UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

SIGNIFICADOS DE LOS NÚMEROS DECIMALES PRESENTES EN LOS LIBROS DE MATEMÁTICAS DE 4°, 5° Y 6° DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN MÉXICO

Tesis para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

Julianne del Carmen Escobar Alvarado

Directoras de tesis:

Dra. Darly Alina Kú Euán

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

Zacatecas, Zac. Diciembre de 2024

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
por el apoyo económico brindado mediante la
beca con número de registro de CVU 1008198,
para la realización de mis estudios de Maestría.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 25 del mes de septiembre del año 2024, el (la) que suscribe Julianne del Carmen Escobar Alvarado alumno(a) del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria, con número de matrícula 39206964; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado titulado "Los significados de los números decimales presentes en los desafíos de los libros de textos de matemáticas de educación primaria en México " bajo la dirección de la Dra. Darly Alina Kú Euán y la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Julianne del Carmen Escobar Alvarado

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "Significados de los números decimales presentes en los desafíos de los libros de texto de matemáticas de educación primaria en México" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Julianne del Carmen Escobar Alvarado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

ATENTAMENTE:

Zacatecas, Zac., a 29 viernes de noviembre del 2024

Dra. Darly Alina Kú Euán

Dra. Judith Alejandra Henández Sánchez

Dedicatoria

Dedico está investigación a los sueños de July niña que hoy está cumpliendo, al espíritu de investigadora que tuvo desde pequeña y que nunca desertó. Por cumplir su sueño de estudiar en una Universidad Autónoma.

Dedico esta investigación a July docente la cual está cumpliendo sus sueños y metas poco a poco, por su esmero, paciencia, dedicación y vocación para enseñar matemáticas en el nivel de secundaria y dar todo para cambiar el pedacito de mundo que le tocó.

Dedico esta investigación a mis estudiantes que fueron parte del proceso y por los cuales decidí empezar este proyecto. Con ellos sigo aprendiendo y cada vez me abren más espacios para la investigación en la matemática educativa.

Dedico esta tesis a mi Mamá, a mi tía Maty, a mi Tía Cuca, a Neyna y la inigualable maestra Chonita que me inspiraron para incurrir en el mundo de la investigación, así como a las mujeres matemáticas e investigadoras impulsoras de esta actividad.

Dedico esta tesis a mi hermano Arturo por ser la persona que siempre está conmigo, por llevarme a Zacatecas la veces que fueran necesarias y por dejar de hacer su cosas por hacer las mías.

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Darly Kú por su humanismo, paciencia y perseverancia para terminar la investigación.

Agradezco a la Dra. Judith Hernández por sus recomendaciones y aportación a la investigación.

Agradezco a la MC. Nancy Calvillo por la accesibilidad y facilidades que me dio para poder cursar la maestría en la ciudad de Zacatecas.

Agradezco a mis compañeros por enriquecer mi conocimiento y hacer divertido e inolvidable el grado de maestría.

Agradezco a mi familia por el apoyo brindado en el primer semestre de maestría, por la perseverancia de viajar cada fin de semana para que yo pudiera estudiar en otro estado.

ÍNDICE

Índice de figuras

Elemento **Página**

Índice de tablas

Elemento **Página**

RESUMEN

Esta investigación tiene como finalidad analizar los libros de texto gratuitos de matemáticas de cuarto, quinto y sexto año correspondientes al plan de estudios 2011 del nivel primaria en México. El libro de texto se considera una de las herramientas de enseñanza y aprendizaje más utilizadas por los profesores y estudiantes en educación primaria y con mayor riqueza de actividades. Por tanto, el objetivo de esta investigación es describir los significados de los números decimales que se promueven en los desafíos de los libros de texto de matemáticas en la educación primaria en México propuestos en el 2011. Se eligió este tema porque revisando la literatura en matemática educativa se percató que no hay investigaciones que describan los significados de los números decimales, en su mayoría las investigaciones están enfocadas en dar tratamiento a las dificultades sobre el tema a través de secuencias didácticas y han dejado de lado las investigaciones sobre el análisis de libros y en particular de los significados del tema. Así mismo dado que el concepto de número decimal es multifacético y que es cuasi-invisible en el currículum de estudio en México, se consideró importante investigar qué aspectos conceptuales se están enseñando en la educación primaria. Para realizar la investigación, se utilizó como enfoque teórico, la noción de significado y su estructura interna, esta consiste en identificar la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología. Para la identificación de los significados en los libros de texto para el contenido matemático escolar de los números decimales se usó como método el análisis de contenido. A la conclusión que se llegó fue que los significados de los números decimales encontrados estuvieron enfocados al campo procedimental más que al campo conceptual, se usaron diferentes sistemas de representación como fueron, la representación numérica en fracción decimal y números con punto, la representación simbólica, la representación gráfica para simbolizar los números decimales y para dotar de sentido al contenido se usan los contextos matemático y extra-matemático en este último se encontraron contextos de la medida y el dinero, principalmente en situaciones escolares y públicas.

Palabras clave: significados, libros de texto de primaria, números decimales.

ABSTRACT

his research aims to analyze the free mathematics textbooks for fourth, fifth, and sixth grade corresponding to the 2011 curriculum in primary education in Mexico. The textbook is considered one of the most widely used teaching and learning tools by both teachers and students in primary education, and it offers the richest variety of activities. Therefore, the objective of this research is to describe the meanings of decimal numbers promoted in the challenges found in the mathematics textbooks for primary education in Mexico proposed in 2011. This topic was chosen because, upon reviewing the literature in mathematics education, it became apparent that there are no studies describing the meanings of decimal numbers. Most research focuses on addressing difficulties with the topic through didactic sequences, neglecting studies on textbook analysis and, in particular, the meanings of the topic. Additionally, given that the concept of decimal numbers is multifaceted and nearly invisible in the Mexican curriculum, it was considered important to investigate what conceptual aspects are being taught in primary education.

For the research, the theoretical approach used was the notion of meaning and its internal structure, which consists of identifying the conceptual structure, systems of representation, and phenomenology. To identify the meanings in the textbooks for the mathematical content of decimal numbers, content analysis was used as the method. The conclusion reached was that the meanings of decimal numbers found were more focused on the procedural field than on the conceptual field. Different systems of representation were used, such as decimal fraction and decimal point numerical representation, symbolic representation, and graphical representation to symbolize decimal numbers. In order to give meaning to the content, mathematical and extra-mathematical contexts were used, with the latter mainly focusing on measurement and money, particularly in school and public situations.

Keywords: meanings, primary school textbooks, decimal numbers.

INTRODUCCIÓN

La importancia de la comprensión de los números decimales es cada vez más demandante en la sociedad, esto debido a que la notación decimal se ha convertido en la forma más común de comunicar información matemática. La tecnología, ciencia y la sociedad demandan cada día más el uso de los números decimales, por tal motivo, se considera importante que los alumnos al término de su educación básica tengan una comprensión del tema de números decimales, esto debido a que es un contenido matemático con trascendencia y aplicabilidad en la vida diaria.

Al respecto Ávila (2008) pone de manifiesto que pese a la relevancia e importancia que tienen los números decimales en la vida del ser humano, en la educación primaria este contenido es cuasi-invisible. La autora se refiere al término cuasi-invisible a la enseñanza en la educación primaria carece de aspectos conceptuales que ayudan a la comprensión del tema. Por otro lado, Centeno (1997) describe que enseñar los significados de los números decimales es importante para lograr la comprensión del tema. Cabe enfatizar que el contenido de los números decimales tiene una multiplicidad de significados, por lo que es un contenido difícil de enseñar y comprender.

Las investigaciones que existen de números decimales generalmente están enfocadas a la creación de secuencias de aprendizaje que dan tratamiento a los obstáculos, errores y dificultades que hay en el tema, o bien, son propuestas que el investigador realizó para la enseñanza de números decimales. Sin embargo, en dichas investigaciones se dejó de lado la importancia de explorar los materiales que el docente usa para la enseñanza y aprendizaje del tema de números decimales, tal es el caso del libro de texto.

En México se utilizan los libros de texto gratuito en la educación primaria creados por la Secretaría de Educación Pública (SEP), estos libros tienen características que los hacen únicos. Celis (2011) menciona que los libros de texto son un componente fundamental de la educación básica en México y en la formación de los alumnos, así como un elemento indispensable para la transmisión del conocimiento por parte del docente, agrega que tienen tres características que los hacen fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje, estas son: la obligatoriedad, la unicidad y la gratuidad.

Considerando lo anterior, el objetivo general de esta investigación es describir los significados de los números decimales que se promueven en los desafíos de los libros de texto gratuito de matemáticas en la educación primaria en México. Cabe destacar que los desafíos matemáticos ‘‘son secuencias de situaciones problemáticas que demandan a docentes y alumnos la utilización de las herramientas matemáticas que se quiere aprendan”. (SEP, 2014). En este sentido los libros de texto están elaborados en su totalidad por desafíos matemáticos los cuales están divididos por una o dos consignas según sea el caso de la intención didáctica que se pretende lograr en ese desafío matemático. Se centró la investigación en los desafíos porque son la fuente información más valiosa de los libros de texto donde se pueden obtener los significados de los números decimales, debido a que fueron elaborados para que los alumnos aprendieron conocimientos nuevos, rechazaron o enriquecieron los conocimientos adquiridos, de esta forma, ir construyendo su proceso cognitivo del concepto de número decimal, por tal razón se consideró importante describir qué significados hay en ellos, qué parte de la estructura conceptual y procedimental se potenció, qué representaciones de los números decimales se trabajan y bajo qué contexto se están proponiendo.

Es importante aclarar porque se trabaja con la reforma 2011 y con los libros de texto 2019. La reforma 2011, estuvo vigente durante los años de 2012 a 2017, En este último año, se propone una nueva reforma llamada Aprendizajes Clave la cual estuvo vigente entre los años de 2018 a 2022, periodo donde hubo cambio de gobierno en México y donde se elaboraron los libros de texto que se analizaron en esta investigación, así mismo, en ese lapso de tiempo se propone una nueva reforma llamada Nueva Escuela Mexicana (NEM). Cabe destacar que cuando se empezó este proceso de investigación no estaban los libros de texto de la NEM, y en la reforma 2017, únicamente se elaboraron libros para primero, segundo y tercer año de primaria. Los grados de cuarto, quinto y sexto año se trabajó con los libros ya impresos de la reforma 2011, que fueron elaborados en 2019, mientras se elaboraban los libros de la NEM.

Aclarado el punto anterior, se describe el marco referencial con el cual se llevó a cabo la investigación fue la noción de significado de un concepto matemático propuesta por Rico (2012), en la cual, se describe que un objeto matemático toma significado a través de una tripleta de dimensiones, estas son: la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico. El enfoque metodológico con el que se trabajó fue bajo el paradigma interpretativo, siendo la investigación de corte cualitativo-descriptivo. Mientras que el método que se siguió fue el análisis de contenido (Bernete, 2013), este método se utilizó para describir los significados de los números decimales que fueron encontrados en los libros de texto de educación primaria en México.

A continuación se describen brevemente cada uno de los capítulos de la presente investigación.

En el capítulo uno se describen los antecedentes que dieron fundamentos para localizar el problema de investigación, estos antecedentes están descritos en tres subsecciones, en la primera de ellas se describen las investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de números decimales. En la segunda se describen los significados que se encontraron en las investigaciones de los números decimales. Finalmente en la tercera se describe la importancia del libro de texto gratuito en la educación primaria.

En el capítulo dos se muestra el planteamiento del problema, la problemática y el problema específico de la investigación. Así mismo se plantea la pregunta de investigación, el supuesto, el objetivo general y los objetivos específicos y por último se describen el alcance y la justificación de la investigación.

En el capítulo tres se describe el enfoque conceptual de la presente investigación, en torno al significado propuesto por Rico (2012), en la que se contempla la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico, por último se describe detalladamente cada uno de los elementos que componen estas dimensiones.

En el capítulo cuatro se describen los fundamentos metodológicos que se emplearon para llevar a cabo la investigación, en ellos describe el método de análisis de contenido y las técnicas propias de este método.

En el capítulo cinco se describe cómo está desarrollado el tema de números decimales en los programas de estudio de educación primaria en México del programa 2011. De acuerdo a ello, se muestra que en los grados de cuarto, quinto y sexto de primaria es donde se ve y se desarrolla el tema de números decimales, y que éste está dividido en diferentes aprendizajes esperados los cuales se pueden alcanzar por contenido, bloque o grado escolar.

Del capítulo seis al once se describe cada uno de los aprendizajes esperados que se vieron en educación primaria acerca de los números decimales. Estos capítulos están divididos en tres subsecciones, la primera de ellas describe la parte de cómo fue abordado el contenido de números decimales en el programa de estudio, en qué grados se vieron, qué bloques, cuántos desafíos son, cuántos contenidos, entre otras cosas. La segunda subsección describe la parte del marco referencial, es decir los significados encontrados en los distintos aprendizajes esperados que están normados por la noción de significado de un concepto matemático que propuso Rico (2012). Finalmente, en la tercera subsección se desarrolla la interpretación de los significados que hizo la investigadora con base en su experiencia como profesora y conocimientos.

En el capítulo doce se presentan las conclusiones de la investigación, que se centran en responder a la pregunta de investigación, así como la reflexión de mi práctica docente. Por último, se presenta la bibliografía que fue utilizada en esta investigación y los anexos que consisten en las fichas de recogida de datos de las cuales se obtuvieron los significados de los números decimales.

MOTIVACIÓN

Mi interés en la elaboración de esta tesis se derivó de mi experiencia como profesora de matemáticas en el nivel de secundaria. Por varios años consecutivos he tenido a mi cargo el grado de primer año, en este tiempo, noté un patrón en mis estudiantes, el cuál fue que no conocen los significados de los números decimales. Me empecé a cuestionar ¿qué pasa con mis alumnos que no entienden los números decimales? ¿Qué me hace falta para lograr en mis estudiantes la comprensión de los números decimales?, por ejemplo, en una ocasión estaba estimulando el cálculo mental con mis estudiantes usando números decimales; y yo pregunté, ¿qué número sigue en la siguiente sucesión?, 0.3, 0.6, 0.9… Aunque se leyeron correctamente (tres décimos, seis décimos, nueve décimos), esperaba como respuesta un entero con dos décimos, pero mis alumnos respondieron, doce décimos. El resultado era correcto, cuando anoté el número en el pizarrón (de esta forma 1.2) vi la cara de mis estudiantes inconformes con el resultado. Uno de ellos me dijo, maestra yo lo escribí así 0.12, le dije está mal porque lo que escribiste fue doce centésimos, este número es más pequeño que el primero de la sucesión, pero veía a mi alumno, y seguía sin comprender la respuesta. Otros alumnos lo habían escrito en forma de fracción $\frac{12}{10}$, lo cual era correcto, pero esto no me dejaba ver si mis estudiantes habían comprendido los números decimales o sólo una forma más de representación.

Derivado de esas experiencias, empecé a implementar tratamientos didácticos para erradicar los errores en los números decimales de los estudiantes, sin embargo, no logré dar con el foco de atención de los alumnos para solventar las rupturas de aprendizaje en los números decimales. Lo que me llevó a concluir que mis alumnos carecían de los significados de los números decimales, y que el aprendizaje de los estudiantes iba encaminado a entender los números decimales como números con un punto decimal, se reflejaba el aprendizaje basado en la escritura de estos números, pero no lograban comprender qué son, para qué sirven y cómo funcionan estos números. Analizando las respuestas de los estudiantes me di cuenta que tal vez, los errores iban ligados a la enseñanza recibida en educación primaria. Por esta razón vi la necesidad de saber de qué forma comprenden los números decimales en la educación primaria, de qué forma son enseñados. Revisando la literatura me di cuenta que una de las líneas de investigación poco analizadas en el tema de números decimales era el análisis de libros de texto, así que consideré a los libros de texto gratuito de cuarto, quinto y sexto año una fuente importante para conocer qué significados de los números decimales se están promoviendo en educación primaria en México.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

En este capítulo se presenta la descripción de los antecedentes de esta investigación, mismos que se dividen en tres secciones. En la primera sección se describen los principales problemas de la enseñanza y el aprendizaje que hay sobre los números decimales, así como el paso de los números decimales a través de las distintas reformas educativas que ha tenido México. En la segunda sección, se describen los significados que se le ha dado a los números decimales por diferentes autores, y en la sección tres se describe la importancia que tiene el libro de texto gratuito en la educación primaria. Por último se expone la problemática, el problema y la pregunta de investigación, así como la justificación y el alcance de esta investigación.

1.1 La enseñanza y el aprendizaje de los números decimales

En esta sección se describe primero, algunas dificultades, errores y obstáculos presentes en la enseñanza y aprendizaje en torno al tema de números decimales. Posteriormente, se exponen las investigaciones sobre la enseñanza de números decimales, donde se describe el diseño de propuestas didácticas que promueven el aprendizaje del tema. Finalmente se exponen algunas investigaciones que hacen referencia al conocimiento del profesor sobre el tema de los números decimales.

La enseñanza y aprendizaje de los números decimales es un tema que ha formado parte de distintas investigaciones desde hace más de cuarenta años en la didáctica de las matemáticas, los resultados de dichas investigaciones han dado a conocer los diferentes obstáculos, dificultades y errores que hay con respecto a su enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, uno de los obstáculos que tiene mayor impacto en el aprendizaje de los números decimales es el que menciona Brousseau (1983). Él afirma que el conocimiento de los números naturales constituye un obstáculo a la hora de comprender los números decimales, debido a las relaciones que los estudiantes establecen entre estos dos tipos de números como por ejemplo: el cero a la izquierda no tiene valor; un número con más cifras es mayor que otro; al multiplicar dos números siempre se obtiene un número mayor; y al dividir dos cifras se obtendrá un número más pequeño. Por lo tanto, esas ideas son generalizadas por los estudiantes cuando aprenden los números decimales, esto hace que ese conocimiento se vuelva persistente y difícil de modificar.

Así mismo en Centeno (1997) se menciona que los errores más frecuentes son los relacionados con los números decimales, estos errores se dividen en cuatro grupos: errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición; errores relacionados con el cero; errores relacionados con el orden entre decimales; y errores relacionados con las operaciones.

Por otra parte, en Ávila (2008) se analizaron los conocimientos y creencias sobre los números decimales de un grupo de 25 profesores de educación primaria, así como su vinculación con las reformas a las matemáticas de fin del siglo XX instrumentadas en México. En lo que respecta a la reestructuración que han tenido los libros de texto y el currículo de primaria en el tema de números decimales en las diferentes reformas educativas. Ella menciona que, en los currículos de la década de 1960, los decimales se introducían como una extensión de la escritura para los naturales, es decir, estudiar los decimales consistía en hacer hincapié en su escritura mediante los principios del sistema decimal de numeración y relevar el valor posicional de las cifras. En los currículos de la década de 1970 los libros de texto editados modifican la introducción de los decimales, en ellos se destaca su carácter racional y se señala que el sistema decimal de numeración permite representar valores menores que la unidad utilizando el punto, finalmente, en la reforma de 1993, especialmente en los libros de texto del año 2000 la Secretaría de Educación Pública intentó promover un trabajo conceptual sobre los decimales, asumiendo que los decimales se comprendan como números distintos de los naturales, con propiedades y funciones que los hacen característicos. De acuerdo a ello, Ávila (2008) afirma que los decimales se introducen haciendo énfasis en la escritura decimal, sin que se ponga suficiente atención en que estos números son distintos de los naturales y, por lo tanto, en que deben abordarse considerando su complejidad conceptual y su propio estatuto epistemológico (p.12).

Por otra parte, en lo referente al papel que juegan los profesores en la educación, Ávila (2008) menciona que "los profesores son considerados agentes relevantes en el éxito o fracaso en el aprendizaje de las matemáticas" (p. 14), es decir, el rol que ocupa el docente como transmisor de conocimientos es importante en la medida en que él, es quien decide qué es lo que va a enseñar y cómo lo va enseñar, en este proceso involucra sus conocimientos y creencias que tiene acerca del contenido matemático. En el caso específico de los números decimales, las creencias y conocimientos de los profesores evidencian que se sigue utilizando el enfoque nominalista y en la extensión de los números naturales sobre los números decimales. Este estudio muestra que hay limitados conocimientos en los profesores de primaria acerca del tema de números decimales.

Los resultados de Ávila (2008) arrojan que a pesar de la relevancia matemática y funcional de los decimales, estos números constituyen un contenido cuasi-invisible en la educación primaria, puesto que las preocupaciones y la acción docente predominante se sitúa en la escritura utilizando "el punto", minimizando y excluyendo la atención sobre los aspectos conceptuales de dichos números; se expone también que, entre los docentes, circulan limitados conocimientos matemáticos y didácticos sobre los decimales. Así, Ávila (2008) hizo hincapié en que se necesita actualizar al docente y dotarlo de materiales que apoyen su práctica docente.

Posteriormente Ávila (2013), analiza los conocimientos en construcción sobre los números decimales de un grupo de niños que cursan el sexto grado de primaria, cuya docente tenía una preparación especial en enseñanza de matemáticas. El interés de Ávila (2013) fue identificar los conocimientos sobre los números decimales que pueden construir los niños bajo un acercamiento conceptual al tema en una secuencia de aprendizaje. Refiriéndose al término conceptual como un acercamiento que destaca la naturaleza de los decimales como son: la relación de orden, la de equivalencia, la propiedad de densidad, los significados que subyacen a su representación decimal. Específicamente se indaga en los conocimientos de los números decimales que muestran los niños de sexto grado con desempeño académico destacado y cuya maestra ha favorecido un acercamiento conceptual a estos números.

Los resultados de Ávila (2013) arrojan que la profesora se apartó del enfoque nominalista (enfoque que se da en las escuelas primarias donde se cree que con saber leer correctamente los números decimales se llegan a comprenden en su totalidad) e introdujo aspectos de los números decimales como el orden, el concepto, la aplicación, la utilidad, la equivalencia, la posición y el valor posicional, la densidad (de los decimales en los decimales), y las distintas representaciones. Los tratamientos observados dejan ver que la acción docente reorientó a los aspectos conceptuales y no sólo a los procedimientos de los números decimales. De acuerdo a ello, se concluye que la enseñanza de la profesora de primaria con especialidad en matemáticas moldeó los trayectos hacia la comprensión de los decimales, la aproximación conceptual favoreció el acercamiento a la estructura de estos números.

De acuerdo con ello, Valencia (2014) realizó una secuencia de enseñanza a un grupo de sexto año de los números decimales basada en un diagnóstico de las dificultades de su comprensión. El objetivo de este trabajo fue identificar cuál es el avance en la comprensión de los alumnos de sexto grado de primaria sobre determinados significados de los números decimales como son: la comprensión de las escrituras con punto, equivalencia entre distinto orden de la parte fraccionaria de los números decimales, comparación y orden de los decimales, representaciones de los decimales, recta numérica como instrumento para acercarse a las propiedades de la densidad, el cálculo y las operaciones.

Valencia (2014) concluyó que dicha secuencia de aprendizaje mejoró la comprensión de los significados de los números decimales, ayudando a la propiedad de la densidad, a las diferentes representaciones y a comprender qué son los números decimales. Sin embargo no se logró erradicar en todos los estudiantes las dificultades que presentaron en el examen diagnóstico, persisten las ideas de: un milésimo es más grande que un décimo; los decimales no se pueden expresar en fracciones, en los alumnos está la creencia que para que un número sea decimal, debe tener el símbolo que lo caracteriza que es el punto decimal; sigue predominando en los estudiantes la idea que para ubicar el número 7.38, fue necesario ubicar el 0 en la recta numérica y posteriormente ubicar un entero dos enteros tres enteros etc., hasta llegar al séptimo entero y ahí empezar a marcar los décimos entre 7 y 8 para ubicar el 7.38. Aunado a esto, Valencia (2014) en su investigación menciona que en la reforma 2011 los estándares, propósitos y contenidos, van dirigidos a que los alumnos realicen operaciones de suma resta, multiplicación y división, de números decimales, dejando de lado los significados de estos números.

En la investigación de Valencia (2014) también se pone en evidencia que en la reforma 2011 hay una invisibilidad del contenido de los decimales, debido a que se enfocó en las operaciones básicas y no en comprender los aspectos conceptuales de los decimales. Derivado de la aportación que hace Valencia (2014) acerca de la reforma educativa 2011, vemos la necesidad de analizar los libros de texto gratuito de matemáticas de educación primaria en México, dado que el currículo con el que fueron elaborados no se enfoca en la comprensión de los aspectos conceptuales de los números decimales.

En ese mismo sentido se encuentra el trabajo realizado por Antero (2015), en el cual se diseña una situación didáctica para estudiantes de quinto grado de primaria en el estado de Guerrero, México. El objetivo de la situación didáctica fue construir la noción de número decimal a través de la relación entre la fracción decimal y su notación decimal. Para ello utilizó los aspectos teóricos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, y como marco metodológico la Ingeniería Didáctica propuesta por Artigue. La situación didáctica fue aplicada con 8 estudiantes (10 a 11 años) matriculados en quinto grado de una Escuela Primaria de Guerrero, México. En su estudio Antero (2015) concluye que si se puede lograr la construcción de la noción de número decimal a través de la relación entre la fracción y su notación decimal, sin embargo en sus resultados identificó algunos obstáculos cognitivos y didácticos, como por ejemplo, con respecto al obstáculo didáctico describe que para los estudiantes pasar de representar fracciones decimales como medidas de longitud a medidas sobre áreas constituye un proceso complejo para los alumnos, pues observó que cuando recurren a las representaciones realizadas sobre la recta numérica para determinar si una fracción es mayor o menor aun cuando están representadas en áreas, los estudiantes no responden. Esto se lo atribuyó al discurso matemático escolar, la autora describe que esto es debido a que escasamente se estudian fracciones decimales como medidas representadas sobre áreas. Y por otra parte menciona que es evidente que los estudiantes presentan dificultades relacionadas a la conceptualización de la fracción y sus equivalencias, es decir, no tienen clara la relación entre los décimos y los centésimos de una misma unidad, en ese caso no identifican que $\frac{3}{10}$ es igual a $\frac{30}{100}$. De esta manera Antero (2015) identificó que en gran parte es debido al discurso matemático escolar, a lo que describe que es sustentado por los libros de texto de matemáticas de primaria, puesto que da cuenta que en el sistema educativo mexicano y el estudio formal de estos números principia a partir de cuarto grado, mediante situaciones asociadas a la medición de longitudes y de repartos. De igual manera Antero (2015) concluye que debido a ello, los números decimales se asocian con otras nociones matemáticas, tal como la división, la fracción y el porcentaje, y que en la mayoría de los casos son vistos como objetos desligados, sin relación alguna.

Así mismo Salazar (2018) realiza un trabajo de investigación cuyo objetivo fue identificar los aportes y limitaciones de la incorporación de un recurso manipulativo y virtual en la ejecución de actividades con estudiantes de quinto grado con respecto a la enseñanza de los números decimales finitos. Para ello diseñó unas fichas de actividades enmarcadas bajo la enseñanza para la comprensión, estructuradas con cuatro ideas claves: tópicos generativos, meta de comprensión, desempeños de comprensión (exploración, indagación, síntesis) y evaluación continua, las cuales fueron aplicadas a un grupo de 16 estudiantes de quinto de primaria, sus edades oscilaban entre 10 y 12 años. Las actividades se aplicaron en distintos momentos dentro de las unidades de indagación (meta de comprensión y desempeños de comprensión), y posteriormente la autora los analizó bajo unos criterios que abarcan los errores, dificultades y obstáculos más frecuentes en la enseñanza de los decimales finitos. De acuerdo con ello concluye que los recursos manipulativos y virtuales favorecieron la representación de los números decimales finitos a partir de las fracciones decimales. Sin embargo, concluye que se encontraron dificultades con respecto a la identificación de la expresión decimal dada una representación gráfica en una cuadrícula, porque los estudiantes no tenían en cuenta el valor posicional para escribir el número que representa la parte coloreada según la gráfica dada. Y por otra parte estuvo presente el obstáculo relacionado con la densidad, la cual se abordó desde la representación en la recta numérica, sin embargo, no fue clara dicha representación para determinar que entre dos números decimales se pueden encontrar infinitos números decimales.

A modo de reflexión:

El número decimal, sin lugar a dudas, es un concepto que se ha estudiado hace más de 40 años (Brousseau, 1983; Centeno, 1997), sin embargo hay dificultades, errores y obstáculos que han sido persistentes a lo largo del tiempo, como se mostró Brousseau, 1983; Centeno, 1997; Ávila (2008), Ávila y García (2008).En ese sentido, se puede observar que la mayoría de los trabajos se centran en el diseño de propuestas didácticas que dan tratamiento al tema, y solo algunos de los trabajos abordan cómo se ha trabajado el número decimal en los planes y programas de estudio, en los libros de texto y en el currículum en general. Por ejemplo Ávila (2008) pone en evidencia que en la educación primaria el contenido de números decimales es un contenido cuasi-invisible, refiriéndose a este como un contenido al que no se le da la importancia que requiere en los planes y programas de estudios y que los docentes de primaria minimizan su enseñanza al enfoque nominalista debido a los limitados conocimientos que hay entorno a ellos.

La revisión de la literatura muestra el problema de los números decimales en la educación primaria en México, el cual fue: no se reconocen aspectos conceptuales de los números decimales que promuevan una comprensión del tema (Ávila, 2013). Por tanto, es necesario que en la educación primaria se reconozca los aspectos conceptuales de los números decimales, por ello la importancia de realizar estudios sobre los números decimales en los libros de texto, con el propósito de brindar información de cuáles son los aspectos conceptuales que se favorecen, y cuáles son los significados que están presentes en ellos.

1.2 Importancia del libro de texto de matemáticas en la educación primaria en México

Esta subsección tiene el objetivo de describir la importancia de los libros de texto de matemáticas de educación primaria en México para reconocer la función que cumplen en la enseñanza y aprendizaje. Para lograr esto, se describen investigaciones en torno al análisis de libros de texto, al valor que tiene éste en la educación primaria mexicana y al impacto que tienen estos en el aprendizaje de los alumnos y como herramienta de enseñanza utilizada por los docentes.

Con respecto al valor de analizar los libros de texto, Núñez (2004) describe que la importancia de analizar libros de texto es debido al impacto que tiene en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por esta razón, insiste en que el profesor debe analizar y evaluar el libro de texto que va a utilizar, para que desarrolle problemas y sepa reconocer sí la propuesta pedagógica reúne las condiciones esperadas para la enseñanza que él quiere dar y el aprendizaje que debe aprender el alumno. Asimismo Núñez (2004) considera importante que el estudio sobre análisis de libros de texto provee al profesor de primaria, elementos que le permiten reflexionar y analizar qué aspectos conceptuales se promueven en los libros y se plantee su propuesta de enseñanza con base en lo que vio en los libros y lo que quiere lograr en sus estudiantes. Así mismo esta autora recalca la organización, estructura y el sentido de la forma del libro de texto, de tal manera que permita al estudiante alcanzar el conocimiento deseado (Núñez, 2004).

Por otra parte en Konic et al. (2010), se describe que el libro de texto constituye uno de los referentes básicos para la organización de un proceso de enseñanza, consideran que debe ser objeto de revisión permanente para evaluar su pertinencia disciplinar y didáctica, identificar aspectos potencialmente conflictivos, y promover su adecuación a la labor de enseñanza y aprendizaje.

En cuanto a la importancia del libro de texto en la educación primaria mexicana, se describe el trabajo realizado por Celis (2011) en el que se manifiesta la importancia que tienen los libros de texto en la educación mexicana, la autora menciona que los libros de texto son un componente fundamental de la educación básica en México y en la formación de los alumnos, así como un elemento indispensable para la transmisión del conocimiento por parte del docente.

Asimismo Córdova (2012) considera al texto escolar como una herramienta fundamental para facilitar, potenciar y desarrollar los aprendizajes del alumno; y en el docente, apoya, orienta y delimita el proceso didáctico. En ese sentido, se coincide con Córdova (2012) en esta investigación, puesto que se concibe al libro de texto escolar como una herramienta fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que tiene gran poder en el aprendizaje del alumno potenciando y facilitando, y en el docente apoya en el proceso didáctico.

Este autor pone en relieve la importancia de la dirección de enseñanza y la exigencia cognitiva. Es decir describe que la dirección de la enseñanza marca el rumbo de las actividades que se proponen, definen en qué momento se deben poner, además clarifica las características que deben tomar en cuenta en ellas, ya que estas son primordiales para el diseño de un libro de texto. Así mismo, hace referencia a la exigencia cognitiva, aspecto que se refiere a la capacidad que tendrá el alumno para resolver los ejercicios del libro.

Por otra parte en el estudio realizado por Son y Diletti (2017) sobre ¿qué se puede aprender del análisis de libros de texto? Ellos describen que los libros de texto tienen el potencial de mostrar la forma en que se enseña y aprende matemáticas. En ese sentido mencionan que es importante que los docentes estén conscientes de lo que se pretende y lo que se presenta en los libros de texto para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, y por ello recalcan que el análisis de libros de texto es importante porque permite a los docentes, tener claridad con respecto a los contenidos que se presentan y del cómo se presentan o cómo se articulan para su enseñanza. Por otra parte, señalan que los investigadores deben tener claridad con respecto a los métodos científicos que se utilizan para el análisis de libros de texto, y que permitan avanzar en la comprensión del papel potencial que tienen en el currículum.

A modo de reflexión:

El libro de texto es una de las herramientas más utilizadas en la enseñanza y aprendizaje, por ello es considerado como un buen proveedor de actividades potenciadoras para la reflexión y análisis, tanto para el aprendizaje de los alumnos, como herramientas de enseñanza para docente y como un elemento para la investigación.

Aunado a lo anterior es importante resaltar la importancia que tiene el libro de texto gratuito en el nivel de primaria en México, debido que para muchos docentes, es su principal herramienta de la que obtienen sugerencias de cómo enseñar un tema matemático y también su principal proveedor del qué enseñar. Asimismo, para esta investigación se toma en cuenta sus tres características: obligatorios, gratuitos y únicos; con la intención de que esta investigación esté al alcance de cualquier docente que desee complementar la enseñanza en torno al tema de números decimales.

1.3 Significados de los números decimales

Esta sección tiene como fin presentar algunas referencias que describen los significados de los números decimales.

El término de significado se proporciona en cada referencia bajo posturas diferentes que no estuvieron descritas en ellas, por ejemplo Centeno (1997) menciona el término de significados, como los conocimientos que son necesarios para la comprensión de los números decimales. Por otra parte, Ávila y García (2008) mencionaron el significado como los aspectos conceptuales que ayudan a comprender el tema de los números decimales; en cambio, Linares y Sánchez (1997) mencionaron los significados de las fracciones que apoyan la comprensión del tema de números decimales, sin describir el significado de los números decimales. Sin embargo, en todos los casos la noción de significado se asocia a la comprensión de un contenido matemático escolar, por lo que la relación entre el significado y la comprensión de un contenido es estrecha. Descrito lo anterior, se percató que ninguna de las referencias anteriores describió la postura que tomaron en cuenta para la palabra significado. Finalmente en Konic *et al.* (2010) se describe la postura del enfoque ontosemiótico para adoptar el término de significados como un aprendizaje institucional y personal en los números decimales. Aclarado lo anterior, se describen los significados de los números decimales que se encontraron en cada una de las referencias anteriormente mencionadas.

Centeno (1997) publicó el libro de los decimales por qué y para qué. En ese libro, se describen los significados de los números decimales que son necesarios para la comprensión del tema.

Según la autora “los diferentes significados que puede tener el número decimal son: medida, razón de dos magnitudes, cociente de dos números, operador o aplicación lineal” (p.151). En el caso de esta investigación, se consideraron los significados propuestos por Centeno como significados de referencia.

Aunado a ello, la autora describe que para que estos significados sean comprendidos por los alumnos, es necesario tener conocimientos que apoyen la comprensión de los números decimales, estos son: números fraccionarios; números decimales y no decimales; fracciones decimales; relación del orden de los decimales; el uso del cero y su significado en la escritura; escrituras decimales equivalentes; la densidad de los decimales; adición, sustracción, multiplicación y división de números decimales; número decimal como factor de proporcionalidad; extensión natural del sistema de numeración decimal, estimación de medidas, porcentajes y escalas, lo que en el marco referencial de esta tesis es el campo conceptual.

Sin embargo estos aspectos conceptuales no funcionan solos, se necesita de una destreza del campo procedimental, Centeno (1997) menciona las siguientes destrezas: pasar de la escritura fraccionaria a los decimales y viceversa; establecer la equivalencia; ordenar números decimales, sumar, restar, multiplicar y dividir con números decimales; estimar medidas; usar el cero y darle significado en la escritura. Así mismo Centeno (1997) menciona las diferentes representaciones de los números decimales estas fueron: la recta numérica que es la representación gráfica, la representación figural de áreas de regiones de papel cuadriculado; la representación numérica de fracciones, tanto en su representación de fracción decimal y de número decimal.

Finalmente los contextos que se describen en Centeno (1997) favorecen la aplicación de los números decimales en diversas situaciones, por ejemplo, los contextos de longitudes; superficies; volúmenes; tiempo; fenómenos sociales, políticos y económicos; medida; razón de dos magnitudes; cociente de dos números; operador y aplicación lineal; proporcionalidad, escalas; y situaciones que permiten dar significado a la división de números decimales.

Por su parte Ávila y García (2008), en su libro de los decimales más que una escritura, la finalidad del libro fue contribuir a mejorar la enseñanza y los procesos de aprendizaje en la educación básica en México, centraron su atención en el tratamiento de temas y contenidos que, conforme a las pruebas nacionales e internacionales aplicadas por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), presentaron mayores dificultades para los alumnos de primaria y secundaria.

De esta manera, Ávila y García (2008) proponen una serie de actividades que hacen reflexionar al docente sobre aspectos conceptuales que son necesarios para la comprensión y aprendizaje de los números decimales. Tales aspectos, que dotan de significado al concepto de número decimal son: el orden de los decimales; los decimales más que una escritura; propiedad de la densidad de los números decimales; fracciones decimales; la equivalencia de los decimales; números decimales; fracciones no decimales; números irracionales; decimales finitos;

decimales periódicas ; expresiones decimales; división como fracción; y división como cociente.

Ávila y García (2008) mencionan que estos aspectos conceptuales son importantes para trabajar desde campo conceptual más que desde el campo procedimental. Sin embargo no dejaron fuera este campo y mencionaron algunos aspectos procedimentales necesarios para llevar a cabo los conceptuales, por ejemplo: comparar números decimales; sumar, restar, multiplicar y dividir con números decimales; hacer aproximaciones; expresar números decimales; expresar fracciones decimales; interpretar fracciones; construir la noción de equivalencia en fracciones y decimales; interpretar decimales; leer números decimales; e iluminar fracciones.

Dentro de estos aspectos conceptuales y procedimentales, Ávila y García (2008) mencionan las siguientes representaciones que tienen los números decimales: números que llevan punto; notación con punto decimal; fracciones decimales; fracciones no decimales; recta numérica; y la representación gráfica de las fracciones decimales. Los contextos en los que se puede trabajar los números decimales fueron: "áreas del conocimiento humano; son útiles en contextos de proporcionalidad como los porcentajes, conversiones de monedas, cálculo de costos, para expresar medidas, en la interpretación de información en tablas o gráficas, en la resolución de problemas químicos o físicos, etcétera" (Ávila y García, 2008, p. 29).

Así mismo Konic et al. (2010) describieron en su trabajo un análisis de una lección introductoria de números decimales de un texto de matemáticas para cuarto curso de primaria en España, con el objetivo de determinar el grado de adecuación del texto para la introducción de los números decimales en dicho nivel escolar. El propósito fue ilustrar un modo de análisis que permita identificar los contenidos tratados, tipos de problemas usados para introducir las nociones, representaciones, elementos conceptuales, procedimentales, propiedades y modos de argumentación, así como la presencia de posibles conflictos potenciales.

Konic et al. (2010) describe cómo el libro de texto introdujo a los alumnos a la noción de una décima y una centésima, y la utilidad que tiene, así mismo describieron qué es un número decimal. La forma de analizar la lección fue tomar datos del problema como objetos matemáticos, por ejemplo, conceptos, procedimientos, elementos de lenguaje, propiedades y argumentaciones usadas.

Los significados encontrados en la lección del libro de texto fueron enfocados al contexto de la medida, y en ella se destacaron los siguientes componentes del campo conceptual del número decimal: unidad de medida; estimación; expresiones fraccionarias; número decimal; comparación de números decimales; número racional; formas de escritura; equivalencia; fracción decimal; y valor posición. El campo procedimental se conforma de: medir; distinguir la parte entera y la parte decimal; determinar el valor que tome una cifra; leer números decimales; y comparar números decimales. Las distintas formas de representar a los números decimales fueron: número decimal, fracción decimal, representación gráfica de los números decimales. En las reflexiones finales de Konic et al. (2010) concluyeron que los libros de textos interpretaron, desarrollaron, aplicaron las orientaciones curriculares y tienen en cuenta las experiencias e investigaciones didácticas realizadas sobre los contenidos matemáticos abordados.

Las descripciones anteriores fueron los significados de los números decimales que se encontraron en diferentes referencias, en ellas, se mostró que hay significados de las fracciones implícitos en las números decimales que son necesarios describirlos, puesto que una parte muy importante para comprender el contenido de números decimales son las fracciones decimales. Por tal motivo, se describen los significados de las fracciones que ayuden a dotar de significado al contenido de números decimales.

Es importante aclarar porqué se decidió explorar los significados de las fracciones que ayudan comprender los números decimales y esto es debido a que Los significados de la relación parte-todo ayudaron a comprender lo que son las fracciones decimales, que estas a su vez, ayudaron a comprender la equivalencia de los números decimales en la representación de fracción decimal, la representación gráfica de las fracciones, la representación con punto de los decimales y la recta numérica. Tales representaciones dotarán de significado a la equivalencia, necesaria para comprender el concepto de número decimal y favorecieron a los significados del orden y comparación de los decimales, aproximándose así a la propiedad de la densidad y todos estos significados, ayudaron a comprender el valor posicional de los decimales, que fue necesario para resolver operaciones básicas con números decimales para dotarlas de sentido y significado. Por esta razón se consideró importante incluir los significados de las fracciones que les dieron sentido a las fracciones decimales.

La referencia que se eligió para obtener los significados de las fracciones fue en Linares y Sánchez (1997), debido a que guarda cierta similitud en la organización de la enseñanza de las fracciones con la enseñanza de los decimales propuesta por Centeno (1997). En Linares y Sánchez (1997), se describió que comprender el concepto de fracción con todas sus relaciones es un largo proceso, por ello, se requiere que la enseñanza de las fracciones contemple las diferentes perspectivas en las que pueden ser enseñadas las fracciones estas son, la relación parte-todo y la medida; las fracciones como cociente; la fracción como razón; y la fracción como operador. Dentro de cada una de ellas hay subcomponentes que abonan a los significados de los números decimales tal es el caso específico de la relación parte parte-todo.

Linares y Sánchez (1997) definieron a la relación parte-todo como la capacidad de dividir un todo en partes iguales, reconocer el todo, realizar divisiones congruentes y reconocer las partes del todo. Ante esta definición se obtuvieron los significados conceptuales de la relación parte-todo que son: división en partes iguales, el entero o unidad (el todo), divisiones congruentes, también llamadas divisiones equivalentes. El significado que podemos obtener en la parte procedimental sería la habilidad para dividir en partes iguales el entero.

Las representaciones que comúnmente se trabajan en la relación parte-todo fueron: la recta numérica, fracciones, las figuras geométricas principalmente el rectángulo que generalmente se trabajan en contextos continuos. Las representaciones que se trabajan en los contextos discontinuos son canicas, caramelos, esferas, la recta numérica, entre otras.

Estas fueron las referencias que se ocuparon para obtener los significados de los números decimales y de las fracciones que se relacionan con éstos. A continuación se estructuran los significados descritos anteriormente en tablas con el propósito de facilitar la lectura de estos. Las tablas siguientes están divididas por los significados de los números decimales y las fracciones que hubo en el campo conceptual, en el campo procedimental, en las diferentes representaciones y en los contextos.

En la tabla 1 se muestran el campo conceptual de los números decimales la fuente de elaboración fue propia tomado de la referencias de Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic *et al.* (2010).

Tabla 1 *Campo conceptual de los números decimales*

Campo conceptual de los números decimales	Centeno (1997)	Ávila y García (2008)	Konic *et al.* (2010)
Números decimales	x	x	x
Decimales finitos			x
Décimo	x	x	x
Centésimo	x	x	x
Milésimo	x	x	x
Relación del orden de los decimales	x		
Orden de los decimales		x	
Comparación de los números decimales		x	
El uso del cero y su significado en la escritura	x		
Los decimales más que una escritura		x	
Valor posición			x
Escrituras decimales equivalentes	x		
Equivalencia de los decimales		x	
La densidad de los decimales	x	x	
Número decimal como factor de proporcionalidad	x		
Extensión natural del sistema de numeración decimal	x		
Medida	x		
Unidad de medida			x
Estimación de medidas	x		x

Razón de dos magnitudes	x		
Cociente de dos números	x		
División como cociente		x	
División como fracción			x
Operador o aplicación lineal	x		
Adicción	x	x	
Sustracción	x	x	
Multiplicación	x	x	
División	x	x	
Escalas	x		
Porcentajes	x		
Números no decimales	x		
Expresiones decimales		x	
Decimales periódicas		x	
Números irracionales		x	
Fracciones decimales	x	x	x

Fuente de elaboración propia, basado en las diferentes literaturas de Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic (2010).

Así mismo en la tabla 2 se enlistó el campo procedimental de los números decimales, la fuente de elaboración fue propia tomado de la referencias de Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic *et al.* (2010).

Tabla 2*Campo procedimental de los números decimales*

Campo procedimental de los números decimales	**Centeno (1997)**	**Ávila y García (2008)**	**Konic *et al*. (2010)**
Pasar de la escritura fraccionaria a los decimales y viceversa	x		
Establecer la equivalencia entre fracciones y decimales	x		x
Construir la noción de equivalencia entre fracciones y decimales		x	
Ordenar números decimales	x	x	
Comparar números decimales		x	x

Sumar	x	x	
Restar	x	x	
Multiplicar	x	x	
Dividir	x	x	
Estimar medidas	x		
Hacer aproximaciones		x	
Usar el cero y darle significado en la escritura	x		
Determinar el valor que toma una cifra			x
Expresar números decimales		x	
Interpretar números decimales		x	
Leer números decimales		x	x
Medir			x
Distinguir la parte entera y la parte decimal			x

Fuente de elaboración propia, basado en las diferentes literaturas de Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic (2010).

De igual manera en la tabla 3 se muestran las representaciones de los números decimales, la fuente de elaboración fue propia tomado de la referencias de Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic *et al.* (2010).

Tabla 3 *Representaciones de los números decimales*

Representaciones de los números decimales	**Centeno (1997)**	**Ávila y García (2008)**	**Konic *et al.* (2010)**
Número decimal	x		
Números que llevan punto		x	
Número no decimal	x		x
Notación con punto decimal		x	
Fracciones decimales	x	x	x
Representación gráfica de los números decimales			x
Representación gráfica de las Fracciones decimales		x	
Áreas de regiones de papel cuadriculado	x		

Recta numérica	x	x	
Gráficas	x		

Fuente de elaboración propia, basado en las diferentes literaturas de Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic (2010).

Posterior a la tabla 3, se siguió con la tabla de los contextos en los que se trabajan los números decimales. La tabla 4 muestra los contextos empleados para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, la fuente de elaboración fue propia tomado de la referencias de Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic *et al.* (2010).

Tabla 4 *Contextos empleados para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales*

Contextos empleados para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales	**Centeno (1997)**	**Ávila y García (2008)**	**Konic *et al.* (2010)**
Longitudes	x		
Superficies	x		
Volúmenes	x		
Tiempo	x		
Fenómenos sociales, políticos y económicos	x		
Medida	x	x	x
Razón de dos magnitudes		x	
Cociente de dos números	x		
Operador y aplicación lineal	x		
Proporcionalidad	x	x	
Escalas	x		
Situaciones que permiten dar significado a la división de números decimales	x		
Áreas del conocimiento humano		x	
Interpretación de la información en tablas y Gráficas		x	
Resolución de problemas		x	

Fuente de elaboración propia, basado en las diferentes literaturas de Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic (2010).

Con la tabla 4, se concluye lo referente a los contextos de los números decimales. Sin embargo se considera importante describir los significados de las fracciones debido a que dotan de significado a los números decimales. En la tabla 5 se enlista el campo conceptual de las fracciones que permiten darle sentido y significado a la representación de números con punto decimal de los decimales y a las fracciones decimales, estas últimas son la transición entre las fracciones y los números decimales.

La tabla 5 fue de elaboración propia tomado de la referencias de Centeno (1997), Linares y Sánchez (1997), Ávila y García (2008) y Konic *et al.* (2010).

Tabla 5 *Campo conceptual de las fracciones*

Significados conceptuales de las fracciones	**Centeno (1997)**	**Ávila y García (2008)**	**Konic *et al.* (2010)**	**Linares y Sánchez (1997)**
Relación **parte**-todo				x
División en partes iguales				x
División congruentes				x
División equivalente				x
Fracciones decimales	x	x	x	x
Números fraccionarios	x			x
Expresiones fraccionarias			x	
Fracciones decimales con denominadores diferentes a una potencia de base 10		x		x
Fracciones no decimales		x		
Fracciones				x

Fuente de elaboración propia, basado en las diferentes literaturas de Centeno (1997), Linares y Sánchez (1997), Ávila y García (2008) y Konic (2010).

Posteriormente se presenta la tabla 6 sobre el campo procedimental de las fracciones que permiten darle significado a los números decimales.

La tabla 6 fue de elaboración propia tomado de las referencias de Linares y Sánchez (1997) y Ávila y García (2008).

Tabla 6 *Campo procedimental de las fracciones*

Significados procedimentales de las fracciones	Ávila y García (2008)	Linares y Sánchez (1997)
Expresar fracciones	x	
Dividir en partes iguales		x
Iluminar fracciones	x	

Fuente de elaboración propia, basado en las diferentes literaturas de Linares y Sánchez (1997) y Ávila y García (2008).

En la tabla 7 se presentan los significados de los sistemas de representación de las fracciones de las fracciones. En general las representaciones tanto de los números decimales y las fracciones fueron muy parecidas, la única que cambió fue la de expresar los números racionales, que en el caso de las fracciones, fue la representación en forma de fracción numerador y denominador y para el caso de números decimales fue la representación de número con punto.

La tabla 7 fue de elaboración propia tomado de la referencias de Centeno (1997), Linares y Sánchez (1997), Ávila y García (2008) y Konic *et al.* (2010).

Tabla 7 *Sistemas de representación de las fracciones*

Significados de los sistemas de representación de las fracciones	Centeno (1997)	Ávila y García (2008)	Konic *et al.* (2010)	Linares y Sánchez (1997)
Fracciones	x			x
Fracciones no decimales		x		
Fracciones decimales pero con denominador diferente a una potencia de base 10	x	x		
Representación gráfica de los números decimales			x	
Representación gráfica de las Fracciones decimales		x		
Áreas de regiones de papel cuadriculado	x			
Representación gráfica con figuras geométricas				x
Recta numérica	x	x		x

Canicas	x
Caramelos	x
Esferas	x

Fuente de elaboración propia, basado en las diferentes literaturas de Centeno (1997), Linares y Sánchez (1997), Ávila y García (2008) y Konic (2010).

Finalmente se presenta la tabla 8 con la descripción de los contextos en los que se han trabajado las fracciones. Estos fueron distintos a los contextos de los decimales, puesto que en los decimales los autores mostraron en los contextos sus aplicaciones, mismos que también se pueden trabajar con las fracciones.

La tabla 8 fue de elaboración propia tomado de la referencia de Linares y Sánchez (1997).

Tabla 8 *Contextos de las fracciones*

Significados de los contextos de las fracciones	**Linares y Sánchez (1997)**
Continuos	x
Discontinuos	x

Fuente de elaboración propia, basado en la literatura de Linares y Sánchez (1997).

Con esto último se concluyen las descripciones de los significados de los números decimales y fracciones, a continuación se muestra la reflexión de los significados de los números decimales que se enlistan en las tablas anteriores.

A modo de reflexión:

De acuerdo a los autores presentados en las tablas se puede destacar en el campo conceptual los significados que se potenciaron más fueron el concepto de número decimal, los términos de décimos, centésimos y milésimos, así como el término de equivalencia. Estos términos están ligados al concepto de números decimales y van ligados uno con otro. Así mismo se potencia el término de fracciones decimales que este fungirá como enlace entre los números decimales y fracciones decimales. De acuerdo al supuesto que se tiene se verá si en los libros de texto estos significados están presentes o están ausentes y que ha cambiado en los libros de texto con respecto a lo que dicen los autores.

