

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"



UNIDAD ACADÉMICA DE
MATEMÁTICAS



TALLER DE FORMACIÓN CONTINUA
CENTRADO EN EL DISEÑO DE TAREAS DE
ENSEÑANZA PARA FAVORECER EL
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL
CONTENIDO EN EL TEMA DE FRACCIONES

Tesis que para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el
Nivel Secundaria

Presenta:

Rubén Omar González Balderas

Directora de tesis:

Dra. Darly Alina Kú Euán

Codirectora

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre **"Taller de formación continua centrado en el diseño de tareas de enseñanza para favorecer el conocimiento didáctico del contenido en el tema de fracciones"** y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. **Rubén Omar González Balderas** egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria, ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 29 de septiembre del 2022



Dra. Darly Alina Ku Euan
Universidad Autónoma de Zacatecas
ASESORA



Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas
COASESORA

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 29 del mes de septiembre del año 2022, el que suscribe Rubén Omar González Balderas egresado del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 20202347; manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado intitulado “Taller de formación continua centrado en el diseño de tareas de enseñanza para favorecer el conocimiento didáctico del contenido en el tema de fracciones” bajo la dirección de la Dra. Darly Alina Kú Euán y la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.



Rubén Omar González Balderas

Nombre y Firma del estudiante

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de posgrado.



Rubén Omar González Balderas

No. CVU: 1084756

Número de apoyo: 779865

RESUMEN

El objetivo de este trabajo de investigación fue diseñar un taller de formación continua que favorezca los conocimientos didácticos del contenido para el tema de fracciones en profesores de educación primaria. Para realizarlo, se consideró la fase de profundización del Análisis Didáctico como instrumento teórico-metodológico para diseñar el taller de formación continua, y el modelo teórico Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) para identificar los conocimientos didácticos del contenido a enseñar.

Entre los resultados más relevantes está que la propuesta de la fase de profundización del Análisis Didáctico fue pertinente para diseñar un taller de formación continua, pues permitió evidenciar no solamente los conocimientos didácticos del contenido que los profesores emplean en el diseño de una clase escolar para el tema de fracciones, sino aquellos que se favorecen a través de las actividades propuestas en el taller implementado. Entre estos conocimientos están:

- *Análisis de contenido*, el vínculo entre el *conocimiento del currículo* en relación con el componente estructura conceptual del *análisis de contenido*, en tanto el profesor organizó y seleccionó el contenido de fracciones con base en documentos oficiales;
- *Análisis cognitivo*, se evidenció *conocimiento del contenido y los estudiantes* estrechamente relacionado con el *análisis cognitivo* en sus componentes expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas, toda vez que los profesores seleccionaron a través de su experiencia profesional y revisión bibliográfica, demandas cognitivas que permiten superar las expectativas seleccionadas y las limitaciones que consideran sobre el contenido de fracciones en relación con el aprendizaje de sus alumnos;
- *Análisis de instrucción*, se evidenció como el *análisis de contenido* y el *análisis cognitivo* descrito en los dos párrafos anteriores, se ubicaron dentro de las tareas de enseñanza que los profesores seleccionaron o diseñaron para el tema de fracciones, además de vincular el *conocimiento del contenido y la enseñanza* con los componentes del *análisis de contenido, análisis cognitivo y el análisis de instrucción*.

La importancia de este trabajo, radica en promover talleres que permitan brindar experiencias de aprendizaje profesional a los profesores, con la intención de mejorar el conocimiento didáctico del contenido matemático para la selección y diseño de tareas de enseñanza.

Palabras clave: Análisis Didáctico, tareas de enseñanza, conocimiento didáctico del contenido.

ABSTRACT

The objective of this research work was to design a continuous training workshop that favors the didactic knowledge of the content for the subject of fractions in primary education teachers. To do this, the deepening phase of the Didactic Analysis was considered as a theoretical-methodological instrument to design the continuous training workshop, and the theoretical model Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) to identify the pedagogical knowledge to be taught.

Among the most relevant results is that the proposal of the Didactic Analysis deepening phase was pertinent to design a continuous training workshop, since it allowed to demonstrate not only the didactic knowledge of the content that teachers use in the design of a school class for the topic of fractions, but those that are favored through the activities proposed in the implemented workshop. Among these skills are:

- *Content analysis*, the link between the knowledge of the curriculum in relation to the conceptual structure component of content analysis, as the teacher organized and selected the content of fractions based on official documents;
- *Cognitive analysis*, knowledge of the content and students closely related to the cognitive analysis in its components learning expectations, learning limitations and cognitive demands was evidenced, since teachers selected through their professional experience and literature review, cognitive demands that they allow to overcome the selected expectations and the limitations that they consider about the content of fractions in relation to the learning of their students;
- *Instruction analysis*, it was evidenced how content analysis and cognitive analysis described in the two previous paragraphs, were located within the teaching tasks that teachers selected or designed for the topic of fractions, in addition to linking content knowledge and teaching with the components of content analysis, cognitive analysis, and instructional analysis.

The importance of this work lies in promoting workshops that allow providing professional learning experiences to teachers, with the intention of improving the pedagogical knowledge of mathematical content for the selection and design of teaching tasks.

Keywords: Didactic Analysis, teaching tasks, pedagogical knowledge.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	13
CAPÍTULO 1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	17
1.1 Motivación	17
1.2 Antecedentes	18
1.2.1 Espacios de formación continua como oportunidad para favorecer el conocimiento didáctico del contenido	19
1.2.2 Investigaciones acerca del Análisis Didáctico como herramienta para el desarrollo profesional de profesores de matemáticas.....	21
1.2.3 Contenido Matemático de fracciones	23
1.2.4 Investigaciones sobre el aprendizaje de las fracciones. Panorama Nacional.....	25
1.2.5 Investigaciones realizadas sobre el conocimiento del profesor en torno a las fracciones	26
1.2.6 Reflexión	29
1.3 Planteamiento del Problema.....	30
1.3.1 Problemática	30
1.3.2 Problema.....	30
1.3.3 Pregunta de Desarrollo Profesional.....	31
1.3.4 Objetivo general	31
1.3.5 Objetivos Particulares.....	31
1.3.6 Hipótesis	31
1.4 Justificación	32
CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	34
2.1 Análisis didáctico.....	34
2.1.1 El Análisis de contenido.....	35
2.1.2 El Análisis cognitivo.....	38
2.1.3 El Análisis de instrucción	39
2.2 Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball y colaboradores).....	43
2.2.1 Conocimiento del contenido.....	43
2.2.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	44

2.3 Fases en el Análisis Didáctico con fines formativos e investigativos.....	46
CAPÍTULO 3 MARCO METODOLÓGICO	49
3.1 Metodología	49
3.1.1 Tipo de investigación	49
3.2 Método.....	50
3.2.1 Diseño del taller	50
3.2.2 Experimentación (aplicación del taller)	54
3.2.3 Técnica	55
3.3 Instrumentos para recoger información.....	55
3.4 Instrumentos para el análisis de la información	56
CAPÍTULO 4 DISEÑO DEL TALLER	58
4.1 Análisis Didáctico - Fase de profundización. Tema de fracciones en educación primaria.....	58
4.1.1 Análisis de Contenido del tema de fracciones en educación primaria	58
4.1.2 Análisis cognitivo del tema de fracciones en educación primaria.....	69
4.1.3 Análisis de instrucción para el tema de fracciones en educación primaria	84
4.2 Taller de formación continua centrado en el diseño de tareas de enseñanza para favorecer el conocimiento didáctico del contenido en el tema de fracciones	93
4.2.1 Contexto y participantes	93
4.2.2 Taller de formación continua centrado en el diseño de tareas de enseñanza para el tema de fracciones.....	94
CAPÍTULO 4 RESULTADOS.....	109
4.3 Fase formativa 1. Construcción del análisis de contenido.....	109
4.3.1 Estructura conceptual	111
4.3.2 Sistemas de representación.....	112
4.3.3 Fenomenología	113
4.4 Fase formativa 2. Análisis cognitivo: Identificación y selección de expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas con base en la experiencia y el grado escolar que se atiende.	113
4.4.1 Expectativas de aprendizaje	113

4.4.2	Limitaciones de aprendizaje.....	116
4.4.3	Demandas cognitivas.....	117
4.5	Fase formativa 3. Conocimientos didácticos del contenido que se favorecen al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel primaria, a través del taller realizado con base en la fase de profundización del Análisis Didáctico.	124
4.5.1	Episodio [1]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del primer grado escolar de educación primaria (min 1:06:04 – 1:17:40) .	127
4.5.1	Episodio [2]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del segundo grado escolar de educación primaria (min 26:02 – 1:29:54)..	133
4.5.1	Episodio [3]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del tercer grado escolar de educación primaria (min 57:34 -1:02:47)	136
4.5.1	Episodio [4]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del cuarto grado escolar de educación primaria (min 1:18:57 – 1:22:03) .	138
4.5.2	Episodio [5]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del quinto grado escolar de educación primaria.....	140
4.5.1	Episodio [6]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del sexto grado escolar de educación primaria (min 24:06 – 28-24).....	141
4.5.2	Episodio [7]. Unidad de servicio de apoyo a la educación regular (min 46:41 - 53:25).....	145
	CONCLUSIONES.....	151
4.6	Conclusiones de la etapa de diseño del taller	151
4.7	Conclusiones de la etapa de implementación del taller	152
4.7.1	Análisis de contenido	152
4.7.2	Análisis cognitivo	157
4.7.3	Análisis de instrucción	161
4.8	Conclusiones sobre los objetivos de investigación.....	163
	REFLEXIONES.....	166
	REFERENCIAS	169

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 <i>Concepto del significado de fracción parte - todo</i>	23
Figura 2 <i>Concepto del significado de fracción como cociente</i>	24
Figura 3 <i>Concepto del significado de fracción como razón</i>	25
Figura 4 <i>Concepto del significado fracción como operador</i>	25
Figura 5 <i>Fases en el análisis didáctico del ámbito investigativo y formativo dentro del taller de formación continua</i>	48
Figura 6 <i>Fases y acciones que conformarán el diseño del taller de formación continua en el tema matemático de fracciones</i>	51
Figura 7 <i>Variante Pictórica</i>	62
Figura 8 <i>Representación numérico - geométrico</i>	63
Figura 9 <i>Representación tabular 3º</i>	64
Figura 10 <i>Representación tabular 5º</i>	64
Figura 11 <i>Representación tabular 5º No. 2</i>	65
Figura 12 <i>Representación geométrica 3º</i>	66
Figura 13 <i>Imagen para ilustrar $\frac{1}{4}$ en 3º</i>	66
Figura 14 <i>Uso de Tiras con fracciones</i>	67
Figura 15 <i>Problema de reparto</i>	84
Figura 16 <i>Problema de reparto 3º</i>	86
Figura 17 <i>Representación geométrica del listón</i>	87
Figura 18 <i>Integración a través de una visión global de diferentes aprendizajes aprendidos</i>	90
Figura 19 <i>Material didáctico regletas</i>	92
Figura 20 <i>Referente visual para resolver problemas de reparto</i>	93
Figura 21 <i>Primer acercamiento a organizar y seleccionar los significados de los conceptos y procedimientos del tema matemático de fracciones</i>	110
Figura 22 <i>Mapa conceptual para el tema de fracciones del quinto grado escolar de educación primaria al finalizar la fase formativa 1</i>	112
Figura 23 <i>Vínculos entre dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza y el Análisis didáctico</i>	125

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 <i>Instrumento para el análisis de contenido.</i>	51
Tabla 2 <i>Instrumento para análisis cognitivo.</i>	52
Tabla 3 <i>Instrumento para análisis de instrucción</i>	53
Tabla 4 <i>Instrumento para establecer la relación de conocimiento didáctico del contenido con el análisis didáctico empleado por los profesores.</i>	57
Tabla 5 <i>Orientaciones didácticas tercer grado de educación primaria</i>	73
Tabla 6 <i>Orientaciones Didácticas cuarto grado de educación primaria</i>	75
Tabla 7 <i>Orientaciones didácticas quinto grado de educación primaria</i>	77
Tabla 8 <i>Orientaciones didácticas sexto grado de educación primaria</i>	80
Tabla 9 <i>Dosificación del plan general del taller de formación continua</i>	95
Tabla 10 <i>Aprendizaje esperado y expectativa de aprendizaje para el tema de fracciones seleccionado por los profesores con base en el grado escolar que atienden</i>	114
Tabla 11 <i>Limitaciones por grado escolar consideradas en el tema de fracciones</i>	116
Tabla 12 <i>Análisis cognitivo por grado escolar en educación primaria y la Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular</i>	119

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación muestra el diseño de un taller de formación continua, que tiene por intención favorecer el conocimiento didáctico del contenido en profesores de educación primaria para el tema de fracciones, lo anterior pretende continuar sumando aportes en beneficio del proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. Esta investigación se enmarca en la formación continua de profesores en servicio, basada en la práctica docente previa a la clase, ya que se considera práctica docente no solo a la ejecución sino también a la organización que le antecede, por ejemplo, cuando prepara su planeación o su clase en donde también se puede evidenciar conocimiento, y no solo eso, sino favorecer y promover.

Por lo tanto, para efectos de la presente investigación, se consideró un grupo de profesores en servicio, de primer a sexto grado de educación primaria y la Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular, pertenecientes a la Escuela primaria "Manuel Ávila Camacho", donde el interés residió en diseñar un taller de formación continua centrado en el contenido matemático de fracciones, aplicarlo y promover conocimiento didáctico del contenido.

Dicho taller se enmarca en la fase de profundización del Análisis Didáctico como un medio para favorecer los conocimientos didácticos del contenido de los profesores referente al contenido matemático de las fracciones (Gómez, 2002, 2007, 2008; Lupiañez, 2009, 2010; Rico, 2013), y el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza con base en los aportes de Ball, Thames & Phelps (2008), como herramienta para identificar los Conocimientos Didácticos del Contenido que se pretenden favorecer en profesores de primaria durante la implementación del taller.

En este sentido, se estructuró la investigación en 6 capítulos. El capítulo 1 expresa la motivación que me trajo a realizar esta investigación en Educación Matemática, así mismo, se describen aspectos introductorios que ayudarán a comprender la elección del tema y el camino que tomará la investigación, ellos son: los antecedentes y reflexión, donde el principal foco de interés, es reconocer el diseño de talleres de formación continua, como oportunidades de experiencia profesional que permitan desarrollar conocimiento didáctico del contenido, para el diseño de tareas de enseñanza en profesores; resaltar las características esenciales que permiten tomar la fase de profundización del Análisis Didáctico como herramienta metodológica para diseñar un taller de formación continua; mostrar el concepto de fracción y sus diferentes significados que se consideran dentro del Plan y Programa de Estudios (2017) en educación primaria; y resaltar la viabilidad de establecer vínculos entre el modelo del conocimiento del profesor

MKT y el Análisis Didáctico como herramienta metodológica para diseñar el un taller de formación continua que permita identificar y promover conocimiento didáctico del contenido en profesores de educación primaria al seleccionar o diseñar tareas de enseñanza para el tema de fracciones.

Además se sienta la problemática, problema, pregunta, objetivos y justificación del estudio, con base en los antecedentes mencionados y el interés de investigación.

En el capítulo 2 con vista en el objetivo central del tema de investigación que se aborda, se presentan las bases teóricas del estudio en dos núcleos: el Análisis Didáctico y el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Dentro del primer núcleo, se presta especial atención a la fase de profundización del Análisis Didáctico como herramienta teórico-metodológica para el diseño e implementación del taller de desarrollo profesional, como un medio para favorecer los conocimientos didácticos del contenido de los profesores referente al contenido matemático de las fracciones (Gómez, 2002, 2007, 2008; Lupiañez, 2009, 2010; Rico, 2013). Respecto al segundo núcleo, se presenta el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza con base en los aportes de Ball et al., (2008), como herramienta para identificar los Conocimientos Didácticos del Contenido que se pretenden favorecer en profesores de primaria durante la implementación del taller.

El capítulo 3 expone la fundamentación, procedimientos y los elementos del marco metodológico que sustentan la presente investigación, destacando el paradigma de la investigación de diseño centrada en la metodología de experimentos de enseñanza (Molina et al., 2011), de corte cualitativo como lo menciona Hernández, Fernández y Baptista (2014), y cuyo método es basado en el diseño del taller fundamentado con la fase de profundización del Análisis Didáctico (Gómez, 2002, 2007, 2008; Lupiañez, 2009, 2010; Rico, 2013). Además en este apartado, se muestra la técnica e instrumentos para la recolección y análisis de la información.

El capítulo 4 muestra y describe el proceso que se llevó a cabo para el diseño del taller, presentado en momentos: en el primero, se presentan los resultados de cada uno de los análisis que conforman la fase de profundización del Análisis Didáctico respecto al tema de fracciones en educación primaria, estos resultados fueron concebidos por el investigador, fueron las bases que permiten el diseño del taller de formación continua y fueron utilizados como referente para identificar los conocimientos didácticos del contenido que el profesor pone en juego a la hora de seleccionar y diseñar tareas de enseñanza. Posteriormente en el segundo momento, se muestra la estructura y diseño del taller de formación continua.

El capítulo 5 presenta y describe los resultados divididos en tres apartados, correspondientes a las fases formativas del taller de formación continua centrado en la fase de profundización del Análisis Didáctico para el tema de fracciones. En el primer apartado: Fase formativa 1. Construcción del análisis de contenido, se describe el análisis de contenido desarrollado por los profesores durante el taller, llegando a organizar y seleccionar los significados del concepto de fracción en educación primaria con base en los componentes del análisis de contenido, esto en atención al objetivo particular número cuatro de la presente investigación.

En el segundo apartado, fase formativa 2. Análisis cognitivo: Identificación y selección de expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas con base en la experiencia y el grado escolar que se atiende, donde el foco de interés reside en describir la forma en que los profesores aplican los elementos del análisis cognitivo al diseñar tareas de enseñanza, con el cual se cubre el objetivo particular número cuatro.

Por último, el tercer apartado, fase formativa 3. Conocimientos didácticos del contenido que se favorecen al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel primaria, a través del taller realizado con base en la fase de profundización del Análisis Didáctico. Donde se identifican los conocimientos didácticos del contenido que se favorecieron, al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel de primaria a través del taller realizado, objetivo particular cinco.

Para finalizar en el capítulo 6 se presentan las conclusiones referentes al taller de formación continua, centrado en el diseño de tareas de enseñanza para favorecer el conocimiento didáctico del contenido en el tema de fracciones, dando claridad a los resultados obtenidos que permiten dar cuenta de los objetivos alcanzados y la respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Entre los conocimientos que se favorecieron y entorno giran las conclusiones están:

- Referente al *análisis de contenido*, el vínculo entre el *conocimiento del currículo* en relación con el componente estructura conceptual del *análisis de contenido*, en tanto el profesor organizó y seleccionó el contenido de fracciones con base en documentos oficiales;
- Dentro del *análisis cognitivo*, los profesores evidenciaron *conocimiento del contenido y los estudiantes* estrechamente relacionado con el *análisis cognitivo* en sus componentes expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas, toda vez que los profesores

seleccionaron a través de su experiencia profesional y revisión bibliográfica, demandas cognitivas que permiten superar las expectativas seleccionadas y las limitaciones que consideran sobre el contenido de fracciones en relación con el aprendizaje de sus alumnos;

- Por último, en el *Análisis de instrucción*, se evidenció como el *análisis de contenido* y el *análisis cognitivo* descrito en los dos párrafos anteriores, se ubicaron dentro de las tareas de enseñanza que los profesores seleccionaron o diseñaron para el tema de fracciones, además de vincular el *conocimiento del contenido* y *la enseñanza* con los componentes: sistemas de representación del *análisis de contenido*; expectativas de aprendizaje del *análisis cognitivo*; y adecuación, complejidad y resolución de problemas y modelización del *análisis de instrucción*.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta en primera instancia la motivación que me trajo a realizar esta investigación en Educación Matemática, así mismo, se describen aspectos introductorios que ayudarán a comprender la elección del tema y el camino que tomará la investigación, ellos son: los antecedentes y reflexión, problemática, problema, pregunta, objetivos y justificación del estudio.

1.1 Motivación

El interés que impera en el desarrollo de esta investigación, parte de las dificultades que como docentes encontramos en nuestra labor de enseñanza de las matemáticas, en el compromiso que lleva formar alumnos íntegros como parte de una sociedad y en la búsqueda de la trascendencia en la enseñanza Matemática para su aplicación en el mundo actual que sufre constantes cambios, mismo que conlleva implícita mi responsabilidad como profesor y mi interés en formarme como formador de profesores.

Empero, las Matemáticas se han vuelto inmersas en grandes controversias y estereotipos que impactan el rendimiento escolar, y que en muchas ocasiones como docentes contribuimos a reforzarlas, no hablo de ideas buenas, al contrario, estereotipos de su dificultad, de su relevancia social e incluso desmitificar la credibilidad de las matemáticas como un cambio social, que en consecuencia, genera ante la sociedad y nuestros alumnos, creencias e ideologías de una matemática difícil, sin utilidad y abrumadoras.

De esta forma, considero que desde la formación de profesores se podrán arribar a dichos pensamientos, permitiendo construir una visión de la educación como un pilar para el cambio social, y que al hacerlo, los profesores transmitan actitudes favorables hacia las matemáticas, mostrando su utilidad y su valor científico y cultural a sus alumnos, ya que, con el estudio de las matemáticas, se razona y se ordena el pensamiento, condiciones indispensables para que todo individuo pueda desenvolverse y solucionar los retos que se le presenten en la vida cotidiana, y por ello, son indispensables todas las herramientas necesarias para comprender el conocimiento abstracto con el que ahora interactuamos.

En los párrafos anteriores verso mi visión y preocupación, y comienzo a ocuparme desde mi persona, comenzando por mi desarrollo y formación profesional para contribuir al diseño o análisis que permitan a más docentes fortalecer su formación continua, brindando herramientas necesarias para fomentar una comprensión profunda de las relaciones Matemáticas, y así,

potenciar las condiciones que detonen mejores resultados en el logro educativo, al promover competencias colectivas y prácticas innovadoras de gestión institucional, escolar y pedagógica, donde cada actor escolar asuma su compromiso con la calidad educativa.

1.2 Antecedentes

En este apartado se describen los antecedentes del problema de investigación, los cuales se abordan en tres grupos:

- 1) **Investigaciones acerca de talleres de formación continua como una forma de mejorar la práctica docente**, donde el principal foco de interés, es reconocer el diseño de talleres de formación continua, como oportunidades de experiencia profesional que permitan desarrollar conocimiento didáctico del contenido, para el diseño de tareas de enseñanza en profesores.
- 2) **Investigaciones acerca de Análisis Didáctico como herramienta teórico metodológica**, en este apartado se resaltan las características esenciales que permiten tomar la fase de profundización del Análisis Didáctico, como herramienta metodológica para diseñar un taller de formación continua, tomando en consideración los aportes que se han obtenido en diversas investigaciones con su aplicación.
- 3) **Contenido Matemático de fracciones**, en este apartado se muestra el concepto de fracción y sus diferentes significados, por ejemplo: relación parte - todo, fracción como cociente, como operador, como razón y como medida. Significados que se consideran dentro del Plan y Programa de Estudios (2017).
- 4) **Investigaciones realizadas sobre el conocimiento para la enseñanza del profesor de matemáticas en torno a las fracciones y herramientas teórico metodológicas para promover dicho conocimiento**, cuyo objetivo es resaltar la viabilidad de establecer vínculos entre el modelo del conocimiento del profesor MKT y el Análisis Didáctico como herramienta metodológica para promover dichos conocimientos. Dentro del primero, tomaremos como referencia los trabajos desarrollados por Deborah L. Ball y colaboradores de la Universidad de Michigan, que estudian el conocimiento matemático necesario para enseñar, mientras que en el segundo, se focalizan aspectos del Análisis Didáctico referente al contenido matemático escolar de las fracciones.

1.2.1 Espacios de formación continua como oportunidad para favorecer el conocimiento didáctico del contenido

Las Experiencias de Aprendizaje Profesional (PLEs, por sus siglas en inglés) brindan a profesores oportunidades para mejorar su comprensión del contenido matemático y las prácticas de enseñanza (Heck et al., 2019), así mismo, identifican que son una fuerte herramienta para fomentar un aprendizaje profesional de calidad. Por lo tanto, es imperativo buscar enfoques y herramientas para promover espacios de formación continua escalables y sostenibles que beneficie a un número de profesores y comunidades, manteniendo la fidelidad a sus principios básicos e impacto.

Heck et al., (2019) reconocen los talleres presenciales como una fuerte herramienta de aprendizaje profesional, no obstante, Kennedy (2016, como se citó en Heck et al., 2019) señala la importancia de sus enfoques, ya que pueden ir desde cuestiones de educación general hasta un enfoque específico y dirigido al contenido, en este sentido, considera que no todos los formatos son igualmente efectivos; de hecho, algunos formatos ampliamente utilizados pueden afectar negativamente los resultados de los estudiantes.

En este estudio, realizado por Heck et al., (2019), se comparó el impacto de tres formatos: 1) un taller de verano facilitado; 2) un curso multimedia complementado en el tiempo del profesor; y 3) recursos de aprendizaje proporcionados en la unidad del plan de estudios que los maestros utilizaban individualmente. A través de ello, se demostró que este tipo de experiencia de entrenamiento, cuando es esporádica y desconectada, es ineficaz y no conduce a cambios en las creencias y prácticas de los maestros, en consecuencia, no hay mejoras en el rendimiento de los estudiantes (Kennedy, 2016, como se citó en Heck et al., 2019).

Por lo tanto, para diferenciar un trabajo esporádico y desconectado, se debe buscar enfoques y herramientas reconocidas para promover espacios de formación continua escalables y sostenibles, manteniendo la fidelidad a sus características, principios básicos e impacto. Por lo tanto, para cumplir con ello, se pretende ser fieles a los principios básicos de un desarrollo profesional eficaz y hacer uso de la herramienta metodológica Análisis Didáctico para brindar sostenibilidad y reforzar el aspecto escalable.

En este sentido, Heck et al., (2019) esbozaron los principios rectores para el diseño e implementación de un desarrollo profesional de calidad, estos principios partieron del análisis de la literatura de errores y aciertos cometidos en cursos de desarrollo profesional, mismos que permitirán fijar elementos que se considerarán para el diseño de un taller de formación continua, entre ellos son:

- 1. Duración.** Entre más horas de contacto para el desarrollo profesional serán más positivos los resultados (Guskey y Yoon, 2009 como se citó en Heck et al., 2019).
- 2. Enfoque de contenido.** El conocimiento de contenido y el conocimiento didáctico del contenido pueden generar impactos positivos en docentes y en consecuencia en los estudiantes (Cohen & Hill, 2000; Fennema y col., 1996; Guskey y Yoon, 2009; Kennedy, 1999, como se citó en Heck et al., 2019).
- 3. Coherencia.** A mayor coherencia entre las actividades planteadas y la práctica, así como con los objetivos de los profesores para su propio aprendizaje o el de sus alumnos, y las conexiones que los maestros pueden hacer entre las oportunidades de desarrollo profesional y su instrucción, permitirán impactos positivos más probables.
- 4. Aprendizaje activo/basado en la práctica.** El desarrollo profesional basado en la práctica que involucra a los maestros en el análisis y uso activo de los artefactos de la enseñanza, como las tareas de matemáticas, el trabajo con el estudiante, y video en el aula, permite desarrollar la comprensión conjunta de los maestros en los objetivos establecidos.
- 5. Participación colectiva.** La participación de maestros de la misma escuela, nivel de grado o área temática es otro aspecto central componente de un desarrollo profesional eficaz. Este tipo de trabajo colaborativo se basa en las necesidades, metas o experiencias comunes de los maestros que los ayudan relacionarse entre sí y basarse en las ideas de los demás durante las experiencias de desarrollo (Darling-Hammond et al., 2009, como se citó en Heck et al., 2019).
- 6. Facilitación de expertos.** Finalmente, el desarrollo profesional efectivo de las matemáticas generalmente involucra a un experto facilitador, con un profundo conocimiento del contenido matemático, conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento de cómo liderar una comunidad de aprendizaje profesional (Borko et al., 2014, como se citó en Heck et al., 2019).

Por otro lado, la implementación de este tipo de talleres ha mostrado evidencia empírica del aprendizaje en términos de la preparación de los maestros, desarrollo del conocimiento del contenido en los profesores; conocimiento y uso de los profesores de observar, cuestionar, y conferir estrategias; y el conocimiento y uso de los docentes del contexto y las representaciones para apoyar el aprendizaje de los estudiantes (Heck et al.,

2019). No obstante, Heck et al., (2019) también hace la sugerencia del diseño cuidadoso para lograr crear oportunidades para los docentes a partir de características potenciales de un desarrollo profesional eficaz, junto con la investigación que informa y amplía lo que se sabe sobre estas características, e identifica nuevas características que emergen para ofrecer un camino más sólido.

1.2.2 Investigaciones acerca del Análisis Didáctico como herramienta para el desarrollo profesional de profesores de matemáticas

La formación continua de profesores ha despertado interés en numerosas investigaciones, tomando un significado clave sobre las consecuencias marcadas en el impacto educativo y el rendimiento escolar, lo anterior pone de manifiesto los grandes avances en el campo de la matemática educativa, estudios mismos que arrojan resultados plausibles, como lo es en la aplicación del procedimiento *Análisis Didáctico* mencionados en el apartado anterior.

Gómez (2002) considera el Análisis Didáctico como un procedimiento cíclico a partir de cuatro fases: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación, en las cuales describe el arquetipo de cómo el profesor debe “diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2002).

El Análisis Didáctico esencialmente radica en “fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar” (Rico, 2013).

Investigaciones en esta área, dan cuenta de las contribuciones a través del Análisis Didáctico como instrumento metodológico para potencializar los conocimientos didácticos del profesor, Gómez (2008) dentro de su investigación, concluye que a partir del Análisis Didáctico, los profesores articulan el currículo global de todo un nivel educativo y el nivel local relativo a un tema específico; los futuros profesores no trabajan de manera superficial y generalizada los contenidos matemáticos; dentro de la planificación de una unidad didáctica, los profesores, relacionan el análisis de contenido con el análisis de instrucción, permitiendo vincular los diferentes elementos del Análisis Didáctico al diseño de su plan de enseñanza; y además, a través del Análisis Didáctico, los profesores evidencian la manera que tienen de entender las matemáticas y de cómo se aprenden.

Por su parte, Gallardo y González (2006) describen las potencialidades que tiene la aplicación del Análisis Didáctico como instrumento metodológico para la investigación matemática, en esta exploración, destacan la configuración que

permite organizar, integrar y ampliar con interpretaciones plausibles los modelos y planteamientos sobre comprensión identificados en educación matemática, así como caracterizar, analizar y comprender el conocimiento empleado por profesores desde lo observable.

No obstante, ellos también destacan las principales limitaciones y algunas posibilidades de mejora del Análisis Didáctico como instrumento metodológico para la investigación, entre ellas:

- Que la información proporcionada por el Análisis Didáctico, debe considerarse incompleta o provisional, ya que siempre existe la posibilidad de investigaciones con mayor alcance y profundidad que integre trabajos cada vez más recientes o que contemplen nueva información de otros campos no considerados.
- La complejidad de establecer una articulación sólida entre resultados primarios, secundarios y consecuencias.
- La dificultad de identificar y ordenar situaciones vinculadas a conocimientos matemáticos concretos, debido a su carácter abstracto, amplio y complejo.
- El uso de del Análisis Didáctico en contextos distintos, con sentidos y propósitos diferentes (Gallardo y González, 2006).

En este último punto, Gallardo y González (2006), hacen alusión a los usos que han tenido gran relevancia en la Matemática Educativa y de las cuales han sido objeto de numerosas investigaciones, por ejemplo, su uso en el ámbito de la formación de profesores como instrumento conceptual y metodológico para la planificación curricular (Gómez, 2002) y mediante un enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática en el análisis de tareas matemáticas particulares y las generadas en torno a ellas durante su resolución (Godino et al., 2017).

En Gómez (2008) se estableció, analizó y organizó las capacidades y competencias que los futuros profesores esperan desarrollar en sus alumnos, resaltando los vínculos entre los diferentes elementos que constituyen el Análisis Didáctico, y en consecuencia, reforzar su estructura cíclica. Por lo tanto, se vislumbra que la práctica docente se encuentra estrechamente vinculada con el cuerpo del conocimiento matemático y con la forma en que el profesor diseña su clase de matemáticas, cómo la imparte y cómo la evalúa, en tanto el Análisis Didáctico sobrepone la necesidad de profundizar en cada uno.

1.2.3 Contenido Matemático de fracciones

El concepto de fracción se define como un número de la forma a/b donde a y b , son números enteros y $b \neq 0$ y a/b se entienden como el resultado de dividir una unidad o un todo en partes iguales (b) y luego tomar una cantidad (a) de esas partes. Donde a se conoce como numerador y b como denominador de la fracción.

No obstante, Rico (1997) considera que el concepto matemático escolar de fracciones adquiere una multiplicidad de significados con base en su uso e interpretación. De esta forma, para efectos de la presente investigación, se identifican cuatro contextos que se trabajan las fracciones en educación básica (Llinares y Sánchez, 1988 como se citó en Obando, 2006): relación parte-todo: medición y reparto; cociente: división; razón: semejanza, medida, porcentaje; y operador.

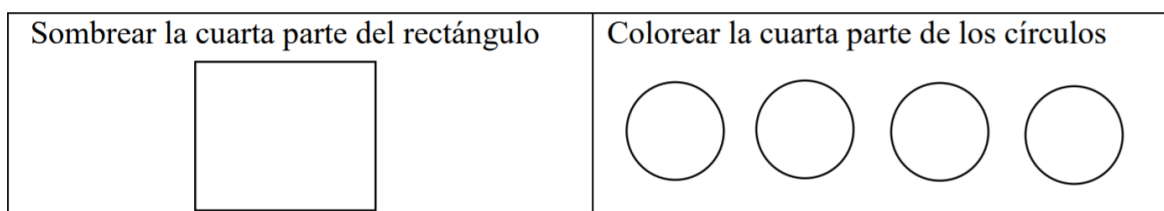
a) Relación parte-todo

Llinares y Sánchez (1988 como se citó en Obando, 2006), afirman que cuando un "todo" *continuo o discreto* se divide en partes "congruentes" - equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"- . La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes -que puede estar formado por varios "todos". Por su parte a Obando (2006), la fracción parte-todo se considera como un todo "continuo o discreto" que se divide en partes iguales indicando esencialmente la relación existente entre el todo y un número designado de partes. La fracción, por tanto, es la parte en sí misma y no, una relación entre dos cantidades: la medida de la parte con respecto a la medida del todo.

Ejemplo: tratamiento diferente a la unidad (simple y compuesta) y también a la magnitud (continua y discreta)

Figura 1

Concepto del significado de fracción parte - todo



Fuente: Hincapié (2011)

La relación parte-todo es una manera, entre otras, de concebir la fracción. Se trata de una unidad o un todo que se divide en partes iguales, de las cuales se toman algunas. Otro ejemplo es, $3/4$ se concibe como una unidad o un todo que se divide en cuatro partes iguales y de la cual se toman tres (SEP, 2017).

b) Fracción como cociente

Obando (2006), plantea que la fracción como cociente indicado es el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes. De otra forma, se puede definir como el valor numérico de la fracción a/b , aquí "la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales". Así mismo, Flores y Morcote (1999 como se citó en Obando, 2006), expresan que cuando una fracción se relaciona directamente con la operación división sugerida por ella, estamos dándole una interpretación de cociente. Es decir " a unidades en b partes iguales" refiere como el resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de personas o partes.

Ejemplo:

Figura 2

Concepto del significado de fracción como cociente

Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?

Fuente: Gallardo et al., (2008)

c) Fracción como razón

El significado de la fracción como razón parte de la comparación entre dos cantidades o conjunto de unidades (de igual o diferente magnitud). "La fracción a/b como razón evidencia la comparación bidireccional entre los valores a y b , siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas: si la relación de A respecto de B es a/b , entonces B es a/b respecto de A" (Obando, 2003).

Este significado se usa con la idea de formar proporciones y permite también desarrollar o integrar los conceptos de fracciones equivalentes, probabilidad y porcentajes.

Ejemplo:

Figura 3

Concepto del significado de fracción como razón

En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?

Fuente: Gallardo et al., (2008)

d) Fracción como operador

Con base en Obando (2006), "la fracción a/b empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b ". Significado que hace actuar a la fracción sobre una parte, un grupo o número como transformador logrando cambiar de un determinado estado inicial. De igual manera, Kieren (1980 como se citó en Obando, 2006), identifica que el papel de la fracción como operador es el de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura asociada al uso de fracciones.

Ejemplo:

Figura 4

Concepto del significado fracción como operador

En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los $4/5$ ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción $4/5$?

Fuente: Gallardo et al., (2008)

1.2.4 Investigaciones sobre el aprendizaje de las fracciones. Panorama Nacional

El contenido en educación primaria de fracciones, ha sido altamente estudiado a lo largo del tiempo (Freudenthal, 1983; Kieren, 1988; Kerlake, 1986, como se citó en Ávila, 2019), esto lleva a concebir las debilidades que se han pronunciado en su tratamiento a través de diferentes propuestas curriculares para su enseñanza (Ávila, 2019). En el mismo sentido, se ha descrito en conversaciones

escolares del mismo nivel educativo, a las fracciones como un contenido difícil de enseñar.

