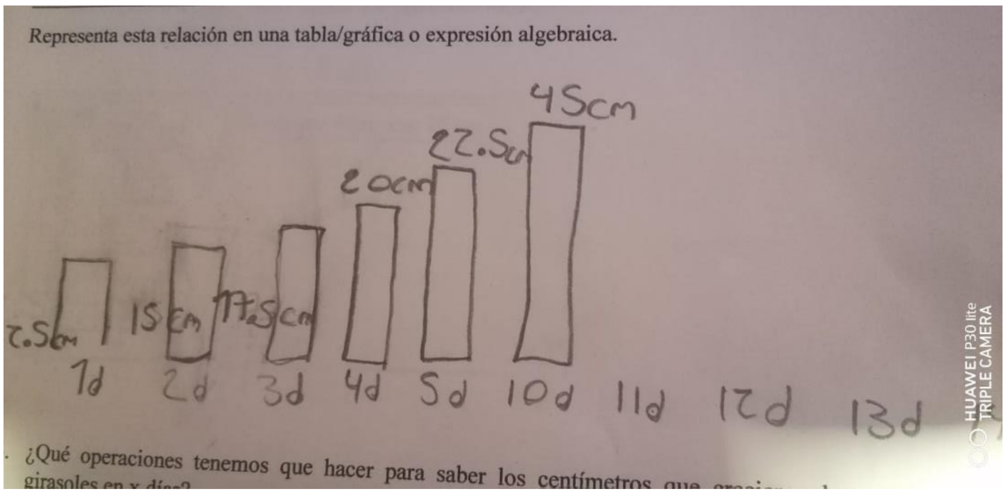
En la práctica, se puede apreciar que dichas preguntas se pueden cambiar de orden dentro de la secuencia didáctica, de tal manera que se ayude a reflexionar a los estudiantes antes de contestar la primera pregunta. Estas preguntas guía inclusive pudiesen hacerse de forma oral.

Un aspecto importante que no se encontró en la secuencia didáctica fue la socialización de los resultados, pues en ese momento se dio por hecho que los estudiantes habían comprendido el problema y se siguió avanzando con la secuencia a pesar de los errores cometidos por los estudiantes.

Continuando con el orden de las preguntas, en la numero 5, se trata de que los estudiantes representen la relación entre el tiempo y la altura de los girasoles de manera natural ya sea en una tabla, gráfica o expresión algebraica. Ante ello, algunos estudiantes optan por crear una tabla, otros una gráfica y una estudiante un mapa conceptual.

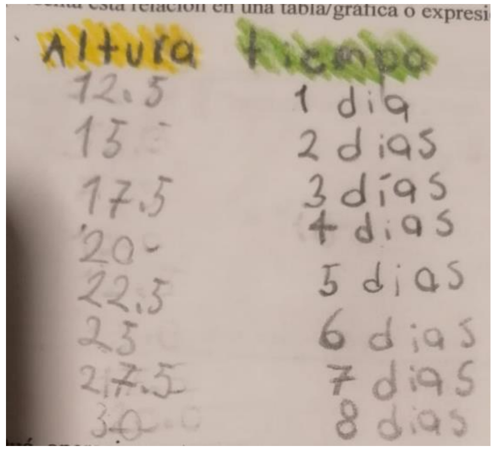
En el análisis de los resultados diagnósticos, se abordó la investigación de Cordero y Flores (2007) sobre el currículo del Sistema Educativo Nacional de México, en la cual se apreciaba que en la educación primaria los estudiantes no trabajan gráficas de funciones, sino gráficas de barras para el análisis de información. Por tal motivo, como puede apreciarse en la Figura 83 los estudiantes recurren a la elaboración de gráficas de barra.