Aunado a ello es importante destacar que los términos de suma, resta, multiplicación y división están presentes puesto que parte importante de aprender números decimales es saber operar y darles significado de acuerdo al contexto en el que sean utilizados. En cuanto al campo procedimental se potencian las destrezas aritméticas de: establecer la equivalencia entre las fracciones decimales y números decimales, las destrezas aritméticas de sumar, restar, multiplicar y dividir números decimales así como leer números decimales. Se espera encontrar estos significados en los libros de texto puesto que en se tiene la idea que en el libro de texto se potencia más la parte procedimental que la parte conceptual.

En cuanto a los sistemas de representación estuvieron presentes el de número decimal como representación de números con punto decimal y el de la representación de fracciones decimales. Se espera que en el libro de texto se pueda encontrar el significado de las fracciones decimales y que en él éste, se les del enfoque como enlace para establecer la equivalencia entre una representación y otra. Finalmente el contexto mayor potenciado es el de medida, generalmente los números decimales están muy ligados a este contexto, se espera encontrar al menos otros contextos donde se pueda obtener sentido y significado al número decimal.

En cuanto a las fracciones lo que se puede destacar es que los términos que se utilizan son fracciones decimales y no decimales, en el campo procedimental el término de dividir en partes iguales y los sistemas de representaciones numérica de fracciones decimales, recta numérica y representaciones gráficas significados que ayudarán a dotar de sentido a las fracciones decimales y estas a la vez establezcan la equivalencia entre la representación numérica de números con punto y fracciones decimales, así como a dimensionar el tamaño en la representación gráfica de la recta numérica o dividir en parte iguales una figura.

-10 -100 En el siguiente capítulo se explica el planteamiento del problema que surgió a raíz de los antecedentes presentados en esta sección.

CAPÍTULO 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se plantea la problemática, el problema y la pregunta de investigación, así como el supuesto que se tuvo a la respuesta de dicha pregunta. Así mismo, se describe el objetivo general, los objetivos específicos, la justificación de la investigación y su alcance.

2.1 Problemática

De acuerdo con la literatura revisada en Matemática Educativa, los números decimales han sido el foco de estudio de diversas investigaciones desde hace cuarenta años. En el capítulo I se muestran los tres aspectos que se describieron en Antero (2015) y que se consideraron fundamentales en las investigaciones relacionadas con el número decimal. El primero se relaciona con las ambigüedades que emergen al momento de definirlo como objeto matemático; el segundo se relaciona con las dificultades que se presentan en la educación básica para aprenderlos y el tercero se relaciona con las maneras en las que los profesores los enseñan. Derivado de estos tres aspectos la problemática principal que se encontró en los antecedentes fue que siguen estando ausentes los aspectos conceptuales de los números decimales en el currículo y en la enseñanza y aprendizaje.

Por tal motivo surge el interés de indagar sobre los significados que le dan sentido y comprensión al tópico matemático de números decimales. En las investigaciones presentadas en los antecedentes dan un mayor peso a averiguar el rol de los significados conceptuales que a los procedimentales. Sin embargo, como describen diversos autores (Centeno, 1997; Valencia, 2014 y; Ávila y García, 2008), en la enseñanza se le da más peso a los aspectos procedimentales que a los conceptuales.

2.2 Problema

En el nivel de primaria en México los números decimales siguen siendo un contenido cuasi-invisible tal como lo plantea Ávila (2008). Esta aseveración, hizo que se llevará a reflexión la siguiente pregunta ¿este contenido sigue siendo cuasi-invisible en los libros de texto de educación primaria elaborados con el plan de estudio 2011?, siendo éste uno de los tópicos matemáticos más utilizados en la vida real para realizar cálculos. Así mismo, la literatura muestra que un problema que sigue latente es la integración de los aspectos conceptuales de los números decimales en la educación primaria en México y esto, dificulta el poder entenderlos y enseñarlos (Ávila, 2013).

Por tal motivo, se tomó como referente a los libros de texto gratuito de matemáticas, debido a que son un referente importante para obtener los significados de los números decimales que hay en la educación primaria en México (Ávila, 2008). Al respecto Son y Diletti (2017), describen la importancia que tiene el análisis de los libros de texto, mencionaron que son un recurso importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el caso específico de México, Celis (2011) mencionó que el libro de texto gratuito es uno de los recursos más importantes del saber en la educación primaria mexicana. Esto lleva a asumir como problema qué significados están aprendiendo los estudiantes a través de los libros de texto, cómo están estructurados. El hecho de no reconocerlos o identificarlos, dejará ausente acciones que puedan favorecer su enseñanza y aprendizaje. Por tanto, se considera importante indagar en los libros de texto gratuito de matemáticas que tanto se promueve en los libros de texto el campo procedimental y el conceptual, que representaciones de los números decimales se trabaja y bajo qué contextos son enseñados estos.

2.3 Pregunta de investigación

La pregunta de investigación que guía el trabajo de investigación es la siguiente:

¿Qué significados de los números decimales se promueven en los libros de texto de matemáticas elaborados con el programa de estudios 2011 en el nivel de primaria en México?

2.4 Supuesto

El supuesto que se planteó como respuesta a la pregunta de investigación fue enfocado a la noción de significado que propuso Rico (2012), esta es la estructura interna de un significado está dado por una tripleta de dimensiones que son, la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología. Bajo esta postura se fundamentó lo siguiente:

Los libros de texto gratuito de matemáticas de educación primaria en México se enfocan en el contenido de números decimales al campo procedimental y no al campo conceptual. Se espera encontrar que los libros de texto trabajen diferentes representaciones de los decimales, sin desarrollar la traducción entre un sistema de representación a otro. Por último, se considera que los contextos que proponen los libros de texto para trabajar los números decimales fueron el matemático y el extra-matemático, enfocando los contextos extra-matemáticos a situaciones públicas y el contexto matemático a crear más matemáticas (Cañadas et al., 2018).

2.5 Objetivo general

El objetivo general del trabajo de investigación es:

Describir los significados de los números decimales que se promueven en los libros de texto gratuito de matemáticas de educación primaria en México.

2.6 Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los aprendizajes esperados que involucran a los números decimales.
- Identificar los desafíos matemáticos que se abordan en los libros de texto gratuito de matemáticas que se encuentran presentes en los aprendizajes esperados.
- Identificar los significados de los números decimales que hay en los libros de texto gratuito de matemáticas para el aprendizaje esperado.
- Interpretar los significados obtenidos de los libros de texto gratuito de matemáticas de educación primaria en México.

2.7 Justificación

La realización de esta investigación resulta interesante y pertinente debido a que la mayoría de las investigaciones que hay en el tema de números decimales están centradas en darle tratamiento a las dificultades, errores y obstáculos presentados en el aula, en torno a su enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, Ávila (2013) enfatiza que hace falta enseñar los aspectos conceptuales de los números decimales que permitan a los estudiantes comprender este tópico matemático, y más aún indagar si estos aspectos conceptuales están presentes en los libros de texto de matemáticas.

Por ello se considera importante el conocer los significados de los números decimales en los libros de texto, ya que esto ayudaría a diversas áreas de la educación matemática en el nivel primaria, por ejemplo, los docentes podrían tomar en cuenta los significados de los números decimales para añadirlo a su práctica y planeación docente.

Así mismo, se ha demostrado que al enseñar tomando en cuenta los significados se mejora el aprendizaje de los alumnos, la enseñanza de los profesores y la concepción del objeto matemático. Por ejemplo, Ávila (2013) mencionó que al enseñar los aspectos conceptuales de los números decimales favorece el acercamiento a la estructura de estos números. Por su parte, Centeno (1997) y Valencia (2014) mencionaron que al enseñar los significados de los números decimales se favorece la comprensión del tema.

2.8 Alcance

Derivado de lo anterior, el alcance que se pretende tener con esta investigación es la descripción de los significados que se están proponiendo en los libros de texto gratuito para que sean enseñados en educación primaria de México. Otro alcance es que se da continuidad a las investigaciones realizados por Ávila (2008), Ávila (2013), Valencia (2014) y Antero (2015) en el sentido que se describieron los significados de los números decimales en la reforma 2011, misma que no se había analizado anteriormente en el nivel de primaria y se puso en manifiesto la importancia de las fracciones decimales en la enseñanza y aprendizaje de la transición de las fracciones y los números decimales.

La realización de esta investigación pretende ser de ayuda para desarrollar los nuevos currículos y libros de texto de primaria en el tema de números decimales. Así que se considera que esta investigación tendrá un impacto en la educación, en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en el nivel de primaria en México y en la enseñanza del investigador.

En el siguiente capítulo se describe el marco referencial de la noción de significado que se adoptó como parte de la elaboración de esta investigación.

CAPÍTULO 3. MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se describe el marco conceptual con el cual se realizó el trabajo de investigación. Primero se describe lo qué es un significado desde diferentes posturas, y se asume la postura de Rico (2012) para esta tesis. En la siguiente se describen los elementos que componen la noción de significado de un concepto matemático, el cual se compone de la siguiente manera: la estructura conceptual, en ellas están el campo conceptual y el campo procedimental cada uno con sus diferentes elementos. La segunda componente fueron los diferentes sistemas de representación y finalmente se encuentra la componente del análisis fenomenológico la cual está compuesta por contextos, situaciones y fenómenos.

3.1 Noción de significado

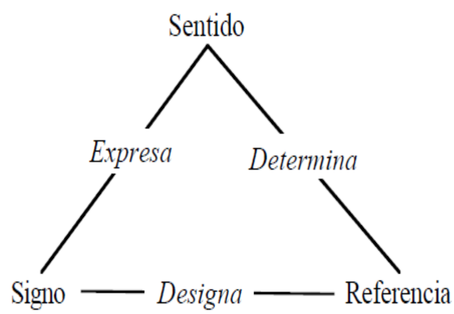
Ante la problemática que se describe en el capítulo anterior, se requiere conocer la estructura interna del significado de un concepto matemático, en este caso el de números decimales. Para ello, se debe fijar la postura de la noción de significado con la cual se va trabajar. Existen diferentes posturas acerca de la noción de significado, estas pueden ser filosóficas, cognitivas, matemáticas y dentro de ellas, las que van enfocadas a la matemática educativa.

En Vergnaud (1990), se define a los significados como esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para el sujeto, entendiendo como situación la referencia y como significante al conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento. Saussure (1945, citado en Serrano, 2005) define al significado mediante dos ideas: el vínculo que une un nombre con una cosa no es una operación simple; y lo que une un signo no es una cosa y un nombre, sino un concepto con una imagen acústica. Es en este sentido que Saussure (1945, citado en Serrano, 2005) describe el significado de una cosa como el concepto que alguien tiene sobre esa cosa. Ogden y Richards (1945, citado en Serrano, 2005) mencionan que el significado se compone del símbolo, referente, una relación causal entre símbolo y pensamiento y, otras relaciones causales entre pensamiento y referente. Serrano (2005) finalmente define al significado como la relación de un objeto matemático a través de dos dimensiones: el uso y la explicación del objeto.

Por su parte Godino et al. (2007) mencionan que el significado de un objeto matemático está dado de manera institucional y personal, entendiendo a estas dos, como un sistema de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización. Frege (1998) realiza la teoría de sentido y referencia donde aborda el concepto de significado desde una perspectiva filosófica apoyándose de las matemáticas para explicar su esencia. Este autor menciona que un signo expresa su sentido y designa su referencia. Definiendo al signo y nombre como cualquier designación por la que esté un nombre propio, cuya referencia es un objeto determinado, pero no un concepto ni una relación. Así mismo, menciona que la representación que se hace de este signo es subjetiva: “la representación de uno no es la del otro. De aquí que se den múltiples diferencias en las representaciones asociadas con el mismo sentido”. (p.88). Finalmente, Frege (1998) alude a que la referencia de un nombre propio es el objeto mismo que designamos por medio de él; la representación que tenemos en este caso es completamente subjetiva; entre ambos está el sentido, que ciertamente ya no es subjetivo como la representación, pero que tampoco es el objeto mismo. (p.89).

La interpretación que hace Gómez (2007) de la teoría de Frege (1998) está representada mediante un triángulo semántico: Signo—Sentido—Referencia como se muestra en la figura 1.

Figura 1 *Triángulo semántico*

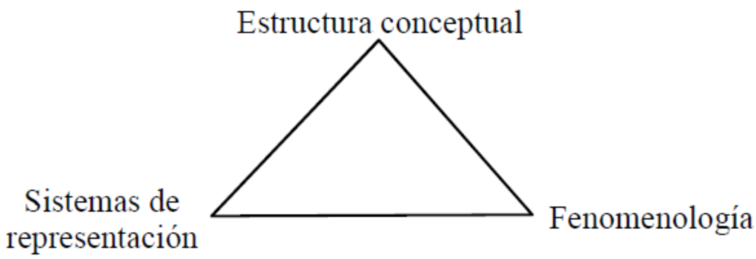


Nota. Triángulo semántico de la tripleta de componentes de un significado (Gómez, 2007).

Más tarde, Frege (1998) extiende el sentido y referencia, de los nombres propios a las oraciones completas, es decir, los conceptos: “Hemos visto que a una oración hay que buscarle siempre una referencia, cuando se está interesado en la referencia de sus partes componentes; y esto sucede cuando y sólo cuando se da el caso de que nos preguntamos por el valor de verdad, pues, esto nos impulsa a aceptar que el valor de verdad de una oración es su referencia. Entiendo por valor de verdad de una oración la circunstancia de que es verdadera o falsa. No hay otros valores de verdad. Para abreviar, a uno lo nombra como verdadero, y al otro lo nombra falso. Toda oración asertórica, en la que importe la referencia de sus palabras, ha de concebirse por lo tanto como un nombre propio, y su referencia, en el caso de que la tenga, es lo verdadero o lo falso. (pp. 33-34). Lo anterior se resumen en la siguiente frase, Frege (1998) “el término conceptual debe tener un sentido y, para su uso científico, una referencia”, es decir, cuando al signo tiene una representación esta es subjetiva, pero cuando al signo se extiendo un concepto u oración, entonces la representación es objetiva.

Así Rico (2012) adopta las ideas de Frege (1998) sobre el significado y lo traslada a la matemática educativa atendiendo a tres dimensiones: los sistemas de representación, la estructura conceptual y la fenomenología como se muestra en la figura 2.

Figura 2 *Dimensiones del significado de un concepto matemático*



Nota. Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar (Gómez, 2007).

- Los sistemas de representación, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros.
- La estructura conceptual, que comprende conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- La fenomenología, que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido. (pp. 52-53).

Para la elaboración de la presente investigación se toma la postura de Rico (2012) debido a la estructura que lo compone, pues contempla varios aspectos que dotan de sentido al objeto matemático. Es decir, conocer su definición, representarlo, identificar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, su interpretación y aplicación solo se dará mediante la fenomenología (Fernández et al. 2016), porque es a través de la fenomenología donde los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto (Gómez, 2007, p. 27). Se descartaron a los otros autores puesto que en las definiciones de significado ninguno de ellos contempla la fenomenología que como se dijo anteriormente, es lo que dotará de significado al concepto matemático, especialmente en el nivel de primaria que se requiere analizar qué significados están asociados a los números decimales.

Rico (2012) describe que si la estructura interna de un concepto matemático, no está presente, se llama significado parcial. Al respecto Fernández et al. (2016) mencionan que los significados parciales carecen de modo parcial de una referencia, unos sistemas de representación y unos sentidos propios. También se destaca la multiplicidad de significados que puede tomar un concepto matemático, Fernández et al. (2016) mencionan "en las matemáticas escolares, los conceptos adquieren una variedad de significados más allá del modo formal y simbólico con que vienen establecidos en el currículo y usualmente se enseñan" (p. 2). Gómez (2007) menciona que un concepto matemático tiene una multiplicidad de significados porque:

- Su estructura conceptual es compleja, dando lugar a una pluralidad de relaciones con otros conceptos matemáticos.
- Hay una diversidad de modos en los que el concepto y sus relaciones con otros conceptos se pueden representar.
- Hay una variedad de fenómenos que le dan sentido. (p. 28).

En la siguiente sección se desglosan las componentes que integran la noción de significado.

3.2 Componentes del significado

En esta subsección se desglosan las componentes del significado y su estructura interna que integra a un concepto matemático. Primero se describe lo referente a la estructura conceptual, luego los sistemas de representación y por último la fenomenología.

3.2.1 Estructura conceptual

Gómez (2007) menciona que la estructura conceptual es una herramienta para el análisis de las matemáticas escolares, la define como la descripción, a nivel de conceptos y relaciones entre ellos. La construcción de la estructura conceptual es un proceso que se inicia con la identificación de los conceptos y algunas de sus relaciones pero que se desarrolla en la medida en que se tienen en cuenta los sistemas de representación, los modelos y los fenómenos asociados.

Gómez (2007) menciona que dentro de la estructura conceptual se deben contemplar tres aspectos de todo concepto matemático del contenido matemático escolar, esto son:

1. Estructuras matemáticas involucradas, todo concepto matemático está relacionado con al menos dos estructuras matemáticas:
    a) La estructura matemática que el concepto configura.
    b) Las estructuras matemáticas de las que él forma parte.
2. Relaciones conceptuales:
    a) Relaciones que se establecen entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura.
    b) Los objetos que son casos particulares de dicho concepto.
    c) Los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte.
3. Relaciones de representaciones: la exploración de los significados de un concepto requiere de los sistemas de representación, puesto que con ellos es posible identificar los modos en que el concepto se presenta. Al tener en cuenta los sistemas de representación, se destacaron varias relaciones:

a) La relación entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformación sintáctica invariante).
b) La relación entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación).
c) La relación entre dos signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformación sintáctica variante). (p.46).

Gómez (2007) menciona que cuando se explora la estructura conceptual de un concepto en las matemáticas escolares, se deben tener en cuenta tres tipos de elementos:

- Los objetos, como casos particulares de un concepto y que conforman la extensión del concepto.
- Los conceptos, como predicados que son saturados por los objetos y, a su vez, conforman estructuras matemáticas.
- Las estructuras matemáticas, que están conformadas por conceptos. (p. 46).

La estructura conceptual está dividida en dos dimensiones, la primera es el conocimiento conceptual y la segunda el conocimiento procedimental. Rico (1995) menciona que “El conocimiento conceptual se caracteriza más claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede pensarse como una membrana conectada de conocimiento, una red en la que las relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información. Las relaciones saturan los hechos y proposiciones individuales de modo que todas las piezas de información están conectadas a alguna red. Rico (1995) distinguen tres niveles de conocimientos en el campo conceptual:

- Los hechos: son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos.
- Los conceptos: describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, suelen admitir un modelo o representación y se designan con signos o símbolos.
- Las estructuras conceptuales: sirven para unir conceptos o para sugerir formas de relación entre conceptos constituyendo, a veces, conceptos de orden superior, ya que pueden establecer algún orden o relación entre conceptos no inclusivos. (pp. 14-17).

Rico (1995) distingue cuatro tipos de hechos: términos, notaciones, convenios y resultados.

- Términos. Son las denominaciones o vocablos con los que designamos los conceptos o las relaciones entre conceptos. En matemáticas hay términos específicos y otros que proceden del lenguaje común.
- Notaciones. Son los signos y símbolos empleados en matemáticas para expresar una idea de modo breve y preciso. Aunque las matemáticas emplean un lenguaje

simbólico, no conviene comenzar el trabajo con los alumnos presentando los símbolos y notaciones.

- Convenios. Son acuerdos tácitos o consensuados para comunicar información sin ambigüedad, evitando largas explicaciones. Gran parte del trabajo del matemático está basado en el dominio de convenios sobre manipulación de símbolos y representaciones.
- Resultados. Son unidades de información producto directo e inmediato de relaciones entre términos, susceptibles de ser memorizadas, cuyo dominio y control conviene disponer para trabajar en matemáticas sin tener que partir siempre de cero. (p.16).

El conocimiento procedimental consiste en los modos de ejecución ordenada de una tarea, lo constituyen las "reglas, algoritmos o procedimientos empleados para resolver una tarea. (Rico, 1995). Los procedimientos engloban todos los procesos y modos de actuación o ejecución de tareas matemáticas. Rasgo clave de este tipo de conocimientos es que su aprendizaje se lleva a cabo mediante secuencias de actuaciones, que pueden sistematizarse (Lupiáñez, 2009). Rico (1995), menciona que el conocimiento procedimental tiene tres niveles:

1. Los procedimientos son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas.
    a) Las destrezas consisten en transformar una expresión simbólica desde una forma dada hasta otra forma, y para ello hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos. Por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos.
    b) Los razonamientos se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos.
    c) Las estrategias, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Ellas operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados. (pp. 16-18).

Rico (1995) menciona que las destrezas a su vez se clasifican en: aritméticas, métricas, geométricas, gráficas y de representación.

i. Destrezas aritméticas. Son aquellas necesarias para un correcto dominio del sistema decimal de numeración y de las cuatro operaciones básicas. Entre las más destacadas podemos señalar la lectura y escritura de números, el cálculo mental con dígitos y algunos números de dos cifras, el cálculo con papel y lápiz, y el empleo de la calculadora.
ii. Destrezas métricas. Son las destrezas necesarias para emplear correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie. También se incluye aquí el dominio del sistema métrico decimal.

iii. Destrezas geométricas. Se incluyen aquí las rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. También se incluye el dominio y empleo correcto de determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos.

iv. Destrezas gráficas y de representación. El uso de modelos gráficos no está limitado a la representación de conceptos geométricos. Cuando se simboliza una fracción sobre una figura se están utilizando destrezas de tipo gráfico, que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o relación. (pp. 16-17).

2. Razonamiento:
   Rico (1995) define al razonamiento como la capacidad para establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituyen un concepto. El razonamiento es la forma usual de procesar conceptos, es decir, de derivar unos conceptos de otros o implicar una nueva relación sobre la base de las relaciones ya establecidas. (p.14).

3. Estrategias:
   Rico (1995) menciona que una estrategia es un procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión (resolución de problemas) haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual. Las estrategias más usuales en los niveles de la educación obligatoria son: estimar, aproximar, elaborar un modelo, construir una tabla, buscar patrones y regularidades, simplificar tareas difíciles, conjeturar y comprobar. (p.18).

3.2.2 Sistemas de representación

La segunda componente de la noción de significado de un concepto matemático son los sistemas de representación. Gómez (2007) mencionó que los sistemas de representación constituyen diferentes facetas de un concepto o estructura matemática; Cañadas et al. (2018) agregaron que los sistemas de representación hacen referencia a los sistemas de signos que permiten designar un concepto. Por su parte Kaput (1994) consideró que un sistema de representación es “un sistema de reglas que sirve para:

- Identificar o crear signos.
- Operar sobre y con ellos.
- Determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia). (p. 523).

Gómez (2007) menciona que los sistemas de representación ciñen un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas, en general, y por el concepto matemático específico, en particular. Cañadas et al. (2018) añaden que “estas reglas determinan cómo crear un signo que pertenezca al sistema” (p. 17). Gómez 2007 menciona que la estructura conceptual deberá representar la estructura matemática en todos sus posibles sistemas de representación. Cada uno de estos sistemas de representación aporta un significado de la estructura matemática desde la perspectiva de las matemáticas escolares.

Cañadas et al. (2018) mencionan que “un mismo concepto o estructura matemática se puede representar en diferentes sistemas de representación, es posible agrupar y caracterizar, en cuatro categorías, las operaciones que se pueden realizar sobre los signos que pertenecen a esos sistemas de representación” (p.17):

- La primera operación es la creación de signos o expresiones: esta operación está regida por las normas que regulan el sistema de representación y es importante en las matemáticas escolares porque es la que produce expresiones válidas e inválidas Gómez, 2007).
- La segunda operación es la transformación sintáctica variantes: “se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el concepto o procedimiento matemático designado por esos signos cambie” (Cañadas et al., 2018, p. 18).
- La operación tercera es la transformación sintáctica invariante: “se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, en la que el objeto matemático designado cambia” (Cañadas et al., 2018, p. 18).
- La cuarta operación es la traducción entre sistemas de representación. Se refiere al paso de un sistema de representación a otro (Gómez, 2007). Cañadas et al. (2018) la describen como el procedimiento del cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que pertenecen a diferentes sistemas de representación.

Gómez (2007) menciona que para construir la estructura conceptual de un tópico, se debe atender a tres dimensiones que se complementan y se desarrollan paralelamente: los conceptos, los sistemas de representación y las conexiones. En la medida en que se identifican conceptos que conforman la estructura matemática, se determinan las diversas representaciones de esos conceptos. Y, al distinguir estas representaciones, se tendrá que establecer las relaciones entre ellas.

Duval (1999) menciona que para tener acceso al conocimiento matemático se necesita que los objetos sean representados de formas diferentes. Cañadas et al. (2018), consideran los siguientes sistemas de representación:

a) Numérico: está compuesto por los símbolos llamados números cuya representación numérica es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las expresiones 9, 3 + 4 + 2, 27 3, 32 o 81 son representaciones numéricas del mismo número.
b) Simbólico: tiene sus propios signos (números, letras y símbolos de las operaciones aritméticas), se puede operar con ellos y existe una relación entre ellos.

c) Tabular: está estrechamente ligado al sistema de representación numérico pero tiene sus propios signos (por ejemplo, líneas horizontales y/o verticales) y reglas de combinación de estos mismos (posición de las líneas y de los números, por ejemplo).
d) Gráfico: generalmente utiliza las gráficas en sistemas cartesianos.
e) Geométrico: es útil para representar la multiplicación de números naturales y su resultado.
f) Pictórico: se utiliza para expresar elementos y describir el uso que se hace de la agrupación.
g) Verbal: tiene sentido, por lo tanto, cuando el lenguaje nos permite referirnos a los conceptos y procedimientos matemáticos que queremos representar.
h) Manipulativo: se confunde con los recursos o materiales didácticos que le dan sustento. Conviene ser cautos porque son pocos los recursos que se constituyen como verdaderos sistemas de representación manipulativos. Se debe comprobar que cumplan las características para ser un sistema de representación. Por ejemplo, el ábaco vertical sí es un sistema de representación para los números naturales porque tiene sus propios elementos (bolitas y varillas) y sus propias reglas para la construcción de números. Estas reglas son diferentes de las del sistema de representación simbólico, porque, por ejemplo, el ábaco vertical es aditivo y posicional, pero no es multiplicativo.
i) Ejecutable (relacionado con las TIC): está asociado a programas o applets que cumplen las características requeridas para cualquier sistema de representación para un tema determinado de las matemáticas escolares. Existen materiales virtuales que imitan a los materiales manipulativos. Si la virtualización cumple con la existencia de elementos específicos, con unas reglas para combinarlos y operar con ellos, se puede considerar un sistema de representación. (pp. 75-81).

3. 2. 3 Análisis fenomenológico

El tercer componente que conforma la estructura interna de un concepto matemático es la fenomenología. Al respecto Gómez (2007) menciona que la fenomenología es la tercera dimensión de la estructura interna de un concepto matemático, se refiere a ella como los fenómenos que le dan sentido a un concepto. Por otro lado Freudenthal (1983, citado en Gómez 2007), define a la fenomenología y fenomenología didáctica de la siguiente manera:

> "La fenomenología de un concepto matemático, consiste en describirlo en relación con los fenómenos para los que fue creado y con aquellos a los que se extendió en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Cuando esta descripción tiene que ver con el proceso de aprendizaje de una generación joven, es entonces fenomenología didáctica: una

> manera de mostrarle al profesor aquellos lugares en los que los aprendices pueden involucrarse en el proceso de aprendizaje de la humanidad". (p.50).

Puig (1997) considera que es más conveniente utilizar el término de análisis fenomenológico que la fenomenología en el análisis didáctico, este autor menciona que el análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en:

> "describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de la relación con los fenómenos en cuestión ha de mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos". (p.63).

Lupiáñez (2009) menciona que el análisis fenomenológico está dado desde el enfoque funcional de las matemáticas escolares:

> "En este enfoque, el significado de conceptos y procedimientos matemáticos se muestra mediante su conexión con el mundo real, con las situaciones en las que se localizan, con los contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego y con los fenómenos de los que surgen o en cuyo tratamiento se implican tales conceptos" (p. 48).

Gómez (2007) menciona que el análisis fenomenológico viene dado por la tripla: contextos, situaciones y fenómenos. A continuación se describe cada una de ellas, así como los componentes que las integran. La primera componente de la triple es el fenómeno, Castro-Rodríguez et al. (2008) lo definen como el conjunto de fenómenos organizados por un concepto o una estructura matemática determinada. El segundo componente del análisis fenomenológico es el contexto, Rico et al. (2008) definen al contexto matemático como un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones. (p. 18).

Las tercera componente del análisis son las situaciones, Lupiáñez (2009) menciona que las situaciones destacan el medio en el cual una determinada estructura matemática tiene uso regular. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el cual se sitúan problemas y cuestiones matemáticas que pueden encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Lupiáñez (2009) menciona que existen diferentes tipos de situaciones:

- Las situaciones personales están relacionadas con las actividades diarias de los escolares. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema.
- Las situaciones educativas o laborales las encuentra el escolar en el centro educativo o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que desde estos espacios surgen tareas para el escolar que le imponen una actividad matemática para encontrar su respuesta.
- Las situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observan un aspecto determinado de su entorno. Requieren que los escolares activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública.
- Las situaciones científicas son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. (p.25).

Las herramientas del marco referencial guiarán el trabajo de investigación para obtener de los libros de texto los significados de los números decimales que estos están promoviendo. Por ejemplo en la estructura conceptual, se verá qué campo se potencializa más, si el campo procedimental o el campo procedimental, dentro de ellos, verificar que se potencien los términos, conceptos, destrezas y razonamiento. Así mismo se verá qué representaciones son las que más se potencian en el texto y ver cómo es la traducción entre un sistema de representación y otro; y cómo es la diferenciación entre el concepto de número decimal como objeto matemático y como sistema de representación. Finalmente se verá qué contexto se potencia más si el matemático o extra-matemático y se verá qué sentido y significado se les está dando a la representación en los números decimales.

Una vez identificado esto se analizará cada palabra o frase que viene en el texto y se realizará un mapa conceptual donde se coloquen todos los significados encontrados en ellos, se verán si son significados completos o significados parciales y se contrastará con los antecedentes que han cambiado qué sigue vigente y cuál es la aportación de ésta tesis al campo de la matemática educativa. En el siguiente capítulo se describe la metodología que guio el camino a seguir en el proceso de la elaboración de esta tesis, en ella se describe el método de análisis de contenido, tipo de investigación, instrumento de recogida de datos, entre otros.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

Este capítulo tiene como objetivo describir la metodología de esta investigación. Se describe primero el paradigma, después el enfoque y tipo de investigación, el método a utilizar, las técnicas, así como los instrumentos de recogida y análisis de datos.

4.1 Fundamentos metodológicos

El enfoque de esta investigación es cualitativo e interpretativo, ya que intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que se le otorguen (Hernández et al., 2010). La investigación es cualitativa porque se enfoca en profundizar interpretaciones sobre los significados de los números decimales que hay en los libros de texto, en función del conocimiento, creencias y reflexiones del investigador, así como la bibliografía revisada, aludiendo en todo momento a la estructura interna del concepto matemático propuesta por Rico (2012).

El tipo de investigación es descriptiva, Hernández et al. (2010) menciona que en este tipo de investigación se trata de describir fenómenos, situaciones, contextos y sucesos; esto es, detallar cómo son y se manifiestan. Por otra parte Kothari (2014) menciona que el objetivo principal de la investigación descriptiva vaga la redundancia es la descripción de una situación y agrega que su principal característica como método es que el investigador no tiene control sobre las variables; él solo puede informar lo que ha sucedido o lo que está sucediendo. De esta manera esta investigación se considera descriptiva porque se van a analizar los significados de los números decimales en los libros de texto detallando cómo son y cómo se manifiestan en la estructura interna de los números decimales en ellos.

4.2 Método de análisis de contenido

Se utiliza al análisis de contenido como camino a seguir en la investigación, Rico (2012) menciona que por análisis se entiende un método o conjunto de métodos que resuelven lo complejo en lo simple, por contenido se refiere a los significados que hay en un tópico matemático. Por lo tanto, el análisis de contenido es el método que guiará al investigador a describir cuáles son los significados de los números decimales que están presentes en los libros de textos, y también sirve como técnica para la recogida de datos.

Bernete (2013) menciona que el análisis de contenido se utiliza para estudiar cualquier tipo de documento en el que esté transcrito algún relato, relativo a cualquier objeto de referencia. Así mismo menciona que “es una metodología sistemática y objetivada porque utiliza procedimientos, variables y categorías que responden a diseños de estudio y criterios de análisis, definidos y explícitos". (p. 222). Este autor agrega que para llevar a cabo un análisis de contenido "es necesario realizar un conjunto de operaciones que tienen por finalidad desvelar un sentido no explícito en un producto narrativo. Y esta tarea sólo puede llevarse a cabo a partir de las expresiones del texto". (p. 229).

Por su parte Rico et al. (2008) en un contexto apegado a la matemática educativa, menciona que el análisis de contenido es un procedimiento que se ocupa de analizar, organizar y establecer los diferentes, y diversos significados que admiten las matemáticas escolares, estos significados son necesarios para marcar expectativas sobre el aprendizaje de los alumnos. Los significados que se encuentran en los desafíos de los libros de texto se toman como la expectativa que tiene el texto escolar para que el alumno aprenda.

Derivado de lo anterior, se describen las características del análisis de contenido. Rico (2012) menciona que las características del análisis de contenido como método son:

- En la unidad central de indagación, es un texto, discurso, tarea escrita o comunicación. De acuerdo a ello, en esta investigación la unidad central son los desafíos de los libros de texto de matemáticas del nivel de primaria.
- Da sentido interno al texto (dentro del texto). El interés que se tiene en la investigación es dotar de significado a la estructura interna del tópico matemático de números decimales en los libros de texto.
- En las unidades básicas de análisis, funge como unidad menor de discurso, por ejemplo, palabra-término, verbo-adjetivo, palabra-frase.
- En el nivel de análisis, es continuo: manifiesto-latente.
- Tiene técnicas propias:
    a) Delimitación de la unidad básica.
    b) Establecimiento de categorías.
    c) Interrelación de categorías.
    d) Adscripción de unidades a categorías.
    e) Interpretación de categorías: nivel manifiesto y latente.
- El análisis didáctico opera en las disciplinas de lingüística, psicología, sociología, didáctica.
- El fin primordial del análisis didáctico es estudiar textos, tareas o relatos.
- La secuenciación que maneja el análisis didáctico es transversal: relevancia de la ampliación del discurso.
- Las funciones auxiliares al método general son:
    a) Técnica de recogida de datos.
    b) Técnica de análisis de datos. (p.59).

El análisis de contenido tiene como fin estudiar textos y les da sentido interno, por tal razón se utiliza como método para encontrar, analizar, interpretar y describir los significados que hay en los libros de texto gratuito de matemáticas de educación primaria en México, debido a que el análisis de contenido cuenta con funciones auxiliares de técnicas de recogida de datos y análisis de datos. En la siguiente sección se describe al análisis de contenido como técnica.

4.3 Técnicas de análisis de contenido

En esta sección se describe al análisis de contenido como técnica de análisis de datos y recogida de datos. Al respecto, Krippendorff (1990, citado en Bernete, 2013) define al análisis de contenido como una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto.

Por su parte Cohen et al. (2011, citado en Rico, 2012) señalan que:

> "El término análisis de contenido indica el proceso de recogida y resumen de datos escritos los contenidos principales de dichos datos y sus mensajes. De modo más preciso, [el análisis de contenido] define un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos. (…) El análisis de contenido se puede llevar a cabo con cualquier tipo de material escrito, desde documentos a transcripciones de entrevistas, desde productos de los medios hasta entrevistas personales. Se utiliza frecuentemente para analizar un número considerable de textos, debido a su naturaleza sistemática, gobernado por reglas; también porque permite utilizar el análisis asistido por ordenador. Utiliza la categorización como rasgo esencial para reducir grandes cantidades de datos". (p. 58).

Así mismo, Rico (2013) menciona que el análisis de contenido contribuye a:

- Descubrir patrones en el discurso.
- Contrastar una hipótesis previa.
- Inferir significados interpretativos en un texto.

La aportación de Rico (2013) hace evidencia que el análisis de contenido es la técnica adecuada para llevar a cabo el análisis de los libros de texto y encontrar en ellos qué significados se están promoviendo de los números decimales. Para lograr esto es necesario recurrir a las etapas del análisis de contenido como técnica de recogida de datos.

Bernete (2013) menciona que un proyecto de investigación donde se utilicen técnicas de análisis de contenido debe contener:

1. Trabajo previo a la obtención de los datos:
   a) Formulación del problema, los objetivos y, en su caso, las hipótesis, con sus correspondientes definiciones de términos.
   b) Elección de documentos.
   c) Selección de datos para verificar las hipótesis y organización de los datos en un sistema de categorías.
   d) División del corpus en unidades de análisis.
   e) Planificación de la recogida de los datos y modelo de análisis.

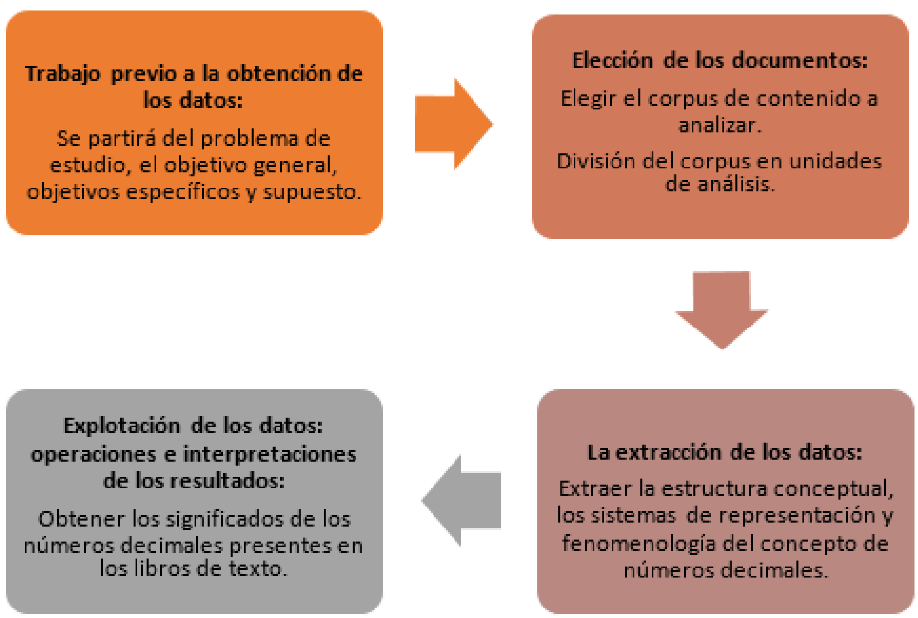
2. Extracción de los datos ("trabajo de campo").
   a) Transcripción de los datos encontrados en el material que se analiza a los documentos intermedios.
   b) Construcción del libro de códigos.

3. Explotación de los datos: operaciones e interpretación de resultados.

Para el análisis de datos de los libros de texto de matemáticas se utilizan las técnicas anteriores, mismas que permiten conocer y delimitar lo que se investiga. Así mismo, estas técnicas ayudan a conocer la estructura interna del concepto matemático de números decimales y así lograr el objetivo general.

Para finalizar este apartado se propone el siguiente esquema metodológico que representa la forma en la que se lleva a cabo la investigación (ver figura 3).

Figura 3 *Esquema del camino a seguir en la investigación*



Nota. Proceso de la metodología en la presente investigación, en este esquema vienen incluidas las etapas del método de análisis didáctico

Fuente: Elaboración propia, basada en el análisis de contenido de Bernete (2013).

En la siguiente sección se describen con mayor detalle cada una de estas etapas y los instrumentos que se utilizaron para recabar la información.

4.4 Descripción de las técnicas del método de análisis de contenido en esta investigación

En esta subsección se describe a detalle cada una de las técnicas del análisis de contenido y los instrumentos que se utilizaron para la recogida de datos en esta investigación.

4.4.1 Trabajo previo a la obtención de los datos:

La técnica de análisis de contenido está dividida en cinco partes cada una de ellas forma parte del análisis de los libros de texto gratuitos de matemáticas.

a) Formulación del problema, los objetivos y, en su caso, las hipótesis, con sus correspondientes definiciones de términos.

Esta fase se describe a profundidad en el capítulo 2. En el cual se describe el problema, el objetivo general, los objetivos específicos, el problema de investigación, la pregunta de investigación que se pretende responder, así como el supuesto que se planteó para la investigación.

b) Elección de documentos.

Bernete (2013) menciona que “el conjunto de los documentos que se analizan recibe el nombre de corpus o universo de análisis y se determinan en función de los objetivos y las circunstancias de la investigación”. (p.239). En esta investigación el corpus son los libros de texto gratuito de matemáticas del nivel de primaria en México. Se eligió a los libros de texto gratuito emitidos por la SEP, debido a las características que tienen y el impacto en el aprendizaje y enseñanza en el nivel primaria. La educación primaria en México está dividida en seis grados escolares, en los que, para cada grado, hay un libro de texto de matemáticas. Por lo tanto para este trabajo se utilizaron los libros de texto en donde aparece el contenido de números decimales, que son los libros de cuarto, quinto y sexto año.

Así mismo, Bernete (2013) para la elección de documentos contempla las siguientes reglas:

a. Pertinencia: En este caso, el elegir a los libros de texto gratuito de matemáticas en el nivel de primaria se consideró pertinente debido a que contienen desafíos matemáticos donde se puedan obtener los significados de los números decimales además que el criterio de unicidad que tiene ayudó a generalizar estos significados a nivel nacional, de ésta forma se atendió al objetivo general de la investigación.
b. Exhaustividad: Los libros de texto de matemáticas de educación primaria no se eligieron al azar, sino que, dado sus características de gratuidad, obligatoriedad y unicidad que menciona Celis (2011), fueron considerados los más idóneos para

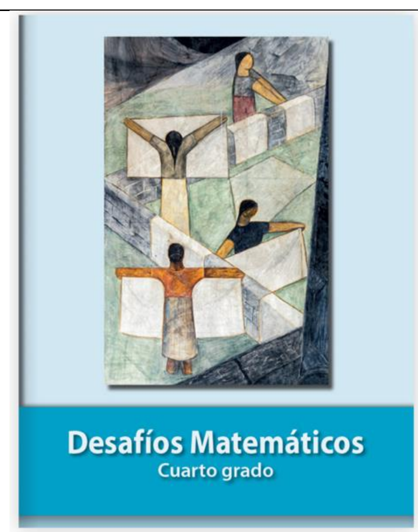
obtener los significados de los números decimales que se promueven en el nivel de primaria en México.

c. Representatividad: en este caso los libros de texto gratuito de matemáticas del nivel de primaria fungen el universo de estudio, porque a nivel nacional son un referente de todas las escuelas públicas y privadas teniendo así como un material óptimo para obtener los significados de manera nacional.
d. Homogeneidad: Los libros de texto gratuito de matemáticas en el nivel de primaria son elaboradas con características específicas, como la unicidad, obligatoriedad, gratuidad encontradas con Celis (2011), pero además de estas se consideran las siguientes características:
    - Contienen desafíos intelectuales vinculados al estudio de las matemáticas.
    - Están apegados al programa oficial.
    - Fueron elaborados por docentes con un conocimiento amplio y profundo sobre la didáctica de las matemáticas, tomando en cuenta la experiencia de las aulas. (SEP, 2014, p.9.)

A continuación se presentan en la tabla 9, 10 y 11, las fichas técnicas de los libros de texto de matemáticas de 4°, 5° y 6° de primaria. Estas fichas son la unidad de análisis de la investigación, cabe resaltar que únicamente se analizaron las unidades (Desafíos) donde se encuentra el tema de los números decimales. Es necesario recordar que los desafíos ‘‘son secuencias de situaciones problemáticas que demandan a docentes y alumnos la utilización de las herramientas matemáticas que se quiere aprendan”. (SEP, 2014).

Tabla 9 *Descripción técnica del libro de cuarto año*

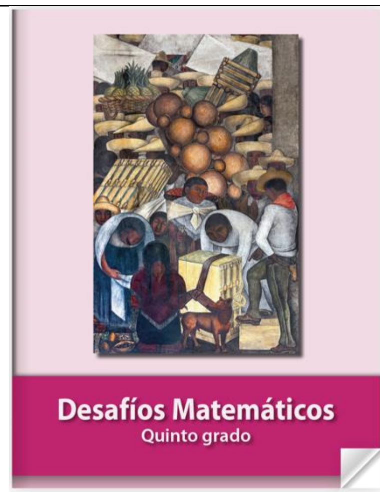
Libro de texto matemáticas 4° grado



Título	Desafíos Matemáticos
Autores	Secretaria de Educación Pública
Grado escolar en el que se utiliza	Cuarto
Editorial	SEP
Impreso en	México
año	2020
ISBN	978-607-551-149-8

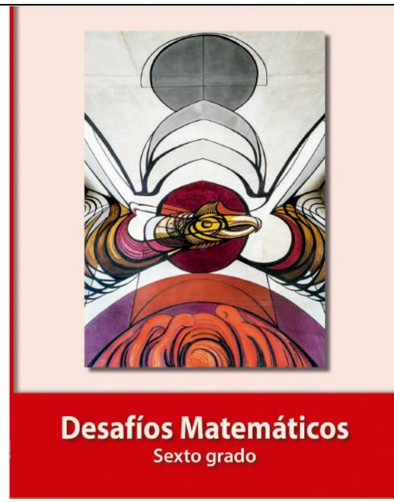
Fuente de elaboración propia basada en el libro de texto de cuarto año (SEP, 2019a).

Tabla 10 *Descripción técnica del libro de quinto año*

Libro de texto matemáticas 5° grado	
	
Título	Desafíos Matemáticos
Autores	Secretaria de Educación Pública
Grado Escolar en el que se utiliza	Quinto
Editorial	SEP
Impreso en	México
Año	2022
ISBN	978-607-551-139-9

Fuente de elaboración propia basada en el libro de texto de quinto año (SEP, 2019b).

Tabla 11 *Descripción técnica del libro de sexto año*

Libro de texto matemáticas 6° grado	
	
Título	Desafíos Matemáticos
Autores	Secretaria de Educación Pública
Grado escolar en el que se utiliza	Sexto
Editorial	SEP
Impreso en	México
Año	2022
ISBN	978-607-551-131-3

Fuente de elaboración propia basada en el libro de texto de sexto año (SEP, 2019c).

c) Selección de datos para verificar la hipótesis y organización de los datos en un sistema de categorías.

En esta fase se describe la estructura interna de la noción del significado de un concepto matemático que propone Rico (2012), es decir, se describe la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico del tema de números decimales que se promueven en los libros de texto gratuito de matemáticas en el nivel de primaria.

d) División del corpus en unidades de análisis.

Bernete (2013) menciona que “el corpus o conjunto de documentos se fragmenta en unidades más pequeñas a diferentes niveles” (p. 243). A continuación de describe cada una de ellas:

a) Unidad de muestreo. En este trabajo las unidades de muestreo son tres libros de texto de matemáticas llamados Desafíos Matemáticos 4°, 5° y 6° de primaria tal como lo muestra la tabla 12.

Tabla 12 *Unidades de muestreo*

Unidad de muestreo	Libro de texto
1	Desafíos matemáticos Cuarto grado
2	Desafíos matemáticos Quinto grado
3	Desafíos matemáticos Sexto grado

Fuente de elaboración propia.

b) Unidad de contexto. Se le llama a cada una de las partes en las que se divide la unidad de muestreo. En este caso la unidad de contexto consta de los bloques en los que se dividió cada uno de los libros de texto. A continuación, en la figura 4 se presentan las unidades de contexto de uno de los libros, cabe destacar que los tres libros analizados tienen la misma estructura interna que vienen divididos por bloques, únicamente cambia el nombre de los desafíos y el número de ellos en cada bloque.

El libro de “Desafíos matemáticos de 4° grado” se divide como lo muestra la figura 4:

Figura 4 *Organización de los libros de texto*

Nota. Evidencia de cómo están organizados los libros de texto. (SEP, 2019a).

Cabe destacar que los libros de 5° y 6° grado igualmente están conformados por 5 bloques cada uno. Cada libro está organizado de la siguiente manera:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
2. Forma, espacio y medida
3. Manejo de la información

El corpus que se eligió fueron 3 libros, estos a su vez se dividen en bloques y son muy extensos, debido a que en los diferentes bloques se abordan desafíos de todos los contenidos matemáticos que los alumnos deben aprender en un grado escolar. Por tal motivo es importante aclarar en qué bloques, de qué grado escolar, es donde se ve el tópico matemático de números decimales.

En el programa de estudios 2011 con el que fueron hechos los libros de texto de matemáticas, está basado en estándares de aprendizaje que el alumno debe alcanzar al término de la educación básica. En el libro de texto de matemáticas en cada uno de los bloques se deben atender temas de los tres ejes temáticos, sentido numérico y pensamiento algebraico, forma espacio y medida, y manejo de la información, a su vez estos tres ejes se subdividen en temas.

Para el tópico matemático de números decimales el eje temático que le corresponde es el de sentido numérico y pensamiento algebraico, este eje temático consiste de cuatro temas que son: números y sistemas de numeración, problemas aditivos, problemas multiplicativos y patrones y ecuaciones. A estos cuatro temas le corresponden diferentes estándares, que a su vez tienen aprendizajes esperados y estos son los que deben lograr para a su vez alcanzar el estándar. En cada aprendizaje esperado hay contenidos de temas específicos de matemáticas. Todo esto que se explicó se engloba en los desafíos matemáticos que se presenta el libro de texto cabe destacar que como tal esta información no la proporciona el libro de texto, debido a que una característica de los libros de texto que se analizaron fue tener la menor cantidad de información matemática para que los alumnos pusieran a prueba sus conocimientos previos para enfrentar un nueva situación y con el aprendizaje adquirido pudieran rechazar, modificar o adquirir un nuevo conocimiento, por tal motivo en los libros de texto únicamente se escribe el número de desafío y el nombre del desafío.

Sin embargo es importante mostrar en esta parte de qué bloques de cada libro de texto se analizaron y con qué contenido y aprendizaje esperado pertenecen. Las tablas 13, 14 y 15 muestran cómo están conformados los bloques de los libros de texto cuarto, quinto, y sexto año.

La tabla 13 muestra la estructura interna de los bloques donde se trabaja el contenido de números decimales en cuarto año, en ella viene descrita el aprendizaje esperado, el bloque donde se aborda, el contenido y el número de desafío y nombre de este.

Tabla 13 *Estructura interna de los bloques del libro de desafíos de cuarto año.*

Desafíos matemáticos de cuarto año			
Aprendizaje esperado	bloque	Contenido	Número de desafío y nombre
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	1	Notación desarrollada de números naturales y decimales. Valor posicional de las cifras de un número.	Desafío: 4 Décimos, centésimos y milésimos. Desafío: 5 Expresiones con punto

Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.		Resolución de sumas o restas de números decimales en el contexto del dinero. Análisis de expresiones equivalentes.	Desafío: 10 La tienda de doña lucha Desafío: 11 Los uniformes escolares Desafío: 31 El más rápido Desafío: 32 Tarjetas decimales
	2		
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación	3	Descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas.	Desafío: 47 Expresiones equivalentes
Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.	4	Resolución de sumas o restas de números Decimales en diversos contextos.	Desafío: 71 Problemas olímpicos Desafío: 72 Cambiemos números decimales Desafío: 73 Son equivalentes

SEP (2011b) y SEP (2019a).

La tabla 14 muestra la estructura interna de los bloques donde se trabaja el contenido de números decimales en quinto año, en ella viene descrita el aprendizaje esperado, el bloque donde se aborda, el contenido y el número de desafío y nombre de este.

Tabla 14 *Estructura interna de los bloques del libro de desafíos de quinto año.*

Desafíos matemáticos quinto año			
Aprendizaje esperado	**bloque**	**Contenido**	**Número de desafío y nombre**
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	2	Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas.	Desafío: 22 ¿Cuánto es? Desafío: 23 ¿Es lo mismo?
Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.	2	Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.	Desafío: 24 En partes iguales
Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones.	3	Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales.	Desafío: 39 ¡Atajos con decimales!
Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.	5	Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada.	Desafío: 84 La papelería Desafío: 85 ¿Qué hago con el punto? Desafío: 86 La excursión

SEP (2011c) y SEP (2019b).

La tabla 15 muestra la estructura interna de los bloques donde se trabaja el contenido de números decimales en sexto año, en ella viene descrita el aprendizaje esperado, el bloque donde se aborda, el contenido y el número de desafío y nombre de este.

Tabla 15 *Estructura interna de los bloques del libro de desafíos de sexto año.*

Desafíos matemáticos sexto año			
Aprendizaje esperado	**bloque**	**Contenido**	**Número de desafío y nombre**
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	1	Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación.	Desafío: 4 ¿Qué pasa después del punto? Desafío: 5 La figura escondida
Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones.	1	Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales.	Desafío: 7 Rompecabezas
Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.	1	Resolución de problemas Multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales. Identificación de una fracción o un	Desafío: 8 El equipo de caminata Desafío: 10 La mercería Desafío: 35

Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	3	decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales.	¿Quién es el más alto? Desafío: 36 ¿Cuál es el sucesor?
Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial.	4	Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad.	Desafío: 58 ¿Cómo va la sucesión? Desafío: 59 Así aumenta
Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.	5	Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.	Desafío: 80 Repartos equitativos Desafío: 81 ¿Cuánto cuesta el jabón?