Prueba de lo escrito en el párrafo anterior, son los resultados nacionales que obtuvieron los alumnos de sexto año de primaria en la prueba del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes - PLANEA (2018), donde el 59% de los alumnos se encuentran en el Nivel I dominio insuficiente, que consiste en resolver operaciones básicas suma, resta, multiplicación y división, con números naturales; mientras que el 15% se encuentran en el Nivel III dominio satisfactorio, donde implica resolver problemas que requieren operaciones básicas con números decimales y multiplicar una fracción por un número natural, identificar una fracción en un modelo discreto, comparar fracciones y multiplicarlas por un número natural, usar las fracciones para expresar una división, identificar el dividendo o divisor, así como sucesiones aritméticas crecientes, a partir de la regla.; y solo un 8% de los alumnos a nivel nacional se encuentran en el Nivel IV dominio sobresaliente, donde implica resolver problemas que requieren operaciones básicas con números decimales y fraccionarios, resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que involucran dos o más transformaciones y los que implican dividir o multiplicar números fraccionarios por naturales, ubicar una fracción en la recta numérica y usar las fracciones para expresar el resultado de un reparto.

Con base en los resultados descritos, las investigaciones realizadas y los comentarios por profesores en servicio, se muestra una dificultad latente en la enseñanza del contenido de fracciones a lo largo de la educación básica, factor que favorece la presente investigación y el desarrollo de un taller de formación continua que permita favorecer la enseñanza de dicho contenido.

1.2.5 Investigaciones realizadas sobre el conocimiento del profesor en torno a las fracciones

El conocimiento del profesor ha figurado en innumerables investigaciones, reafirmando el interés y preocupación por vislumbrar qué conocimientos son indispensables que posea el profesor para llevar a cabo tareas de enseñanza, y más aún, para lograr un verdadero impacto en el rendimiento escolar a través de una instrucción de calidad.

König et al., (2021), investigaron el vínculo entre las competencias del conocimiento didáctico del contenido del profesor, la calidad de instrucción y el rendimiento en el aprendizaje, como parte indispensable de las matemáticas orientadas a la calidad, como resultado afianzaron el vínculo que se establece entre el conocimiento didáctico del contenido y la instrucción para favorecer el impacto en el rendimiento de los estudiantes. Estos autores identificaron que la

calidad de la instrucción permite proporcionar oportunidades de aprendizaje de alta calidad para los estudiantes y para fomentar su aprendizaje en las matemáticas. No obstante, consideran que todavía existe la necesidad de investigar el conocimiento de los docentes como un predictor de enseñanza y logros de los estudiantes, basado en una instrucción de calidad para fomentar el aprendizaje, esto lo atribuye, al menos en parte, a una falta de conceptualizaciones e instrumentos de medición adecuados.

En este sentido, el conocimiento de profesor de matemáticas se ha vuelto tema de numerosas investigaciones, analizando, caracterizando y valorando cuáles son los conocimientos necesarios que deben poseer para desarrollar tareas de enseñanza (González y Eudave, 2018). Este conocimiento, considerado necesario para desempeñar tareas de enseñanza, es reconocido por Shulman (1986, como se citó en González y Eudave, 2018) como el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT).

Dentro de la literatura referidas a investigaciones, han demostrado que el MKT influye en las creencias y prácticas de los profesores, por ejemplo, su capacidad para centrarse en los aspectos subyacentes de los conceptos matemáticos, para plantear y abordar preguntas matemáticas rigurosas, y para ayudar a los estudiantes a hacer conexiones matemáticas importantes entre ideas clave, siendo esto, relacionado con el rendimiento de los estudiantes (Hill, Rowan & Ball, 2005, como se citó en González y Eudave, 2018). El MKT incluye el conocimiento de la disciplina, el conocimiento didáctico del contenido y habilidades relacionadas con las demandas de la enseñanza, como tomar decisiones de instrucción basadas sobre cómo piensan y aprenden los estudiantes sobre las matemáticas (Ball et al., 2008).

En este sentido, se resalta la necesidad de identificar qué conocimientos de los profesores son necesarios para la enseñanza de las matemáticas, para diseñar una instrucción de calidad, y en consecuencia, mejorar el rendimiento escolar.

Cabe resaltar que el conocimiento del profesor prevalece no solo en la práctica observable, sino también cuando el profesor estudia, razona, elige y organiza las tareas que implementará en clase.

Rojas y Flores (2011), reconocen una amplia serie de investigaciones sobre la caracterización de los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), no obstante, consideran que "identificar en la práctica los distintos tipos de conocimientos necesarios para enseñar es una cuestión aún carente en los estudios" (p. 17), por tal motivo, su trabajo gira en torno, a cómo parte del Análisis Didáctico del contenido matemático escolar de las fracciones,

puede emplearse para identificar distintos tipos de conocimientos declarados en un proceso de enseñanza-aprendizaje” (p.17)

El trabajo de Rojas y Flores (2011), también permitió identificar distintos tipos de conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas, y bajo esta premisa, su estudio consistió en identificar qué conocimientos pone en juego un profesor de educación primaria, al enseñar el concepto matemático escolar de las fracciones, a alumnos de nueve y diez años. Para lograrlo realizaron un Análisis Didáctico siguiendo los trabajos del grupo de investigación Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada (Rico, 1997; Gómez, 2007 y Lupiañez, 2009), y para relacionar algunos de los componentes con los dominios del conocimiento necesarios para enseñar, utilizaron el modelo de Ball et al., (2008).

Rojas y Flores (2011) afirman que la caracterización de Ball et al., (2008) les permite demostrar que el conocimiento matemático para la enseñanza:

comprende un conocimiento específico y propio de los profesores, implicando, por ejemplo, una base que le permite al profesor analizar los errores de los alumnos, examinar las estrategias utilizadas para la resolución de una tarea matemática, poder utilizar métodos alternativos para explicar a los alumnos que no siguen una línea argumentativa, saber responder a cuestiones matemáticas, evaluar las cualidades de los materiales de enseñanza, saber distinguir cuáles son las representaciones de un concepto y en qué orden presentarlas, disponer de recursos para explicar un concepto y explicitar argumentos sólidos para evidenciar que un procedimiento funciona. (p. 18)

Por lo tanto, el profesor debe tener un amplio bagaje de conocimientos matemáticos enriquecido con conocimientos específicos para la enseñanza.

Con base en el estudio realizado, a través del Análisis Didáctico, específicamente el de contenido y el cognitivo, Rojas y Flores (2011), identificaron el campo de utilización de las fracciones, sobre las “nociones informales que presentan los alumnos sobre reparto equitativo y de medida son base para construir los significados vinculados a los números racionales” (Llinares y Sánchez, 1988, como se citó en Rojas y Flores, 2011), vieron cómo se organizaba el contenido, estableciendo una estructura conceptual que examina las relaciones entre sus partes, y por último, “clarificaron la forma en que se utiliza el concepto y sus propiedades, al abarcar las formas de representación del contenido matemático” (p. 21).

En cuanto al dominio de conocimiento didáctico del contenido, Rojas y Flores (2011), identificaron que los profesores tenían *conocimiento del contenido y de los estudiantes*, evidenciándolo a través de como el profesor reconoce los errores y dificultades que los estudiantes pudieran presentar con respecto al contenido de fracciones en el proceso de enseñanza; identificaron *conocimiento del contenido y de la enseñanza*, advirtiendo que el profesor utiliza materiales y recursos que permiten el aprendizaje de las fracciones; y en el último subdominio, *conocimiento del contenido y del currículo*, identificaron la correlación del contenido enseñando con los establecidos en el currículo escolar, información que se obtuvo con base en el análisis de contenido previamente realizado.

De esta forma el estudio evidenció la correspondencia entre los subdominios de conocimiento matemático establecidos por Ball et al., (2008, como se citó en Rojas y Flores, 2011) y los componentes del Análisis Didáctico, información que a su vez da cuenta de la viabilidad de establecer vínculos con la fase de profundización (que se pretende realizar en esta investigación) con el modelo de conocimiento del profesor MKT.

1.2.6 Reflexión

El conocimiento didáctico del contenido que el profesor de matemáticas posee al diseñar su tarea de enseñanza, repercute directamente en el impacto educativo y el rendimiento escolar, bajo esta premisa declarada, es imprescindible favorecer experiencias de aprendizaje profesional que brinden a los maestros oportunidades para mejorar su comprensión del conocimiento didáctico del contenido para la selección y diseño de tareas de enseñanza, en consecuencia mejorar la organización sistemática de su práctica docente.

Así pues, se puede afirmar de forma hipotética, la propuesta de la fase de profundización del Análisis Didáctico, como un instrumento pertinente para diseñar un taller de formación continua, mismo que nos permitirá evidenciar no solamente los conocimientos didácticos del contenido que los profesores emplean en el diseño de una clase escolar, sino aquellos que desarrolla a través de las actividades planeadas en el taller. De esta manera, el Análisis Didáctico se considera como un "procedimiento de planificación local de los profesores, por lo que es un recurso que permite al profesor organizar la actividad de enseñanza en relación con un tema matemático específico, por tanto, permite al docente estructurar el saber desde dos ámbitos, desde la matemática y desde la enseñanza" (Rojas, Flores, y Ramos, 2013).

En consecuencia, este tipo de actividades de reflexión y análisis podría ayudar a profundizar la comprensión de los objetos y procesos de significación

matemáticos en el contexto de la didáctica, que a su vez coadyuvan en su formación continua a través de prácticas observables para propiciar la evolución de estos saberes didácticos del contenido como parte de su formación continua.

En el apartado referente al conocimiento del profesor en torno a las fracciones, se resalta la necesidad de la implementación del Análisis Didáctico, se identifican lo que se ha hecho y hasta dónde se ha llegado, y se cierra con las brechas importantes que son foco de indagación en el Análisis Didáctico, como investigación para desarrollar conocimientos didácticos del contenido en los profesores. Por lo tanto, el presente trabajo pretende diseñar un taller de formación continua que favorezca los conocimientos didácticos del contenido para el tema de fracciones en profesores de educación primaria, y a su vez, identificar dicho conocimiento que los profesores emplean en la selección y diseño de tareas de enseñanza en el tema de fracciones.

1.3 Planteamiento del Problema

1.3.1 Problemática

Las contribuciones en Educación Matemática cada vez conforman una estructura más sólida, permitiendo identificar cómo el desarrollo profesional y la formación continua de profesores repercute directamente en el aprendizaje de los alumnos (König et al., 2021). No obstante, ellos consideran que aún prevalecen huecos importantes acerca de qué elementos considerar para potencializar y desarrollar el conocimiento didáctico del contenido en profesores de matemáticas.

En este sentido Heck et al. (2019), consideran que son pocas las experiencias de aprendizaje profesional que brindan a los maestros oportunidades para mejorar su comprensión del conocimiento didáctico del contenido para la selección y diseño de tareas de enseñanza. En consecuencia, estos autores expresan que las estructuras de enseñanza carecen de profundidad en la comprensión de los procesos significativos en el contexto de la didáctica, que a su vez, impactan en el rendimiento escolar en las matemáticas.

1.3.2 Problema

Las pocas experiencias de aprendizaje profesional que brindan a los maestros oportunidades para mejorar su comprensión del conocimiento didáctico del contenido durante la selección y diseño de tareas de enseñanza para el tema de fracciones (Heck et al., 2019).

1.3.3 Pregunta de Desarrollo Profesional

¿Cuál sería una propuesta de taller para la formación continua, haciendo uso de la fase de profundización del Análisis Didáctico, que favorezca los conocimientos didácticos del contenido al seleccionar o diseñar tareas para la enseñanza del tema de fracciones en profesores de educación primaria?

1.3.4 Objetivo general

Diseñar un taller de formación continua haciendo uso de la fase de profundización del Análisis Didáctico que favorezca los conocimientos didácticos del contenido al seleccionar o diseñar tareas para la enseñanza del tema de fracciones en profesores de educación primaria.

1.3.5 Objetivos Particulares

- a) Realizar una propuesta de análisis de contenido y cognitivo para el tema de fracciones como antecedente para la propuesta de tareas que conformarán el taller de formación continua
- b) Promover el diseño de tareas de enseñanza para el tema de fracciones a través del taller de formación continua dirigido a profesores del nivel primaria.
- c) Describir la forma en que los profesores aplican los elementos del Análisis Didáctico (contenido y cognitivo) al diseñar tareas de enseñanza.
- d) Identificar los conocimientos didácticos del contenido que se favorecen, al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel primaria a través del taller realizado.

1.3.6 Hipótesis

A través de la realización del taller propuesto, se espera favorecer y construir conocimiento didáctico del contenido en profesores durante el diseño y selección de tareas de enseñanza, esto con base en la relación entre los componentes del Análisis Didáctico en su fase de profundización y los dominios del conocimiento necesarios para enseñar (Rojas et al., 2013). Los conocimientos que se espera favorecer con mayor presencia, corresponden al dominio conocimiento didáctico del contenido en sus subdominios conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y su enseñanza y, conocimiento del currículo (Ball et al., 2008). Lo anterior, permitirá potencializar el conocimiento didáctico del contenido en el profesor, ampliando su bagaje de criterios y herramientas que le permitan discernir la idoneidad de las tareas de enseñanza que diseña, esto a su vez, coadyuva en el impacto educativo y el rendimiento escolar de sus estudiantes.

1.4 Justificación

El conocimiento didáctico del contenido que el profesor emplea al desarrollar tareas de enseñanza es fundamental en el impacto educativo y el rendimiento escolar, y la desarticulación de estas tareas con el conocimiento didáctico del contenido, resalta la necesidad de “profundizar más en el tipo de actuaciones que se promueve, en la diversidad de modos de solución o en su grado de dificultad. Una simple modificación del enunciado puede hacer que satisfaga los requerimientos o las finalidades que persigue el profesor en la programación” (Lupiañez, 2009). De esta forma, en Análisis Didáctico, brinda criterios para llevar a cabo tales modificaciones, potencializando el conocimiento didáctico del contenido en el diseño de tareas de enseñanza.

Además, con base en los avances tecnológicos, como el diseño de páginas WEB y el uso progresivo de redes sociales de comunicación, así como las numerosas publicaciones de secuencias de aprendizaje por diferentes medios, han favorecido la facilidad con la que cuenta el profesor para obtener tareas de enseñanza, bajo esta perspectiva, se vuelve imperante brindar a los profesores herramientas que les permitan discernir la fiabilidad, la viabilidad y la prospectiva de dichas secuencias, en este sentido, “toda la actividad que el profesor lleva a cabo al realizar el análisis de instrucción sobre un tema específico, le brinda un gran número de criterios para diseñar y seleccionar tareas matemáticas de ese tema” (Lupiañez, 2009).

Bajo esta perspectiva, König et al., (2021) considera que todavía existe la necesidad de investigar el conocimiento de los docentes como un predictor de enseñanza y logros de los estudiantes, basado en una instrucción de calidad para fomentar el aprendizaje. Esto se debe, al menos en parte, a una falta de conceptualizaciones e instrumentos de medición adecuados (König, et al., 2021), y por su parte, Rojas y Flores (2011), considera que los trabajos desarrollados por Ball et al., (2008, como se citó en Rojas y Flores, 2011) son ampliamente valorados en Educación Matemática, dado que “buscan caracterizar los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, sin embargo sigue siendo una línea de investigación abierta donde uno de los ejes centrales es buscar procedimientos para identificar los dominios con precisión” (p. 19).

Con base en lo anterior, se busca un cambio en el conocimiento y la capacidad de los profesores para diseñar prácticas de instrucción para la enseñanza, de forma fundamentada y sistemática, por lo tanto, se propone la fase de profundización del Análisis Didáctico como herramienta para diseñar un taller de formación continua, el que a su vez, busca no solo identificar los conocimientos didácticos del contenido que los profesores emplean, sino

favorecer la construcción de nuevos conocimientos didácticos del contenido que le permitan comprender y resolver prácticas de enseñanza.

De esta manera, se toma el Análisis Didáctico como la herramienta que puede ayudar al profesor a organizar la enseñanza, específicamente la fase de profundización, en el que el centro de atención es la enseñanza, y toma como base los análisis anteriores (de contenido y cognitivo) para el diseño de las tareas de enseñanza (Gomez, 2002; Gómez y Lupiañez, 2007). Por lo tanto, se pretende la profundización en el contenido matemático escolar las fracciones, para disponer de un marco de conocimiento de referencia relativo al contenido matemático, su enseñanza y aprendizaje, relacionándolo con los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza (Rojas y Flores, 2011).

Esto quiere decir, que el presente trabajo se basa en la práctica docente previa a la clase, ya que se considera práctica docente, no solo a la ejecución sino también a la organización que le antecede, por ejemplo, cuando prepara su planeación o su clase en donde también se puede evidenciar conocimiento, y no solo eso, sino favorecer y promover. De esta forma, la fase de profundización como lo señala Rojas et al., (2013) "lleva a examinar ampliamente el contenido matemático y su enseñanza, llegando a organizar la información en un mapa de posibilidades de formación" (p. 196), a partir de ello, los profesores tienen los medios para diseñar y estructurar de mejor forma su unidad didáctica.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Con vista en el objetivo central del tema de investigación que se aborda, se presentan las bases teóricas del estudio en dos núcleos: el Análisis Didáctico y el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Dentro del primer núcleo, prestamos especial atención a la fase de profundización del Análisis Didáctico como herramienta teórico-metodológica para el diseño e implementación del taller de formación continua, como un medio para favorecer los conocimientos didácticos del contenido de los profesores referente al contenido matemático de las fracciones (Gómez, 2002, 2007, 2008; Lupiañez, 2009, 2010; Rico, 2013). Respecto al segundo núcleo, se presenta el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza con base en los aportes de Ball et al., (2008), como herramienta para identificar los Conocimientos Didácticos del Contenido que se pretenden favorecer en profesores de primaria durante la implementación del taller.

2.1 Análisis didáctico

En este apartado se revisa la herramienta teórico-metodológica Análisis Didáctico, como elemento sustancial para abordar el diseño de actividades, por lo que sólo se consideran los tres primeros análisis que se presentan a continuación, permitiendo identificar y comprender cada una de sus fases y elementos que componen estos análisis propuestos por Gómez (2009):

- *análisis de contenido*: tiene que ver con el contenido a enseñar, aquí el profesor identifica, organiza y selecciona los significados del concepto matemático con base en los fines educativos;
- *análisis cognitivo*: En esta fase el profesor aborda la problemática del aprendizaje del tema matemático por parte de los alumnos, enuncia y organiza expectativas de aprendizaje sobre el tema matemático, analiza aquellas limitaciones que pueden interferir el aprendizaje y organiza la selección de tareas que les suministrará a los alumnos las oportunidades de aprender.
- *análisis de instrucción*: el centro de atención es la enseñanza, en este análisis el profesor seleccionará, diseñará y secuenciará las tareas que empleará en la instrucción para lograr las expectativas de aprendizaje que ha concretado anteriormente (Lupiañez, 2009), este análisis toma como base los análisis anteriores (de contenido y cognitivo).

Gómez (2002) considera el Análisis Didáctico como un procedimiento cíclico, en las cuales describe el arquetipo de cómo el profesor debe “diseñar,

llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje". Esencialmente radica en "fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar" (Rico, 2013).

A continuación, se particulariza la estructura y la organización de los tres análisis que forman parte de la fase de profundización del Análisis Didáctico, puntualizando características específicas de cada uno de ellos.

2.1.1 El Análisis de contenido

Este primer análisis, enfoca su atención en cómo el profesor analiza, describe y organiza los diferentes significados que tienen las nociones matemáticas, para desarrollar un tema en la clase o para el diseño de una unidad didáctica, consideraciones pertinentes para realizar la planeación de instrucción (Lupiañez, 2009, p. 38).

En este sentido, se describen cuatro niveles de concreción para la noción de contenido matemático, posteriormente, este contenido visto cognitivamente y, por último, tres organizadores curriculares que permiten analizar un contenido matemático (Lupiañez, 2009, p. 38).

2.1.1.1 Acerca del Contenido Matemático

Lupiañez (2009) distingue cuatro niveles de concreción del contenido matemático, con la intención de "situar el nivel de reflexión del Análisis Didáctico":

Contenido Matemático Escolar. Lo conforma todo el conocimiento matemático, que como acervo, se ha instaurado a lo largo de la historia en las matemáticas escolares y es considerado como "objeto de enseñanza en la educación básica" (p. 38). Este conocimiento es considerado, como aquel que previamente ha sido analizado y revisado por especialistas en educación matemática, y se ha instaurado en colecciones o acervos que son propicios para su enseñanza dentro de las aulas.

Contenido prescrito. Este contenido se encuentra en los currículos oficiales, se encuentra organizado según etapas y niveles, se relacionan con expectativas generales de aprendizaje y con criterios de evaluación, este conocimiento figura las nociones básicas que los alumnos deben adquirir.

Contenido propuesto para una asignatura. Es el listado de conceptos y procedimientos que se trabaja en cada tema, a través de una secuencia organizada y el diseño de tareas específicas que el profesor podrá usar en su práctica docente.

Contenido de un tema concreto. Surge cuando un profesor “debe abordar la planificación de una hora de clase o de una unidad didáctica para un tema o concepto matemático determinado” (Gómez, 2007, como se citó en Lupiañez, 2009). Es donde el profesor “identifica y organiza los múltiples significados de dicho tema, para efectos de seleccionar aquellos significados que considera relevantes para la instrucción”, es aquí donde se sitúa el Análisis Didáctico y el análisis de contenido (p. 39).

Con base en lo anterior, se propone para la realización del taller los últimos tres organizadores, en el primero *contenido prescrito*, el profesor debe indagar, identificar y tomar las nociones básicas que los alumnos deben aprender, vistas desde el Plan y Programas de estudios para la Educación Básica; en el segundo *Contenido propuesto para una asignatura*, el profesor de matemáticas ubicará y seleccionará los conceptos y procedimientos que se trabajan para el tema seleccionado, visto desde el libro para el alumno y libro para el maestro de educación primaria con base en su grado escolar; y por último, *contenido de un tema concreto*, donde el profesor de matemáticas identifica y organiza los múltiples significados del tema de fracciones, para efectos de seleccionar aquellos significados que considera relevantes para la instrucción.

2.1.1.2 Estructura del Análisis de Contenido

Se considera una herramienta para estudiar los significados del contenido Matemático, donde intervienen los conceptos y procedimientos principales que lo delimitan, así como los tres organizadores del currículo que utiliza Gómez (2007) para el estudio de estos significados:

- La *estructura conceptual*: considera las relaciones de los conceptos y procedimientos implicados en el contenido estudiado, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que forman parte, como a la que configuran tales conceptos y procedimientos.
- Los *sistemas de representación*: todas las representaciones del contenido y sus relaciones con otros conceptos y procedimientos.
- La *fenomenología*, la cual considera los fenómenos (contextos, situaciones y problemas) que pueden dar sentido al contenido considerado, es decir, toma en cuenta el planteamiento funcional de las matemáticas escolares. (Lupiañez, 2009).

Estos tres organizadores curriculares enmarcan el análisis de contenido, mismo que ayudará a los profesores a organizar el contenido matemático de fracciones.

2.1.1.3 Clasificación Cognitiva del Contenido Matemático

Esta clasificación parte de las ideas de Hiebert y Lefevre (1986, como se citó en Lupiañez, 2009), basada en "el marco del procesamiento de la información" (p. 40), quienes consideran el conocimiento matemático en dos campos: conceptual y procedimental. Así mismo, se toma la distinción de estos dos campos que realiza Rico (1996, como se citó en Lupiañez, 2009), "esta distinción, permite analizar con detalle la complejidad del conocimiento matemático y subraya la conexión permanente entre conceptos y procedimientos" (p. 40).

Conocimiento Conceptual. Está conformado por el conocimiento personal, con las estructuras matemáticas con las que se piensa, y se puede distinguir tres niveles:

- a) *Hechos:* son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos. Se distinguen cuatro tipos de hechos: términos, notaciones, convenios y resultados.
- b) *Conceptos:* se consideran como conjuntos de unidades de información (hechos) conectadas entre sí mediante relaciones; cada concepto se constituye tanto por los hechos como por las relaciones entre ellos.
- c) *Estructuras conceptuales:* son sistemas interconectados de conceptos juntos con sus relaciones, en las que cada uno de los conceptos que las forman queda caracterizado por esas relaciones que mantiene con el resto (p.40).

"Las estructuras matemáticas destacan las conexiones y relaciones mutuas de familias de conceptos y los sistemas de representación que comparten; organizan y constituyen ideas de orden superior y establecen nuevas formas de relación o algún orden entre conceptos no inclusivos" (Lupiañez, 2009).

Conocimiento Procedimental. Engloba los procedimientos y formas de actuar o ejecutar tareas matemáticas, éste se exterioriza en la realización de tareas ordenadas y su aprendizaje se lleva a cabo mediante secuencias de actuaciones, que pueden sistematizarse. Se puede distinguir tres niveles de concreción:

- a) *Destrezas*: suponen el dominio de los hechos y de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas, se llevan a cabo por ejecución de una secuencia de reglas y manipulación de símbolos o transformaciones gráficas.
- b) *Razonamientos*: suponen un conocimiento de los conceptos y de su extensión, lo cual permite su procesamiento por medio de secuencias razonadas, basadas en relaciones de conexión, inferencia o implicación. Las capacidades de expresión y comunicación de los alumnos se consideran parte de su capacidad de razonamiento.
- c) *Estrategias*: Son procedimientos o reglas de acción que permiten obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de las relaciones, conceptos y diversidad de sistemas de representación que se dan en una determinada estructura conceptual. Las estrategias guían la elección de qué técnicas emplear o de los conocimientos, razonamientos y destrezas a los que debe recurrirse en cada etapa de la resolución de un problema y suelen procesarse entre diversas estructuras conceptuales (p. 41).

2.1.2 El Análisis cognitivo

Este análisis se estructura en torno a las expectativas y competencias de aprendizaje que el profesor desea que se desarrollen en sus estudiantes, considerando la estructura matemática revisada anteriormente en el análisis de contenido. Aquí se consideran los siguientes componentes según los diferentes niveles, así como la estrecha relación que existe entre cada uno de ellos: fines formativos y de desarrollo, teorías de aprendizaje, el alumno, los objetivos y el propio análisis cognitivo (Lupiañez, 2009).

Gómez (2007) caracteriza el análisis cognitivo como un procedimiento en el que "el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje". También se llevan a cabo un estudio de errores y dificultades, con el que analizan qué puede limitar el proceso de aprendizaje del tema que están planificando (Lupiañez, 2009).

El análisis cognitivo centra su atención en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos y se enmarca en tres organizadores de currículo que lo estructuran y organizan:

- las expectativas de aprendizaje, que delimitan y organizan lo que el profesor espera que los escolares aprendan según diferentes niveles;
- el análisis de limitaciones de aprendizaje, que se centran en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje; y
- las oportunidades de aprendizaje que el profesor brinda sus escolares.

(Lupiañez, 2009)

Estos organizadores brindan al profesor herramientas de análisis relacionada con el desarrollo cognitivo de los estudiantes y contribuye al proceso de la planificación de las matemáticas escolares. Por lo tanto, este procedimiento permite al profesor “llevar a cabo una descripción y un análisis detallados de toda la problemática del aprendizaje de un tema específico de matemáticas desde un punto de vista curricular y funcional” (Lupiañez, 2009).

2.1.2.1 Análisis Cognitivo y Conocimiento del Profesor

El nivel de expectativas de aprendizaje que tiene el profesor acerca de sus alumnos, le brinda criterios para interpretar qué es lo que se pide que aprendan los alumnos, con base en los objetivos y competencias que se establecen en los Planes y Programa de Estudio. Estas nociones de expectativas de aprendizaje hacen énfasis en las actuaciones de los alumnos observables y que suministran información para una posterior evaluación.

Por lo tanto, vista la enseñanza en términos de las limitaciones de aprendizaje en cuanto a errores y dificultades, le permite el profesor advertir las situaciones que frenen o ralenticen el aprendizaje de los alumnos. En este sentido, el profesor dispone de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar las tareas que habrán de resolver los alumnos a lo largo de la implementación de la unidad didáctica (Lupiañez, 2009).

2.1.3 El Análisis de instrucción

Este análisis centra su atención en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando, a su vez, toma aspectos relativos a la gestión del aula, al empleo de materiales y recursos y a los criterios y métodos de evaluación (Lupiañez, 2009). Para efectos de esta investigación, nos centraremos específicamente en el diseño y selección de tareas de enseñanza, vistas como las demandas que un profesor plantea a los alumnos, que movilizan el conocimiento de éstos sobre un tema matemático determinado, y que concretan los objetivos específicos de este tema matemático en términos de actuaciones (Lupiañez, 2009).

Gómez (2007) señala la correlación intrínseca entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción, ya que las expectativas de aprendizaje concretas, influenciarán directamente las tareas que el profesor seleccionará, y al mismo tiempo, estas tareas concretas pueden ampliar o modificar las expectativas de aprendizaje.

2.1.3.1 Estructura del Análisis de Instrucción.

Este análisis se enmarca en siete componentes claves, mismo que determina el proceso de planificación y en todo momento considera las tareas como elemento organizador. Los primero cuatro componentes se identifican como *variables singulares* (Adecuación, complejidad, resolución de problemas y la modelización y, el empleo de materiales y recursos), mientras que los últimos tres se identifican como *variables de conjunto* (la secuenciación, la evaluación y la gestión del aula de matemáticas) (Lupiañez, 2009). En este análisis, como parte de nuestra investigación, solo consideraremos tres elementos de los componentes *variables singulares*, adecuación, complejidad, resolución de problemas y la modelización, ya que atienden directamente al diseño y selección de tareas de enseñanzas como parte de la fase de profundización del Análisis Didáctico.

Adecuación. Las tareas, como propuestas de acción, deben ser compatibles con el contenido que se está trabajando y estar vinculadas al análisis y selección que hace el profesor sobre los conceptos y procedimientos que configuran el contenido matemático seleccionado. "Las tareas que el profesor diseñe y seleccione deben contribuir al logro de esas expectativas y, por otro lado, también deben permitir a los escolares a superar las posibles dificultades y errores previstos también en el análisis cognitivo" (Lupiañez, 2009).

Complejidad. Las tareas exigen determinadas demandas cognitivas a los escolares que las afrontan, pero no siempre esas demandas tienen el mismo grado de complejidad. Marín (2009, como se citó en Lupiañez, 2009) propone la categorización de la complejidad en una serie de criterios:

1. Relativos a la presentación y formulación de la tarea:
 - a) forma de redacción (tipo de oraciones, vocabulario empleado, tiempos verbales para indicar la actividad demandada, etc.);
 - b) encuadre en contextos más o menos motivadores y auténticos;
 - c) representaciones como apoyo, representaciones que requieren decodificar la información para extraerla.
2. Relativos al tipo y medida de las competencias que se activan:
 - a) tipo y grado de interpretación y reflexión requeridos al alumno al leer y comprender el problema;
 - b) tipo de habilidades en la representación;

- c) complejidad del razonamiento requerido para detectar un planteamiento correcto o una idea feliz;
 - d) tipo y nivel de las destrezas matemáticas requeridas en la resolución (problemas de un solo paso o de varios pasos, procedimientos simples o estrategias complejas, modelización en todas sus fases o en alguna de ellas, etc.);
 - e) tipo y grado de argumentación matemática.
3. Relativos al contenido matemático necesario para interpretar y resolver el problema.
 4. La cercanía al alumno del contexto en que se presenta el problema.

Resolución de Problemas y Modelización. “Las tareas de modelización son un caso concreto de problemas que están enunciados en un contexto real, que deben ser reformulados en términos matemáticos para su resolución y que después se vuelven a interpretar en el contexto original” (Lupiañez, 2009).

Lupiañez (2009) considera algunos criterios que permiten al profesor secuenciar las tareas que ha diseñado o seleccionado, para estos destacan dos, el primero tienen que ver con la intencionalidad, desde el punto de vista del fomento del aprendizaje, (Mason y Johnston-Wilder, 2006, como se citó en Lupiañez, 2009):

- pueden idearse para introducir algunos temas matemáticos;
- pueden diseñarse para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas o en el que practicar ideas introducidas previamente;
- pueden idearse para revisar o consolidar o para provocar la reflexión y la integración a través de una visión global

El segundo, desde la funcionalidad a partir de la visión de Parcerisa (1996, como se citó en Lupiañez, 2009) quién clasifica las tareas que poseen en una secuencia de aprendizaje:

- tareas cuya finalidad en conocer los aprendizajes previos de los escolares,
- tareas para ayudar a la motivación y de relación con la realidad,
- tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento,
- tareas de elaboración y construcción de significados,
- tareas de ejercitación, y
- tareas de síntesis.

2.1.3.2 Procedimiento del Análisis de Instrucción

El análisis de instrucción consta de siete pasos, centrados en el diseño, la selección y la secuenciación de tareas desde diferentes puntos de vista. Se parte

de la propuesta de Marín (2009, como se citó en Lupiañez, 2009) para señalar las actuaciones que el profesor ha de realizar a efecto de llevar a cabo el análisis de instrucción, como se mencionó anteriormente, nos centraremos en el diseño y selección de tareas, por lo que se pretende trabajar solo con los puntos I, II, III, y IV:

- I. Describir y clasificar tareas matemáticas, atendiendo a los siguientes criterios:
 - a. los contenidos matemáticos que ponen en juego;
 - b. las expectativas de aprendizaje a cuyo logro pueden contribuir; y
 - c. para detectar y diagnosticar errores.
- II. Diseñar o seleccionar tareas sobre el tema específico en el que se centra la unidad didáctica, atendiendo a los criterios anteriores y con diferentes grados de complejidad (reproducción, conexión y reflexión).
- III. Reformular el enunciado de algunas tareas para que promuevan el desarrollo de alguna competencia matemática específica, destacando entre ellas la de plantear y resolver problemas y modelizar.
- IV. Analizar críticamente secuencias didácticas presentadas en libros de texto y otros materiales curriculares, presentando propuestas de modificación.

(p. 69)

2.1.3.3 Análisis de instrucción y conocimiento del profesor

Debido a las numerosas publicaciones de secuencias de aprendizaje, a los avances tecnológicos como las páginas Web, y la progresiva comunicación a través de redes sociales, los profesores tienen acceso a un sinnúmero de actividades relacionadas con las matemáticas, y es por ello, que "lo importante entonces es disponer de criterios y herramientas que permitan al profesor discernir cuáles de estas propuestas son apropiadas para lograr alcanzar las expectativas de aprendizaje que ha establecido" (Lupiañez, 2009).

Es necesario profundizar más en el tipo de actuaciones que promueven los profesores, en la diversidad de modos de solución o en su grado de dificultad, ya que, "una simple modificación del enunciado puede hacer que satisfaga los requerimientos o las finalidades que persigue el profesor en la programación. Lo importante, en ese caso, es disponer de criterios para llevar a cabo tales modificaciones" (Lupiañez, 2009). En este sentido, el análisis de instrucción brinda al profesor un gran número de criterios para diseñar tareas de enseñanza, mismos que a su vez, le permiten apropiarse de conocimiento para desarrollar competencias en la planificación de unidades didácticas.

2.2 Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball y colaboradores)

“El concepto de conocimiento matemático para la enseñanza surge de los estudios referentes a la práctica docente, en el ámbito matemático, y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores que requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento del contenido” (Rojas y Flores, 2011). De esta forma, el estudio del conocimiento profesional del profesor se ha vuelto de importante interés dentro de la Matemática Educativa.

Bajo el mismo interés, Ball (2000 y 2003, como se citó en González y Eudave, 2018), toma como referente los trabajos de Shulman, retoma la idea del PCK (Pedagogical Content Knowledge) como “elemento importante el conocimiento del profesor acerca de lo que favorece o dificulta el aprendizaje de las matemáticas” (González y Eudave, 2018). Con base en esto, Ball (2000, 2003, como se citó en González y Eudave, 2018) propone el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching o MKT, por sus siglas en inglés).

Por conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) se entiende como: “el conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas (Ball et al., 2008, p. 395). Y por enseñanza, se hace referencia a lo que los profesores deben hacer para apoyar el aprendizaje de sus alumnos, desde planificar lecciones, hacer y gestionar tareas de enseñanza, evaluar el trabajo de los alumnos, hasta las interacciones con padres de familia y personal escolar, que impliquen “el conocimiento de matemáticas, habilidades de razonamiento matemático, fluidez con ejemplos y términos, y consideración sobre la naturaleza de competencia matemática” (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001 como se citó en Ball et al., 2008, p. 395).

Este modelo clasifica el conocimiento matemático de la siguiente forma (Ball et al., 2006, como se citó en González y Eudave, 2018):

2.2.1 Conocimiento del contenido

Son los “conocimientos matemáticos que posee quien se dedica a la enseñanza de las matemáticas, como producto de su paso por la escuela básica y de su formación en docencia” (Ball et al., 2006, como se citó en González y Eudave, 2018). Se conforma por tres subdominios:

2.2.1.1 Conocimiento Común del Contenido (CCK)

Definido como los conocimientos y las habilidades que son empleados no solo en la enseñanza de las matemáticas sino en una variedad de entornos (Hill, Ball & Schilling, 2004). Cuando se habla de conocimiento común se refiere a un conocimiento matemático que es utilizado en diferentes entornos, es decir, no es exclusivo de la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 399).

2.2.1.2 Conocimiento Especializado del Contenido (SKC)

Son los conocimientos y las habilidades necesarias para el desarrollo del trabajo matemático en la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 400). Normalmente no se necesita para fines distintos de la enseñanza. Es un tipo de conocimiento matemático que los maestros deben poseer porque la enseñanza implica hacer que las características de un contenido particular sean visibles y que lo puedan aprender los estudiantes (Hill, Ball & Schilling, 2004).

Este conocimiento implica aquel que los docentes deben poseer más allá de lo que pretenden enseñar a sus alumnos, es decir, los profesores requieren comprender diferentes interpretaciones de las operaciones en formas que los estudiantes no necesitan distinguir explícitamente (Ball et al., 2008, p. 400).