Figura 83.
Graficación de funciones en graficas de barras



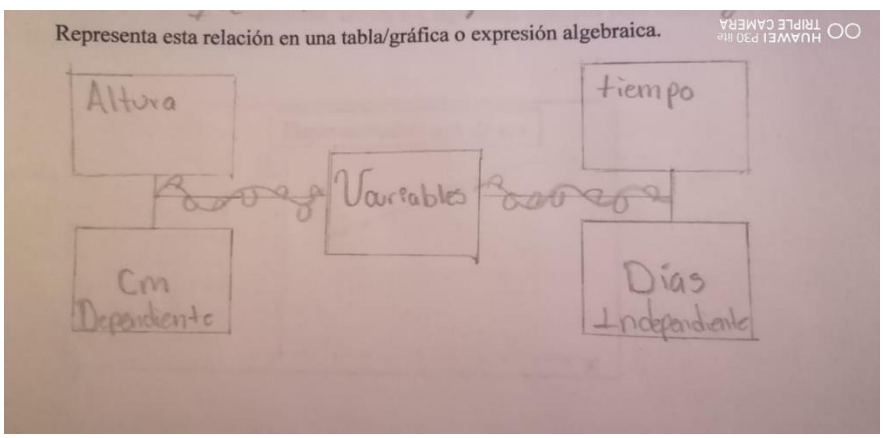
A pesar de que en primaria si se ha trabajado con el llenado de tablas de variación proporcional y de que supieron distinguir de acuerdo al problema, que el tiempo era la variable independiente y la altura de los girasoles la variable dependiente, no realizan el acomodo correcto de las variables en la tabla (véase Figura *84*). Lo cual puede traer como dificultad que al graficar se cambie la posición de las coordenadas.

Figura 84.
Error al acomodar las variables en el registro tabular



Una estudiante, trata de expresar la relación entre las variables de la situación que se les presentó mediante un mapa conceptual, en el que muestra a cada una de las variables: La altura y el tiempo, así como cuál de estas es la variable dependiente y cual la independiente (véase Figura 85).

Figura 85.
Relación entre variables mediante un mapa conceptual.



Como puede observarse, es imprescindible que se retomen los procedimientos de los estudiantes y dado que es su primer acercamiento a la graficación y tabulación de funciones, se les guie en la forma de elaborar correctamente las tablas y gráficas, para que de esta manera puedan proceder a realizar las conversiones, tratamientos y formación de registros de manera correcta.

Una mejora que puede hacerse a la planeación, es mostrar en esta primera actividad la tabla y la gráfica, antes de pedir que por ellos mismos las realicen, con la intención de que vayan analizando las características de cada registro. Al mostrarles estos dos registros se pudieran realizar preguntas del tipo:

- ¿Qué variable se acomoda en la primera columna de la tabla? ¿y en la segunda columna?
- En la gráfica ¿Qué variable se acomoda en el eje de las x? ¿y en el eje de las y?
- ¿Cómo se obtuvo tal punto que está en el plano cartesiano?

También es importante que se vayan puntualizando las características de estos registros, ya que dentro de la planeación no es precisa la formalización del conocimiento matemático. En el caso de la tabla, se puede explorar con los estudiantes que cada día que pasa los girasoles van creciendo la misma cantidad de centímetros, que entre más días pasen mayor será la altura del girasol, que la altura depende de los días que pasen. En el caso de la gráfica que puntualicen que no se formó ninguna figura, sino una recta y que significa ésta.

Siguiendo con el desarrollo de la secuencia didáctica, se les pide a los estudiantes escribir las operaciones que tuvieron que realizar para responder la pregunta inicial: cuanto habían crecido los girasoles en 5, 7 y 10 días. Algunas respuestas que dieron los estudiantes a la pregunta son:

- Es una secuencia de 2.5 así que tenemos que sumar 2.5
- Multiplicar los 2.5 por días más 10
- Debes sumar a 10, 2.5 veces el número de días
- Dividir el 7.5 entre 3 y luego sumarle al 7.5 los 2.5 que sean necesarios.

Las respuestas del grupo, se dividen en dos posturas, la primera ir de 2.5 en 2.5, multiplicando este valor por el número de días, y la segunda, considerar los 2.5 como el crecimiento que tiene la planta diariamente sin olvidar los 10 cm que ya tenía la planta. Hubiera sido muy provechoso que con los resultados que brinda el problema: en tres días la planta tiene un crecimiento de 17.5 cm se hiciera la comprobación de las operaciones que proponen los estudiantes, para de esta forma poderlos guiar hacia la formulación de la función.