SEP (2011d) y SEP (2019c).

c) unidades de registro: esta unidad corresponde a los fragmentos extraídos de los libros de texto y que corresponde donde los números decimales se encuentran de manera explícita. Como se describió anteriormente los libros de texto de matemáticas que se analizaron están estructurados por 5 bloques. En cada bloque se proponen desafíos que responden a cada uno de los contenidos a enseñar (SEP, 2014 b). La SEP (2014) define un desafío matemático como "secuencias de situaciones problemáticas que demandan a docentes y alumnos la utilización de las herramientas matemáticas que se quiere aprendan" (p.1). Por lo tanto las unidades de registro serán los fragmentos extraídos de estos desafíos donde en la instrucción y en la actividad se obtendrán los significados de los números decimales.

e) Planificación de la recogida de los datos y modelo de análisis.

Bernete (2013) menciona que en esta fase se realiza el diseño para “la recogida de los datos y sirve para ofrecer una visión de conjunto de los datos que los investigadores esperan recabar y explotar” (p. 245) además que le nombra fichas de registro. A continuación se presenta la figura 5 que se muestra la ficha de registro la cual permitió recolectar la información para encontrar los significados de los números decimales.

Figura 5 *Ficha de registro para recolectar datos*

<table>
<tr><td colspan="5">Código:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenido:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Intención didáctica:</td></tr>
<tr><td>Número del desafío:</td><td colspan="2">Nombre del desafío:</td><td colspan="2">Estructura del libro:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Unidad de Análisis:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estructura conceptual:</td><td>Sistemas de representación</td><td colspan="2">Análisis fenomenológico:</td></tr>
<tr><td>Campo conceptual</td><td>Campo procedimental</td><td>Tipo de representación</td><td>Contexto</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Hechos

Términos:
Notaciones:
Convenios:
Resultados:</td><td>Destreza

Aritmética:
Métrica:
Geométrica:
Gráficas y de representación:</td><td rowspan="5">Verbal:
Numérica:
Simbólica:
Tabular:
Gráfica:
Geométrica:
Pictórica:
Manipulativa:
Ejecutable:</td><td rowspan="5">Matemático
Extra-matemático:</td><td rowspan="5">Personal:
Escolar:
Pública:
Científica:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 2</td></tr>
<tr><td>Conceptos</td><td>Razonamientos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 3</td></tr>
<tr><td>Estructuras</td><td>Estrategias</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:</td></tr>
</table>

Nota. Ficha de registro para obtener los significados de los números decimales en los libros de texto.

Fuente: elaboración propia, basada en la noción de significado de rico (2012) y en el programas de estudio de cuarto, quinto y sexto año (2011).

4.4.2 La extracción de los datos

a. Transcripción de los datos encontrados en el material que se analiza a los documentos intermedios.

Bernete (2013) menciona que “la recogida de información en el análisis de contenido consiste en la transcripción de los datos encontrados en el material que se analiza a los documentos intermedios que llamamos fichas de registro y sirve para transformar el contenido de cada unidad de registro en información codificada” (247).

En la cuarta fase se trata de extraer de cada desafío los aspectos que componen a la estructura conceptual, los sistemas de representación y al análisis fenomenológico del concepto matemático de números decimales, para la recogida de datos se utilizó el instrumento de ficha de registro que mostró la figura 5. Este instrumento permitirá obtener cada elemento de las dimensiones del significado.

Con la ficha se identifican las componentes del significado del número decimal que pretende enseñar la consigna, y cuando se termina de extraer e interpretar las consignas de un desafío se identifica cuáles son los significados que pretende el desafío del libro de texto gratuito de matemáticas.

b. Construcción del libro de códigos.

Bernete (2013) menciona que en los códigos se dan definiciones explícitas de las categorías, con reglas de codificación y ejemplos. Se indica con claridad en qué casos unas expresiones serán registradas como categorías.

Los códigos que se utilizaron para identificar las fichas de registro son representados como lo muestra la figura 6:

Figura 6 *Códigos para identificar las fichas de registro*

G4 B1 C1 D4

Nota. Códigos con los que se identificaron a cada ficha de registro de los desafíos.

Fuente: elaboración propia.

- La letra G simboliza la palabra grado, el número que la acompaña identifica el grado escolar, este caso el grado de cuarto año por ello se utilizó el número 4, para quinto grado el número 5 y para sexto grado el número 6.
- La letra B simboliza la palabra Bloque, el número se refiere al bloque uno, dos, tres, cuatro y cinco.
- La letra C simboliza la palabra contenido, el número indica el contenido que se trabajó en cada bloque.
- La letra D simboliza la palabra desafío, y el número indica el desafió que viene en cada libro de texto.

4.4.3 Explotación de los datos: operaciones e interpretaciones de los resultados.

Esta fase se explica en los siguientes capítulos que están enfocados a la interpretación de resultados. Cabe destacar que hay capítulo introductorio en la interpretación de resultados para explicar de manera sintética el programa de estudios 2011, esto con el fin de entender cómo están articulados los desafíos, con los contenidos, a su vez estos con el aprendizaje esperado y este con el estándar, esto debido a que los libros de texto no cuenta con información de este tipo y que fue necesaria para interpretar lo que viene en el libro con base en lo que pedía el programa. Así mismo, es necesario explicar porque se está trabajando con la reforma 2011 y con los libros 2019, esto debido a que por el cambio de gobierno que hubo en 2018, no se elaboraron libros de cuarto, quinto y sexto año con la reforma 2017 por ellos se describe la reforma 2011. En los siguientes capítulos se describe la explotación de los datos y la interpretación de los resultados.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS SINTÉTICO A LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO 2011 DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN MÉXICO

En este capítulo se describe el análisis sintético de los programas de estudio 2011 de educación primaria en México. Dentro del análisis se encontró que, en los programas de cuarto, quinto y sexto año fue donde se trabajaron los números decimales en el nivel de primaria, por tal motivo se detalló la estructuración de estos programas. Se empezó por describir la articulación de la educación básica que promueven la RIEB (Reforma integral de educación básica) en especial los programas de estudio 2011, porque los libros de texto que se analizaron fueron con base en estos programas de estudio.

La RIEB se estableció en un acuerdo por mejorar la educación básica en México, en ella se buscó que tanto niñas como niños tengan mejores oportunidades de aprendizaje, por tal motivo se reestructuraron los programas de estudio, libros de texto y materiales de apoyo a la práctica docente. Para la elaboración de estos programas se contó:

> “Con la colaboración de especialistas, centros académicos de alto nivel –nacionales y de las entidades federativas–, consultas en Internet, materiales expuestos en la red y foros con docentes en todo el país se actualizaron enfoques, aprendizajes esperados, contenidos y materiales educativos para los tres niveles que comprende la Educación Básica, cuidando su pertinencia, gradualidad y coherencia interna, así como el enfoque inclusivo y plural que favorece el conocimiento y aprecio por la diversidad cultural y lingüística de México”. (SEP, 2011a, p. 19).

Uno de los propósitos de la reforma 2011 fue articular la progresión de los contenidos de educación básica, de modo que, tanto prescolar, primaria y educación secundaria pudieran tener una consecución de los contenidos de enseñanza y alcanzaran al término de la educación básica los estándares curriculares. Este plan de estudio prometió una mejor articulación de los contenidos y a la vez una revisión de las investigaciones realizadas, así como la colaboración de especialistas. Esto, hizo pensar que en el tema de números decimales hubiese un avance en el contenido, así como en su estructuración en comparación con los libros con las investigaciones de Ávila (2008), Ávila y García (2008), y Ávila (2013).

Dicho esto, se analizó y se describió el análisis sintético que se hizo a los programas de estudio 2011, en los grados escolares de cuarto, quinto y sexto de primaria. Se percibió que la estructuración de cada programa fue la misma en los tres grados, es decir, se comenzó por la presentación de programas de estudios, posteriormente se describió las diferentes asignaturas que se llevan en primaria y se terminó con una guía para el maestro con la cual se pretende orientar a cada docente como llevar a cabo estos programas de estudio.

En lo que respecta a la asignatura de matemáticas en el programa de estudios 2011, esta tiene la siguiente estructuración: primero se presentan los propósitos de estudio, posteriormente se sigue con el enfoque, los estándares curriculares y aprendizajes esperados, por último, se describen los contenidos de cada bloque. Esta parte de la organización es importante en medida que cada uno de los aspectos mencionados anteriormente son considerados como expectativas de aprendizaje que se van alcanzado conforme el estudiante transita de grado escolar, nivel educativo, o simplemente de contenido a contenido. Estos aspectos aluden al objetivo general de esta investigación que es describir los significados de los números decimales que están presentes en los desafíos de los libros de texto gratuito de matemáticas de educación primaria en México, y partiendo que los significados parten de una expectativa de aprendizaje se considera importante saber qué significados se proponen en el programa de estudios y cuáles de ellos están presentes en los libros de texto gratuito de matemáticas.

En la revisión sintética que se realizó en cada uno de los programas de estudio que el área de matemáticas se percató que viene su estructura similar en cada uno de ellos, lo que cambia son los aprendizajes esperados y los contenidos a trabajar, por ello se decidió describir de manera general los tres programas y mostrar en cada uno de ellos los contenidos y aprendizajes esperados que aludieron a los números decimales.

Primero se describen los propósitos de las matemáticas para la educación primaria enfocados al tema de números decimales que marca el programa de estudios 2011 con estos propósitos se espera que los estudiantes al término de su educación primaria:

- Conozcan y usen las propiedades del sistema decimal de numeración para interpretar o comunicar cantidades en distintas formas. Expliquen las similitudes y diferencias entre las propiedades del sistema decimal de numeración y las de otros sistemas, tanto posicionales como no posicionales.
- Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos. (SEP, 2011b, p. 60).

De acuerdo a los propósitos anteriores se puede observar que hay dos finalidades en la educación primaria, la primera es enfocada a que los estudiantes comprendan las propiedades de los números decimales y la otra a que aprendan los algoritmos de los números decimales. Se espera que todo ello, se logre mediante los estándares y aprendizajes esperados. La SEP (2011a) menciona que “Los estándares son descriptores de logro y definen aquello que los alumnos demostrarán al concluir un periodo de estudio escolar, sintetizan los aprendizajes esperado que, en los programas de educación primaria y secundaria, se organizan por asignatura-grado-bloque; por otro lado, los aprendizajes esperados son indicadores de logro que en términos de la temporalidad establecida en los programas de estudio, definen lo que se espera de cada alumno en términos de saber, saber hacer, y saber ser. (pp.29).

De acuerdo a lo anterior se trabajó con los siguientes estándares curriculares para el tema de números decimales:

- Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales.
- Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales.

- Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales. (SEP, 2011b, p. 62).

Los estándares curriculares se organizan en el eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico, que, a su vez, este se divide en temas. Al primer estándar le correspondió el tema de números y sistemas de numeración, al segundo le tocó el tema de problemas aditivos y al tercero le tocó el tema de problemas multiplicativos. En esta organización hubo, datos interesantes, por ejemplo, el primer estándar al leerlo a simple vista pareciera que en los programas de estudio se enfocaron a la educación nominalista que mencionó Ávila (2008) la cual sugiere que debe ser eliminada para atender los aspectos conceptuales, sin embargo, este estándar fue más allá de leer y escribir decimales.

En el estándar número dos fueron enfocados a las operaciones de suma y resta que fueron separadas de la multiplicación y división esto debido a que los algoritmos de la suma y la resta aportaron conocimientos necesarios para abordar posteriormente la multiplicación y división y también aportaron a la vez a los aspectos conceptuales necesarios para comprender números decimales.

Por otra parte, los aprendizajes esperados están divididos en la educación primaria y en la educación secundaria. Es decir hay aprendizajes esperados que se alcanzan en un ciclo escolar, en diferentes ciclos escolares, otros se alcanzan al término de la educación primaria o incluso hay aprendizajes esperados que se encuentran en primaria pero que culminan en educación secundaria. En los programas de estudio de educación primaria se detectó los siguientes aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales. (SEP, 2011b, p.77)
- Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales. (SEP, 2011c, p. 80).
- Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación. (SEP, 2011d, p. 76.).
- Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones. (SEP, 2011d, p. 76.).
- Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales. (SEP, 2011d, p. 79.).
- Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial. (SEP, 2011d, p. 79.).

En los programas de estudio de educación primaria el tema de números decimales se inicia en cuarto año y concluye en sexto año. En cuarto año se inicia en el bloque uno con los contenidos de: notación desarrollada de números naturales y decimales; valor posicional de las cifras de un número y resolución de sumas o restas de números decimales en el contexto del dinero. Análisis de expresiones equivalentes. (SEP, 2011b, p. 74). Se continúa en el bloque dos con los contenidos de: uso del cálculo mental para resolver sumas o restas con números decimales. (SEP, 2011b, p. 75). En el bloque tres se vio el contenido de descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas. (SEP, 2011b, p. 76). En el bloque cuatro se ve el contenido de: resolución de sumas o restas de números decimales en diversos contextos, al término de este contenido se espera que los alumnos alcancen el aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales. (SEP, 2011b, p. 76).

La progresión del contenido continúa en quinto grado, en este año se inicia el tema de números decimales en el bloque dos con el contenido de: análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas; y resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal. (SEP, 2011c, p. 77). En el bloque tres se ve el contenido de: uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales (SEP, 2011c, p. 78). En el bloque cinco se ve el contenido de: resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada. (SEP, 2011c, p. 80). Se muestra que en quinto año no se alcanzó ningún aprendizaje esperado pero se dan contenidos que sirven para alcanzarlo en el siguiente ciclo escolar.

En sexto año se espera que los alumnos en el bloque uno alcancen los aprendizajes esperados de: resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación; y, resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones (SEP, 2011d, p.76). Dado que en quinto se abordaron algunos temas es en sexto que se cierra con los siguientes contenidos y con los cuales se pretende alcanzar los aprendizajes esperados descritos para este grado, los contenidos son: lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales; explicitación de los criterios de comparación; y, resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales; Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales; y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. (SEP, 2011d, p.76).

En el bloque dos se ve el contenido de: ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. (SEP, 2011d, p.77). Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera. En el bloque 3 se ve el contenido de: identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales. SEP, 2011d, p.77). En el bloque cuatro se atienden los contenidos de: conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal; e identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad. SEP, 2011d, p.78). En el bloque quinto se termina de ver el contenido de decimales y en la primaria se concluye con los aprendizajes esperado de: resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales, se cierre con el contenido de: resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural. SEP, 2011d, p. 79).

De acuerdo a lo descrito anteriormente se puede concluir que en la educación primaria, los aprendizajes esperados fueron enfocados a que los alumnos al término de su educación primaria aprendieran el algoritmo de las cuatro operaciones básicas utilizando números decimales, y qué, para llegar a ese proceso se propuso entender algunas de las representaciones de los números decimales, el valor posicional de los números decimales y se inició la propiedad de la densidad.

Ya descritos los aprendizajes esperados que están contenidos en los programas de estudio (SEP, 2011), en los siguientes capítulos se abordan la interpretación de los significados que se encontraron en cada uno de los aprendizajes esperados, tomando como referencia los desafíos matemáticos que se proponen en los libros de texto

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE ESPERADO "RESUELVE PROBLEMAS QUE IMPLIQUEN LEER, ESCRIBIR Y COMPARAR NÚMEROS NATURALES, FRACCIONARIOS Y DECIMALES, EXPLICITANDO LOS CRITERIOS DE COMPARACIÓN"

En este capítulo se presenta la interpretación de la unidad de análisis que abordó el aprendizaje esperado de: *resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación* (SEP, 2011d, p.76). Los datos recabados fueron a través de fichas descriptivas de cada uno de los desafíos que integran la unidad de análisis. Para llevar a cabo la descripción de los mapas conceptuales y los significados que se encontraron en ella, se organizó la descripción de este capítulo en tres secciones, en la primera se explica cómo está organizado el aprendizaje esperado en los planes y programas de estudio; la segunda muestra la organización de los significados del aprendizaje esperado; y en la tercera sección se describe la aportación a la matemática educativa con esta investigación y la evolución de los libros de texto con respecto a las fuentes revisadas en los antecedentes y otras referencias bibliográficas.

6.1. Descripción general del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación

En esta sección se explica de manera general cómo se integra el aprendizaje esperado y cómo norma al libro de texto.

El aprendizaje esperado es un indicador de logro que define lo que se espera que cada alumno adquiera en un tiempo establecido, vienen organizados por asignatura, grado y bloque, además constituye un referente para la planeación y evaluación (SEP, 2011a, p. 29), de forma que el aprendizaje esperado es el que norma qué enseñar de acuerdo a la asignatura que se imparte en un determinado tiempo, en términos del referente teórico que se utiliza en esta investigación, el aprendizaje esperado es la exceptiva de aprendizaje en el cual se debe considerar significados del objeto matemático.

Cabe señalar que en los programas de estudio, los aprendizajes esperados están regidos por un eje temático de acuerdo a la rama de matemática que se vaya a abordar, para el caso de los números decimales corresponde a la rama de la aritmética, por lo tanto el eje temático que se abordó fue el de sentido numérico y pensamiento algebraico. Dentro de ese eje temático, se divide a la aritmética en tres temas, la primera es número y sistemas de numeración; la segunda es problemas aditivos; y la tercera es problemas multiplicativos.

Para el caso específico del aprendizaje esperado que se analiza en este capítulo el tema es de números y sistemas de numeración, dentro de este tema hay estándares de aprendizaje que rigen al aprendizaje esperado, el que le corresponde al aprendizaje esperado analizar en este capítulo fue: Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales. (SEP, 2011b, p. 62).

El aprendizaje esperado de este capítulo se centra en los números decimales, sin embargo, no se puede dejar de lado los números naturales y fracciones ya que estos abonaron al tema de números decimales. Al hacer el análisis de este aprendizaje esperado se concluye que este se inicia en el bloque 1 de cuarto año y se culmina en el bloque 1 de sexto año, lo cual quiere decir, que al egresar de educación primaria los alumnos deben tener estos conocimientos cimentados para poder avanzar en los demás contenidos y seguir abonando al estándar curricular.

A continuación se muestra la tabla 16 que describe la manera en cómo está compuesto el aprendizaje esperado que corresponde a este capítulo y en qué bloques se trabaja en educación primaria.

Tabla 16 *Descripción de la dosificación y componentes del aprendizaje esperado (SEP, 2011d, p. 76.).*

Aprendizaje esperado resuelve problemas que implican leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.		
Eje temático:		
Sentido numérico y pensamiento algebraico.		
Tema:		
Números y sistemas de numeración.		
Estándar curricular:		
Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales.		
Grado escolar:	**Grado escolar:**	**Grado escolar:**
Cuarto año	Quinto año	Sexto año
Bloque 1	**Bloque 2**	**Bloque 1**
Notación desarrollada de números naturales y decimales. Valor posicional de las cifras de un número.	Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas.	Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de

	los criterios de comparación.
Bloque 3 Descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas.	**Bloque 3** Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales.

SEP, (2011b); SEP, (2011c); y SEP, (2011d).

En la tabla anterior se ve reflejado que el aprendizaje esperado aborda diferentes contenidos importantes del tema de números decimales.

De acuerdo a los autores mencionados en los antecedentes, al realizar el análisis sintético de la tabla 16 se puede observar que hay significados de la estructura conceptual que se vieron reflejados en los antecedentes como es el caso del valor posicional de los números decimales de las cifras, lectura, escritura y comparación de los números decimales, fracción decimal, propiedad de la densidad (Konic et al., 2010; Ávila y García, 2008 y Centeno, 1997).

Uno de los aspectos que no se promueve en la tabla 16, son los sistemas de representación de cada contenido, así como el análisis fenomenológico. En la siguiente subsección se analizan los desafíos que componen cada uno de estos contenidos y del aprendizaje esperado en general, de donde se obtuvieron los significados del tema de números decimales que se promovieron en los libros de texto, y qué componentes del significado se tomaron en cuenta para la elaboración de las actividades que permean en el aprendizaje.

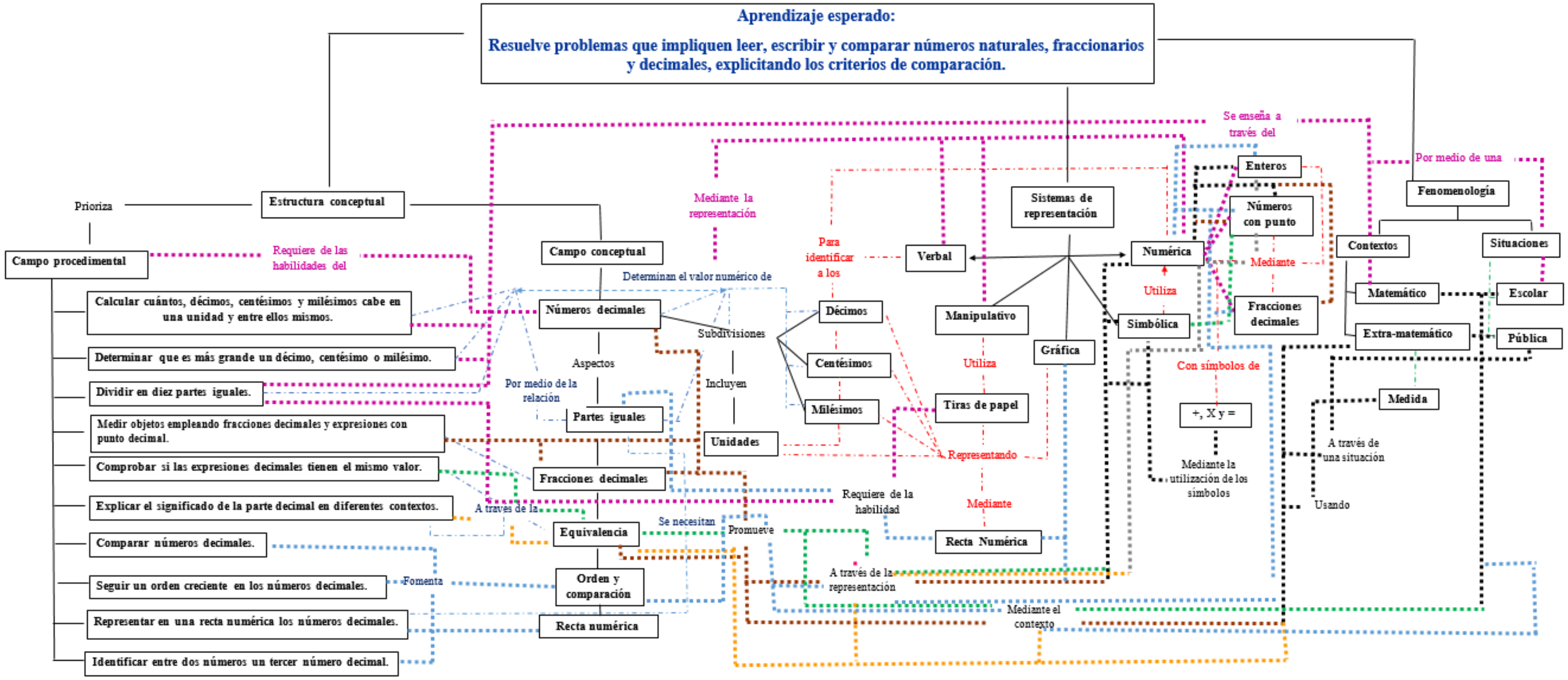
6.2. Significados de los números decimales en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación

En esta sección, se presenta el mapa conceptual donde se organizaron los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación (SEP, 2011d, p. 76.).

El análisis que se realizó del mapa conceptual fue enfocado a la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico componentes del significado propuestos por Rico (2012). Especialmente se puso énfasis al campo procedimental y a los sistemas de representación que se promovieron en él, debido a que se observó en el mapa conceptual que los libros de texto priorizaron más al campo procedimental que al campo conceptual, puesto que se priorizaron destrezas matemáticas que fueron necesarias para adquirir los significados de la estructura conceptual de los números decimales.

Un aspecto importante que resultó en los antecedentes de esta investigación es que se describe que se tiene que potenciar los sistemas de representación de los números decimales, sin embargo en el programa de estudio no vienen definidos los sistemas de representación y se identificó que es una de las principales dificultades que hay en la comprensión del tema de números decimales. Aunado a esto, en el nivel de primaria es necesario que lo aprendido en clases sea un conocimiento funcional en la vida real por lo que también se tomó en cuenta cuál fue el análisis fenomenológico que utilizaron los libros de texto para la enseñanza de este aprendizaje esperado. Para describir los significados se presentó la Figura 9 que representó el mapa conceptual del aprendizaje esperado analizado.

Figura 7 Mapa conceptual de los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación



Fuente: elaboración propia, basado en las fichas de recogida de datos que fueron basadas en el libro de cuarto año (SEP, 2019a), (SEP, 2019b) y (SEP, 2019c).

Con base en el mapa conceptual de la figura 7, se muestra que en los libros de texto hay significados que no están en la estructura conceptual ni tampoco la procedimental pero que de cierta forma aluden a ese significado importante en la comprensión del tópico matemático de números decimales, tal fue el caso del significado de la relación parte-todo, significado de las fracciones que mencionaron Linares y Sánchez (1997). Cabe destacar que este significado está asociado al significado de la fracción y a la destreza procedimental de dividir en partes iguales, por tal motivo, se considera que tal vez sea por ello su ausencia.

Para describir y argumentar el significado de la relación parte-todo en los números decimales se describe lo que se encontró en las primeras destrezas del campo procedimental, estas fueron enfocadas a entender los términos de los décimos, centésimos y milésimos significados conceptuales mencionado por Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010), mismos términos que forman parte de los significados de la estructura conceptual de los números decimales mencionados por Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010), y el significado de conceptual de partes iguales mencionado por Linares y Sánchez (1997), con este último término conceptual se desarrolla la relación parte-todo.

Para entender la estructura conceptual de los términos de los décimos, centésimos y milésimos y apropiarse del valor numérico que representa cada uno, se utilizó el campo procedimental específicamente las destrezas de gráficas y de representación, esta fue "dividir en partes iguales" mencionada por Linares y Sánchez (1997) y la destreza aritmética que fue calcular cuántos décimos, centésimos y milésimos caben en la unidad y entre ellos mismos.

De forma que al dividir en partes iguales se debe dotar de valor numérico a cada parte poniendo en práctica la relación parte-todo, es decir, que, al dividir la unidad, el décimo o centésimo se debe ser consciente que se está dividiendo en 10 partes iguales y de esas partes se va a tomar una parte, la cual formará una fracción en este caso una fracción decimal mencionada por Linares y Sánchez (1997); Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010). De esta forma las destrezas gráficas y de representación y aritméticas ayudaron a determinar el valor numérico de los décimos, centésimos y milésimos. Así mismo, los convenios que proporcionó el libro de texto de cuarto año ayudaron a establecer la destreza procedimental de la equivalencia entre la representación numérica de números con punto y fracciones decimales mencionada por Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010), estos convenios fueron: "a cada parte llámenla 1 décimo de la unidad o $\frac{1}{10}$, o bien 0.1; a cada parte llámenla 1 centésimo de la unidad o $\frac{1}{100}$, o bien 0.01; a cada parte se le conocerá como 1 milésimo de la unidad o $\frac{1}{1000}$, que también se puede expresar como 0.001" (SEP, 2019a, p.16).

Para darle aplicación a los convenios establecidos en la destreza aritmética anterior, se prosiguió con el siguiente significado que usó la destreza aritmética del campo procedimental que fue: emplear fracciones decimales y expresiones con punto en un contexto extra-matemático, en esta destreza se incluyeron los términos de equivalencia mencionado por Centeno (1997) y Ávila y García (2008); y fracciones decimales en la estructura conceptual de esta destreza aritmética. Las representaciones que se utilizaron fueron la simbólica y la numérica esta última mediante las fracciones decimales mencionadas por Linares y Sánchez (1997); Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010) y números con punto mencionada por Ávila y García (2008), se usó el contexto extra-matemático en el fenómeno de la medida mencionado por Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010) en una situación pública. La actividad cognitiva de este está destreza aritmética consistió en que se representara mediante la representación numérica de las fracciones decimales y números con punto, el largo y el ancho de diferentes objetos que se midieron con la representación manipulativa de las tiras de papel en la destreza gráfica y de representación anterior, a través de la representación simbólica mediante los símbolos de más (+) e igual (=) expresaran la equivalencia entre la representación de fracción decimal y la representación de números con punto para que de esta forma quedará establecida y con aplicación la equivalencia entre la representación de números con punto y fracciones decimales con el apoyo visual de las regletas de la actividad anterior.

Finalizada la equivalencia entre la representación numérica de números con punto y fracciones decimales se continuó con el campo procedimental con la destreza aritmética: comprobar si las expresiones decimales tienen el mismo valor, la estructura conceptual de la destreza aritmética fue el término de la equivalencia. Esta destreza se trabajó a través de la representación simbólica utilizando las notaciones de más (+), por (x) e igual (=) y usando la representación de números con punto y números enteros en el contexto matemático en un situación escolar; mientras que en el contexto extra-matemático se indican resolver problemas por procedimientos personales y diversos, debido a que no especificaron alguna operación para resolverlos.

La destreza aritmética de comprobar si las expresiones decimales tienen el mismo valor, partió de la idea que se ya sabía lo que significa la notación .50 y el valor numérico que representa, puesto que las destrezas anteriores fueron para establecer esa equivalencia. Así mismo, se interpretó que esta destreza fue un preámbulo para intentar usar la multiplicación con números decimales, sin embargo cuando se vio esta destreza, los libros de texto no habían presentado el algoritmo de la multiplicación de números decimales formalmente por lo que fue difícil que se haya utilizado. Por esta razón, se esperó que se recurriera a procedimientos personales de tal forma que se llegue a las expresiones equivalentes a través de los signos más (+), por (x) e igual (=), sabiendo que la multiplicación es la simplificación de una suma iterada y puedan sumar los números decimales reconociendo el valor numérico de los décimos y centésimos.

Después de las destrezas anteriores que fueron enfocadas a establecer la equivalencia entre fracciones decimales y números con punto y partiendo del hecho que se ha estableció el valor numérico de los números decimales en la representación de números con punto, ahora se sigue con la destreza explicar el significado de la parte decimal, esta destreza que pertenece al campo procedimental pretendió hacer reflexionar acerca del significado de la parte decimal de un número utilizando la estructura conceptual del término equivalencia a través de la representación numérica de números con punto mediante el contexto extra matemático en una situación pública con el fenómeno de medida. En este caso, la destreza explicar el significado de la parte decimal propuso que a través de la realización de cálculos matemáticos se interpretara el significado de la parte decimal en diferentes fenómenos y con distintas unidades de medida contexto utilizado por Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010) para que supiera explicar el valor numérico que representa el número decimal indicado en cada fenómeno.

Para concluir con el aprendizaje esperado de este mapa conceptual se desglosan las destrezas que faltan, en las cuales se interpretó que van enfocadas a la enseñanza de la propiedad de la densidad considerada en los significados conceptuales de Centeno (1997); y Ávila y García (2008); pero de una forma a la que no se alude a ella en la estructura conceptual, sino que a través de la estructura conceptual de los términos de orden mencionado en Centeno (1997); y Ávila y García (2008); y comparación de los números decimales mencionado por Ávila y García (2008). Para estos términos se encontró que la primera destreza en el campo procedimental fue la destreza aritmética de comparar números decimales mencionado por Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic (2010), el sistema de representación que se usó fue la representación numérica de números con punto en un contexto matemático y una situación escolar. La comparación de los números consistió en decir que número es más grande que otro, la dificultad fue que había números que tenía más cifras que otros por lo cual el alumno debía tener conocimiento del valor numérico de las cifras de los números decimales, mismos que en las destrezas anteriores había adquirido a través de la equivalencia.

Aunando al término conceptual orden mencionado por Centeno (1997); y Ávila y García (2008), se sigue con la destreza aritmética del campo procedimental: seguir un orden creciente en los números decimales mencionada por Centeno (1997); y Ávila y García (2008), se utilizó la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar. Esta destreza implicó tener conocimiento del valor numérico de cada cifra de los números decimales debido a que se usa la representación de números con punto y con ella, es difícil ordenar de mayor a menor los números decimales porque se suele confundir las propiedades de los números enteros con las propiedades de los números decimales. Un claro ejemplo de esto es razonar que un número decimal con mayor número de cifras es mayor por el hecho de que son más cifras y no fijarse en el valor numérico que tiene cada una de ellas.

Para concluir con los términos orden y comparación en la estructura conceptual se agregó el término de la recta numérica a la estructura conceptual a través del campo procedimental mediante las destrezas aritméticas de: representar los números decimales en la recta numérica; e identificar entre dos números un tercer número. Los sistemas de representación que se utilizaron fueron la representación gráfica a través de la recta numérica mencionados por Linares y Sánchez (1997); Centeno (1997); y Ávila y García (2008, la representación numérica a través de la representación con números enteros, números con punto y fracciones decimales en los contextos, matemático en un situación escolar. En las destrezas aritméticas anteriores el término de la recta numérica tomó un significado conceptual más que como una representación, debido a que con la recta numérica se tenía que aplicar las destrezas de los términos conceptuales de orden y comparación aprendidos anteriormente. Así que se interpretó que la función de la recta numérica sirvió únicamente para ubicar los números enteros y números con punto en cada recta y posteriormente enunciaron un número dentro de ellos.

Finalmente con base en lo descrito anteriormente, en las tablas 17, 18 y 19 se enlistan los significados encontrados del aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación:

Tabla 17 *Significados encontrados de los números decimales por campo conceptual y procedimental en el libro de cuarto año.*

Cuarto año	
Aprendizaje esperado:	
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
● Números decimales a través del valor numérico de los décimos centésimos y milésimos, mediante las representaciones verbal y numérica, esta última en la representación de fracción decimal y números con punto en el contexto matemático a través de una situación escolar ● Emplear números decimales en el contexto extra-matemático, en el fenómeno de medida, en una situación pública, para favorecer a la estructura conceptual de la equivalencia mediante la representación simbólica de las fracciones decimales y números con puntos.	● Dividir en partes iguales mediante la representación manipulativa por medio de tiras de papel divididas en 10 partes iguales en un contexto matemático a través de una situación escolar.

	• Comprobar la equivalencia de expresiones decimales mediante la representación simbólica en el contexto matemático en una situación escolar.

Fuente de elaboración propia, basada en los mapas conceptuales obtenidos de las fichas de recogida de datos del libro de cuarto año. (SEP, 2019a).

Tabla 18 *Significados encontrados de los números decimales por campo conceptual y procedimental en el libro de quinto año.*

Quinto año	
Aprendizaje esperado:	
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
• Explicar el significado de la parte decimal utilizando el término de equivalencia de la estructura conceptual a través de la representación numérica de números con punto mediante el contexto extra matemático en una situación pública en el fenómeno de medida.	

Fuente de elaboración propia, basada en los mapas conceptuales obtenidos de las fichas de recogida de datos del libro de quinto año. (SEP, 2019b).

Tabla 18 *Significados encontrados de los números decimales por campo conceptual y procedimental en el libro de sexto año.*

Sexto año
Aprendizaje esperado:
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.

Campo conceptual	Campo procedimental
	• Comparar números decimales mediante la representación aritmética de números con puntos en un contexto matemático en una situación escolar. • Ordenar números decimales a través de la representación numérica de números con puntos en un contexto matemático y una situación escolar. • Representar en la recta numérica los números decimales mediante la representación de números con puntos en un contexto matemático en una situación escolar. • Identificar entre dos números un tercer número utilizando la estructura

Fuente de elaboración propia, basada en los mapas conceptuales obtenidos de las fichas de recogida de datos del libro de sexto año. (SEP, 2019c).

Como conclusión de esta subsección se obtuvo que al desglosar la información del mapa se vio que hay significados completos, es decir, tienen las tres componentes del significado que mencionó Rico (2012) que fueron la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico, pero también hay significados parciales, Cañadas et al. (2018) mencionó que los significados parciales carecen de alguno de las componentes del significado, en este caso los significados del aprendizaje carecen de la estructura conceptual específicamente de la parte conceptual porque la parte procedimental si se integró.

Como se pudo ver en los libros de texto muy pocas veces abonaron a la parte de la estructura conceptual debido a que la intención de los libros fue brindarle la menor cantidad de información matemática a los alumnos para que ellos intenten resolver el problema con sus conocimientos previos, por ello fue que se encontró vacía esta parte de la estructura conceptual. Así mismo, se interpretó que los libros de texto trabajaron la parte conceptual dentro de la parte procedimental ya que esta fue implícita en ella y fue la que abonó para que se fuera construyendo los términos y los conceptos del aprendizaje esperado.

En cuanto a los sistemas de representación se vieron reflejados diferentes representaciones como fueron la numérica, la manipulativa, la gráfica, la simbólica y verbal. Sin embargo, hizo falta en los sistemas de representación mostrar un sentido y no solo presentarlo como un signo que representa un objeto matemático. Por ejemplo, el convenio del libro de texto del primer significado únicamente puso a la representación de números con punto como un signo que representó a los números decimales pero no le da un sentido, esto mismo pasó con la representación gráfica de la recta numérica, se representa como un tema más sin darle sentido y referencia al signo, esto es uno de los aspectos que se deben trabajar más en los libros de texto.

Por último, en la tercer componente que fue el análisis fenomenológico se priorizó que la mayoría de las destrezas usó el contexto matemático para generar más matemáticas, debido a que fue necesario contemplar los significados de los números decimales para comprenderlo, enseñarlo y aprenderlo, específicamente en este aprendizaje esperado puesto que por medio de este, se le dio comprensión a los diferentes elementos de los números decimales necesarios para comprenderlos y poder operar con ellos entendiéndose como números únicos, con propiedades diferentes a los números decimales y entendiendo cognitivamente el valor numérico que representan. Una vez que se encontraron los significados de los números decimales del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación, que se promovieron en los libros de texto de cuarto, quinto y sexto año. En la siguiente sección se describió la interpretación que se hizo de los significados encontrados en los libros de texto de acuerdo a las actividades que se analizaron en los diferentes desafíos.

6.3. Descripción de la interpretación de los significados de los números decimales del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación de acuerdo a las actividades propuestas en los desafíos.

Reflexionando e interpretando los significados que se encontraron en la sección anterior se concluyó lo siguiente, se interpretó que en los libros de texto 2011 hubo una evolución en el contenido de los números decimales con respecto a la enseñanza que se propuso en los anteriores libros de texto, al respecto Ávila (2008) mencionó:

> “la enseñanza de números decimales consistía en hacer hincapié en su escritura mediante los principios del sistema decimal de numeración y relevar el valor posicional de las cifras, de tal suerte que, después de algunos ejercicios con orientación nominalista, es decir, centrarse en el aprendizaje de los nombres de las columnas, así como en la lectura y escritura de los números sin detenerse en el análisis de los significados subyacentes” (p. 5).

Con referencia a esta cita, se vio en los libros de texto un avance en la compresión de números decimales porque se interpretó que en los libros de la reforma 2011 se tomaron en cuenta los significados subyacentes de los números decimales que forman parte de la estructura conceptual y procedimental, así mismo se incluyeron diversos sistemas de representación. Aunado a esto, se vio reflejada la evolución del contenido de números decimales, esta fue principalmente en el campo procedimental porque fue a través de él que se logró dejar de lado el término conceptual del valor posicional y la memorización del nombre de las cifras, a partir de las destrezas procedimentales se mostró la equivalencia entre las representaciones numéricas de fracciones decimales y números con punto, con esta evolución se obtuvo el primer significado de los números decimales.

Con referencia al primer significado que fue: números decimales a través del valor numérico de los décimos centésimos y milésimos, mediante las representaciones verbal y numérica, esta última en la representación de fracción decimal y números con punto en el contexto matemático a través de una situación escolar, se interpretó que el libro de texto propuso entender las representaciones: verbal; numérica (números con punto y fracciones decimales); y la representación manipulativa mediante la destreza procedimental del valor numérico de los números decimales que simbolizó cada representación, alejándose de la enseñanza del término conceptual del valor posicional. Esto se interpretó debido a que se le dio mayor importancia a entender los significados subyacentes de los números decimales y por medio de la destreza procedimental: establecer la equivalencia entre la representación numérica de fracciones decimales y la representación manipulativa de tiras de papel para que a través de esta transformación de un sistema de representación a otro, se le diera significado a la representación numérica de números con punto. Sin embargo, se consideró que no fue apropiada la forma de en qué se llevó a cabo la destreza procedimental de: establecer la equivalencia entre las representaciones numéricas de fracciones decimales y números con punto ya que esta transformación sintáctica variante se llevó a cabo mediante los convenios: “a cada parte llámenla 1 décimo de la unidad o $\frac{1}{10}$, o bien 0.1”, es decir, solo mecanizan que $\frac{1}{10}$ equivale a 0.1, (SEP, 2019a, p.16), sin efectuar cálculos u operaciones los cuales fueron necesarios para comprender el cambio de una representación a otra. Antero (2015) mencionó que en el libro de texto:

> “las actividades planteadas no profundizan en la comprensión de la equivalencia entre la fracción decimal y los números decimales, ya que se abordan de manera rápida y superficial al indicar que una parte de la tira se puede llamar de una u otra forma. Bajo estas consideraciones, externamos que el estudiante difícilmente comprenderá que $\frac{1}{10}$ sea igual a 0.1 o que $\frac{1}{100}$ sea igual a 0.01 “. (p.52).

Tomando en cuenta lo anterior, se consideró que aunque el libro de texto evolucionó y no usó la enseñanza nominalista, sino que, trató de enseñar por medio de la destreza procedimental: equivalencia entre las representaciones numéricas de números decimales y números con punto, hizo falta trabajar la transformación de un sistema de representación a otro. Especialmente hizo falta realizar énfasis en la transformación sintáctica variante entre las representaciones numéricas de fracciones decimales y números con punto, dotando de sentido a la representación de números con punto, siendo esto una de las mayores complejidades de la enseñanza y el aprendizaje en los números decimales. Con respecto a la transformación sintáctica variante entre las fracciones decimales y números con punto Ávila (2008) y Antero (2015) aluden a que el vínculo entre fracciones decimales con los números decimales es un proceso complejo, pero que es necesario para crear el significado en los estudiantes, Antero (2015) agregó que la transición tomará sentido cuando se reconozca la relación entre ambas representaciones y permitan reconocer el valor que representa cada cifra en la representación de números con punto. Así mismo, Oviedo et al. (2012) mencionaron que para que se logre entender la transformación de un sistema de representación a otro es necesario que haya cálculos y procedimientos que ayuden a la conversión de ambas representaciones.

Lo anterior resultó importante debido a que una de las aportaciones que se hizo con esta investigación es que los libros de texto deben integrar diversas representaciones en el estudio de los números decimales, así como agregar el estudio de las fracciones como antecedente para ver los números decimales. El estudio de las fracciones debe estar enfocado a entender el término de la estructura conceptual de la relación parte-todo para que con ella se comprendiera a los números decimales mediante la representación numérica de las fracciones decimales. A su vez, entendiendo la representación numérica de fracciones decimales y el valor que representa cada fracción decimal, por ejemplo $\frac{7}{10}$, entender que el entero se dividió en 10 partes iguales, y posteriormente de esas diez parte iguales se tomaron 7 partes, ayuda a dotar de valor numérico a la fracción decimal, para que después de adquirir el valor numérico de las fracciones decimales, se pueda llevar a cabo la transformación sintáctica variante entre las representaciones numéricas de fracciones decimales y números con punto para que de esta forma se doten de significado mediante las destrezas del campo procedimental de realizar cálculos y diversos procedimientos. Para ello, es necesario que también se enseñe en la estructura conceptual las 5 dimensiones de las fracciones, en este caso es necesario que se entienda que una fracción puede ser vista como un cociente de dos números, para que de esta forma, al realizar la destreza procedimental de efectuar el cálculo de la conversión de fracciones decimales a números con punto se dote de significado a la representación de números con punto que es la que más se utiliza para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales en el nivel de primaria.

Lo anterior resultó difícil de llevar a cabo en un ciclo escolar y en una secuencia de aprendizaje, debido a que en cuarto año se inició con este tema y para este ciclo aún no se ve la destreza procedimental de convertir fracciones a decimales a números con punto porque todavía no se aborda el algoritmo de la división con punto decimal este se ve hasta sexto año, además se debe tener conocimiento de las fracciones como cociente, aspecto que se desconoce totalmente en cuarto año de primaria. Aunado a esto fue necesario diferenciar entre el término conceptual de número decimal como objeto matemático y la representación numérica de números con punto, así como la representación numérica de las expresiones decimales. Es relevante que se desarrolle esta parte y no solo que se dé la transformación sintáctica variante de una representación a otra mediante un convenio, de esta forma se ayudaría a darle sentido a la representación numérica de números con puntos.

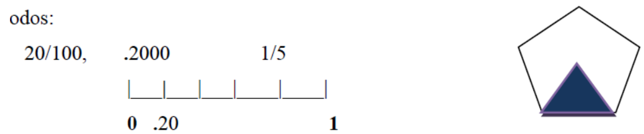
En cuanto al objeto matemático (números decimales) y la representación de este, Oviedo et al. (2012) mencionaron que “si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática. (p.30). Por su parte Ávila y García (2008) mencionaron que no deben confundirse los números decimales con una de sus representaciones mediante la escritura con punto ya que existen objetos matemáticos diferentes a los números con punto que usan la misma representación, tal es el caso de los números irracionales y los decimales periódicos. Sin embargo, como un término de la estructura conceptual el número decimal y como objeto matemático va más allá de una representación de número con punto y es difícil dar una definición de números decimales debido a la pluralidad de representaciones que tiene. Se interpretó que el libro de texto no realizó esta diferenciación del concepto de número decimal con la representación de estos números aspecto que a lo largo de los desafíos presentará obstáculos de aprendizaje.

Aunado a lo anterior, hay que resaltar que un acierto del libro de texto fue utilizar distintas representaciones para enseñar el término de la estructura conceptual de la equivalencia de los números decimales, al respecto Oviedo et al. (2012), mencionaron que “no habrá aprendizaje sin el recurso de varios sistemas semióticos de representación lo que implica la coordinación entre los mismos por parte de los alumnos”. (p. 31). Para que haya aprendizaje de los números decimales fue necesario conocer las distintas representaciones de los números decimales y la transformación de una representación a otra. Ávila (2013) mencionó que:

> “los decimales implican a la vez la pluralidad de sus representaciones y referentes y la unicidad del concepto que subyace en ellas. Es un reto para la enseñanza hacer comprender a los alumnos que estos diversos registros representan el mismo número, o dicho más formalmente, hacerlos comprender la unicidad del concepto decimal subyacente en esta pluralidad de representaciones”. (p.5).

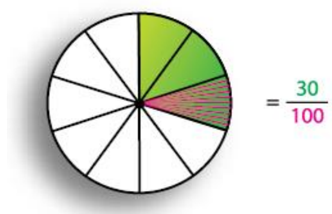
En este caso, lo que se interpretó fue que los libros de texto enfatizaron en las representaciones de los números decimales para mostrar el término conceptual de equivalencia, sin embargo, se interpretó que no basta con poner una actividad utilizando diferentes sistemas de representación, sino que, se debió poner más de una actividad y estas debieron estar mezcladas en los libros de cuarto, quinto y sexto año. Así mismo, se consideró importante mostrar otras representaciones gráficas de área que fueron necesarias para entender las fracciones decimales, tales representaciones pueden fueron: la recta numérica, la representación en pentágono, círculo, cuadrado etc. Por tal motivo, uno de los retos que queda por mejorar a los libros de texto es trabajar con mayor profundidad el significado de la representación de números con punto, de tal forma que los alumnos puedan tomar sentido esta representación a través de la traducción de un sistema de representación a otro sin dificultad. Las figuras 8 y 9 mostraron ejemplos de representaciones de los números decimales que se sugieren para integrar en la secuencia de enseñanza de los libros de texto.

Figura 8 *Ejemplos de representaciones numérica y gráfica de los números decimales*



(Ávila, 2013).

Figura 9 *Ejemplo de representación gráfica de los números decimales*



(Ávila y García, 2008).

Se continuó describiendo la reflexión del segundo significado que fue parte indispensable del primero para poder llevarlo cabo, este fue: dividir en partes iguales mediante la representación manipulativa por medio de tiras de papel divididas en 10 partes iguales en un contexto matemático a través de una situación escolar. En este significado se reflexionó que la destreza del campo procedimental de dividir en diez partes iguales es una de las grandes ventajas que promueve el libro de texto, el término de partes iguales es un término importante de la estructura conceptual porque ayudó a la comprensión de la representación numérica de números con punto a través de la equivalencia con respecto a la representación numérica de las fracciones decimales. Para entender de donde surgen las fracciones decimales, hay que recurrir a la relación parte-todo, esta relación está implícita en la destreza de dividir en diez partes iguales. Al dividir un entero en partes iguales se jugó un proceso cognitivo que ayudó a entender que a su unidad, la están dividiendo en cierto número de partes y que esas partes corresponden a una pedacito de la unidad, ese pedacito se puede representar mediante una fracción, la cual indicó la cantidad total de partes en las que se dividió la unidad y cuantas se tomó de ella, tal como lo mencionaron Linares y Sánchez (1997):

> “Se presenta esta situación cuando un <<todo>> (continuo o discreto) se divide en partes <<congruentes>> (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de <<objetos>>). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y

> el número total de partes (que puede estar formado por varios <<todos>>). El todo recibe el nombre de unidad. Esta relación parte-todo depende discretamente de la habilidad en dividir un objeto en partes o trozos iguales”. (p. 55).

En este caso particular de las fracciones decimales, se trató de dividir en diez partes iguales a la unidad, a los décimos, centésimos y milésimos. El proceso de dividir en diez partes iguales requirió de ciertas destrezas cognitivas para entender los atributos de la relación parte-todo. En el caso específico del término conceptual de números decimales la destreza procedimental de dividir en diez partes iguales ayudó a comprender de la estructura procedimental de las fracciones decimales y estas a su vez ayudaron a dotar de significado a la representación numérica de números con punto, estas dos representaciones ayudan a comprender parte de la estructura conceptual de los números decimales. Al respecto, Piaget, Inhelder y Szeminska (1960) (citado en Linares y Sánchez, 1997) encontraron que para dividir en partes iguales se requieren desarrollar estas destrezas:

1. Un todo está compuesto por elementos separables.
2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes.
3. Las subdivisiones cubren el todo.
4. El número de partes no coincide con el número de cortes.
5. Las partes también se pueden considerar como una totalidad.
6. El <<todo>> se conserva. (p.81).

Estos autores pusieron en manifiesto las destrezas que se requieren para desarrollar la relación parte-todo, sirven para entender la representación numérica de las fracciones decimales. La primera destreza se trató de entender que un todo está compuesto por partes separables, esta destreza ayuda en la estructura conceptual interna de los números decimales, es decir, ayudan a entender que la unidad de medida se puede separar en unidades más pequeñas que en este caso serían décimos, centésimos y milésimos etc., la destreza procedimental de dividir en 10 partes iguales las tiras de papel, promovía que a través de la división de las tiras de papel en décimos, centésimos y milésimos se entendiera que los números decimales en su estructura interna están compuestos por una potencia de 10, es decir, siempre serán divisibles entre 10 partes iguales, por lo tanto, el dividir en 10 partes iguales aludió a la segunda destreza (la separación se puede realizar en un número determinado de partes), misma que ayudó tomarle sentido a la representación numérica de números con punto, porque a través de la compresión del valor numérico que representan las fracciones decimales se puede hacer la transformación sintáctica variante de esta representación a la representación de números con punto y así otorgarle un significado. La quinta destreza se consideró importante porque entender que las partes de la unidad (en este caso un décimo, un centésimo o milésimo), también pueden ser consideradas como una totalidad y que esta fracción puede subdividirse a su vez en más partes, aludiendo así a la propiedad de la densidad.

Posteriormente Payne (1976) (citado por Linares y Sánchez, 1997), agregó las siguientes habilidades:

7. Manejo de los símbolos relacionados con las fracciones.
8. Las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos.
9. Las fracciones mayores a la unidad.
10. Subdivisiones equivalentes. (p.81)

Estas destrezas se consideraron también relevantes en la estructura conceptual y procedimental de los números decimales porque la destreza número nueve, ayudó a entender que $\frac{12}{10}$ no es equivalente a 0.12, error que comúnmente se comete, debido a que no saben escribir el entero y representar los dos décimos en forma de números con punto además de que no saben la equivalencia que representa cada cifra. La destreza diez fue de gran utilidad para los números decimales, respecto a ella Centeno (1997) mencionó que uno de los errores más comunes en el estudio de los números decimales fue trasladar las propiedades de los números enteros a los números decimales, por ello se piensa que 0.500 es mayor a 0.5 debido a que 500 en los números enteros es mayor que 5, cuestión que el libro de texto promueve mediante la visualización de las tiras de papel a través de la representación manipulativa, pero no necesariamente es que se lleve a cabo.