2.2.1.3 Conocimiento en el Horizonte Matemático

Hace referencia al conocimiento para poder establecer las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes niveles educativos, por ejemplo, lo que se conoce como una relación vertical o articulación entre contenidos de educación primaria con los de educación secundaria. También hace referencia a las relaciones de los contenidos matemáticos entre sí o con otra asignatura de un mismo nivel o grado educativo, entendidas como relaciones horizontales. Este conocimiento "incluye las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular" (Sosa, 2011, como se citó en González y Eudave, 2018).

2.2.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Son los conocimientos fundamentales para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se divide en tres subdominios:

2.2.2.1 Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS)

Hace referencia al conocimiento que combina el conocimiento sobre los estudiantes y conocimientos de las matemáticas (Ball et al., 2008, p. 400).

Implica reconocer los procesos que siguen los estudiantes durante el aprendizaje de las matemáticas, así como la manera de corregir los errores que cometen.

En este sentido, los profesores deben anticipar lo que probablemente pensarán los estudiantes y lo que encontrará confuso. Por ejemplo, cuando los profesores asignan una tarea, el profesor debe prever los posibles caminos que tomarán sus alumnos en la ejecución de dicha tarea, y el nivel de dificultad que representará para ellos. "Los profesores también deben ser capaces de escuchar e interpretar las experiencias emergentes y pensamiento incompleto tal como se expresa en las formas en que los alumnos utilizan el lenguaje" (Ball et al., 2008, p. 401).

2.2.2.2 Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT)

Combina el conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento sobre matemáticas. Involucra conocer diversas maneras de acercar algún contenido matemático a los alumnos, esto es, cuáles son las ventajas y desventajas de utilizar o seguir una determinada estrategia, método o procedimiento al estudiar un tema matemático con los estudiantes (Ball et al., 2008, p. 401). Esto implica comprensión de las matemáticas y comprensión de la didáctica para trabajar dicho contenido.

2.2.2.3 Conocimiento del Currículo

Es el conocimiento de la composición y estructura curricular. El profesor tiene el conocimiento de la manera en que está organizado el currículo del nivel y el grado educativo donde se desempeña. Este subdominio incorpora los objetivos, fines educativos, contenidos, orientaciones curriculares, materiales disponibles para la enseñanza, lo que le permite al profesor la planificación de las actividades para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes (Ball et al., 2008, 391).

Partiendo de la idea superficial de los modelos teóricos revisados, se denota gran relevancia y necesidad de comprender qué conocimientos son indispensables para llevar a cabo tareas de enseñanza, mismas que propicien el desarrollo de un conocimiento sólido en los alumnos y que les permita seguir aprendiendo. Bajo esta premisa y la trivialidad existente de cuáles son esos conocimientos y cómo desarrollarlos en los profesores, surge la necesidad de poner en práctica, y a su vez, diseñar instrumentos metodológicos que les permita a los profesores potencializar su conocimiento para el diseño y selección de tareas de enseñanza.

2.3 Fases en el Análisis Didáctico con fines formativos e investigativos

El Análisis Didáctico, al ser aplicado con fines investigadores y formadores, distingue tres fases: a) de profundización; b) de diseño o toma de decisiones; y c) de actuación y evaluación (Rojas et al., 2013).

Estas tres fases, se dan en el ámbito formativo e investigativo, para ello Rojas (2014) menciona:

“debemos distinguir dos situaciones distintas respecto al empleo del análisis didáctico, según la intención y el sujeto que realiza el análisis didáctico, es decir, el análisis que lleva al profesor a determinar su actuación, y aquel que realiza el investigador para tener referentes que le permitan apreciar las cualidades de la actuación del profesor” (p. 78)

Con base, en lo anterior se describe cada una de las fases en el Análisis Didáctico con los fines formativos e investigativos en el estudio de Rojas (2014):

- a) **Fase de Profundización.** Con fines *formativos*, los profesores examinarán ampliamente el contenido y su enseñanza, llegando a organizar la información en un mapa de posibilidades de formación (Rojas et al., 2013, p. 196). Dentro de la fase de profundización los profesores seleccionarán el proceso de enseñanza hasta concretarlo en el diseño de su unidad didáctica. Por lo tanto, esta fase lleva a los profesores a la toma de decisiones previas y sobre cómo las aplicarán en clase, poniendo en juego su conocimiento matemático para la enseñanza, mismo que se pretende identificar en la presente investigación.

Con fines *investigativos*, la intención es analizar el desarrollo del proceso formativo de los profesores, para ver como ponen en juego algunos componentes del Análisis Didáctico cuando planifica la unidad didáctica del tema matemático. Por lo tanto, como investigador, realizaré previo al diseño del taller tres análisis pertenecientes al Análisis Didáctico, descritos en los apartados anteriores: análisis de contenido, análisis cognitivo, y análisis de instrucción (fase de estudio de tareas, gestión, medios de evaluación), en este caso de las fracciones, permitiendo profundizar en el tema matemático.

- b) **Diseño o toma de decisiones.** En el ámbito *Formativo*, la intención es que los profesores planifiquen la unidad didáctica, desarrollando de esta manera el análisis de instrucción.

Con fines *Investigativo*, la finalidad es relacionar los análisis por profesores (contenido y cognitivo) con cada una de las sesiones de la unidad didáctica, para esto los investigadores toman en cuenta los elementos del análisis de contenido (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología) y las expectativas de aprendizaje del análisis cognitivo para ver cómo estos elementos se ponen en juego en cada una de las sesiones de la unidad didáctica. Se construye las herramientas que le permitirán llevar a cabo el proceso de tomas de datos, permitiendo construir las categorías e indicadores para observar la práctica del profesor.

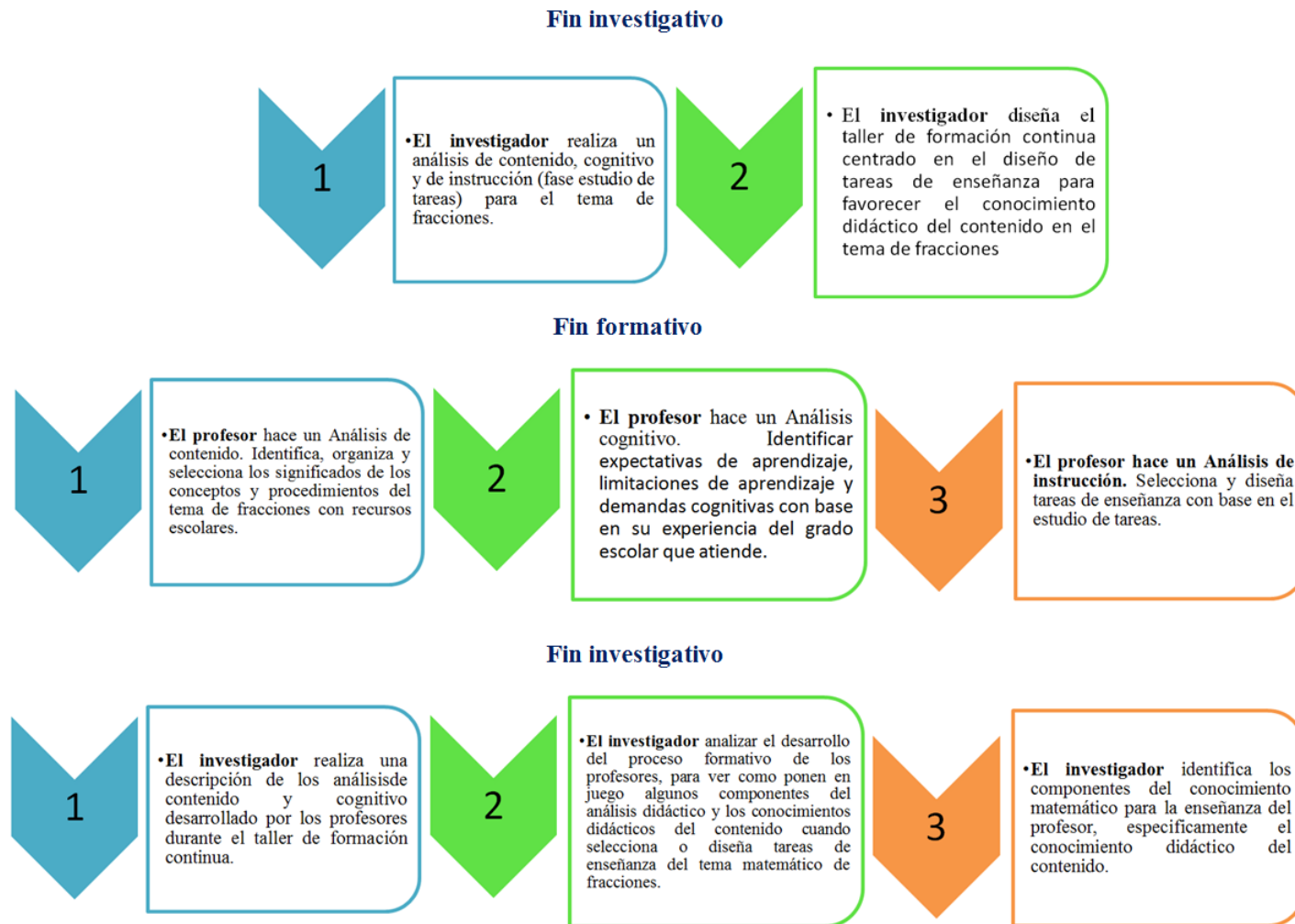
- c) **Actuación y evaluación.** Con fines *investigativos*, aquí el investigador revisa el proceso en el cual el profesor lleva a cabo la unidad didáctica. Con fines *formativos*, el profesor lleva a la práctica su unidad didáctica y es evaluada.

Con vista en lo descrito en cada una de las fases, se trabajará específicamente con la fase de profundización y se considera al menos tres momentos para el taller de formación continua, donde en cada una de ellas se trabajará cada uno de estos análisis, haciendo las actividades con los profesores que les permitirá desarrollar lo que pide cada análisis de la fase de profundización (Contenido, cognitivo y de instrucción), direccionando el Análisis Didáctico como metodología para el fin formativo.

Por otro lado, el formador que a su vez asume el rol de investigador, recabará los datos para su interpretación. En la figura 1 se resume el proceso que se seguirá para cada una de las fases en ambos fines, apuntalando la dirección a establecer el Análisis Didáctico como metodología de formación e investigación.

Figura 5

Fases en el análisis didáctico del ámbito investigativo y formativo dentro del taller de formación continua



Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Metodología

En este capítulo se describen elementos del marco metodológico. Estos están organizados en: tipo de investigación, método, técnica e instrumentos para la recolección y análisis de la información.

3.1.1 Tipo de investigación

Con el propósito de diseñar un taller de formación continua haciendo uso de la fase de profundización del Análisis Didáctico, esta investigación se basa en el paradigma de la investigación de diseño centrándonos en la metodología de experimentos de enseñanza, "Su objetivo es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (Molina et al., 2011)

Con el mismo orden de ideas, para lograr identificar el conocimiento didáctico del contenido que se favorece a través del taller de formación continua, con base en el diseño de tareas de enseñanza para el tema de fracciones, la presente investigación es de corte cualitativo, como lo menciona Hernández et al., (2014) esta investigación parte de la recolección y análisis de datos para interpretar los hechos. Los hechos corresponden a las anotaciones de la observación directa, descripciones de lo que estamos viendo o escuchando de los participantes observados, esto nos permitirán contar con una narración de los hechos ocurridos (qué, quién, cómo, cuándo y dónde), y en cuanto a los datos, son las perspectivas teóricas basadas en nuestros referentes teóricos que nos permitirán interpretar los hechos en términos de la identificación de conocimiento didáctico del contenido.

Por lo tanto, la acción indagatoria de esta investigación será de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso circular para lograr interpretar los datos y dar respuesta a la pregunta de investigación, es decir, el investigador se mueve entre la interpretación y las respuestas de los profesores, ya que el análisis se aplica en tanto a la observación participante, pues el investigador asume el papel de formador y mantiene experiencias directas con los participantes, esto implica tener en cuenta la existencia del observador, su subjetividad y reciprocidad en el acto de observar (Hernández et al., 2014), donde las preguntas del formador hacia los profesores servirán para reafirmar la interpretación que tiene el investigador de la actividad

matemática y las interacciones que dan cuenta del conocimiento didáctico del contenido durante el taller.

Se utilizará la recolección y análisis de los datos para revelar o identificar el conocimiento didáctico del contenido del profesor en la organización sistemática de tareas de enseñanza mediante el taller propuesto. En este sentido, la investigación se basa en “una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas)” (Hernández et al., 2014).

3.2 Método

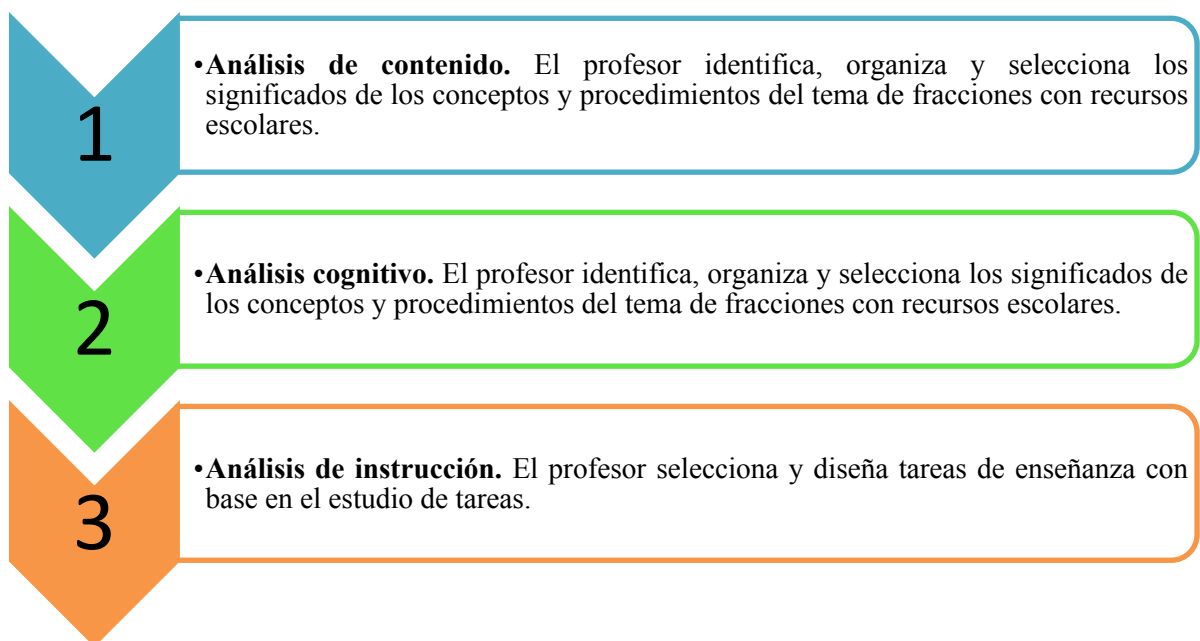
3.2.1 *Diseño del taller*

Como hemos mencionado en apartados anteriores, específicamente en el capítulo de Fundamentos Teóricos, el Análisis Didáctico ha sido utilizado como herramienta metodológica para la planificación de unidades didácticas, con este mismo enfoque se utiliza para el diseño del taller de formación continua de la presente investigación.

En este sentido, se especifica la fase de profundización con fines formativos, para declarar las fases y acciones que conformarán el diseño del taller de formación continua en el tema matemático de fracciones. En la fase de profundización visto desde el ámbito formativo, los profesores profundizan en el conocimiento didáctico del contenido matemático al diseñar y seleccionar tareas de enseñanza, esto implica llevar a la práctica el análisis de contenido, cognitivo e instrucción con base en los elementos seleccionados dentro de los fundamentos teóricos (Figura 2).

Figura 6

Fases y acciones que conformarán el diseño del taller de formación continua en el tema matemático de fracciones



Fuente: Elaboración propia

3.2.1.1 Instrumentos para el diseño del taller

El diseño del taller consiste en dos etapas: 1) realización por parte del investigador de los tres análisis pertenecientes a la fase de profundización del Análisis Didáctico (cognitivo, contenido y de instrucción) en el tema de fracciones, cuya finalidad consiste en asentar las bases para el diseño del taller de formación continua dirigido a profesores; y 2) diseño del taller, una vez realizado los análisis por parte del investigador se continua con la etapa de diseño, donde se establecen los criterios y se realiza la planeación del taller con base en los análisis realizados.

Tabla 1

Instrumento para el análisis de contenido.

Texto escolar analizado		Contenido Matemático	
Folio		Componentes del análisis de contenido	Evidencia
Categorías		Estructura conceptual	

Campo Conceptual	Hechos	Conceptos		Estructura	
Campo procedimental	Destrezas	Razonamientos		Estrategias	
Categorías	Sistemas de representación				Evidencia
Operaciones	Creación	Transformación sintáctica invariante	Transformación sintáctica variante	Traducción	
Sistema de representación utilizado					
Categorías	Fenomenología				Evidencia
Contextos					
Situaciones					
Fenómenos					
Tipos de tareas					

Tabla 2

Instrumento para análisis cognitivo.

Texto escolar analizado			Contenido Matemático	
Folio		Componentes del análisis cognitivo		Evidencia
Categorías		Expectativas de aprendizaje		

Competencias		
Propósitos		
Aprendizajes esperados (Formulación de objetivos)		
Categorías	Limitaciones de aprendizaje	
Errores y dificultades		
Categorías	Demandas cognitivas	
Capacidades		
Tipo de tareas		

Tabla 3

Instrumento para análisis de instrucción

Texto escolar analizado		Contenido Matemático	
Folio		Componentes del análisis de instrucción	Evidencia
Categorías		Adecuación	
Conceptos y procedimientos que configuran el contenido matemático seleccionado			
Actividades compatibles con el contenido			
Actividades compatibles con el Análisis Cognitivo			
Categorías		Complejidad	

Reproducción		
Conexión		
Reflexión		
Categorías	Resolución de problemas y modelización	
Intencionalidad		
Funcionalidad		

3.2.2 Experimentación (aplicación del taller)

Corresponde a la aplicación del taller diseñado y en consecuencia a las interacciones de los profesores con el trayecto del taller implementado, se divide en tres sesiones: 1) Análisis de contenido, 2) análisis cognitivo, y 3) análisis de instrucción.

3.2.2.1 Estudio de caso

La presente investigación se realizará con estudio de caso, siendo este “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 1998). Por lo tanto, a través de este método, se busca destacar, describir diferencias y aprender sobre un caso en particular, en tanto a la acción de profesores al seleccionar y diseñar tareas de enseñanza. La finalidad de este estudio de caso es como instrumento para conseguir información específica de los aspectos y elementos que consideran los profesores durante el taller de formación continua.

3.2.2.1.1 Selección de casos

La investigación se realizará con seis profesores de educación primaria de una misma escuela, en los niveles educativos de primer a sexto año, teniendo en común el contenido matemático de fracciones, la selección de estos profesores reside en la disponibilidad de tiempo, espacios y seguimiento que se le puede asignar al taller, es decir, al ser de la misma escuela, bajo los mismos horarios y dentro del mismo espacio, proporciona estabilidad en el seguimiento de las acciones planteadas en el taller, así como la observación directa, participante y el análisis e interpretación de resultados según lo demanda el taller implementado.

3.2.2.2 Análisis de conversaciones

Caracterizada por procesos secuenciales e interrelacionados de fases y secuencias temáticas, intercambios verbales, intervenciones y actos de habla, que configuran la estructura de significados que distinguen un contexto educativo determinado (Villalta, 2009). Ofrece elementos para comprender las prácticas pedagógicas del docente en tanto a la interacción de los profesores durante la aplicación del taller.

3.2.3 Técnica

Esta investigación se fundamenta en la revisión analítica de la literatura y la orientación hacia la descripción y el entendimiento, que está dirigido hacia las experiencias de los participantes en el taller propuesto (Hernández et al., 2014). Además será de corte inductivo: el diseño del taller permite explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas; es interpretativo: analiza múltiples realidades subjetivas; e iterativo: el análisis e interpretación de datos es recurrente. La tarea de recolectar y analizar datos es permanente donde se busca identificar la construcción de conocimiento didáctico del contenido en el profesor a través de un taller de formación continua.

La temporalidad de la investigación es transversal, en tanto a que la recolección de datos será permanente y en un solo momento del tiempo, es decir por sesión del taller implementado.

3.3 Instrumentos para recoger información

Para lograr los objetivos planteados, se diseña un taller de formación continua, con base en la fase de profundización del Análisis Didáctico, con la intención de identificar y desarrollar conocimiento didáctico de contenido en profesores, con base en ello y con el propósito de obtener una amplia información acerca de dichos cambios, se propone como instrumentos metodológicos de recogida de datos lo siguiente:

- **Videograbación de clase:** Las videograbaciones de clase nos permitirán observar la práctica del profesor nuevamente durante el taller, para evitar dejar por fuera elementos importantes que puedan enriquecer nuestro análisis, además de que nos permite transcribir las conversaciones de los profesores y observar nuevamente las interacciones durante el taller.
- **Registros de clase.** La trasposición textual de las conversaciones a registros de clases, nos permite segmentar en episodios que corresponden a un fragmento que tiene un principio y un fin reconocible, y una secuencia de acciones que lo constituye (Krippendorff, 1990, p.85, como se citó en

Rojas y Flores, 2011), esto con la intención de realizar un Análisis interpretativo con base en Hernández, Fernández y Baptista (2014). El análisis se aplica a los episodios de las sesiones a través de una descripción interpretativa. La descripción y el análisis de la enseñanza de estos episodios nos llevan a establecer explicaciones sobre la acción docente, y a su vez, identificar el conocimiento matemático para la enseñanza (CDC).

- **Evidencias de trabajo** proporcionadas por el taller, estas nos permitirán recuperar información escrita por el profesor de los elementos y aspectos que considera para la elección y diseño de tareas de enseñanza, el análisis se realizará "identificando las tareas habituales que realizan los profesores, que constituyen las actividades de enseñanza y aprendizaje, objeto de la instrucción, dado a que requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento del contenido, lo que nos permitiría precisar en la observación de los dominios de conocimiento" (Rojas y Flores, 2011).
- **Observación participante.** Se considera pertinente realizar observaciones participes durante las sesiones del taller porque permite obtener información acerca de cómo el profesor emplea su conocimiento didáctico del contenido durante la selección y diseño de tareas de enseñanza, además que mediante preguntas o participación del formador, permitirá comprender sí el docente es consciente del conocimiento observado.

3.4 Instrumentos para el análisis de la información

Se utiliza el fin investigativo del Análisis de Instrucción para identificar el desarrollo del proceso formativo de los profesores, para ver como ponen en juego algunos componentes del Análisis Didáctico y los conocimientos didácticos del contenido cuando al planifica la unidad didáctica del tema matemático, en este sentido para el análisis de información utilizaremos:

- **Tabla de relación del conocimiento didáctico del contenido matemático y el análisis didáctico.** Esta tabla nos permitirá ir identificando que conocimientos pone el juego el profesor a la hora de diseñar y seleccionar tareas de enseñanza para el tema de fracciones. Para analizar esta información, se considera pertinente utilizar la caracterización del modelo del conocimiento MKT (Ball et al., 2008) descrita en Rojas et al., (2013), que nos permite identificar conocimiento didáctico del contenido matemático que el profesor emplea a la hora de diseñar y seleccionar tareas de enseñanza.

Tabla 4

Instrumento para establecer la relación de conocimiento didáctico del contenido con el análisis didáctico empleado por los profesores.

Tipo de Análisis		Descripción
MKT: Conocimiento del contenido y los estudiantes		
Análisis de Instrucción	Tareas y secuencia de tareas	El grado en que las tareas planteadas sean adecuadas al nivel escolar y cognitivo de los estudiantes. La variedad de tareas planteadas en relación a la diversidad de los alumnos.
Tipo de Análisis		Descripción
MKT: Conocimiento del contenido y la enseñanza		
Análisis de Instrucción	Tareas y secuencia de tareas	La adecuación de las tareas propuestas para cada objetivo. La variedad de sistemas de representación que se emplean en las tareas planteadas. El grado en que las tareas planteadas permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos. Adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje que se intuyen.
Tipo de Análisis		Descripción
MKT: Conocimiento del contenido y el currículo		
Análisis de Instrucción	Tareas y secuencia de tareas	El grado en que las tareas enunciadas se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en los documentos oficiales o en las indicaciones curriculares de diversas fuentes del currículo en educación matemática (estándares curriculares, currículo nacional, pruebas PISA, etc.)

Fuente: Adaptado de Rojas et al., (2013)

CAPÍTULO 4

DISEÑO DEL TALLER

El diseño del taller se presenta en dos momentos: en el primero, se presentan los resultados de cada uno de los análisis que conforman la fase de profundización del Análisis Didáctico respecto al tema de fracciones en educación primaria, estos resultados son concebidos por el investigador, son las bases que permiten el diseño del taller de formación continua y son utilizados como referente para identificar los conocimientos didácticos del contenido que el profesor pone en juego a la hora de seleccionar y diseñar tareas de enseñanza.

Posteriormente, en el segundo momento, se muestra la estructura y diseño del taller de formación continua.

4.1 Análisis Didáctico - Fase de profundización. Tema de fracciones en educación primaria

4.1.1 Análisis de Contenido del tema de fracciones en educación primaria

El análisis de contenido según Lupiáñez (2009) es aquel que: “se centra en analizar, describir y establecer los diferentes significados que tienen las nociones involucradas en el tema de matemáticas”, además Rico y Fernández-Cano (2013), consideran que este análisis delimita y precisa la pluralidad y diversidad de significados de los conocimientos que lo estructuran, por lo tanto, para identificar dicha diversidad de significados primero se acota el nivel de concreción en el que se enmarca este análisis.

4.1.1.1 Acerca del contenido Matemático

La selección del contenido matemático escolar se recoge del *contenido prescrito* en las “directrices curriculares oficiales” donde Lupiáñez (2009) señala que se establecen “las nociones básicas que han de manejar todos los escolares, se presentan organizados según etapas y niveles; se relacionan con expectativas generales de aprendizaje y con criterios de evaluación” (p.39).

Por lo tanto, como la estructura de esta propuesta de desarrollo profesional parte del diseño de un taller de formación continua que tiene como intencionalidad proporcionar a los profesores elementos necesarios que les permitan poner en juego conocimiento didáctico del contenido a la hora de seleccionar y diseñar tareas de enseñanza para el tema de fracciones en educación primaria, el presente análisis se centra en el Plan y Programas de Estudio Aprendizajes Clave para la Educación Integral de cada grado escolar (SEP, 2017), mismo que actualmente se encuentra vigente.

4.1.1.2 Estructura conceptual del tema de fracciones en el Plan y Programa de Estudios Aprendizajes Clave (2017)

En este componente del análisis de contenido se considera el conocimiento matemático en dos campos: conceptual y procedimental. Así mismo, se toma la distinción de estos dos campos que realiza Rico (1996, como se citó en Lupiañez, 2009), “esta distinción, permite analizar con detalle la complejidad del conocimiento matemático y subraya la conexión permanente entre conceptos y procedimientos” (p. 40).

Conocimiento Conceptual. Está conformado por el conocimiento personal, con las estructuras matemáticas con las que se piensa, y se puede distinguir tres niveles:

a) Hechos

- Términos
 - *Fracciones*
 - *Denominador*
 - *Numerador*
 - *Relación*
 - *Parte-todo*
 - *Medida*
 - *Reparto*
 - *Equivalencia*
 - *Dividir en partes iguales*
 - *Mitad o medio*
 - *Proporción*
- Notaciones
 - *Fracciones de la forma:*
 - n/m
 - $\frac{a}{b}$
 - $a/b = a \div b$
 - $\frac{m}{2^n}$
 - *Equivalencias básicas:*
 - $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 - $\frac{4}{4} = 1$
 - $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
 - *Fracciones mixtas:*
 - $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- *Convenios*

- Numerador/denominador (a/b)
- Razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
- *Resultados.*
 - Suma de fracciones con mismo denominador o suma de fracciones homogéneas: el proceso de la suma se basa en sumar los numeradores y el denominador se mantiene igual: $1/4 + 2/4 = 3/4$
 - Suma de diferente denominador (Uso de mínimo común múltiplo)
 - Técnicas de Multiplicación y división de fracciones

b) Conceptos:

- Problemas de reparto
- Aplicación en Proporcionalidad
- Aplicación en Porcentajes

c) Estructuras conceptuales:

- a/b representa una división algebraica, por lo que el divisor debe ser distinto de cero ($b \neq 0$).
- Dos fracciones a/b y c/d son equivalentes si se verifica que $a * d = b * c$.
- Propiedades algebraicas de operaciones suma y producto.

“Las estructuras matemáticas destacan las conexiones y relaciones mutuas de familias de conceptos y los sistemas de representación que comparten; organizan y constituyen ideas de orden superior y establecen nuevas formas de relación o algún orden entre conceptos no inclusivos” (Lupiañez, 2009).

Conocimiento Procedimental. Engloba los procedimientos y formas de actuar o ejecutar tareas matemáticas, éste se exterioriza en la realización de tareas ordenadas y su aprendizaje se lleva a cabo mediante secuencias de actuaciones, que pueden sistematizarse. Se puede distinguir tres niveles de concreción:

CAPÍTULO 1 *Destrezas:*

- Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
- Ordena fracciones con denominadores múltiplos.
- Resuelve problemas de suma y resta con fracciones del mismo denominador (medios, cuartos, octavos, hasta doceavos).
- Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones con denominadores, uno múltiplo del otro.

- Lee, escribe y ordena números fraccionarios de diferente denominador.
- Reconoce y construye fracciones equivalentes.
- Resuelve problemas de multiplicación con fracciones.
- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
- Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante número natural.

CAPÍTULO 2 *Razonamientos:*

- Deductivo: Interpretar geoméricamente la expresión que plantea un problema.
- Analógico: demostrar equivalencia entre la representación algebraica (simbólica) y geométrica.
- Figurativo: uso de representaciones geométricas.
- Comprobar en problemas de variación la aplicación de proporcionalidad y porcentajes.

CAPÍTULO 3 *Estrategias:*

- Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números fraccionarios.
- Resolver problemas en diversos contextos.
- Uso de diferentes sistemas de representación.

4.1.1.3 Sistemas de representación

Los sistemas de representación están compuestos por signos que comprenden reglas, las reglas determinan: (1) cómo crear un signo que pertenece al sistema, (2) cómo reconocer si un signo dado pertenece a él y (3) cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos (Kaput, 1992, como se citó en Cañadas et al., 2018, p.72).

De esta forma, una estructura matemática o un mismo concepto puede ser representado en diversos sistemas de representación, lo cual permite agrupar y caracterizar en cuatro categorías, las operaciones que se realizan sobre los signos pertenecen a los sistemas de representación (Cañadas et al., 2018, p.72-73):

Creación y presentación de signos o expresiones. Esta operación permite determinar expresiones válidas e inválidas ejemplo:

- **Inválidas:** las expresiones $a/0$ ($a \neq 0$) y $0/0$, el significado de estas expresiones se hacen en términos de inexistencia, indefinición, imposibilidad y sin sentido, ya que en afirmaciones justificativas en

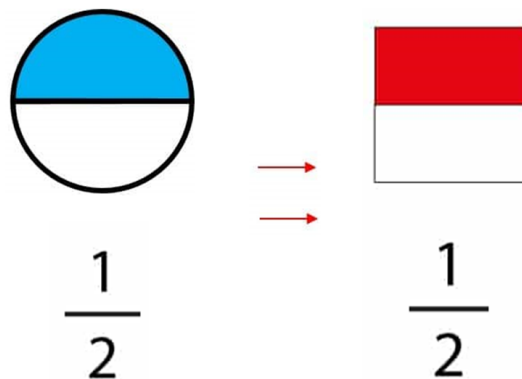
términos de división o de fracción se habla de (1) inexistencia porque la división por cero no está definida, (2) que dividir por cero no tiene sentido y (3) que es imposible realizar la operación cuando el denominador se anula.

- **Válidas:** fracciones propias, aquellas fracciones en las que el numerador es menor que el denominador, por lo tanto son menores que un entero, ejemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{10}$, etc.

Transformación sintáctica invariante. Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el concepto o procedimiento matemático designado por esos signos cambie, ejemplo: Fracciones equivalentes, expresan el mismo número, aunque estas no compartan el mismo numerador y denominador, en estas fracciones equivalentes al dividir el numerador entre el denominador obtenemos el mismo resultado: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \dots$

Transformación sintáctica variante. Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, en la que el objeto matemático designado por esos signos cambia, ejemplo:

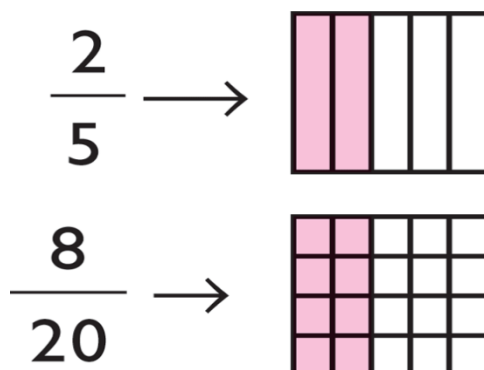
Figura 7
Variante Pictórica



Traducción entre sistemas de representación. Esta operación se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece una relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que pertenecen a diversos sistemas de representación, ejemplo:

Figura 8

Representación numérico - geométrico



Los sistemas de representación ayudan a “identificar los modos en que el concepto se presenta” (Gómez, 2007, p. 455), y “analizar cómo se expresan los elementos de la estructura conceptual y cuáles de esas formas de expresión constituyen sistemas de representación puede ayudar a conocer los significados del tema desde la perspectiva de los sistemas de representación” (Cañadas et al., 2018, p.75). Dentro del Plan y Programas de Estudio (2017) se consideran los siguientes sistemas de representación como parte de la educación matemática en primaria:

Representación numérica

La representación numérica de las fracciones compuesto por símbolos llamados números cuya representación numérica es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Y sus expresiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{10}{8}$, $3\frac{1}{2}$, etc.

Simbólico

Sistema de representación específico porque tiene sus propios signos: números; letras; y símbolos de las operaciones aritméticas, con ellas se puede operar y existe una relación entre ellos, ejemplo:

- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
- Repartir 3 pasteles entre 4 niños, los alumnos han visto que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
- Si a cada invitado se le dan $\frac{2}{5}$ de pastel, ¿cuántos pasteles se necesitan para darle esa cantidad a 5 invitados? Esto implica la multiplicación $5 \times \frac{2}{5}$, que puede llevarse a cabo mediante sumas: $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$
- Si se reparte $\frac{1}{3}$ de pastel entre cinco personas: $\frac{1}{3} \div 5 = \frac{1}{15}$.

Tabular

Está ligado al sistema de representación numérico, pero tiene sus propios signos y reglas de combinación de los mismos. La información se presenta en filas y columnas de la tabla y forman parte de las normas de este sistema de representación, ejemplo:

- En una fiesta, varios niños recibieron diferentes fracciones de pastelitos iguales. Indica para cada pareja de niños quién recibió más y cuánto más (figura 9).

Figura 9

Representación tabular 3°

		¿Quién recibió más?	¿Cuánto más?
Ana: $\frac{1}{2}$	Pablo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Laura: $\frac{3}{4}$	Margo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Luisa: $\frac{3}{4}$	Emilio: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Inés: $\frac{4}{8}$	José: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$		

Fuente: SEP (2017)

- Si a cada invitado se le dan $\frac{2}{5}$ de pastel, ¿cuántos pasteles se necesitan para darle esa cantidad a 5 invitados? Responde la tabla siguiente (figura 10).

Figura 10

Representación tabular 5°

Cantidad por cada invitado	Número de invitados	Número de pasteles que se debe comprar
$\frac{2}{5}$ de pastel	1	
$\frac{2}{5}$ de pastel	5	
$\frac{2}{5}$ de pastel	10	
$\frac{2}{5}$ de pastel	15	
$\frac{2}{5}$ de pastel		30

Fuente: SEP (2017)

- Si al repartir un solo pastel entre cinco personas le corresponde $\frac{1}{5}$ a cada una, entonces, al repartir cuatro pasteles entre cinco personas le corresponderá cuatro veces más a cada una, es decir, 4 veces $\frac{1}{5}$, esto es, $\frac{4}{5}$ (figura 11)

Figura 11

Representación tabular 5° No. 2

Entre cinco personas	
Número de pasteles	A cada una le corresponde
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{2}{5}$
3	$\frac{3}{5}$
—	2

Fuente: SEP (2017)

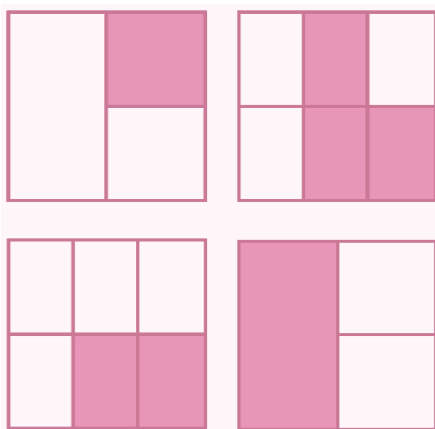
Geométrico

El sistema de representación geométrico se utiliza para representar con figuras geométricas:

- Uso figuras con fondo blanco y también con subdivisiones, pero en las que el número de subdivisiones no siempre coincida con el denominador, por ejemplo, pídales que indiquen en cuál de los siguientes cuadrados está coloreado $\frac{1}{2}$ (figura 12).