La secuencia 1, que consta de actividad inicial, actividad 1 y 2, se contempló para un solo módulo de 50 minutos, lo cual no fue posible, ya que solo se alcanzó a contestar hasta la pregunta 8 de un total de 13 preguntas de la actividad 1.

Para el siguiente modulo que fue al siguiente día, se dio respuesta a la pregunta 9 que solicitaba a los estudiantes escribir de manera algebraica como calcular el crecimiento del girasol en cualquier día, sabiendo que c representa el crecimiento y d los días. Para ayudar a los estudiantes, la maestra solo retomó las respuestas correctas que dieron a la pregunta sobre que operaciones eran necesarias realizar para calcular el crecimiento del girasol en cualquier día.

La expresión que crearon los estudiantes fue: $cxd + 10$, es decir, se multiplica el crecimiento de la planta por los días y se le suma 10. Al analizar la pregunta, ésta no es clara, pues solo se les pregunta como representar de manera algebraica el crecimiento del girasol en un día cualquiera. Esta pregunta pudiese mejorar al escribir una parte de la función y dejar que los estudiantes la completen, por ejemplo:

c= _______________

De igual forma que con el registro tabular y gráfico, es necesario que se trabaje con las características del registro algebraico de una función lineal.

Al ver la expresión que crearon los estudiantes, la maestra trata de guiarlos con preguntas para que logren escribir la función.

Mtra. ¿Qué queremos saber?

Ao. 6. Cuanto crecen los girasoles en diferentes días

Mtra.: Por lo tanto, debemos poner que c es igual a…. (escribe en el pizarrón c=)

Mtra.: ¿Cuál fue el crecimiento de la planta cada día? (registra en el pizarrón la respuesta que dan los alumnos)

Mtra.: ¿Qué altura tenía ya la planta antes de utilizar fertilizante?

Mtra.: Entonces ¿cuál es el valor que se multiplica por los días que pasan y cuanto se suma? (completa la función con la respuesta de los estudiantes $c = 2.5d + 10$)

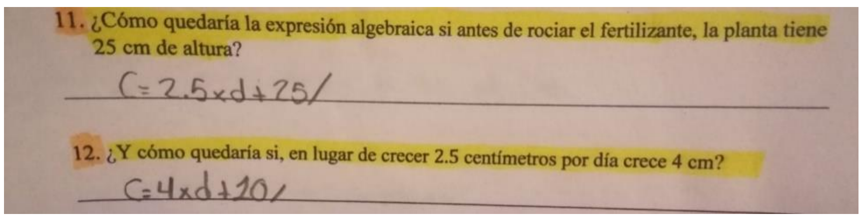
Los estudiantes se mostraron confundidos ante esta situación, sin embargo, al empezar a usar la función para ir encontrando valores, rápidamente comprendieron como utilizarla, esto se vio reflejado ya que las preguntas 11 y 12 pedían escribir una nueva expresión, pero ahora modificándole algunos datos:

11. ¿Cómo quedaría la expresión algebraica si antes de rociar el fertilizante, la planta tiene 25 cm de atura?

12. ¿Y cómo quedaría si, en lugar de crecer 2.5 cm por día crece 4?

Ante lo cual, los estudiantes fueron capaces de escribir correctamente ambas expresiones (véase Figura 86), claro que todavía con aspectos del lenguaje algebraico por mejorar, como eliminar el signo “por”. Además, cumplieron con la indicación de tabular y graficar el crecimiento de los girasoles dados estos nuevos valores. Los estudiantes sustituyeron correctamente los valores que se les pedían en las tablas. Para graficar, se les explicó que la variable independiente, en este caso, el tiempo siempre se colocaba en el eje x, mientras que la variable dependiente, en el eje de las y, así como también se les recordó la posición de cada uno de los ejes.

Figura 86.
Formulación correcta de funciones


11. ¿Cómo quedaría la expresión algebraica si antes de rociar el fertilizante, la planta tiene 25 cm de altura?