Una ventaja y desventaja que se observó en las actividades propuestas para llevar a cabo el segundo significado fue que por un lado, el dividir en partes iguales fue necesario para crear la noción de la relación parte-todo y con ella establecer el valor numérico de la representación numérica de fracciones decimales, pero la desventaja que se vio fue que para dividir en partes iguales las tiras de papel fue necesario contar con destrezas métricas para utilizar los instrumentos del juego de geometría y se interpreta que en cuarto año es difícil que los alumnos usen correctamente los instrumentos de medida como la regla, debido a que requiere trazos muy finos y exactos para dividir en partes iguales, sobre todo cuando se trata de dividir en milésimos. Al respecto Antero (2015) mencionó que “las tiras que miden $\frac{1}{100}$ de longitud deben dividirse y recortarse en diez partes iguales para obtener milésimos de la unidad, recortar, representa una estrategia compleja puesto que se obtendrán partes muy pequeñas y al superponerlas o compararlas con otras tiras de diferente medida surgirán complicaciones o errores de medición.

La sugerencia que se da es que se debió agregar el cuadrado y el rectángulo como representación manipulativa para obtener la equivalencia entre los décimos, centésimos y milésimos. La ventaja de usar el rectángulo es que las figuras que se dividen en décimos, centésimos y milésimos son semejantes y por lo tanto se logra percibir de forma visual una proporcionalidad en el tamaño, además que al hacer los trazos y los cortes estos pueden ser más grandes que en la tira de papel ya que tendrán más área, esto permitirá mejor visualización para identificar qué es más grande un décimo, un centésimo o un milésimo. Se considera necesario utilizar la representación ejecutable para ampliar el conocimiento y comprensión en el tema de números decimales.

Otra dificultad que se vio en el libro fue que pidió solo dividir un décimo (de los diez que se realizaron) en partes iguales, para que de esta forma generalizar e imaginar que los 9 décimos restantes también se dividen en 10 partes iguales para que al final quedarán divididos en céntimos. Posteriormente solo se pidió que se dividiera un centésimo en 10 partes iguales y generalizar que los 99 centésimos imaginarios se dividen en diez partes iguales para formar los milésimos. Algo importante que se interpretó fue que no se puede dar por hecho que se llegue a generalizar esta parte de identificar que todos los décimos y centésimos se dividen en 10 partes iguales y se convierten en otra unidad de medida, debido a que es la primera y la única actividad que realizan para dividir en 10 partes iguales.

Para lograr lo anterior, fue necesario llevar las destrezas propuestas por Piaget, Inhelder y Szeminska (1960) (citado en Linares y Sánchez, 1997) especialmente la destreza número tres (las subdivisiones cubren el todo). En este caso, se consideró importante que en las tiras de papel se debió realizar el procedimiento completo de dividir todos los décimos en 10 partes iguales, los centésimos dividirlos en diez partes iguales para entender cognitivamente la destreza procedimental de dividir en 10 partes iguales en las fracciones decimales con respecto al entero. Para que a su vez está abonará a la equivalencia entre las representaciones numéricas de fracciones decimales y números con punto y de ahí crear el valor numérico que representa cada cifra. Antero (2015) mencionó "la noción del número decimal se construye cuando los estudiantes comprenden la expresión en notación decimal de la fracción decimal" (p. 118). Se concluyó que fue indispensable crear la noción de la relación parte para entender las fracciones decimales y que estas a su vez ayuden a entender el valor numérico de los décimos centésimos y milésimos para crear así la noción de número decimal y dotar de significado a la representación numérica de números con punto.

El significado de: emplear números decimales en el contexto extra-matemático, en el fenómeno de medida, en una situación pública, para favorecer a la estructura conceptual de la equivalencia mediante la representación simbólica de las fracciones decimales y números con punto, va ligado a los significados de; números decimales a través del valor numérico de los décimos centésimos y milésimos, mediante las representaciones verbal y numérica, esta última en la representación de fracción decimal y números con punto en el contexto matemático a través de una situación escolar; y dividir en partes iguales mediante la representación manipulativa por medio de tiras de papel dividas en 10 partes iguales en un contexto matemático a través de una situación escolar. En este significado se vio que una vez utilizado el contexto matemático en para entender el término conceptual de las fracciones decimales desde su relación parte-todo y establecer el valor numérico entre las representaciones numéricas de fracciones decimales y números con punto en el significado 1 y 2, se siguió con el contexto extra-matemático, este contexto ayudó a darle aplicación a lo adquirido en el contexto matemático y establecer mediante la representación simbólica la equivalencia entre la representación numérica de las fracciones decimales y número con punto.

Para lograr el significado se realizó la actividad de medir objetos utilizando las tiras de papel hechas en la actividad anterior. Para esta actividad, los sistemas de representación y las notaciones de la estructura conceptual jugaron un papel importante, debido a que la representación simbólica utiliza la notación del símbolo de igual (=) para representar ente caso a la estructura conceptual de la equivalencia, que está a su vez representa la igualdad entre las representaciones numéricas de fracciones decimales y números con punto. Por ejemplo, se usó la notación $\frac{8}{100} = 0.08$, en esta se interpreta que el libro de texto trató de establecer el convenio que el símbolo igual establece una equivalencia bidireccional entre ambas representaciones.

Sin embargo, en el nivel de primaria llegar a este convenio fue difícil, debido a la complejidad que implica la notación del signo igual, por lo que se cree que es poco probable que los alumnos de primaria logren entender el término conceptual de la equivalencia entre las representaciones numéricas de fracciones y números con punto mediante la notación del signo igual. La principal dificultad que se observa es que en educación primaria la notación del signo igual es más vista como un operador. Al respecto Ramírez y Rodríguez (2010) mencionó que “durante los primeros años de educación primaria los niños adquieren el significado del signo igual como ‘el total o resultado de una operación aritmética’, adquiriendo así una comprensión incompleta del signo igual”. (p.8). Por lo tanto es difícil que se comprenda que la notación del signo igual establece una equivalencia entre ambas representaciones.

Así mismo, Ramírez y Rodríguez (2010) mencionaron que para lograr un aprendizaje completo de la notación del signo igual es necesario verlo como operador y como equivalencia numérica. En este caso al interpretar cómo ha sido utilizada la notación y la estructura conceptual del signo igual en los libros de texto se concluyó que fue visto como operador, es decir, la notación del signo igual marcó el resultado de una operación que se lee de izquierda a derecha pero no bidireccional. Ahora como propone el libro de texto a la notación del signo igual en el tercer significado debe ser visto cómo equivalencia numérica con un sentido bidireccional que representó la igualdad entre ambas representaciones, lo cual fue complejo que se logre en cuarto año y conforme lo que se analizó fue más visto como un operador, puesto que el libro de texto utilizó la notación del símbolo más (+) para explicar la representación simbólica de la suma de las fracciones decimales, por ejemplo uso la operación: $\frac{1}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000}$ aludiendo nuevamente a la notación del signo igual como operador entre una operación y un resultado, en el cual se espera que haya una transformación sintáctica variante entre la representación numérica de fracciones decimales y números con punto. Se concluyó que hizo falta trabajar más la estructura conceptual de la notación del signo igual para marcar la equivalencia entre ambas representaciones. La ventaja del significado número tres fue que el libro de texto integró el contexto extra-matemático de la medida, el cual abona a la comprensión de los números decimales al ser vistos como una unidad de medida.

Continuando con el término conceptual de la equivalencia se siguió con el significado de: comprobar la equivalencia de expresiones decimales mediante la representación simbólica en el contexto matemático en una situación escolar. Este significado va ligado al significado anterior, sin embargo, en este significado la notación del signo igual no se utilizó, por el contrario ahora las notaciones que se usaron fueron el símbolo de más (+) y el símbolo de por (X). En este significado se trató de relacionar que una expresión de suma y multiplicación pueden establecer la equivalencia a una cantidad. Al momento en que se presentó este desafío no se había visto el algoritmo de la multiplicación con números decimales, el libro de texto promovió que se use cualquier método para concluir si las expresiones representan el mismo valor o no.

Por lo tanto, al utilizar los procedimientos personales sin utilizar los algoritmos convencionales se está dejando que se ponga en práctica el sentido numérico, al respecto Ávila y García (2008) definieron al sentido numérico como "la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad para usar esta comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias numéricas". (p.70). El sentido numérico ayudará en el significado que se encontró a que se desarrolle el término conceptual de equivalencia a través de la destreza procedimental de realizar operaciones que implícitamente buscarán una igualdad entre el número que se busca y la expresión que se dio.

En el caso específico de los números decimales, Ávila y García (2008) mencionaron que para desarrollar un buen sentido numérico es necesario comprender la estructura conceptual de número decimal, esto implica:

- Entender el significado de los números.
- Comprender que hay distintas maneras de representar un mismo número.
- Tener idea del tamaño de los números.
- Conocer las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas. (Ávila y García, 2008, p.70).

En el caso específico del significado de comprobar la equivalencia de expresiones decimales mediante la representación simbólica en el contexto matemático en una situación escolar, el aspecto que fue necesario abordar fue el de conocer las propiedades de los operaciones y la relación entre ellas, esto debido a que en el nivel de primaria fue difícil que los alumnos conozcan las propiedades de las operaciones, por lo que Ávila y García (2008) mencionaron lo importante es que el alumno utilice las propiedades de las operaciones adecuadamente en los números decimales y no que las identifiquen.

Un ejemplo que viene en el libro de texto y donde fue necesario aplicar la propiedades de las operaciones para desarrollar el sentido numérico fue: 4.50 y 4 X 0.50 + 8 X 0.20, en este ejercicio al desconocer al algoritmo de la multiplicación con números decimales, lo ideal sería que se recurriera al sentido numérico y se evitarán los algoritmos de la suma y la resta. En este caso el sentido numérico se desarrollaría a través de las propiedades de las operaciones, por ejemplo, para saber si equivalencia se trabajó se puede recurrir a varios procedimientos, uno puede ser el método de sumar 0.50 cuatro veces o bien saber que 0.50 se puede expresar en forma de fracción decimal y su forma simplificada sería $\frac{1}{2}$ que en palabras de lenguaje común significa la mitad, de esta forma se podría obtener más rápido que la mitad de 4 que es 2, se puede realizar algo similar con la multiplicación de 8 X 0.20 con los propiedades conmutativa y asociativa.

De este significado se concluyó que fue importante y necesario que en la educación primaria se desarrolle el sentido numérico de los números decimales y evitar los algoritmos convencionales hasta que no se logre enseñar el concepto de los números decimales y todos los significados que implican en él. Esto debido a que si se llega el resultado con algoritmos convencionales no significa que estén adquiriendo la destreza conceptual para reconocer cuando dos expresiones son equivalentes, se estaría dejando de lado la destreza procedimental entender el valor numérico que representa cada cifra, la estructura conceptual de la notación del signo igual como operador y como equivalencia numérica; la comprensión del término conceptual de la equivalencia. En este mismo ejercicio se observó otra dificultad, está fue que se tiene que tener la destreza procedimental de conocer la jerarquía de operaciones para poder realizar el ejercicio correctamente. De no conocerla se podría pensar que primero se multiplica 4 X 0.50 y al resultado sumarle 8, lo que dé, multiplicarlo por 0.20, por lo que la equivalencia entre ambas notaciones no se cumpliría.

Como se vio en los significados anteriores el aprendizaje esperado ha puesto énfasis en la estructura conceptual de la equivalencia, la cual se desarrolló a través de las destrezas del campo procedimental, de los sistemas de representación y de las notaciones, sin embargo, no se ha descrito el papel que juega el análisis fenomenológico en la estructura conceptual de la equivalencia. Por tal motivo, el siguiente significado que fue: explicar el significado de la parte decimal, utilizando el término de equivalencia de la estructura conceptual a través de la representación numérica de números con punto mediante el contexto extra matemático en una situación pública en el fenómeno de medida, fue enfocado a entender la parte del análisis fenomenológico, es decir, la aplicación que tienen los números decimales en el contexto extra-matemático en el fenómeno de la medida.

Se interpretó que este significado implica un grado mayor de complejidad debido a la destreza conceptual de explicar que significa la parte decimal, se considera mayor complejidad porque anteriormente se había trabajado el contexto matemático, donde únicamente las destrezas procedimentales habían ayudado a entender matemáticamente que son los números decimales a través de la estructura conceptual, sin embargo ahora se trató que se entendiera la aplicación que tienen estos números en el fenómeno de la medida.

Autores como Valencia (2014), Broitman et al., (2003), Centeno (1997) y Saiz et al. (2023) mencionaron que el contexto de la medida es muy utilizado para aprender el tópico matemático de números decimales. En los libros de texto el fenómeno del dinero y de la medida son los más utilizados para la realización de las actividades propuestas en ellos, específicamente ente este significado que se analizó se observó que se utilizó la medida para comprender la estructura conceptual de la equivalencia. En el libro de texto venía la notación 4.8 y 5.5 cm, en este caso la representación fue la representación numérica de números con punto, se pretendía que se diera un significado al número decimal. Para lograr esto se tenía que realizar cálculos y operaciones para obtener la diferencia entre una cantidad y la otra, aquí la parte de explicar se llevó a cabo mediante la representación verbal en el contexto extra-matemático en el fenómeno de la medida porque fue a través del lenguaje verbal donde se iba a tomar el significado de lo que representa cada cifra. Por ejemplo la diferencia entre las notaciones: 4.8 y 5.5 es 0.7, si bien este número carece de enteros, significa que los centímetros desaparecieron y 0.7 representó otra unidad de medida, que fueron milímetros, por lo tanto el libro pretendía que a través de la representación verbal de los centímetros y milímetros, los números decimales obtuvieron un significado en el contexto de la medida a través del lenguaje verbal.

Aquí se puede caer en el error de que se está usando el valor posicional de las cifras para otorgarles un nombre y saber de lo que se representa cada valor, es decir, caer en el error de la enseñanza nominalista. Pero esto no es así, el significado va más allá de la enseñanza nominalista, con el antecedente que se tiene de cómo se llevó a cabo el rescate de significados de la equivalencia y que para llegar a la conclusión que la parte decimal son milésimos, se utilizó la destreza procedimental de calcular cuántos milímetros son de diferencia, se considera que no es enseñanza nominalista, sin embargo se interpretó la intención no fue suficiente para entender qué significa la notación 0.7 así que únicamente el libro contribuye a otorgarles un nombre en el contexto de la medida, pero se interpretó que entender la parte decimal de un número con lleva más proceso, no basta con realizar una operación para interpretar qué 0.7 son siete milésimos, además que hay varios huecos de destrezas procedimentales y estructura conceptual que en desafíos anteriores no había tratado para lograr esta comprensión como fueron: la transformación entre el la representaciones numéricas de fracciones decimales y números con punto que es esencial para establecer la noción de equivalencia de lo que representan las cifras de números decimales, el desarrollo del sentido numérico y el papel que juega el signo igual.

Con lo anterior, se interpretó que el fenómeno de la medida tiene ventajas y desventajas Sadovsky (citado en Broitman et al., 2003) mencionó que: el fenómeno de la medida “permite establecer puentes entre lo que los alumnos ya conocen y los nuevos significados que se procura que construyan, sin embargo, presenta limitaciones para el abordaje de aspectos esenciales de los decimales” (p.7). Parte de las limitaciones que representa el fenómeno de la medida es que para cada unidad de medida se presentan diferentes nombres en la representación verbal, por ejemplo para el caso de la distancia tenemos los centímetros, milímetros, decímetros, metros etc., si se tiene un buen sentido numérico desarrollado en el fenómeno de la medida fue fácil identificar que los decímetros, centímetros, milímetros y metros, en el contexto matemático representan, la unidad, los décimos, centésimos y milésimos. Es importante que se establezca esta conexión ya que de lo contrario al presentarse un lenguaje verbal nuevo se puede pensar que se esté hablando de cosas diferentes a los decimales y no llegar a esta conclusión. Es necesario que haya una actividad donde se dé la concepción entre el contexto matemático y el extra-matemático y que no se llegue como un convenio que los metros representan unidades, o que los centímetros representan centésimos se tiene que realizar esta actividad y de ahí obtener una destreza procedimental y una estructura conceptual para que realmente tome sentido.

En este mismo significado pero en otro desafío, se puso en juego dos sistemas de unidades de medida diferentes: la distancia y el tiempo. En el caso del fenómeno de la distancia utilizaron los kilómetros que están bajo el sistema métrico decimal y en el caso del fenómeno del tiempo se utilizó la unidad de medida de las horas que están bajo el sistema métrico sexagesimal. Por lo tanto, fue necesario realizar las distinciones entre el número decimal y la denotación decimal para poder explicar qué significa las cifras de punto decimal en el fenómeno del tiempo. Ávila y García (2008) insistieron en que es necesario enseñar que la concepción del número decimal es diferente a la representación numérica, que no se pueden confundir ambas, sino que se aprenda a identificar como concepto y como representación. Así mismo mencionaron que es necesario distinguir el número decimal de la expresión decimal ya que ambas usan la misma representación numérica de números con punto lo que puede llegar a confundirse.

En el libro de texto se mezclaron las unidades de medida del tiempo y la distancia, lo cual fue difícil pero necesario para distinguir un sistema del otro. Sin embargo, al no aclarar en el libro de texto la diferenciación entre el sistema decimal y sexagesimal se puede dar la confusión de que el tiempo se puede expresar con números decimales, lo cual es erróneo, debido a que el tiempo no es una unidad de medida que use como base las potencias de diez, sino que su base es el sistema métrico sexagesimal, por lo tanto explicar que significa la parte decimal de las expresiones decimales cuesta más trabajo por el cambio de sistema numérico. La dificultad consiste en que hay que realizar diferentes operaciones para lograr la conversión entre el sistema decimal y el sexagesimal, en otras palabras comprender que 0.5 en horas no equivale a 50 minutos sino a 30 minutos, y que únicamente se está usando la representación numérica de los números decimales para representar la notación decimal de la unidad de medida del tiempo. Es difícil llegar a la conclusión de explicar lo que significa la cifra decimal en diferentes sistemas de medida, aunado a que no se ha hecho la distinción entre número decimal y denotación y también porque no se aclaró que usan la misma representación numérica de números con punto.

Finalmente para terminar el aprendizaje esperado se llegó a la propiedad de la densidad, a través de la estructura conceptual de orden y comparación de los números decimales. Los significados que aludieron a esta propiedad fueron: comparar números decimales mediante la representación aritmética de los números con punto en un contexto matemático en una situación escolar; ordenar números decimales a través de la representación numérica de números con punto en un contexto matemático y una situación escolar; representar en la recta numérica los números decimales mediante la representación de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar; e identificar entre dos números un tercer número utilizando la estructura conceptual del orden, comparación y recta numérica usando la representación aritmética de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

Una de las dificultades que siempre se presenta al enseñar los números decimales fue la adquisición de la propiedad de la densidad en los números decimales, Ávila (2013) mencionó que la propiedad de densidad "es uno de los aspectos de los números decimales que resultan más difíciles de entender a los estudiantes" (p. 49), de acuerdo a lo que dice esta autora se interpretó que los libros de texto debieron enfatizar más en esta propiedad y no dejarla hasta el final en el libro de sexto año, un ajuste que se debería considerar fue que en el primer desafió aparte de aludir en la estructura conceptual de los términos de décimos, centésimos y milésimos se trabaje la propiedad de la densidad y no dejarla hasta al final en los libros de sexto año.

> Si bien se recuerda que en el primer significado fue el de dividir en partes iguales la representación manipulativa de la tira de papel, se trataba de dividir al entero en diez partes iguales y posteriormente dividir a los décimos en diez partes iguales, así sucesivamente con los centésimos y los milésimos. Aunque la destreza procedimental trataba de entender el valor numérico de las cifras, esta destreza a su vez, aludía a la propiedad de la densidad puesto que implícitamente servía para que se entendiera que dentro de una unidad de medida podía haber otra unidad de medida. Esta fue la primera destreza procedimental que indicaba a la propiedad de la densidad, sin embargo, para que favorezca a la propiedad de la densidad es necesario que en el libro de texto se considere la estructura conceptual de la densidad en el desafío, lo cual no fue así. Al interpretar los libros de texto de sexto año se percató que la propiedad de la densidad se trabajó a través de los términos conceptuales de comparación y orden, por tal motivo estos últimos significados se centraron en estos dos términos de la estructura conceptual.

En cuanto al término conceptual de comparación Ávila (2013) mencionó que "comparar números decimales ha sido indicador del grado de comprensión que los estudiantes tienen sobre ellos" (p.43). Konic et al. (2010) agregó:

> "La comparación es el procedimiento que subyace a una de las propiedades más importantes en la construcción de los conjuntos numéricos, la densidad. Por ello es que, desde la escolaridad elemental debieran establecerse las bases necesarias y

> adecuadas para ir generando de manera progresiva el infinito potencial y llegar en cursos avanzados a una aproximación conceptual del infinito actual". (p.70).

Para poder adquirir la propiedad de la densidad, se recurrió a estructura conceptual del término de comparación mediante a una actividad que consistió en un juego de dados al azar, se trató de lanzar dos dados para formar el número más grande, aquí la dificultad fue que no se sabía qué número caería por lo cual cualquier jugador puede ganar, pero para saber quién ganó es donde utilizaban la comparación de los números decimales, por ejemplo si a un jugador le salió 0.41 y al otro jugador le salió 0.89 hubo que definir quién era el número más grande. Para lograr esto, se interpretó que se tuvo que hacer uso de la equivalencia del valor numérico de los decimales en la representación de números con puntos. La dificultad que se encontró en esta destreza aritmética fue que a veces a un jugador le toca aventar dados más veces que a otro jugador, lo cual significaba que formaría un número con mayor número de cifras y eso no significa el número sea más grande, por ejemplo los dados pudieron caer 0.189 y a otro jugador 0.41.

Respecto a lo anterior, se sabe que el creer que un número decimal es más grande porque tiene mayor cantidad de cifras fue uno de los obstáculos de aprendizaje de los números decimales que tienen los alumnos, Brousseau (1987), Centeno (1997) y Ávila y García (2008) mencionaron que los alumnos generalizan las propiedades de los números enteros a los decimales por lo cual se cree que un número que tienen más cantidad de cifras es mayor, y en el caso de los números decimales no aplica ya que quien determinó el valor numérico de una cantidad, fue el valor numérico de cada cifra y el orden en que estas están, es decir, se debe saber que entre más grande sea la cifra que va a lado del punto decimal mayor es el número y no por la cantidad de cifras que tenga, tal como lo mencionó Ávila y García (2008), "en los decimales, el número de cifras no es relevante como elemento para definir el orden". (p.47). Otro aspecto que se consideró fue que se está comparando el número ciento ochenta y nueve milésimos con cuarenta y un centésimos, lo cual es complicado comparar porque son diferentes unidades de medida, lo ideal hubiese sido que se agregan los ceros que hace falta para poder comprar en la misma unidad de medida, es decir, que cuarenta y un centésimo se convirtiera a cuatrocientos diez milésimos y ahora sí comparar quien es más grande ciento ochenta y nueve milésimos o cuatrocientos diez milésimos. Autores como Centeno (1997) y Ávila y García (2008) mencionaron la importancia del cero en los decimales, siendo que este toma un valor en los números decimales a diferencia de los naturales.

En lo anterior, se interpretó el papel que jugó la equivalencia y el valor que representa cada cifra en los números decimales puesto que a través de ellos fue como se dieron los otros significados, en la propiedad de la densidad se vio que sin equivalencia y valor numérico de las cifras no se podría comprar y tampoco se pueden ordenar los números decimales, al respecto Ávila (2013) mencionó que ordenar decimales implicó comprender el valor de décimos, centésimos y milésimos, por ello se recalca que fue indispensable reconocer el valor numérico que representa cada cifra.

Para el siguiente significado se requirió de la comprensión de la estructura conceptual de la comparación y equivalencia para saber ordenar cifras, en este caso el libro pretende que se realice a través de la destreza procedimental ordenar números decimales de mayor a menor para que se pueda formar una figura. La complejidad aquí fue que se debió tener una comprensión de la equivalencia y comparación para que en la representación de números con punto se pueda entender ordenar correctamente las cifras, Ávila (2013) mencionó que no puede haber orden sin antes haber comparación, por ende, fue necesario que primero se adquiera la estructura conceptual del término de comparación y después se aprendiera el término conceptual de orden. Algo que se rescata entre el significado de comparación y el de orden es que para poder enseñar estas dos estructuras conceptuales es que el libro de texto dio mayor énfasis al contexto matemático en este significado, ya que este, va encaminado a generar más matemáticas que ayudaron a los otros significados a generar conocimientos que ayudaron a comprender el objeto matemático de los números decimales y su aplicación las operaciones básicas.

Una vez que se sabe comparar y ordenar números se sigue aludiendo a la propiedad de la densidad pero ahora a través de la estructura conceptual de la recta numérica y como representación gráfica, Ávila (2013) mencionó que "en la escuela mexicana la recta numérica no ha sido suficientemente valorada como recurso para el aprendizaje de los decimales" (p.49), esto se vio muy claro ya que por primera vez en los libros de texto de sexto año aparece la estructura conceptual de la recta numérica y como representación gráfica en el contenido de números decimales, aunque se puede considerar la representación manipulativa de las tiras de papel como recta numérica en el primer significado, es necesario que en ese desafío se integre la estructura conceptual de la recta numérica.

Se interpretó que la recta numérica sirvió para entender la presentación gráfica de los números decimales y como estructura conceptual para poder ordenar y comparar la representación de números con punto en ella; así como identificar un tercer número entre ellas. En estos significados es común pensar que entre el número 6 y 8 está el 7, sin embargo hay quienes piensan que entre 6 y 7 no hay ningún número entre ellos lo cual es erróneo. Es cierto que entre 6 y 7 no hay un número entero entre ellos pero si hay números decimales y fraccionarios, entender esto, es una de las mayores dificultades de enseñanza y aprendizaje que hay en la educación primaria y secundaria en el tema de números decimales, puesto que, para que se logre entender que entre un número y otro puede haber más de un millón de números es necesario abordar desde el inicio la propiedad de la densidad y no dejarla al último. El libro de texto puso de ejemplo el siguiente ejercicio, qué número hay entre 1.2 y 1.3, aquí se puede decir que hay muchos números lo importante es saber identificar qué número se puede ubicar. El problema aquí fue que al ver la representación numérica de números con punto de .2 y .3 se cree que no hay más números entre ellos, porque se trasladan las propiedades de los números enteros a los decimales. En los números decimales no se puede hablar de un antecesor y un sucesor como en los números enteros y este error es el que se comente al momento de intentar poner un número entre .2 y .3.

Sin embargo, se debe hacer énfasis en la propiedad de la densidad porque es un trabajo que requiere mucho esfuerzo, tiempo y conocimiento en el tema de los números decimales, en los libros de texto se vio que la propiedad de la densidad no se llevó a cabo con tiempo debido que aunque hubo desafíos que desde el inicio aludieron a la propiedad de la densidad, hizo falta mencionar en las indicaciones algo relativo a la propiedad de la densidad para poder trabajar con ella. Aunado a esto, otra dificultad que se vio fue el aprendizaje de la recta numérica, a nivel primaria es difícil entender este objeto matemático.

Para lograr el significado de identificar entre dos números un tercer número utilizando la estructura conceptual del orden, comparación y recta numérica usando la representación aritmética de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar, se utilizó la recta numérica como estructura conceptual de recta numérica y también como representación gráfica de los números decimales, sin embargo, para que la estructura conceptual pudiera figurar con la representación gráfica hizo falta la destreza procedimental de identificar un tercer número entre dos y en esta destreza la recta numérica se utilizó como traducción de un sistema de representación a otro en este caso entre el numérico con la representación de números decimales y el gráfico con la recta numérica. Al respecto, Ávila (2013) mencionó que “representar decimales en la recta hace necesario transitar entre dos registros: el numérico y el geométrico lineal” (p.49).

Sin embargo, en el nivel de primaria para lograr la traducción de un sistema de representación a otro fue difícil y más tratándose de la recta numérica debido a que ese tema es complejo para el estudiante y no lo entiende en el nivel de primaria porque es muy poco utilizada la representación gráfica de la recta numérica de los números decimales además que los estudiantes están acostumbrados mayormente a representaciones numéricas. Aunado a esto, la representación gráfica de la recta numérica de los decimales lo ven como un tema diferente de los números decimales no como representación de estos números, lo aíslan de la representación de números con punto, lo cual es una dificultad para el aprendizaje de los significados de los números decimales. Para concluir este desafío se interpreta que se debió ver con antelación la funcionalidad y la importancia que tiene la recta numérica en las fracciones y los números decimales para que esta aludiera de forma precisa a la propiedad de la densidad.

Como conclusión de todo el aprendizaje esperado, se vio que los libros de texto abonaron a significados más completos a comparación de los libros de texto de las reformas de 1993, los libros de texto de la reforma de 2011 incluyeron la comprensión y representación de los fracciones decimales, incluyeron la distinción de los números enteros con los decimales, aludieron un poco a la propiedad de la densidad con los términos de comparación, orden y recta numérica, incorporaron la estructura conceptual de la relación parte-todo con la destreza procedimental de dividir en partes iguales. Sin embargo hace falta poner en las indicaciones para incorporar la parte de la estructura conceptual de los números decimales para que de esta forma se pueda aludir con destrezas procedimentales a los términos conceptuales y agregar más representaciones de los números decimales desde cuarto año a sexto año. En el caso específico de la recta numérica es necesario que se trabaje a la par de la representación numérica de números con punto y fracciones decimales para que no se vea como un tema nuevo diferente, sino que se incluya como representación de los números decimales. Así mismo, es necesario trabajar representaciones geométricas, esto ayudaría a mejorar la comprensión del valor que representan los números con punto y de esta forma aludir a la equivalencia que fue uno de los términos de la estructura conceptual al que más abona en los libros de texto y que ayuda a que se generen los demás significados del tema de números decimales.

Otro punto a destacar fue, que es necesario que los libros de texto incluyan los términos conceptuales de lo que se quiere lograr con el desafío y también de lo que se puede abonar y no dejar al docente de primaria ese trabajo porque una de las principales dificultades del tema de números decimales es que el docente de primaria tiene nulo o poco conocimiento del tema de los decimales y toma a los libros de texto como referencia para realizar su planeación y como guía para saber qué enseñar. Al respecto Rico et al. (2008) mencionó que los libros de texto ocupan un espacio entre la los planes y programas de estudio y la planificación docente, responden a preguntas como: ¿qué contenidos trabajar?, ¿cómo organizar y trabajar los contenidos?, ¿qué enseñar del contenido?, esta última pregunta es una de las principales dificultades que enfrenta el docente de primaria en el tema de números decimales, al respecto Ávila (2008) mencionó que es común considerar que el conocimiento matemático de los profesores es un elemento esencial en la determinación de sus acciones en clase y su manera de enseñar las matemáticas por lo que es necesario que primero entiendan los números decimales con sus elementos para poderlos enseñar. De acuerdo a lo anterior, es importante que se le den las herramientas necesarias al docente de primaria para que le pueda abonar al tema de números decimales con su secuencia de enseñanza y que pueda potenciar al máximo los desafíos del libro de texto. En el siguiente capítulo se describe cómo estos significados que se encontraron en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación, abonan a los algoritmos de la suma y la resta de números decimales para que esta sea entendida y no mecanizada.

CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE ESPERADO DE RESUELVE PROBLEMAS QUE IMPLICAN SUMAR O RESTAR NÚMEROS DECIMALES

En este capítulo se describieron los significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales (SEP, 2011b, p.77). Este capítulo se dividió en tres secciones. La primera de ellas describió el análisis sintético que se realizó en el aprendizaje esperado y el programa de estudios; la segunda subsección describió los significados encontrados en el aprendizaje esperado; finalmente, la tercera subsección describió la interpretación de estos significados según la perspectiva del investigador.

7.1. Descripción del general del aprendizaje esperado resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales

En ésta sección se explicaron los contenidos que integran al aprendizaje esperado y cómo están desarrollados en los desafíos del libro de texto. Anteriormente se mencionó que los aprendizajes esperados están regidos por un eje temático mismo que para el tema de números decimales fue el de sentido numérico y pensamiento algebraico. Dentro de este eje temático hay tres temas, cómo el aprendizaje esperado cambia y va enfocado a sumar y restar números decimales el tema fue problemas aditivos. Así mismo, el estándar curricular cambió y este fue el de resolver problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales. (SEP, 2011b, p. 62).

El aprendizaje esperado de este capítulo fue resolver problemas que impliquen restar o sumar números decimales (SEP, 2011b, p.77). Al hacer el análisis de este aprendizaje esperado se concluyó que este inicia y termina en cuarto año, lo que dio pauta para observar si con las actividades que se desarrollan en el libro de cuarto año se logra alcanzar el aprendizaje esperado de acuerdo con los significados se promovieron en los desafíos. Así mismo, se vio la relación de este aprendizaje esperado como el anterior. El aprendizaje esperado que se analiza, pertenece al eje temático de: sentido numérico y pensamiento algebraico, al tema de: problemas aditivos, el estándar curricular que le pertenece es: resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales.

Este aprendizaje esperado de cuarto año, está dividido por contenidos que se ven en diferentes bloques, estos fueron: bloque 1: resolución de sumas o restas de números decimales en el contexto del dinero. Análisis de expresiones equivalentes; bloque 2: Uso del cálculo mental para resolver sumas o restas con números decimales; y bloque 4: Resolución de sumas o restas de números decimales en diversos contextos. (SEP, 2011b).

Se vio reflejado que el aprendizaje esperado abordó las destrezas procedimentales sumar y restar utilizando números decimales, estructuras conceptuales utilizadas por Centeno (1997); y Ávila y García (2008). Se observó que se inició con un grado de dificultad fácil y luego lo incrementó, por ejemplo, se inició con las destrezas de sumar y restar en el contexto del dinero a través de expresiones equivalentes, significado conceptual utilizado por Centeno (1997); y Ávila y García (2008), es decir, sin usar formalmente los algoritmos convencionales, posteriormente se agregó el cálculo mental que anteriormente en los planes programas de estudio no se había incluido y hasta el final fue la resolución de problemas en diferentes contextos. Así mismo, se pudo observar que en los contenidos que hay destrezas procedimentales, pero no hay estructura conceptual ni sistemas de representación, se reflejó el análisis fenomenológico a utilizar. En la siguiente subsección, se analizaron los desafíos que componen cada uno de estos contenidos y del aprendizaje esperado en general, para ver qué significados se promueven y cuáles de las componentes del significado que mencionó Rico (2012) estuvieron presentes en los desafíos que no vengan explícitos en los contenidos.

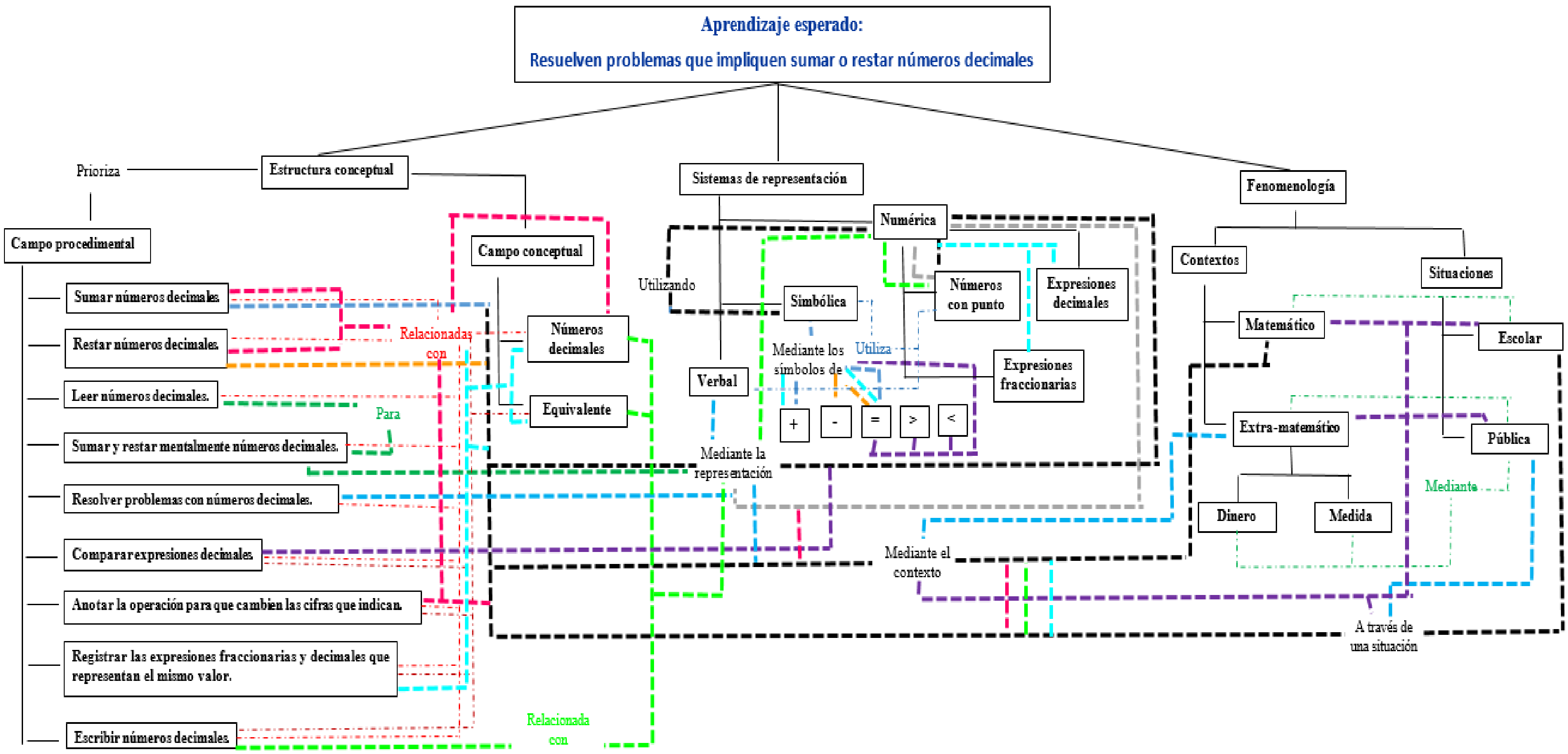
7.2. Descripción de los significados promovidos por el libro de texto del aprendizaje esperado resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.

En esta sección, se presenta el mapa conceptual donde se organizaron los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales (SEP, 2011b, p.77). La interpretación que se realizó del mapa conceptual fue enfocada a la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico, las componentes internas de la estructura del significado de un concepto matemático propuestas por Rico (2012).

En el análisis sintético se observó que el campo procedimental aparece como protagonista para encontrar los significados que subyacen de este contenido, debido a que se observó en el mapa conceptual que el libro de texto de cuarto año prioriza el campo procedimental más que al campo conceptual. Esto puede ser porque el objeto matemático de los números decimales pasó a segundo nivel, y quienes llevaron mayor importancia en el aprendizaje esperado son las destrezas procedimentales de sumar y restar, mismas que mencionaron Centeno (1997) y Ávila y García (2008), es decir, se pretende enseñar a sumar y restar pero con números decimales, por ello fue que la estructura conceptual los números decimales se dejó de lado ya que la suma y la resta son términos generales que se pueden aplicar a cualquier contenido no solo al de los números decimales. Algo interesante que se observó a simple vista fue que los sistemas de representación tomaron relevancia en este contenido y se pudo ver que uno de los que mayor impacto tuvo fue la representación simbólica. Así mismo, se observó que en este caso tanto el contexto matemático como el contexto extra-matemático tuvieron relevancia en las destrezas aritméticas de sumar y restar.

Uno de los aspectos importantes que resultó en los antecedentes y de los cuales fue factor para realizar esta investigación fue que en la educación primaria se enseña a mecanizar las operaciones básicas con números decimales y no a entender lo que se está operando, al analizar este contenido se vio que esta idea sigue presente en los libros de texto y no cambió. Para describir los significados del aprendizaje esperado, se propuso la figura 10 que representó el mapa conceptual del aprendizaje esperado analizado.

Figura 10 Mapa conceptual de los significados del aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales



Fuente: elaboración propia, basado en las fichas de recogida de datos que fueron basadas en el libro de cuarto año (SEP, 2019a).

Para describir los significados que se encontraron en el aprendizaje esperado, se procederá por describir las destrezas del campo procedimental, debido a que estas fueron la base para encontrar los significados. La primera destreza procedimental fue sumar números decimales mencionada por Centeno (1997) y Ávila y García (2008), esta destreza se interpretó con base en lo analizado en el libro de texto. Para obtener la destreza sumar se tomó en cuenta la notación símbolo más (+) debido a que en las indicaciones y problemas propuestos no aludían a la estructura conceptual de la palabra suma ni en la estructura procedimental al verbo sumar, por ello se interpretó que al usar el símbolo más se trató de la destreza de sumar.

Para fundamentar de dónde se obtuvo la destreza de sumar números decimales, se describirán las representaciones que se usaron en el contexto matemático, la destreza que se usó fue la de resolver los ejercicios, esta se cambió en lugar de resolver por el verbo sumar esto debido a que en el libro de texto venían ejercicios como: 35.90 + 5.60=, se interpretó que se utilizó la representación simbólica para figurar que se busca un resultado en la operación y este resultado era el proceso de sumar las dos cantidades simbolizadas con punto decimal. En cambio, en el contexto extra-matemático se usaron palabras como: más, compró, pagó, ahorró, para designar a la estructura conceptual de la suma a través del fenómeno del dinero en la resolución de problemas. De esta primera destreza se obtuvieron dos significados uno enfocado al contexto matemático y la otra enfocado al contexto extra-matemático.

La siguiente destreza procedimental fue restar números decimales mencionada por Centeno (1997) y Ávila y García (2008), esta destreza fue presentada en un contexto extra-matemático y un contexto matemático. En el primer contexto, al igual que la suma, la resta se utilizó las palabras como: sobrar, falta dinero, cambio, diferencial etc., para hacer referencia a la destreza procedimental de restar, usando las representaciones de números con punto en situación pública en el fenómeno del dinero. Ahora, en el contexto matemático en una situación escolar se presenta una situación parecida a la suma, se empezó por la destreza de resolver problemas y sustracciones, se usa la representación simbólica junto con la representación numérica para representar una operación que necesita de un resultado, ejemplo de esta representación fue la operación: 35.90 - 5.60=, la representación simbólica fue la que permitió cambiar la palabra sustracción por el verbo restar, esto debido a la notación del signo de menos (-) representó una resta. Si se observó las destrezas anteriores dicen sumar y restar, sin embargo, en esa destreza no se mencionó si es a través del algoritmo convencional por lo que se interpretó que el libro de texto deja libre el método para sumar y no lo focaliza a un algoritmo.

Las siguientes destrezas van ligadas a las destrezas procedimentales anteriores, puesto que estas destrezas requirieron de los significados anteriores para poderlas llevar a cabo. Una ventaja que ofrecieron los libros de texto fue que incorporaron el cálculo mental en los desafíos, lo que las destrezas anteriores de sumar y restar con números decimales ahora se le agregó realizarlas mentalmente. De forma que las siguientes destrezas tuvieron que ver con el cálculo mental para ello, se ocupó la destreza procedimental de leer números decimales mencionadas por Ávila y García (2008); y Konic (2010), el desafío consistía en tarjetas en las cuales se tenía que leer los números los cuales estaban simbolizados mediante la representación numérica de número con punto por ejemplo 5.5 y se dio un resultado ejemplo 4, la actividad cognitiva consistió en que se tenía que realizar la operación que se necesitaba ya fuera suma o resta para conseguir el resultado presentado, para lo cual se necesitaba de otra destreza procedimental esta fue sumar o restar números decimales mentalmente. Ambas destrezas aparecieron en un contexto matemático en una situación escolar.

En la destreza anterior de leer números decimales se puede observar que fue una destreza propia del tópico matemático de números decimales y que se agregó a las destrezas procedimentales de suma y resta. Otra destreza que se consideró parte del contenido de números decimales fue la destreza de comprar expresiones decimales mencionada por Ávila y García (2008); y Konic (2010), que va ligada al capítulo anterior, si bien se recuerda una de las habilidad necesarias para entender los números decimales y a la propiedad de la densidad fue el término conceptual de comparación, en este caso, la destreza procedimental de comprar se utilizó para saber qué números son mayores que, menores que o iguales que. Para ello se utilizó la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación de escolar, y es a través de la representación simbólica mediante la utilización de los símbolo de >, < o = que tomó significado la destreza de comparar expresiones decimales, puesto que, fue a través de ella y del conocimiento que se tiene del valor numérico de los decimales que estos se compararon y saber quién fue el más grande que, menor que o igual que.

Aunado a este contenido, se propuso resolver problemas con números decimales destreza procedimental mencionada por Centeno(1997), pero en este caso, esta destreza procedimental, carece de una estructura conceptual y de una destreza procedimental propia del contenido de números decimales, por lo cual no se pudo poner sumar o restar números decimales porque no lo mencionaron en el libro de texto, se deja libre para que se resuelva como se considere, lo que sí se contempla es la integración del fenómeno de medida en un contexto extra-matemático, en una situación pública utilizando la representación de números con punto para identificar las medidas de los objetos.

En las destrezas anteriores se pueden observar que los desafíos fueron encaminados a identificar qué operación utilizar, ya sea suma o resta para encontrar el resultado, por ello, la siguiente destreza procedimental fue identificar qué operación anotar para que cambien las cifras decimales que indicaron, en el libro de texto se puso varios ejemplos uno de ellos fue: 1.25, el cual se va a cambiar el número 1 o por el número 2, por lo tanto la cantidad cambiaría a 2.25 y ahí fue donde se debe averiguar qué operación se tendría que realizar para conseguir como resultado 2.25, esta destreza procedimental utilizó la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

Para terminar el aprendizaje esperado se siguió con la destreza procedimental registrar las expresiones fraccionarias y decimales que representan el mismo valor mencionada por Centeno (1997); y Konic (2010), si observó todo el aprendizaje esperado fue enfocado a aprender la suma y la resta con números decimales, por ello se trató de identificar expresiones que usan la representación simbólica con los signos de más (+) e igual (=) para identificar si la suma de la representación numérica de números con punto o fracciones decimales representan la misma cantidad con respecto a otro inciso, para ello se anotaron qué incisos son equivalentes. El contexto en el que se desarrolló fue un contexto matemático en una situación escolar. Aunado a esta destreza, se propuso la destreza procedimental de escribir números decimales, esta se trabajó en conjunto con el término conceptual de equivalencia, de forma que se usaba la representación verbal de los números decimales y la notación de números enteros en ejercicios como: 15 décimos, 12 centésimos, y 17 milésimos, estos a su vez se tenían que simbolizar en una representación numérica. Esta destreza procedimental se presentó en el contexto matemático en una situación escolar.

Una vez concluido la interpretación del mapa conceptual se obtuvieron los siguientes significados del aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales (SEP, 2011b, p.77) los cuales se presentaron en la tabla 20:

Tabla 19 *Significados encontrado en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales (SEP, 2011b, p.77).*

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
● Sumar números decimales en un contexto extra-matemático en una situación pública mediante el fenómeno del dinero usando la representación numérica de números con puntos. ● Sumar números decimales a través de la representación simbólica y la representación numérica de números con puntos en un contexto matemático en una situación escolar. ● Restar números decimales en un contexto extra-matemático en una situación pública mediante el fenómeno del dinero usando la	● Identificar qué operación anotar para que cambien las cifras decimales que indican usando la representación numérica de números decimales en un contexto matemático en una situación escolar. ● Registrar las expresiones fraccionarias y decimales que representan el mismo valor, a través de la estructura conceptual de equivalencia mediante la representación simbólica y numérica está a través de la representación de números con punto y fracciones decimales en un contexto matemático y una situación escolar.

representación numérica de números con puntos.

- Restar números decimales a través de la representación simbólica y la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.
- Sumar o restar mentalmente números decimales mediante la representación numérica de números con puntos en un contexto matemático en una situación escolar.
- Resolver problemas de números decimales simbolizados por la representación numérica de números con punto en el contexto extra-matemático en una situación pública usando el fenómeno de la medida.
- Comparar expresiones decimales, mediante la representación simbólica y numérica usando la simbolización de números con punto mediante los símbolos de mayor que, menor que e igual en un contexto matemático en una situación escolar.

- Escribir números decimales usando la estructura conceptual de la equivalencia, mediante la representación verbal y numérica, en un contexto matemático en una situación escolar.

Fuente de elaboración propia, basada en los mapas conceptuales obtenidos de las fichas de recogida de datos del libro de cuarto año. (SEP, 2019a).

Como conclusión de esta subsección se obtuvo que al interpretar la información del mapa se vio que la mayoría de los significados son parciales como lo mencionaron Cañadas et al. (2018), porque carecen de la componente de la estructura conceptual, específicamente el campo conceptual. A diferencia del aprendizaje esperado anterior, se vio que este aprendizaje no es enfocado al tema de números decimales sino a enseñar la suma y la resta utilizando números decimales, por lo cual la mayoría de los significados que se obtuvieron son enfocados a las destrezas procedimentales de sumar y restar. Así mismo, se interpretó que para lograr sumar números decimales fue necesario conocer algunos de los significados conceptuales de los números decimales del aprendizaje esperado anterior como fue el caso de la equivalencia entre las representaciones numéricas de números con punto y fracciones decimales. Aunado a ello también fue necesario conocer el valor numérico que representa los números decimales en la representación numérica de números con punto y fracciones decimales.

Por otra parte, en el libro de texto en ningún desafío se vio que se promovió el algoritmo convencional de los de la suma y la resta. Se consideró importante esto porque se dejó libre para que se usará cualquier método para aprender a sumar o restar números decimales, cuestión que deja desarrollar el sentido numérico que mencionó Ávila y García (2008), pero se consideró que también fue necesario conocer los algoritmos convencionales, como método eficaz para sumar o restar, una vez que se haya comprendido la equivalencia de las diferentes representaciones.

Se vio reflejado que los sistemas de representación jugaron un papel importante en la adición de este aprendizaje esperado; con mayor relevancia en la numérica. Se consideró necesario trabajar a la par con fracciones decimales y no dejarlas de lado. Así mismo otra representación importante es la simbólica, que da conexión y sentido al tema de suma y resta con los números decimales, ya que con los símbolos más (+) e igual (=) no habría comprensión de la equivalencia, ni del valor numérico. Finalmente el retomar la representación verbal en el contexto matemático y extra-matemático fue importante porque se generó conexión entre ambos contextos y ayudó a tomar sentido a la estructura conceptual de la equivalencia.

Finalmente, el análisis fenomenológico, específicamente el contexto del matemático tomó relevancia debido a que se trató de enseñar las destrezas procedimentales de la suma y la resta por ello se requiere del contexto matemático para crear más matemáticas Rico (2012) después de cada desafío, el contexto extra-matemático ayudó a desarrollar el sentido numérico y ser el puente de conexión entre la suma y la resta, y los números decimales mediante la representación simbólica. Se eligió el hecho que el libro de texto intente desarrollar el cálculo mental en el tema de números decimales, sin duda fue un plus que se integró en estos libros de texto con respecto a los anteriores. En la siguiente sección se describió la interpretación de los significados del aprendizaje esperado.

7.3. Descripción de la interpretación de los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales de acuerdo a las actividades propuestas en los desafíos.

En la sección anterior se encontraron los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales (SEP, 2011b, p.77). En esta sección se interpretó cómo es que se llevaron a cabo las actividades para lograr estos significados. Los primeros significados que se encontraron fueron: sumar números decimales en un contexto extra-matemático en una situación pública mediante el fenómeno del dinero usando la representación numérica de números con punto; y sumar números decimales a través de la representación simbólica y la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

La interpretación que se hizo de estos dos significados fue con base al desarrollo de las actividades que vienen en los desafíos del libro de texto. Anteriormente se analizó el aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación (SEP, 2011b, p.77), este aprendizaje esperado vienen los desafíos mezclados en los libros de cuarto, quinto y sexto año, por lo que cabe aclarar que los desafíos que se analizaron en este capítulo únicamente corresponden al libro de cuarto año, así que hubo desafíos del aprendizaje esperado anterior, que fueron antecesores a los desafíos del aprendizaje esperado a analizar en este capítulo y de los cuales se tomaron los aprendizajes previos para poder abordar los desafíos.

Para abordar este desafío y poder interpretar los significados que se encontraron se tomó como aprendizaje previo el desafío de entender el valor numérico de los décimos, centésimo y milésimos, por la tanto se partió de la idea que ya se conocía qué es un número decimal, las diferentes formas de representarlo, que fueron, la representación verbal, la representación numérica esta mediante la representación de números con punto y fracciones decimales y la representación manipulativa de las tiras de papel, fue importante recordar la conclusión del aprendizaje esperado anterior con las actividades propuestos no se alcanzó a comprender el valor numérico de los números decimales en la representación numérica de números con punto y fracciones decimales.