Figura 12

Representación geométrica 3°

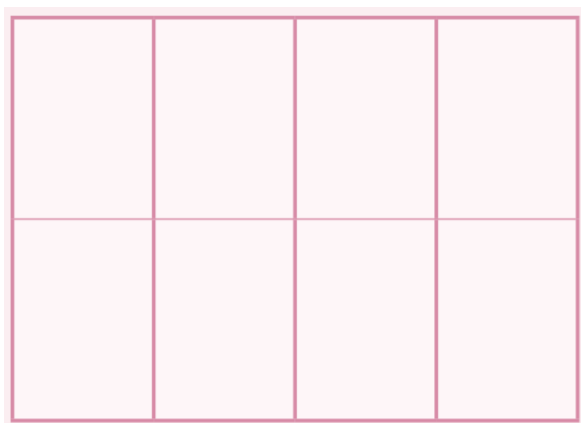


Fuente: SEP (2017)

- A la inversa, pida a los alumnos que sombreen una fracción dada, por ejemplo, iluminar $\frac{1}{4}$ de la figura, o bien, sombrea de tres formas la mitad del rectángulo (figura 13)

Figura 13

Imagen para ilustrar $\frac{1}{4}$ en 3°



Fuente: SEP (2017)

Manipulativo

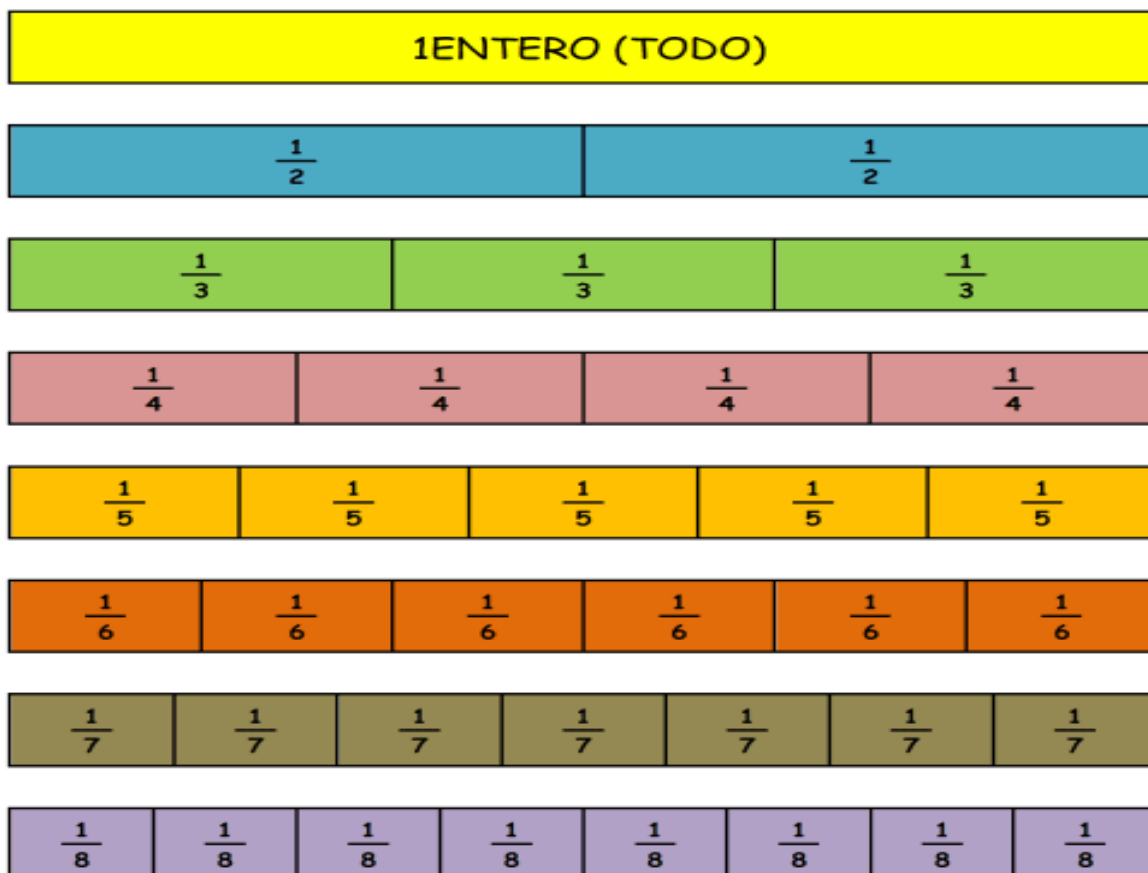
Como su nombre lo indica es una representación que es palpable, las dificultades que causa es confundirlo con el material didáctico:

- ¿Qué tira será más grande: la de $\frac{1}{3}$ de unidad o la de $\frac{3}{6}$ de unidad? Después de que los alumnos consideren el problema y propongan algunas

soluciones, pídale que elaboren las tiras para verificar sus respuestas (figura 14).

Figura 14

Uso de Tiras con fracciones



Fuente: adaptado de *tiras de fracciones* [Fotografía], por MathCenter Free Math for Everyone, Math-center (<https://math-center.org/es-PY/learning-page/3b7fd052/tiras-de-fraccion-hasta-octavos/>)

4.1.1.4 Fenomenología

La fenomenología está constituida por las conexiones entre el concepto matemático y las situaciones del mundo real, "este concepto pedagógico se apoya en la información proveniente de la estructura conceptual y los sistemas de representación" (Cañadas et al., 2018, p.92).

La fenomenología es un "elemento constitutivo del significado de un concepto [que surge] de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto" (Gómez, 2007, p. 50). Por lo tanto, el

término fenomenología dentro del análisis de contenido se usa como dimensión del significado de un concepto matemático. La fenomenología viene dada por: contextos, situaciones y fenómenos.

Contextos es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden a unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimientos. El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones (Rico et al. 2008, p. 58). Los contextos se considerarán tanto los matemáticos, situaciones puramente matemáticas, como los contextos no matemáticos, aquellas situaciones en la vida cotidiana.

Situaciones es una referencia del medio donde una estructura matemática tiene un uso regular, considerándose aquí las usadas en el estudio PISA previas al 2012 (OCDE, 2003, como se citó en Cañadas et al., 2018, p.104)¹:

Personales. Relacionadas con las actividades diarias de los alumnos.

- Reparto de pasteles entre niños, por ejemplo, al repartir 3 pasteles entre 4 niños.
- Compré $1 \frac{3}{4}$ kg de carne molida y $\frac{2}{4}$ kg de carne sin moler. ¿Cuánta carne compré en total?
- Se usaron $\frac{5}{8}$ partes de un listón para a hacer un moño. ¿Qué parte del listón sobró?

Educativas. Las que se encuentra el alumno en el centro escolar.

- Relación parte-todo. Se trata de una unidad o un todo que se divide en partes iguales, de las cuales se toman algunas. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ se concibe como una unidad o un todo que se divide en cuatro partes iguales y de la cual se toman tres.
- Medición, reparto y como cociente.
- Uso de equivalencias
- Uso de fracciones mixtas
- Comparación de fracciones menor que, mayor que.
- Sumas y restas de fracciones.

¹ En la prueba pisa de 2012 se abandonó el concepto de situación para hablar exclusivamente de contextos. Esta noción de contexto es diferente de la noción de contexto fenomenológico, la nueva clasificación de contextos corresponde a personales, profesionales, sociales y científicos (Cañadas et al., 2018, p.104).

Públicas. Se refieren a la comunidad local o a otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación.

- Después de la fiesta quedaron $\frac{3}{5}$ de pastel. Ana se comió $\frac{1}{5}$ del pastel y Luis lo demás. ¿Qué fracción de pastel se comió Luis?
- Calculo de porcentajes (proporcionalidad)

Fenómenos

- Orden de fracciones
- Suma y resta de fracciones
- Uso de fracciones mixtas
- Problemas de multiplicación de fracciones
- Problemas de división de fracciones
- Ubicación de fracciones en la recta numérica
- Problemas de comparación
- Problemas de reparto
- Calculo de problemas de valores faltantes
- Fracciones para expresar una división

4.1.2 Análisis cognitivo del tema de fracciones en educación primaria

El análisis cognitivo permite al profesor describir y analizar la problemática del aprendizaje en cuanto al tópico matemático a trabajar, en este caso las fracciones. Por lo tanto, se identifican objetivos específicos, se vinculan con las competencias, se delimitan errores y se caracterizan las tareas asociadas a dichos objetivos específicos y competencias, para finalmente proponer tareas, con base en el Plan y Programas de Estudio (SEP, 2017). Los organizadores para realizar las acciones mencionadas son: *expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas* que el profesor brinda a sus alumnos (Lupiáñez, 2009).

4.1.2.1 Expectativas de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje son "aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias de currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los escolares" (Rico y Lupiáñez, 2010, p. 3).

Dentro del Plan y Programas de Estudio Aprendizajes Clave para la Educación Integral (SEP, 2017, p. 217), es importante que las matemáticas

escolares ayuden a los alumnos desarrollar habilidades que les permitan “analizar fenómenos y situaciones en contextos diversos; interpretar y procesar información, tanto cuantitativa como cualitativa; identificar patrones y regularidades, así como plantear y resolver problemas. Proporcionan un lenguaje preciso y conciso para modelar, analizar y comunicar observaciones que se realizan en distintos campos”.

Así mismo, se pretende que en la educación básica las matemáticas brinden capacidades cognitivas como clasificar, analizar, inferir, generalizar y abstraer, así como fortalecer el pensamiento lógico, el razonamiento inductivo, el deductivo y el analógico (SEP, 2017).

Los propósitos para la educación primaria dentro de las matemáticas en el Plan y programas de estudios (SEP, 2017), relacionado con el tema de fracciones consisten en:

- Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales.
- Identificar y simbolizar conjuntos de cantidades que varían proporcionalmente, y saber calcular valores faltantes y porcentajes en diversos contextos.
- Calcular y estimar el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros, y estimar e interpretar medidas expresadas con distintos tipos de unidad.
- Buscar, organizar, analizar e interpretar datos con un propósito específico, y luego comunicar la información que resulte de este proceso.

Específicamente el tema de fracciones se encuentra dentro del Plan y Programa de Estudios (SEP, 2017), en el eje temático *Número, Álgebra y Variación*, dentro de los temas: *número; adición y sustracción; multiplicación y división; y proporcionalidad*.

En los niveles de primaria se profundiza en el estudio de la aritmética, se trabaja con los números naturales, fraccionarios, decimales y enteros, las operaciones que se resuelven con ellos y las relaciones de proporcionalidad (SEP, 2017). Con ello se busca que los estudiantes en este eje temático, se apropien de los significados de las operaciones y sean capaces de reconocer las situaciones y los problemas en los que estas son útiles. Además se busca que desarrollen procedimientos sistemáticos de cálculo escrito, accesibles para ellos, y también de cálculo mental.

Los aprendizajes esperados para cada ciclo escolar con respecto a las fracciones son:

3º y 4º

- Usa fracciones con denominador hasta 12 para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
- Resuelve problemas de suma y resta de fracciones con el mismo denominador (hasta doceavos).

5º y 6º

- Lee, escribe y ordena números naturales hasta de cualquier cantidad de cifras, fracciones y números decimales.
- Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones con denominadores, uno múltiplo del otro. Usa el algoritmo convencional para sumar y restar decimales.
- Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador natural y de división con cociente o divisor naturales.
- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m de); calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante número natural.

4.1.2.2 Limitaciones de aprendizaje

El aprendizaje de un nuevo campo numérico en educación primaria representa retos para los alumnos, en este caso las fracciones comienzan su enseñanza formalmente en tercer grado de educación primaria y aumenta sus usos en diferentes contextos a lo largo de cada ciclo escolar. Simón et al., (2018) atribuye tres factores que contribuyen a las dificultades que presentarán los alumnos en su aprendizaje: enfoque orientado a la enseñanza de los números naturales en primaria, las fracciones representadas como la relación entre dos números y las distintas formas que adoptan los profesores para enseñar el tema.

Simón et al., (2018) dentro de su investigación identifica cuatro tipos de limitaciones sobre la comprensión de las fracciones:

- 1) Ausencia de la fracción como cantidad.** Los alumnos suelen tener la concepción de la fracción como un arreglo en la que m/n ($m < n$) representa un arreglo en el que un todo está dispuesto en n partes idénticas y m de esas partes están designadas.
- 2) Fracción como dos números.** Los alumnos identifican una fracción como un par de números que representan cantidades sin relación particular implícita entre ellas.
- 3) Concepto limitado de fracción parte-todo.** Los alumnos ven una fracción como un conjunto completo de partes n/n que forman el todo.

4) Dificultad de comprender la unidad de referencia. La comprensión de las unidades de referencia generalmente no se enfatiza en el desarrollo de los números naturales. Este desarrollo se basa en contar por lo tanto la unidad, que generalmente, se deja implícita.

4.1.2.2.1 ***Ejemplo de dificultades asociadas a los significados de las fracciones***

La fracción vista como una relación *parte-todo* describe cuando una unidad o totalidad se descompone en partes iguales y la fracción indica una o varias de estas partes. En este significado elemental, los alumnos aprenden a identificar en figuras geométricas, una parte sombreada correspondiente a una fracción unitaria (un medio, un tercio, un cuarto, etc.), después a reconocer y tomar varias de estas partes (Sánchez, et al., 2011).

El uso de este acercamiento suele originar algunas ideas erróneas, por ejemplo, el manejo de la unidad. Mack (1990, como se citó en Sánchez, et al., 2011) en su estudio informa que aunque los alumnos conocían representaciones, procedimientos y símbolos sobre las fracciones, no relacionaban adecuadamente esos conocimientos, resaltando la dificultad que tenían para identificar la unidad en situaciones representadas de manera concreta y de forma simbólica, pues en los alumnos persistía la idea de que “como las fracciones son una parte del todo, siempre son menores [que el todo]”.

En cuanto al significado de las fracciones como *cociente*, que son cuando se identifican las relaciones entre una situación de división y una fracción como representación de su cociente: El cociente de la división $a \div b$ es igual a la fracción a/b para toda a, b en los enteros y $b \neq 0$. Comúnmente se asocia a las situaciones de reparto equitativo, sin embargo, estas situaciones no son suficientes para construir ese significado (Sánchez, et al., 2011).

En este significado, al principio las situaciones que tienen sentido para los alumnos son aquellas cuyo resultado es menor que la unidad, porque no conciben las situaciones de reparto equitativo como un caso de división, aun cuando los alumnos pueden encontrar el cociente en términos de fracciones dividiendo una unidad (Sánchez, et al., 2011).

En el caso de la fracción como *medida*, que es cuando se representa el número de unidades y partes de la unidad de una clase (longitud, área, volumen, tiempo, etc.) que cubren o aproximan una cantidad de la misma clase (Sánchez, et al., 2011). La dificultad se muestra al integrar la fracción como una noción para medir longitudes, en el caso de sumar subdivisiones para lograr una mejor aproximación de la medida del objeto.

En las fracciones como *operador*, cuando actúan para modificar un estado o situación. En este caso Behr et al., (1993, como se citó en Sánchez, et al., 2011), argumenta con el siguiente ejemplo que los problemas que usan las fracciones como operador suelen requerir soluciones de varios pasos:

Muchas marcas de chicles venden su producto en paquetes de 5 piezas por paquete. Juana tiene 8 paquetes. María tiene $\frac{3}{4}$ partes de lo que tiene Juana. ¿Cuántos paquetes tiene María? ¿Cuántas piezas tiene María?

(p. 46)

Lo que tiene María se puede ver como una transformación de lo que tiene Juana, indicada por el número $\frac{3}{4}$; éste opera sobre los ocho paquetes.

Por último, las fracciones como razón funcionan para poner en relación dos cantidades. La dificultad radica en lograr identificar dicha relación, como en el caso de problemas de valor faltante (proporcionalidad directa), los alumnos reconocen que hay una relación que afecta los tres números; sin embargo, no tienen un método para saber cómo organizar los tres números de manera conveniente y realizar las operaciones respectivas.

4.1.2.3 Demandas cognitivas

Este último organizador del análisis cognitivo, consiste en proponer tareas orientadas a la consecución de las expectativas y la superación de las dificultades de aprendizaje, expresadas en orientaciones didácticas (SEP, 2017), con la finalidad de potenciar el aprendizaje, apoyar en la superación de dificultades y de los errores (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Tabla 5

Orientaciones didácticas tercer grado de educación primaria

3° Primaria	
Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje Esperado	Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos

En este grado, los alumnos tienen su primer acercamiento a la noción de fracción en situaciones de medición y de reparto. Las relaciones parte-todo están implícitas en las situaciones de medición y de reparto; no obstante, se sugieren algunos tipos específicos de actividad.

Se sugiere que inicie las situaciones de medición proporcionando a los alumnos tiras de papel para que midan ciertas longitudes (ancho de la puerta, largo de la mesa, etc.). De ahí surgirán expresiones como, "tres y un cachito", "tres y un pedazo" y algunas otras. ¿El cachito es más o es menos que la mitad de la tira? Esta pregunta lleva a la necesidad de dividir la tira, hay que insistir en que las partes sean iguales para poder llamarles *mitad o medio*, si la tira se dividió en dos partes. La parte final del proceso es la representación numérica de la fracción.

Las situaciones de reparto constituyen otra fuente de problemas adecuada para el estudio de las fracciones. Se sugiere que inicie con repartos concretos (por ejemplo, hojas de papel que representan pasteles), en los que los resultados sean a veces menores que una unidad y, en otras, mayores (tres pasteles entre dos niños, cinco pasteles entre ocho niños).

Con frecuencia, antes de hacer un reparto, conviene que pida a los alumnos anticipaciones como: "Dados dos repartos muy fáciles de comparar, por ejemplo, 'un pastel entre cuatro niños' y 'un pastel entre dos niños' ", ellos deberán decir en cuál creen que los niños recibirán más pastel y argumentarlo. Después de hacer el reparto físico, los alumnos verán si su anticipación fue correcta.

A lo largo del proceso de estudio, los alumnos harán representaciones propias y usarán escrituras aditivas para expresar los resultados de los repartos. Por ejemplo, para un reparto de tres pasteles entre cuatro niños, surgirán expresiones como $1/2 + 1/4$; $1/4 + 1/4 + 1/4$; $3/4$. Es muy importante que compare estas expresiones y ayude a los alumnos a verificar que representan lo mismo.

Además de las actividades anteriores en las que las relaciones parte-todo están implícitas, presente a los alumnos figuras en las que una fracción está sombreada y ellos deben anotar cuál es esa fracción

Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Adición y sustracción

Aprendizaje Esperado	Resuelve problemas de suma y resta con fracciones del mismo denominador (medios, cuartos y octavos).
----------------------	--

Los alumnos que expresan tanto resultados de medición como de reparto, ellos han utilizado escrituras aditivas y las han comparado.

Por ejemplo, al repartir 3 pasteles entre 4 niños, los alumnos han visto que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ es lo mismo que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, pues ambos resultados son equivalentes a $\frac{3}{4}$. De manera que para trabajar la suma y la resta con fracciones de igual denominador se sugiere que plantee un problema como el siguiente:

En una fiesta, varios niños recibieron diferentes fracciones de pastelitos iguales. Indica para cada pareja de niños quién recibió más y cuánto más:

		¿Quién recibió más?	¿Cuánto más?
Ana: $\frac{1}{2}$	Pablo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Laura: $\frac{3}{4}$	Margo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Luisa: $\frac{3}{4}$	Emilio: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Inés: $\frac{4}{8}$	José: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$		

Al llenar la tabla, los alumnos podrán concluir que: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ y que $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Después de varios ejercicios de práctica en los que se pueden plantear problemas de los mismos tipos que los hechos con números naturales, solicíteles que formulen y escriban una técnica para sumar y restar fracciones con igual denominador

Fuente: SEP (2017)

Tabla 6

Orientaciones Didácticas cuarto grado de educación primaria

4° Primaria	
Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje Esperado	Usa fracciones con denominadores hasta 12 para expresar relaciones parte-todo, medidas, y resultados de

	repartos.
<p>Se sugiere que introduzca las nuevas particiones con problemas de reparto, pues no es difícil plantearlos, y variar el nivel de dificultad. Al principio, los alumnos seguirán partiendo en mitades, por ejemplo, es común que para repartir tres pasteles entre cuatro personas obtengan como resultado $1/2$ pastel + $1/4$ de pastel para cada una. Necesitan experimentar varias veces con problemas para aprender a hacer nuevas particiones.</p> <p>Los divisores (3, 5, 6, etc.) generan una mayor diversidad en las formas de realizar los repartos, por ejemplo, si tienen dos pasteles que deben repartir entre tres personas, los alumnos podrían obtener: $2/6 + 2/6$ o bien $1/3 + 1/3$.</p> <p>Lo anterior brinda nuevas oportunidades para estudiar la equivalencia de varias expresiones con apoyo de material concreto.</p> <p>Tanto en las situaciones de medición como en las de reparto pueden presentarse varias expresiones con fracciones para representar una misma cantidad. Aproveche esta diversidad para que los alumnos empiecen a formar un repertorio de equivalencias básicas, por ejemplo, $2/4 = 1/2$, $4/4 = 1$, etcétera. Desde este grado pueden empezar también a anotar números en forma mixta, por ejemplo, $3/2 = 1 \frac{1}{2}$.</p> <p>Llevar a cabo actividades en que se anticipe, argumente y —de ser posible— verifique con material concreto cuál de dos medidas fraccionarias es mayor, ayuda a comprender el concepto de fracción. Por ejemplo, anote en el pizarrón las medidas de dos tiras, que pueden ser $2/3$ de unidad y $2/5$ de unidad y, posteriormente, pregunte a los alumnos cuál suponen que es la más larga y por qué, después verifíquelo con ellos elaborando las tiras. Las comparaciones deben ser fáciles de anticipar, por ejemplo, entre fracciones con el mismo numerador o el mismo denominador, o entre medios y cuartos.</p> <p>En este grado, los alumnos empezarán a resolver situaciones en las que no se da la unidad de referencia, pero sí la fracción, y debe obtenerse la unidad, como en este caso: “Esto es $1/5$ de barra de chocolate. Dibuja la barra completa”. Una situación considerablemente más compleja se obtiene si la fracción dada no es unitaria: “Esto es $2/5$ de barra...”</p>	
Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Adición y sustracción

Aprendizaje Esperado	Resuelve problemas de suma y resta de fracciones con el mismo denominador (hasta doceavos)
<p>Algunos ejemplos de problemas con fracciones de varios tipos son los siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se usaron $\frac{5}{8}$ partes de un listón para hacer un moño. ¿Qué parte del listón sobró? • Un carpintero necesita hacer una tira de madera de 3 m de largo y tiene los siguientes tramos de metro: $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{11}{6}$ $\frac{1}{6}$. De dichos tramos él debe elegir aquellos que le permiten hacer la tira de exactamente 3 m. • Después de la fiesta quedaron $\frac{3}{5}$ de pastel. Ana se comió $\frac{1}{5}$ del pastel y Luis lo demás. ¿Qué fracción de pastel se comió Luis? • Compré $2\frac{1}{4}$ kg de carne; de esa carne, $1\frac{3}{4}$ kg está molida. ¿Cuánta carne no molida compré? • Compré $1\frac{3}{4}$ kg de carne molida y $\frac{2}{4}$ kg de carne sin moler. ¿Cuánta carne compré en total? • El listón rojo mide $\frac{3}{4}$ m más de que el listón azul; el listón azul mide $\frac{1}{4}$ m menos que el listón verde; y el listón verde mide $\frac{3}{4}$ m. ¿Cuánto mide el listón rojo? 	

Fuente: SEP (2017)

Tabla 7

Orientaciones didácticas quinto grado de educación primaria

5° Primaria	
Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje Esperado	Ordena fracciones con denominadores múltiplos.
<p>Orden de fracciones</p> <p>Para que ellos adviertan la utilidad de obtener fracciones equivalentes, comience con actividades como la siguiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿qué tira será más grande: la A de $\frac{3}{2}$ de unidad o la C de $\frac{5}{4}$ de unidad? 	

Después de que los alumnos consideren el problema y propongan algunas soluciones, pídale que elaboren las tiras para verificar sus respuestas. Posteriormente, explíqueles que para comparar fracciones con distinto denominador, una buena idea es buscar fracciones equivalentes a las dadas, que tengan el mismo denominador, por ejemplo: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$.

Para aprender a generar fracciones equivalentes se puede analizar lo que ocurre cuando se multiplica solamente el numerador de una fracción o su denominador. Por ejemplo, si se multiplica el numerador por tres, se obtiene una fracción tres veces mayor; si se multiplica el denominador, se obtiene una fracción tres veces menor. Si se llevan a cabo las dos acciones al mismo tiempo, se obtiene una fracción del mismo valor. Pida a los alumnos que hagan varios ejercicios de comparación con el fin de que, poco a poco, afiancen la técnica para generar fracciones equivalentes.

Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Adición y sustracción
Aprendizaje Esperado	Resuelve problemas de suma y resta con decimales y fracciones con denominadores, uno múltiplo del otro. Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas de múltiplos de 100 hasta de cinco cifras y de fracciones usuales.

Los primeros problemas que se plantean con fracciones de distinto denominador es conveniente que la situación ofrezca algún modo de comprobar la respuesta. Pueden usarse tiras de papel de 24 cm, divididas en medios, tercios, cuartos, sextos, octavos y doceavos, al menos dos tiras de cada una por equipo.

Primero se elaboran tiras individuales para que los alumnos se familiaricen con la unidad de medida (la tira), después para que anticipen un resultado y lo comprueben con las tiras. Luego plantéelos problemas como el siguiente:

- ¿cuánto medirá una tira que se forma uniendo otras dos: una de $\frac{3}{8}$ de tira y otra de $\frac{3}{4}$ de tira? Una respuesta errónea probable es $\frac{6}{12}$ de tira.

Es importante que los alumnos cuenten con evidencia de que ese resultado es incorrecto y, por lo tanto, el procedimiento de sumar numeradores y denominadores también lo es. Si ya compararon fracciones con distinto denominador y entienden la equivalencia de fracciones, es posible que propongan

sustituir por una fracción equivalente. Es conveniente que este procedimiento se lleve a cabo y que les solicite que practiquen con algunas sumas. Un ejemplo más, en que el término desconocido es un sumando es el siguiente: Dos tiras unidas miden $\frac{5}{6}$ de tira. Si una de ellas mide $\frac{1}{3}$ de tira, ¿cuánto mide la otra?

Una actividad interesante para sumar o restar fracciones con el mismo denominador consiste en elaborar, mentalmente, sucesiones ascendentes o descendentes con fracciones. A manera de juego, díales el primer número para que ellos, por turnos, vayan diciendo el resultado de sumar un número igual. Hay que aclarar que al llegar a un entero o a un número mixto, estos se deben nombrar como tales, por ejemplo: $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $1 \frac{1}{5}$, $1 \frac{3}{5}$, 2...

En el caso de las sucesiones descendentes hay que decir el número del cual se parte y la fracción que se irá restando, sin llegar a los números negativos.

Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje Esperado	Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador en número natural. Resuelve problemas de división con números naturales y cociente fraccionario o decimal

Problemas de multiplicación

La multiplicación de una fracción o de un número decimal por un multiplicador que sea número natural es relativamente sencilla, pues puede hacerse inicialmente mediante una suma repetida, como en el siguiente problema:

- Si a cada invitado se le dan $\frac{2}{5}$ de pastel, ¿cuántos pasteles se necesitan para darle esa cantidad a 5 invitados?

Esto implica la multiplicación $5 \times \frac{2}{5}$, que puede llevarse a cabo mediante sumas: $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$.

Los problemas con el multiplicador fraccionario son más difíciles, pues este se empieza a usar en sexto grado y es hasta la secundaria cuando los alumnos estudian y examinan detalladamente la multiplicación en la que ambos factores (multiplicador y multiplicando) son fracciones. Sugiera a los estudiantes que usen tablas de variación.

Además de problemas contextualizados, plantee a los alumnos algunos otros de cálculo mental, como este: ¿por cuánto hay que multiplicar $\frac{3}{8}$ para obtener un número entero? ¿Hay más de un factor posible?

Fuente: SEP (2017)

Tabla 8

Orientaciones didácticas sexto grado de educación primaria

6° Primaria	
Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje Esperado	Lee, escribe y ordena números naturales de cualquier cantidad de cifras, fracciones y números decimales.
<p>Orden de fracciones</p> <p>Ordenar fracciones y números decimales es una actividad que ayudará, de manera significativa, a los alumnos a comprender las propiedades de estos números.</p> <p>Proponga a los alumnos una actividad que consista en que ellos digan entre qué par de números naturales consecutivos va cada una de las siguientes fracciones: $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{12}{5}$; $1\frac{3}{4}$; y, posteriormente, invítelos a que los ubiquen en una recta numérica para que lo verifiquen.</p> <p>También puede pedirles que localicen algunos números en la recta numérica; primero podría ser a partir de alguna referencia (ubicar números en una recta en la que están dados el cero y otro número) y luego hacer lo propio pero sin referencia alguna.</p> <p>Aunque la densidad de las fracciones y de los decimales es un tema que se estudiará hasta la secundaria, si lo considera oportuno, puede plantear a los alumnos algunos problemas como los siguientes: – Encontrar un número que esté entre: 3 y 4; 0.3 y 0.4; $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$.</p>	
Eje	Número, álgebra y variación

Tema	Adición y sustracción
Aprendizaje Esperado	Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones.
<p>Los problemas de suma y resta que los alumnos continúan aprendiendo a resolver en este grado incluyen varios tipos de números (naturales, fraccionarios y decimales) sin restricciones en cuanto a su tamaño, con diversos tipos de relaciones entre sus datos y con dos o más operaciones implicadas en la solución.</p> <p>A continuación se dan ejemplos de los tipos de problemas que se han resuelto en grados anteriores:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Un tinaco tenía agua hasta $\frac{5}{8}$ de su capacidad. En el transcurso de tres días se consumió $\frac{1}{4}$ de la capacidad del tinaco. ¿Cuánta agua queda en este? En este caso, el término desconocido es el resultado de la resta, pero también podría ser el sustraendo. • Un tinaco tenía agua hasta $\frac{5}{8}$ partes de su capacidad. Tres días después tenía agua solo hasta $\frac{3}{8}$ de su capacidad. ¿Cuánta agua se consumió en esos días? En este caso, el término desconocido es el minuendo. • ¿Cuánta agua había en un tinaco si después de consumirse $\frac{1}{4}$ de la capacidad total del tinaco, quedó agua hasta $\frac{3}{8}$ de la capacidad total? 	
Eje	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje Esperado	Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador número natural, y de división con cociente o divisores naturales.
<p>La multiplicación de una medida no entera (fracción o decimal) por un número natural como multiplicador se puede interpretar como una suma repetida, por ejemplo: ¿cuánto pesan en total 5 paquetes de $\frac{3}{4}$ kg?</p> $\frac{3}{4} \text{ kg} + \frac{3}{4} \text{ kg} + \frac{3}{4} \text{ kg} + \frac{3}{4} \text{ kg} + \frac{3}{4} \text{ kg} = \frac{15}{4} \text{ kg} = 3 \frac{3}{4} \text{ kg}$ <p>La división con cociente o divisor número natural. En este grado, los alumnos empezarán a resolver problemas de división con fracciones o decimales, pero con cierta restricción: el número que indica la cantidad de veces en los problemas de</p>	

tipo "comparación" o "de partes" en los problemas de tipo "reparto", debe ser un número natural. A continuación se da un ejemplo y se muestran las técnicas que se favorecen:

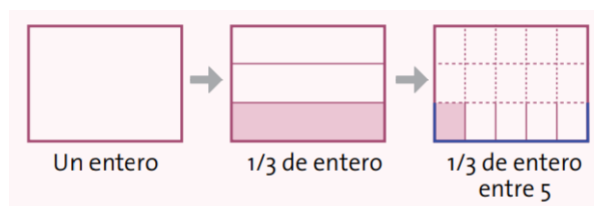
Problemas de reparto. Se trata de partir una medida expresada con una fracción o con un decimal, entre un número de partes (divisor) que es un número natural, por ejemplo: Se distribuyen en partes iguales $\frac{3}{4}$ l de una sustancia en 10 frascos. ¿Qué cantidad de la sustancia va en cada frasco? El problema implica dividir $\frac{3}{4}$ entre 10.

Para dividir una fracción entre un número natural. A partir de casos que puedan resolverse con el apoyo de representaciones gráficas, pida a los alumnos que traten de establecer ellos mismos una regla. Invítelos a que traten de resolver repartos de pasteles, como los que han venido haciendo en años anteriores y tomando una fracción como la cantidad que se reparte.

Decir, en cada uno de los casos siguientes, qué parte del pastel toca a cada persona:

- Si se reparte $\frac{1}{3}$ de pastel entre cinco personas.
- Si se reparten $\frac{6}{6}$ de pastel entre dos personas.
- Si se reparten $\frac{7}{10}$ de pastel entre tres personas.

Cabe mencionar que en esta lista hay casos menos difíciles que otros. Un ejemplo de ellos es cuando el numerador es uno, pues entonces esa única porción se subdivide en el número de partes que indica el divisor, y el denominador de la fracción resultante es naturalmente el producto del denominador por el divisor: $\frac{1}{3} \div 5 = \frac{1}{15}$.



También pueden ser menos difíciles los casos en los que el numerador es múltiplo del divisor, por ejemplo, $\frac{6}{7}$ entre 2, pues el número de porciones indicado por el numerador (6) se puede dividir exactamente entre el divisor (2). Un problema difícil sería: "¿Cómo dividir $\frac{7}{10}$ de pastel entre cinco personas?". Un camino que puede usarse para encontrar el resultado es dividir cada décimo por separado: $\frac{1}{10}$ entre 5 es $\frac{1}{50}$, por lo tanto, $\frac{7}{10}$ entre 5 es siete veces $\frac{1}{10}$, es decir: $\frac{7}{50}$.

Después de estudiar los casos anteriores se establece la técnica: para dividir una fracción entre un número natural, basta con dividir el numerador de la fracción entre el número natural, o multiplicar el denominador por el número natural.

Fuente: SEP (2017)

La presente información, obtenida a través del análisis cognitivo, brinda al profesor información que le permite identificar, seleccionar y organizar los significados de los conceptos y procedimientos del tema matemático de fracciones mismos que se consideran son importantes dentro de su proceso de enseñanza (Lupiáñez, 2009).

4.1.3 Análisis de instrucción para el tema de fracciones en educación primaria

Con base en los análisis anteriores se han seleccionado conceptos, estructurándolos, priorizándolos e identificando cuales expectativas de aprendizaje se consideran sobre ellos. Para dar continuidad con la presente investigación, se selecciona y diseña tareas de enseñanza que se consideren convenientes para favorecer la enseñanza del tema de fracciones.

En este sentido, para realizar el análisis de instrucción se muestra un ejemplo en cada uno de los componentes y sus categorías: adecuación, complejidad y resolución de problemas y modelización. De esta forma se exhibe las tareas y actividades que se solicitará completar a los alumnos, destinadas a los alcances establecidos en el Plan y Programa de Estudio (2017).

4.1.3.1 Adecuación

La coherencia de la tarea con las fases previas del Análisis Didáctico considera que:

- La tarea debe ajustarse a los contenidos y procedimientos contemplados en la estructura conceptual. Utilizando los diferentes sistemas de representación y su redacción la debe ubicar en algunas de las situaciones o contextos caracterizados.
- La tarea debe seleccionar o elaborar con la intención de atender las expectativas de aprendizaje establecidas, así como superar errores y dificultades.

(Ruíz y Fernández, 2013, p.245)

Ejemplo:

Actividad 3º: ¿A quién le tocó más?

En cada equipo se van a repartir caramelos de miel, de manera que a todos les toca la misma cantidad y que no sobre.

Figura 15

Problema de reparto



Fuente: SEP (2019c, p. 77)

- a) ¿En cuál equipo le tocará más caramelo a cada niño? ¿Por qué?
- b) ¿cuánto le tocó a cada integrante del equipo 1?
- c) ¿Y cuánto a los integrantes del equipo 2?

Contexto: Matemático - Educativo

Términos: Fracciones, reparto, partes iguales.

Notaciones: $m/2^n$

Convenios: Razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).

Conceptos: Problemas de reparto

Destrezas: Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo de repartos.

Razonamientos: Interpretar geoméricamente la expresión que plantea un problema.

Estrategias: Uso de diferentes sistemas de representación.

Objetivos/competencias:

- Analizar fenómenos y situaciones en contextos diversos.
- Uso de fracciones del tipo $m/2^n$ (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos.
- Usa fracciones con denominador hasta 12 para expresar relaciones parte-todo.

Sistema de representación: Simbólica – geométrica.

Limitaciones de aprendizaje que se consideran:

- a) **Fracción como dos números.** Los alumnos identifican una fracción como un par de números que representan cantidades sin relación particular implícita entre ellas.
- b) **Concepto limitado de fracción parte-todo.** Los alumnos ven una fracción como un conjunto completo de partes n/n que forman el todo.

4.1.3.2 Complejidad

El nivel de complejidad de las tareas se establece con base en las demandas cognitivas que se plantean a los alumnos al enfrentarlas a ella, para ello, Lupiáñez (2009) agrupa las tareas en tres tipos: reproducción, conexión y reflexión. Dándose un carácter progresivo entre los tres grupos, en donde la complejidad de cada uno es determinado por las capacidades (Ruíz y Fernández, 2013, p.246).

- **Reproducción.**

Contextos familiares o uso de fórmulas sencillas, ejemplo:

Actividad 3º: ¿A quién le tocó más?

1. En cada grupo de niños se va a repartir una cartulina, de manera que a todos les toque la misma cantidad y que no sobre.

Figura 16

Problema de reparto 3º



Fuente: SEP (2019c)

- a. ¿En qué reparto le tocará más cartulina a cada niño? ¿Por qué?

b. ¿Cómo podrían comprobar si lo que respondieron es cierto?