C=2.5xd+25

12. ¿Y cómo quedaría si, en lugar de crecer 2.5 centímetros por día crece 4 cm?

C=4xd+10

Dado que no se retomó el tipo de gráfica que se debe elaborar dada la situación, pocos estudiantes continuaron haciendo en esta parte gráficas de barra.

Para culminar la actividad número 1, se les pide subrayar la respuesta a la pregunta: Si se te preguntara por el crecimiento de los girasoles en un día particular ¿Cómo te sería más fácil contestar? Cuya respuesta más común fue sustituyendo valores en la expresión algebraica y poniendo como justificación que en esta es más entendible ya que solamente es cambiar valores.

Esta respuesta de los estudiantes, está relacionada con la actividad 2 de la secuencia, ya que en esta se les pide que a partir de la gráfica identifiquen el crecimiento que tendrá la planta en 4.5 días. Ante lo cual, los estudiantes no son capaces de contestar a esta pregunta.

Ao 3: Se multiplica 4.5 por 2.5 y se le suma 10

Mtra. Sí, pero la actividad les está pidiendo como obtener la altura a partir de la gráfica, no de la expresión algebraica.

Ao 8: Es que se multiplica.

Ante esta confusión de los estudiantes, se proyectó la gráfica trazada en GeoGebra, y se explicó a los estudiantes que primero debían ubicar en el eje x los 4.5 días y posteriormente deslizar su dedo verticalmente y ver en qué punto pasaba la recta. Este ejercicio, fue algo que no se consideró en la planeación, pero que marcó la diferencia entre el llevar a los alumnos a leer la gráfica o verla simplemente como algo totalmente aislado del problema.

Posteriormente se siguió trabajando con la exploración de la gráfica haciendo preguntas semejantes utilizando diferentes días y cambiando un poco la pregunta, ahora haciendo referencia de cómo por medio de la gráfica averiguar en qué día la planta tendría tal altura. Por último, se analizó las desventajas de leer la información de la gráfica, a lo cual los estudiantes contestaron que los resultados eran aproximados, ya que se trabaja con diferentes escalas y a veces es difícil dar resultados precisos.

Por último, se realizaron las preguntas: ¿Cómo se interpreta el hecho de que la gráfica sea una recta su sube por la derecha? Y ¿Cómo se interpretará la situación si la gráfica fuera una recta horizontal?

Ao 4: A que los girasoles van creciendo

Ao 6: a que van tomando mayor altura

Mtra. Muy bien, ¿y que creen que signifique que la recta este hacia el otro lado, hacia la izquierda?

Ao 2: Pues que algo va disminuyendo

Mtra.: A ver como que ejemplo podríamos dar

Ao 4: Como cuando el agua se tira

Ao 1: Cuando gastamos dinero

Al realizar la secuencia didáctica, pareció imposible el hecho de que los estudiantes pudieran crear un problema dada una gráfica con pendiente negativa, el anterior dialogo, muestra que los estudiantes son capaces de dar ejemplos de su vida diaria en donde los valores descienden.

Mtra.: ¿y que significaría si la recta está totalmente horizontal?

Ao 3. Que no pasa nada

Ao 9. Que básicamente no ha cambiado nada

Ao 1: Que todo está igual y no hay cambio

Mtra. Muy bien, significa que nunca cambia su valor

El tratamiento que se dio al registro gráfico fue satisfactorio, no obstante, se pueden incorporar nuevos aspectos. Algunos de estos pudieran ser:

- Relacionar la función con su registro gráfico
- Preguntar cómo se imaginan que sería la función de una recta que sube hacia la izquierda
- Preguntar situación de la vida diaria que pudiera ser representada con una recta horizontal
- Comenzar a trabajar la relación entre el registro gráfico y algebraico.
- Trabajar con el tiempo de la secuencia didáctica, ya que la sesión 1 que se tenía propuesta para un solo modulo, casi abarco dos módulos completos.
- Corregir las gráficas dando valores más pequeños a las gráficas para que los estudiantes puedan leerlas fácilmente.

La intención didáctica de esta primera sesión podría ser cambiada a que los estudiantes realicen tratamiento al registro gráfico, tabular y algebraico.