En el último desafío para comprender el valor numérico de los números decimales, se empezó a ver que la representación simbólica jugó un papel importante para mostrar la equivalencia entre las representaciones numéricas de números con punto y fracciones decimales. Cañadas et al. (2018) y Lupiáñez (citado en Rico y Moreno, 2016) mencionaron que la representación simbólica tiene sus propios signos, se puede operar con ellos con sus propias reglas internas. En los desafíos de suma y resta se interpretó que la representación simbólica también tomó parte importante para aludir a la suma y la resta mediante las reglas del sistema decimal y la utilización de los símbolos de más (+), menos (-) e igual (=), de tal forma que se vio cómo fue que los significados del aprendizaje esperado anterior tomaron relevancia en la aplicación de la suma y la resta de números decimales, debido a que parte fundamental de la presentación simbólica como lo mencionó Lupiáñez (citado en Rico y Moreno, 2016) es entender el principio de agrupamiento del sistema decimal de numeración, por lo tanto una vez entendido el valor numérico que representa cada cifra entera y decimal se puede entender lo que se está operando.

Para empezar con la interpretación de los significados, se vio reflejado en el mapa conceptual que se prioriza el campo procedimental y que bajo las destrezas de este campo se obtuvieron los significados. El primer desafío que se analizó aludía a la suma de números decimales, este significado inició con el contexto extra-matemático a lo cual se interpretó que este contexto fue la conexión entre los saberes previos que se deben tener de la suma de números enteros y la suma de números decimales porque fue a través del fenómeno del dinero que se pretendía realizar los problemas de suma que venía en los desafíos. Al respecto Sadovsky (citado en Broitman et al., 2003) mencionó que la enseñanza de los números decimales suele comenzar por contextos familiares para los niños en este caso se comenzó con el contexto de dinero, este contexto permitió establecer puentes entre lo que los alumnos ya conocen y los nuevos significados que se quiere construir. De acuerdo con el autor, se interpretó que el fenómeno del dinero fue muy usado en la vida real, mediante él se aprende a sumar y restar sin necesidad de un algoritmo o sin necesidad de ser explicado en la escuela, es algo que se aprende con la práctica diaria, y al usar únicamente dos unidades de medida, que en este caso eran los pesos y centavos se consideró fácil operar con el fenómeno del dinero.

Para realizar los desafíos se tenían que resolver problemas, aquí lo relevante fue que en los problemas no se mencionan la destreza procedimental de sumar o bien la estructura conceptual de la suma, únicamente se mencionan palabras que estaban en un contexto común, al respecto Castro, Gorgorió y Prat (2014, citado en Castro et al., 2017), mencionaron que en el planteamiento de problemas aditivos la palabra clave es indicador de la operación a realizar, de acuerdo con ello, se interpretó que las palabras claves que usaba el libro de texto para indicar que el problema era aditivo, por mencionar un ejemplo, fue el verbo comprar, se interpretó que el verbo comprar significa que se está agregando algo, es decir, se está sumando un artículo o una cantidad, otro término que venía fue pagó, este término indicó en el contexto común el total de lo que se compró. En el contexto del dinero estas palabras fueron usadas para indicar una adición y el total o igual de lo que se compró aludiendo de esta forma desde el contexto extra-matemático al símbolo de más (+) e igual (=), o bien a las destreza procedimental de sumar o la estructura conceptual de la suma.

Castro et al. (2017) mencionaron que el problema de usar palabras de lenguaje común en la suma y la resta, es porque estas palabras tienden a ser simplificadas usando los verbos aumentar, añadir, y unir para el caso de la suma, y quitar, o disminuir para la resta, esto hace que se dificulte usar diferentes procedimientos, además que no se pueden englobar todos los problemas aditivos dentro de estas acciones porque existen problemas en los que agregar o quitar no necesariamente llevan a la acción de sumar o restar. De acuerdo con los autores, se interpretó que al tener el contexto extra-matemático usando el fenómeno del dinero se puede entender las palabras usadas como comprar, ahorrar, pagar, como alusión a la suma, sin embargo se interpretó que el uso de estas palabras en un primer momento ayudan a introducir a la estructura conceptual de la suma pero también se considera que conforme avance el desarrollo del contenido pueden ocasionar dificultades en la comprensión de los problemas cuando se vea a mayor profundidad la suma y la resta. Al respecto, Castro et al. (2017) mencionaron que vincular la suma a este tipo de palabras resultará un obstáculo al abordar problemas que impliquen comparaciones o igualaciones que involucren un conocimiento más profundo de la suma y la resta.

Aunado a lo anterior, Castro e t al. (2017) mencionaron que la suma y la resta pueden tomar diferentes significados, el primer significado puede ser el significado basado en la acción realizada por una persona, y otro el significado como objeto matemático. De acuerdo a lo que dice el autor, se interpretó que el libro de texto dio el significado de la suma a través de las palabras de uso común como una acción realizada por una persona, Castro et al. (2017) mencionó que el significado de acción puede tener dos concepciones, una unitaria y una binaria, en este caso, se consideró que el significado que tomó el libro de texto fue binario porque hay dos o más cantidades iniciales que se unen para obtener un resultado.

Una vez identificado como se introdujo a la suma de números decimales mediante el contexto extra-matemático usando el fenómeno del dinero y cómo el lenguaje común tomó importancia para identificar la estructura conceptual de la suma, se pasará interpretar el papel que tomaron los sistemas de representación. Para poder resolver los problemas se usó la representación numérica de números con punto en el contexto del dinero, por ejemplo, en el libro de texto se propuso que se registre el total de los ahorros que tuvo a lo largo de una semana, el lunes ahorró $ 21.50 y el martes $ 42.75 en este ejemplo se pudo observar que se estableció el convenio que con el símbolo de pesos ($) se representará el fenómeno del dinero, los números a la izquierda fueron pesos y los números a la derecha fueron los centavos. Al respecto Broitman et al. (2003) mencionaron que el uso del signo pesos funciona como forma fija convencional, indica que se trata de dinero. El número anotado a la izquierda de la coma funge como pesos, mientras que la indicación de centavos podría referir al número anotado a su derecha.

Utilizando el convenio anterior, se interpretó que uno de los razonamientos que se pudieron utilizar para resolver el problema fue sumar pesos con pesos para saber la cantidad de enteros que hace y después sumar los centavos, aquí entró en juego la función que tienen las monedas mexicanas para hacer cálculo, puesto que hay monedas de 50 centavos de las cuales se sabe que dos monedas de 50 centavos hacen un 1 peso lo cual se le sumaría a los pesos para tener un total de $64 pesos y lo restante se consideraría que 25 es la mitad de 50 por lo tanto son 25 centavos. Aquí el problema sería que en la moneda nacional $5 centavos ya no forman parte de las monedas por lo cual puede causar confusiones.

También se pudo usar el algoritmo convencional para sumar números decimales, por ejemplo, sumar los números decimales como enteros, cuestión que se vio poco conveniente porque se caería al error de operar sin comprender qué es lo que se está sumando. Al respecto Ávila y García (2008) mencionaron que en los algoritmos convencionales el uso de la operación debe tener sentido. Considerando lo anterior, fue necesario comprender que los centavos se pueden sumar únicamente con centavos y los pesos con pesos. Para concluir con el primer significado se quiere destacar cómo fue que el contexto extra-matemático influyó para que se aprendiera la destreza procedimental de sumar con números decimales sin necesidad de usar el algoritmo convencional cuestión que fue favorable al ser el primer acercamiento que tienen con la suma de números decimales, pero que conforme se vaya desarrollando el contenido debe cambiar el contexto e ir dotando de significado al algoritmo convencional.

En el segundo significado que fue sumar números decimales a través de la representación simbólica y la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar, para obtener la destreza procedimental se recurrió a la notación del símbolo de más (+) puesto que en el libro de texto mostraron ejercicio de suma de números decimales utilizando la notación del signo de más (+), por ejemplo, venía este ejercicio 35.90 + 5.60 =, en ese ejercicio se pudo observar que se utilizó la representación simbólica para representar una suma entre dos cantidades de la representación numérica con la representación de números con punto, aquí se pudo observar que la notación del signo de más (+) representó la estructura conceptual de la suma y la destreza procedimental de sumar y el signo igual representó el resultado de esta suma.

En este segundo significado después de pasar del contexto extra-matemático se puso el contexto matemático, lo cual tiene ventajas y desventajas. Por un lado, el introducir la notación del símbolo de más (+) ayudó a tener el campo conceptual de la suma y en el campo procedimental la destreza de sumar, sin embargo Rico (1995) mencionó que las "notaciones son los signos y símbolos empleados en matemáticas para expresar una idea de modo breve y preciso. Aunque las matemáticas emplean un lenguaje simbólico, no conviene comenzar el trabajo con los alumnos presentando los símbolos y notaciones". (p. 16). De acuerdo con lo que dice el autor, se coincidió con la idea que es necesario primero dotar de significado al algoritmo de la suma entendiendo el valor posicional de las cifras, este entendido como reconocer el valor numérico que representa cada cifra a través de la posición que tiene y no memorizando la representación verbal que tiene cada uno de ellos, para lograr esto es necesario que se comprenda que en la suma no se puede sumar enteros con centavos, sino que se debe respetar que los enteros se suman con enteros, que los décimos se suman con los décimos, los centésimos con centésimos y así sucesivamente, de tal forma que al lograr 10 centésimos, o bien 10 décimos estos se convierten en la siguiente unidad de medida, que en el caso de los centésimos sería décimos, y en el caso de los décimos serían los enteros, mientras no se logre entender esto no se recomienda el uso del algoritmo de la suma.

Un problema que se vio en los ejercicios planteados es que se presentó una operación sumando dos cantidades por ejemplo se presentó el siguiente ejercicio 184.90 – 59.45= , en este ejercicio se interpretó que el signo igual requiere un resultado por lo cual este ejercicio y los que aparecieron en el libro de texto, confirmaron lo que mencionó Ramírez y Rodríguez (2010) "durante la Educación Primaria los niños adquieren el significado del signo igual como 'el total o resultado de una operación aritmética', adquiriendo así una comprensión incompleta del signo igual" (p.8). De acuerdo a lo que dice el autor, con este tipo de ejercicios se concibe a la notación del signo igual (=) como un símbolo que requiere una respuesta, y no como un símbolo que representa una igualdad bidireccional entre ambas cantidades, esto se considera una dificultad al momento de poner la equivalencia entre la representación numérica de números con punto y fracciones decimales, porque no se entiende la bidireccionalidad del signo y al verse dos representaciones diferentes no se logra comprender porque son equivalentes, lo ven como dos conceptos separados y no como dos representaciones de un mismo concepto.

Como se vio, aunque la suma no sean parte de la estructura conceptual de los números decimales se consideró un problema poder operar con números decimales debido a que fue necesario conocer los significados de los números decimales para poder operar con ellos y tomar significado de lo que se está operando, después de analizar la introducción de la suma de números decimales, se pasará a la introducción de la resta con números decimales.

Los siguientes dos significados van enfocados a la estructura conceptual de la resta, estos fueron: restar números decimales en un contexto extra-matemático en una situación pública mediante el fenómeno del dinero usando la representación numérica de números con punto; restar números decimales a través de la representación simbólica y la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

En el primer significado, las situaciones que se propusieron son parecidas a la de la suma, se empieza en el contexto extra-matemático con el fenómeno del dinero, para este desafío al igual que la suma se dejó de lado el campo conceptual de la resta y el campo procedimental de la destreza de restar, puesto que en el contexto extra-matemático específicamente en el fenómeno del dinero se introdujo mediante palabras como falta, sobrar, cambio, diferencial, etc., Castro et al. (2017) mencionó que en un primer momento fue bueno introducir al alumno con estas palabras pero posteriormente sino se hace un análisis profundo se consideraron un obstáculo al momento de resolver problemas debido a que si no están estas palabras no se identifica en el problema que para solucionarlo se requiere una resta.

De acuerdo con lo anterior, se interpretó que en los libros de texto funcionó la idea de introducir a los alumnos con estas palabras para resolver problemas. Puesto que, para entender el algoritmo de la resta fue necesario primero desarrollar el sentido numérico y entender el sistema decimal para después poder abordar el algoritmo con significado, al respecto Segura (2016) mencionó que el conocimiento sobre el sistema de numeración resulta fundamental para entender el procedimiento del algoritmo de la resta conocido como pedir decenas prestadas. De acuerdo a lo anterior, se interpretó que el libro de texto acertó en el hecho de introducir a los alumnos sin presentar la estructura conceptual de la suma, y dejar que resolvieran los problemas por cualquier método, sin embargo, se consideró apropiado que en los siguientes desafíos se haga un análisis profundo de la resta y en la resolución de problemas para que se identifique cuando restar aunque ya no están presentas las palabras como falta, cuánto sobra y diferencia.

Un ejemplo en el que se puede desarrollar el sentido numérico es en el siguiente fragmento que venía en un problema del libro de texto: "un billete de $20.00 se pagó $12.60, ¿Cuánto se recibió de cambio?" (SEP, 2019a, p.29), aquí se interpretó que más que usar el algoritmo de la resta se utilizará el sentido numérico, para ello se estableció el convenio de que los pesos representaron los números enteros, los centavos representan los números decimales. Una forma de contestar el problema fue ubicarse en doce enteros y ver cuánto falta para llegar a 20, luego se tiene que razonar que los 60 centavos se estarían con un entero y de ese entero sobraría 40 por lo que de los 8 enteros que sobraban se convirtieron en 7, del entero que se restó los centavos tenía quedaron 40 centavos por lo que el resultado fue $7.40. Esta fue una forma sencilla de poder resolver los ejercicios usando el método de sumar para alcanzar la cantidad que solicitó el libro de texto. Sin embargo, a largo plazo este método debe desaparecer una vez entendido el sistema decimal y se debe formalizar el algoritmo de la resta, Flores (2005) mencionó que “los algoritmos son una de las herramientas que más ha contribuido a que la gente resuelva con mayor eficiencia problemas matemáticos que enfrenta o se plantea en su vida diaria”. (p.8)

De acuerdo con lo anterior, se concluyó que al momento de resolver este desafío los alumnos ya sabían cómo restar números enteros, sin embargo, a la experiencia que se tiene se sabe que el algoritmo de la resta representa muchas dificultades para poderse llevar a cabo a diferencia de la suma, Segura (2016) mencionó “la sustracción es mucho más difícil para los niños de lo que generalmente se cree” (p.74).Con base en el autor, se interpretó que fue difícil que los alumnos usen el algoritmo de la resta convencional para resolver problemas esto debido a que por un lado el usar el algoritmo convencional de la resta a que se le llama pedir prestado decenas, implica conocer y dominar el sistema decimal, cuestión en que al momento en que se presentó este desafío únicamente se había visto el desafío de reconocer el valor numérico de los número decimales mediante la relación parte-todo en la representaciones numéricas de números con punto y fracciones decimales, de esta forma se creyó que fue difícil aplicar correctamente el algoritmo si los significados subyacentes del sistema decimal no se conocen por completo. Segura (2016) mencionó “el conocimiento sobre el sistema de numeración resulta fundamental para entender el procedimiento de las llevadas y de tomar prestado, ya que numerosos errores que realizan los estudiantes a la hora de aplicar el algoritmo se basan en un deficiente dominio de esta parcela del conocimiento numérico”. (p.87).

Tomando en cuenta lo anterior, se consideró que conocer los significados del sistema decimal y desarrollar el sentido numérico son básicos para aplicar el algoritmo de la resta debido a que en la una de las dificultades del método de pedir decenas prestadas es que no se entiende por qué pedir una decena al número que está a la izquierda, la falta de compresión de esto se le atribuye a la enseñanza empleada por los docentes en el tema de números decimales. Al respecto Brousseau (1987) mencionó que el obstáculo didáctico es aquel que se produce por la enseñanza, en este caso se consideró que un principal obstáculo didáctico para enseñar el algoritmo convencional de la resta con el método de pedir decenas prestadas es el discurso que emplea el docente para explicar el algoritmo de la resta. Acerca del discurso, Aravena y Morales (2019) mencionaron que la escasa comprensión de la matemática que se enseña en la escuela es producida por el discurso matemático escolar, este normaliza las técnicas de enseñanza aun cuando no hay comprensión matemática.

De acuerdo a lo anterior, se interpretó que generalmente los docentes enseñan el algoritmo de la resta de la siguiente forma, se tomó como ejemplo el ejercicio que viene en el libro de texto este fue 184.90 – 59.45 para explicar una de las formas en las que el docente emplea el discurso matemático se tomó como ejemplo el siguiente discurso: cuando el número de arriba es mayor, no se puede restar directamente el número de abajo, por lo que hay que pedir prestado una decena al número que está a lado izquierdo, por ejemplo, en el caso del ejercicio anterior no se puede restar al cero, cinco, para ello hay que pedirle prestado una decena al nueve para que el cero se convierta en diez y así se pueda restar directo, a diez le quito cinco, me sobran cinco y el número que estaba a la izquierda ya no es 9 si no se convirtió en 8.

El problema del párrafo anterior fue que los alumnos no comprenden porqué pedir prestado una decena, porque el nueve ya no es 9 sino es 8, porque el cero ya no es cero sino se convirtió en diez, Aravena y Morales (2019) mencionó que es "necesario rediseñar el discurso atendiendo los argumentos, construcción, significado y funcionalidad" (p.149). Se vio que en el discurso anterior la dificultad fue que no se emplean los términos correctos al momento de explicar cómo resolver el algoritmo de la resta; tampoco se entendió que la base del sistema decimal es diez; y no se reconocer el valor que representa cada cifra.

Para entender lo anterior se propone que el libro de texto traiga notas en las que se emplee el discurso matemático correcto, el discurso que se propuso en esta investigación fue: se va a restar a 184.90 la cantidad de 59.45, para ello, es necesario que el minuendo sea mayor que el sustraendo en cada cifra, pero como se observa en la última cifra, del minuendo en este caso fue cero, indica que hay cero centésimos, por lo tanto no se puede sustraer con 5 centésimos a este número, así que hay que tomar la cantidad decimal completa y tomar los 90 centésimos, de esos 90 centésimos, se le quitan 10 centésimos de forma que al 90 centésimos le restamos 10 centésimos para que nos queden 80 centésimos, y de esta forma el cero tomé valor de diez centésimos, puesto que la base del sistema decimal es diez, por ello solo se pueden tomar 10 centésimos, que es lo equivalente a un décimo. Por esta razón el nueve se convierte en 8 décimos y el cero se convirtió en 10 centésimos, de esta forma se puede restar centésimos con centésimos, porque el minuendo es mayor que el sustraendo y se puede restar de forma directa, es decir, a 10 centésimos se le restan cinco centésimos, esto da como resultado 5 centésimos. Este proceso se puede repetir con todas las cifras, pero cambiando la unidad cada que se tome una cifra y respetando el punto decimal, sólo en caso de que el minuendo sea mayor no es necesario convertir las unidades de medida a otra para poder restar la misma unidad.

Otra dificultad que se ve en el ejercicio anterior que fue restar a 184.90 la cantidad de 59.45, es que cuando se propone un ejercicio en forma horizontal se ponen en juego diferentes conocimientos de los números decimales, por ejemplo, acomodar verticalmente las cantidades para poder emplear el algoritmo convencional. Aquí lo ideal sería que se entendiera que se debe respetar el punto decimal en línea recta verticalmente, pero para reconocer esto es necesario conocer el valor numérico de cada cifra, el orden y comparación de las cantidades, e identificar el minuendo y sustraendo.

Como conclusión del primer significado se interpretó que en este primer ejercicio fue indispensable en un primer momento introducir al alumno con palabras comunes y usan el sentido numérico para aprender la resta con números decimales en un contexto extra escolar con el fenómeno del dinero, se sigue usando la presentación numérica de números con punto pero se deja de lado la representación numérica de fracciones decimales, necesarias para entender los números decimales. En un primer momento fue bueno que no se aludiera a la estructura conceptual de la resta sin aludir a la destreza procedimental de restar y usar el contexto extra-matemático con el fenómeno del dinero es útil para desarrollar el sentido numérico. Siguiendo con los significados, el segundo significado enfocado a la resta fue restar números decimales a través de la representación simbólica y la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar. Este significado fue enfocado al contexto matemático para formalizar la resta con la notación del símbolo de menos (-) desapareciendo el fenómeno del dinero y usando cantidades de expresiones decimales, no se aclara si son números o expresiones decimales únicamente se presentan los ejercicios en el libro de texto para que sean resueltos.

El que apareciera la notación del símbolo de menos (-) dio pauta para agregar la destreza procedimental de restar, puesto que a través de la representación simbólica utilizando la representación numérica de números con punto y los símbolo de menos (-) e igual (=) se puede introducir de un primer momento al algoritmo de la resta. En este tipo de ejercicios es donde se considera prudente una vez que se utilizó el contexto extra-matemático se pase al contexto matemático para crear más matemáticas y aparezca formalmente el algoritmo de la resta como primera introducción para que se empiece a utilizar este algoritmo y vaya tomando significado y no se mecanice. Al respecto Ávila, Block y Carvajal (2003, citado en Flores 2005) mencionaron que "se pone mayor énfasis en el aprendizaje del procedimiento que en el significado del algoritmo". (p.9.), a su vez, Segura (2016) mencionó que existe una necesidad de una enseñanza significativa de conceptos básicos, que prioricen el desarrollo del sentido numérico, frente a un aprendizaje memorístico y mecánico de procedimientos en la que la naturaleza no es comprendida. (p.87). De acuerdo a lo anterior, se concluyó que para poder lograr los significados en el tema de números decimales fue necesario primero conocer el los significados subyacentes de los números decimales y, a la par desarrollar el sentido numérico y posteriormente darle significados a los algoritmos de la suma y la resta para que estos sean comprendidos y utilizados correctamente en la resolución de problemas, tal como lo mencionó Segura (2016) "no deben priorizar reglas y procedimientos, sino una enseñanza comprensiva que se dirija a desarrollar y fortalecer el sentido numérico". (p. 87).

Continuando los significados del aprendizaje esperado que se analizó en este capítulo se siguió con los desafíos que integran el cálculo mental. Es la primera vez que un currículo trae integrado el cálculo mental en los números decimales y se consideró como una ventaja enorme debido a que el cálculo mental ayudó a desarrollar los significados subyacentes y el sentido numérico que se necesitan para comprender los números decimales porque para poder llevar a cabo las operaciones de forma rápida. Por ello es necesario analizar las ventajas que ofrece el cálculo mental, García (2014) mencionó que la enseñanza del cálculo mental ofrece muchas ventajas entre ellas están:

- Enriquece el conocimiento de los números, las relaciones entre ellos y sus operaciones.
- Fomenta la creatividad y flexibilidad en el uso de los números.
- Desarrolla la atención, la concentración y la memoria.
- Fomenta la habilidad de tomar decisiones sobre cómo proceder para llegar al resultado.
- Desarrolla la autonomía, pues el alumno decide por sí mismo el método que emplea; las estrategias de cálculo mental son personales. (p.89)

De acuerdo a lo anterior, se vio como el cálculo mental ayudó a desarrollar habilidades necesarias para poder abordar los desafíos que están en los libros de texto, y no solo los desafíos que fueron exclusivos del cálculo mental por ejemplo, en las ventajas que mencionó García (2014) se tiene que el cálculo mental enriquece el conocimiento de los números, las relaciones entre ellos y sus operaciones, específicamente describe la importancia de establecer la relación entre los números decimales, naturales y fraccionarios. Esta ventaja fue de vital importancia en el la adquisición de los significados subyacentes de los números decimales, puesto que a través de las relaciones de los números fue como se logró la vinculación entre la estructura conceptual de los números decimales, fraccionarios y enteros, debido a que un gran problema de aprendizaje de los números decimales este fue que se ve una desconexión entre estos objetos matemáticos y se ven como conocimientos aislados y no se vinculan entre sí, además que en los números decimales se tienen a generalizar las propiedades de los enteros en los números decimales tal como lo mencionaron Brousseau (1987); y Centeno (1997), cuestión que se debe cambiar.

Así mismo mostrar los sistemas de representación apoyó a las relaciones de los números y a sus representaciones Gómez (2007) mencionó que los sistemas de representación constituyen diferentes facetas de un concepto o estructura matemática. Gómez (2007) y Cañadas et al. (2018) mencionaron que la estructura conceptual deberá representar la estructura matemática en todos sus posibles sistemas de representación. Gómez (2007) cada uno de estos sistemas de representación aportó un significado de la estructura matemática desde la perspectiva de las matemáticas escolares. En este caso apoya a la presentación numérica de los números con punto, fracciones decimales y de los enteros visto como una representación de un mismo tema y no como temas separados que no permiten relacionarse entre sí y por lo tanto no permiten cognitivamente desarrollar los signos que le dan sentido a la representación.

Las siguientes ventajas del cálculo mental se vieron que fueron enfocadas a desarrollar y ver la aplicación que tiene el sentido numérico, por ejemplo, describieron la flexibilidad que se debe tener con los números, el desarrollo de la memoria y elegir la estrategia que usará para resolver la operación. Respecto a esto, si bien una de las dificultades que hay en el aprendizaje de la aritmética fue lograr el desarrollo del sentido numérico, este implicó habilidades, conocimientos, memorización acerca de los temas que se ven en la aritmética, además implicó mucha actividad cognitiva para su desarrollo. Al respecto García (2014) mencionó que el sentido numérico requiere de construir procedimientos prácticos y adecuados a diversos contextos, García (2014) agregó que "el sentido numérico es una habilidad, una intuición, comprensión o razonamiento de los números" (p. 57).

Otra ventaja que se observó es que el cálculo mental aparece en cuarto año lo cual ayudará a que en los ciclos escolares posteriores se desarrollen los significados subyacentes de los números decimales a lo largo de desafíos. Habiendo explicado el papel que juegan y la importancia que tienen el cálculo mental y el sentido numérico en el tópico matemático de números decimales se empezará a describir los significados que contemplan el cálculo mental estos fueron: leer números decimales simbolizados mediante la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar; y sumar o restar mentalmente números decimales mediante la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

Se observó que en el primer significado fue relacionado más con los significados subyacentes de los números decimales que con sumar o restar números decimales mentalmente, por ello se vio la importancia que para sumar o restar números decimales fue necesario conocer los significados de estos números. En este significado se interpretó que el desafío de cálculo mental fue propuesto mediante un juego que se convierte en una competencia, esto hizo que los cálculos que se hicieron se realizarán de la manera más rápida por lo que fue conveniente buscar razonamientos y estrategias más rápidas que los algoritmos convencionales para realizar las operaciones mentalmente.

El libro de texto propuso fichas para trabajar el cálculo mental mediante la representación numérica de números con puntos. Un ejercicio que estuvo presente en las fichas fue: tengo 5.5 y quiero 4, se trató de encontrar qué operación se debió realizar para que de 5.5 se llegue a 4. En este ejercicio, la dificultad es leer la cantidad en voz alta para después decir el resultado. Se interpretó que para poder usar correctamente el cálculo mental fue necesario tener ciertos conocimientos de los números decimales, por ejemplo, fue necesario conocer la representación verbal de los números decimales, en este caso en el contenido anterior se dio el nombre que reciben los números decimales, también fue necesario establecer el valor numérico que representa cada cifra de la representación numérica de números con punto para poder hacer el cálculo rápidamente.

Fue importante poner énfasis en la lectura de las cantidades, por ejemplo la presentación numérica 5.5 se lea como cinco enteros con cinco décimos, y que no se cometa el error de leer cinco punto cinco, porque de esta forma se ve aislado la representación numérica de números con punto y la representación verbal además que la representación verbal ayuda cognitivamente entender el valor numérico de la representación numérica de números con punto si esta fue asociada a la representación numérica de fracciones decimales. Aunado a lo anterior fue importante que en cuando se llegue a la representación de verbal no se memorice únicamente los nombres de los números que representa cada cifra, sino que se reconozca el valor que representa cada y se distinga qué números son mayores y cuáles menores, porque de lo contrario si sólo se memoriza los nombres de las cifras se caería en lo que mencionó Ávila (2008) en la enseñanza nominalista de los números decimales.

Aunado a lo anterior, para poder resolver el ejercicio fue necesario emplear la destreza procedimental de sumar o restar número decimales mentalmente, que fue el segundo significado que se desarrolló en estos desafíos. La actividad cognitiva fue que se tenía que restar o sumar mentalmente por ejemplo en el ejercicio anterior, tengo 5.5 y lo que quiero 4, para llegar de 5.5 a 4 fue retroceder lo que cognitivamente se entendió como la destreza procedimental de restar debido al antecedente que hay de las palabras comunes que introducen a la resta. Entonces, la actividad cognitiva fue restar a 5.5 el número 4, para realizar esta operación pueden ser diversos procedimientos desde el algoritmo convencional que en este caso funciona de forma rápida ya que solo se tiene que restar los entero y la parte decimal se mantiene o bien se puede realizar de forma inversa aplicando la suma en lugar de la resta, tomar como base el cuatro y cuánto me falta para llegar a 5.5. Citando lo anterior, García (2014) mencionó la importancia de conocer también los algoritmos convencionales que permiten resolver cualquier operación sin importar los números que se tienen que operar. (p. 65). Agregó que los algoritmos convencionales de las operaciones aritméticas son herramientas muy poderosas porque funcionan siempre, no importa los números que estén involucrados, y por ello deben ser estudiados, comprendidos y aprendidos por los alumnos. (p.110). Para este tipo de ejercicio funciona más el algoritmo convencional que el sentido numérico.

Sin embargo, hay ejercicios en los que el algoritmo funcional resulta complejo y lento por lo que se requiere recurrir al sentido numérico. Ejemplo de esos ejercicios fue 1.03 y quiero 2.30 en este caso el algoritmo convencional ya no funcionó como estrategia de operar rápido aquí lo importante sería conocer la base del sistema decimal, la cual es de base diez para poder sumar por factores usando la representación simbólica para operar mentalmente. Al respecto García (2014) mencionó que si se da libertad de abordar los problemas haciendo uso de los conocimientos previos, entonces se podría proponer otras estrategias, otras maneras de operar y manejar los números, además de construir conocimientos con significado, refiriéndose de esta forma al sentido numérico.

Una forma de usar el sentido numérico para resolver la operación sería, si tengo 1.03, para llegar a 1.10, me hacen falta 7 centésimos para poder completar un décimo, o bien, a su equivalente que son 10 centésimos, y para llegar a 30 centésimos hacen falta 20 centésimos, por lo tanto, se necesitaron 27 centésimos más un entero para completar 2.30. Con este razonamiento se apoyaría a los algoritmos convencionales debido a que se está razonando la base del sistema decimal, además que se apoya el sentido número, la propiedad de la densidad, las representaciones verbales, el valor numérico de cada cifra, entre otros significados subyacentes de los números decimales.

Después de este ejercicio se pasó otro de mayor complejidad en este caso en forma de memorama se debió levantar tarjetas que tenían escritos números decimales con la presentación numérica de números con punto. En este ejercicio se pudo interpretar la destreza procedimental de sumar o restar números decimales mentalmente debido a que aquí se tenía mayor dificultad porque en este ejercicio podrían salir números decimales que tenía enteros y la parte decimal, o bien, solo la parte decimal, las cuales implican una o dos cifras, lo que resultó más difícil porque en el caso de que se tenga un cifra del minuendo y dos el sustraendo, para poderle restar fue necesario agregar el cero de lado derecho para igualar el número de cifras esto se hace cuando se conoce los significados subyacentes de los números decimales. De lo contrario se caería en error que mencionó Centeno (1997) y Ávila y García (2008) de no otorgarle valor al cero.

El error anterior, es cometido porque se generalizan las propiedades de los números enteros en los decimales como lo mencionó Brousseau (1987). Lo anterior surge también porque en la suma el cero se entendió como que no tiene valor ya que al hacer la operación no afecta al resultado que este o que no esté cero. Se interpretó que este razonamiento debe desaparecer, tal como lo mencionó Brousseau (1987) un aprendizaje puede ser apto para resolver un problema, pero después puede convertirse en un obstáculo. Para el caso del algoritmo de la resta, el aprendizaje que en un momento es válido para sumar números decimales en la resta se convirtió en un obstáculo para poder realizar el algoritmo de la resta porque se desconoce los significados de los números decimales y por lo tanto no se pueden aplicar a los algoritmos convencionales.

Se consideró muy importante ir desarrollando el cálculo mental en los estudiantes porque es a través de él donde se verá la utilidad que tiene los significados subyacentes de los números decimales y la importancia de conocer el sistema decimal para operar correctamente y posteriormente resolver problemas. Aunado a esto fue importante ir desarrollando mediante la representación simbólica y el cálculo escrito el sentido numérico para que después se pueda desarrollar mentalmente, también se consideró importante incluir la representación numérica de fracciones decimales para que se vaya favoreciendo la equivalencia entre la representación numérica de números con punto y fracciones decimales, de esta forma ir creando los significados de los números decimales.

Continuando con los significados sigue el significado de: resolver problemas de números decimales simbolizados por la representación numérica de números con punto en el contexto extra-matemático en una situación pública usando el fenómeno de la medida. Como se pudo observar en este significado, la destreza procedimental de resolver problemas fue una destreza general que se puede abarcar a cualquier objeto matemático, es decir, no fue propia de los números decimales pero que juega un papel importante en la adquisición de los conocimientos de estos números. Si bien se observó en diferentes desafíos que vienen en los libros de texto se dan indicaciones muy generales a veces sin aludir a la estructura conceptual, o bien sin aludir al campo conceptual o al campo procedimental según sea el caso. La razón fue porque el enfoque de la materia de matemáticas en la educación básica va dirigido a dar solución a problemas y se desafía al alumno a que resuelva los problemas usando sus conocimientos previos sin dar información que lo ayude a solucionarlo, es por ello que en las indicaciones a veces carecen de la estructura conceptual. Al respecto García (2014) mencionó que la resolución de problemas juega un papel destacado el enfoque de la enseñanza de las matemáticas no solo para aprenderlas si no también son el medio para hacerlo. Agregó que en el enfoque se promueve que los alumnos se enfrenten a problemas utilizando procedimientos propios, construyendo estrategias personales y haciendo uso de sus conocimientos previos. De acuerdo con lo que dijo García (2014) se interpretó que la resolución de problemas fue fundamental en el proceso de enseñanza de las matemáticas y en los números decimales, pero también se destacó el hecho que fue necesario incluir la estructura conceptual de lo que se quiere lograr en cada desafío para que haya un objetivo claro del aprendizaje que se quiere lograr.

Entendiendo lo anterior, se continuó con la interpretación del significado y se observó que en los problemas que se presentaron para resolver fueron enfocados al contexto extra-matemático mediante el fenómeno medida. Anteriormente para introducir a los alumnos a sumar o restar números decimales se utilizó el contexto extra-matemático mediante el fenómeno del dinero, contexto muy familiar para los alumnos en el que pueden sumar o restar haciendo uso de la moneda local. Sin embargo, en el contexto de la medida se complica más realizar las sumas o la restas porque a diferencia del dinero, el contexto de la medida puede abarcar más cifras decimales por sus unidades de medida, lo que se consideró benéfico trabajar otro contexto, pero aún así se interpretó que se debió diversificar los contexto del dinero y medida a otros, ya que si no se diversifican los contextos la enseñanza de los números decimales en el contexto extra-matemático siempre será en los fenómenos del dinero y medida.

Al respecto Broitman et al. (2003) mencionó que en educación básica los contextos mayor mente trabajados son el contexto del dinero y medida, sin embargo, Centeno (1997) ofrece una riqueza en la que se puede trabajar los números decimales, ejemplo de ello fueron los contextos de: longitudes, superficies, volúmenes, tiempo, fenómenos sociales políticos y económicos, por mencionar algunos. Se interpretó que diversificar los contextos se amplía la comprensión del sistema decimal a diferentes unidades de medida y es una necesidad que se debe abarcar en educación primaria, porque una de las dificultades en este nivel es no comprender las unidades de medida y la base con la que están establecidas.

En los problemas propuestos en el libro de texto, se introdujo al contexto extra-matemático con el fenómeno de la medida usando al deporte de la gimnasia y las medidas de los aparatos que usan en ella, para ello utilizaron la presentación numérica de números con punto con un entero hasta dos decimales, que, en este caso, los dos decimales serían los centímetros. Aquí la dificultad que se vio fue que una unidad de medida del sistema métrico decimal de la distancia fue el decímetro, unidad que muy pocas veces se usó en el contexto escolar de los alumnos y están poco familiarizados con el término. Con base en esta información, las preguntas que pretenden dar respuesta van enfocadas a realizar restas con números decimales, pero también para comprender las unidades de medida que representa el fenómeno de la distancia. Por ejemplo se preguntó ¿cuántos centímetros es más ancho el caballo que la barra de equilibrio?, para contestarlas, se tomó en cuenta las medidas que se daban, en este caso fueron, el ancho del caballo fue 0.35 m y de la barra de equilibrio 0.10 m, por lo tanto al resolver la operación fueron 0.25 m o bien si se adquirió un sentido de las unidades de media de la distancia y se reconoció el valor numérico que representan cada una la respuesta sería 25 centímetros.

En esta respuesta claramente se pudo observar que el cambio de contexto al usar diferentes unidades de medida en este caso de metros a centímetro. Para lograr comprender el cambio de unidades de medida fue necesario haber logrado adquirir el valor numérico de las cifras que representó el fenómeno de la distancia. En este ejercicio se pudo observar que la representación verbal juega un papel importante para comprender la unidad de medida que se trabajó, pero para que esta tome sentido se necesitó crear la destreza procedimental de adquirir el valor numérico de los números decimales con la representación numérica de números con punto en el contexto extra-matemático de la medida en el fenómeno de la distancia. Por ello fue importante establecer este puente de conexión entre los décimos, centésimos y milésimos de los números decimales el contexto matemático con las diferentes unidades de medida del contexto extra-matemático.

El siguiente significado fue: comparar expresiones decimales, mediante la representación simbólica y numérica usando la simbolización de números con punto mediante los símbolos de mayor que, menor que, e igual que, en un contexto matemático en una situación escolar. En este significado se interpreta que el libro de texto dio por hecho que los alumnos han adquirido el aprendizaje de sumar y restar cantidades y se prosigue a que se comprenda de la comparación de expresiones decimales mediante el aprendizaje adquirido de la suma y la resta. Para ello utilizaron la representación simbólica de los signos de mayor que (>), menor que (<) e igual que (=) y la representación numérica. Al respecto Cañadas et al. (2018) mencionó que la presentación simbólica es la aplicación de las reglas de un sistema, en este caso se interpretó que la representación simbólica ayuda a dotar de significado a los números decimales dado que para utilizar los signos de mayor que (>), menor que (<), e igual que (=), fue necesario conocer cómo opera el sistema decimal.

Aunado a lo anterior, fue necesario conocer el significado enfocado a la estructura conceptual del término de comparación de expresiones decimales. Sin embargo, este término conceptual se vio hasta sexto año pero este desafío fue antecedente de cómo el libro de texto va introduciendo desde cuarto año a los significados subyacentes de los número decimales y también se consideró que estos significados subyacentes fueron necesarios para poner en práctica el aprendizaje de la estructura conceptual de la suma y la resta, y las destrezas procedimentales de sumar y restar. Al respecto Konic et al. (2010) mencionan que es importante ir desarrollando la comparación de los números decimales de poco a poco debido a que es uno de los significados subyacentes de los números decimales, por ello ir mezclando los números decimales con la estructura conceptual de la suma y la resta y la comparación ayudó a desarrollar esta y así tomarle significado a la suma y la resta de lo que se está operando.

En el significado de comparar expresiones decimales se trabajó en el libro de la siguiente manera: en el libro de texto vienen dos tipos de ejercicios en el primero viene dado en la misma unidad de medida lo que lo convierte en un ejercicio de menor dificultad, 8.15 m ____ 12.87 m – 4.68 m, en este ejercicio se tenía que identificar si 8.15 es mayor que, menor que o igual que. Para ello se usó del algoritmo convencional de la resta puesto que la estar presente el símbolo de menos (-) se aludió a la estructura conceptual de la resta y a la destreza procedimental de restar o bien si para este momento se adquirió el sentido numérico puede ser otro método por el cual los alumnos identifiquen que 8.15 es menor que la expresión decimal.

En los segundos tipos de ejercicio que vienen en el libro de texto se cambian las unidades de medida lo que los convierte en un ejercicio de mayor complejidad, por ejemplo estuvo presente el ejercicio de 63 cm + 70 cm + 59 cm ____ 2.08 m. Se observó que en este ejercicio implicó mayor grado de complejidad puesto que al usar la destreza procedimental de sumar que fue la que indicó el símbolo de más (+) en la unidad de medida de centímetros se dio un entero como resultado, en este caso 192 cm.

En el ejercicio de comprar expresiones decimales se ponen en juego significados subyacentes de los números decimales, por ejemplo, un error en primer momento que se puede manifestar fue pensar que el número 192 es mayor que 2.08, para comprender que el número 192 es menor se tendrá que saber la base del sistema métrico decimal que fue la misma que la de los números decimales solo que cambia el nombre dependiendo la unidad de medida. Para lograr lo anterior fue necesario diferenciar con el convenio que los metros representan los enteros y los centímetros representan los centésimos. Al establecer este convenio, se puede hacer la comparación de las expresiones decimales, sin embargo para hacer esta comparación implicó a la vez que los alumnos sepan convertir de centímetros a metros lo cual incrementa el grado de dificultad saber comparar las expresiones decimales.

Se concluyó que para poder comprar expresiones decimales fue necesario haber adquirido la estructura conceptual del suma y la resta y las destrezas procedimental sumar y restar además que deben tener conocimientos de las notaciones mayor que (>), menor que (<) e igual que (=) pero sobretodo tener generada la estructura conceptual del término de comparación. Así mismo hizo falta agregar la representación numérica de fracciones decimales para ir trabajando el valor numérico. Se vio que la representación simbólica al momento de comprar expresiones decimales jugó un papel importante puesto que a través de ella representan la estructura conceptual de la comparación y lo que le da sentido a la presentación simbólica y numérica son los símbolos de mayor que (>), menor que (<) e igual que (=).

Algo que se debe resaltar en este significado fue que usó el término de expresiones decimales y no de números decimales, en este caso, bajo la postura que se trabajó esta investigación las expresiones decimales fueron descritas por Ávila y García (2008) como números que usan la representación de números con punto al igual que los números decimales pero que son diferentes en la estructura conceptual ya que en ellas no usa la base del sistema decimal que es 10. Por lo tanto se consideró importante que los libros de texto tomen una postura cuando se identifiquen que se trata de expresiones decimales o de números decimales para que haya diferenciación entre expresiones decimales y números decimales para que la representación de números con punto tome el significado correcto en cada referencia del objeto matemático.

El siguiente significado fue: identificar qué operación anotar para que cambien las cifras decimales que indican usando la representación numérica de números decimales en un contexto matemático en una situación escolar. Para desarrollarse este significado el libro de texto presentó varias cantidades en la representación numérica de números con punto, se trató de cambiar una cifra por otra cifra, que atendiendo al aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales (SEP, 2011b, p.77) se interpretó que en este caso el libro de texto propuso que se identificara si se hacía una suma o resta para poder cambiar la cifras.

Por ejemplo, el libro de texto presentó la siguiente operación 1.25 se tiene que cambiar el 2 por el 1, en ese caso como el número uno fue más pequeño que el 2 se debe notar que para retroceder fue necesario realizar una resta, si se tiene conocimiento de la resta se sabe que cuando el minuendo es mayor que el sustraendo se puede hacer directamente y el resultado no afecta el valor de las otras cifras, así que se puede dar un resultado con solo entender la destreza procedimental de restar. Sin embargo, en este ejercicio se consideró más importante que se reflexione acerca del valor que representan las cifras y que mediante este valor se pueda hacer la resta por ejemplo el número dos está en la posición de los décimos, que en este caso equivale a dos décimos o bien veinte centésimos entonces si se quiere restar un décimo a dos décimos quedaría un décimo, o bien restar diez centésimos a veinte centésimos, quedarán diez centésimos.

Se interpretó que fue necesario usar mejor el método de la equivalencia del valor numérico de los números decimales que aplicar el algoritmo de la resta, esto para que se razone lo que mencionó Ávila y García (2008) el uso de algoritmos deben tener sentido, en el caso específico de la suma y la resta Ávila y García (2008) mencionaron que: “hay que sumar o restar décimos con décimos, centésimos con centésimos, milésimos con milésimos, etcétera, al igual que para sumar naturales se alinean decenas con decenas, centenas con centenas, etcétera". (p.74). De esta forma se le daría sentido al algoritmo de la suma y la resta y no solo se vería a los números decimales como extensión de los naturales al aplicar el algoritmo de las dos operaciones, además que se ayuda a las estructura conceptual de la equivalencia y a la destreza procedimental valor numérico que representa cada cifra.

Esto debido a que en los últimos ejercicios que se presentaron aumentan el grado de dificultad y fue necesario saber el valor numérico que representa cada cifra para poderlos restar o sumar. Ejemplo de lo anterior es el siguiente ejercicio, 0.128, hay que cambiar 3 en lugar de 2 y 6 en lugar de 8, se interpretó que en este ejercicio aplicar al algoritmo de la suma o resta es complejo debido a que se cambian dos cifras en los números decimales, lo que cambia el valor numérico de toda la cantidad, por lo que saber cuánto se resta o se suma fue difícil. Por ello se sugiere que se sume o se reste interpretando el valor numérico que representa toda la cifra, por ejemplo, si en lugar de verlo como cifras separadas se ve como un solo número que representó ciento veintiocho milésimos y el nuevo número fue ciento treinta y milésimos es más sencillo restar o sumar cuantos milésimos me hacen falta o cuantos me sobran para alcanzar la cantidad solicitada comprando las cantidades, en este caso hacen falta 0.08. En este ejercicio se puso en práctica lo que mencionó Ávila y García (2008) la enseñanza de las operaciones implica saber cuándo usar las operaciones y no solo resolverlas. De acuerdo a lo anterior se consideró importante que primero se identifique qué cantidad, ya que fue con la que se va a operar, segundo ya que se reconoce el valor a operar, se identifique la cifra que se opere con la cifra que representó el mismo valor y finalmente fue importante identificar qué operación conviene más, si la resta o la suma para resolver el ejercicio.

En este ejercicio se vio como se está aplicando las destrezas procedimentales que se desarrollaron en cada uno de los desafíos anteriores y que además de poner en práctica la suma y al resta de números decimales, se realizó lo que mencionó Ávila y García (2008) se le está dotando de significado al algoritmo de la suma y la resta. Otro aspecto que se destacó fue que este significado careció del campo conceptual, pero al ver las destrezas procedimentales que fueron necesarias para resolver el ejercicio se pudo interpretar que se aludió a los términos de equivalencia, suma y resta de números decimales y comparación de números. Así mismo, para ir generando estas habilidades se usó la presentación numérica de números con punto y se interpretó que se le va tomando significado a esta representación poco a poco a través de los desafíos que se presentaron, para ello se usó el contexto matemático y sirvió también para generar los significados subyacentes.

Continuando con los significados se prosiguió con el significado de: registrar las expresiones fraccionarias y decimales que representan el mismo valor, a través de la estructura conceptual de equivalencia mediante la representación simbólica y numérica está a través de la representación de números con punto y fracciones decimales en un contexto matemático y una situación escolar. En este significado una de las representaciones más importantes de los números decimales y que se requirió trabajar constantemente fue la representación numérica de fracciones decimales, representación que anteriormente se había dejado de lado y solo apareció en el primer desafío del libro de cuarto año, y en este desafío nuevamente se presentó.

En el desafío se percibió que nuevamente la representación simbólica jugó un papel importante en la comprensión de la equivalencia de las expresiones y la comprensión del sistema decimal (Cañadas et al., 2018). El libro de texto presenta expresiones que representan el mismo valor, los ejercicios fueron: 0.468, 4.6 + 0.05, 2 + $\frac{5}{10}$ + $\frac{6}{100}$, 0.02 + 0.009, etc., de esta forma se tenía que buscar entre todas las opciones que da el libro de texto, qué operación era equivalente con respecto a otra de los incisos que venían, en algunas ocasiones coincidían con un inciso o con dos. La complejidad cognitiva en este desafío fue interpretar el valor numérico que representaban las representaciones numéricas de números con punto y fracciones decimales debido a que se trabajó poco la representación de fracción decimales y fue necesaria para crear la noción de equivalencia. Tal como lo mencionaron Ávila y García (2008) “Construir la noción de equivalencia entre decimales es una tarea compleja; la dificultad se agudiza cuando los alumnos no tienen una comprensión amplia de lo que son las fracciones decimales. (p.41).

Aunado a ello, la complejidad que implicó la representación simbólica al interpretar lo que indicaron los símbolos de más (+) e igual (=), es decir, se tenía que sumar las representaciones de números con punto y fracciones decimales para buscar un resultado que marcaba la operación o bien buscar una expresión decimal equivalente que representara lo mismo, de aquí la importancia que mencionó Ramírez y Rodríguez (2010) ver al signo igual como bidireccional es decir, lo que representa una expresión sea equivalente a lo que representa la otra expresión.

La representación simbólica fue la que ayudó a compaginar el campo conceptual de los términos de suma y resta de números decimales con los términos de comparación y equivalencia de fracciones, porque fue a través de los signos de más (+) e igual (=) dónde se dotó de sentido a las representaciones numéricas de números con punto y fracciones decimales que representan a un mismo valor, teniendo como antecedente que en uno de los desafíos anteriores se había puesto el valor numérico de la representación numérica de números con punto fracciones decimales con el convenio: “A cada parte llámenla 1 décimo de la unidad o $\frac{1}{10}$, o bien 0.1”. (SEP, 2011, p. 16), por mencionar un convenio.

Para finalizar con los significados del presente aprendizaje esperado se presentó el último significado que fue: escribir números decimales usando la estructura conceptual de la equivalencia, mediante la representación verbal y numérica, en un contexto matemático en una situación escolar. En este significado se vio que se sigue trabajando la estructura conceptual de la equivalencia, poniendo en práctica sus diferentes representaciones, por ejemplo en el significado anterior se puso en práctica la representación numérica de números con punto y fracciones decimales y en este significado se siguió trabajando con la representación verbal de los números decimales.

Para realizar lo anterior el libro de texto propuso ejercicios como fue: 15 décimos, 12 centésimos y 17 milésimos, se trató de escribir con número la cantidad que representaba estas representaciones verbales en una sola cantidad. La actividad cognitiva fue encontrar la equivalencia que representó la representación verbal y la representación numérica, en este caso no especificó qué representación numérica se requería si la de números con punto o la de fracciones decimales, lo que dio libertad de poder escribir cualquiera de las dos representaciones numéricas. Al respecto Gómez (2007) mencionó que los sistemas de representación constituyen diferentes facetas de un concepto o estructura matemática, de acuerdo al autor, sería positivo si el libro de texto proponga que se usen las dos representaciones numéricas para que se trabajara la equivalencia entre ambas.

Como se dijo anteriormente la complejidad cognitiva fue representar en una sola cantidad la suma total de cada representación verbal, en este caso fue necesario que se tenga cimentar la base del sistema decimal y que se transite del lenguaje verbal a la representación numérica y posteriormente a la representación simbólica para poder sumar y obtener un resultado. Es decir, que se conociera que cada diez milésimos se hace un centésimo, diez centésimos un milésimo y diez décimos un entero, de esta forma se puede sumar las representaciones verbales de los números decimales, lo que viene siendo la aplicación del sistema decimal en la representación simbólica, por ello como lo mencionó Cañadas et al. (2018) la representación simbólica requiere del conocimiento del sistema decimal.

Para ello fue necesario realizar la traducción entre un sistema de representación a otro, por ejemplo, que 17 milésimos se conviertan a la representación numérica de números con punto en este caso, fue necesario saber que 17 milésimos se representaron como: 0.017 utilizando la representación de números con punto. Para conocer el resultado final se tiene que convertir numéricamente cada representación verbal a representación de números con punto para poderlas sumar quedaría 1.5 + 0.12 + 0.017 = 1.637, o bien llevar paso a paso la transformación sintáctica invariante de representaciones, primero pasar de representación verbal a la presentación numérica empezado por fracciones decimales y posteriormente hacer la conversión entre el mismo sistema de representación pero ahora con fracciones decimales a números con punto. De esta forma se desarrollaría mejor la comprensión del valor numérico que representa cada representación e ir creando la noción de equivalencia. Al respecto Gómez (2007) mencionó la estructura conceptual deberá representar la estructura matemática en todos sus posibles sistemas de representación debido a que cada sistema de representación aporta un significado de la estructura matemática desde la perspectiva de las matemáticas escolares, de acuerdo a ello, se vio la necesidad que el libro de cuarto año integre desde el inicio del aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen sumar o restar números decimales (SEP, 2011b, p.77), todos los sistemas de representación en el tema de números decimales y no se vean aislados para que se logre una comprensión total de cada uno de ella y no sea parcial.