(SEP, 2019c, p. 76)

Se considera tarea de **reproducción** ya que los alumnos aplican un concepto o procedimiento sencillo para la obtención del resultado (Ruíz y Fernández, 2013).

- **Conexión.**

Descritas por contextos menos familiares o uso de diferentes sistemas de representación, ejemplo:

Actividad 3º: Moños

1. Marcos y Lucila tienen listones rojos y verdes de un metro cada uno para hacer moños. Van a hacer 6 rojos de $\frac{1}{4}$ de metro y 6 verdes de $\frac{1}{8}$.
 - a. ¿De qué color son los moños que utilizan más listones?
 - b. ¿Cuántos listones rojos se necesitan para hacer 6 moños? ¿Por qué?
 - c. ¿Alcanza un listón verde para hacer los 6 moños? ¿Por qué?
 - d. ¿De qué color se utilizó más listón?
 - e. Si se tiene $5\frac{3}{4}$ metros de listón rojo y $3\frac{1}{2}$ de listón verde, ¿para cuántos moños de cada color alcanza? Rojos: _____
Verdes: _____
2. Los siguientes dibujos representan un metro de cada listón. Anota en la línea el color que le corresponde y colorea la parte que se necesita para hacer un moño.

Figura 17

Representación geométrica del listón



Fuente: SEP (2019c, p. 109-110)

Corresponde a tareas de **conexión**, debido a que implica una variedad de técnicas para el cálculo de la suma y comparación de fracciones, además de las diferentes representaciones que se pueden utilizar para su resolución. En este caso se requiere identificar estructuras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones y la comparación de fracciones en casos sencillos con igual numerador o igual denominador.

- **Reflexión.**

Capacidades de generalización y justificación de resultados, ejemplo:

Actividad 3º: De varias formas

En la ferretería de Pedro se vende pintura en recipientes de diferentes tamaños. Hay de $\frac{1}{4}$ de litro, $\frac{1}{2}$ litro, $1 \frac{1}{4}$ litros, 2 litros y de $3 \frac{1}{2}$ litros. Luis va a pintar su cuarto y calcula que necesita $7 \frac{3}{4}$ litros de pintura. ¿Qué recipientes puede comprar de manera que no sobre pintura? ¿Cuál opción es más conveniente? Expliquen.

(SEP, 2019c, p. 111)

Se considera tarea de **reflexión**, ya que para realizar la suma y comparación de fracciones no se utiliza la representación simbólica o geométrica, sino que implica cálculos mentales y escritos con procedimientos formales anteriormente aprendidos (Ruíz y Fernández, 2013).

4.1.3.3 Resolución de problemas y modelización

La formulación de un problema parte del mundo real, de una variedad de fenómenos y su modelización hace presencia mediante un proceso de abstracción, cuando el que resuelve el problema identifica las subestructuras matemáticas vinculadas al modelo real (Ruíz y Fernández, 2013).

Lupiañez (2009) considera algunos criterios que permiten secuenciar las tareas que se diseñan o seleccionan, para estos destacan dos, el primero tienen que ver con la intencionalidad, desde el punto de vista del fomento del aprendizaje, (Mason y Johnston-Wilder, 2006, como se citó en Lupiañez, 2009):

a) Tareas para introducir algunos temas matemáticos:

En el grupo de Quinto grado, los alumnos practican tres deportes: $\frac{1}{3}$ del grupo juega fútbol, $\frac{2}{6}$ juegan básquetbol y el resto natación. ¿Qué parte del grupo practica natación?

El problema mostrado se utiliza para introducir el tema *sumas de fracciones con diferente denominador*, se busca que los alumnos identifiquen la necesidad del uso de fracciones equivalentes, en el sentido de convertirlas a fracciones con el mismo denominador y poder sumarlas fácilmente, haciendo cálculos mentales y escritos.

b) Tareas para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas o en el que practicar ideas introducidas previamente:

Individualmente, resuelve los siguientes problemas. Al terminar compara tus respuestas con las de tu compañero de equipo.

- Claudia compró $\frac{3}{4}$ kg de uvas y luego $\frac{1}{2}$ kg más. ¿Qué cantidad de uvas compró en total?
- Para hacer los adornos de un traje, Luisa compró $\frac{2}{3}$ m de listón azul y $\frac{5}{6}$ m de listón rojo. ¿Cuánto listón compró en total?
- Pamela compró un trozo de carne. Usó $\frac{3}{8}$ kg de ese trozo para preparar un guisado y sobraron $\frac{3}{4}$ kg. ¿Cuánto pesaba originalmente el trozo de carne que compró?

Los problemas anteriores pretenden suministrar contextos reales en el cual encontrar nuevas ideas o en el que practicar ideas introducidas previamente, en este caso para la suma y resta de fracciones a través de fracciones equivalentes.

c) Tareas para revisar o consolidar o para provocar la reflexión y la integración a través de una visión global, ejemplo:

Actividad 5º: ¡Atajos con fracciones!

De manera individual, resuelve mentalmente las siguientes operaciones; utiliza el procedimiento más breve posible. Escribe en la tabla los resultados y los procedimientos que utilizaste.

Figura 18

Integración a través de una visión global de diferentes aprendizajes aprendidos

Cálculo	Resultado	Procedimiento
El doble de $\frac{1}{3}$		
El triple de $\frac{2}{7}$		
La mitad de $\frac{4}{5}$		
La mitad de $\frac{5}{6}$		
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$		
$\frac{2}{3} + 1$		
$\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$		
$1 - \frac{3}{4}$		

Fuente: SEP (2019e)

Esta actividad pretende revisar, consolidar o para provocar la reflexión y la integración a través de una visión global de los aprendizajes aprendidos durante las diferentes actividades.

El segundo criterio parte desde la funcionalidad, a partir de la visión de Parcerisa (1996, como se citó en Lupiañez, 2009) se clasifica las tareas que poseen en una secuencia de aprendizaje:

a) Tareas cuya finalidad en conocer los aprendizajes previos de los escolares

Representa con dibujos el resultado de las siguientes operaciones.

- $\frac{1}{4} + \frac{20}{8}$
- $\frac{2}{3} + \frac{18}{2}$
- $\frac{11}{5} + \frac{9}{10}$

(SEP, 2019e)

En esta actividad se pretende identificar los conocimientos que el alumno posee a través de su transitar por el conocimiento del contenido matemático de fracciones, esta actividad implica conocimientos de diferentes representaciones de un número fraccionarios, fracciones equivalentes, fracciones mixtas y sus operaciones (suma y resta), además de las relaciones entre la fracción y el todo.

b) Tareas para ayudar a la motivación y de relación con la realidad

Estos tipos de tareas parten de la formulación de un problema a partir del mundo real, de un contexto inmediato del alumno, que le permitan abstraer subestructuras matemáticas vinculadas al modelo real al resolver el problema:

Para decorar un mantel, Sofía compró $\frac{4}{5}$ m de encaje blanco y $\frac{3}{5}$ m de pasa listón. Si el metro de cada uno cuesta \$15, ¿por cuál de los dos materiales pagó más? ¿Por qué?

(SEP, 2019e)

c) Tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento

Puede partir a través de preguntas dirigidas que permitan ampliar o explicar lo expresado, por ejemplo:

- ¿Qué entendiste del problema?
- ¿Cuáles son los datos del problema?
- ¿Qué te pide la pregunta del problema?
- ¿Cómo lo resolviste?
- ¿Cómo justificas tu respuesta?
- ¿Qué significa que las fracciones tengan el mismo denominador? ¿qué representa?
- ¿De qué otra manera se puede resolver?

d) Tareas de elaboración y construcción de significados

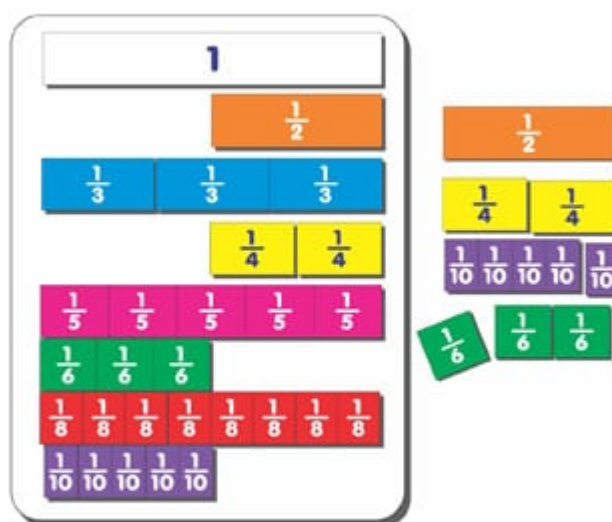
A través del siguiente material didáctico (regletas de colores) se promueve el significado parte-todo de una fracción, así como las fracciones equivalentes. En donde los sistemas de representación que se ponen en juego son: simbólico,

numérico y geométrico. Este material permite dar solución a problemas que tengan que ver con las fracciones equivalentes a través de la manipulación del material (figura 19). Por ejemplo:

- De 5 maneras diferentes representa la unidad con ayuda del material
- ¿Cuántos cuartos son necesarios para obtener un medio?
- ¿Qué podemos decir de la expresión $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$? Justifica tu respuesta
- ¿Cuántos décimos se ocupan para expresar $\frac{1}{2}$?
- ¿qué relación existe entre $\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{2}$?

Figura 19

Material didáctico regletas



e) Tareas de ejercitación

En este tipo de tareas, se solicita a los estudiantes multiplicar las fracciones siguientes por el factor indicado para generar nuevas fracciones equivalentes

- $\frac{3}{4}$ multiplicar por el factor 5
- $\frac{6}{12}$ multiplicar por el factor $\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{2}$ multiplicar por 6
- $\frac{100}{500}$ multiplicar por $\frac{1}{100}$
- $\frac{6}{15}$ multiplicar por 8

f) Tareas de síntesis

Se le pide al estudiante dar solución a problemas de la vida cotidiana, por ejemplo:

Figura 20

Referente visual para resolver problemas de reparto



- ¿Qué sucede si la divides en dos partes iguales? Representa cada trozo en fracción y mediante un dibujo.
- Si de cada uno de los trozos que partiste anteriormente haces otra división en dos partes iguales ¿Qué fracción representa el nuevo corte? Dibújalo.
- ¿Qué relación guardan el primer corte realizado con el segundo corte realizado?

4.2 Taller de formación continua centrado en el diseño de tareas de enseñanza para favorecer el conocimiento didáctico del contenido en el tema de fracciones

4.2.1 Contexto y participantes

El taller de formación continua está diseñado para llevarse a cabo en la Escuela Primaria Manuel Ávila Camacho, con clave del centro de trabajo 32DPR2510E, en el municipio de Guadalupe, Zacatecas, México. Su modalidad es de organización completa y consta de seis docentes frente a grupo y un director, mismos que participan en el taller propuesto durante el ciclo escolar 2021-2022.

En la presente investigación se utiliza el Análisis Didáctico en su fase de profundización con la intención de favorecer el conocimiento didáctico del contenido en los profesores, y se trabaja con el contenido matemático de fracciones dentro de la educación primaria, de primer a sexto grado. Para llevar a cabo dicho trabajo se hace una subdivisión en ciclos: considerando ciclo uno (C1) primero y segundo grado escolar; ciclo dos (C2) tercero y cuarto grado y; ciclo tres (C3) quinto y sexto grado.

Lo anterior con base en los resultados obtenidos en el análisis de contenido y cognitivo, ya que los ciclos declarados persiguen aprendizajes esperados y expectativas de aprendizaje similares, solo lo diferencia el grado de complejidad de las tareas proporcionadas. De igual forma, las dificultades de aprendizaje en cada ciclo se hallan inmersas en el mismo uso y significado de la fracción con base en su grado escolar.

Dentro de las prácticas docentes y directivas se encuentra como prioridad principal el aprendizaje en los alumnos, las planeaciones y acciones que se desarrollan son pensando en estrategias y técnicas para favorecer los aprendizajes significativos en los alumnos. Por lo tanto, el presente taller se centra en fomentar el trabajo en grupo, promoviendo la reflexión y discusión de manera presencial.

4.2.2 Taller de formación continua centrado en el diseño de tareas de enseñanza para el tema de fracciones

El taller consta de tres momentos con base en los análisis que serán eje rector para llegar a la selección y diseño de tareas de enseñanza para el tema de fracciones en educación primaria, los temas que se trabajan en cada uno son:

- **Tema 1.** Análisis Didáctico para profundizar el contenido matemático de fracciones. Análisis de contenido.
- **Tema 2.** Análisis Didáctico para profundizar el contenido matemático de fracciones. Análisis cognitivo.
- **Tema 3.** Diseño y selección de tareas de enseñanza para profundizar el contenido matemático de fracciones. Análisis de instrucción.

4.2.2.1 Dosificación de contenidos del taller de formación continua

La dosificación presente en la tabla 9 muestra una planificación general, especificando los objetivos, componentes de cada análisis, demandas cognitivas, conocimiento didáctico del contenido y las capacidades que se promueven en cada fase formativa.

Tabla 9

Dosificación del plan general del taller de formación continua

Fase formativa 1. Análisis de contenido para profundizar el tema matemático de fracciones.				
Objetivo	Componentes del análisis de contenido	Demandas cognitivas	Conocimiento didáctico del contenido que se promueve	Capacidades
El profesor identifica, organiza y selecciona los significados de los conceptos y procedimientos del tema de fracciones con recursos escolares.	<ul style="list-style-type: none"> • Conceptos (currículo, libros de texto para el alumno, libro de matemáticas para el maestro). • Significados (currículo, libro de texto para el alumno, libro de matemáticas para el maestro). • Formas para representar (libros de texto para el alumno, libro de matemáticas para el maestro). 	<ul style="list-style-type: none"> • Profundizar en significados y usos de las fracciones en educación primaria (relación parte-todo: medición y reparto; cociente: división; razón: semejanza, medida, porcentaje; y operador. • Identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos. • Establecer los sistemas de representación asociados al tema y las relaciones entre ellos • Identificar los fenómenos que dan 	<ul style="list-style-type: none"> • CDC (Conocimiento del contenido y los estudiantes) • Identifica la variedad de tareas planteadas en relación a la diversidad de los alumnos. • CDC (Conocimiento del contenido y la enseñanza) • Identifica la adecuación de las tareas propuestas para cada objetivo. • Identifica la variedad de sistemas de representación que se emplean en las tareas planteadas. • Identifica la adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje que se intuyen. • CDC (Conocimiento 	<ul style="list-style-type: none"> • Recopila, estructura y clasifica información relativa al tema matemático de fracciones según diferentes herramientas (estructura conceptual, sistemas de representación, fenomenología) • Determina y relaciona los contenidos y procedimientos vinculados al tema de fracciones con base en su grado escolar.

		sentido al tema (o que se asocian con el fenómeno elegido), los contextos fenomenológicos y las subestructuras matemáticas respectivas, que organizan estos fenómenos.	del contenido y el currículo) <ul style="list-style-type: none"> El grado en que las tareas enunciadas se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en los documentos oficiales o en las indicaciones curriculares de diversas fuentes del currículo en educación matemática (estándares curriculares, currículo nacional, pruebas PISA, etc.) 	
Fase formativa 2. Análisis cognitivo para profundizar el contenido matemático de fracciones.				
Objetivo	Componentes del análisis cognitivo	Demandas cognitivas	Conocimiento didáctico del contenido que se promueve	Capacidades
El profesor identificar expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas con base en su	<ul style="list-style-type: none"> Expectativas de aprendizaje (Competencias, Propósitos y Aprendizajes esperados) Limitaciones de aprendizaje (Errores y dificultades) Demandas 	<ul style="list-style-type: none"> Identificar ideas cognitivas sobre el aprendizaje de los contenidos matemáticos Enlistar expectativas de aprendizaje sobre el contenido matemático de fracciones (con base en el Plan y Programa 	CDC (Conocimiento del contenido y los estudiantes) <ul style="list-style-type: none"> Identifica el grado en que las tareas planteadas sean adecuadas al nivel escolar y cognitivo de los estudiantes. Identifica la variedad de tareas planteadas en 	<ul style="list-style-type: none"> Recopila, estructura y clasifica información relativa al tema matemático de fracciones según diferentes herramientas (expectativas, errores, dificultades, etc.) Identifica y caracteriza los fines que

<p>experiencia del grado escolar que atiende.</p>	<p>cognitivas (Capacidades y Tipo de tareas)</p>	<p>de Estudios y libro para el maestro)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificar dificultades y errores en el tema de fracciones con base en su experiencia del grado escolar que atienden. • Relacionar capacidades, habilidades, dificultades y errores con las demandas cognitivas. • Relacionar las capacidades, competencias, habilidades, dificultades y errores para la construcción de demandas cognitivas. 	<p>relación a la diversidad de los alumnos.</p> <p>CDC (Conocimiento del contenido y la enseñanza)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identifica el grado en que las tareas planteadas permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos. • Identifica la adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje que se intuyen. 	<p>persiguen el Plan y Programas de Estudio (2017) para el tema de fracciones con base en su grado escolar.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Diseña y selecciona tareas matemáticas de acuerdo a contenidos específicos de su grado escolar, a determinadas expectativas de aprendizaje y a las dificultades encontradas. • Organiza y valora la organización y el contenido de diferentes libros de texto, destacando potencialidades y carencias.
---	---	--	--	---

Fase formativa 3. Análisis de instrucción para el diseño y selección de tareas de enseñanza para profundizar el contenido matemático de fracciones.

Objetivo	Componentes del análisis cognitivo	Demandas cognitivas	Conocimiento didáctico del contenido que se promueve	Capacidades
<p>El profesor selecciona y</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Adecuación (Conceptos y 	<ul style="list-style-type: none"> • Diseñar y seleccionar tareas de 	<p>CDC (Conocimiento del contenido y los</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Identifica, modifica, diseña y

<p>diseña tareas de enseñanza con base en el estudio de tareas</p>	<p>procedimientos que configuran el contenido matemático seleccionado, actividades compatibles con el contenido, actividades compatibles con el Análisis Cognitivo)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Complejidad (reproducción, conexión, reflexión) • Resolución de problemas y modelización (intencionalidad y funcionalidad) 	<p>enseñanza para el tema de fracciones con fundamentos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Analizar y justificar la coherencia en el diseño y selección de tareas de enseñanza para el tema de fracciones 	<p>estudiantes)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identifica el grado en que las tareas planteadas sean adecuadas al nivel escolar y cognitivo de los estudiantes. • Identifica la variedad de tareas planteadas en relación a la diversidad de los alumnos. <p>CDC (Conocimiento del contenido y la enseñanza)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identifica la adecuación de las tareas propuestas para cada objetivo. • Identifica la variedad de sistemas de representación que se emplean en las tareas planteadas. • Identifica el grado en que las tareas planteadas permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos. • Identifica la adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje que se intuyen. <p>CDC (Conocimiento del contenido y el currículo)</p> <ul style="list-style-type: none"> • El grado en que las tareas enunciadas se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en los documentos oficiales o en 	<p>selecciona tareas de enseñanza para el tema de fracciones con base en su grado escolar.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Diseña y organiza tareas matemáticas que motiven y promuevan el aprendizaje de todos sus estudiantes.
--	---	--	---	--

			las indicaciones curriculares de diversas fuentes del currículo en educación matemática (estándares curriculares, currículo nacional, pruebas PISA, etc.)	
--	--	--	---	--

4.2.2.2 **Fase formativa 1. Análisis Didáctico para profundizar el contenido matemático de fracciones. Análisis de contenido**

Estructura conceptual

Sesión 1

Introducción al taller (Tiempo estimado: 15 minutos)

Se da comienzo al taller presentando un panorama general del mismo, explicando ideas generales sobre el trabajo que se realiza, recursos disponibles y horarios, así como aspectos relevantes del taller como contenidos, objetivos planteados y expectativas del mismo. Posteriormente se organizan los equipos con base en ciclos (C1, C2, C3).

Tras la presentación se muestran los objetivos de la sesión 1:

- 1) Que los profesores identifiquen el significado de un contenido matemático escolar con base en sus tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.
- 2) Que los profesores identifiquen en el Plan y Programa de Estudios (2017) y en los libros para el alumno de primaria, los conceptos, términos y procedimientos relacionados con la fracción.
- 3) Que los profesores organicen la estructura conceptual del tema matemático de fracciones con base en su grado escolar.
- 4) Que los profesores identifiquen y decida los diferentes sistemas de representación. Con base en su experiencia y revisión de documentos oficiales.
- 5) Que los profesores identifiquen y decidan los contextos, fenómenos y situaciones donde el contenido matemático escolar toma sentido.

Actividad 1 (Tiempo estimado 30 minutos)

Intención didáctica: Que los profesores describan y ejemplifiquen los conceptos, términos y procedimientos con base en el tema de fracciones.

Se solicita a los profesores expresar en plenaria la importancia de la planificación en su práctica docente y los elementos que deben considerar. A continuación, se les solicita realizar un mapa conceptual que concentre todo lo que necesitan en su práctica docente para trabajar con el contenido matemático de fracciones con base en su grado escolar, haciendo énfasis en lo conceptual y procedimental.

Seguido de ello, se resalta la palabra contenido matemático y se solicita expresar por escrito qué entienden por contenido matemático: conceptos, términos y procedimientos. Compartir en plenaria y ejemplificar cada uno.

Actividad 2 (Tiempo estimado 60 minutos)

Intención didáctica: Que los profesores identifiquen en los recursos bibliográficos disponibles (Plan y programa de estudios, libro para el alumno de educación primaria y libro para el maestro) los conceptos, términos y procedimientos con base en el tema de fracciones.

Se solicita a los profesores identificar en el Plan y Programas de Estudios, el libro para el alumno y el libro para el maestro los conceptos, términos y procedimientos que se presentan con relación al contenido matemático *fracciones* en los niveles que les corresponde, registrarlos por escrito e identificar cuáles son los focos conceptuales. Si los profesores expresan los aprendizajes esperados como conceptos, solicitar que describan textualmente lo que se entiende por cada uno. Exponerlos en plenaria.

Actividad 3 (Tiempo estimado 75 minutos)

Intención didáctica: Que los profesores elaboren un mapa conceptual del contenido matemático escolar de fracciones en educación primaria con base en su grado escolar.

Teniendo los focos conceptuales, comenzar a elaborar la estructura conceptual del tema de fracciones en educación primaria, para ello usar como base las preguntas premisas del análisis de contenido, estructura conceptual:

- ¿Cuáles son los conceptos que caracterizan el tema?
- ¿Qué procedimientos están implicados en el tema?
- ¿Cómo se relacionan esos conceptos entre sí?
- ¿Cómo se relacionan esos procedimientos entre sí?
- ¿Cómo se relacionan esos conceptos y esos procedimientos?

Presentar en plenaria las propuestas de mapas conceptuales y elaborar uno general con el contenido de fracciones para la educación primaria.

“Para preparar una clase sobre un tema de las matemáticas escolares, es importante profundizar en ciertas características matemáticas que son propias de las estructuras matemáticas.” (Cañadas et al., 2018)

Receso escolar (tiempo estimado 40 minutos)

Sistemas de representación

Actividad 4 (Tiempo estimado 45 minutos)

Intención didáctica: Que los profesores identifiquen los diferentes sistemas de representación en los libros para el alumno.

Se presenta a modo de ejemplo los diferentes sistemas de representación con base en los análisis realizados anteriormente como investigador. Posteriormente, los profesores deben ejemplificar los diferentes sistemas de representación obtenidos del Plan y programa de Estudios (2017) y el libro de texto para el alumno con base en su grado escolar. Contestar las siguientes preguntas:

- ¿Qué representaciones hay asociadas al tema de fracciones con base en su grado escolar?
- ¿Qué relación se puede establecer entre esas representaciones?

Para dar respuestas a estas preguntas, el profesor puede

- determinar los diferentes sistemas de representación en los que se puede representar el tema.
- identificar las relaciones entre esos sistemas de representación (que, en algunos casos, serán procedimientos, y que por tanto, se relacionan estrechamente con el campo procedimental de la estructura conceptual).

“Es importante indicar que en algunos casos lo que se quiere representar no son conceptos sino procedimientos, atributos, propiedades y/o parámetros. Por tanto, los sistemas de representación están condicionados por lo que se quiere representar” (Cañadas et al., 2018)

Fenomenología

Actividad 5 (Tiempo estimado 20 minutos)

Intención didáctica: Que los profesores identifiquen los contextos, fenómenos y situaciones donde el contenido matemático escolar toma sentido.

A continuación, los profesores deberán identificar que fenómenos comparten características estructurales con las matemáticas escolares, seleccionado y determinar la subestructura matemática que corresponde dentro de la estructura conceptual.

Actividad 6 (Tiempo estimado 20 minutos)

Intención didáctica: Integrar los conocimientos adquiridos en un producto.

Incluir sistemas de representación y fenomenología en el mapa conceptual que se realizó en la actividad 3.

4.2.2.3 **Fase formativa 2. Análisis Didáctico para profundizar el contenido matemático de fracciones. Análisis cognitivo**

Sesión 2

Introducción a la sesión 2 (tiempo estimado 15 minutos)

Para dar comienzo a la sesión 2, referente al análisis cognitivo, posterior a la bienvenida se da un panorama general del trabajo durante la sesión, así como establecer los horarios y productos a obtener.

Objetivos de la sesión 2:

- 1) Que el profesor seleccione un aprendizaje esperado del el Plan y Programas de estudio para el tema de fracciones.
- 2) Que el profesor enliste expectativas de aprendizaje sobre el contenido matemático de fracciones con base en los aprendizajes esperados seleccionados (con base en el Plan y Programa de Estudios y libro para el maestro).
- 3) Que el profesor describa y seleccione dificultades y errores en el tema de fracciones con base en su experiencia del grado escolar que atienden y documentos oficiales.
- 4) Construir demandas cognitivas con base en las expectativas y limitaciones de aprendizaje.

Actividad 1 (Tiempo estimado 30 minutos)

Intención didáctica: que los profesores identifiquen aspectos cognitivos sobre el aprendizaje de las fracciones, para ello, que el profesor seleccione un aprendizaje esperado del el Plan y Programas de estudio para el tema de fracciones.

Este es momento del análisis cognitivo, en el que los profesores describen y analizan la problemática existente en la enseñanza de las fracciones con base en su grado escolar. Para introducirlos a las actividades, se comenzará por responder las siguientes preguntas en plenaria:

- ¿Qué esperan que aprendan sus alumnos referentes a las fracciones?
- ¿puede el profesor facilitar dicho aprendizaje? ¿cómo?

Posterior a los comentarios de los profesores en plenaria, se busca comenzar a trabajar con los componentes del análisis cognitivo.

Expectativas de aprendizaje

Actividad 2 (Tiempo estimado 45 minutos)

Intención didáctica: que los profesores enlisten las expectativas de aprendizaje sobre el contenido matemático de fracciones con base en el Plan y Programa de Estudios y libro para el maestro.

Solicitar al profesor seleccionar un aprendizaje esperado del Plan y Programa de Estudios (2017) y en los libros de texto para el alumno referente al tema de fracciones. Posteriormente, enlistar expectativas de aprendizaje sobre el contenido matemático de fracciones con base en los aprendizajes esperados seleccionado (hacer uso del mapa conceptual elaborado la primer sesión).

Para organizar la información se realizará en una tabla son los encabezados: aprendizaje esperado, expectativa de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas.

Limitaciones de aprendizaje

Actividad 3 (Tiempo estimado 45 minutos)

Intención didáctica: que el profesor identifique dificultades y errores en el tema de fracciones con base en su experiencia del grado escolar que atienden y con documentos oficiales.

Una vez obtenidos y delimitados las expectativas de aprendizaje para cada grado escolar, se continúa con la búsqueda de información sobre las dificultades y errores en las fracciones, pueden basarse en las orientaciones didácticas del Plan y Programa de Estudios (2017) y experiencia personal. Es importante que cada dificultad o error seleccionado hayan sido presentados durante su práctica docente. Enlistarlos por escrito.

Demandas cognitivas

Actividad 4 (Tiempo estimado 45 minutos)

Intención didáctica: que los profesores relacionen el aprendizaje esperado, expectativas de aprendizaje y las dificultades y errores para la construcción de demandas cognitivas.

A manera de ejemplo los profesores seleccionan una tarea matemática del tema de fracciones en libro para el alumno, a través de esta, los profesores describirán qué aprendizaje esperado busca cumplir, qué expectativas de aprendizaje se relacionan, y que dificultades y errores puede ayudar a superar. Con esta actividad se busca establecer la relación de los análisis y sus componentes que se han trabajado con la intención de llegar a la selección y diseño de tareas apropiadas.

Receso escolar (Tiempo estimado 30 minutos)

Actividad 5 (Tiempo estimado 80 minutos)

Intención didáctica: que los profesores relacionen el aprendizaje esperado, expectativas de aprendizaje y las dificultades y errores para la construcción de demandas cognitivas.

Para cerrar el trabajo con el análisis cognitivo, los profesores deben crear demandas cognitivas que sea dirigida a superar el aprendizaje esperado seleccionado, las expectativas de aprendizaje y a una de las limitaciones obtenidas en la actividad 3, con base en su grado escolar. Pueden hacer uso de cualquier fuente de información.

Socializar las demandas cognitivas propuestas en plenaria y analizar si cumple lo solicitado.

4.2.2.4 Fase formativa 3. Diseño y selección de tareas de enseñanza para profundizar el contenido matemático de fracciones. Análisis de instrucción

Esta última sesión conlleva el trabajo realizado en sesiones previas, donde los profesores tienen que identificar, seleccionar y diseñar el tipo de tareas que emplearía en la instrucción para lograr las expectativas de aprendizaje que ha concretado anteriormente, esta parte toma como base los análisis anteriores (de contenido y cognitivo).

Introducción al tema (tiempo estimado 15 min)

Se da comienzo a la sesión presentando un panorama general de la misma, explicando ideas generales sobre el trabajo que se realiza, recursos disponibles y horarios, así como aspectos relevantes del análisis de instrucción, objetivos planteados y expectativas del mismo.

Tras la presentación se muestran los objetivos de la sesión 3:

1. Comprender el tipo de tareas que el profesor utiliza en su práctica docente para el tema de fracciones.
2. Diseñar y seleccionar tareas de enseñanza para el tema de fracciones con fundamentos, con base en las demandas cognitivas y las capacidades seleccionadas la sesión anterior.
3. Analizar y justificar la coherencia en el diseño y selección de tareas de enseñanza para el tema de fracciones.

Adecuación

La coherencia de la tarea con las fases previas del Análisis Didáctico considera que:

- La tarea debe ajustarse a los contenidos y procedimientos contemplados en la estructura conceptual. Utilizando los diferentes sistemas de representación y su redacción la debe ubicar en algunas de las situaciones o contextos caracterizados.
- La tarea debe seleccionar o elaborar con la intención de atender las expectativas de aprendizaje establecidas, así como superar errores y dificultades.

(Ruíz y Fernández, 2013, p.245)

Actividad 1 (Tiempo estimado 60 minutos)

Intención didáctica: seleccionar los contenidos que se trabaja en su grado escolar para el tema de fracciones.

Por equipos hacer una revisión de los trabajos realizados en las sesiones anteriores (análisis de contenido y cognitivo), específicamente su mapa conceptual, para identificar las diferentes formas en qué se presenta el contenido de fracciones en su nivel escolar. Seleccionar cuáles son los contenidos con los que van a trabajar y qué elementos deben considerar para desarrollarlos, enlistarlos por escrito considerando lo siguiente:

- los contenidos matemáticos que ponen en juego;
- las expectativas de aprendizaje a cuyo logro pueden contribuir; y
- para detectar y diagnosticar errores.

Plantear la reestructuración o diseño para atender elementos revisados en las sesiones anteriores (aprendizaje esperado, expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas).

Complejidad

Actividad 2 (Tiempo estimado 60 minutos)

Intención didáctica: comprender el tipo de tareas que el profesor utiliza en su práctica docente para el tema de fracciones

A manera de ejemplo, mostrar el nivel de complejidad de las tareas con base en las demandas cognitivas que se plantean a los alumnos al enfrentarlas a ella: reproducción, conexión y reflexión (Lupiáñez, 2009). Solicitar a los profesores diseñar o seleccionar tareas sobre el tema específico en el que se centra el contenido matemático de fracciones, atendiendo a los criterios anteriores y con diferentes grados de complejidad (reproducción, conexión y reflexión).

Lo profesores deben clasificar en una tabla sus tareas propuestas con base en las demandas cognitiva y describir por qué consideran que se ubican en ese tipo de tarea.

Receso escolar (Tiempo estimado 30 minutos)

Resolución de problemas y modelización

Actividad 4 (Tiempo estimado 60 minutos)

Intención didáctica: Diseñar y seleccionar tareas de enseñanza para el tema de fracciones con fundamentos.

Reformular el enunciado de algunas tareas para que promuevan el desarrollo de alguna competencia matemática específica, destacando entre ellas la de plantear y resolver problemas y modelizar.

En el sentido de identificar la secuenciación de las tareas, se les pide a los profesores que identifiquen los criterios que permiten secuenciar las tareas que se diseñan o seleccionan en intencionalidad y funcionalidad, así mismo establecer un ejemplo en cada uno:

Intencionalidad:

- pueden idearse para introducir algunos temas matemáticos;
- pueden diseñarse para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas o en el que practicar ideas introducidas previamente;
- pueden idearse para revisar o consolidar o para provocar la reflexión y la integración a través de una visión global

Funcionalidad:

- tareas cuya finalidad en conocer los aprendizajes previos de los escolares,

- tareas para ayudar a la motivación y de relación con la realidad,
- tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento,
- tareas de elaboración y construcción de significados,
- tareas de ejercitación, y
- tareas de síntesis.

Actividad 5 (Tiempo estimado 40 minutos)

Intención didáctica: Analizar y justificar la coherencia en el diseño y selección de tareas de enseñanza para el tema de fracciones.

Elaborar y presentar en PowerPoint la selección o diseño de tareas propuestas donde se describa en que se relaciona con cada sesión del taller (análisis de contenido y cognitivo), además, justificar y argumentar la coherencia en el diseño y selección de tareas de enseñanza para el tema de fracciones para atender cada uno de los componentes de los análisis.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

El presente capítulo se divide en tres apartados, correspondientes a las fases formativas del taller de formación continua centrado en la fase de profundización del Análisis Didáctico para el tema de fracciones. En el primer apartado: Fase formativa 1. Construcción del análisis de contenido, se describe el análisis de contenido desarrollado por los profesores durante el taller, llegando a organizar y seleccionar los significados del concepto de fracción en educación primaria con base en los componentes del análisis de contenido, esto en atención al objetivo particular número cuatro de la presente investigación.

En el segundo apartado, fase formativa 2. Análisis cognitivo: Identificación y selección de expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas con base en la experiencia y el grado escolar que se atiende. El foco de interés reside en describir la forma en que los profesores aplican los elementos del análisis cognitivo al diseñar tareas de enseñanza, con el cual se cubre el objetivo particular número cuatro.

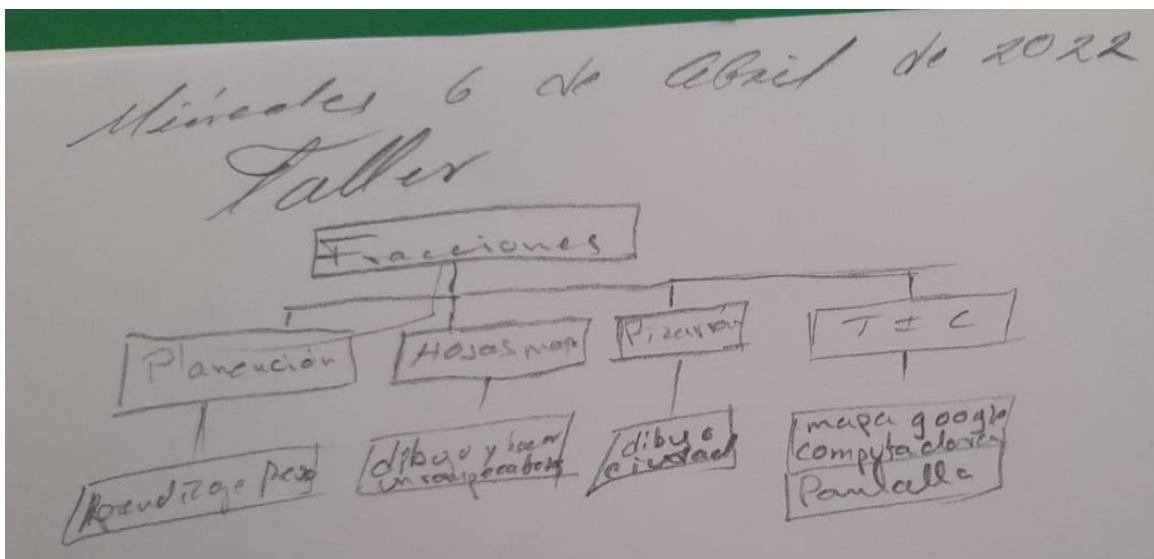
Por último, en el tercer apartado, fase formativa 3. Conocimientos didácticos del contenido que se favorecen al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel primaria, a través del taller realizado con base en la fase de profundización del Análisis Didáctico. Se identifican los conocimientos didácticos del contenido que se favorecieron, al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel primaria a través del taller realizado, objetivo particular cinco.

4.3 Fase formativa 1. Construcción del análisis de contenido

Para dar atención al objetivo central de la primera fase formativa, que consiste en que el profesor identifique, organice y seleccione los significados de los conceptos y procedimientos del tema de fracciones con recursos escolares, la sesión comenzó con identificar los elementos que los maestros consideran para realizar la planeación de su práctica docente con respecto al tema de fracciones, en este sentido, se les solicitó realizar un mapa conceptual que concentre todo lo que necesitan en su práctica docente para trabajar con el contenido matemático de fracciones con base en su grado escolar. En respuesta a esta primera actividad, los maestros elaboran un mapa conceptual con ideas generales del contenido matemático de fracciones, ejemplo figura 21 (Video 1.1 min. 2:30 – 10:58).