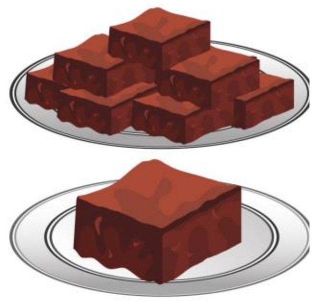
Sesión 2

Intención didáctica: Qué los estudiantes, a partir del registro tabular, realicen conversiones al registro verbal, gráfico y algebraico.

En esta sesión se trabaja con la actividad 3, cuyo objetivo es que los estudiantes elijan cuál de las situaciones planteadas concuerda con la información de la tabla. Dadas las características de las situaciones que se plantean, para los estudiantes fue muy fácil encontrar la respuesta correcta, ya que los valores de las demás situaciones no coinciden con la información dada en la tabla. Se reconoce que los estudiantes realizaron correctamente la conversión del registro tabular al gráfico.

Actividad 3. Observa los datos en la siguiente tabla y elige, de las situaciones listadas, cuál puede contestarse con ellos.

Piezas de brownies (x)	Costo (y)
0	0
2	$24
3	$36
5	$60
7	$84



1) En una panadería se venden dos brownies por $12.00. ¿Cuánto se tiene que pagar por 5 piezas?
2) En una panadería, se venden brownies. Si por 10 brownies se paga $140 ¿Cuánto se tiene que pagar por 15 brownies?
3) En la panadería de Mariana por tres brownies que compres se te regala uno ¿Cuántos brownies se regalaran en la compra de 16 brownies?
4) En la panadería de Mariana se venden brownies cada uno a $12.00 ¿Cuánto se tendría que pagar por 7 de ellos?

Posteriormente la misma actividad les pide a los estudiantes, expresar algebraicamente la relación representada en la tabla, sabiendo que x son las piezas de brownies y y el costo. Algunas de las expresiones que los estudiantes emplearon fueron: $y = 12, y = 12(x), y = 2 \cdot x$. Al igual que en la actividad anterior, para los estudiantes es fácil sustituir los valores en la expresión y contestar las preguntas que se le realizan acerca del costo de diferentes cantidades de brownies.

Al graficar esta situación, ya no se observan graficas de barras, los estudiantes fueron colocando algunos puntos en su plano y posteriormente se les pidió unirlos. Algunos tuvieron confusión, puesto que, con las escalas asignadas a los ejes, en ocasiones no les quedaba completamente una línea recta.

Se les pidió que colocaran su regla sobre la recta y la prolongaran de tal manera, que pudieran dar respuesta a la pregunta: ¿la recta toca en algún punto a los ejes? ¿dónde? Dicha pregunta solo tuvo 4 respuestas, dos de ellas indicaban que se tocaba solo el eje x, mientras que las otras dos respuestas estaban encaminadas a mencionar que se tocaban ambos ejes. Una mejora que se podría realizar a esta pregunta, es lo siguiente:

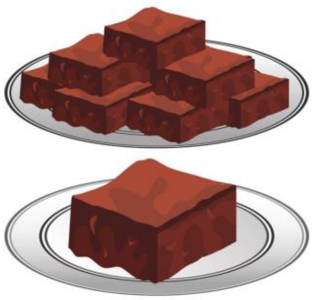
¿La Recta toca en algún punto algunos de os ejes?

¿En qué coordenada?

¿sobre qué eje?

Actividad 4. En la panadería de Mariana, se realizó una oferta: a partir de 100 pesos de compra de cualquier producto, los brownies se rebajan a $8.00.

Descubre si la tabla y la expresión algebraica representan la situación planteada



Piezas de brownies (x)	**Costo (y)**
0	100
1	108
2	116
3	124
4	132
10	180
21	268

y=100x+8

Para esta actividad se pide a los estudiantes que respondan si la tabla y función representan la información planteada, a lo que varios estudiantes comentaron que no, que la tabla era incorrecta ya que no coincidían los valores. En este caso, los estudiantes no realizaron la conversión del registro verbal al tabular, sino que partieron del registro que más se les facilita: del algebraico al tabular.