Como conclusión de todo el aprendizaje esperado se concluyó que en el libro de cuarto año se dio por terminado el primer aprendizaje esperado y este fue enfocado a resolver problemas sumando o restando números decimales. En este aprendizaje esperado se vio la importancia de conocer los significados subyacentes de los números decimales para llevar a cabo en las operaciones la estructura conceptual de la suma y resta con significado, es decir, que los alumnos razonen lo que están operando y no solo mecanicen los algoritmos. Al respecto García (2014) mencionó que se piensa que:

> “lo importante al resolver problemas aritméticos es que los estudiantes obtengan la respuesta correcta en lugar de darle sentido a lo que aprenden, pondrán énfasis en la enseñanza de algoritmos y técnicas de manera mecánica, sin dar espacio a que sus alumnos comprendan lo que hacen ni desarrollen su habilidad de interpretar los resultados que obtienen. (p.40).

De acuerdo a la autora, se elogia el hecho de que el libro de texto haya propuesto en los desafíos actividades que ayudaron a desarrollar el sentido numérico evitando en las indicaciones poner la estructura conceptual del tema a aprender. Así mismo, en este significado se vio la importancia del desarrollo del sentido numérico para poder adquirir los significados de los números decimales y desarrollar el cálculo mental, elementos que anteriormente no se habían considerado en la estructura conceptual de los contenidos que manejan los libros de texto. Al respecto Ávila y García (2008) mencionaron que “Es importante que primero se planteen problemas a los alumnos y que ellos los resuelvan con procedimientos propios, informales, no convencionales, ya después el maestro se encargará de enseñar los procedimientos y algoritmos formales. (p.66). Se consideró muy importante desarrollar el sentido numérico porque ayudó a desarrollar la equivalencia de los números decimales en sus diferentes representaciones, ayudó a obtener sentido y significado de la representación simbólica y fue a generando las destrezas procedimentales y los términos conceptuales de los significados subyacentes como fueron, la propiedad de la densidad, la comparación y orden, el valor numérico, entre otras.

Así mismo, en este contenido se vio la importancia que tiene los sistemas de representación, en este caso la que se llevó mayor importancia fue la representación simbólica, ya que fue la que se utilizó para tomarle significado a las operaciones de suma y resta mediante los símbolos de más (+), de menos (-) e igual (=). Se vio que la presentación de números con punto es la más utilizada para operar con números decimales tal como lo mencionaron Centeno (1997); y Ávila y García (2008). Sin embargo, se consideró que si se quiere establecer la noción de equivalencia y tomar significado al valor numérico de los números decimales fue necesario que se integre más la presentación numérica de fracciones decimales para que junto con la representación simbólica a ayude a dotar de valor numérico a la representación de números con punto, debido a que aún no se puede usar la división para encontrarle un sentido y significado a esa representación.

Se vio que el contexto matemático jugó un papel importante en este contenido porque fue a través del él que se aprendieron más matemáticas y generaron nuevos conocimientos, en cambio en el contexto extra-matemático sirvió para la aplicación de los temas y para integrar el sistema internacional de medidas y de esta forma usar la aplicación de los números decimales. Finalmente se concluyó que el libro de texto dejó de lado dos aspecto importantes, por un lado el aprendizaje esperado del contenido se enfocó al aprendizaje de la suma más que al de la resta, lo que se consideró un desacierto de acuerdo a Segura (2016) mencionó que la resta cuesta mayor trabajo poderla realizar y entenderla.

Aunado a ello, se elogió el hecho de que el libro de texto intentó forjar en los alumnos el razonamiento de los significados subyacente de los números decimales, sin embargo, se consideró importante que al final de los desafíos se debió explicar el algoritmo convencional de la suma y resta para poderlos usar como método formal para aplicar en la resolución de problemas. Al respecto Flores (2005) mencionó que los algoritmos son una de las herramientas para resolver con eficiencia problemas matemáticos que enfrentan en su vida diaria. De acuerdo con lo anterior se vio la necesidad que este conocimiento deba ser integrado en los libros de texto y no solo se le deje como tarea de enseñanza al docente. Continuado con la interpretación de los aprendizajes esperados, en el siguiente capítulo se describe la interpretación del aprendizaje esperado de resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones (SEP, 2011b, p.77).

CAPÍTULO 8. ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE ESPERADO DE RESUELVE PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NATURALES, DECIMALES Y FRACCIONARIOS QUE IMPLICAN DOS O MÁS TRANSFORMACIONES

En este capítulo se describieron los significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones (SEP, 2011d, p. 76.). Este capítulo se dividió en tres secciones, La primera de ellas describió el análisis sintético que se realizó en el aprendizaje espera y el programa de estudios; la segunda subsección describió los significados encontrados en el aprendizaje esperado; finalmente, la tercera subsección describió la interpretación de estos significados según la perspectiva del investigador.

8.1. Descripción general del aprendizaje esperado resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones.

En ésta sección se explicaron los contenidos que integran al aprendizaje esperado y cómo están desarrollados en los desafíos del libro de texto. El aprendizaje que se analizó en este capítulo fue la continuación del contenido anterior pero con un grado de dificultad mayor, por ende, perteneció al mismo eje temático, al mismo estándar curricular pero cambió el aprendizaje esperado que en este caso fue resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones (SEP, 2011d, p. 76.). También lo que cambió fue el contenido a trabajar, que en este caso fue: uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales y resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. (SEP, 2011d, p. 76.).

Al hacer el análisis de este aprendizaje esperado se concluyó que este inició en quinto año y terminó en sexto año en educación primaria, pero únicamente consiste de dos desafíos, los cuales fueron enfocados a fortalecer los algoritmos de la suma y resta en el tema de los números decimales. En este caso el contenido mencionó la palabra transformación, que fue entendida como el cambio de un sistema de representación a otro, por lo cual, se interpretó que en este aprendizaje esperado lo que tendrá relevancia serán los sistemas de representación. La tabla 20 muestra el desglose de los contenidos que se trabajaron en el aprendizaje esperado y que bloques aparecieron en el libro de texto.

Tabla 20 *Descripción de la dosificación y componentes del aprendizaje esperado de resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones (SEP, 2011, p. 76).*

Aprendizaje esperado de resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones	
Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.	
Tema: Problemas aditivos.	
Estándar curricular: Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales.	
Grado escolar: Quinto año	**Grado escolar:** Sexto año
Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales.	Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales.

(SEP, 2011c) y (SEP, 2011d).

La tabla 20 muestra el desglose de los contenidos que se vieron en el aprendizaje esperado analizado en este capítulo. En ella se pudo observar que el aprendizaje esperado está compuesto por dos contenidos y en ellos se fortalece la estructura conceptual de la suma y la resta y el cálculo mental mediante la destreza procedimental de resolver problemas, en este caso no se mencionaron los sistemas de representación ni el contexto. En este mismo se vio que se abarcó en el bloque 3 de quinto año, si bien se recuerda que el aprendizaje antecesor a este se concluyó en cuarto año por ello se interpretó que los libros de texto quisieron fortalecer la estructura conceptual de la suma y la resta en quinto año para que este no fuera olvidado y se hiciera de otras destrezas en estos términos.

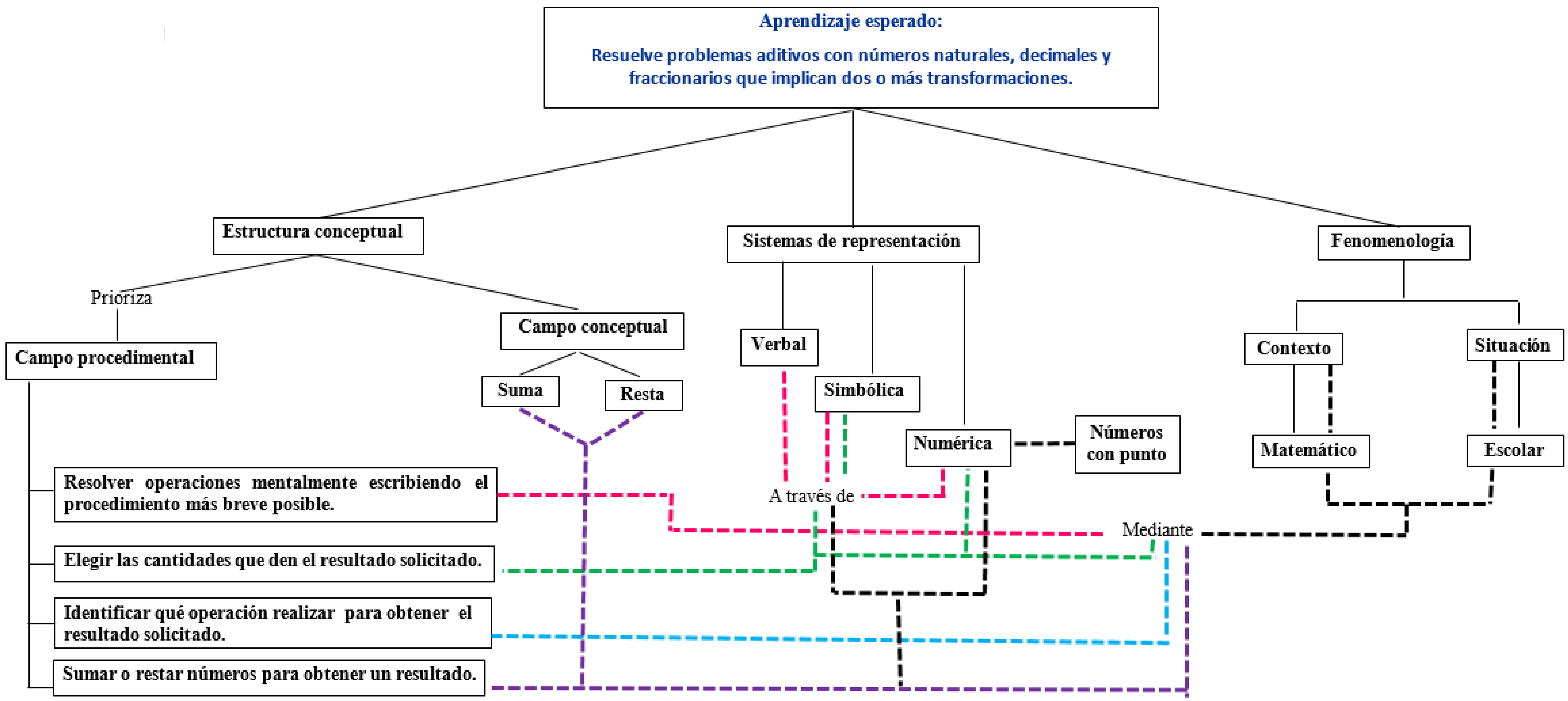
El siguiente contenido del aprendizaje esperado fue abordado hasta sexto año y con este contenido se concluyó en este grado terminando así los contenidos y aprendizajes esperados del tema problemas aditivos, en este contenido se sigue fortaleciendo la estructura conceptual de la suma y la resta, en este contenido finalmente se mencionó el algoritmo convencional de ambos conceptos, porque se interpretó que formalmente se dará a conocer el algoritmo convencional de la suma y resta usando números decimales. En el siguiente capítulo se describirán los significados que se encontraron en el aprendizaje esperado de resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones (SEP, 2011d, p. 76).

8.2. Descripción de los significados promovidos por el libro de texto del aprendizaje esperado resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones.

En esta sección se presentó el mapa conceptual donde se organizaron los significados del aprendizaje esperado de resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones (SEP, 2011d, p. 76.). La interpretación que se realizó del mapa conceptual fue enfocada a la estructura conceptual, los sistemas de representación y al análisis fenomenológico las componentes del significado propuesta por Rico (2012).

El análisis sintético que se hizo del mapa conceptual se observó que dentro de la estructura conceptual se prioriza al campo procedimental, más que al campo conceptual, por lo que se interpretó que el libro de texto potenciará las destrezas procedimentales del aprendizaje esperado más que los términos de la estructura conceptual. Así mismo se vio que se puso mayor énfasis en los sistemas de representación que uso el contenido, puesto que las representaciones fueron las que le dieron sentido a las destrezas procedimentales y al análisis fenomenológico. Para describir qué significados se encontraron en el aprendizaje anterior, se realizó el siguiente mapa mental que muestra la figura 11.

__Figura 11__ Mapa conceptual de los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones



Fuente: elaboración propia, basado en las fichas de recogida de datos que fueron basadas en el libro de quinto año y sexto año. (SEP, 2019b) y (SEP, 2019c)

En la figura 11 se observó, que se prioriza al campo procedimental y se observó en este caso particular, la estructura conceptual carece de términos específicos del tema de números decimales, únicamente incluyó la suma y resta, términos que pueden ser aplicados a diferentes temas matemáticos. Por tal motivo se tomaron las destrezas procedimentales para obtener los significados del aprendizaje esperado.

La primera destreza procedimental fue resolver operaciones mentalmente escribiendo el procedimiento más breve posible, en este caso la representación verbal y la notación del símbolo de más (+) y menos (-) fueron quienes ayudaron a identificar que dentro de la destreza procedimental de resolver problemas se pretendió que se sumarán y restaran cantidades mentalmente, para ello se utilizó la representación numérica de números con punto, la representación verbal y simbólica mediante el contexto matemático en una situación escolar. En el significado anterior se puede observar que la destreza procedimental indicó sumar números, esta destreza fue utilizada por Centeno (1997) y Ávila (2008), sin embargo estas autoras no mencionaron que lo hicieran mentalmente, solo mediante el cálculo escrito. Así mismo, en los sistemas de representación se usó la representación numérica de números con punto usada por Centeno (1997), Ávila (2008) y Konic et al. (2010), la representación verbal y la representación simbólica utilizada por los autores en los significados encontrados en los antecedentes.

El siguiente significado se obtuvo de la destreza procedimental de elegir las cantidades que den el resultado solicitado, esta destreza se trató de completar un diagrama al cual le faltaban las cantidades, para ello, el libro de texto dio el resultado del lado izquierdo y a lado de él venía el signo igual (=). La interpretación que se hizo del signo igual (=) fue a que al tener este signo se buscó una operación que dé como resultado la cantidad ya establecida, de tal forma que las operaciones que se buscarán fueran equitativas con el resultado solicitado. Para ello utilizaron la representación simbólica con los signos de más (+) y de menos (-) y la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar. Este significado no fue abordado por los autores de los antecedentes, la única parte que se abordó fue el sistema de representación de la representación numérica de números con punto por Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010), sin embargo la destreza procedimental hace referencia a encontrar que mediante una suma o una resta se puede llegar a la cantidad solicitada, esta interpretación se hizo debido a los signos que vienen de más (+) y de menos (-), destrezas procedimentales que mencionaron Centeno (1997); y Ávila y García (2008).

El significado que sigue está ligado al significado anterior, se trató de seguir identificando qué operación realizar para encontrar un resultado la cual se tomó como la destreza procedimental que mencionó el libro de texto. Para ello el libro de texto dio una cantidad fija y se trató de usar esa cantidad para llegar a otras cantidades solicitadas. Para ello se usó la representación numérica de números con puntos en un contexto matemático en una situación escolar. Aunque este significado no hizo alusión a la estructura conceptual de la suma y la resta de números decimales, se interpretó que con las cantidades que se propuso se aludió a ellas al tratar de identificar qué operación realizar para llegar al resultado solicitado. Como se observó este contenido es la continuación del contenido anterior, pero con un grado de dificultad mayor debido a que en este no se trató localizar la cantidad si no la operación que diera como resultado una cantidad establecida. Por lo anterior los significados que se encontraron de los antecedentes fueron únicamente en la representación numérica de número con punto que mencionaron Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010).

Finalmente, para alcanzar el aprendizaje esperado el libro de texto se concluyó con la destreza procedimental de sumar o restar números para obtener otro número. En esta destreza aparecen los verbos sumar y restar por primera vez, destrezas procedimentales que mencionaron Centeno (1997); y Ávila y García (2008). A diferencia de los significados anteriores que se aludió implícitamente a ellas, se interpretó que al estar estos verbos se aludió a la estructura conceptual de la suma y la resta, términos de la estructura conceptual que usaron Centeno (1997); y Ávila y García (2008). Para ello el libro de texto solicitó que sumará 0.09 y se restara 0.009 a cantidades diferentes. Se usó la representación numérica de números con punto usada por Centeno (1997); y Ávila y García (2008); y Konic et al (2010), en un contexto matemático en una situación escolar.

De acuerdo a lo descrito anteriormente se encontraron los siguientes significados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas con números naturales, decimales y fraccionarios, que impliquen dos o más transformaciones (SEP, 2011d, p. 76.), tal como lo muestran la tabla 21 y 22:

Tabla 21 *Significados encontrados de los números decimales por campo conceptual y procedimental en el libro de quinto año.*

Quinto año	
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
	Resolver operaciones mentalmente escribiendo el procedimiento más breve utilizando las representaciones de simbólica, verbal y numérica, en un contexto matemático en una situación escolar.

Fuente de elaboración propia, basada en los mapas conceptuales obtenidos de las fichas de recogida de datos del libro de sexto año. (SEP, 2019b).

Tabla 22 *Significados encontrados de los números decimales por campo conceptual y procedimental en el libro de sexto año.*

Sexto año	
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
Elegir cantidades que den un resultado solicitado, utilizando las representaciones simbólica y numérica, esta última mediante la representación de números con puntos en un contexto matemático en una situación escolar.	Sumar o restar números para obtener un resultado mediante la representación numérica de números con puntos en un contexto matemático en una situación escolar.

Fuente de elaboración propia, basada en los mapas conceptuales obtenidos de las fichas de recogida de datos del libro de sexto año. (SEP, 2019c).

Como conclusión de los significados encontrados del aprendizaje esperado que se analizó, se obtuvo que, el aprendizaje esperado orientó a la suma y resta sin aludir a ella en la estructura conceptual, únicamente al final del aprendizaje se mencionó las destrezas procedimentales de sumar y restar. Prácticamente en este aprendizaje se trató de poner en práctica lo aprendido del contenido anterior, pero ahora en lugar de encontrar siempre el resultado de una operación fue a la inversa, es decir, se dio un resultado y se tenía que encontrar la operación o cantidades que se requerían para llegar a ella, por ello se interpretó que en el contenido se mencionó la palabra transformación y se interpretó que se hace alusión a que en se centrará la representación simbólica usando los signos de más (+) y de menos (-), atribuyendo un sentido al signo de igual (=) que anteriormente no se había manifestado.

Así mismo, se vuelve a poner énfasis porque se dio por hecho que ya se sabe el algoritmo de la suma y la resta con números decimales, se interpretó que ésta tarea se dejó al docente ya que en la estructura conceptual del libro de texto no se mencionó el algoritmo convencional de la suma o resta. Se vio reflejado que en este contenido los sistemas de representación jugaron un papel importante porque fue a través de ellas que se le dio significado y sentido a la suma y la resta, porque a través de la representación simbólica fue que se tenía que entender la transformación que sufrían las cantidades y operaciones para lograr un resultado. En el siguiente capítulo se describe la interpretación de los significados que se encontraron en los libros de texto.

8.3. Descripción de la interpretación de los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones.

En esta subsección se realizó la descripción de la interpretación que se hizo de cada significado de todo el aprendizaje esperado. Si bien se recuerda que en el mapa conceptual se vio que se prioriza en la estructura conceptual, el campo procedimental, y se tomó muy poco en cuenta el campo conceptual, en éste se resaltaron los términos de suma y resta. Estos términos se mencionaron en el aprendizaje esperado en la frase "resolver problemas aditivos" que en este caso involucraron las destrezas procedimentales de sumar y restar y a los términos de suma y resta con una o dos transformaciones. Por el término transformaciones se interpretó que los sistemas de representación jugaron un papel importante para adquirir las destrezas procedimentales de sumar y restar, para ello se usó únicamente el contexto matemático en situaciones escolares, esto debido a que se trató de incrementar el conocimiento de la suma y resta mostrando transformaciones de los sistemas de representación.

Para comenzar a desglosar los significados, se inició por el primer aprendizaje esperado el cual fue abordado en quinto año, este significado fue: resolver operaciones mentalmente escribiendo el procedimiento más breve utilizando las representaciones simbólica, verbal y numérica, en un contexto matemático en una situación escolar. En este significado se estimuló el cálculo mental, anteriormente se había manifestado que para el desarrollo del cálculo mental fue necesario primero desarrollar el sentido numérico, por ello en la destreza procedimental escribir el procedimiento más breve se puso en juego este conocimiento del desarrolló numérico porque para ello fue necesario tomar decisión para elegir el procedimiento más sencillo. Al respecto García (2014) mencionó que el sentido numérico es un conjunto de conocimientos, intuiciones y habilidades de los números. Permite emplear la flexibilidad y creatividad al resolver operaciones, así como juicios matemáticos y estrategias propias. De acuerdo a lo anterior se interpretó que para este contenido se debió tener desarrollado el sentido numérico porque se deben tomar decisiones autónomas para poder resolver las operaciones el por procedimiento más breve.

Para elegir el procedimiento más breve fue donde los sistemas de representación tomaron relevancia para poder interpretar qué realizar en la operación. Por ejemplo la representación verbal fue la que enfatizó en utilizar el cálculo mental porque en este caso los términos de la representación verbal fueron el doble y la mitad, estos términos fueron interpretados como los que daban la indicación del qué hacer y ahí se tenía que tomar la decisión de cuál procedimiento fue más concreto. Al respecto García (2014) mencionó que es necesario tomar conciencia de que "el algoritmo convencional no siempre es la mejor manera de resolver mentalmente una operación; depende mucho de los números involucrados" (p.89). Por ejemplo en lugar de usar el algoritmo de multiplicación para obtener el doble de 0.25 o sumar 0.25 + 0.25 es más efectivo para calcular mentalmente, descomponerlo en factores y sumar

0.20 + 0.20 = 0.40 y 0.05 + 0.05 = 0.10 por lo tanto 0.20 + 0.10 = 0.50, o simplemente memorizar que 25 + 25 hacen 50.

Otro ejercicio que venía en el libro de texto de quinto año fue obtener la mitad de 2.6 y 2.7, en este caso se interpretó que fue más sencillo obtener mentalmente la mitad de 2.6, que de 2.7, porque obtener la mitad 2.7 implicó entender que el número 7 es un número impar. Esto implicó obtener dos cifras en lugar de una, en cambio para obtener la mitad 2 basta con restarle a 2 - 1 = 1, pero la mitad de 7 es 3.5. Aquí lo importante fue entender que 0.7 fue equivalente a 0.70 y la mitad de 70 es 35 por lo tanto el resultado es 0.35 y sumando el entero que se había obtenido antes, se obtuvo como resultado final que la mitad de 2.7 =1.35. Al respecto Ávila y García (2008) mencionaron que una de las principales propiedades de los números decimales que son necesarias para comprenderlos es que los estudiantes entiendan que "después de la última cifra significativa a la derecha del punto decimal pueden agregarse ceros sin que el decimal cambie de valor" (p.39). En este caso el 0.7, equivale lo mismo que 0.70, y fue necesario buscar su equivalente para poder obtener la mitad mentalmente.

Con respecto al procedimiento utilizado anteriormente, fue uno de los diferentes procedimientos que se pueden usar para operar mentalmente y esa es la ventaja del cálculo mental que al desaparecer los algoritmos como métodos formales para operar rápidamente se pueden adquirir diferentes estrategias para llegar al resultado. Al respecto García (2014) mencionó que "en el cálculo mental no siempre se procede de la misma manera; depende de los números, de las relaciones que ha construido la persona, de su capacidad de memorizar datos intermedios, de las propiedades que conoce y de sus preferencias". (p.91). De acuerdo a lo que mencionó García (2014) se interpretó que el sentido numérico fue un habilidad muy difícil desarrollar en los estudiantes pero que fue necesaria para poder lograr el aprendizaje de la aritmética y específicamente el aprendizaje de los números decimales, además que las destrezas que se utilizan son variadas, e independientes a cada persona según el proceso de aprendizaje que haya tenido lo que lo convierte más complejo pero también más rico en diversidad de procedimiento para llegar al resultado.

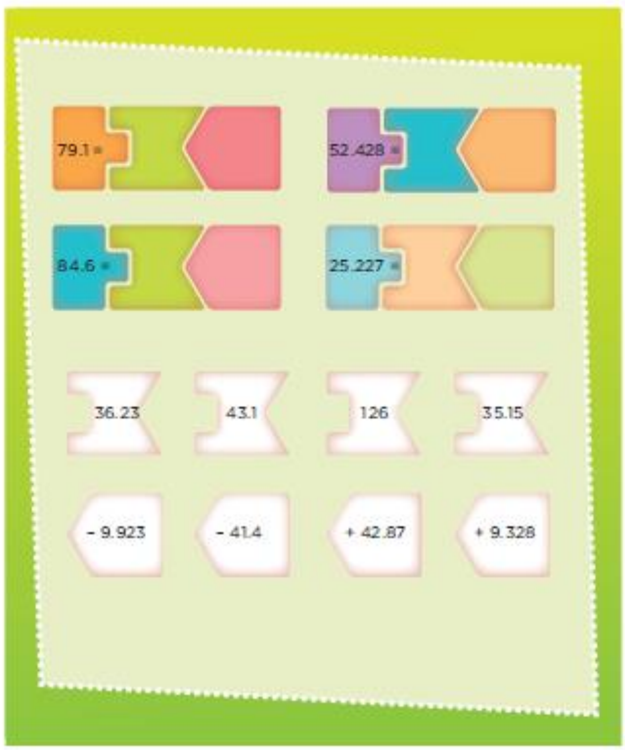
En los ejemplos anteriores que propuso el libro de texto se interpretó que la representación numérica de números con punto sirvió únicamente para simbolizar las cantidades a operar y en ellas se aplicó el sentido numérico, pero quien realmente tuvo impacto para desarrollar la intención didáctica que ayudó al aprendizaje esperado fue la representación verbal porque fue la conexión entre la destreza procedimental y la representación numérica y así poder hacerse del conocimiento. Para finalizar el desafió aparecieron ejercicios donde la representación verbal desaparece y aparece la representación simbólica con las notaciones de más (+), menos (-), e igual (=) que en este caso las notaciones fueron las que vinculan con las destrezas procedimentales de elegir el procedimiento más breve para llegar al resultado con la representación numérica, esa destreza procedimental tomó sentido al incluir las notaciones de más (+), menos (-), e igual (=) debido a que se enfocó en las destrezas procedimentales de sumar o restar, enfoque que marcó el aprendizaje esperado. Para llevar a cabo lo anterior, el libro de texto propuso ejercicios como 0.25 + 0.75, en este ejercicio lo importante fue identificar que 25 + 75 = 100, pero 100 no se puede representar así, para ello fue importante tener conocimientos de los números decimales que identifican que 100 centésimos equivalen a un entero que se representa numéricamente como 1 ó 1.00.

Otro ejemplo que propuso el libro de texto fue el de una resta 1- 0.2 =__, en este caso fue necesario conocer que el entero se integró por 10 décimos, y si se le quitaron 2 décimos, quedaron 8 décimos que se representaron como 0.8 si se utilizó la representación numérica de números con punto. En este ejemplo y en el anterior se interpretó que la representación numérica de números con punto se utilizó únicamente para representar a los números decimales, pero quien le dio la conexión entre los sistemas de representación y la destreza procedimental fue la representación simbólica específicamente en ella las notaciones de más (+), menos (-) e igual (=), que fueron las que indicaron que las operaciones a realizar, y ahí depende el procedimiento que cada quien empleó para verificar que sea el más corto tal como lo mencionó García (2014) el cálculo mental no procede siempre de la misma manera en todos, depende de los conocimientos de cada individuo.

En este caso se interpretó que el cálculo mental fue utilizado para desarrollar el sentido numérico y también para apoyar la transformación de los sistemas de representación que fueron necesarios para llegar al resultado. En el supuesto esperado que los ejercicios del libro se resuelvan utilizando el cálculo mental y este sea a través del sentido numérico, un ejemplo de la transformación en los sistemas de representaciones sería el ejemplo que anteriormente se describió este fue el doble de 0.25 viene la columna de resultado y procedimiento se espera que uno de los procedimientos que se pongan en práctica sea la descomposición en factores y sumar 0.20 + 0.20 = 0.40 y 0.05 + 0.05 = 0.10 por lo tanto 0.20 + 0.10 = 0.50, porque de esta manera se estaría viendo la traducción de la representación simbólica del doble de 0.25, por en ende se está haciendo uso de la transformación sintáctica variante, Cañadas et al. (2018) mencionaron que la transformación sintáctica variante es la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación sin que el concepto cambie. Así mismo se interpretó que hubo una traducción entre sistemas de representación porque se cambió de la representación verbal a la numérica y simbólica. Dentro de la representación simbólica se dio la representación sintáctica variante porque se transformó el doble de 0.25 a números que trajeran las notaciones de más (+) e igual (=) junto con la representación numérica de números con punto para que esta tomará sentido con las notaciones y se pudiera operar. Finalmente se vio cómo el contexto matemático fue potenciado en este significado porque sirvió para crear más matemáticas partiendo de otros conocimientos, en este caso fue el emplear y desarrollar el sentido numérico a través de transformaciones de los sistemas de representación, para ello se usó la situación escolar.

Los siguientes significados van ligados, puesto que los tres estuvieron en un mismo desafío y son la continuación del significado anterior, cabe destacar que estos significados aparecen en sexto año, por lo tanto entre lapso de tiempo fue difícil que le pueda dar continuidad ya que el significado anterior se vio en el grado de quinto año, pero aquí se quiere ver la progresión del aprendizaje esperado y si este se alcanzó o no con los desafíos propuestos en el libro de texto y en términos del marco referencial de Rico (2012). Aclarado lo anterior, el segundo significado del aprendizaje esperado partió de la destreza procedimental de elegir cantidades que den el resultado solicitado, para ello el libro de texto propuso un diagrama en forma de rompecabezas, donde se daba un resultado y la notación del signo (=) en una ficha y para completar el rompecabezas se tenían que poner en dos fichas más las cantidades necesarias para llegar al resultado tal como lo muestra la figura 12.

Figura 12 *Imagen del rompecabezas*



(SEP, 2019c, p.17).

Tal como la mostró la figura 12, una desventaja que se observó en esta consigna fue que como el diagrama era un rompecabezas las fichas que eran para buscar las cantidades que dieran el resultado tenían dos figuras diferentes, en este caso se trató de nonágono irregular y pentágono irregular. En el caso del nonágono irregular se puso cantidades que no traían signo, por lo que se interpretó que esa ficha fue la primera que se debe poner en el rompecabezas y posteriormente venía la ficha del pentágono irregular donde en ella venía la cantidad la notación del signo menos (-) y más (+) por lo que sería la segunda pieza y si se observó bien en la figura fue sencillo identificar que el nonágono irregular debe ir con los nonágonos irregulares y los pentágonos irregular con los pentágonos irregulares. El identificar las fichas por la forma de su figura se consideró una desventaja porque en este sentido se va a identificar quién es el minuendo y sustraendo cuestión que era mejor que los alumnos identificarán solos ya que para el año escolar que se presentó este desafío los alumnos ya tienen el conocimiento de la resta de números decimales y si no saben que signo tiene mayor potencial cognitivo el desafío por se podrían diferentes estrategias para saber qué cantidades sumar con otras cantidades o restar, y sería un preámbulo para el tema de números con signo que se ve en secundaria.

La dificultad cognitiva en este desafío fue encontrar cuál de las fichas del minuendo era la que le correspondía a cada cantidad ya establecida y con cuál de las fichas del sustraendo iba con la ficha del minuendo para llegar al resultado solicitado, caso similar se trató con las fichas que traían el signo de más (+) era identificar qué cantidades al sumarse se podían para llegar al resultado solicitado. La transformación en esta consigna se trató en identificar qué cantidades se tenía que poner en cada ficha para lograr el aprendizaje esperado. En este caso a diferencia del desafío anterior, en ésta consigna no se desarrolló el sentido numérico si no que se debió buscar la representación simbólica que represente el resultado solicitado, en ese sentido tiene que buscar la representación sintáctica invariante que nos lleve al resultado, porque hay una transformación en un mismo sistema de representación tal como lo mencionaron Cañadas et al. (2018). Por ejemplo para encontrar 84.6 fue necesario identificar las cantidades que sumadas o restadas de la parte inferior me dan esa cantidad, esas cantidades fueron: 84.6 = 126 – 41.4.

Nuevamente se interpretó que la representación simbólica al tratarse de operaciones básicas jugó un papel importante porque es la que le da el sentido y significado a la representación numérica de números con punto y las notaciones de menos (-), más (+) e igual (=), además la representación simbólica mostró la esencia de la matemática y las reglas que ya se conocen, también hizo que se pusiera en juego los conocimientos del sistema decimal y de los números decimales, al respecto Cañadas et al. (2018) mencionaron que la representación simbólica tiene sus propios signos, se puede operar con ellos y existe relación entre ellos. Se concluyó que la representación simbólica fue la conexión entre la estructura conceptual y los sistemas de representación, fue por la cual se tomó sentido y significado a lo que se está realizando. Así mismo ayudó al contexto matemático a crear más matemáticas en una situación escolar.

Una vez que se desarrolló el cálculo mental y el sentido numérico en el primer significado; y en el segundo significado se buscó las cantidades que representarán el resultado, se pasó al tercer significado. Este se trató de identificar qué operación realizar cuando se tiene una cantidad fija y un resultado, como se observó en el desafío, se va aumentado el grado de dificultad en cada consigna por ello la destreza procedimental que guío al tercer significado fue identificar qué operación realizar. Para ello el libro de texto dio una cantidad fija y diferentes resultados a los que se tenía que llegar, por lo tanto la actividad cognitiva se trató de identificar qué operación realizar para llegar a cada resultado solicitado, para ello se usó la representación numérica de números con punto para simbolizar las cantidades que dio el libro de texto.

La cantidad fija fue 0.234 esta cantidad se tenía que operar con otras para dar con cantidades como por ejemplo 0.134, 0.244, 1.23, por mencionar algunas. Para poder encontrar la cantidad solicitada se tenía que hacer una de la representación simbólica lo que ocasionó una traducción entre sistemas de representación puesto que ahora esas representaciones numéricas debían tomar sentido del para qué se iban a utilizar. Ahora para identificar qué operación realizar es necesario conocer significados conceptuales de los números decimales, por ejemplo la equivalencia de los números decimales, porque si a 0.234 que en la representación verbal se leería doscientos treinta y cuatro milésimos se quiere llegar a 0.134 que en la representación verbal sería ciento treinta y cuatro milésimos, fue necesario reconocer la equivalencia numérica que representa cada cifra decimal y saber que para llegar 0.134, fue necesario restar 100 milésimos, o bien un décimo que equivale lo mismo y saberlo simbolizar con la representación numérica de números con punto, además identificar que para llegar al resultado fue necesario realizar una resta, por ella se interpretó que de esta forma implícitamente se está aludiendo a la estructura conceptual de la suma y la resta así como a las destrezas de sumar y restar.

Si bien se observó en este significado se siguen aludiendo a los aspectos conceptuales que mencionaron Ávila y García (2008) que fueron importantes entender y comprender antes de operar con números decimales, esto para que se tome significado de lo que se está operando. Uno de estos aspectos conceptuales que mencionó Ávila y García (2008) fue la equivalencia, este significado conceptual es uno de los más complicados de enseñar, y no hay un tratamiento específico para enseñarlo, sino que se va adquiriendo poco a poco con las actividades que se proponen, este caso se vio que los libros de texto potenciaron este aprendizaje esperado desde la resolución de sus consignas implícitamente, algo que se pensó en un inició no encontrar.

Para concluir con el significado tercero, se mostró en este significado que al identificar qué operación realizar se incrementó el grado de dificultad debido a todos los conocimientos que se requieren para tomarle sentido y significado a lo que solicitó el libro de texto, como fueron la equivalencia, expresar la representación numérica de números con punto en representación verbal, la destreza procedimental de restar números decimales, se aludió un poco a la comparación de números decimales en el momento que se tenía que ver qué operación realizar y saber qué número era más grande la cantidad fija o el resultado y ahí identificar qué operación realizar, para realizar todo lo anterior se utilizó el contexto matemático en un situación escolar, que conforme se analizaron los desafíos se interpretó que este contexto es el que ayuda al estudiante a crear más matemáticas en situaciones escolares y posteriormente cuando aparece el contexto extra-matemático es cuando se le da una aplicación con situación reales de la vida que vienen siendo situaciones públicas.

Finalmente, para alcanzar el aprendizaje esperado el libro de texto se concluyó con el cuarto significado este fue sumar o restar números para obtener un resultado mediante la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar. Este significado fue el cierre del aprendizaje esperado por ello ahora sí aparece en las indicaciones las destrezas procedimentales de sumar y restar y están aluden a la estructura conceptual de la suma y la resta por ello se decidió incluir en el aprendizaje esperado la estructura conceptual de la suma y la resta.

A diferencia de los significados anteriores, este último significado propuso como destreza procedimental sumar o restar números para obtener un resultado, en este caso, se buscó un resultado a diferencia de los otros significados donde se buscaba cantidades, operaciones o bien desarrollar todo el procedimiento que requiere el sentido numérico, para lograr esto el libro de texto dio la cantidad inicial y se pidió que se sumará 0.09 y se restara 0.009, es decir, se sumará nueve centésimas y se restara nueve milésimos. Se utilizó la representación numérica de números con punto para representar las cantidades que se le iban a sumar o restar a la cantidad ya establecida, una de las cantidades ya establecidas fue 8.6. En este ejercicio pareciera que solo se trató de sumar y restar cantidades, sin embargo si se analizan a profundidad las cantidades que se propusieron se puede obtener varios aspectos relevantes del porque no fue tan sencillo operar estas cantidades. Para sumar o restar estas cantidades se tiene que tener conocimientos de los números decimales uno de ellos es el conocimiento del valor numérico de las cifras y el lugar que ocupan, la funcionalidad del cero en los números decimales y la equivalencia.

Dada la experiencia que se tiene al operar con números decimales los errores más comunes que tienen los estudiantes al sumar con números no fue que no sepan sumar, si no que desconocen los significados conceptuales que requiere una suma de números decimales. Debido a que cuando se le propone al estudiante la suma en forma horizontal y no acomodada verticalmente, es cuando no saben acomodar las cifras según su valor numérico, por ejemplo para sumar 0.09 a 8.6 lo escriben de derecha a izquierda, es decir, el 6 décimos lo ponen junto al nueve centésimos y esto debido a que no adquirieron un desarrollo cognitivo significativo del valor numérico de los números con punto. Al respecto Ávila y García (2008) mencionaron que:

> "Es de suma importancia que los alumnos comprendan que la alineación del punto decimal obedece a una razón matemática: hay que sumar o restar décimos con décimos, centésimos con centésimos, milésimos con milésimos, etcétera, al igual que para sumar naturales se alinean decenas con decenas, centenas con centenas, etcétera". (p.74).

De acuerdo a lo anterior fue necesario que el libro de texto enfatice en este aspecto y aborde de manera formal el algoritmo de la suma y resta y no se lo deje de tarea al docente, si no que en sus consignas lo ponga para que pueda ser utilizado una vez que se hayan comprendido o fomentado el sentido numérico y los aspectos significados conceptuales de los números decimales.

Además muy pocos estudiantes reconocen la importancia de agregar ceros cuando un número tiene más cifras decimales que otro, puesto que trasladan las propiedades de los números enteros a los decimales tal como lo mencionaron Brousseau (1983) y Centeno (1997) Ávila y García (2008) mencionaron que los números decimales se deben ver como números distintos a los naturales ya que estos tienen características y propiedades que los hacen ser números únicos y diferentes a los naturales. Caso particular de la resta fue muy importante agregar ceros a la derecha para poder restar, de lo contrario el algoritmo saldrá mal, esto se refleja si los alumnos realmente conocen la equivalencia, al respecto Ávila y García (2008) mencionaron que es importante saber que 0.1 es equivalente a 0.10, y Centeno (1997) mencionó que no se puede omitir 0 en la representación de un centésimo (0.01) porque cambiaría su valor y lo incrementa 10 veces. Estos son algunos de los errores más comunes que los estudiantes cometen al realizar operaciones con números decimales y al escribir en la representación numérica de números con punto las cantidades de números decimales. En este caso el restar mentalmente o utilizar el sentido numérico fue difícil ya que las cantidades que pusieron no son para restar mentalmente por ello es que se creyó que se recurrirá al algoritmo convencional de la resta.

Como conclusión de este capítulo se llegó a que en el aprendizaje esperado anterior se dieron las bases para sumar y restar números decimales por diferentes procesos, y se vio que en este aprendizaje esperado, se enfocó más a que se utilizarán procedimientos más cercanos a los algoritmos convencionales utilizando la representación simbólica para ello. Así mismo se interpretó que la representación simbólica fue la clave para entender la transformación de los sistemas de representación y el papel que jugaron para comprender la conceptualización de la suma y la resta así como las destrezas procedimentales de sumar y restar y dotar de significado a la representación numérica de números con punto. Se vio también que en el proceso de sumar y restar están implícitos los aspectos conceptuales de la equivalencia, la importancia de comprender la presentación de números con punto, el orden de los decimales y el valor numérico que estos representan.

Para comprender lo anterior se recurrió al contexto matemático porque se tenía que incrementar los conocimientos matemáticos, por ello, el contexto matemático ayudó a alcanzar las expectativas del aprendizaje esperado. Finalmente se vio que el algoritmo convencional tuvo que aparecer al poner la palabras sumar y restar y poner cantidades que no se pueden sumar o restar mentalmente o usando el sentido numérico, por ello, fue importante que se introdujera el algoritmo y se le de una formalización a su aplicación para comprender que los décimos se suman con décimos, centésimos con centésimos y milésimos con milésimos tal como lo mencionaron Ávila y García (2008).

Finalmente se vio como el aprendizaje poco a poco se va desarrollando el sentido numérico y. a la par los diferentes significados conceptuales de los números de qué decimales que en este caso fueron enfocados a la suma y la resta. En el siguiente aprendizaje esperado que se interpretará se desarrollarán los significados de los números decimales implicados en el proceso de multiplicar.

CAPÍTULO 9. ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE ESPERADO DE RESUELVE PROBLEMAS QUE IMPLIQUEN MULTIPLICAR NÚMEROS DECIMALES POR NÚMEROS NATURALES

En este capítulo se describieron los significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales por números naturales (SEP, 2011d, p. 76.). Este capítulo se dividió en tres secciones. La primera de ellas describió el análisis sintético que se realizó en el aprendizaje esperado y el programa de estudios; la segunda subsección describió los significados encontrados en el aprendizaje esperado; finalmente, la tercera subsección describió la interpretación de estos significados según la perspectiva del investigador.

9.1. Descripción general del aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales por números naturales.

En ésta sección se explica cómo está descrito el aprendizaje esperado en el programa de estudio. El aprendizaje esperado de ese capítulo fue resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales por números naturales (SEP, 2011c, p. 80), este contenido perteneció al eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico y al tema de problemas multiplicativos. Es el primer contenido que se abordó en el tema de problemas multiplicativos, por lo que al cambiar de tema y aprendizaje también se cambió de estándar curricular, a este aprendizaje esperado le corresponde el estándar curricular de resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales (SEP, 2011b, p.62), con el estándar curricular se puede anticipar que el aprendizaje de los números decimales fue enfocado a la multiplicación y división, caso específico del aprendizaje esperado que se abordó en este capítulo será únicamente a las multiplicaciones.

El contenido que se abordó en este aprendizaje esperado fue resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada (SEP, 2011c, p. 80). Anteriormente se vio el tema de multiplicaciones pero con números enteros, en este aprendizaje esperado se vio la multiplicación de números decimales cuando se multiplican por un entero. Este aprendizaje esperado se inició y se concluyó en quinto año ya que solo consistió de un solo contenido, para este aprendizaje esperado los estudiantes ya tienen noción de qué son los números decimales, algunos significados conceptuales de los números decimales desarrollados, conocieron la suma y resta con números decimales por lo que ahora sigue conocer la multiplicación con números decimales.

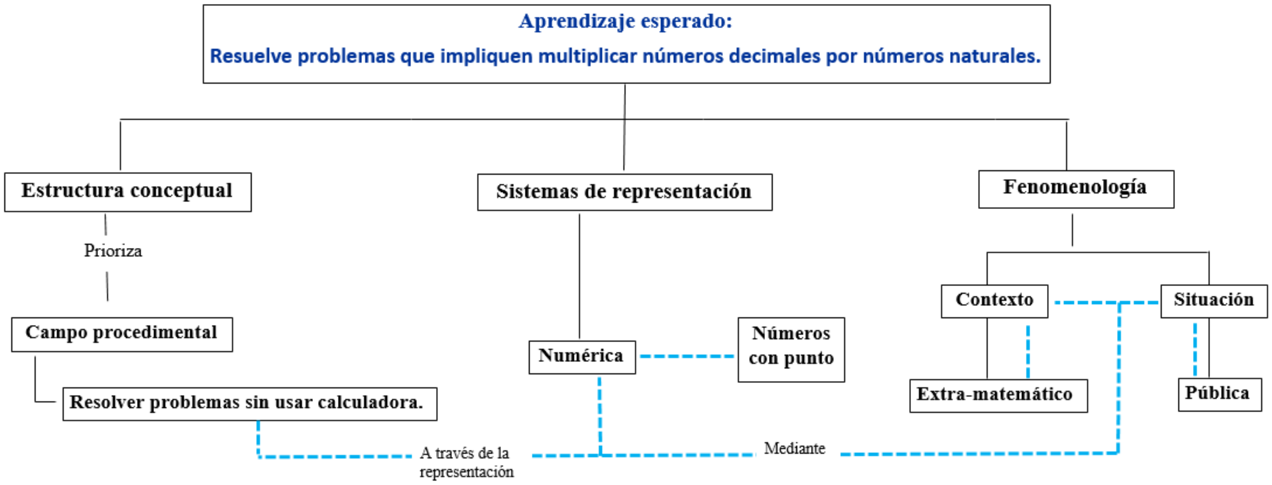
El aprendizaje esperado se ve en el bloque 5 de quinto año, es decir se ve casi al final del ciclo escolar por lo que este aprendizaje se puede esperar que sea de los más recientes con los que inicie el alumno sexto año. Una reflexión que se hizo fue que en quinto año es el penúltimo año escolar que se cursa en la educación primaria y en este ciclo escolar se comenzaron a ver multiplicaciones con números decimales, fue necesario que en los libros de texto gratuito haya más desarrollo del tema de números decimales y no solo se deje en sexto año la mayoría de los temas de los números decimales, puesto que es un tema que necesita constante repaso para ir adquiriendo los significados conceptuales, procedimentales, adquirir los sistemas de representación y el análisis fenomenológico para su comprensión.

Por otra parte, una ventaja que tuvieron los libros de texto gratuitos fue que los significados conceptuales se veían hasta sexto año, por lo que el desarrollo cognitivo del alumno en ese grado escolar lo ayudaría a comprender mejor el tema de los números decimales. Tal vez la falta de comprensión en la mayoría de los estudiantes que mencionaron Ávila y García (2008) que hay en los exámenes de EXCALE y PISA del tema de números decimales se deba a esto, que se vio muy poco el tema de números decimales en la primaria y en secundaria el tema de números decimales únicamente se ve la conversión de números decimales a fracciones y viceversa, los demás temas los números decimales se ven implícitos en ellos y solo como operaciones, además que en secundaria se tiene la creencia que al llegar a este grado escolar el alumno ya debió tener dominio del tema de números decimales y realidad no es así. Sin duda alguna algo que se debe mejorar en los libros de texto es la progresión de los contenidos de los números decimales para obtener mayor comprensión. En la siguiente subsección se desglosan los significados encontrados en el aprendizaje esperado con base en la teoría del significado de Rico (2012).

9.2. Descripción de los significados promovidos por el libro de texto del aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales por números naturales.

En esta sección se presentó el mapa conceptual donde se organizaron los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales con números enteros (SEP, 2011c, p. 80). La interpretación que se realizó del mapa conceptual fue enfocada a la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología, las componentes del significado propuestos por Rico (2012). La figura 13 mostró el mapa conceptual que se realizó del aprendizaje esperado.

Figura 13 Mapa conceptual de significados parcial del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales por números naturales



Fuente: elaboración propia, basado en las fichas de recogida de datos que fueron basadas en el libro de quinto año. (SEP, 2019b).

En el análisis sintético del mapa conceptual se puede ver como únicamente se potenció un solo significado y que este fue enfocado en la estructura conceptual al campo procedimental. También se observó que careció del campo conceptual, por lo que los significados que se obtuvieron fueron significados parciales tal como lo mencionaron Cañadas et al. (2018) cuando carece el significado de alguna de las dimensiones del significado son significados parciales. Así mismo se puede observar que no hay un referente en la estructura conceptual a los números decimales esto debido a que el aprendizaje esperado fue enfocado a realizar, multiplicaciones usando lo números decimales, por lo que los números decimales pasaron a segundo plano y el aprendizaje principal fue que aprendieran a multiplicar con estos números, no que aprendieran los números decimales.

Así mismo se observó en el mapa conceptual que únicamente aparece el contexto extra-matemático, por lo que las situaciones que se vieron fueron públicas en donde el conocimiento se aplicó a situaciones de la vida real. El significado que se obtuvo del mapa conceptual fue en enfocado a la estructura procedimental y se interpretó que el resolver problemas sin usar calculadora el libro de texto pretendió que use la suma iterada como primer acercamiento a la multiplicación de números decimales o bien que use el algoritmo de la multiplicación; la representación que se usó fue la representación numérica de números con punto en un contexto extra-matemático en situación pública.

De acuerdo a lo anterior, la tabla 23 mostró el significado obtenido en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales por números naturales fue:

Tabla 23 *Significado encontrado de los números decimales del campo procedimental en el libro de quinto año*

Quinto Año	
Aprendizaje esperado:	
Resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales por números naturales.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
	Resolver problemas sin usar calculadora, utilizando la representación numérica de números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública.

Fuente de elaboración propia, basada en los mapas conceptuales obtenidos de las fichas de recogida de datos del libro de quinto año. (SEP, 2019b).

Se interpretó que el significado anterior no reflejó en el campo conceptual los términos ni las destrezas en el campo procedimental de los números decimales, fueron los sistemas de representación que se enfocaron a la representación numérica de números con punto misma que fueron mencionadas en los significados de los antecedentes por Centeno (1997); Ávila y García (2008); y Konic et al. (2010), por lo que se interpretó que no se sabe si fueron números decimales o expresiones decimales al no especificar que si se trata de números decimales no se puede asegurar que la representación de números con punto sean número decimales Ávila y García (2008) mencionaron que es necesario diferenciar el concepto de número decimal y la representación de estos, ya que está también la representación de números con punto puede ser utilizada en las expresiones decimales. El que no haya aparecido en la estructura conceptual los términos de referentes a los números decimales se debió a que los libros de texto como lo mencionó García (2014) se trata que los alumnos descubran el aprendizaje sin brindar ninguna información de cómo sean resueltos los ejercicios, entonces al poner multiplicación o suma se les daría información de lo que requiere realizar. En el siguiente capítulo que se analizaron los desafíos y las actividades que propone el libro de texto se interpretó cómo fue el papel de los números decimales en el aprendizaje esperado analizado.

En la siguiente sección se vio la interpretación que se hizo de este significado y lo que pretendió realizar los libros de texto en los estudiantes.

9.3. Descripción de la interpretación de los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar números decimales por números naturales.

En esta subsección se realizó la descripción de la interpretación del significado que se encontró del aprendizaje esperado, este fue, resolver problemas sin usar calculadora, utilizando la representación numérica de números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública. En el mapa mental de la figura 15 se vio que se potenció únicamente un solo significado y que en este, la estructura conceptual no aludía a términos de los números decimales ni a destrezas procedimentales de estos números. Lo que se pretendió en este capítulo fue desglosar como vienen los números decimales implícitos en las actividades de los desafíos.

Para lograr lo anterior, se realizó un análisis sintético de los desafíos que integran el aprendizaje esperado estos fueron tres y se vio que en todos los desafíos los problemas llevaron un mismo fin que era poner en práctica los conocimientos previos de los alumnos en cuanto a la suma para poder empezar la multiplicación de números decimales por números enteros, al respecto Isoda y Olfos (2009) mencionaron cuando se inició el proceso de multiplicación los niños piensan de manera aditiva, es decir, en sumas repetidas. Ese mismo proceso fue el que tomó el libro de texto en presentar primero sumas repetitivas para crear la noción de multiplicación con números decimales. Por ejemplo en el libro de texto venían problemas como obtener el total del costo de 8 fotocopias cuando se sabe el precio de una copia, la representación que se usó fue la representación numérica de números con punto al establecer que una copia tenía un costo de $0.75 si era tamaño oficio o si era tamaña carta $0.50, de esta forma se introdujo al alumno a multiplicar números decimales por números naturales.