Figura 21

Primer acercamiento a organizar y seleccionar los significados de los conceptos y procedimientos del tema matemático de fracciones



En la figura 21 se puede observar que el profesor selecciona ideas que tienen que ver con el análisis instruccional, en cuanto a recursos para el diseño de una clase, por ejemplo selecciona: pizarrón, hojas para máquina, tecnologías y su planeación. Elementos que el profesor considera primordiales al momento de planear el tema de fracciones, sin embargo, se observa que estos elementos no consideran al contenido matemático escolar a profundidad, es decir, se centra en los materiales, en la planeación, en elementos que tienen que ver con la parte instruccional y no los que anteceden, como el caso del contenido matemático escolar.

En cuanto al contenido y su enseñanza el profesor coloca la palabra fracciones como eje central de su mapa conceptual, no obstante, para trabajarlo solo considera contextos extra-matemáticos y no el contenido matemático como tal, como es el uso de del dibujo de una ciudad, un rompecabezas o mapas.

Posteriormente, una vez que los profesores realizan su mapa conceptual, el formador de profesores solicita exponerlos en plenaria, esta actividad permitió recuperar elementos relacionados con la estructura del significado (estructura conceptual, representaciones y fenomenología) que posteriormente ayudaron a enriquecer y organizar la información, dichos elementos se enlistaron en el pizarrón (video 1.1 min 10:20 – 33:30) y se enuncian a continuación:

- Contenido
- Concepto
- Materiales (concreto, tecnologías)

- Reparto
- Situaciones reales (vida cotidiana)
- Proceso
- Significados
- Representación
- Procedimiento (algorítmico)
- Todo y sus partes
- Características
- Tipos de fracciones
- Medición
- Cálculo (operar)
- Comprender
- Conceptual

El análisis de contenido tiene tres elementos como organizadores: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Con base en estos organizadores el formador de profesores retoma la lista de elementos en el pizarrón y establece la necesidad de organizar y describir los distintos conceptos que engloban el tema matemático de fracciones, esto con la intención de definir los focos conceptuales que serán tratados en el diseño de tareas de enseñanza.

4.3.1 Estructura conceptual

Para describir la estructura conceptual el formador de profesores solicita identificar qué es lo que se utiliza primero para trabajar el contenido de fracciones, y a través de las participaciones de los profesores, se llega al término *concepto*, quienes lo definen como “un significado, una definición, una característica, un proceso, definición de numerador y denominador así como su representación” (Video 1.1 min 34:40- 37:30).

Posteriormente continuando con la lista de los elementos expresada por los profesores, se retoma el término *significado*, y lo definen como “explicación, definición, tipos de fracciones, forma en que utilizamos las fracciones, abstracto-concreto, símbolos” (Video 1.1 min 39:30- 44:00 y 46:40 – 1:02:27).

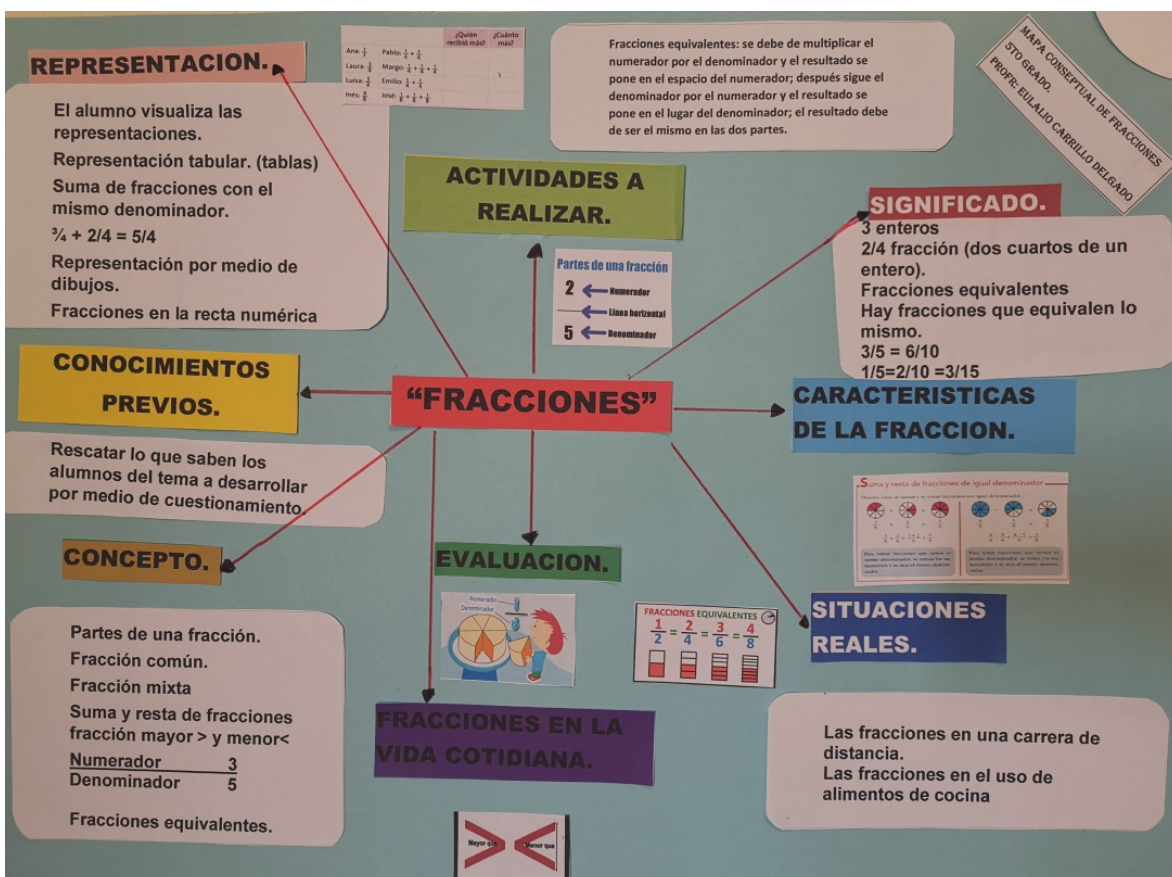
Con base en las participaciones que definen al termino *concepto* y *significados*, los profesores inician un nuevo mapa conceptual a través de la revisión de información en el libro del alumno y libro para el maestro. (Video 1.1 min 44:00 – 46:40 y min 1:02:27 - 1:10:50)

En cuanto a los focos conceptuales, a través de las participaciones de los profesores y sus mapas conceptuales, los profesores logran seleccionar algunos significados para el tema de fracciones, por ejemplo en la figura 22 se observa:

agrupación, reparto, división, medida, equivalencias, fracciones mixtas. Estos focos conceptuales se dieron con base en la experiencia y revisión de libros para el alumno y para el maestro.

Figura 22

Mapa conceptual para el tema de fracciones del quinto grado escolar de educación primaria al finalizar la fase formativa 1.



4.3.2 Sistemas de representación

“El carácter abstracto de los conceptos matemáticos hace necesario recurrir a diversas formas de representarlo” (Aguayo, 2019). En este sentido los profesores deben tener presentes las diferentes formas de representar el contenido matemático de fracciones con base en su grado escolar, ya que esto permitirá profundizar la comprensión por parte de sus alumnos. En este apartado, se realizó una lluvia de ideas para intentar definir qué se entiende por sistemas de representación y con ayuda del formador de profesores se definieron e identificaron los siguientes sistemas de representación: geométrico, numérico, simbólico, tabular, pictórico, gráfico, manipulativo (Video 1.1 min 1:11:11 – 1:30:00).

Posteriormente, los profesores realizaron una revisión de los libros para el alumno e identificaron qué representaciones se presentan en su grado escolar. Las representaciones que se destacan con base en las participaciones de los profesores y los focos conceptuales seleccionados en la actividad anterior son: pictórico, geométrico, tabular y numérico (figura 21). (Video 1.1 min 1:29:56 - 1:52:30)

4.3.3 Fenomenología

La fenomenología se entiende como el estudio de los sentidos y usos que se le dan en diversos ámbitos al contenido matemático, en este caso de las fracciones. Por lo tanto, como última parte de la fase uno, los profesores identificaron que fenómenos comparten características estructurales con las matemáticas escolares, seleccionado y determinar la subestructura matemática que corresponde dentro de la estructura conceptual que se trabajó la primera parte.

De esta forma, en este último momento los profesores expusieron su mapa conceptual, y las situaciones que más prevalecieron dentro de los diferentes grados escolares son personales y educativas, relacionadas con las actividades diarias de los alumnos y el quehacer escolar, donde los significados de relación parte todo, como cociente, como operador y como medida, están asociados a contextos y fenómenos de la vida cotidiana del alumno como por ejemplo: el reparto de canicas, carreras que implican fracciones en la recta numérica, repartir alimentos como pizza, frutas, galletas, entre otros (figura 22). (Video 1.2 min 1:00 - 39:34)

4.4 Fase formativa 2. Análisis cognitivo: Identificación y selección de expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas con base en la experiencia y el grado escolar que se atiende.

El análisis cognitivo busca examinar el aprendizaje del contenido matemático, teniendo en cuenta tres elementos: expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas. Por lo tanto, en esta segunda fase se centró la atención en los tres elementos mencionados de acuerdo al grado escolar que atiende cada profesor.

4.4.1 Expectativas de aprendizaje

En el desarrollo de la primera fase, concerniente al análisis de contenido, se determinaron los focos conceptuales que se consideraron en el diseño de tareas, así como los sistemas de representación y fenomenología que se tomó en cuenta para plantear las expectativas de aprendizaje, identificar las limitaciones y

formular las demandas cognitivas. Teniendo esto en cuenta, la fase dos comenzó por identificar en los documentos oficiales como el libro para el alumno, libro para el maestro y Plan y Programa de estudios (2017), un aprendizaje esperado respecto a las fracciones y las expectativas de aprendizaje a razón de él. En la tabla 10, columna 2 y 3, se muestra la información de los elementos seleccionados por los profesores con base en su grado escolar (Video 1.2 min 46:29 - 58:43 y video 2.1 min 00:00-32:31).

Tabla 10

Aprendizaje esperado y expectativa de aprendizaje para el tema de fracciones seleccionado por los profesores con base en el grado escolar que atienden

Grado	Aprendizaje esperado	Expectativa de aprendizaje
1°	Lee, escribe y ordena números naturales hasta 100.	Que agrupen y desagrupen cantidades de distintas maneras utilizando objetos que representen decenas y unidades.
2°	Lee, escribe y ordena números naturales hasta 1000.	Que los alumnos interpreten números escritos y formen colecciones con esas cantidades de objetos a partir de agrupamientos en decenas y centenas.
3°	Uso de fracciones con denominador hasta 12 para expresar relaciones parte todo, medida y resultados de reparto.	Que comprenda y compare diferentes fracciones (equivalentes). Que identifique la proporción de cada fracción de acuerdo al denominador. Que identifique la representación numérico - geométrico.
4°	Resolver problemas de suma y resta de fracciones con el mismo denominador (hasta doceavos).	Se apropie y comprenda el concepto de fracción. Maneje, represente y solucione problemas que implique el uso de fracciones.

		Investigar la definición del concepto "fracción", exponerla frente al grupo, tener la participación de los alumnos.
5°	Que los alumnos resuelvan problemas que implican suma de fracciones con distinto denominador (donde uno es múltiplo del otro).	<p>Sepan la representación de las fracciones.</p> <p>Realicen las diferentes sumas de fracciones con diferente denominador.</p> <p>Que determinen que el denominador es las partes en que se divide el entero.</p> <p>Sepan el procedimiento de la suma; para llegar a un resultado satisfactorio de la fracción.</p>
6°	Que los alumnos reflexionen sobre la equivalencia y el orden entre las expresiones fraccionarias y decimales en la recta numérica.	<p>Que los alumnos reconozcan las características de las fracciones en la recta numérica en diversas situaciones de la vida diaria.</p> <p>Que los alumnos identifiquen y expresen con claridad los diferentes tipos de fracciones.</p>
USAER	Que los alumnos se familiaricen con la escritura numérica de fracciones, así como con diferentes representaciones de medios, cuartos y octavos.	<p>Que los alumnos tengan un acercamiento al estudio formal de las fracciones.</p> <p>Que conozcan la escritura y el significado de los números fraccionarios.</p> <p>Que identifiquen y expresen las fracciones en diferentes contextos en los que se desenvuelven.</p> <p>Que pongan en práctica el uso de fracciones de manera oral y escrita</p>

4.4.2 Limitaciones de aprendizaje

Uno de los aspectos importantes que los profesores deben considerar a la hora del diseño y selección de tareas de enseñanza, es saber cuáles son las posibles dificultades y errores que los alumnos tienen con respecto al aprendizaje del contenido matemático, en este caso de las fracciones, ya que a partir de ello, los profesores pueden establecer tareas que apunten a superar dichas dificultades. En este sentido, los profesores realizaron una tabla que enmarca la relación establecida entre aprendizaje esperado, expectativas de aprendizaje y las limitaciones que consideran en el aprendizaje de sus alumnos (Video 1.2 min 46:29 - 58:43).

En la tabla 11, se muestran las limitaciones que consideraron los profesores respecto al aprendizaje esperado y con base en las expectativas de aprendizaje consideradas en una actividad anterior. Es importante resaltar que las limitaciones fueron planteadas en función de su experiencia laboral y sobre la revisión de documentos oficiales (video 2.1 min 31:29 - 43:33).

Tabla 11

Limitaciones por grado escolar consideradas en el tema de fracciones

Grado	Limitación de aprendizaje
1°	Apropiación del sentido numérico, habilidades de conteo y agrupación.
2°	Cuando hay dificultad en comprender que los agrupamientos son equivalentes, conviene demostrar con grupos de objetos concretos. Que haya suficiente material para los equipos y manejar el total de diferentes maneras con los alumnos que presentan dificultades.
3°	Que los alumnos no comprenden el tamaño de una fracción y creen que si una fracción tiene un denominador más grande es más grande que una con denominador más pequeño, ejemplo: a) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$
4°	Comprensión del concepto de fracción. Comprender la representación de diferentes fracciones.

5°	<p>No reconocer los números fraccionarios (equivalentes y fracciones mixtas).</p> <p>No reconocer que el denominador representa las partes en que se divide el entero.</p> <p>No saber la característica de este tipo de operación fraccionaria (suma y resta con diferente denominador).</p> <p>No saber cómo se lee la fracción; que se obtuvo como resultado.</p>
6°	<p>El niño no reconoce las fracciones en la recta numérica.</p> <p>No reconoce las características de la fracción, su valor en situaciones de la vida diaria.</p> <p>Se le dificulta emplear el algoritmo para sumar y restar fracciones.</p>
USAER	<p>Consolidación de procesos de primeras etapas.</p> <p>La maduración de los alumnos, poca estimulación.</p> <p>Manejo de operaciones básicas.</p> <p>En la representación, geométrica y en mayor medida en la representación numérica.</p> <p>Distinguir los conceptos de fracción, numerador, denominador.</p> <p>Fracciones equivalencias.</p> <p>Distinguir que un número mayor en denominador es menor en fracción.</p>

4.4.3 Demandas cognitivas

Por último, las demandas cognitivas son vistas como las tareas que brinda un profesor a sus alumnos para provocar que se produzca un aprendizaje a través de la movilización de conocimiento para su empleo (Lupiáñez, 2009), de esta forma, los profesores dentro del taller de formación continua formularon una intención de aprendizaje, es decir, capacidades que plantean en forma de verbos, estableciendo una relación con el aprendizaje esperado, las expectativas de aprendizaje y las limitaciones seleccionadas sobre el contenido matemático específico. Estas demandas cognitivas fueron la antesala para llegar a la fase final

correspondiente al análisis de instrucción, el cual se centra en el diseño y selección de tareas de enseñanza.

Con base en lo anterior, los profesores comienzan a analizar y seleccionar tareas disponibles para el diseño de las actividades de aprendizaje. Estas demandas se encuentran por grado escolar en la tabla 12 columna 5 y además se muestra el aprendizaje esperado, expectativas de aprendizaje y las limitaciones, con la intención de establecer la relación entre los elementos que conforman la tabla (video 2.1 min 43:33 - 49:30 y min 52:48 a- 55:46. Exposición de demandas cognitivas video 2.2 min 33:08 - 52:30).

Cabe considerar que no todas las demandas cognitivas seleccionada por los profesores cumplen con las características propias de ser demanda cognitiva, por ejemplo, el profesor de primer grado selecciona (tabla 12):

- b) Aplicar—plantear situaciones en las que apliquen lo aprendido para movilizar el conocimiento.
- c) Comprender—mediante preguntas, ejemplos y discusiones, mostrar lo que lograron comprender.
- d) Crear—adaptar actividades en base a la información para replantear el trabajo del contenido.

Estas son tareas cuya función cognitiva no se centra en proporcionar un contexto en el cual se proponen determinadas actuaciones a los alumnos mediante el uso de una o varias herramientas matemáticas, y a su vez, no ejemplifican o muestran la diversidad de actuaciones que pueden considerarse en relación y bajo el enunciado de un determinado objetivo matemático, por lo tanto no cumple con ser una demanda cognitiva. No obstante, los demás profesores si logran comprender y diseñar demandas cognitivas (tabla 12 columna 5).

Tabla 12

Análisis cognitivo por grado escolar en educación primaria y la Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular

Grado	Aprendizaje esperado	Expectativa de aprendizaje	Limitación de aprendizaje	Demandas cognitivas
1°	Lee, escribe y ordena números naturales hasta 100.	Que agrupen y desagrupen cantidades de distintas maneras utilizando objetos que representen decenas y unidades.	Apropiación del sentido numérico, habilidades de conteo y agrupación.	<p>Aplicar—plantear situaciones en las que apliquen lo aprendido para movilizar el conocimiento.</p> <p>Comprender—mediante preguntas, ejemplos y discusiones, mostrar lo que lograron comprender.</p> <p>Crear—adaptar actividades en base a la información para replantear el trabajo del contenido.</p>
2°	Lee, escribe y ordena números naturales hasta 1000.	Que los alumnos interpreten números escritos y formen colecciones con esas cantidades de objetos a partir de agrupamientos en	<p>Cuando hay dificultad en comprender que los agrupamientos son equivalentes, conviene demostrar con grupos de objetos concretos.</p> <p>Que haya suficiente</p>	<p>Aplicar: Emplear, manipular material concreto para agrupar los números naturales hasta 1000.</p> <p>Comprender: Clasificar y comparar números naturales hasta 1000, donde los</p>

		decenas y centenas.	material para los equipos y manejar el total de diferentes maneras con los alumnos que presentan dificultades.	alumnos asimilarán, pondrán en práctica lo aprendido y tendrán la capacidad de explicar el procedimiento por el cual obtuvieron el resultado.
3°	Uso de fracciones con denominador hasta 12 para expresar relaciones parte todo, medida y resultados de reparto.	<p>Que comprenda y compare diferentes fracciones (equivalentes).</p> <p>Que identifique la proporción de cada fracción de acuerdo al denominador.</p> <p>Que identifique la representación numérico – geométrico.</p> <p>Sume y reste fracciones de igual denominador</p>	<p>Que los alumnos no comprenden el tamaño de una fracción y creen que si una fracción tiene un denominador más grande es más grande que una con denominador más pequeño, ejemplo:</p> <p>e) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$</p>	<p>Compare las diferentes representaciones de las fracciones y figuras a dividir.</p> <p>Comprenda cual es más grande por medio de figuras y sus repartos.</p> <p>Clasifique figuras que se encuentren divididas en las mismas fracciones y compare cual representa una mayor parte del entero.</p> <p>Argumente por qué es mayor una fracción que otra.</p>
4°	Resolver problemas de suma y resta de fracciones con el mismo	<p>Se apropie y comprenda el concepto de fracción.</p> <p>Maneje, represente y</p>	<p>Comprensión del concepto de fracción.</p> <p>Comprender la representación de</p>	<p>Definir individualmente el concepto de fracción, buscar información del concepto en diccionario, internet, o cualquier otra fuente de</p>

	denominador (hasta doceavos).	<p>solucione problemas que implique el uso de fracciones.</p> <p>Investigar la definición del concepto "fracción", exponerla frente al grupo, tener la participación de los alumnos.</p>	diferentes fracciones.	información.
5°	Que los alumnos resuelvan problemas que implican suma de fracciones con distinto denominador (donde uno es múltiplo del otro).	<p>Sepan la representación de las fracciones.</p> <p>Realicen las diferentes sumas de fracciones con diferente denominador.</p> <p>Que determinen que el denominador es las partes en que se divide el entero.</p> <p>Sepan el procedimiento de la suma; para llegar a un resultado satisfactorio de la</p>	<p>No reconocer los números fraccionarios (equivalentes y fracciones mixtas).</p> <p>No reconocer que el denominador representa las partes en que se divide el entero.</p> <p>No saber la característica de este tipo de operación fraccionaria (suma y resta con diferente denominador).</p> <p>No saber cómo se lee la fracción que se obtuvo como resultado.</p>	<p>Que se comprenda lo que el docente de a conocer; tomando en cuenta el conocimiento previo del alumno.</p> <p>Seleccione las fracciones y redactar los problemas en los que tome en cuenta la suma de fracciones.</p> <p>Que aplique e identifique el resultado de una suma de fracciones con diferente denominador.</p> <p>Evalúe por medio de una explicación breve sobre lo que aprendió y trabajarlo cotidiana</p>

		fracción.		mente.
6°	Que los alumnos reflexionen sobre la equivalencia y el orden entre las expresiones fraccionarias y decimales en la recta numérica.	<p>Que los alumnos reconozcan las características de las fracciones en la recta numérica en diversas situaciones de la vida diaria.</p> <p>Que los alumnos identifiquen y expresen con claridad los diferentes tipos de fracciones.</p>	<p>El niño no reconoce las fracciones en la recta numérica.</p> <p>No reconoce las características de la fracción, su valor en situaciones de la vida diaria.</p> <p>Se le dificulta emplear el algoritmo para sumar y restar fracciones.</p>	<p>Reconocer las fracciones en diferentes situaciones y contextos (hechos, términos y definiciones).</p> <p>Analizar a través de la descripción las características de las fracciones en la recta numérica.</p> <p>Reflexionar por medio de la comparación para llegar a una definición de los elementos que implican las fracciones en la recta numérica.</p> <p>Clasificar las diferentes representaciones de las fracciones.</p> <p>Comprensión después de analizar y reflexionar sobre las fracciones el alumno será capaz de apropiarse del algoritmo convencional.</p> <p>Emplear diferentes procedimientos para relacionar las fracciones con las unidades</p>

				de medida.
USAER	Que los alumnos se familiaricen con la escritura numérica de fracciones, así como con diferentes representaciones de medios, cuartos y octavos.	<p>Que los alumnos tengan un acercamiento al estudio formal de las fracciones.</p> <p>Que conozcan la escritura y el significado de los números fraccionarios.</p> <p>Que identifiquen y expresen las fracciones en diferentes contextos en los que se desenvuelven.</p> <p>Que pongan en práctica el uso de fracciones de manera oral y escrita</p>	<p>Consolidación de procesos de primeras etapas.</p> <p>La maduración de los alumnos, poca estimulación.</p> <p>Manejo de operaciones básicas.</p> <p>Identificar las fracciones en la representación geométrica y en mayor medida en la representación numérica.</p> <p>Distinguir los conceptos de fracción, numerador, denominador.</p> <p>Fracciones equivalencias.</p> <p>Distinguir que un número mayor en denominador es menor en fracción.</p>	<p>Reconocer situaciones, hechos términos y definiciones. Identificar en distintos contextos los números fraccionarios</p> <p>Describir las fracciones al tener que representarlas gráficamente. Clasificar de manera gráfica y numérica la representación de fracciones.</p> <p>Comparación de expresiones escritas y el significado de números fracciones.</p> <p>Emplea procedimientos para relacionar las fracciones con diferentes unidades de medida</p> <p>Analiza la resolución de problemas para señalar de acuerdo con la cantidad que se indica con diferentes elementos.</p>

4.5 Fase formativa 3. Conocimientos didácticos del contenido que se favorecen al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel primaria, a través del taller realizado con base en la fase de profundización del Análisis Didáctico.

Esta fase centra su atención en el diseño y selección de tareas de enseñanza, a su vez, toma aspectos relativos a las demandas que un profesor plantea a los alumnos, que movilizan el conocimiento de éstos sobre un tema matemático determinado, y que concretan los objetivos específicos de este tema matemático en términos de actuaciones (Lupiañez, 2009).

Por lo tanto, esta última fase considera los componentes del análisis de instrucción, mismo que determina el proceso del diseño y selección de tareas de enseñanza, así mismo, en todo momento considera las tareas como elemento organizador. Los componentes son las variables singulares: adecuación, complejidad, resolución de problemas y la modelización (Lupiañez, 2009), ya que atienden directamente al diseño y selección de tareas de enseñanzas como parte de la fase de profundización del Análisis Didáctico.

Como parte de lo anteriormente descrito, los profesores comienzan por relacionar las demandas cognitivas con el aprendizaje esperado, las expectativas de aprendizaje y las limitaciones, esto prepara el camino para el diseño y selección de tareas. Una vez que los profesores establecieron demandas cognitivas (tabla 12), se comienza con la selección y diseño de tareas de enseñanza.

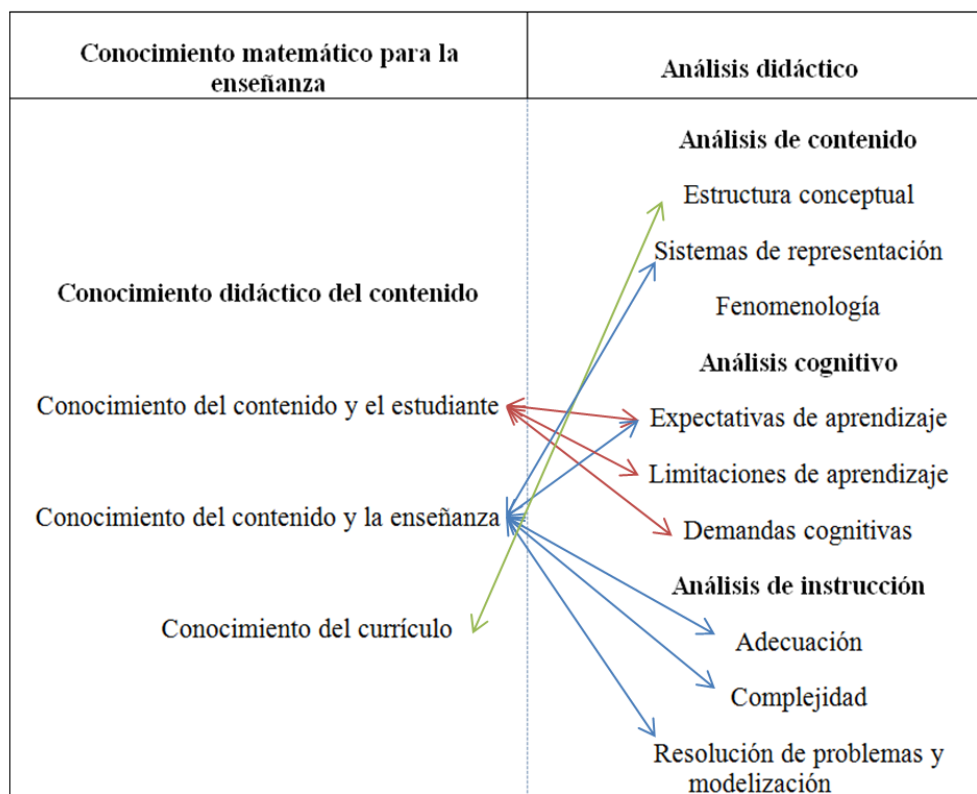
Con base en el párrafo anterior, y para efectos del presente análisis, el análisis de los datos se realiza a través de una descripción detallada interpretativa de la exposición de los profesores sobre su tarea seleccionada o diseñada, y con el fin de identificar el conocimiento didáctico del contenido que el profesor pone en juego, se aplica el análisis al texto que registra la exposición del profesor en complemento con información recabada en sesiones anteriores (análisis de contenido y cognitivo).

Por lo tanto, para identificar el conocimiento didáctico del contenido en acción que pone en juego el profesor a la hora de seleccionar y diseñar tareas de enseñanza para el tema de fracciones, relacionamos los dominios y subdominios del conocimiento descritos por Ball et al., (2008) con los componentes que caracterizan al Análisis Didáctico, vínculo establecido por Rojas y Flores (2011). Para identificar este vínculo se presenta la figura 23, misma que muestra la correspondencia que se reafirmó en la presente investigación entre los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza, específicamente el conocimiento didáctico del contenido, y los componentes del Análisis Didáctico.

De esta forma en la figura 23, se establece la correspondencia entre los subdominios de conocimiento matemático para la enseñanza y los componentes del Análisis Didáctico, y a su vez, permite el análisis de los datos recabados durante el taller, permitiéndonos utilizar tres colores diferentes para identificar los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza y su relación con el Análisis Didáctico: rojo para el subdominio conocimiento del contenido y los estudiantes, azul para el conocimiento del contenido y la enseñanza, y verde para el conocimiento del currículo. Cada uno con su relación con el Análisis Didáctico.

Figura 23

Vínculos entre dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza y el Análisis didáctico



Fuente. Adaptado de *Dominios de conocimiento para la enseñanza-Análisis didáctico*, de N. Rojas y P. Flores (p. 22), 2011, El Análisis Didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones.

Además, se considera para efectos de este análisis utilizar el color naranja para referirnos a *fenomenología*, ya que este componente del análisis de contenido evidencia su participación dentro del taller de formación continua, no

obstante, esta distinción de color separada de las demás, tiene sentido con la correlación que identifica Rojas y Flores (2011, p. 22) del conocimiento para la enseñanza y el Análisis Didáctico, donde *fenomenología*, se correlaciona directamente con el subdominio *conocimiento especializado del contenido*, considerando que el dominio mencionado no es foco de interés del presente trabajo.

La información se recoge sobre los argumentos expuestos por los profesores, transcritos en episodios a partir de las grabaciones obtenidas, los episodios son segmentados con base a la participación de cada docente que corresponde a un fragmento que tiene un principio y un fin reconocible, y una secuencia de acciones que lo constituyen (Krippendorff, 1990, p.85, como se citó en Rojas y Flores, 2011).

Las participaciones se han segmentado en siete episodios, seis corresponden a cada grado escolar, de primero a sexto año de educación primaria, y uno a la Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular, episodios que nos llevan a establecer explicaciones sobre la selección y diseños de tarea para la enseñanza docente en el tema de fracciones, y a su vez, identificar el conocimiento didáctico del contenido. Es importante resaltar que la información se presenta en orden con base al grado escolar.

Además cabe señalar, que existe un periodo vacacional que interrumpe el taller en su última fase, debido a circunstancias ajenas al taller, éste tuvo que ser suspendido después de comenzar la actividad, momento preciso en que los profesores discutirían acerca de sus tareas seleccionadas y posteriormente, la exposición y argumentación de su diseño o selección de tareas de enseñanza para el tema de fracciones. Esta situación se vio reflejada en argumentos carentes de la relación con las fases previas (análisis de contenido y cognitivo) al realizar su exposición, ya que los profesores al regresar y retomar el taller después del periodo vacacional, recurrían a intentar recordar y expresar lo que se vio antes de las vacaciones.

Los episodios comienzan a partir del planteamiento de expresar la selección y diseño de tareas, donde los profesores expusieron en plenaria y argumentaron cómo su actividad responde al aprendizaje esperado, expectativas de aprendizaje y a las limitaciones seleccionadas.

4.5.1 Episodio [1]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del primer grado escolar de educación primaria (min 1:06:04 – 1:17:40)

El apartado [1.1] corresponde a la explicación previa a las actividades seleccionadas, se muestra con la intención de evidenciar conocimiento del contenido y la enseñanza, en donde se comienza a dotar de significado a términos como agrupar y desagrupar, conocimientos que posteriormente serán aplicados al uso de las fracciones en el significado relación parte todo.

Posteriormente en el párrafo [1.2] se avanza a cuando el profesor describe la actividad, dejando un lapso de tres minutos con cuarenta segundos, donde el profesor expuso las dificultades y demandas cognitivas, mismas que se explicaron en el apartado dos del presente capítulo (análisis cognitivo).

Descripción del episodio 1			
[1.1]	1	P1	En primer grado les comentaba la ocasión anterior que nos corresponde más lo que viene siendo agrupar, hacer reparticiones. Y yo elegí el tema que corresponde a leer, escribir y ordenar números naturales hasta 100. Que es el que más se adecua a lo que viene siendo el reparto y ahí ir acercando a los niños al uso de las fracciones.
	2	P1	¿Cuál es la expectativa? Que agrupen y desagrupen, o sea no nada más irse a hacer grupitos esos, también igual desarmarlos para que lo traten de identificar en diferentes contextos de la vida. Agrupar y desagrupar cantidades de distintas maneras utilizando objetos que representen decenas y unidades.
	3	P1	¿Por qué en decenas y unidades? Porque es la manera en que en primer grado se comienza a adentrar a los niños en lo que viene siendo el uso, en este caso el lenguaje matemático. Decenas y unidades es la base para que los niños vayan adentrándose en las reparticiones
[1.2]	4	P1	¿Qué actividad vamos a realizar aquí? Pues permitir que los alumnos encuentren las respuestas a ejemplos que se

			<p>presentan, comentar los resultados que se van obteniendo y también comentar las estrategias que se van a utilizar, por el hecho de que no todos aprenden al mismo ritmo, muchas ocasiones a todos nos ha pasado, que damos una explicación sobre un tema: (simula una escena en clase)</p> <p>-ivamos a dar un ejemplo! ¿Entendieron? -</p> <p>- ¡Siiiiii! -</p> <p>Y a la hora de la hora dicen:</p> <p>- ¿Qué vamos a hacer?</p> <p>- Bueno vamos otra vez a ver.</p> <p>Buscar diferentes formas o visiones, tratar de que los niños logren captar nuestra intención, para que logren llegar al conocimiento que pretendemos nosotros.</p> <p>Y aquí viene la contra, porque los niños que aprenden así rápido, después de dos tres explicaciones ya están:</p> <p>- ¿y ahora qué? ¿Eso otra vez? -</p>
[1.3]	5	P1	<p>Mostrar el tablero de 100 en grande, de hecho iba a ponerlo como referente, como el trabajo de la psicóloga, más ponerles también en grande el tablero de 100, para que cuando vayamos trabajando pues también lo tengan ahí a la vista y cuando no lo trabajemos de todas maneras. Es una manera de que ellos también les sirva como un ambiente alfabetizador, tener así como el referente a veces que practicamos la formación de palabras, pues en este caso de lo que es matemáticas, pues también la formación de números.</p>

	6	P1	<p>Por ejemplo cuando estuve trabajando esto de la manera de utilizar decenas y unidades, veíamos que como:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ¿si uno esta decena con esta unidad? Se nos formó una nueva cantidad, ah dice: - pero oiga, si les dejamos ahí el cero pues no corresponde - lo decían los niños que si habían puesto atención a las actividades, entonces de ellos va saliendo: - eh, quiere decir que ese cero vamos a borrarlo - <p>¿y si ponemos esta decena con esta otra unidad? Pues otra vez.</p> <p>Y ya se les va grabando que el cero ya no se pone, porque se transforma y no corresponde a la cantidad que queremos llegar y esto es para lo que nos va ir sirviendo tener ahí a la vista en grande el cuadro de 100.</p>
[1.4]	7	P1	<p>Representar el 100 de diferentes maneras, ya sea apoyándonos fichas, utilizando monedas recortables o lo que se nos vaya corriendo o que pensemos en otras maneras de llegar, de manera que los niños lo vayan encontrar una manera fácil de formar.</p>
	8	P1	<p>Registrar de manera ordenada para consultar después y corregir si es necesario. O sea, aquí me refiero a hacer un análisis de los niños: ya haciendo un registro, este niño si logro captarlo, este niño logró asimilarlo, este tuvo este problema, este de plano no dio ni una.</p>
[1.5]	9	P1	<p>Y ya conforme se va avanzando el paso de los días, pues ir haciendo un pequeño reforzamiento, para que los que sí lograron, digamos hacerse del conocimiento, pues para ir y decirle... le he dicho mucho a los niños de que -si ya lo logran dominar y lo vuelves a repetir, esto es como lo que aplica el dicho, la práctica hace al maestro, no se refiere a que tú vas a ser un profesor, un maestro, sino que vas a dominar ese tema y lo vuelves a ver, más fuerte te estás haciendo en ese</p>

			contenido- y los que nos llevan orientando a volver a repetirlo pues con la esperanza de que ahora sí.
[1.6]	10	P1	<p>Nivel de complejidad: aquí se ubica en la fase de reproducción por el hecho de que aquí a los niños se les plantean situaciones sencillas en las que van a repartir material de manera que todos interactúen, enfocados en que se va a utilizar material concreto, ya lo decía ahorita: fichitas, moneditas de juguete, billetitos de juguete e incluso dibujos, hay niños que se les da más mediante dibujitos que con material concreto, hay otros que se les da más cuando hacemos juguitos, que a ver un juguito: si estoy en este cuadro estoy en una unidad, si brinco hasta allá ¿Cuántas unidades llevo? Que una, dos, tres unidades.</p> <p>Hay otros niños que digo, se les facilita más haciendo el dibujito: que una ficha así, que otra así (apunta al pizarrón simulando dibujar las fichas).</p>
	11	P1	<p>Los niños tienen... hay mucha... eso es lo bonito que hay mucha teoría de la manera de aprender o comprender las cosas, pero pues en este caso es, en primer año, es un gran reto porque a veces uno planea pensando en que todos aprenden igual y a la mera hora, no sale como uno pensaba.</p>
	12	P1	<p>Bueno dice: y también se ubica en el apartado de conexión, pues se trabaja en contextos en los que deben trabajar mediante sistemas de representación, en este caso analizando situaciones para poner en práctica el uso del material concreto y a la vez creando discusión para comprobar y justificar los resultados. Es decir confrontarlos, a los niños, de manera que entre ellos mismos empiecen a explicarles a los que no entienden o de otra manera utilizando monitores porque muchos niños se cohíben, si los pasa uno al frente -¡ay! todos se chivean, mira no te preocupes ¿qué te parece si tú me ayudas a explicarle a aquel niño?</p> <p>Si los pasa uno al frente pues viene lo que es el nervio escénico como se le conoce. Pero si ya los manda uno así por</p>

			aparte de manera que no se sientan exhibidos, ellos hasta lo hacen de muy buena manera y los niños que no podían comprender, ahora se les va dar mejor manera de entender que con la explicación que nosotros le damos.
[1.7]	13	P1	Funcionalidad e intención: Tareas para ayudar a la motivación y la relación con la realidad, se dan en el momento en que se realiza el análisis de situaciones en las que los alumnos movilizan sus conocimientos para poner en práctica lo aprendido.
	14	P1	Tareas de elaboración y construcción de significados, se da cuando los alumnos utilizan los materiales para relacionar lo aprendido y con la funcionalidad en la búsqueda de los resultados de acuerdo a las situaciones planteadas.