Dada la situación anterior, con sus propias palabras la docente explica el problema planteado y vuelve a realizar la pregunta, los estudiantes corrigen sus respuestas dándose cuenta de que la función es el registro incorrecto.

Para finalizar con la actividad 4, se les pide realizar la gráfica. Una vez que está elaborada, se les pide comparar la función $y = 12x$ (actividad 3) con la gráfica de la función $y = 8x + 100$ (actividad 4), realizando preguntas como ¿Qué sucede con la reta cuando el coeficiente se vuelve más grande o pequeño? ¿las rectas tocan en algún punto los ejes?

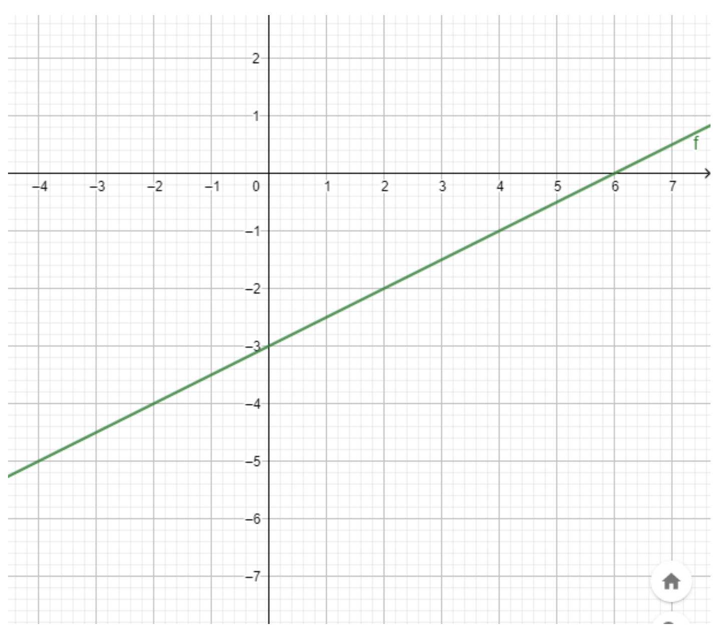
La primera pregunta fue difícil de responder para los estudiantes ya que les fue difícil identificar que era un coeficiente. Es importante que desde la sesión anterior se trabaje con los estudiantes el concepto de pendiente como la inclinación de la recta, de tal manera que se les pueda cambiar la pregunta a los estudiantes como ¿Qué sucede cuando la pendiente de la recta se vuelve más grande o más pequeña?

Se trabajó nuevamente con el programa GeoGebra, mostrándole a los estudiantes funciones con diferentes valores de pendientes y ordenada al origen con la finalidad de ayudaros a contestar las preguntas y entendieran la relación entre el registro gráfico y algebraico.

Sesión 3

Intención didáctica: Que los estudiantes, a partir del registro gráfico, realicen conversiones al registro tabular, verbal y algebraico

Actividad 5. Revisa la siguiente gráfica y a partir de ella realiza lo que se te pide.



d) Localiza cinco puntos que estén sobre la gráfica, márcalos con colores y nómbralos con las letras A, B, C, D y E.
e) Con estos puntos, completa la siguiente tabla:

PUNTO	**COORDENADAS**	**Variable x**	**Variable y**
A			
B			
C			
D			
E			

Por cuestiones de aplicación de la prueba estandarizada y a que el viernes 18 de marzo es día inhábil para los estudiantes, solo se pudieron trabajar tres horas-clase a la semana y considerando que la secuencia 1 se llevó dos módulos, en el tercero de estos solo fue posible trabajar hasta la segunda sesión, la tercera sesión quedó pendiente.

Ante esto se propone que en lugar de que la secuencia didáctica sea para cuatro sesiones, esta se alargue a 5 sesiones para que sea posible desarrollar completamente la secuencia, haciendo los cambios que se han propuesto a lo largo de esta secuencia.

Cabe aclarar que conforme a lo observado en la sesión 1 y 2, se realizaran también modificaciones a la sesión 3.