Así mismo, se vio que en los problemas se usó un contexto extra-matemático en una situación pública a través de del fenómeno del dinero, esto debido a que el fenómeno del dinero al ser un contexto cercano a los alumnos fue sencillo que puedan operar por diferentes métodos con él, por ejemplo pudieron usar el sentido numérico y la descomposición de factores entre centavos y pesos para llegar al resultado solicitado, o bien se pudo utilizar la suma iterada ya que anteriormente se había enseñado en los aprendizajes esperado anteriores. Broitman et al. (2003) mencionaron que un primer momento los contextos del dinero y medida son los más utilizados para la introducción del aprendizaje de los números decimales, de acuerdo con los autores se vio que el libro de texto volvió a utilizar el contexto del dinero en un primer momento para introducir a la multiplicación con números decimales.

Así mismo, se destacó en el desafío que no solamente involucró a la multiplicación o suma sino que también se involucró a la resta al proponer ejercicios como: si pagó con un billete de $50.00 pesos cuánto dinero le sobró. En los desafíos anteriores se había explicado que en un primer momento el libro de texto introduce a los alumnos con palabra de cuánto pagó, cuánto le sobró, necesita comprar algo, palabras que no son de lenguaje matemático pero que se interpretan que se realice una operación por ejemplo cuánto pagó se interpretó como realizar una suma o una multiplicación. Al respecto Castro et al. (2017) mencionaron que es bueno en un primer momento utilizar este tipo de palabras para introducir a los alumnos a la suma o resta, sin embargó ya que en este caso se trata de la multiplicación y que anteriormente la suma y la resta ya se había visto es necesario que se incremente la dificultad en la multiplicación y se use un vocabulario diferente por ejemplo empezar a utilizar las palabras veces y grupos que son las que se usan más para la multiplicación.

En los siguientes desafíos fue una dinámica parecida a la del desafío anterior se propuso comprar diferentes objetos teniendo el costo de un solo objeto, sin embargo, en este desafío se interpretó que fue de mayor complejidad debido a que además del fenómeno del dinero, también se manejó el fenómeno de la medida y este implicó conocer propiedades del sistema decimal de unidades, además que en este desafío las cantidades que se usaron fueron cantidades que en algunas ocasiones abarcan los tres decimales, por ejemplo en el libro de texto venía el problema de si se compró 5 paquetes de queso panela de 0.375 kg y 6 paquetes de jamón de 0.250 kg cuánto peso en total fue.

El reto de los desafíos fue que los estudiantes intuyen que en lugar de hacer sumas iteradas, un método más rápido y eficaz es la multiplicación, sin embargo al momento que se les representó el desafío no se ha adquirido el conocimiento de cómo multiplicar números decimales por números naturales, pero si se tiene el conocimiento de multiplicar números naturales por números naturales por lo que un método para implementar en la resolución de los problemas sería el algoritmo de la multiplicación y sería interesante ver cómo fue la primera interacción de los estudiantes para colocar el punto decimal, tal vez apliquen lo mismo que en la suma y la resta que se baje el punto decimal donde esté acomodado, lo cual sería un error porque no se estaría comprendiendo el significado que tiene el punto decimal en las operaciones y tampoco porque se dejó el espacio en blanco en la multiplicación como comúnmente se menciona.

Finalmente, en el tercer desafío se sigue la misma dinámica pero cambiaron las cantidades tanto de números naturales como números decimales aumentaron a más cifras y fueron mayores las cantidades por lo que se está aproximando cada vez más a que los alumnos utilicen el algoritmo de la multiplicación como método de resolución de problemas. Por ejemplo la multiplicación $310.75 multiplicarlo por 37, en cierto modo obligó a los alumnos a usar la multiplicación por que sumar 37 veces $310.75 es complicado y tardado y el método ya no es efectivo. Sin embargo, el libro de texto no dio información alguna de cómo realizar el algoritmo de multiplicación y también no lo mencionó en la estructura conceptual. Se vio que en este desafío aún no se usó la agrupación de cantidades para utilizar la notación del signo de por (x), sino que se sigue viendo como el valor de un solo objeto es repetido varias veces. Hubiese convenido poner problemas de agrupación para introducir la anotación del signo de por (x) y que este sea entendido como el total de veces que se multiplica a un grupo de objetos, números dinero etc. Al respecto Isoda y Olfos (2009) mencionaron que:

> "Teniendo el niño en mente la idea de grupo, es capaz imaginar la repetición de los grupos, entrando en al comienzo el alumno llegará al producto sumando de manera repetida, sin tomar conciencia del número de veces que sumó. Calculará usando

> conteos de dos en dos o más, duplicaciones y cálculos parciales entre otras estrategias, optimizando sus procedimientos de cálculo, sintiendo la necesidad de aprender la multiplicación como “el número de veces que se repite el agrupamiento o unidad”, e incluso, la conveniencia de aprender las tablas. (p.52) .

Retomando lo que fue el significado que se está analizado en esta subsección que fue resolver problemas sin usar calculadora, utilizando la representación numérica de números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública se vio que realmente la destreza procedimental de resolver problemas sin utilizar calculadora se refirió a que los alumnos creen una estrategia para resolver los problemas y que esta sea enfocada a la suma o multiplicación.

El primer desafío como son cantidades chicas lo más seguro fue que se recurra a la suma iterada o bien al sentido numérico. Sin embargo en el desafío 3 como ya son cantidades más grandes recurren al algoritmo de la multiplicación y el docente será encargado de que explique qué pasa con el punto decimal cuando se multiplican números decimales por números naturales, realmente en este significado en la estructura conceptual no hay ni términos ni destrezas que aluden a la parte de los números decimales, solamente la representación numérica de números con punto fue la que indicó que se está trabajando con números decimales y al conocer las cantidades y los fenómenos que se trabajaron en los números decimales se interpretó que esto fueron enfocados a usar números decimales y no expresiones decimales, porque se usó el fenómeno del dinero y el dinero al menos la moneda mexicana trabajar con números decimales en múltiplos de 10, y el fenómeno de la medida igualmente trabaja con múltiples de diez por él es el sistema métrico decimal.

Como conclusión del aprendizaje esperado aunque no se aludió a la estructura conceptual de los números decimales en la multiplicación en los problemas se dio cuenta que fueron encaminadas primeramente a la suma iterada y después fue el de sentido a que se use la multiplicación de números decimales por números naturales. Hace falta agregar en las indicaciones, alguna información que ayude a entender cómo funciona el algoritmo de la multiplicación con números decimales y palabras de uso común que lo ayuden a crear la noción de números decimales. Probablemente en el siguiente capítulo aparezca el algoritmo de la multiplicación como método formal para multiplicar con números decimales por lo que el capítulo siguiente el aprendizaje esperado se enfocó a la multiplicación y división de números decimales.

CAPÍTULO 10. ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE ESPERADO DE RESUELVE PROBLEMAS QUE IMPLIQUEN MULTIPLICAR O DIVIDIR NÚMEROS FRACCIONARIOS O DECIMALES CON NÚMEROS NATURALES

En este capítulo se describieron los significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales (SEP, 2011d, p. 76.). Este capítulo se dividió en tres secciones, La primera de ellas describió el análisis sintético que se realizó en el aprendizaje espera y el programa de estudios; la segunda subsección describió los significados encontrados en el aprendizaje esperado; finalmente, la tercera subsección describió la interpretación de estos significados según la perspectiva del investigador.

10.1. Descripción general del aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.

En ésta sección se explicó cómo está descrito el aprendizaje esperado en el programa de estudio. El aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios, decimales con números naturales (SEP, 2011d, p. 79.), perteneció al tema de problemas multiplicativos a diferencia del aprendizaje anterior en este contenido, que correspondía a multiplicar números naturales por decimales, en este aprendizaje esperado se incluyó la operación básica de la división de números naturales entre naturales cuando el residuo no es cero. Así mismo el aprendizaje esperado correspondió al estándar curricular de resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales (SEP, 2011b, p.77).

Este aprendizaje esperado se inició en quinto año con el desafío de empezar a dividir en partes iguales, término conceptual abordado en el aprendizaje esperado enfocado a los significados conceptuales de los números decimales, sin embargó, en este aprendizaje esperado se vio bajo la perspectiva del algoritmo convencional de la multiplicación y división, este último partiendo del término conceptual de partes iguales. El aprendizaje esperado se concluyó en sexto año, como fue uno de los últimos aprendizajes esperados del tema de números decimales, se pusieron en juego los significados conceptuales de los números decimales y mayor número de destrezas procedimentales así, como el uso de diferentes representaciones y los dos contextos que mencionaron Cañadas et al. (2018) matemático y extra-matemático.

Para presentar como viene el aprendizaje esperado en los programas de estudios se elaboró la tabla 24 donde se describió la temporalidad en cómo fue abordado el aprendizaje esperado, en que bloque, grado escolar y contenido se abordó.

Tabla 24 *Descripción de la dosificación y componentes del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales por números naturales. (SEP, 2011d, p. 79).*

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.	
Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.	
Tema: Problemas multiplicativos.	
Estándar curricular: Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales.	
Grado escolar:	**Grado escolar:**
Quinto año	Sexto año
Bloque 2	**Bloque 1**
Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.
	Bloque 5
	Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.

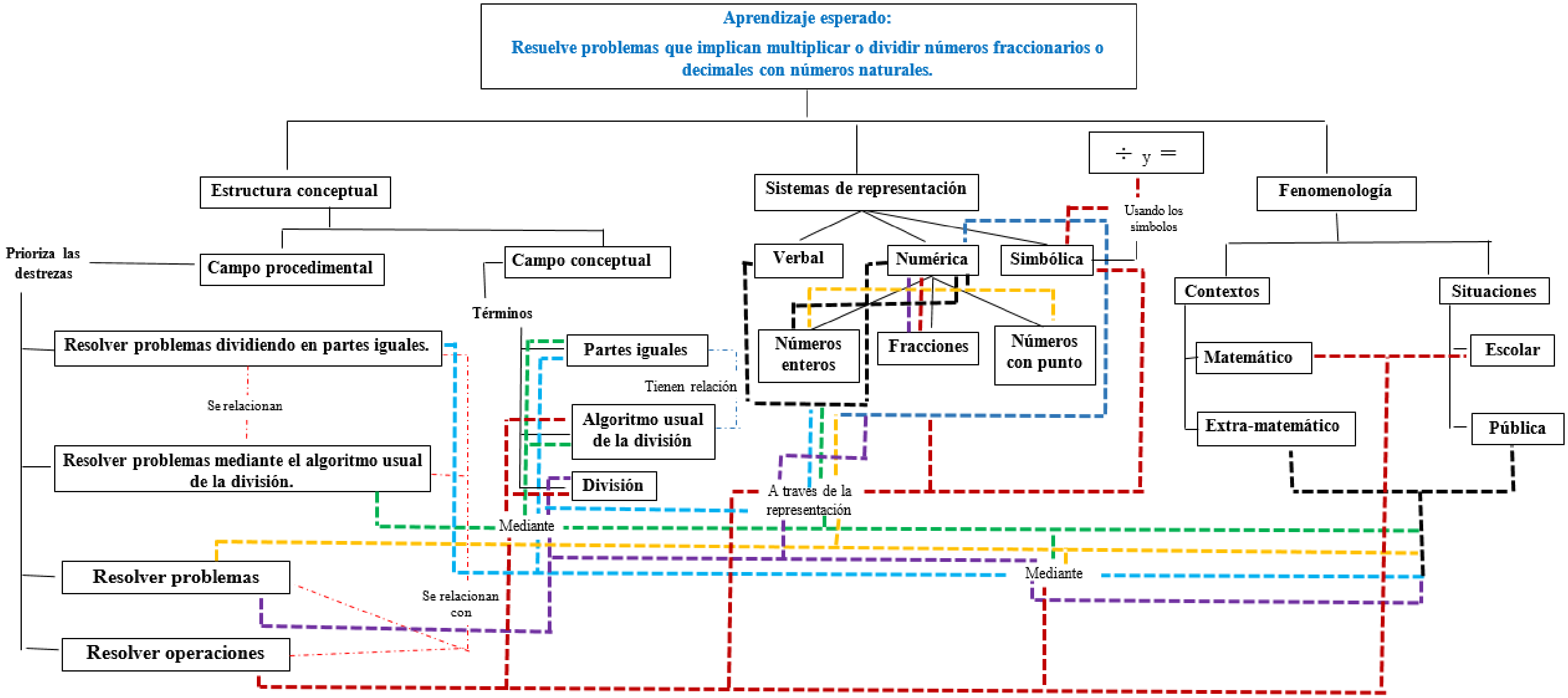
(SEP, 2011c) y (SEP, 2011d).

En la tabla 25 se observó que el contenido se inició en quinto año en el bloque 2 dividiendo números naturales entre números naturales, obteniendo así un cociente decimal. Después se prosiguió en sexto año con problemas multiplicativos en el bloque 1 y estos fueron con números fraccionarios y decimales, finalmente el aprendizaje esperado se concluyó en sexto año en el bloque 5 con la división de números decimales y fracciones entre números naturales. Como conclusión se tiene un panorama general de lo que se abordó en este contenido, tomando en cuenta la noción de significado de Rico (2012) en la estructura conceptual estará la división y la multiplicación con números decimales, fraccionarios y naturales; en el campo procedimental se pudo anticipar que habrá destrezas encaminadas a multiplicar y dividir. En los sistemas de representación se anticipó que se usarían la representación numérica mediante la representación de números con punto, fracciones y números enteros, lo que el programa de estudios no especificó fue bajo qué contexto se trabajó. En la siguiente subsección se describieron los significados que se encontraron en el aprendizaje esperado que se trabajó en este capítulo.

10.2. Descripción de los significados promovidos por el libro de texto del aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.

En esta subsección se describieron los significados encontrados en el mapa conceptual del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales. Para ello, se utilizó la noción de significado de Rico (2012), en la cual mencionó que las componentes de un significado están dados mediante la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico. Para representar lo anterior se presentó en la figura 14 el mapa conceptual del cual se obtuvieron los significados del aprendizaje esperado.

Figura 14 *Mapa conceptual de los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.*



Fuente: elaboración propia, basado en las fichas de recogida de datos que fueron basadas en los libros de quinto y sexto año, (SEP, 2019b) y (SEP, 2019c)

Haciendo un análisis sintético del mapa conceptual se observó que en la estructura conceptual, en el campo procedimental se priorizaron diferentes habilidades que dieron pie a obtener los significados del aprendizaje esperado. Sin embargo, también se pudo observar que en el campo conceptual, fueron tres términos los que tomaron relevancia en los significados conceptuales estos fueron: partes iguales término conceptual usado por Linares y Sánchez (1997), algoritmo de la división convencional y la división término usado por Centeno (1997) y Ávila y García (2008). Se vio reflejado que en el campo procedimental la destreza aritmética de multiplicar significado usado Centeno (1997) y Ávila y García (2008) por y en el campo conceptual el término de multiplicación término usado por Centeno (1997) y Ávila y García (2008) no aparecieron, sino que este aprendizaje esperado dio énfasis a la operación básica de la división.

Así mismo se observó que los sistemas de representación jugaron un papel importante debido a que se utilizó más de uno y esto abonó al contenido a que sea más rico y productivo para los alumnos. En el análisis fenomenológico se puede inferir que se usaron los dos contextos que mencionaron Cañadas et al. (2018) que fueron el matemático y extra-matemático, al describir cada uno de los significados se verá cuál fue el papel que jugó cada una de las componentes de los significados mencionados por Rico (2012) y cuál fue el aporte que dieron para alcanzar el aprendizaje esperado.

Para empezar con la descripción de los significados del aprendizaje esperado se inició con la destreza procedimental aritmética del campo procedimental que fue resolver problemas dividiendo en partes iguales, destreza procedimental utilizada por Linares y Sánchez (1997), esta destreza fue ligada al término partes iguales término conceptual de la estructura conceptual visto anteriormente en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación (SEP, 2011d, p. 76.), con la destreza gráfica y de representación de dividir en partes iguales, solo que esa destreza se convirtió en este aprendizaje esperado que se analizó en este capítulo en una destreza aritmética que fue resolver problemas que impliquen dividir cantidades en partes iguales, para ello se usaron las representaciones verbal y numérica está a través de números enteros e implícitamente en ellos la representación numérica de números con punto utilizada por Centeno (1997), Ávila y García (2008) y Konic et al. (2010). Lo interesante en este significado fue que al dividir en partes iguales cantidades enteras que el residuo no es cero, el resultado que se obtuvo fue en números decimales por ello fue que se dijo que esta representación está implícitamente en los números enteros, para lo cual se usó el contexto extra-matemático en una situación pública.

La segunda destreza aritmética del campo procedimental que se abordó en el mapa conceptual fue resolver problemas mediante el algoritmo usual de la división destreza utilizada por Centeno (1997) y Ávila y García (2008), en el campo conceptual se usó el término de algoritmo usual de la división, aunque este término no aplique únicamente al tema de números decimales sino que puede ser usado en diferentes temas matemáticos se consideró parte de la estructura del campo conceptual porque por lo que se rigió en la obtención de los significados fue en los aprendizajes esperados y en una parte del aprendizaje esperado marcó la división como aspecto fundamental del dominio de números decimales, es decir, la división fue una operación que se debe aprender usando números decimales, por ello se le consideró en el campo conceptual como término. Aclarado lo anterior, se prosiguió con los sistemas de representación que son los que le dieron sentido y significado a la destreza procedimental, se usó la representación verbal y numérica, esta última a través de números enteros y en ellos implícitamente los números con punto, dado que se trató de dividir números enteros cuando el residuo no es cero usando el algoritmo usual de la división, para ello se usó el contexto extra matemático en una situación pública.

El siguiente significado fue un significado parcial como lo mencionó Cañadas et al. (2018) ya que carece del campo conceptual. Para obtener el significado se utilizó la destreza del campo procedimental de resolver problemas, como se observó fue una destreza aritmética muy general que no dio información a que clase destreza procedimental se abordará, esto debido a que se carece de la parte del campo conceptual. Sin embargo, analizando los desafíos del libro de texto se interpreta que dichos problemas fueron enfocados a utilizar la multiplicación mediante los sistemas de representación, en este caso, se utilizó la representación numérica a través de las representación de números enteros, fracciones y números con punto representaciones usadas por Linares y Sánchez (1997); Centeno (1997); Ávila y García (2008) y Konic et al. (2010) para darle significado y sentido a estas representaciones se usó el contexto extra-matemático en una situación pública.

La siguiente destreza partió de la destreza procedimental general de resolver problemas a diferencia de la destreza anterior esta destreza si se mencionó el término del campo conceptual que este caso fue división, por lo tanto se interpretó que la destreza procedimental general fue una destreza aritmética en el sentido que se van a resolver problemas utilizando la división, para ello se usó la representación numérica de números con punto y fracciones, en un contexto extra-matemático en un situación pública.

La última destreza procedimental fue resolver ejercicios, esta destreza al igual que la anterior fue muy general y fue aplicable para varios contenidos matemáticos, sin embargo, al utilizar en ésta destreza en el contexto matemático, dio información suficiente para interpretar para qué contenido matemático va encaminada la destreza procedimental. Para ello el libro de texto propuso ejercicios usando la representación simbólica donde se utilizó las notaciones del signo entre (÷) y del signo igual (=) y utilizando la representación numérica de números con punto y números enteros, por lo cual al estar presente el símbolo de entre (÷), se interpretó que la destreza procedimental de resolver ejercicios fue dirigida a resolver ejercicios utilizando la división, termino del campo conceptual que se obtuvo de la notación del signo entre (÷).

De acuerdo a los párrafos anteriores, se obtuvieron los siguientes significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números decimales y fracciones entre números naturales (SEP, 2011d, p. 79.) tal como se muestra en las tablas 25 y 26.

Tabla 25 *Significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales, en el libro de quinto año. (SEP, 2011d, p. 79).*

Quinto año	
Aprendizaje esperado:	
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
	Resolver problemas mediante la destreza aritmética de dividir en partes iguales favoreciendo el término de la estructura conceptual partes iguales usando la representación de números enteros en un contexto extra-matemático en una situación pública.
	Resolver problemas usando el algoritmo usual de la división mediante la representación numérica de números enteros en un contexto extra-matemático en una situación pública.

SEP, (2011c).

Tabla 26 *Significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales, en el libro de sexto año. (SEP, 2011d, p. 79).*

Sexto de año	
Aprendizaje esperado:	
Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
	Resolver problemas mediante la destreza aritmética de dividir en partes iguales

	favoreciendo el término de la estructura conceptual partes iguales usando la representación de números enteros en un contexto extra-matemático en una situación pública. Resolver problemas usando el algoritmo usual de la división mediante la representación numérica de números enteros en un contexto extra-matemático en una situación pública.

SEP (2011d).

Como conclusión de esta subsección se obtuvo que el aprendizaje esperado fue enfocado a la multiplicación y división de los números decimales. Interpretando los desafíos que vienen en los libros de texto, se encontró que en la dimensión de la estructura conceptual se enfatizó en el campo procedimental principalmente la destreza procedimental de dividir aunque el aprendizaje esperado va dirigido también a la multiplicación se ve muy poco la destreza procedimental de multiplicar. Así mismo en el campo conceptual se vio reflejado que el término división fue al único que se le dio prioridad en aparecer en las indicaciones de los desafíos.

En cuanto a los sistemas de representación se vio que estos fueron enfocados a los números enteros y al ser divididos estos números, el cociente que se obtiene entre ellos fue donde apareció la representación numérica de números con punto, la cual desde un principio no había aparecido siendo la representación mayor manejada para trabajar los números decimales. Así mismo se vio la representación numérica de fracciones y la representación simbólica, esta última fue la que le dio el sentido a la división al usar las notaciones de los signos de entre (÷) e igual (=), con estas notaciones se dio por hecho que en la estructura conceptual en el campo procedimental la destreza fue dividir y en el campo conceptual el término fue división. Finalmente en el análisis fenomenológico aparecieron los dos contextos, tanto el matemático que en este caso sirvió para aprender el algoritmo de la división hasta números decimales; y extra-matemático que sirvió en un primer momento para introducir a los estudiantes a repartir en partes iguales y posteriormente usar el algoritmo de la decisión convencional en situaciones de la vida real. En la siguiente subsección se interpretó los significados que se encontraron en los desafíos de los libros de texto en el aprendizaje esperado resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.

Se concluyó que se debió abordar a la par el algoritmo de la multiplicación al igual que el algoritmo de división y que en el algoritmo de la división este se debió abordar en un inicio con números enteros, posteriormente que el dividendo tuviera decimales y el divisor no, y finalmente se debió abordar la división cuando el dividendo y el divisor con números decimales y enseñar previamente que pasa cuando se multiplica y se divide un número decimal por un potencia de base 10, son los temas que le hicieron falta agregar al libro de texto para abordar el tema de multiplicar y dividir con números decimales.

10.3. Descripción de la interpretación de los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.

En esta sección se describió la interpretación de cada uno de los significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales (SEP, 2011d, p. 79.). En el capítulo anterior se explicó que el aprendizaje esperado fue enfocado en la estructura conceptual al campo procedimental más que al campo conceptual, así mismo aunque el aprendizaje esperado abarcó la multiplicación y división se abordó mayormente la estructura conceptual y procedimental de la división.

Para la descripción de esta subsección se empezó por describir uno a uno los significados que se encontraron en los desafíos de los libros de texto, los cuales se redactaron con base en las destrezas procedimentales que venían en ellos. El primer significado fue resolver problemas mediante la destreza aritmética de dividir en partes iguales favoreciendo el término de la estructura conceptual partes iguales usando la representación de números enteros en un contexto extra-matemático en una situación pública.

Este primer desafío implicó recurrir al término conceptual partes iguales utilizado por Linares y Sánchez (1997), que anteriormente había sido abordado con la destreza procedimental de gráficas y de representación, como se vio en la descripción de este significado el término conceptual de partes iguales ayudó a la relación parte-todo la cual desarrolla cognitivamente en los alumnos destrezas que ayudaron a entender la división de las partes iguales, mismas que se abordaron en el capítulo 6, dadas esas destrezas cognitivas el término partes iguales se convirtió en una destreza aritmética y esta se utilizó para resolver problemas mediante el uso del sentido numérico, operaciones o el algoritmo convencional de la división. Lo interesante fue cómo trasladar la destreza de gráfica y de representación a la destreza aritmética de dividir en partes iguales, probablemente esta destreza para poder ser llevada a cabo se relaciona con otros desafíos de otros aprendizajes esperados relacionados con el tema números decimales como fue entender qué son los décimos, centésimos y milésimos, la equivalencia que hay entre cada uno de ellos en su representación de números con punto y fracciones decimales. Así mismo, se consideró importante que en el análisis fenomenológico se manejó el contexto extra-matemático, debido a que en él se usó el fenómeno del dinero el cual cómo se revisó antes ayudó a entender la repartición de este en partes iguales tal como lo dijo Broitman et al. (2003) es uno de los contextos más utilizados para enseñar los números decimales y poderlos entender, debido a la aplicación que tiene en la vida real.

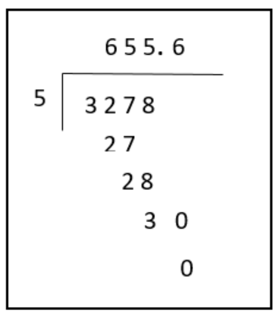
En el significado se interpretó que antes de recurrir al algoritmo de la división se hizo uso del contexto del dinero para separar enteros (los pesos), de los decimales (los centavos). Por ejemplo en el libro del texto venían problemas como: cuatro personas compraron un balón de $150.00 ¿Cuánto cooperó cada persona si pusieron la misma cantidad?, en este caso, uno de los procedimientos que se pudo haber utilizado fue empezar a ver cuántas veces se puede repartir el 150 entre 4 personas, para ello se interpretó que se recurrió a la multiplicación de 4 x 3 = 12 y 4 x 4= 16, por lo que cada persona tuvo que cooperar al menos $30 pesos y sobran $30 pesos, entonces se vuelve a realizar el mismo proceso de multiplicar 4 x 7 = 28, ahora el valor seguro que cooperó cada persona fue de $37.00 y sobran $2.00 pesos, por lo cual aquí ya no se puede seguir repartiendo en enteros y se recurre a los decimales en este caso los centavos, se sabe que 4 monedas de $0.50 centavos hacen dos pesos por lo que cada persona cooperó con $37.50 pesos. Este tipo de razonamiento requiere del sentido numérico que esté desarrollado, más que utilizar algoritmo que no se entienda él porqué del resultado.

Entonces se interpretó que la destreza de dividir en partes iguales fue estimulada en un primer momento por con la representación manipulativa de las tiras de papel y para representarla de forma numérica se recurrió a la representación de fracciones decimales, las cuales ayudaron a representar el valor numérico de la presentación de números con punto lo que en este significado a ayudó a que se le pudiera establecer un valor numérico a las cantidades dadas y poderlas dividir en partes iguales. Cognitivamente la destreza de dividir en partes iguales ayudó a entender que un todo está compuesto por elementos separables y la separación se puede realizar en un número determinado de partes como lo mencionaron Piaget, Inhelder y Szeminska (1960) (citado en Linares y Sánchez, 1997), por lo tanto la transición de un sistema de representación a otro, en este caso, pasar de la representación manipulativa a la representación numérica, se usó la destreza de dividir en partes iguales en dos sistemas de repetición diferente lo cual tuvo impacto cognitivamente desarrollando el sentido numérico a través de la división de partes iguales.

Así mismo, se interpretó que los alumnos puedan utilizar en sexto año el algoritmo de la división, puesto que anteriormente ya se vio con número enteros, el reto implicó utilizar el procedimiento que los alumnos decidan para que en lugar decir sobran $2 pesos estos puedan dividir de tal forma que el residuo sea cero. Uno de los grandes problemas al momento de entender el algoritmo de la división es en el discurso que usa el docente para explicar este discurso se explicará más adelante en otro de los significados pero es importante que se ponga el antecedente en este debido a que para repartir esos dos pesos y los alumnos entiendan en este caso el término conceptual de dividir en partes iguales se entienda la equivalencia de los números decimales. Se comprenda a cuanto equivale un décimo, un centésimo y un milésimo, porque al entender este significado de los números decimales sería el primer paso para cambiar el discurso que comúnmente se usa al explicar la división y es el causante de que existan tantos errores, dificultades obstáculos didácticos al momento de aprender el algoritmo usual de la división.

El segundo significado que se abordó fue resolver problemas usando el algoritmo usual de la división mediante la representación numérica de números enteros en un contexto extra-matemático en una situación pública. En este significado se pudo observar que por primera vez en las indicaciones del libro de texto se pidió que se usará un procedimiento específico para que el alumno llegará a la solución del desafío, anteriormente no se había mencionado ninguno de los algoritmos de la suma, resta y multiplicación. El desafío de este significado consistió en dividir en partes iguales diferentes cantidades empleando el fenómeno de la medida. El primer problema que venía se trató de dividir un terreno que medía 3278 m^2 en 5 partes iguales, para este problema el libro de texto especificó que se usará el algoritmo convencional de la división. En este sentido esperando que los alumnos resuelvan el problema usando el algoritmo de la división se encontraron con el inconveniente de llegar hasta números decimales, en el supuesto que los alumnos lo lograran, es importante que el docente de primaria empiece por cambiar el discurso que utiliza para enseñar el algoritmo convencional, mismo argumento que en el significado anterior se manifestó. Por ejemplo para realizar la división de 3278 ÷ 5 =, generalmente se resuelve como lo mostró la figura 15:

Figura 15 *Algoritmo de la división*



Fuente: elaboración propia.

Para explicar esta división es común en los docentes utilizar el siguiente discurso:

“Vamos a dividir tres mil doscientos setenta y ocho entre 5, como afuera tenemos una cifra que es 5 para poderlo dividir tenemos que tomar la primera cifra que hay en la casita que es 3 y dividirlo. Sin embargo como el tres es más pequeño que el 3 no se puede dividir y nos vamos al siguiente número que es 32, este número ya se puede dividir entre 5, entonces ¿cuántas veces cabe el 5 entre el 32?, la respuesta 6 veces y sobran dos, colocamos el 6 arriba del 2 y ponemos los 2 que nos sobraron debajo del 2 y se baja el 7, ahora se tiene que dividir 27 entre 5, nuevamente se pregunta ¿cuántas veces cabe el 5 entre el 27?, la respuesta es 5 y sobran dos, se coloca el 5 arriba del 7 y los dos que nos sobraron debajo del 7, ahora hay que dividir 28 entre 5, nuevamente se pregunta ¿cuántas veces cabe el 5 entre el 28?, la respuesta es 5 y sobran 3, se coloca el 5 arriba del 8 y 3 abajo del 8. Hasta aquí se terminaron las cifras pero se puede seguir dividiendo para ello se va a agregar el punto decimal después del 5 y al agregar este se pone un cero a lado del 3 para que se convierta en treinta lo podamos dividir, se pregunta ¿cuántas veces cabe el 5 entre el 30?, la respuesta es 6 y sobran 0, cuando por fin se llega al residuo cero la división se termina. El resultado de la división de 3278 ÷ 5 =, es 655.6.

Es común encontrar este tipo de discurso en la educación primaria en los grados de quinto y sexto año cuando se explica el tema, sin embargo, analizando un poco este discurso carece de muchos significados de los números enteros, decimales y del propio algoritmo de la división, al usar la palabra casita en lugar del término correcto que es galera, por eso se concluyó que parte primordial para entender el algoritmo de la división fue necesario el uso correcto de lenguaje aritmético y que sean entendidos los significados de los números decimales que anteriormente fueron expuestos en los aprendizajes esperados analizados. Por eso fue indispensable entender y comprender estos significados para poderlos usar en los algoritmos convencionales para usar un discurso correcto. Ávila y García (2008) mencionaron que para entender el cociente de una dicción es necesario entender la justificación del porqué se sube el punto decimal y porque se agregan los ceros, frases que para los niños carecen del significado y solo memorizan para realizar el algoritmo de la división, por ello estas autoras mencionan que:

"Al dividir 6 enteros entre 4 el resultado es 1 entero y sobran 2 enteros.

> La acción de *bajar el 4* corresponde a juntarlo con el 2 y formar el 24, que NO son enteros sino décimos: como 2 enteros ya no se pueden repartir entre 4 lo que se hace es cambiarlo por 20 décimos que junto con los 4 décimos que se tienen hacen un total de 24 décimos. Estos 24 décimos se dividen entre 4 y el resultado son 6 décimos, ya NO se están repartiendo enteros sino décimos que ocupan el primer lugar después del punto decimal, así que en el momento de bajar el primer decimal hay que colocar el punto en el cociente para indicar que empiezan a repartirse décimos". (Ávila y García 2008, p. 79).

Un discurso que se propuso en esta investigación para que la división sea más efectiva y haya comprensión del algoritmo y con ello se eviten menos errores didácticos en la enseñanza fue el siguiente:

Se sugiere que primero en lugar de utilizar la palabra cabe esta se cambie por repartir así se aprende a distinguir cual es el dividendo y cuál es el divisor porque uno de los principales obstáculos en la comprensión de la división fue tener la referencia que siempre el número más grande es el dividendo y el número más pequeño fue el divisor y no siempre es así, o también que al dividir siempre debe salir un número más pequeño que el dividendo y debido a las propiedades de los números decimales esto no siempre pasa. Al respecto Valencia (2014) mencionó que hay que romper con la idea de que la multiplicación siempre se agranda, y la división siempre se achica. Así mismo la autora añadió que:

> "al dividir un número entre un decimal menor que 1, el resultado se agranda y que cuando se divide entre un número que contenga enteros, el resultado será menor; contrario a lo que ocurre con la multiplicación, donde al multiplicar por un decimal

> menor que 1, el resultado se hará menor y al multiplicar por un decimal con números enteros, el resultado será mayor “. (Valencia, 2014, p. 179).

En este caso como el desafío fue uno de los primeros acercamientos que tiene el alumno para abordar la división con punto decimal, se puso una división que fuese un tanto fácil de comprender que fue dividir 3278 ÷ 5 =, como se dijo anteriormente en lugar de decir ¿Cuántas veces se puede dividir 3278 entre 5?, se cambió la palabra dividir por repartir que es una palabra que está más asociada cognitivamente al alumno con el término conceptual dividir en partes iguales, de esta forma se comprendería que hay que repartir 3278 entre 5, a lo que se estaría apoyando cognitivamente la relación parte-todo pero ahora transformada en números y no gráficamente.

Se partió de la idea de repartir 3278 m^2 entre 5 partes iguales, es importante que se mencione la cantidad leída correctamente por ejemplo tres mil doscientos setenta y ocho metros cuadrados entre 5 partes iguales pero es más importante que se entienda que valor numérico representa cada cifra para establecer la unidad equivalente entre ellas por ello hay que hacer énfasis en que los alumnos dimensionen cognitivamente el tamaño del terreno. Para poderlos repartir usando el algoritmo convencional fue iniciar de derecha a izquierda con las cifras, si se reconoció la posición numérica de los números el 3 se ubica en las unidades de millar lo que fue equivalente a 3000 unidades, el 2 se ubicó en la posición numérica de centenas lo que fue equivalente entre 200 unidades, el 7 se ubicó en la posición numérica de decenas lo que fue equivalente a 70 unidades y el 8 se ubicó en las unidades lo cual es equivalente a 8 unidades, esto sirve para que el alumno entienda que dividirse 3 entre 5 realmente se está dividiendo 3000 entre 5, sin embargo, en este caso no se puede tomar el 3000 unidades ya que el tres es un número más pequeño por eso juntamos las unidades de millar con las centenas para formar el número 3200 unidades y ahora si poderlo repartir entre 5 aclarado que los 00 son ocupados por el 78 unidades pero que aún no se puede llegar hasta esas cifras, entonces 3200 se puede repartir entre 5 unidades lo cual le corresponde 600 unidades y sobran doscientas para escribir 200 unidades, se puede recurrir a la siguiente cifra que es el 7 que representó 70 unidades por lo tanto se las sumamos a 200 unidades para que nos de 270 unidades, entonces 270 unidades al repartirse entre 5 unidades les tocó de 50 unidades y nos sobran 20 al cual le sumamos las 8 unidades que nos faltan de nuestro número original para formar 28 unidades que a repartir entre 5 unidades les tocó de 5 unidades y nos sobran tres unidades.

Esas 3 unidades ya no se pueden repartir entre 5 unidades por lo cual se convirtieron esas tres unidades a la siguiente posición numérica de los números decimales que en este caso son los décimos 3 unidades son equivalentes a 30 décimos y al cambiar de unidad a décimos ya se pone la notación del signo del punto decimal para separar los enteros de los decimales y al final poder verse como un mismo números entonces 30 décimos si se pueden repartir entre 5 unidades les tocará de 6 décimos y sobrarán 0 décimos. Lo importante de este discurso fue que en lugar de decir se agregó un cero y se pone el punto decimal arriba se le está dotando de significado del por qué se agregó un cero, es decir, no es que se agregue el cero sino que en realidad esas 3 unidades se convirtieron al equivalente de 30 décimos.

Como se vio en el problema los sistemas de representación que usaron el desafío en realidad fueron números enteros, que implícitamente en el resultado se buscó obtener la representación numérica de los números decimales más representativa que fueron los números con punto. Así mismo, apareció la representación verbal pero esta no tomó relevancia ya que fue solo para distinguir los metros cuadrados de las cinco partes iguales en las que se iba a dividir el terreno, jugó más importancia el análisis fenomenológico porque en este caso se usó el contexto extra-matemático en una situación pública usando el fenómeno de la medida, el cual fue muy contextualizado a la vida cotidiana del alumno lo que resultó más sencillo comprender tal como lo mencionó Broitman et al. (2003) en la enseñanza de los números decimales los contextos más utilizados son el dinero y la medida. Así mismo Centeno (1997) mencionó que la medida es uno de los contextos con mayor utilidad en la enseñanza de los números decimales.

El tercer significado fue resolver problemas usando la representación numérica de números enteros, fraccionarios y números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública. La dificultad que se encontró en este significado fue que fue un significado parcial, ya que careció del campo conceptual de la estructura conceptual y en el campo procedimental la destreza aritmética fue muy general porque aplicó a cualquier contenido matemático no solo al tema de los números decimales. Analizando la consigna que estuvo en el desafío se dedujo que resolver problemas se refirió a que los alumnos utilicen la multiplicación o división, y que ellos deben descubrir cuál es la operación más apropiada. La consigna consistió en registrar en una tabla los kilómetros recorridos que avanzó cada participante en las vueltas que dio. Por ejemplo había participantes que dieron 2 y 5 vueltas, en este caso cada vuelta consiste de 4 km por lo cual lo más lógico es utilizar la multiplicación para saber cuántos kilómetros había recorrido cada uno de ellos.

La complejidad avanzó cuando los números enteros cambiaron a fracciones, por ejemplo, un participante que avanzó $\frac{3}{4}$, otro avanzó $2\frac{7}{8}$, entonces, por la experiencia que se tiene se puede decir que es muy difícil que los alumnos identificar que los más óptimo para saber ¿cuánto equivale $\frac{7}{8}$ de 4 km? Es emplear el algoritmo de la multiplicación de fracciones, generalmente lo entiende como la relación parte-todo, es decir 4km equivalen al entero en un contexto discontinuo, es decir, un entero conformado por varias partes, en este caso 4, si bien en los antecedentes se expuso por Linares y Sánchez (1997) que uno de los contextos en los que se puede trabajar fracciones es en un contexto discontinuo, este contexto se refirió a que el entero es dividido en varios enteros que representan un todo. A la experiencia que se tiene generalmente lo que los alumnos realizan es dividir 4 entre 8, lo que les da como cociente 0.5 y eso lo multiplican por 7, que da como resultado 3.5 y le suman las dos vueltas que equivalen a 8 km lo que daría un total 11.5 km, esto en la experiencia en la cuales se ha visto que los estudiantes, no comprenden dónde utilizar la multiplicación de fracciones ya que no identifican que el signo por (X) realmente significa de, es decir, en lugar multiplicar $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) =$ y decir verbalmente un cuarto por un medio se entiende que se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, sin embargo, si se cambia ese por (X) por la palabra “de”, es decir, un medio de un cuarto ¿cuánto es?, y mejor aún si se trabaja con lenguaje común que sería la mitad de un cuarto ¿cuánto es?, los alumnos identifican que es un $\frac{1}{8}$, por esta experiencia se cree que se recurrirá más a la división que a la multiplicación de fracciones.

Al final de la tabla vienen la representación numérica de números con punto por ejemplo cuántas vueltas dio un jugador en 1.3 y en 1.25 vueltas, aquí se interpretó que se recurriría a la multiplicación de números enteros con números decimales lo cual será interesante debido a que es difícil saber cuánto equivale 0.3 de 4 km lo que obligaría al alumno a tener que usar el algoritmo de la multiplicación con números decimales, y como anteriormente ya se había propuesto utilizar la multiplicación de número enteros con decimales es más seguro que se empiece a utilizar el algoritmo convencional que el sentido numérico.

En este caso también se expuso el hecho que el discurso de una multiplicación debe cambiar y entender por qué se dejan los espacios o se agregan los ceros y eso se va a entender cuando se comprenda el sistema decimal y los significados de los números decimales solo así se logra entender que no es que se deje un espacio si no que se están respetando el valor posicional del cero que va ahí, y que al momento de sumarse no altera el resultado por ello se deja en blanco.

Si bien se vio en este significado que a pesar de carecer del campo conceptual este está presente en la forma en la que se tiene que resolver los ejercicios aunque en el campo procedimental no se mencionó la destreza específica a la multiplicación o división, esto debido a que se dejó al alumno a que eligiera sus propias estrategias y llegará al resultado, ayuda que se memorice los algoritmos convencionales sin otorgarles sentido, lo cual ya sea se mencionó antes, es útil en un primer momento pero al final siempre hay que enseñar al algoritmo convencional para un mayor eficacia y rapidez en la resolución de problemas.

En cambio hay otros desafíos que únicamente van enfocados a la multiplicación por ejemplo en el desafío número 10, en el cual se mencionó el problema de comprar 15.5 metros de encaje, el metro cuesta 5.60, la pregunta fue ¿cuánto gastó?, en este problema fue enfocado a utilizar la multiplicación con la representación numérica de números enteros y números con punto. Así mismo en el siguiente problema retoma la operación de resta para reforzar con la representación de números enteros y números decimales.

En cuanto a los sistemas de representación apareció la representación numérica en su representación de números enteros, fracciones y decimales, pero implícitamente entre ellos hubo una vinculación con la representación simbólica al establecer qué operación realizar en cada uno de los competidores para saber cuántos kilómetros avanzó, así mismo se vio que fue necesaria la representación gráfica y de representación en la relación parte todo para saber dividir en partes iguales aritméticamente. Finalmente en el análisis fenomenológico fue utilizado un contexto extra-matemático en situación pública con el fenómeno de medida, en cuál fue bien propuesto para entender la multiplicación y división de números decimales fraccionarios y enteros en un contexto real para los alumnos.

Posterior a este significado se presentó un desafío que involucró únicamente la multiplicación de fracción de fracciones, este desafío está enfocado más al área de fracciones y sus propiedades y no abonó al tema de números decimales, así que se pasó al siguiente desafío en el que se encontró el cuarto significado que fue resolver problemas usando la división mediante la representación numérica de números con punto y fracciones, en un contexto extra-matemático en una situación pública.

Es necesario aclarar porque están mezclados los en los desafíos fracciones y decimales, el aprendizaje esperado abordó diferentes representaciones de la división, si bien se recuerda, en estos aprendizajes esperados el tema central no son los números decimales sino la división o multiplicación como tal, así que se abordaron las fracciones y decimales. Anteriormente se había dicho que la representación numérica de fracciones y la representación de números con punto cómo mismas representaciones de un mismo tema pero cada una con sus propiedades, por lo cual se decidió no tomar la representación numérica fraccionaria en este desafío porque lo que se pretendió fue darle énfasis a la representación de números con punto debido a que fue la más utilizada al momento de multiplicar números decimales, y si se integra la división de fracciones se extendería el tema ya que las fracciones que se trabajan ya no son fracciones decimales, es decir, el denominador es una potencia de 10, sino que son fracciones decimales pero diferente denominadores e incluso ponen fracciones no decimales, por ello se decidió únicamente enfocarse en la representación numérica de números con punto que es la que más causa errores y dificultades al operarse, porque no se le está otorgando el sentido y significado correcto.

El siguiente desafío se trató de la división de números decimales aunque no se mencionaron en las indicaciones en te caso la actividad al interpretarla se mostró la destreza procedimental de dividir porque en este desafío se pidió escoger la mejor oferta de jabones que había, para ello se dio una tabla donde venía el número de jabones y el monto total por paquete, lo que se tenía que realizar era obtener el valor unitario de cada jabón par a ver cuál convenía más, y para obtener el valor unitario fue necesario realizar una división donde el dividendo era la presentación numérica de en números con punto y el divisor, o cual resultó interesante ya que ahora no se trató solo de números enteros y la explicación de la división cambia un poco, pero si anteriormente se le tomó sentido cuando se agregó un cero y se sube el punto decimal no tendría que haber problema para realizarla, pero si es necesario que el docente explique varias veces ejemplos de cómo realizar este tipo de división.

En cuanto al análisis fenomenológico se vio que se usó un contexto extra-matemático en una situación pública usando el fenómeno del dinero el cual ayuda mucho a la comprensión de un nuevo aspecto que tiene que aprender los alumnos en este caso las divisiones con punto decimal cuando el dividendo usa la representación numérica de números con punto y el divisor un número entero.

El quinto y último significado fue resolver problemas mediante la división usando la representación simbólica y numérica en un contexto matemático mediante una situación escolar. En este significado se pudo observar que al ser la última consigna se trató de mecanizar el algoritmo de la de la división utilizando la representación simbólica de la división en ella las notaciones de los signos de entre (÷) y el signo (=), lo que llamó la atención fueron los últimos ejercicios que propuso el libro, primero el libro comenzó por poner un ejercicio como este 10.5 ÷ 4 =, algoritmo que habían sido abordados anteriormente por lo que se piensa que no habrá alguna dificultad para realizarlo. Los últimos tres ejercicios son divisiones usando una potencia de base 10. En este caso se interpretó que el libro de texto trató de que los alumnos descubrieran que pasa cuando se divide un número entero y decimal entre una potencia de base 10. Lo que se interpretó fue que fue poco probable que el alumno descubra que cuando un número ya sea decimal o entero se divide entre un potencia de base 10 el punto se mueve hacia la izquierda sin haber visto antes un ejemplo similar, debido a la experiencia que se tiene para que los alumnos noten ese proceso eso se les debe poner la misma cantidad y cambiar la potencia de diez, entre caso se debió poner el dividendo igual y cambiar el divisor por un potencia de base 10 diferente para que notaran lo que pasaba con el punto decimal.

Los ejercicios que propuso el libro de texto fueron 258.9 ÷ 10 =; 57 689.6 ÷ 100 =; y 674 567 ÷ 1000=, lo que se destacó de estos ejercicios fue que el libro enfrentó a los alumnos a cantidades grandes que anteriormente no se había puesto como es el caso de la segunda y tercera división, sin embargo, en el nivel de primaria se da mayor énfasis a los números enteros, por ello se tomaron cantidades más grandes en los enteros, pero se sigue sin trabajar cantidades mayores a los milésimos en los números decimales y se considera que son necesarias debido a que aunque no estén tan presentes en el contexto escolar y en el contexto real de los alumnos de primaria es preferible que se les vaya preparando para problemas a avanzando que son abordados en segundo o tercero de secundaria en la asignatura de física y química al trabajar con cantidades más exactas, además que la multiplicación y división por una potencia de base 10 es el conocimiento base para entender la notación científica, representación de los números decimales que no se ve en primaria pero que se inicia y utiliza a en la educación secundaria.

De acuerdo a la anterior para que los alumnos realicen lo que pide el libro de texto fue necesario:

> "Hayan construido el significado de la fracción como cociente, que sepan que las fracciones pueden representarse como divisiones y las divisiones como fracciones.
>
> Han construido la idea de que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número se obtiene una fracción equivalente. Esta propiedad, aplicada a las divisiones, se enuncia de la siguiente manera: si se multiplica dividendo y divisor por un mismo número, el cociente no se altera". (Ávila y García, 2008, p. 79).

Aunado a esto las autoras mencionan que:

> “Teniendo en mente estas dos ideas, cuando se tiene una división con divisor decimal se puede encontrar otra división equivalente que no tenga divisor decimal, esto se logra multiplicando dividendo y divisor por 10, 100, 1000, etcétera, según sea necesario para eliminar el punto del divisor, es decir, para que sea un número natural y se obtenga una división como las del caso anterior o en donde tanto dividendo como divisor sean naturales. Por ejemplo: 2.45 6.312 multiplicando dividendo y divisor por cien se obtiene 245 631.2” (Ávila y García, 2008, p. 79).

Lo anterior es difícil que se comprenda por los alumnos debido a que en la práctica se hace de forma procedimental sin detenerse en los significados conceptuales, porque lo anterior para fines prácticos y memorización para alumnos es más fácil decir se mueve el punto decimal la cantidad que hay de números decimales y lo mismo pasa con el divisor, cuando sobra espacio es cuando entonces se añaden ceros. Ávila y García (2008) mencionaron que:

> “En la práctica suele decirse que se recorre el punto a la derecha, obsérvese que lo que realmente se hace es multiplicar por cien el dividendo y el divisor, lo que también justifica el hecho de que, si en el dividendo no alcanzan las cifras para recorrer el punto, se agregan ceros”. (p. 80).

De acuerdo a lo anterior se vio que el campo procedimental al menos en este significado la destreza matemática es resolver problemas, sin embargo ese resolver problema simplifica más destrezas matemáticas que solo resolver, además que esta destreza fue muy general y aplicó a cualquier contenido matemático y no solamente a los números decimales, y esta consigna requiere de destrezas procedimentales específicas como son: dividir una fracción para obtener un cociente como multiplicar con números decimales. Sin embargo se puede apreciar que esta consigna requiere más de campo conceptual, es decir, conocer términos conceptuales y aplicar en lo procedimental como son el caso de fracción como cociente, fracciones decimales, división con decimales, multiplicación con decimales, términos conceptuales que en los aprendizajes esperados los libros han omitido en las indicaciones para enfrentar al alumno a una situación sin brindarle información que le ayude a resolver la consigna sino que haga uso de sus conocimientos previos para resolverla. Se interpretó que en esa parte fue necesario desarrollar el campo conceptual y procedimental a la vez ya que los dos van ligados y uno al otro se complementan y logran un aprendizaje significativo en los alumnos.

Así mismo se ve que el libro de texto puso mayor énfasis en las representaciones de los números decimales, que anteriormente ya se describieron y que utilizó contextos extra-matemático y matemático, este último fue considerado que se usó para los alumnos se introdujera las divisiones de una potencia de base 10 porque el contexto matemático sirve para crear más matemáticas por ello al utilizar la representación simbólica combinada con la representación de números decimales estos ayudaron a entender mediante el campo procedimental que se tenía que dividir, sin embargo, al carecer el campo conceptual fue complicado que haya logrado lo que mencionó Ávila y García (2008) se logre comprender porque se recorre el punto la cantidad de veces que haya cero y en los espacio vacíos se agregan ceros.

Finalmente otro aspecto a resaltar en el desafío del libro de texto fue que nuevamente el signo igual fue visto como un signo que sólo representa el resultado de una operación y no como una igualdad, que anteriormente se había mencionado que se tiene que hacer este énfasis en primaria que el signo igual representa más que una igualdad. Al respecto Ramírez y Rodríguez (2010) mencionó que: “En Educación Primaria los niños adquieren el significado del signo igual como ‘el total o resultado de una operación aritmética’, adquiriendo así una comprensión incompleta del signo igual”. (p. 8).Al estar presentes el signo de entre (÷) formalmente se puede decir que se integra en la estructura conceptual los dos campos el conceptual y procedimental debido a que la notación del signo entre (÷) hace referencia a la división en el campo conceptual y en el campo procedimental a la destreza de dividir.

Como conclusión de este aprendizaje esperado al ver los cinco significados que se obtuvieron se vio que fueron enfocados más al campo procedimental que al conceptual, y en el campo procedimental se tomaron destrezas generales no propiamente de los números decimales, sin embargo este aprendizaje esperado fue enfocado a la multiplicación y división de los números decimales, pero se enfocó más a la división en la cual si abarcó aspectos conceptuales por lo que fue posible la adquisición de ese aprendizaje. En cuanto a las representaciones, la representación simbólica fue la que ayudó a dar sentido y significado a la operación a realizar en un contexto matemático, en este caso, se interpretó que el contexto extra-matemático sirvió únicamente para introducir a los alumnos y recordarán lo que eran partes iguales y como decidirse, pero el contexto matemático fue quien enriqueció el contenido matemático de los números decimales. En el siguiente capítulo se abordó el último aprendizaje esperado de los libros de texto el cual fue enfocado a sucesiones numéricas con números decimales.