El profesor comienza por explicar que en primer grado se trabaja con la adquisición y comprensión de conceptos, en este caso: agrupar y reparticiones (1). Por lo tanto el profesor muestra **conocimiento del currículo** en relación a la **estructura conceptual**, en tanto el grado de las tareas sostiene la relación entre los elementos de la estructura conceptual con los establecidos por el currículo escolar, no obstante también declara el aprendizaje esperado que atiende a dicha adquisición de conceptos: leer, escribir y ordenar números naturales hasta 100.

Al continuar con la explicación, se identifica **fenomenología**, en este caso, en el grado en que el profesor hace referencia a identificar los conceptos trabajados dentro de diferentes contextos de la vida cotidiana (2) y en situaciones educativas (10), pues las tareas solicitadas se encuentran dentro del salón de clases, no obstante la tarea parte del mundo real, de una variedad de tareas para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas (análisis de instrucción - **resolución de problemas y modelización**).

También se identifica **conocimiento del contenido y su enseñanza** estrechamente relacionado con el análisis de instrucción, cuando el profesor explica porque el uso de decenas y unidades (3), ya que identifica el grado en que las tareas propuestas permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos de agrupar y repartir.

Posteriormente se encuentra **conocimiento matemático y los estudiantes** en relación con el análisis cognitivo, toda vez que el profesor hace alusiones a los

diferentes ritmos en que aprenden sus alumnos (4, 11 y 12), en este caso, identificamos los tres componentes del análisis cognitivo: **expectativas de aprendizaje**, cuando el profesor tienen conocimiento y referencia sus tareas a los aprendizajes esperados que pretende que logren sus alumnos; **limitaciones de aprendizaje**, toda vez que la preocupación del profesor se manifiesta en los ritmos de aprendizaje que tiene sus alumnos en el empleo y adquisición de conceptos; y **demandas cognitivas**, cuando el profesor tiene conocimiento de la necesidad de buscar diferentes formas o visiones para tratar de que los niños logren captar la intención y logren llegar al conocimiento que se pretende (4).

Nuevamente se identifica **conocimiento del contenido y la enseñanza**, cuando el profesor emplea materiales y recursos que permiten dotar de significados a los términos (análisis conceptual), en este caso se introducen el concepto de *agrupar y repartir*, cabe señalar, que en primer grado de educación primaria no se trabaja formalmente las fracciones, pero sí se comienza a dotar de significados a términos que posteriormente serán utilizados en tareas que implique fracciones (5, 6 y 10). Por lo tanto, también hace presencia el **conocimiento del contenido y la enseñanza**, estrechamente vinculado con el análisis de instrucción, en el grado en que las tareas planteadas permiten adquirir conceptos matemáticos (5, 6 y 10).

El **conocimiento del contenido y los estudiantes** en correspondencia con el análisis cognitivo en su componente **demandas cognitivas**, figuran cuando el profesor busca tareas relacionadas con las dificultades de sus alumnos para reforzar conceptos matemáticas (7, 8 y 9).

Cuando el profesor pronuncia la actividad con el uso de fichitas, moneditas de juguete, billetitos de juguete e incluso dibujos (10 y 11), muestra **conocimiento del contenido y la enseñanza** ligado al análisis de contenido, en su componente **sistemas de representación**, ya que emplea la adecuación entre la representación verbal, manipulativa y pictórica.

Por último, el profesor explícitamente menciona que sus tareas son para ayudar la motivación, relación con la realidad y tareas para la elaboración y construcción de significados (13 y 14), de esta forma muestra **conocimiento del contenido y la enseñanza** vinculado con el análisis de instrucción en sus componentes adecuación y complejidad.

4.5.1 Episodio [2]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del segundo grado escolar de educación primaria (min 26:02 – 1:29:54)

Descripción del episodio 2			
[2.1]	1	P2	Dentro de la actividad, yo utilice una que es la fábrica de chocolates, trayecto dos, hasta mil.
[2.2]	2	P2	Dentro de las actividades, es agrupar ciertos números o cantidades en grupos de 10 en 10, 100 en 100 y 1000 en 1000 de chocolates, en este caso los chocolates se sustituyen por semillas, sopa, piedritas, lo que haya.
	3	P2	En este caso se involucra el conteo oral hasta 1000, de 100 en 100 y de 10 en 10, para este caso no solo es material que puedan ellos manipular, sino también material que ellos puedan ver, o sea visuales, pues como sabemos, muchos niños son visuales, auditivos, etc. Entonces, en este caso yo me apoyo en materiales que son visuales.
[2.3]	4	P2	Otra de las actividades sería, sentarlos en círculos y proponer una cantidad inicial, como por ejemplo 250 y pedir que cuenten de 10 en 10 ahí donde están sentaditos en el círculo, que ellos solitos en el piso hagan la cantidad.
[2.4]	5	P2	También es, explorar los conocimientos que ya se tienen acerca de los nombres de los números e introduciendo nuevos nombres, por ejemplo si ya se tienen, este, saber que cien es una centena cuando sea necesario, o diez una decena, o lo que es el mil pues un millar posteriormente.
[2.5]	6	P2	Anotar los resultados en tablas donde agruparan los resultados obtenidos en las actividades planteadas en el libro de texto pagina 85 y 86, del libro de texto.

	7	P2	En esta página, más que nada, se plantea que los alumnos compartan, o sea que comparen diferentes cantidades y que sepan por ejemplo que doscientos cincuenta, serían dos centenas y cinco decenas, o sea que ya se apropien de los conceptos, y que sepan cuanto equivale cada uno.
[2.6]	8	P2	Dentro del nivel de complejidad, se ubican en la fase de reproducción por el hecho de que aquí los niños se les plantean situaciones sencillas en las que van a repartir, ellos mismos reparten material de manera que a todos interactúen con él, para que lleguen a un mismo resultado. Comparan cantidades y ellos mismos analizan si les faltan elementos o si les sobran, etc.
[2.7]	9	P2	En cuanto a la fase de conexión, los alumnos se guían en la representación en contextos menos familiares, utilizando material concreto. Pues aquí yo tomo lo que comentaba la maestra, de que muchas veces no les encargan un octavo de azúcar. Entonces pues aquí en la escuelas es donde manejan más ese tipo de conceptos, y es donde uno los pone, ipues que a agrupar, a hacer esto y el otro!, en casa muchas veces pues no los ponen tanto a sí ¿verdad?, por ejemplo, allá que juegan a las canicas, es cuando los alumnos ponen en práctica lo que aprenden con nosotros. Porque en casa muchas ocasiones no lo hacen.
[2.8]	10	P2	Funcionalidad e intención. En este caso son las tareas para ayudar a la motivación y de relación con la realidad. En este caso es cuando el alumno se motiva para agrupar, repartir, partir y comparar cantidades de 10 en 10, de 1000 en 1000, con material concreto para posteriormente trabajarlo en casa, como lo mencionaba anteriormente, con material como dulces, canicas y chocolates.
[2.9]	11	P2	Tareas para la elaboración y construcción de significados. Que es cuando el alumno forma conjuntos de diez y de mil y les da significado, y sabe que es una decena, una centena o un millar.

El episodio comienza declarando el nombre de la actividad y el referente **curricular**, en este caso, trayecto dos del libro para el alumno (1). Al comenzar a describir la primer actividad (2), se identifica **conocimiento del contenido y la enseñanza**, cuando el profesor emplea materiales y recursos que permiten dotar de significados a los términos (análisis conceptual), en este caso se introducen el concepto de *agrupar*, utilizado para formar grupos que contengan la misma cantidad de objetos perteneciente a una colección, por lo tanto se trabaja el significado de relación parte-todo, cabe señalar que en segundo grado de educación primaria al igual que el primer grado, no se trabaja formalmente las fracciones, pero sí se comienza a dotar de significados a términos que posteriormente serán utilizados en tareas que implique fracciones, en este caso: *partir, repartir, agrupar, desagrupar y comparar* (2, 6, 8, 9 y 10), por lo tanto, se hace presente el **conocimiento del contenido y la enseñanza** de la maestra, estrechamente vinculado con el análisis de instrucción, en el grado en que las tareas planteadas permiten adquirir conceptos matemáticos.

De igual forma dentro de esta primera actividad, se evidencia **conocimiento del contenido y los estudiantes** estrechamente relacionado con el análisis cognitivo en sus componentes **limitaciones de aprendizaje y expectativas de aprendizaje**, toda vez que la profesora expresa los diferentes estilos de aprendizaje de sus alumnos: -visuales, auditivos, etc.,- (3) y con base en ello, adecua la tarea en relación a la diversidad, nivel escolar y nivel cognitivo de sus alumnos.

La siguiente actividad que plantea la profesora evidencia el componente de **fenomenología**, perteneciente al análisis de contenido, cuando el contexto que plantea es matemático en situaciones educativas (4 y 9), pues solicita a los alumnos realizar conteos en agrupaciones, por ejemplo de diez en diez hasta llegar a doscientos cincuenta.

Cuando la maestra expone el nivel de complejidad que considera para sus tareas, evidencia **conocimiento del contenido y la enseñanza** ya que al considerar la tarea de solicitar a sus alumnos repartir material de igual cantidad para todos sus compañeros (8), prevalece la adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje que se intuyen, perteneciente al análisis de instrucción, en este caso, el alumno comienza a dotar de significado en cuanto la relación parte-todo, puesto que destaca la acción de pensar que cantidad de material tiene, en cuantas partes tiene fraccionar la cantidad de material para ajustar a darle a todos sus compañeros y cuánto material le toca a cada uno.

Por último la profesora expresa que la intención de las tareas es elaboración y construcción de significados (11), mostrando **conocimiento del**

contenido y la enseñanza vinculado con el análisis de instrucción en el grado que las tareas planteadas permiten adquirir o reforzar conceptos matemáticos.

4.5.1 Episodio [3]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del tercer grado escolar de educación primaria (min 57:34 -1:02:47)

Descripción del episodio 3			
[3.1]	1	P3	En actividad elegí elaborar figuras con plastilina y dividir las en medios, cuartos y octavos, para identificar cual es más grande.
[3.2]	2	P3	Proyectar recipientes en el pizarrón y sacar con cuantos vasos de un medio, un cuarto y un octavo se llenan con un garrafón de 10 litros. Esta actividad ya la realizamos en pizarrón, proyectamos el litro y la llevamos a cabo.
[3.3]	4	P3	En nivel de complejidad, en lo que respecta al nivel de complejidad es necesario partir de las operaciones básicas ya que si no dominan las operaciones básicas se les va a hacer más complejo el contenido de las fracciones.
	5	P3	Es lo que estuvimos platicando por ahí, que nos comentaba el maestro que para realizar la suma, la resta, es necesario que dominen las operaciones básicas, porque si no, no se van a poder realizar, o avanzar en el tema de fracciones.
	6	P3	Pues si he estado dándole mucho a las operaciones para que al momento de realizar sumas de fracciones con diferente denominador, pues no tengan esas dificultades.

[3.4]	7	P3	En funcionalidad puse yo que aplicarlo en su vida diaria, dividiendo alguna fruta, su bebida para la hora del recreo, el pastel del día del niño, el sándwich que traen de lonche. Por ahí la mayoría de los niños las sándwichera ya traen su sándwich ya dividido y ahí siempre salimos en mero en frente, los que se quedan ahí en el salón, y empezamos a platicar de estos temas, igual con sus bebidas siempre traen su refresquitos o agua de frutas, y ahí pues, trato yo de meter el tema de las fracciones con su lonche que traen.
	8	P3	Plantear problemáticas que los hagan reflexionar repartiendo dulces en el salón y que identifiquen a quien le toca más y por qué.

El profesor comienza por explicar la primer tarea, en la cual se observa *conocimiento del contenido y la enseñanza* (1) cuando el profesor emplea materiales y recursos que le permitirán adecuar tareas para reforzar conocimientos en los alumnos, en este caso utiliza la comparación en material concreto para que los alumnos logren identificar la diferencia de tamaños entre fracciones, por lo tanto, se relaciona con el análisis de instrucción en la adecuación de la tarea y los caminos de aprendizaje que se intuyen. De igual forma, cuando el profesor declara que emplea problemáticas para reflexionar, por ejemplo al solicitar a los alumnos repartir dulces en el salón y que ellos mismos identifiquen a quien le toca más y por qué (8), evidencia *conocimiento del contenido y la enseñanza* en relación con análisis de instrucción ya que este tipo de tareas permite reforzar los conocimientos de los alumnos.

El *sistema de representación* es geométrico, en tanto a dividir las figuras de plastilina en figuras geométricas de proporción igual (1), los recipientes que utiliza en la actividad dos corresponden a cuerpos geométricos de un cuarto, un medio y un litro (2) y al trabajar la tercer tarea con los lonches de los alumnos, divide sándwiches, fruta y recipientes de bebida (7). Estas actividades corresponden al análisis de instrucción, en tanto el profesor adecua las tareas para reforzar conocimientos.

Fenomenológicamente, componente correspondiente al análisis de contenido, el profesor trabaja en el contexto matemático en situaciones educativas (1 y 2), pues las tareas solicitadas se encuentran dentro del salón de clases, no obstante la tarea tres (7), es asociada a situaciones personales, ya que

hace relación a actividades diarias de los alumnos (compartir lonches). La formulación del problema de la tarea tres (7) parte del mundo real, de una variedad de tareas para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas o en el que practicar ideas introducidas previamente (análisis de instrucción - resolución de problemas y modelización).

También se observa *conocimiento del contenido y los estudiantes* en relación al análisis cognitivo, en su componente *expectativa de aprendizajes*, esto cuando el profesor referencia al contenido que pretende enseñar, suma y resta de fracciones, los conocimientos previos de los parten los alumnos, operaciones básicas (4 y 5). Así mismo, continúa evidenciando *conocimiento del contenido y los estudiantes* en relación al análisis cognitivo, en su componente *oportunidades de aprendizaje*, al haber tareas en relación con las operaciones básicas para que los alumnos posteriormente no tenga dificultades a la hora de sumar fracciones con diferente denominador (6), por lo tanto, existe la presencia de tareas que refuerzan conceptos o procedimientos matemáticos, relacionadas con las dificultades de aprendizaje de los alumnos.

4.5.1 Episodio [4]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del cuarto grado escolar de educación primaria (min 1:18:57 – 1:22:03)

El profesor del cuarto grado escolar mandó sus diapositivas en power point previo al periodo vacacional, no obstante cuando fue el día de la presentación al regreso del periodo vacacional, no se contaba con dicho recurso, por lo que el profesor expuso con base en sus anotaciones y recuerdos de sus diapositivas.

Descripción del episodio 4			
[4.1]	1	P4	El aprendizaje es: resuelve problemas de suma y resta de fracciones con el mismo denominador hasta doceavos.
[4.2]	2	P4	El contenido es investigar el significado, exponerlo al grupo, mostrar otros conceptos y trabajar con hojas de máquina para realizar un aprendizaje significativo.
	3	P4	Sumas y restas del libro del alumno y sumas de fracciones con representación geométrica y numérica.

[4.3]	4	P4	La dificultad es que no tienen dónde buscar, algunos, el significado: ya sea en diccionario, internet o celular. Además tienen la renuencia a realizar la investigación por algunos alumnos, no comprenden el concepto y los que lo hacen, lo hacen por medio del papá o mamá que les hacen el trabajo.
[4.4]	5	P4	La expectativa es, con la tarea de alumnos que si la realizaron es exponerla y presentarla frente al grupo cada alumno. Esta acción explicada por cada alumno dará una mejor intención entre pares y para reforzar esa actividad la terminaré con una presentación más amplia, esto ayudará a reforzar y el concepto de fracción quedará más entendido.
	6	P4	Previo se realizarán ejercicios en el pizarrón. Como cierre se hará un ejercicio final en cartulina.
[4.5]	7	P4	El material hojas de máquina, colores tijeras, Resistol, tangram, círculos de fracciones, cartulina marcadores de colores, ejercicios, hojas impresas.
[4.6]	8	P4	En demanda cognitiva sería ya el identificar que es una fracción y que la reconozcan, ya que reconozcan el término de fracción y la división como tal y a la vez la sepan expresar, la sepan plasmar, la sepan describir en diferente modo.
[4.7]	9	P4	La actividad, lo vamos a trabajar, decían los compañeros, vamos a hacer la representación geométrica, que es la que se hace. Yo siento que es un ejemplo muy generalizado que todos empleamos, iclaro que le ponemos de nuestra cosecha! vulgarmente decimos, y es bien empleada.
	10	P4	La intención es que haga tarea, que trabaje.

El episodio comienza declarando el aprendizaje esperado tomado del el referente curricular Plan y Programa de Estudios (2017), en este caso, resuelve problemas de suma y resta de fracciones con el mismo denominador hasta doceavos (1), para lo cual, posteriormente el profesor destina tareas de reforzamiento del

concepto de fracción (5), con lo que nos muestra **conocimiento curricular** en vinculación con el análisis de instrucción, puesto que realiza las **adecuaciones** pertinentes con base en las orientaciones curriculares.

Al comenzar a describir la primer actividad (2), se identifica **conocimiento del contenido y la enseñanza** en relación con el análisis de contenido en su componente **estructura conceptual**, cuando el profesor parte de que el alumno investigue el significado de fracción, lo exponga y muestre los conceptos relacionados. Así mismo expresa hacer uso de sumas y restas de fracciones con representación geométrica y numérica (3), mostrando **conocimiento del contenido y su enseñanza** relacionado con el componente **sistemas de representación** del análisis de contenido.

Posteriormente se identifica **conocimiento del contenido y los estudiantes**, relacionado con el análisis cognitivo, al expresar las **limitaciones de aprendizaje** que tienen los alumnos al realizar investigaciones (4). Enseguida el profesor expone las **expectativas de aprendizaje**, donde a su vez muestra **conocimiento del contenido y los estudiantes**, ya que se apoya de los alumnos que lograron superarlas para que ayuden a los que aún se encuentran en proceso (5).

Dentro de lo que él considera **demanda cognitiva** (8), asocia el significado de división a la fracción, por lo tanto trabaja el significado de fracción como cociente, en este aspecto Flores y Morcote (1999), expresan que cuando una fracción se relaciona directamente con la operación división sugerida por ella, estamos dándole una interpretación de cociente, es decir "a unidades en b partes iguales" refiere como el resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de personas o partes. De esta forma el profesor muestra **conocimiento del contenido y su enseñanza** en relación al análisis de contenido, tanto **conocimiento conceptual** como **procedimental**.

Por último, considera la representación geométrica como la representación que más se considera para trabajar fracciones en primaria (9), de esta forma denota **conocimiento del contenido y su enseñanza** en relación con la **estructura conceptual**, además dicho **sistema de representación** figura en mayor cantidad en los libros de texto para el alumno, denotando **conocimiento curricular**.

4.5.2 Episodio [5]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del quinto grado escolar de educación primaria.

El profesor de quinto grado olvidó su presentación de power point el día de la exposición, y se limitó solo a realizar comentarios y retroalimentación a las presentaciones de los compañeros, no obstante a este hecho, el profesor envió

sus diapositivas posteriormente. Lo anterior se atribuye a la consecución de las actividades interrumpidas por el periodo vacacional anteriormente mencionado.

4.5.1 Episodio [6]. Selección y diseño de tareas para el tema de fracciones del sexto grado escolar de educación primaria (min 24:06 – 28-24)

Descripción del episodio 2			
[6.1]	1	P6	Fracciones de sexto grado. Me base en los desafíos matemáticos 23 y 24 del libro de texto de sexto grado.
[6.2]	2	P6	La actividades que yo planteé fueron tres: primera actividad, presentar diferentes tipos de fracciones, por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $2 \frac{1}{2}$ luego pedir a los alumnos que lo representen como ellos creen que se pueden representar.
	3	P6	Eso responde a la primera... ¿cómo se llama?, la que dije... (se escucha al fondo varias sugerencias para completar la frase de la maestra). Sí a la expectativa que seleccioné.
[6.3]	4	P6	Actividad dos: después pedirles a los alumnos que esas mismas fracciones las representen en una recta numérica y comentar la forma en que lo hicieron, qué dificultades enfrentaron y cómo se podrán resolver a partir de una lluvia de ideas y algunos ejemplos en el pizarrón.
[6.4]	5	P6	La actividad tres: es realizar planteamientos concretos de la vida diaria, porque siempre, desde el objetivo, estoy centrando que el niño se las pueda apropiar, para que el niño... siente como que las fracciones para él no le sirven, porque a veces yo mismo le digo: a ver ¿a quién han mandado traer tres octavos de azúcar? ¡No pues a nadie! Entonces por eso ellos dicen: o sea para qué las aprendo, así como ¿para qué si a mí no me sirven? Pero eso lo va viendo cuando va sumando, o sea cuando ya va sumando, cuando va restando o cuando va comparando dos kilos. O sea propiamente ya con otra definición clara, qué son kilos, qué son metros. Porque esos si los usa en la vida

			diaria, pero no usa tres octavos para ir a comprar azúcar, entonces eso es el objetivo.
[6.5]	6	P6	Analizar planteamientos de la vida diaria como el del desafío matemático 24 y a partir de él representar los enteros en la recta numérica y después las fracciones, volver a exponer como resolvieron las problemáticas en la recta, qué si existen algunas exponerla y poder resolverlos entre todos.
	7	P6	En el libro de desafíos matemáticos vienen unas carreras, o sea, hay un concurso de carreras, dan cuatro o seis kilómetros, no recuerdo cómo está el número. Dan los seis kilómetros y ahí nos está diciendo que cada niño o cada señor van avanzando de diferente forma, por ejemplo dice que Don Manuel recorrió dos kilómetros y la señora Luisa recorrió un cuarto de la pista. Entonces ahí el niño tiene que transformar primero lo que es los metros y luego ya después representarlos en la recta numérica ¿cuánto son?, entonces está interesante ese desafío. Y no solo lo abarca el 23 y 24 con diferentes, trabajos.
	8	P6	Entonces por eso, a partir del desafío 24, volver plantear otras actividades de la vida diaria para que el niño vaya resolviendo los problemas, y para que quede más entendible eso.
[6.6]	9	P6	Dentro de esta actividad (apunta a la actividad tres), el niño se dio cuenta que en la recta numérica se encuentran los diferentes tipos de fracciones. O sea, ya el representó la pista, ya vio que tiene seis enteros, pero que cada persona a recorrido diferentes fracciones de acuerdo a lo que nos dice el libro.
[6.7]	10	P6	El nivel de complejidad: partir del análisis y descripción para encontrar los elementos y usos de la fracción en la recta numérica y su representación formal. Aquí ya sería propiamente de partir de los ejemplos, partir de la descripción para llegar a la representación como tal, ya

			sabiendo que es el numerador y denominador, y que esto implica suma, y también implica transformación de fracciones, por ejemplo, de impropias a mixtas y que dentro de esto ya utiliza todas las fracciones que dije en la primera parte donde él va a ir viendo los diferentes tipos de fracciones que existen. Porque en la recta numérica puede hacer las mixtas, pero también puede hacer las impropias y dentro de las impropias pues se va a dar cuenta que de un entero puede sacar comunes o también equivalente y ahí ver la equivalencia no solamente que es lo mismo dos medios por ejemplo, dos medios es lo mismo que un entero.
[6.8]	11	P6	¿Cuál es la funcionalidad e intención? La intención es que el niño identifique las diferencias entre las fracciones con representación geométrica a las de las rectas numéricas, así como los diferentes tipos de fracciones como son las impropias y mixtas por medio del análisis para que pueda descubrir la funcionalidad en la vida diaria y cómo es su representación formal teniendo en cuenta el numerador y el denominador.

El episodio [2] comienza estableciendo el referente curricular en que se basa la selección de tareas, por lo tanto, se identifica **conocimiento del contenido y el currículo** ligado al análisis de instrucción, en tanto las tareas se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en documentos oficiales, en este caso el libro para el alumno, en los desafíos matemáticos 23 y 24 (1).

Al comenzar a exponer las actividades (2) se identifica **conocimiento del contenido y la enseñanza** directamente relacionada con el análisis de contenido e instrucción, toda vez que la tarea propuesta por la profesora implica la variedad de sistemas de representación que el alumno tiene conocimiento en aprendizaje previos, ya que la tarea consiste en presentar diferentes tipos de fracciones, por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $2\frac{1}{2}$, luego solicitar a los alumnos que lo representen como ellos crean que se pueden representar (2). Así mismo la profesora al enunciar dicha actividad, expresa que atiende a sus **expectativas de aprendizaje** seleccionadas en su análisis cognitivo (3), por lo tanto, aunque la maestra no identifique en un primer momento el nombre como tal (**expectativa de aprendizaje**), logra identificar la relación existente con su tarea de enseñanza, de esta forma evidencia un **conocimiento del contenido y el estudiante**, puesto que referencia a

los contenidos esperados que aprendan los alumnos, teniendo presente el tipo de alumno y los conocimientos previos de los que parten.

Posteriormente en la actividad dos (4), se identifica **conocimiento del contenido y la enseñanza** y **análisis de contenido** en cuanto la profesora adecua los **sistemas de representación** empleados para enseñar matemáticas específicas, además se identifica **conocimiento del currículo**, ya que la adecuación atiende a las orientaciones del Plan y Programa de Estudios (2017), en este caso al uso de fracciones en la recta numérica. Así mismo, denota **conocimiento del contenido y los estudiantes** en relación con el **análisis cognitivo** en su **componente limitaciones de aprendizaje**, al plantear preguntas que le permite a la profesora visualizar las dificultades que los alumnos enfrentaron al trabajar con el contenido matemático.

Así mismo, evidencia el componente de **estructura conceptual** perteneciente al **análisis de contenido**, ya que la profesora trabaja el significado de relación parte - todo dentro de la recta numérica (4), Llinares & Sánchez (1988), afirman que cuando un *todo* continuo o discreto se divide en partes *congruentes*, equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de *objetos*. La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes que puede estar formado por varios *todos*.

Dentro de la actividad tres, **fenomenológicamente** la profesora trabaja en contextos matemáticos asociados a la vida diaria (5), en situaciones personales y educativas (6 y 7), es decir, parte de situaciones donde el alumno se desenvuelve tales como el hogar al hacer compras o con los amigos al jugar carreras, posteriormente retoma el trabajo en situaciones educativas (7 y 9), donde parte de las carreras para posteriormente pasar al uso de rectas numéricas (relación- parte todo).

Cuando la profesora habla acerca del nivel de complejidad (10) se observa **conocimiento del contenido y la enseñanza**, al pasar de una situación - problema a tareas que permiten reforzar los conceptos matemáticos trabajados, haciendo uso a su vez de la **estructura conceptual** del **análisis de contenido** cuando refuerza el concepto matemático (numerador, denominador, equivalencia, fracciones mixtas, fracciones propias e impropias), el significado de la fracción (relación parte-todo) y la representación que se trabaja en sexto grado de educación primaria (recta numérica) con base en el **conocimiento curricular** que la profesora posee.

Por último, la profesora expone como intención de sus tareas (11) explícitamente la diferenciación entre **sistemas representación** de las fracciones (geométrico - recta numérica), evidenciando **conocimiento del contenido y la**

enseñanza. Así como también diferenciar los conceptos matemáticos en cuanto a la *estructura conceptual* del análisis de contenido (numerador, denominador, equivalencia, fracciones mixtas, fracciones propias e impropias) y para finalizar, reitera *fenomenológicamente* los contextos matemáticos asociados a la vida diaria.

4.5.2 Episodio [7]. Unidad de servicio de apoyo a la educación regular (min 46:41 - 53:25)

Descripción del episodio 7			
[7.1]	1	P7	Hice un pequeño diseño de tareas, le puse como nombre fiesta de cumpleaños, porque pues ya... ia ver vamos a trabajar con lo que es que la fiesta de cumpleaños! Y otra de las actividades: ordenar tarjetas con números de fracciones con diferente denominador.
[7.2]	2	P7	Los aspectos a favorecer con este diseño de tareas: análisis de esos procedimientos, cómo él está resolviéndolo, hasta dónde lo está entendiendo, qué es necesario que yo como maestro pues pueda poner a que él, qué si los demás alumnos ya lo entendieron, pues a lo mejor a él todavía me regreso a cortar la hojita y saber que hay que fraccionarlo para que lo entienda.
[7.3]	3	P7	¿Qué recursos en esta actividad se proponen? pues son tarjetas con diferente denominador...
	4	P7	¡Digo! Tarjetas escribiendo las fracciones, por poner un ejemplo: un tercio, un quinto, etc. Material impreso que también pues nos sirve de mucha ayuda, ya ahorita hay muchos materiales que vienen exclusivos: ¡Trabajar fracciones! Pues eso lo hizo usted ¿verdad profe? en un cuadernillo (observa al maestro que anteriormente explicó sobre el cuadernillo de fracciones), pues ellos ya van identificándolo y viene ahí en su cuadernillo de referencia.

	5	P7	Tipo como lo hacía la maestra con lo de las formulas, se remiten a esa actividad y pues ya para ellos es un referente que a la hora que lo tengan que poner en práctica, ia pues es lo que ya trabajamos como cuadernillo de fracciones!
	6	P7	Ese material impreso pues nos va a servir siempre de aliado porque va recortado, va a poner en juego otras tareas.
	7	P7	Este... hojas de máquina, puede ser que el pastel sea a manera dibujado, o si por ejemplo ayer que fue día del niño, hasta podríamos trabajarlo ¿no?: ¿a ver cómo lo vamos a cortar? Primero a la mitad y luego así (hace ademanes de cortar un pastel de forma horizontal y vertical) podríamos poner en práctica eso, la pizza, naranjas, trabajarlo con el coctel de frutas por ejemplo.
[7.4]	8	P7	Descripción de la actividad: primero pues la lluvia de ideas con los conceptos. ¿A ver qué vamos a trabajar?
	9	P7	Este, ejemplificar, construcción y enriquecimientos de conceptos en un grupo.
	10	P7	Yo me doy cuenta que todos los niños, como que quieren participar, siempre hay uno que: iyo, yo, yo!, pero también como que dándole la oportunidad a los más callados se les va a quedar más el hecho de que ellos estén externando lo que piensan, aunque se equivoquen, pero en la medida que son más activos, de que: ia bueno no nada más como maestro yo estoy hablando, sino que también le doy oportunidad a los niños! claro a veces que se exceden y todo el tiempo están hablando pues tampoco, hay que tener como que esa parte en la que participen de manera que les sea significativo, cuando ellos lo expresan, pues también a veces nosotros cuando nos equivocamos se nos queda más que como que ese rodaje: yo dije esta parte pero pues también parte del error nos ayuda ir construyendo un mejor aprendizaje. Por eso es que pues, el enriquecimiento de

			conceptos entre todos.
[7.5]	11	P7	Reforzar con los videos, porque también a veces pasa que de repente estemos también nada más nosotros hablando y un video que sirva de referencia como de Daniel Carreón, a mí me parece que siempre explica de una manera muy sencilla y pues sí, así como que los niños lo pueden captar muy rápido, y tiene temas de todo.
[7.6]	12	P7	Reflexionar y comparar con los conceptos que se crearon: en el video, pues los que ellos tenían.
	13	P7	Hacer esa comparación, les digo que como es parte de decir: ¡a bueno, este si me equivoqué!, pero no para evidenciarlo, sino que eso va a invitar al niño decir: pues se vale, el maestro también se equivoca. Entonces, eso nos va a ayudar a enriquecerlo.
[7.7]	14	P	Trabajar con memoramas la representación geométrica. Pues eso también es parte de que con lo lúdico, trabajar con lo lúdico, reforzar actividades: sacar una carta y que los niños lo representen en el pizarrón.
	15	P	Es parte, como que uno dice: ¡ide aquí a que pasen todos! Pero también ellos están esperando, es más lo vemos nosotros como docentes, cuando ya sabemos que seguimos, que nos va a tocar el momento de pasar al frente, pues de todas formas ya te implica que tienes que poner en práctica o en juego, diferentes capacidades.
	16	P	Entonces al momento de que: ¡a bueno te voy a pasar una carta y tú anótala! Saben hasta los niños más tímidos o los niños que son de USAER y que casi no participan, en el momento de que, ¡como puedan pasen!, ya es parte de sentirse integrados en el grupo.

[7.8]	17	P	Identificar mediante la actividad de la fiesta de cumpleaños, en la que se plantea una situación de su vida cotidiana.
	18	P	Se dice cuántos invitados hay, si hay un pastel o dos pasteles, cómo los van a repartir, de cuánto les va a tocar, lo mismo se puede hacer con la pizza y a partir de ahí poder ver si hay números equivalentes, pero así como decía el maestro Alberto, de manera más visual, para que tengan esa: no nada más que los números y que hagan el algoritmo, sino que de manera visual sepan porque lo están haciendo.
	19	P	Se puede trabajar la actividad con comida real o dibujarlo, recortarlo o con plastilina.
[7.9]	20	P	Con las tarjetas repartidas al azar se solicita a 8 alumnos al frente para hacer 2 equipos de cuatro, se darán diferentes consignas acomodarse de mayor a menor: ese es para trabajar como venía ahí en el aprendizaje esperado, que pudiera trabajar equivalencias
	21	P	Entonces se les da una tarjeta al azar y si hay dos equipos, por ejemplo: hay dos equipos con ocho alumnos cada uno ¿qué tarjeta te tocó? ¿Cómo te podrías acomodar tú? si tú eres un medio y tú eres un cuarto ¿de mayor a menor o cuáles serían los iguales? También les serviría como juego estarse acomodando, y ya entre los dos equipos analizar: a ver ¿Quién se acomodó bien? O ¿cuál no? Y ya tener un punto para cada alumno.

El episodio comienza con la presentación del nombre de las actividades (1). Continúa con los aspectos a favorecer con sus actividades planteadas (2), dentro de esta parte se observa el dominio conocimiento didáctico del contenido en su subdominio **conocimiento del contenido y el estudiante** estrechamente vinculado con el análisis de instrucción, dado que expresa si la situación que se planteará al alumno es razonable para su nivel educativo y adecuada a sus capacidades, además toma en cuenta el análisis cognitivo que realizó en la fase anterior (tabla 12) al hacerse preguntas para vencer las dificultades que podrían presentar los alumnos al trabajar con el contenido matemático. Esto mismo se relaciona con

los componentes **expectativas de aprendizaje y limitaciones de aprendizaje**, ya que al considerarlas las posibles dificultades le permite al profesor tener tareas alternas que le ayuden a conseguir sus expectativas de aprendizaje, en este caso -cortar la hojita y saber que hay que fraccionarlo- (2).

Se identifica *conocimiento del contenido y su enseñanza* en la lluvia de ideas respecto a los conceptos de fracciones, ejemplificaciones y construcción que se considera que los alumnos han trabajado anteriormente (8), esto se vincula directamente con *resolución de problemas y modelización*, puesto que parte de la **intencionalidad** de suministrar un contexto en el cual se pretende trabajar con ideas introducidas previamente y su **funcionalidad** consiste en conocer los aprendizajes previos de los alumnos.

También se encuentra *conocimiento del contenido y la enseñanza* cuando el profesor emplea diferentes recursos que le permiten trabajar el tema de fracciones, tales como tarjetas con fracciones de diferente denominador, cuadernillo de fracciones con su representación, material impreso recortable, memorama, pizza, fruta, plastilina y videos (3, 5, 6, 7, 11, 14, 18, 20 y 21), estos materiales le permiten al profesor la *resolución de problemas y la modelización* para trabajar con el tema de fracciones.

Además *fenomenológicamente*, se consideran contextos matemáticos en situaciones personales como la repartición de pasteles, pizza, fruta, entre otros (17, 18 y 19), y en medios educativos, por ejemplo haciendo uso de diferentes significados de las fracciones relación parte – todo, medición, y reparto en las situaciones planteadas (18, 20 y 21).

Los *sistemas de representación* parten del análisis de contenido y se vinculan directamente con el *conocimiento del contenido y su enseñanza*, lo identificamos con la variedad de sistemas de representación que el profesor emplea en su selección y diseño de tareas, en este caso: representación verbal, cuando el profesor expresa verbalmente las fracciones y espera que los alumnos logren representarla en el pizarrón; manipulativo, cuando la maestra utiliza el cuadernillo como referente para identificar las fracciones; y geométrico, al solicitar a los alumnos que representen la fracción que aparece en la tarjeta que les proporciona en el pizarrón (4 y 7).

La última tarea seleccionada o diseñada por la profesora, consiste en repartir tarjetas al azar y solicitar a 8 alumnos pasar al frente para hacer 2 equipos, una vez formados los equipos, se darán diferentes consignas como acomodarse de mayor a menor y viceversa, posteriormente analizar cuáles son equivalentes, y a su vez, que los alumnos de manera grupal analicen y expresen porque están acomodados de tal manera (21). Esta última actividad contempla

tareas compatibles con el análisis de cognitivo y se vincula directamente con el *conocimiento del contenido y su enseñanza*, ya que contribuye a detectar y diagnosticar *errores* en los significados que el alumno atribuye a las fracciones, aportando al grado en que la tarea diseñada permita adquirir o reforzar el *concepto de fracciones* (análisis de instrucción y de contenido).

En cuanto al subdominio *conocimiento del currículo*, la profesora selecciona el aprendizaje esperado (tabla 12) del Plan y programa de estudios (2017), mismo que representa el eje de la tarea diseñada o seleccionada para trabajar con los alumnos (que los alumnos se familiaricen con la escritura numérica de fracciones, así como con diferentes *representaciones* de medios, cuartos y octavos), este subdominio se relaciona con el componente *estructura conceptual*, del análisis de contenido, conformado por el conocimiento personal, con las estructuras matemáticas con las que se piensa y engloba los procedimientos y formas de actuar o ejecutar tareas matemáticas.

CONCLUSIONES

El conocimiento didáctico del contenido que el profesor de matemáticas posee al diseñar su tarea de enseñanza, repercute directamente en el impacto educativo y el rendimiento escolar, bajo esta premisa declarada, es imprescindible favorecer experiencias de aprendizaje profesional que brinden a los maestros oportunidades para mejorar su comprensión del conocimiento didáctico del contenido para la selección y diseño de tareas de enseñanza, en consecuencia mejorar la organización sistemática de su práctica docente.

En este sentido, el objetivo de este trabajo de investigación es diseñar un taller de formación continua que favorezca los conocimientos didácticos del contenido para el tema de fracciones en profesores de educación primaria. Para realizarlo, se consideró la fase de profundización del Análisis Didáctico como el instrumento teórico-metodológico para diseñar el taller de formación continua (Gómez, 2002, 2007, 2008; Lupiañez, 2009, 2010; Rico, 2013), y el modelo teórico Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) para identificar los conocimientos didácticos del contenido a enseñar (Ball et al., 2008).

4.6 Conclusiones de la etapa de diseño del taller

El diseño del taller comenzó con asumir un rol de investigador, realizando cada uno de los análisis que conforman la fase de profundización del Análisis Didáctico respecto al tema de fracciones en educación primaria con base en el Plan y Programa de Estudios (2017), estos resultados fueron las bases que permitieron el diseño del taller de formación continua y fueron utilizados como referente para identificar los conocimientos didácticos del contenido que el profesor pone en juego a la hora de seleccionar y diseñar tareas de enseñanza.

Por lo tanto, la propuesta de la fase de profundización del Análisis Didáctico fue pertinente para diseñar un taller de formación continua, pues cada uno de los componentes del Análisis Didáctico, permitieron tener consideraciones a la hora de diseñar el taller y en consecuencia evidenciar no solamente los conocimientos didácticos del contenido que los profesores emplean en el diseño de una clase escolar para el tema de fracciones, sino aquellos que desarrolla a través de las actividades propuestas en el taller de formación continua una vez implementado.

En la primera fase, acerca del análisis de contenido, el taller proporcionó las bases necesarias para profundizar en significados y usos de las fracciones en educación primaria, identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos, establecer los sistemas de representación asociados al tema de fracciones e identificar los fenómenos que le dan sentido (o

que se asocian con el fenómeno elegido), los contextos fenomenológicos y las subestructuras matemáticas respectivas que organizan estos fenómenos.

En la segunda fase, respecto al análisis cognitivo, el taller brindó la oportunidad de identificar ideas cognitivas sobre el aprendizaje de los contenidos matemáticos, ayudó a enlistar expectativas de aprendizaje sobre el contenido matemático de fracciones (con base en el Plan y Programa de Estudios y libro para el maestro), identificar dificultades y errores en el tema de fracciones con base en su experiencia del grado escolar que atienden y relacionar las capacidades, competencias, habilidades, dificultades y errores para la construcción de demandas cognitivas.

Por último, en la fase tres referente al análisis de instrucción, el taller hizo uso de los dos análisis previos, análisis de contenido y cognitivo, para llevar a los profesores a diseñar o seleccionar tareas de enseñanza para el tema de fracciones con fundamentos, para posteriormente analizar y justificar la coherencia en el diseño y selección de tareas de enseñanza para el tema de fracciones.

4.7 Conclusiones de la etapa de implementación del taller

4.7.1 Análisis de contenido

La implementación del taller comenzó con atender cada uno de los componentes del análisis de contenido: *estructura conceptual*, *sistemas de representación* y *fenomenología*. Bajo este orden de ideas, los profesores cumplieron con los objetivos del taller en esta primera fase, pues identificaron, organizaron y seleccionaron los significados de los conceptos y procedimientos del tema de fracciones con recursos escolares, a través de la recopilación, estructuración y clasificación relativa al tema matemático de fracciones según los componentes del análisis de contenido. Además, determinaron y relacionaron los contenidos y procedimientos vinculados al tema de fracciones con base en su grado escolar.

Dentro del componente *estructura conceptual*, los profesores a través del taller de formación continua, organizaron la estructura conceptual del tema matemático de fracciones con base en su grado escolar, para ello, hicieron uso del Plan y Programa de Estudios (2017), el libro para el maestro y el libro para el alumno, sirviendo como referente para profundizar, reforzar y recordar el contenido de fracciones con base en su grado escolar.

En **1° y 2°** grado de educación primaria, destacó en el componente *estructura conceptual* lo siguiente:

Conocimiento Conceptual:

- a) Hechos
 - Agrupar
 - Desagrupar
 - Reparto
 - Unidades, decenas, centenas y unidades de millar
 - Repartir
 - Partir
- b) Conceptos
 - Problemas de reparto

Conocimiento Procedimental:

- a) Destrezas
 - Resuelve problemas de reparto.
- b) Razonamiento
 - Deductivo.
 - Comparar cantidades.
- c) Estrategias
 - Utilizar de manera flexible la estimación.

En **3° y 4°** grado de educación primaria destacó:

Conocimiento Conceptual:

- a) Hechos
 - a) Términos
 - Dividir en partes iguales.
 - Medio, cuarto y octavo.
 - Reparto.
 - b) Notaciones
 - Fracciones de la forma:*
 - n/m
 - $\frac{a}{b}$
 - c) Convenios
 - Numerador/denominador (a/b)
 - d) Resultados
 - Suma de fracciones con mismo denominador o suma de fracciones homogéneas.
 - Suma de diferente denominador.
- b) Conceptos:
 - Problemas de reparto.

- c) Estructuras conceptuales:
- a/b representa una división algebraica, por lo que el divisor debe ser distinto de cero ($b \neq 0$).

Conocimiento Procedimental:

- a) Destrezas
- Ordena fracciones con denominadores múltiplos.
 - Resuelve problemas de suma y resta con fracciones del mismo denominador (medios, cuartos, octavos, hasta doceavos).
 - Resuelve problemas de suma y resta con fracciones de diferente denominador (medios, cuartos, octavos, hasta doceavos).
- b) Razonamiento
- Deductivo: Interpretar geoméricamente la expresión que plantea un problema.
 - Figurativo: uso de representaciones geométricas.
- c) Estrategias
- Utilizar de manera flexible la estimación
 - Resolver problemas en diversos contextos.
 - Uso de diferentes sistemas de representación.

En **5° y 6°** grado de educación primaria y la **Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular** destacó:

Conocimiento Conceptual:

- a) *Hechos*
- Términos
 - *Fracciones*
 - *Denominador*
 - *Numerador*
 - *Medida*
 - *Reparto*
 - *Equivalencia*
 - *Dividir en partes iguales*
 - *Fracciones impropias y mixtas*
 - Notaciones
 - *Fracciones de la forma:*
 - n/m
 - $\frac{a}{b}$
 - $a/b = a \div b$
 - $\frac{m}{2^n}$

- *Equivalencias básicas:*

- $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $\frac{4}{4} = 1$
- $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

- *Fracciones mixtas:*

- $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

- *Convenios*
 - Numerador/denominador (a/b)
 - Razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
- *Resultados.*
 - Suma de diferente denominador (Uso de mínimo común múltiplo)
 - Técnicas de Multiplicación y división de fracciones

b) *Conceptos:*

- Problemas de reparto
- Aplicación en Proporcionalidad
- Aplicación en Porcentajes

c) *Estructuras conceptuales:*

- a/b representa una división algebraica, por lo que el divisor debe ser distinto de cero (b ≠ 0).

Conocimiento Procedimental.

a) *Destrezas:*

- Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
- Ordena fracciones con denominadores múltiplos.
- Resuelve problemas de suma y resta con fracciones de diferente denominador (medios, cuartos, octavos, hasta doceavos).
- Lee, escribe y ordena números fraccionarios de diferente denominador.
- Reconoce y construye fracciones equivalentes.

b) *Razonamientos:*

- Deductivo: Interpretar geoméricamente la expresión que plantea un problema.
- Analógico: demostrar equivalencia entre la representación algebraica (simbólica) y geométrica.
- Figurativo: uso de representaciones geométricas.
- Comprobar en problemas de variación la aplicación de proporcionalidad y porcentajes.

c) Estrategias:

- Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números fraccionarios.
- Resolver problemas en diversos contextos.
- Uso de diferentes sistemas de representación.

En el componente *sistemas de representación*, al ser la fracción un contenido complejo con base en la prueba del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes - PLANEA (2018), los profesores lograron identificar los diferentes sistemas de representación que apoyan la enseñanza de las fracciones dentro del grado escolar que atienden, no obstante, los profesores consideran aún más importante continuar trabajando con representaciones que consideran dominar más, en este caso, sistema de representación numérico, pictórico, simbólico, geométrico y manipulativo, como se describió en el capítulo 5 resultados.

Luego de la fase uno del taller implementado, se puede asumir que los profesores comienzan a preocuparse por identificar las diferencias de los distintos sistemas de representación que se trabajan en su grado escolar, además de identificar a que significado de la fracción se atribuye con base en Linares y Sánchez (1988), por ejemplo:

- Los profesores de **primer y segundo** grado trabajan con problemas de reparto, al solicitar agrupar y desagrupar cantidades para formar decenas, centenas y millares, de esta forma trabajan la relación parte-todo, pues es una manera, entre otras, de concebir la fracción. Se trata de una unidad o un todo que se divide en partes iguales.
- En **3° y 4°** grado los profesores dentro de sus actividades sugirieron la suma de fracciones con igual o diferente denominador, de esta forma trabajan con el significado de la fracción como operador, puesto que hace actuar a la fracción sobre una parte, un grupo o número como transformador logrando cambiar de un determinado estado inicial.
- En **5° y 6° grado**, los profesores trabajan con fracciones mixtas y la ubicación de fracciones en la recta numérica, de esta forma los profesores trabajan el significado de la relación parte-todo como medida, donde la fracción es interpretada como la asignación de un número a la medida de una cantidad de magnitud.
- Por último la **Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular** destaca en sus actividades las fracciones equivalentes, por lo que trabaja la fracción como razón, ya que parte de la comparación entre dos cantidades o conjunto de unidades (de igual o diferente magnitud) para integrar el concepto de fracciones equivalentes.

Por último, con lo que respecta al componente *fenomenología*, los profesores tienden a contextualizar el contenido matemático en situaciones de la vida cotidiana y en situaciones educativas, una vez revisados previamente con base en el libro del alumno, por ejemplo:

- En **1° grado**, el profesor hizo referencia a identificar los conceptos trabajados dentro de diferentes contextos de la vida cotidiana y en situaciones educativas, pues las tareas solicitadas se encuentran dentro del salón de clases, no obstante la tarea parte del mundo real, de una variedad de tareas para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas.
- En **2° grado**, la profesora evidenció el componente de fenomenología cuando el contexto que plantea es matemático en situaciones educativas, pues solicita a los alumnos realizar conteos en agrupaciones, por ejemplo de diez en diez hasta llegar a doscientos cincuenta.
- En **3° grado**, el profesor sugirió tareas asociadas a situaciones personales, ya que hace relación a actividades diarias de los alumnos (compartir lonches), y la formulación del problema parte del contexto inmediato del alumno para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas o en el que practicar ideas introducidas previamente.
- En **4° grado**, hizo mención sobre sus actividades asociados a la vida diaria del alumno.
- En **5° grado**, la profesora trabaja en contextos matemáticos asociados a la vida diaria, en situaciones personales y educativas, es decir, parte de situaciones donde el alumno se desenvuelve tales como el hogar al hacer compras o con los amigos al jugar carreas, posteriormente retoma el trabajo en situaciones educativas, donde parte de las carreras para posteriormente pasar al uso de rectas numéricas (relación–parte todo).
- En cuanto a la **Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular**, consideró contextos matemáticos en situaciones personales como la repartición de pasteles, pizza, fruta, entre otros, y en medios educativos, por ejemplo haciendo uso de diferentes significados de las fracciones relación parte – todo, medición, y reparto.

4.7.2 Análisis cognitivo

El análisis cognitivo, perteneciente a la segunda fase del taller de formación continua, ayudó a los profesores a recopilar, estructurar y clasificar información relativa al tema matemático de fracciones según diferentes herramientas (expectativas, errores, dificultades, etc.), a identificar y caracterizar los fines que persiguen el Plan y Programas de Estudio (2017) para el tema de fracciones con base en su grado escolar, a diseñar y seleccionar tareas matemáticas de acuerdo

a contenidos específicos de su grado escolar, a determinadas expectativas de aprendizaje y a las dificultades encontradas, además de ayudar a valorar la organización y el contenido de diferentes libros de texto, destacando potencialidades y carencias.

En este sentido, a través de la revisión de documentos oficiales, los profesores seleccionaron un aprendizaje esperado para el contenido de fracciones y enmarcaron las *expectativas de aprendizaje*, vistas como el planteamiento de objetivos específicos al momento de diseñar o seleccionar tareas de enseñanza, por ejemplo:

- En **1° grado** el profesor seleccionó como expectativa de aprendizaje, que los alumnos agrupen y desagrupen cantidades de distintas maneras utilizando objetos que representen decenas y unidades.
- En **2° grado**, que los alumnos interpreten números escritos y formen colecciones con cantidades de objetos a partir de agrupamientos en decenas y centenas.
- En **3° grado** destacan las expectativas de aprendizaje de que los alumnos comprenda y compare diferentes fracciones (equivalentes) y que los alumnos que sumen y resten fracciones con igual denominador.
- En **4° grado**, que los alumnos se apropien y comprendan el concepto de fracción; y maneje, represente y solucione problemas que implique el uso de fracciones.
- En **5° grado** que los alumnos sepan la representación de las fracciones; realicen las diferentes sumas de fracciones con diferente denominador; determinen que el denominador es las partes en que se divide el entero; y sepan el procedimiento de la suma para llegar a un resultado satisfactorio de la fracción.
- En **6° grado**, que los alumnos reconozcan las características de las fracciones en la recta numérica en diversas situaciones de la vida diaria; y que identifiquen y expresen con claridad los diferentes tipos de fracciones.
- La **Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular**, que los alumnos tengan un acercamiento al estudio formal de las fracciones; conozcan la escritura y el significado de los números fraccionarios; que identifiquen y expresen las fracciones en diferentes contextos en los que se desenvuelven; poner en práctica el uso de fracciones de manera oral y escrita.

Como parte del segundo componente, *limitaciones de aprendizaje*, los profesores a través de la experiencia docente y la revisión bibliográfica de documentos oficiales (Plan y programa de estudios y libro para el maestro),

seleccionaron las dificultades y errores que consideran tienen los alumnos en el aprendizaje del contenido de fracciones, en este caso destacó:

- En **1° grado**, la apropiación del sentido numérico, habilidades de conteo y agrupación.
- En **2° grado**, dificultad en comprender que los agrupamientos son equivalentes, conviene demostrar con grupos de objetos concretos.
- En **3° grado**, que los alumnos no comprenden el tamaño de una fracción y creen que si una fracción tiene un denominador más grande es más grande que una con denominador más pequeño, ejemplo:
 - $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$
- En **4° grado**, comprensión del concepto de fracción y la representación de diferentes fracciones.
- En **5° grado**, que los alumnos no reconocen los números fraccionarios (equivalentes y fracciones mixtas); no reconocer que el denominador representa las partes en que se divide el entero; no saber la característica de este tipo de operación fraccionaria (suma y resta con diferente denominador); no saber cómo se lee la fracción que se obtuvo como resultado.
- En **6° grado**, que los alumnos no reconocen las fracciones en la recta numérica; no reconocen las características de la fracción, su valor en situaciones de la vida diaria; y se les dificulta emplear el algoritmo para sumar y restar fracciones.
- La **Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular**, la consolidación de procesos de primeras etapas; la maduración de los alumnos, poca estimulación; manejo de operaciones básicas; identificar las fracciones en la representación geométrica y en mayor medida en la representación numérica; distinguir los conceptos de fracción, numerador, denominador; fracciones equivalentes; y distinguir que un número mayor en denominador es menor en fracción.

Por último, los profesores relacionaron el aprendizaje esperado, expectativas de aprendizaje y las dificultades y errores para la construcción de demandas cognitivas. Cabe considerar que en este componente existieron varias discrepancias, ya que algunos profesores no lograron discernir cómo construir una demanda cognitiva, esto en el sentido de que las tareas cuya función cognitiva no se centró en proporcionar un contexto en el cual se proponen determinadas actuaciones a los alumnos mediante el uso de una o varias herramientas matemáticas, y a su vez, las demandas construidas no ejemplificaron o mostraron la diversidad de actuaciones que pueden considerarse en relación y bajo el enunciado de un determinado objetivo matemático, por lo

tanto no cumplieron con ser una demanda cognitiva. No obstante, cinco profesores si logran comprender y diseñar demandas cognitivas:

No cumple como demanda cognitiva:

- **1° grado:**
 - Aplicar—plantear situaciones en las que apliquen lo aprendido para movilizar el conocimiento.
 - Comprender—mediante preguntas, ejemplos y discusiones, mostrar lo que lograron comprender.
 - Crear—adaptar actividades en base a la información para replantear el trabajo del contenido.
- **5° grado:**
 - Que se comprenda lo que el docente de a conocer; tomando en cuenta el conocimiento previo del alumno.
 - Seleccione las fracciones y redactar los problemas en los que tome en cuenta la suma de fracciones.
 - Que aplique e identifique el resultado de una suma de fracciones con diferente denominador.
 - Evalúe por medio de una explicación breve sobre lo que aprendió y trabajarlo cotidiana mente.

Sí cumple como demanda cognitiva:

- **2° grado:**
 - Manipular material concreto para agrupar los números naturales hasta 1000.
 - Clasificar y comparar números naturales hasta 1000, donde los alumnos asimilarán, pondrán en práctica lo aprendido y tendrán la capacidad de explicar el procedimiento por el cual obtuvieron el resultado.
- **3° grado:**
 - Compare las diferentes representaciones de las fracciones y figuras a dividir.
 - Comprenda cual es más grande por medio de figuras y sus repartos.
 - Clasifique figuras que se encuentren divididas en las mismas fracciones y compare cual representa una mayor parte del entero.
 - Argumente por qué es mayor una fracción que otra.
- **4° grado:**
 - Definir individualmente el concepto de fracción, buscar información del concepto en diccionario, internet, o cualquier otra fuente de información.
- **6° grado:**

- Reconocer las fracciones en diferentes situaciones y contextos (hechos, términos y definiciones).
 - Analizar a través de la descripción las características de las fracciones en la recta numérica.
 - Reflexionar por medio de la comparación para llegar a una definición de los elementos que implican las fracciones en la recta numérica.
 - Clasificar las diferentes representaciones de las fracciones.
 - Comprensión después de analizar y reflexionar sobre las fracciones el alumno será capaz de apropiarse del algoritmo convencional.
 - Emplear diferentes procedimientos para relacionar las fracciones con las unidades de medida.
- **USAER:**
 - Reconocer situaciones, hechos términos y definiciones. Identificar en distintos contextos los números fraccionarios
 - Describir las fracciones al tener que representarlas gráficamente. Clasificar de manera gráfica y numérica la representación de fracciones.
 - Comparación de expresiones escritas y el significado de números fracciones.
 - Emplea procedimientos para relacionar las fracciones con diferentes unidades de medida
 - Analiza la resolución de problemas para señalar de acuerdo con la cantidad que se indica con diferentes elementos.

Como parte de las conclusiones de lo descrito anteriormente, dentro del análisis cognitivo, cabe mencionar que durante todo el proceso dentro de la implementación de taller, para la selección o diseño de tareas de enseñanza, se tuvo en consideración dichas expectativas de aprendizaje, limitaciones y demandas cognitivas, no obstante se considera importante investigar en qué grado la selección o diseño de tareas de enseñanza, atienden directamente a cada uno de los componentes expresados.

4.7.3 Análisis de instrucción

Dentro de esta fase del taller, los profesores lograron modificar, diseñar o seleccionar tareas de enseñanza para el tema de fracciones con base en su grado escolar, llegando a argumentar y justificar la coherencia en el diseño y selección de tareas de enseñanza para el tema de fracciones que motiven y promuevan el aprendizaje de todos sus estudiantes, lo anterior basado en los análisis de las fases previas, análisis de contenido y cognitivo. Con vista en lo anterior destacan las siguientes tareas que atienden a la relación del Análisis Didáctico y los

subdominios del conocimiento didáctico del contenido con base en Rojas et al., (2013):

Conocimiento del contenido y los estudiantes – Análisis de instrucción

Cuando la profesora de segundo grado expresó los diferentes estilos de aprendizaje de sus alumnos: visuales, auditivos, quinestésicos, y con base en ello, adecua la tarea de enseñanza, está atendiendo a:

- El grado en que las tareas planteadas sean adecuadas al nivel escolar y cognitivo de los alumnos y;
- la variedad de las tareas planteadas en relación con la diversidad del alumnado.

Conocimiento del contenido y la enseñanza – Análisis de instrucción

Cuando los profesores de los diferentes grados diseñaron o seleccionaron tareas de enseñanza para el tema de fracciones en función de las expectativas de aprendizaje, limitaciones y demandas cognitivas, se cubre:

- La adecuación de las tareas propuestas para cada objetivo.

Al solicitar a los alumnos en sexto grado que representen como ellos crean que se pueden representar las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $2\frac{1}{2}$, se trabaja con:

- La variedad de sistemas de representación que se emplean en las tareas planteadas.

De igual forma, cuando la tarea seleccionada o diseñada por la profesora de la USAER, que consiste en repartir tarjetas al azar y solicitar a 8 alumnos pasar al frente para hacer 2 equipos, una vez formados los equipos, dar diferentes consignas como acomodarse de mayor a menor y viceversa, posteriormente analizar cuáles son equivalentes, y a su vez, que los alumnos de manera grupal analicen y expresen porque están acomodados de tal manera, se trabaja:

- El grado en que las tareas planteadas permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos.

La estructura que los profesores eligieron para la secuencia de actividades que seleccionaron o diseñaron, permite evidenciar que:

- El profesor dispone de un esquema de instrucción (comienza con un ejemplo, presenta los contenidos, da ocasión para que actúen los alumnos, etc.)

Así mismo, cuando la profesora de segundo grado expone el nivel de complejidad que considera para sus tareas, y en consecuencia solicitar a sus alumnos repartir material de igual cantidad para todos sus compañeros, prevalece la **adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje que se intuyen**, en este caso, el alumno comienza a dotar de significado en cuanto la relación parte-todo, puesto que destaca la acción de pensar que cantidad de material tiene, en cuantas partes tiene fraccionar la cantidad de material para ajustar a darle a todos sus compañeros y cuánto material le toca a cada uno.

Conocimiento del contenido y la enseñanza – Análisis de instrucción

Las tareas seleccionadas o diseñadas por los profesores parten de documentos oficiales como el Plan y Programas de Estudio (2017), libro para el maestro y el libro para el alumno, por lo tanto se atiende:

- El grado en que las tareas enunciadas se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en los documentos oficiales o en las indicaciones curriculares de diversas fuentes del currículo en educación matemática (estándares curriculares, currículo nacional, pruebas PISA, etc.)

Por último, cuando el profesor emplea materiales y recursos que le permitirán adecuar tareas para reforzar conocimientos en los alumnos, y al utilizar la comparación en material concreto para que los alumnos logren identificar la diferencia de tamaños entre fracciones, el profesor de primer grado atiende a:

- La adecuación entre el uso que se hace de materiales y recursos didácticos, y las orientaciones metodológicas estipuladas en documentos oficiales de base.

4.8 Conclusiones sobre los objetivos de investigación

En este apartado detallamos el grado y modo en que se cumplieron los objetivos específicos del problema de investigación, teniendo en cuenta como objetivo general "Diseñar un taller de formación continua haciendo uso de la fase de profundización del Análisis Didáctico que favorezca los conocimientos didácticos del contenido al seleccionar o diseñar tareas para la enseñanza del tema de fracciones en profesores de educación primaria". Para lograrlo, se sugirieron cuatro objetivos específicos:

1. Realizar una propuesta de análisis de contenido y cognitivo para el tema de fracciones como antecedente para la propuesta de tareas que conformarán el taller de formación continua.
2. Promover el diseño de tareas de enseñanza para el tema de fracciones a través del taller de formación continua dirigido a profesores del nivel primaria.

En el capítulo 4, quedan cumplidos los objetivos uno y dos, pues describe el proceso que se llevó a cabo para el diseño del taller, presentado en dos momentos: en el primero, se presentan los resultados de cada uno de los análisis que conforman la fase de profundización del Análisis Didáctico respecto al tema de fracciones en educación primaria, estos resultados fueron concebidos por el investigador, fueron las bases que permitieron el diseño del taller de formación continua y fueron utilizados como referente para identificar los conocimientos didácticos del contenido que el profesor pone en juego a la hora de seleccionar y diseñar tareas de enseñanza. Posteriormente en el segundo momento, se muestra la estructura y diseño del taller de formación continua.

3. Describir la forma en que los profesores aplican los elementos del Análisis Didáctico (contenido y cognitivo) al diseñar tareas de enseñanza.
4. Identificar los conocimientos didácticos del contenido que se favorecen, al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel primaria a través del taller realizado.

En el capítulo 5, se cubre el objetivo tres y cuatro, ya que se presenta y describe los resultados divididos en tres apartados, correspondientes a las fases formativas del taller de formación continua centrado en la fase de profundización del Análisis Didáctico para el tema de fracciones. En el primer apartado: Fase formativa 1. Construcción del análisis de contenido, se describe el análisis de contenido desarrollado por los profesores durante el taller, llegando a organizar y seleccionar los significados del concepto de fracción en educación primaria con base en los componentes del análisis de contenido, esto en atención al objetivo particular número cuatro de la presente investigación.

En esta fase formativa 1, referente al *análisis de contenido*, destaca el vínculo entre el *conocimiento del currículo* en relación con el componente estructura conceptual del *análisis de contenido*, en tanto el profesor organizó y seleccionó el contenido de fracciones con base en documentos oficiales, en este caso, el Plan y Programa de Estudios (2007), el libro para el maestro y el libro para el alumno.

En el segundo apartado, fase formativa 2. Análisis cognitivo: Identificación y selección de expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas con base en la experiencia y el grado escolar que se

atiende, donde el foco de interés reside en describir la forma en que los profesores aplican los elementos del análisis cognitivo al diseñar tareas de enseñanza, con el cual se cubre el objetivo particular número cuatro.

Dentro de esta fase formativa 2, referente al *análisis cognitivo*, se identificó que los profesores a través del taller, evidenciaron *conocimiento del contenido y los estudiantes* estrechamente relacionado con el *análisis cognitivo* en sus componentes expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y demandas cognitivas, toda vez que los profesores seleccionaron a través de su experiencia profesional y revisión bibliográfica, demandas cognitivas que permiten superar las expectativas seleccionadas y las limitaciones que consideran sobre el contenido de fracciones en relación con el aprendizaje de sus alumnos.

Por último, el tercer apartado, fase formativa 3. Conocimientos didácticos del contenido que se favorecen al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel primaria, a través del taller realizado con base en la fase de profundización del Análisis Didáctico. Donde se identifican los conocimientos didácticos del contenido que se favorecieron, al diseñar o seleccionar tareas de enseñanza en el tema de fracciones para el nivel de primaria a través del taller realizado, objetivo particular cinco.

En la fase formativa 3, referente al análisis de instrucción, se evidenció como el *análisis de contenido* y el *análisis cognitivo*, se ubicaron dentro de las tareas de enseñanza que los profesores seleccionaron o diseñaron para el tema de fracciones, además de vincular el *conocimiento del contenido y la enseñanza* con los componentes: sistemas de representación del *análisis de contenido*; expectativas de aprendizaje del *análisis cognitivo*; y adecuación, complejidad y resolución de problemas y modelización del *análisis de instrucción*.

REFLEXIONES

Siendo el objetivo de este trabajo de investigación diseñar un taller de formación continua que favorezca los conocimientos didácticos del contenido para el tema de fracciones en profesores de educación primaria. Se consideró para su realización la fase de profundización del Análisis Didáctico como el instrumento teórico-metodológico para diseñar el taller de formación continua, y el modelo teórico Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) para identificar los conocimientos didácticos del contenido a enseñar.

A través de dicho diseño y su implementación, logré visualizar que la propuesta de la fase de profundización del Análisis Didáctico en vinculación con el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza, permite no solo identificar los conocimientos didácticos del contenido que los profesores emplean en el diseño o selección de tareas de enseñanza, sino promoverlos a través de las actividades planeadas en el taller.

No obstante, considero que aún falta un trabajo más específico y con mayor tiempo en su empleo, esto con la intención de dejar conocimientos más claros, precisos y durables, que puedan ser aplicados y mejorados constantemente de forma autónoma. Como investigador comencé a visualizar los alcances que tiene ambos referentes teóricos, y consiente de qué ambos siguen en constante evolución, es indispensable continuar analizando sus especificidades para pulir cada vez más un taller que favorezca en gran medida el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Como formador de profesores no solo identifique las áreas de oportunidad en la educación matemática dentro de mi escuela, sino que logré fijar problemáticas mismas del taller de formación continua que se podrán trabajar con mayor precisión. Por ejemplo, las limitantes del tiempo dedicadas a cada sesión y los contratiempos que surgen dentro del taller, obstaculizaron en gran medida la continuidad de las ideas y conocimientos que los profesores van infiriendo y deduciendo, por ello, es de gran importancia considerar que entre más horas de contacto continuo para el desarrollo profesional serán más positivos los resultados (Guskey y Yoon, 2009 como se citó en Heck et al., 2019).

Otra limitante de gran importancia, es la profundidad con la que trabajé cada sesión dedicada a los análisis, es decir, mientras mayor sea la claridad, conexión y coherencia entre las actividades planteadas y las desarrolladas de cada componente, pertenecientes a al análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, mayor será su comprensión para favorecer la profundización del contenido Matemático, su enseñanza y su aprendizaje.

No obstante, como primer acercamiento a un diseño e implementación de un taller de formación continua, logré desarrollar habilidades de enseñanza matemática, mismas que desde mi función como Asesor Técnico Directivo podré mejorar y llevar a cabo de manera formal a instituciones educativas a mi cargo.

En este sentido, considerar el Análisis Didáctico como un procedimiento de planificación para los profesores, también me permitió organizar la actividad de enseñanza en relación al tema matemático de fracciones en educación primaria, para estructurar el saber desde tres ámbitos, desde la matemática, desde la enseñanza y desde su aprendizaje.

Esto quiere decir, que el análisis de contenido y cognitivo dentro del taller, me permitieron favorecer el diseño o selección de tareas de enseñanza, al brindar a los profesores criterios para llevar a cabo modificaciones en las tareas seleccionadas o diseñadas, hasta concluir con el análisis de instrucción, consiguiendo organizar la información en un mapa de posibilidades de formación y disponer de un marco de conocimiento de referencia relativo al contenido matemático, su enseñanza y aprendizaje. En consecuencia logré favorecer los conocimientos didácticos del contenido al seleccionar o diseñar tareas para la enseñanza del tema de fracciones en profesores de educación primaria.

Este tipo de actividades de reflexión y análisis me ayudó a profundizar la comprensión de los objetos y procesos de significación matemáticos en el contexto de la didáctica, que a su vez coadyuvan en mi formación continua como profesor a través de prácticas observables que me permite propiciar la evolución de estos saberes didácticos del contenido de forma fundamentada y sistemática.

En consideración a lo anterior y con base en nuestra pregunta de investigación, ¿cuál sería una propuesta de taller para la formación continua, haciendo uso de la fase de profundización del Análisis Didáctico, que favorezca los conocimientos didácticos del contenido al seleccionar o diseñar tareas para la enseñanza del tema de fracciones en profesores de educación primaria? se puede concluir que un taller con duración adecuada, con una secuencia profunda para cada componente del Análisis Didáctico y con una caracterización específica entre el vínculo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza-Análisis Didáctico, permitirá favorecer en mayor medida conocimientos didácticos del contenido para seleccionar o diseñar tareas de enseñanza para el tema de fracciones en profesores de educación primaria.

REFERENCIAS

- Aguayo, C. (2019). *El análisis didáctico en la formación inicial de maestros de Primaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. DIGIBUG: Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/54625>.
- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 22-60.
- Ball, D, Thames, M, & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Cañadas, M., Gómez, P. y Pinzon, A. (2018). Análisis de contenido. En Gómez, P. (Ed.) *Colombia: Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Ediciones Uniandes.
- Gallardo, J. y González, J. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En M. Bolea, M. Moreno, M. González (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 57-78). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses. <http://funes.uniandes.edu.co/1289/>
- Gallardo, J., González, J. L., y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración: Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(3), 355-382.
- Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista Ema*, 7(3), 251-292.
- Gómez, P. (2017). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, 7(17), 471-498.

- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Dialnet. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1335>
- Gonzalez, J., y Eudave, D. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de los profesores. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (54), 25-45.
- Heck, D. J., Plumley, C. L., Stylianou, D. A., Smith, A. A., & Moffett, G. (2019). Scaling up innovative learning in mathematics: exploring the effect of different professional development approaches on teacher knowledge, beliefs, and instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 102(3), 319-342.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista L. (2014). Metodología de la Investigación. *Editorial McGraw Hill*.
- Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The elementary school journal*, 105(1), 11-30.
- Hincapié, C. P. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional un Biblioteca Digital. <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/9252/43701138.2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación-INEE. (2018). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA)*. México: Autor.
- König, J., Blömeke, S., Jentsch, A., Schlesinger, L., née Nehls, C. F., Musekamp, F., & Kaiser, G. (2021). The links between pedagogical competence, instructional quality, and mathematics achievement in the lower secondary classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 107(1), 189-212.
- Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Funes Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática. <http://funes.uniandes.edu.co/798/>

- Lupiáñez, J., y Rico L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Lupiáñez, L., y Rico, L. (2010). Objetivos y competencias en el aprendizaje de los números naturales. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática*, 54, 14-30. <http://funes.uniandes.edu.co/1755/1/Art%C3%ADculoUNO.pdf>
- Molina, M., Castro, E., Molina, J., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, (29)1, 75-88.
- Obando, G., Vanegas, M., y Vásquez, N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos*. Módulo 1. Universidad de Antioquia
- Obando, G., y Múnera, J. (2003). Las situaciones Problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y Pedagogía*. 15(35).
- Rico, L. & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L., Lupiáñez, & M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*, (pp. 1-23). Granada, España: Editorial Comares, S.L.
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para Educación Secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 15-38.
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L., Lupiáñez, & M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*, (pp. 1-23). Granada, España: Editorial Comares, S.L.
- Rojas, N. y Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 17-28). Universidad de Granada.

- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Funes Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática. <http://funes.uniandes.edu.co/6428/>
- Rojas, N., Flores, P., y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, Formación de profesores e Innovación curricular* (pp. 191-210). Comares.
- Ruíz, J., y Fernández, J. (2013). Planificación de unidades didácticas en enseñanza secundaria mediante el uso de Análisis Didáctico. En L. Rico, J.L., Lupiañez, & M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*, (pp. 231-251). Granada, España: Editorial Comares, S.L.
- Sánchez, E., Hoyos, V., y López, G. (2011). Sentido numérico y pensamiento algebraico. En G. Galicia (Ed.), *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas* (pp. 37-48). México: Autor
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares: Casos y perspectivas*. México: Autor
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. México: Autor
- Secretaría de Educación Pública. (2019a). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado*. México: Argentina28.
- Secretaría de Educación Pública. (2019b). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Segundo grado*. México: Argentina28.
- Secretaría de Educación Pública. (2019c). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado*. México: Argentina28.
- Secretaría de Educación Pública. (2019d). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado*. México: Argentina28.
- Secretaría de Educación Pública. (2019e). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado*. México: Argentina28.

Secretaría de Educación Pública. (2019f). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado*. México: Argentina28.

Simón, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 122-133.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Villalta, M. (2009). Análisis de la conversación: Una propuesta para el estudio de la interacción didáctica en sala de clase. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 35(1), 221-238.

Villalta, M. (2009). Análisis de la conversación: Una propuesta para el estudio de la interacción didáctica en sala de clase. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, (35)1, 221-238.