CAPÍTULO 11. ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE ESPERADO DE RESUELVE PROBLEMAS QUE IMPLICAN IDENTIFICAR LA REGULARIDAD DE SUCESIONES CON PROGRESIÓN ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA O ESPACIAL

En este capítulo se abordó el último aprendizaje esperado que se alcanzó en sexto año y que fue dirigido a los números decimales, contrario a los anteriores que tienen más relación con el tema de números decimales cómo fueron los significados como tal del tópico matemático de números decimales y de las operaciones básicas, este aprendizaje esperado fue enfocado a las sucesiones, por lo que anteriormente los autores no habían vinculado los dos temas. Sin embargo, se percató que el tema de sucesiones requiere de muchos significados anteriormente vistos por lo que se consideró que fue un aprendizaje esperado para cerrar el tema de números decimales en la educación primaria en México debido a todo lo que necesita implícitamente.

Este capítulo está dividido en tres subcapítulos, el primero describe cómo se abordó el aprendizaje esperado al analizar en el programa de estudios, el segundo capítulo describe los significados de los números decimales encontrados en el aprendizaje esperado y el tercero describió la interpretación del investigador sobre significados encontrados del aprendizaje esperado analizar en este capítulo.

11.1. Descripción general del aprendizaje esperado resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial.

En ésta sección se explicó cómo está descrito el aprendizaje esperado en el programa de estudio. El aprendizaje esperado fue resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética (SEP, 2011d, p. 79.), pertenece al tema de números y sistemas de numeración. Así mismo el aprendizaje esperado corresponde al estándar curricular de lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales. (SEP, 2011b, p.77).

Este aprendizaje esperado inició en el bloque 4 del grado de sexto año y culminó en el bloque 5 de este mismo grado. El contenido que se trabaja en el bloque 4 es: Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad (SEP, 2011d); y en el bloque 5 es: Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con figuras, que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales (SEP, 2011d). Sin embargo las consignas del bloque cinco fueron dirigidas a sucesiones con figuras, las únicas que usan números decimales son las del bloque 4. Por lo que únicamente se analizaron esas consignas para ver qué significados se encontraron en ellas y que promovieron las sucesiones en el tema de números decimales.

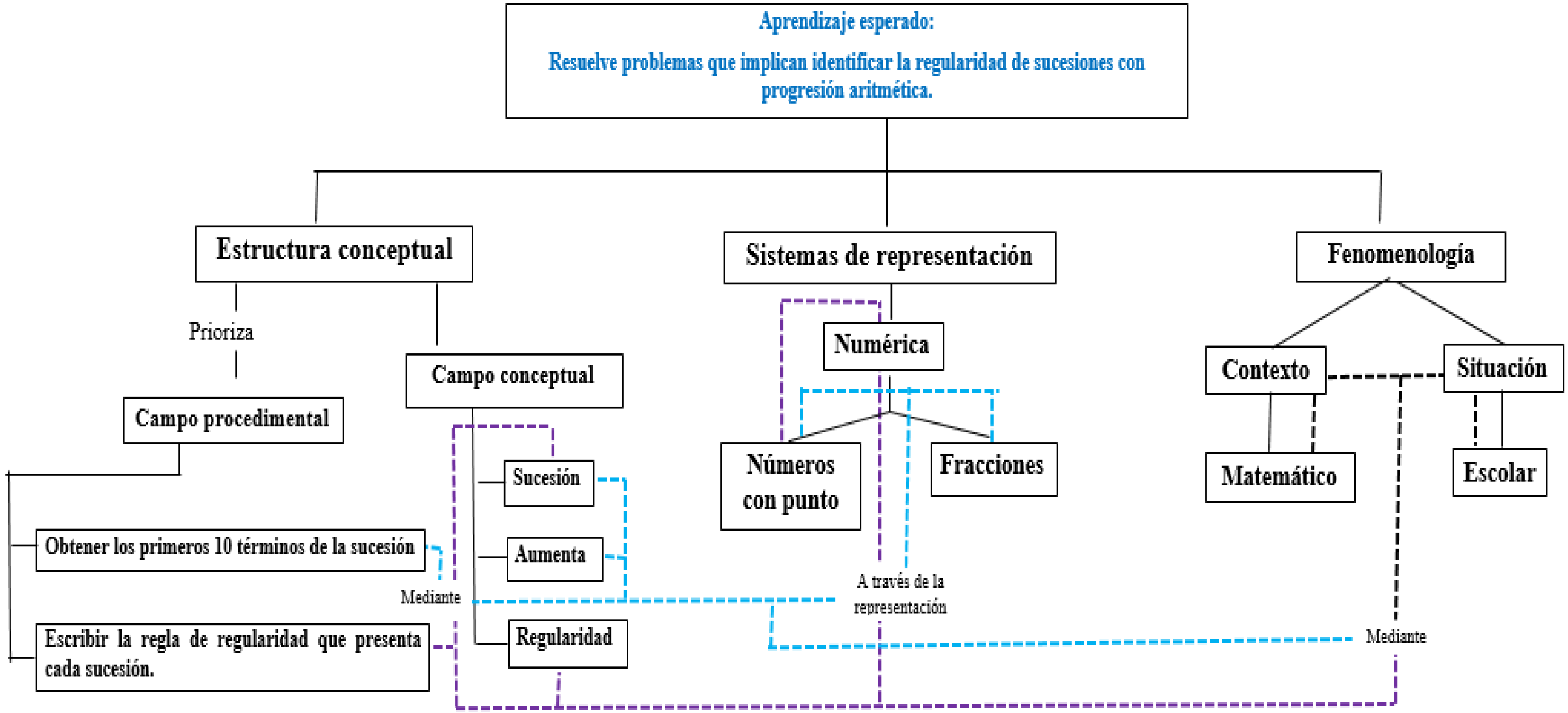
Para presentar como viene el aprendizaje esperado en el programa de estudios se elaboró la tabla 23 donde se describió la temporalidad en cómo fue abordado el aprendizaje esperado, en que bloque, grado escolar y contenido que se abordó.

En la tabla 23 se observó que el contenido se inició y terminó en sexto año, específicamente describiendo de la parte del aprendizaje esperado que lleva implícito el tema de los números decimales, debido a que el tema de sucesiones no es exclusivo de los números decimales sino que puede abordar en otro tópico matemático. Como conclusión se obtuvo que el aprendizaje esperado no abordó como tal los significados de los números decimales, sino que abordó significados más enfocados a las sucesiones. Sin embargo, para poder realizar una sucesión con números decimales fue necesario aplicar los significados anteriormente adquiridos. Por lo tanto este aprendizaje se enfocó a resaltar estos significados que implícitamente se ocupan en las sucesiones decimales de los números decimales. En el siguiente capítulo se describieron los significados encontrados de los números decimales que hay en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética (SEP, 2011d, p. 79.).

11.2. Descripción de los significados promovidos por el libro de texto del aprendizaje esperado resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.

En esta subsección se describieron los significados encontrados en el mapa conceptual del aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética (SEP, 2011d, p. 79.). Para ello, se utilizó la noción de significado de Rico (2012).Para representar lo anterior se presentó en la figura 16 el mapa conceptual del cual se obtuvieron los significados del aprendizaje esperado que se analizó en este capítulo.

Figura 16 *Mapa conceptual de los significados del aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética*



Fuente: elaboración propia, basado en las fichas de recogida de datos que fueron basadas en el libro de sexto año (SEP, 2019c).

En la figura 16 se pudo observar en el mapa conceptual del aprendizaje esperado que se analizó en este capítulo, en el cual se pueden observar los significados que se obtuvieron y de dónde surgen. Como se vio a lo largo de los diferentes aprendizajes esperados los libros de texto priorizaron al campo procedimental más que al campo conceptual. Pero también se observó que lo poco que se potenció el campo conceptual ayudó a generar significados completos de los números decimales y que estos no queden parciales. En el mapa conceptual se pudo observar que se obtuvieron dos destrezas aritméticas enfocadas al tema de sucesiones y en este implícito el tema de decimales. A diferencia del tema de operaciones básicas con números decimales que abarcó cuatro aprendizajes esperado y que fueron abordados en los significados obtenidos en los antecedentes, el tema de sucesiones decimales no fue tomado como referente en los significados de los números decimales por los autores, por ello esto se consideró una aportación que se hace al tema de números decimales debido a que se consideró que las sucesiones en el proceso cognitivo y reflexivo del alumno ayudaron potenciar y aplicar los significados de los números decimales enfocados al tema de sucesiones. Velásquez (2012) mencionó que el tratamiento de las sucesiones desarrolla el pensamiento lógico reflexivo. Así mismo, Fernández (citado en Velásquez, 2012) por su parte añadió que "el tratamiento de la secuencia numérica como una serie en el sentido piagetiano implica ahondar en las capacidades necesarias que el niño debe manifestar para llegar a establecer las relaciones intrínsecas de un elemento de la secuencia (posición relativa) con todos los demás". (p.14). De acuerdo a lo anterior se interpretó que las sucesiones además de aportar el conocimiento propio del tema y desarrollar habilidad al alumno, también potenció de forma intrínseca los significados de los números decimales al requerir poner en práctica las propiedades y características de los números decimales para continuar con la sucesiones o para encontrar la regularidad en ellas.

En cuanto a los sistemas de representación se observó que se potenció la representación numérica de los números decimales con su representación de números con punto las cuales mencionaron Centeno (1987), Ávila y García (2008) y Konic et al. (2010). En cuanto a la representación de fracciones la utilizaron Linares y Sánchez (987), Centeno (1987), Ávila y García (2008) y Konic et al. (2010). Con esto se dio un antecedente que las representaciones que se usaron en aprendizajes esperado fueron la de números decimales que fue la que más se potencializa en los números decimales a diferencia de las fracciones que se mezclaron tanto fracciones decimales como en los números decimales sin hacer la distinción. En cuanto al análisis fenomenológico se utilizó únicamente el contexto matemático en una situación escolar, por lo tanto en este contenido fue realizado para crear más matemáticas tal como lo mencionaron Cañadas et al. (2018), por lo que se dedujo se reforzaron los significados anteriormente obtenidos.

Una vez que fue desglosada la tripleta de componentes de la estructura interna del concepto de significado propuesta por Rico (2012) se empezó por indicar cuáles fueron los significados encontrados en el mapa de la figura 18, cabe destacar que como el libro de texto prioriza el campo procedimental de ahí se propusieron los significados. La primera destreza aritmética que se encontró fue obtener los primero 10 términos de la sucesión como se puede observar esta destreza aritmética no fue propia del tema de números decimales, sin embargo, esta destreza, analizando el libro de texto, tomó sentido cuando se ponen en juego los significados anteriormente aprendidos en la sucesiones con números decimales por lo se interpretó que fue un ejercicio que potenció la comprensión de los significados de los números decimales del estudiante a lo largo de su educación primaria. En cuanto al campo conceptual ésta destreza fue ligada al término sucesión y al término aumenta. Con estos dos términos se notó que la sucesión seguiría un patrón positivo, es decir, que la sucesión aumentaría. En este caso como fueron destrezas y términos conceptuales de sucesiones no se puede percibir a simple instancia qué significados de los números decimales se pueden encontrar.

Sin embargo, con las representaciones se puede percibir de forma general que fue lo que propone el libro y analizando cada ejercicio se dio una interpretación de lo que se observó pero esta se dará en el siguiente capítulo ya que en este capítulo fue únicamente para saber que ejercicios potenció el libro de texto con la información que hay en él, en el capítulo siguiente se vio más la interpretación y experiencia del investigador y lo que interpretó y articuló de todo el conocimiento adquirido. En los sistemas de representación se vio que se usó la representación numérica de números con punto y fracciones, en este caso la representación numérica de números con punto fue la que representó el sentido y significado de los números decimales en la representación y en ella se vio reflejado los significados obtenidos de todos los aprendizajes esperados de los números decimales. Este significado se trabajó en un contexto matemático y una situación escolar donde sirvió para enriquecer el conocimiento antes adquirido.

El segundo y último significado fue enfocado a la destreza procedimental de escribir la regla de regularidad que presentó cada sucesión al momento de escribir la regla se pusieron en juego los significados de los números decimales adquiridos anteriormente. Esta destreza aritmética tiene relación con el campo conceptual con los términos de regularidad y sucesión, como se vio el término regularidad propio de las sucesiones fue quien apoyará al tema de números decimales al aplicar los significados adquiridos anteriormente. Los sistemas de representación que se presentaron en este significado fue el de la representación numérica a través de números con puntos. Con el término conceptual de regularidad y la representación numérica la destreza procedimental fue con la que se tomó sentido y significado al tener un contexto matemático en una situación escolar.

Interpretando lo descrito anteriormente, en la tabla 27 se mostraron los significados enfocados al tema de sucesiones que implícitamente están vinculados con los números decimales:

Tabla 27 *Significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética (SEP, 2011d, p. 79).*

Sexto año	
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.	
Campo conceptual	**Campo procedimental**
Obtener mediante la destreza aritmética del campo procedimental los primeros 10 términos de la sucesión vinculados con los términos del campo conceptual de sucesiones y aumentar mediante la representación numérica de números con punto y fracciones a través de un contexto matemático y una situación escolar.	
Escribir la regla de regularidad que presenta cada sucesión utilizando los términos del campo conceptual de sucesiones y regularidad mediante la representación numérica de números con punto en un contexto matemático y una situación escolar.	

Fuente de elaboración propia, basada en los mapas conceptuales obtenidos de las fichas de recogida de datos del libro de cuarto año. (SEP, 2019c).

Como conclusión de este aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican la regularidad de sucesiones con progresión aritmética se vio en la interpretación del libro de texto de sexto año que el contenido a simple vista no tuvo significados de los números decimales si no que estos fueron encaminados a la sucesiones, lo cual fue correcto. Sin embargo, haciendo una interpretación de lo que necesita una sucesión aritmética para poder realizar fue necesario poner en práctica significados de los números decimales que se vieron en los aprendizajes esperados anteriores.

En este aprendizaje esperado fue muy claro que el contenido matemático fue progresivo en el sentido que se necesitó en varios aprendizajes esperados del contexto matemático el cual sirvió para crear más matemáticas. Por ello, en este aprendizaje esperado fue enfocado a fracciones con el fin de que se enriqueciera el conocimiento de los números decimales y a la par se empezó a ver sucesiones que no sean solamente con números enteros. Por ello, la estructura conceptual tanto el campo procedimental como el conceptual fueron enfocados al contenido de sucesiones. Los sistemas de representación fueron los que abonaron a la parte del contenido de números decimales, mediante la representación numérica que fue la que tomó el sentido en el contexto matemático que fue elegido en este caso sucesiones por lo que esta representación tomó sentido al obtener la sucesión se pusieron en juego los significados propios de los números decimales. En cuanto a la representación de los números decimales en fracciones esta se consideró que las fracciones fueron enfocadas a entender lo que es una sucesión pero a través de las propiedades de las fracciones sin integrar a los números decimales. En el siguiente capítulo se desarrollará la interpretación de los dos significados obtenidos en aprendizaje esperado y la experiencia y opinión del investigador.

11.3. Descripción de la interpretación de los significados del aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.

En esta sección se describió la interpretación de cada uno de los significados encontrados en el aprendizaje esperado de resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética (SEP, 2011d, p. 79.). En el capítulo anterior se explicó que el aprendizaje esperado fue enfocado en la estructura conceptual principalmente al campo procedimental de donde se obtuvieron los significados y se incluyó la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico.

Para dar una interpretación de los significados obtenidos desglosa a detalle cada palabra y notación que estuvo presente en el libro de texto de sexto año. Como fue costumbre en esta interpretación de los libros de texto se inició por la destreza aritmética del campo procedimental si bien, esta destreza se enfocó a obtener los primeros 10 términos de la sucesión. A simple vista pareciera que esta destreza aritmética no tiene nada que ver con los números decimales, sin embargo, al analizarlo a profundidad se interpretó que el contenido fue para poner en práctica todo lo aprendido de los números decimales, porque cuando se analizó las consignas de los libros de texto se vio que el contenido fue para aprender sucesiones y en ella se incluyó a los números decimales.

En el primer problema apareció una sucesión la cual aumentó de 1.5 en 1.5, el problema hizo referencia a la pregunta ¿Cuáles son los primeros 10 términos de la sucesión?, si bien, se observó que la representación que se usó en este problema fue la representación numérica con números con punto que fue en la cual se vieron reflejados los significados de los números decimales que implica este ejercicio. Cuando se abordó el ejercicio los alumnos ya deberían saber la equivalencia de lo que representa la cantidad de 1.5, ya saben sumar números decimales por lo cual la palabra aumenta la asocian rápidamente con la destreza aritmética de sumar tal como lo mencionó Castro (2017) donde mencionó que las palabras añadir aumentar son asociadas a la palabra sumar por lo tanto el libro de texto sugirió que se sumara 1.5 + 1.5 y así sucesivamente hasta encontrar los primeros 10 términos de la sucesión.

De manera sintética se observó que fue un ejercicio sencillo, pero la representación de números con punto es de las más complejas para comprender por los niños (Ávila y García, 2008), hay errores al sumarlas porque en ocasiones se pueden obtener resultados cómo 1.10 donde claramente se pudiera observar que los alumnos desconocen las propiedades de los números decimales. Sin embargo, también se interpretó que la representación de 0.5 fue de las más utilizadas en los tres libros, y por la experiencia que se tiene, se cree que automáticamente los alumnos han memorizado que 0.5 + 0.5 hacen un entero por lo que 1.5 + 1.5 serán 3, puesto que sumarán 0.5 y 0.5 lo que hace un entero y después sumará 1 + 1 que hacen dos enteros y en total tendrán 3 enteros. Posteriormente a 3 le sumarán 1.5 lo que es más sencillo ya que a un entero que en este caso fue 3 se le sumó 1.5 dio como resultado 4.5.

Es imposible predecir las respuesta de los alumnos ya que cada uno tiene una manera de razonar y pensar, sin embargo, la experiencia que se tiene con alumnos de primer año de secundaria son las repuestas más repetitivas que dan los alumnos, pero es difícil generalizar una. Este ejercicio se dio en un contexto matemático en una situación escolar, la cual sirve para crear más matemáticas (Cañadas et al., 2018). Otro punto a destacar fue que generalmente siempre se potenció el término aumenta más que el término disminuye por ello es más sencillo obtener una sucesión cuando aumenta, a conocer una sucesión cuando disminuye, y es claro notar que cuando se aborda el tema de sucesiones en la secundaria es cuando esto se produce un choque cognitivo al integrar el álgebra. Porque no se identifica que cuando una sucesión es positiva aumenta, y cuando es sucesión es negativa disminuye.

Así mismo se observaron otros ejercicios de sucesiones que involucran fracciones, sin embargo, en este caso no se abordan a profundidad estos ejercicios porque no abonaron a identificar qué significados de los números decimales se abordaron debido a que no hay un distinción entre la fracción decimal y no decimal la cual fue necesaria para distinguir las características y propiedades de los números decimales como números únicos (Ávila y García, 2008).

Un ejercicio del libro de texto que traía la mezcla de números decimales y fracciones fue el siguiente, este ejercicio representó un reto cognitivo, porque se pretendió sumar a $\frac{1}{3}$0.5. Como se apreció se está sumando una fracción no decimal a un número decimal por lo que los alumnos tendrían que conocer la diferencia entre un número decimal y uno no decimal para identificar que es más prudente convertir la fracción a decimal o el decimal a fracción y posteriormente sumarlas. Ávila y García (2008) mencionaron que existen fracciones decimales y no decimales, así mismo existen números decimales y números no decimales. Sin embargo la dificultad radica que la representación de las fracciones no decimales y decimales es la misma, lo mismo pasa con los números decimales y no decimales tiene la misma representación de números con punto. Se interpretó que si el alumno es capaz de identificar que los números decimales tienen la misma representación de números con punto de los no decimales sabrían que operar un número no decimal es menos conveniente que sumar fracciones debido a que la fracciones se representan con una fracción no con números infinitos donde no se tomarían en cuenta todos los decimales.

Finalmente en este significado se propuso un ejercicio de multiplicación que dice encontrar los primeros 10 términos de la sucesión sabiendo que el primer término es 1.2 y que ese se debe multiplicar por 3. Esta multiplicación es sencilla debido a que solo se utiliza una número decimal que son los décimos por lo que se espera que los alumnos al llegar a este ejercicio ya conozcan cómo realizar un multiplicación con números decimales y no usen el sentido numérico, por ello fue importante que en la multiplicación se entendiera que significa dejar un espacio en blanco, ya que se respetan los números decimales que representan con ceros. Así mismo, fue necesario reconocer que 1.2 es equivalente a 1.20, 1.200, que al multiplicar es lo que pasa con el resultado se agregan los ceros para mostrar la equivalencia de las siguientes cantidades.

En este primer significado se pudo observar que el significado realmente no aportó nuevos significados a los números decimales, sino que para poderlo resolver primero se debió adquirir conocimientos de estos números para poder obtener correctamente las sucesiones que se les propone a los alumnos, haciendo uso de los significados de los números decimales y de las operaciones básicas anteriormente vistas por lo que se consideró un contenido complicado para sexto año ya que anteriormente no se especificó que se usará el algoritmo de la multiplicación sino que se dejó a un procedimiento libre, incluso en esta consigna no se dice qué procedimiento utilizar si no se dejó libre para que el alumno haga sus propios métodos y de esta forma desarrollará el sentido numérico. Una de las principales razones por la cual se mostró interés por investigar los números decimales, fue porque los alumnos de secundaria no son capaces de decir qué número sigue en la siguiente sucesión, 0.3, 0.6, 0.9. Se consideró ésta sucesión como más oportuna para identificar qué significados de los números decimales saben los alumnos y cuáles no porque aquí implicó más conocimientos de los números dado que el siguiente número que es 1.2, lo cual se necesita saber que doce décimos, requiere un entero con dos décimos y no se escribe como 0.12 error común que cometen los estudiantes de secundaria.

El siguiente significado fue abordado en una consigna, en las cuales se encontró que en esta consigna no fue encontrar los términos de la sucesión, sino que aumentó de complejidad al encontrar la regularidad lo que en ocasiones es más difícil para el alumno porque está acostumbrado a poner solamente un resultado o utilizar lo procedimental. Sin embargo, cuando se les pide explicar aunque sepa el resultado, les resulta difícil de expresar lo que hacen procedimentalmente, esto debido a que hablar con un lenguaje matemático correctamente es difícil y más porque hay términos complejos para aprender y solo memorizan el procedimiento.

En la consigna que se analizó vienen números enteros, fracciones y decimales, nuevamente únicamente se enfocó al ejercicio que viene de números decimales, el cual viene de esta manera: 0.75. 1.5, 3, ____, 12, 24, _____, ______. A simple vista el primer número es difícil saber cómo pasar de 0.75 a 1.5 debido a que el la representación numérica de números con punto que fue 0.75 consiste en dos decimales muy pocas veces se vieron ejercicios con dos decimales y que no terminaran en 0. Así mismo pasar de un número que tiene dos decimales a tener un número con un decimal fue complejo puesto que no se tiene siempre los conocimientos necesarios para multiplicar o sumar correctamente el número. Aquí lo más práctico sería fijarse en los números enteros como el 12 y 24 que son el doble, o bien que hayan memorizado que 3 es el doble de 1.5 para que pudieran identificar que la regularidad fue: “el número se va multiplicado por dos y así sucesivamente”.

En conclusión se vio que este contenido fue para poner en práctica lo significados anteriormente vistos en los aprendizajes esperados y que requiere de un nivel cognitivo mayor a los anteriores ya que fue poner en juego lo aprendido de números decimales en otro contenido. En el contenido quien da el sentido y significado es la representación numérica de números con punto y por lo cual ligó al tema de números decimales, la estructura conceptual al analizar profundamente la consigna se vio que se potenció más el campo procedimental que el conceptual, al realizar operaciones para encontrar la sucesión. Donde se puede apreciar el campo conceptual fue al momento de construir la regularidad porque ahí se utilizan palabras claves para encontrar el término siguiente. En cuanto al contexto siempre fue matemático en situaciones escolares, fue necesario agregar el contexto extra-matemático para una aplicación en la vida real al tema de sucesiones. En el siguiente capítulo se describieron las conclusiones de todo lo analizado en los aprendizajes esperados.

CAPÍTULO 12. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de esta investigación. Primero se describen las conclusiones relacionadas con el objetivo general, con el supuesto de esta investigación y por último lo relacionado a la pregunta de investigación.

Posteriormente se describen las conclusiones sobre las limitaciones de la investigación a las que se enfrentó la investigadora al desarrollar este trabajo de tesis. Luego se describen las reflexiones de los futuros trabajos que se pueden realizar en torno a esta investigación y finalmente se mencionan las reflexiones del investigador en torno a cómo se mejoró su desarrollo profesional y práctica docente.

12.1. Conclusión del objetivo general, supuesto y pregunta de investigación.

En este apartado se describen las conclusiones relacionadas con el objetivo general, tomando en cuenta el supuesto de investigación. Recapitulando, el objetivo general de esta investigación es "*Describir los significados de los números decimales que se promueven en los desafíos de libros de texto gratuito de matemáticas de educación primaria en México*". Por lo tanto, al analizar los libros de texto se confirmó el supuesto que se tenía de esta investigación el cual fue: los libros de texto gratuito de matemáticas del alumno de educación primaria en México enfocaron el contenido de números decimales al campo procedimental y no al campo conceptual, cabe resaltar que aunque no se potenció mucho el campo conceptual si se hace mención a él en la mayoría de los aprendizajes esperados.

En el desarrollo de la interpretación de resultados se realizaron unas tablas de cada aprendizaje esperado, separando por grado escolar y por campo conceptual y procedimental, los significados encontrados en los libros de texto. Un ejemplo fue el primer significado encontrado, debido a que es fundamental que se trabaje en la parte conceptual porque va relacionado con el término de la equivalencia, pero para poder comprender la equivalencia, se tiene que recurrir a las destrezas procedimentales, esto porque a través de las diferentes representación y las traducciónes que se usen en ellas es donde el alumnos dotarán de sentido y significado a ese término de equivalencia, a través de los cálculos matemáticos.

Se encontró que los libros de texto trabajaron diferentes representaciones de los decimales, sin desarrollar la traducción entre un sistema de representación a otro. Por último se trabajaron los contextos en lo matemático y extra-matemático. Es decir en el contexto extra-matemático se hizo referencia a situaciones de la vida real como fue la medida y el contexto de dinero; en el contexto matemático se hizo referencia a situaciones puramente matemáticas la cuales ayudaron a crear más matemáticas desde la representación simbólica.

Cabe destacar que los libros de texto en el campo conceptual mostraron poca evidencia sobre los significados asociados, sin embargo sí se incluyeron algunos significados que Ávila y García (2008) consideraron necesarios en su investigación como son: el significado de la equivalencia de los números decimales y el sentido numérico. En cuanto a Linares y Sánchez (1997), se mostró en el libro de texto que no se abordan a los números decimales de las perspectivas que menciona como fueron: reconocer al número decimal como cociente de dos números, la relación parte-todo, por mencionar algunas. Se consideró estas dos principalmente porque son las perspectivas que ayudan a entender la representación de números con punto de los números decimales, pero como tal en el libro de texto no se toma como parte de los significados de los números decimales, sino se toma como la destreza de dividir en partes iguales que llegará a las fracciones con los números decimales. La perspectiva de reconocer al número decimal como cociente de dos números, no se alcanzó a ver en primaria, solo se empezó a reconocer el algoritmo de la división hasta llegar a dos decimales, debido a que este proceso se deja para el nivel de secundaria.

En lo que respecta a Centeno (1997), en los libros de texto, amplían el conocimiento que tiene de los aspectos conceptuales y de los procedimentales esto debido a la aportaciones que se han hecho en el transcurso de los años debido, desde que realizó su libro han pasado alrededor de 25 años y se explorado más el tópico matemático de los números decimales. Sin embargo, es importante destacar que la autora propuso diferentes contextos en los que se puede trabajar los números decimales, unos ejemplos fueron, volúmenes, medida, fenómenos políticos y económicos, proporcionalidad etc., en los libros de texto únicamente se pueden percibir dos contexto en los que se trabajó con los números decimales estos son el contexto de dinero y la media, esta última se ve en la distancia utilizando la unidades de medida de decímetros, centímetros y milímetros, en los desafíos que se analizaron no se identificó otro contexto.

Finalmente en Konic (2010), se percibe que la investigación de la autora únicamente se analizó la parte introductoria de los números decimal por lo que la mayoría de los significados que ella menciona fueron encontrados en los libros de texto. Tal fue el caso del concepto de número decimal, décimo, centésimo y milésimo. Las destrezas procedimentales de convertir fracciones a números decimales y comparar los números decimales. En los sistemas de representación utiliza las fracciones decimales y los números decimales como representación, finalmente se potenció el contexto de la medida.

En cuanto a los sistemas de representación se interpretó que al inició se potenciaron diferentes sistemas de representación como fueron la representación verbal, manipulativa, numérica, simbólica etc. Sin embargo, se llegó a la conclusión que una de las representaciones que más careció de sentido, significado y referencia en los libros de texto fue la representación numérica de números con punto, que aunque en un principio se propuso para tratar la equivalencia del valor numérico que representa cada cifra, no fue suficiente tratar la equivalencia del valor numérico.

Finalmente en el libro de texto se potencializan los contextos tanto el matemático como el extra-matemático, que en el caso del matemático ayudó más a enriquecer los significados e incrementarlos creando más matemáticas en cada consigna (Cañadas et al., 2018). En cambio el contexto extra matemático ayudó a que esos conocimientos adquiridos los pusieran en práctica en su vida real, mostrando situaciones de la vida cotidiana como problemas enfatizados en los fenómenos de medida y dinero para el uso práctico de los números decimales.

De acuerdo a lo anterior se concluyó que el supuesto que guío esta investigación fue comprobado, y que se potencializa más el campo procedimental más que el conceptual. En los sistemas de representación aunque se trató de hacer una traducción entre un sistema de representación y otro al final hizo falta trabajar más la comprensión de la representación numérica de números con puntos.

Con base en lo anterior, en la interpretación y análisis que se hizo de los libros de texto se llegó a la conclusión de que en la educación primaria se puede percibir un cambio con respecto a las aportaciones de Ávila y García (2008), Centeno (1997) y Ávila (2013), esta última mencionó que en la educación primaria no se reconocen los aspectos conceptuales de los números decimales, debido a que al analizar los libros de texto se vio que se incorporaron aspectos conceptuales que anteriormente no se habían puesto en los libros de texto, por ejemplo, se trató de desarrollar el sentido numérico en los estudiantes, se integró la propiedad de la densidad desde cuarto año así como diferentes representaciones como fueron la representación numérica en representación de fracción decimal y números con puntos, la representación manipulativa en el libro de cuarto año, la representación simbólica que ayudó a dotar de sentido y significado a las operaciones básicas con los números decimales, la representación gráfica de la recta numérica.

Cabe destacar que hizo falta darle mayor énfasis a la representación numérica de fracciones decimales cuando el denominador es una potencia de diez puesto que estas son el puente de enlace entre las fracciones y los números decimales y juegan un papel importante en la comprensión de la relación parte-todo puesto que es la representación que ayudará a comprender la equivalencia de la de forma gráfica en los estudiantes de una fracción y es uno de los elementos que ayudará a dimensionar la cantidad que equivale la representación de números con punto.

Con respecto a lo que mencionó Valencia (2014) que en la reforma 2011 hay una invisibilidad del contenido de números decimales debido a que se enfocó a operaciones básicas y no comprender los aspectos conceptuales de los números decimales, se concuerda con ella que en el currículo realmente hay una invisibilidad de los aspectos conceptuales puesto que en los estándares y aprendizajes esperados la información es enfocada a las operaciones básicas, sin embargo, descifrando los desafíos de los libros de texto se puede ver que en ellos si se encuentra los aspectos conceptuales, de la densidad, el sentido numérico, la equivalencia de números de los números decimales, se utilizan diferentes representación como fue la numérica, simbólica, la manipulativa, la gráfica y se manejan los contextos matemático y extra-matemático. Por lo que hay un cambio significativo en la enseñanza de los números decimales en la reforma 2011. Así mismo, se deja en claro que faltó ahondar más en algunos aspectos como fue la equivalencia, la densidad y la relación parte-todo que es un extra que los autores no mencionaron como aspecto conceptual y que se consideró importante en esta tesis.

Antero (2015) mencionó que desarrolló una secuencia didáctica para construir la noción de número decimal a través de la relación entre la fracción decimal y su notación decimal en cual menciona que sí se puede lograr. Sin embargó, mencionó la dificultad que los estudiantes recurren a las representaciones realizadas en la recta numérica para determinar si una fracción es mayor o menor. En cuanto a la tesis se concluyó que la relación de fracción decimal y número decimal fue favorecida en el libro de cuarto año cuando se trabajó con tiras de papel divididas en 10 partes iguales, donde se toma como referencia la relación parte-todo para poder representar las tiras de papel en fracción decimal.

Sin embargo, como lo mencionó el libro de texto no se logra crear esa relación parte-todo ya que en el desafío viene muy sencilla la consigna hace falta crear más representaciones gráficas como son la recta numérica, los círculos, rectángulos etc. para trabajar áreas. Aunado a ello, es necesario que en cuarto año también se favorezca la relación de fracción como cociente, debido a que el algoritmo de la división es necesario para entender la representación de números con número y es otro procedimiento por el cual se puede saber si un número decimal es más grande que otro. Se concluye aunque se pone en manifiesta la relación parte-todo, la representación manipulativa no fue suficiente para crear la noción además que la representación de fracciones decimales solo se menciona en el libro de cuarto año, en los libros de quinto y sexto se deja a un lado y es necesaria abordarla para entender la relación de fracción y decimal, para que a su vez se entiende a la noción de número decimal.

Así mismo, en las referencias consultadas se muestra que cada autor se enfocó a una parte de los números decimales, por ejemplo, a la propiedad de la densidad, a las representaciones de números con signo, al valor posicional, pero no como tal un seguimiento más integral de lo que se enseñó en la educación primaria mexicana, y tampoco hay trabajos que tomen de referencia los libros de texto, por lo cual este trabajo de investigación pretendió mostrar un trabajo con mayor referencia de cuáles son los significados que se promueven de los números decimales a lo largo de la educación primaria en México que fue la respuesta a la pregunta de investigación *"¿Qué significados de los números decimales se promueven en los libros de texto gratuitos de matemáticas en el nivel de primaria en México?"*

Los significados que se encontraron muestran que los libros de texto posiblemente puedan desarrollar el sentido numérico a los alumnos, esto debido a que en las indicaciones dadas en las tareas, no se escribe qué procedimiento utilizar, ni tampoco se aclara qué términos del campo conceptual se deben utilizar. Se interpretó que el libro de texto es desarrollado para que los alumnos utilicen procedimientos alternos a los algoritmos, es decir, usen sus propios procedimientos para resolver los problemas

Así mismo, se potencializan los siguientes significados:

- Números decimales a través del valor numérico de los décimos centésimos y milésimos, mediante las representaciones verbal y numérica, esta última en la representación de fracción decimal y números con punto en el contexto matemático a través de una situación escolar.
- Dividir en partes iguales mediante la representación manipulativa por medio de tiras de papel divididas en 10 partes iguales en un contexto matemático a través de una situación escolar.
- Emplear números decimales en el contexto extra-matemático, en el fenómeno de medida, en una situación pública, para favorecer a la estructura conceptual de la equivalencia mediante la representación simbólica de las fracciones decimales y números con puntos.
- Comparar números decimales mediante la representación aritmética de números con puntos en un contexto matemático en una situación escolar.
- Ordenar números decimales a través de la representación numérica de números con puntos en un contexto matemático y una situación escolar.
- Identificar entre dos números un tercer número utilizando la estructura conceptual del orden, comparación y recta numérica usando la representación aritmética de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

Se consideró que estos significados fueron los enfocados a los números decimales y los cuales permitieron entender el concepto de número decimal que es muy amplio. Es importante mencionar que a diferencia de los aprendizajes esperados que vienen muy escuetos, es decir, que no mencionan explícitamente las parte de la estructura conceptual, los sistemas de de representación y la fenomenología, al analizar el libro de texto desglosando cada una de estas partes se puede observar que el aprendizaje esperado si se cumple, pero también se puede observar que lo que mencionó Alicia Ávila (2013) que no se reconocen los aspectos conceptuales de los números decimales se observó que en los libros de texto si están presentes por lo que hay un avance en la integración de estos en el libro de texto.

Por último me permito dar algunas sugerencias que se desprenden de este trabajo, y que forman parte de las conclusiones. Primero, dentro de las dificultades que hay en la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, se sugiere que se trabaje con la relación parte-todo como parte del campo conceptual de la representación numérica de fracciones de números decimales, en el libro de texto aparece, solo la parte del campo procedimental con la destreza de dividir en partes iguales, esta destreza ayuda a entender la equivalencia de las fracciones decimales en la representación gráfica de estas, aquí mismo se sugiere que no solo se proponga la recta numérica, regletas sino que se pongan figuras que cuesten más trabajo cognitivo como el pentágono, círculo, y otras figuras que ayuden al estudiante a comprender la relación parte-todo y las fracciones decimales.

Un aspecto que se manejó en el libro de texto como un convenio fue establecer la equivalencia entre las representaciones numéricas de números con punto y fracciones decimales, el libro de texto lo representó de esta manera: $\frac{1}{10} = 0.1$ llamándolo un décimo, como se puede apreciar se utilizó la representación simbólica mediante el símbolo igual. Sin embargo, aunque el convenio entra entre el campo conceptual, no es suficiente, debido a que la comprensión de la representación de números con punto, requiere un proceso arduo y de trabajar el aspecto conceptual de equivalencias y destrezas procedimentales como dividir en partes iguales, decir donde números y obtener un cociente, convertir de fracción decimal y viceversa, entre otras, por lo tanto fue una limitante que el libro de texto tiene.

Una ventaja que se observa en los libros de texto, es que se trabaja las operaciones básicas a la par de los significados de números decimales, un ejemplo de esta ventaja fue como establecer el orden, comparación y la propiedad de la densidad, puesto que para lograr esto es necesario establecer diferentes termino conceptuales que van de la mano de destrezas procedimentales y para lograr estas destrezas, son necesarias las operaciones básicas para entender estos significados. Finalmente la parte que no se realizó en esta investigación y que es oportuna para realizar un trabajo más completo de los números decimales es investigar qué significados de las fracciones se promueven en los libros de texto, y qué papel juegan en los números decimales, esta última parte quedará para futuros trabajos investigación.

12.2 Reflexión de la práctica docente

Como parte de mi desarrollo profesional este trabajo de investigación fortaleció mi práctica docente, debido a que el nivel en el que trabajo es de secundaria, y uno de los intereses que se tenía y que se describen en la motivación era poder dar comprender un problema al que se enfrentan los alumnos al inicio del ciclo escolar. Es decir, los alumnos cuando llegan a secundaria no reconocen las propiedades y características de los números decimales y por ende mecanizan los algoritmos de los números decimales. Sin embargo, me percaté que no todos los alumnos logran memorizar los algoritmos, por ello surgió el interés de ver qué pasaba con el contenido de números decimales en la educación primaria, porque los estudiantes mostraban este problema especialmente en el contenido de números decimales.

Con la investigación que se realizó ahora puedo comprender por qué hay tanta dificultad en este contenido. Comprendí que no hay una secuencia para enseñar números decimales sino que el docente debe ser capaz de identificar qué significados están asociados a este tema, y con base a ello plantear una secuencia con base a potenciar los significados, las dificultades mostradas y poder beneficiar el aprendizaje. Esta investigación hizo que se cambiara la forma de enseñar los números decimales y se pusiera mayor énfasis en aspectos que antes no contemplaba en mi práctica como es el caso de la representación numérica de números con punto y la importancia de enseñar fracciones e investigarlas para ver de qué forma se puede potenciar la enseñanza de las fracciones a la representación de los números decimales.

Se dio cuenta que el valor posicional y la equivalencia juegan un papel central en la comprensión de los números decimales, antes se tenía la creencia tal como lo mencionó Ávila y García (2008) que enseñando los números decimales y memorizando lo nombres los alumnos comprenden el valor posicional con ello se podía operar, lo cual es erróneo y esto se debió a las creencias que se tienen de los números decimales y la enseñanza de estos números que sigue arraigada en las escuelas de México. Por lo que se modificó mi práctica docente para darle mayor énfasis a la equivalencia de fracciones para que partir de ella los estudiantes comprender el valor numérico de los estudiantes y puedan reconocer a los números decimales en todas sus representaciones que son numérica tanto número con punto como fracción, representación manipulativa, verbal, gráfica, etc.

Un aspecto que modifique mucho fue la forma de explicar los algoritmos convencionales, se cambió radicalmente el discurso que se utiliza y ahora se busca que los estudiantes entiendan porque se agregan esos ceros ya que al agregar un cero se está cambiando a la siguiente unidad y de esta forma a través de campo procedimental y del discurso poder lograr esa conexión de todo lo que requiere enseñar y aprender números decimales.

Con esta investigación se cambió la práctica docente y fue un plus poder hacer la investigación y dar clases al mismo tiempo debido a que lo que se investigaba se ponía en práctica y esto hacía más sencillo entender el tópico matemático, con ellos se mejoró los conocimientos para la práctica y en la práctica. Cochran-Smith y Lytle (1999) (citado en Sowder, 2007) mencionaron que estos conocimientos se definen como en el conocimiento en la práctica como las reflexiones de los profesores y de sus clases, y el conocimiento para la práctica es cuando el profesor se enfrenta a la investigación acerca de práctica docente. Con base en el desarrollo profesional que se tuvo al realizar investigación por primera vez cambió la perspectiva radical de cómo se debe impartir clase, anteriormente se ponía en práctica únicamente lo que se conoce y se buscaba estrategias para enseñarlo, ahora sé que antes de enseñar un tema se debe investigar sobre ese tema para ver qué trabajos se han realizados y tomar en cuenta esa investigaciones para que haya un cambio en la práctica docente y en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se reflexiona constantemente de las mejoras que se pueda tener y de los cambios del profesor que debe tener para potenciar y desarrollar su mejora continua.

REFERENCIAS

Antero, E. (2015). *La construcción de la noción número decimal por estudiantes de primaria: una experiencia de intervención docente* [tesis de maestría, Universidad Autónoma de Guerrero]. Repositorio UAN.

http://ri.uagro.mx/handle/uagro/503

Aravena, A. y Morales, A. (2019). Construcción del algoritmo de la división en estudiantes de cuarto año básico de una escuela chilena. *Revista de la Universidad de Granada, 13(3),*147-173.

https://doi.org/10.30827/pna.v13i3.8210

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación matemática. 20(2), 5-33.*

https://doi.org/10.24844/EM2002.01

Ávila, A. (2013). Conocimientos en construcción sobre los números decimales: los resultados de un acercamiento conceptual. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 18, 29 - 60.*

https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_18/adsc18-2013_002.pdf

Ávila, A., & García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura.* Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Bernete, F. (2013). Análisis de contenido. En A. Marín y A. Noboa. *Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de datos, (pp.221-262).* Madrid.

Broitman, C., Itzcovich, H. & Quaranta, M. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6(1) pp. 5-26.*

https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560101

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *En Didactique Des Mathématiques. 4(2),165-198*

https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/

Cañadas, M., Gómez, P., y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez, *Formación de Profesores de Matemáticas y Práctica de Aula: Conceptos y Técnicas Curriculares* (pp. 53-112). Universidad de los Andes.

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2017). Concepciones sobre la adición y la sustracción en un grado de educación primaria. En J. Muñoz, A. Arnal, P. Beltrán, M. Luz y J. Carrillo. *Investigación en Educación Matemática XXI.(pp. 187-196).* Zaragoza.

Castro-Rodríguez, E., Lupiáñez, J. y Ruiz-Hidalgo, J. (2015). Matemáticas escolares y el cambio curricular (1945-2014). El caso de los números racionales. *Revista de currículum y formación del profesorado, 19*(3), 420-438.

https://recyt.fecyt.es/index.php/profesorado/article/view/44625/pdf_2

Celis, Z. (2011, noviembre). *Los libros de texto gratuitos en México. Vigencia y perspectivas* [ponencia]. Política y Gestión, Distrito Federal, México.

http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_13/2420.pdf

Centeno, J. (1997). *Números decimales ¿por qué? ¿para qué?*. Síntesis.

Córdova, D. (2012). El texto escolar desde una perspectiva didáctica/pedagógica, aproximación a un análisis. *Sistema de Información Científica Redalyc. 27 (1) pp. 195-222.*

https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=65838676007

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales.* (M. Vega, Trad.). Peter Lang. (Obra original publicada en 1995).

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 237-246). Málaga.

Flores, R. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación matemática.* 17 (2), pp. 7-34.

https://doi.org/10.24844/EM1702.02

Frege, G. (1998). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica.* (L. Váldes, Trad.). Tecnos. (Obra original publicada 1892).

García, S. (2014). Sentido numérico. Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [tesis doctoral, Universidad de Granada].

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). Mcgraw – Hill.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *La enseñanza de la multiplicación: el estudio de clases y las demandas curriculares.* Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Kaput, J. J., & Thompson, P. W. (1994). Technology in Mathematics Education Research: The First 25 Years in the JRME. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 676–684.

https://doi.org/10.2307/749579

Konic, P., Godino, J. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. Números Revista de *Didáctica de las matemáticas. 74. pp. 57-74.*

https://drive.google.com/file/d/1zLqz8_-IZU6K2Q1l2xcLTKR1pvwv1DsP/view?usp=sharing

Kothari, C. R. (2014). *Research Methodology. Methods and Thechniques* (2nd ed.). New Delhi, India: New Age International Publishers.

Linares, S. y Sánchez, V. (1997). Fracciones de la relación parte-todo. Síntesis.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [tesis de doctorado, Universidad de Granada].Repositorio Institucional UG.

http://hdl.handle.net/10481/2726

Núñez, M. (2004). Por qué y cómo analizar el libro didáctico. Actas del I Simposio de Didáctica del Español para Extranjeros [Archivo de ordenador]: teoría y práctica: Río de Janeiro, 25 y 26 de junio de 2004. pp.225.230. Instituto Cervantes.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M., Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria, 13*,pp. 29-36.

https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Horsori.

Ramírez, M. y Rodríguez, P. (2010). Interpretaciones del Signo Igual. Un Estudio de Libros de Texto. *Unión-Revista Iberoamericana De Educación Matemática. 7(20), 3-52.*

https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/926

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículum escolar de matemáticas. *Revista EMA. 1(1)*. pp. 4-24.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de investigación en Educación Matemática.*1, pp. 39-63.

https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Rico, L. (2013). El método de análisis didáctico. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 9(33),* pp. 11-27.

https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/801

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista SUMA. 1*, pp. 7-23.

Rico, L y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Pirámide.

Saiz, I., Gorostegui, E. y Vilotta, G. (2003). Problematizar los conjuntos numéricos para representar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación Matemática.* 23(1), 123-151.

https://doi.org/10.24844/EM2301.05

Salazar, C. (2018). *La sistematización de una experiencia para la enseñanza de los números decimales finitos a partir de las fracciones decimales en el contexto del bachillerato internacional* [Tesis de maestría, Universidad del Valle]. Repositorio institucional UV.

https://hdl.handle.net/10893/11254

SEP, (2011a). *Plan de estudios 2011 Educación Básica.* Secretaría de Educación Pública.

SEP, (2011b). *Programas de estudio 2011 guía para el maestro educación básica primaria cuarto año.* Secretaría de Educación Pública.

SEP, (2011c). *Programas de estudio 2011 guía para el maestro educación básica primaria quinto año.* Secretaría de Educación Pública.

SEP, (2011d). *Programas de estudio 2011 guía para el maestro educación básica primaria sexto año.* Secretaría de Educación Pública.

SEP, (2014). *Desafíos Matemáticas. Línea de trabajo educativo. Orientaciones para el trabajo en el aula.* Secretaría de Educación Pública.

SEP, (2019a). *Desafíos matemáticos de cuarto grado.* Secretaría de Educación Pública.

SEP, (2019b). *Desafíos matemáticos de cuarto grado.* Secretaría de Educación Pública.

SEP, (2019c). *Desafíos matemáticos en sexto grado.* Secretaría de Educación Pública.

Segura, J. (2016). La utilización de los algoritmos de sustracción en educación primaria. *Educación Matemática en la Infancia. 4(2) pp. 73-88.*

Serrano, W. (2005). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía. 26 (75) pp. 131-166.*

http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922005000100006&lng=es&tlng=es.

Son, J. & Diletti, J. (2017). What can we learn from the analysis of textbooks? In J. Son, 1. Watanabe and J. Lo (Eds.), What does it matter? Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education (pp. 3-32). Cham: Springer.

Valencia, E. (2014). *Secuencia de enseñanza de los números decimales basada en un diagnóstico de las dificultades de comprensión de estos números* [tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.

http://hdl.handle.net/20.500.12209/11144

Vergnaud, G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didáctique des mathématiques, 10 (2). pp.133-170.*

https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf

Velásquez, L. (2012). *Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado cuarto de básica primaria.* [Trabajo final de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN.

https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/11777

Anexos

Código: G4 B2 C1 D4		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.		
Número del desafío: 4	**Nombre del desafío:** Décimos, centésimos y milésimos.	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1 Consigna 2
Unidad de Análisis:		

4 Décimos, centésimos y milésimos

Consigna 1

En parejas, recorten tiras de 3 cm de ancho utilizando cuatro cartoncillos de diferente color con las siguientes características:

- De un cartoncillo, recorten una tira que mida 1 m de largo para que sea la unidad.
- De otro cartoncillo, recorten una tira que mida 1 m de largo y divídanla en 10 partes iguales. Marquen y recorten las divisiones, y a cada parte llámenla 1 décimo de la unidad o $\frac{1}{10}$, o bien 0.1.
- Del otro cartoncillo, de diferente color, recorten una tira de 1 décimo de la unidad, semejante a las anteriores, y divídanla en 10 partes iguales. Marquen y recorten esas divisiones. A cada parte llámenla 1 centésimo de la unidad o $\frac{1}{100}$, que equivale a 0.01.
- Del último cartoncillo recorten una tira de un centésimo de la unidad, semejante a las anteriores, y divídanla en 10 partes iguales. Marquen y recorten las divisiones. A cada parte se le conocerá como 1 milésimo de la unidad o $\frac{1}{1000}$, que también se puede expresar como 0.001.

Consigna 2

Tengan a la mano su material recortado para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos décimos caben en una unidad?; ¿cuántos centésimos caben en un décimo?, y ¿cuántos milésimos caben en un centésimo?

b) ¿Qué es más grande, un décimo o un centésimo?

c) ¿Cuántos milésimos caben en un décimo?

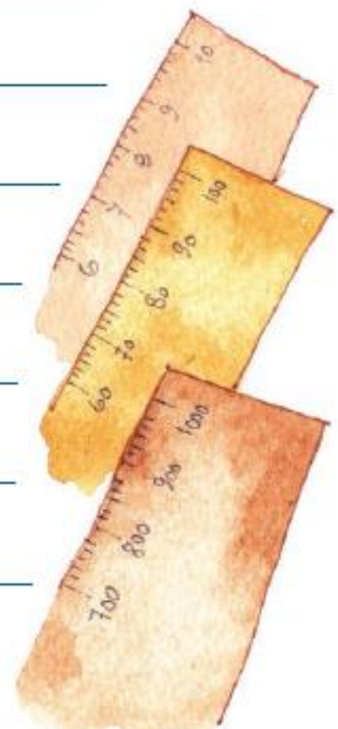
d) ¿Cuántos milésimos caben en una unidad?

e) En dos décimos, ¿cuántos centésimos hay?

f) ¿Cuántos décimos hay en media unidad?

g) ¿Cuántos décimos hay en 1 unidad + $\frac{5}{10}$?

h) ¿Cuántos milésimos tienen 1.5 unidades?



Estructura conceptual:		Sistemas de representación	Análisis fenomenológico:	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1		**Verbal:** Llamar 1 décimo de la unidad o $\frac{1}{10}$, o bien 0.1. Llamar 1 centésimo de la unidad o $\frac{1}{100}$, o bien 0.01. Conocer como 1 milésimo de la unidad o $\frac{1}{1000}$, que también se puede expresar como 0.001. Décimo de la unidad. Centésimo de la unidad. Un centésimo de la unidad. Dos décimos. Media unidad. **Numérica:** 1m 1 décimo $\frac{1}{10}$ 0.1 1 centésimo	Matemático Matemático	Escolar Escolar
Hechos **Términos:** Unidad. 1 décimo de la unidad. Equivale. Centésimo de la unidad. Milésimo de la unidad. Media unidad. Unidades. **Notaciones:** 3cm de ancho 1m de largo 1 décimo $\frac{1}{10}$ 0.1 1 centésimo $\frac{1}{100}$ 0.01 1 milésimo $\frac{1}{1000}$ 0.001 1 unidad + $\frac{5}{10}$	**Destreza** **Aritmética:** Calcular ¿Cuántos décimos caben en una unidad? ¿Cuántos centésimos caben en un décimo? ¿Cuántos milésimos caben en un centésimo? ¿Cuántos milésimos caben en un décimo? ¿Cuántos milésimos caben en una unidad? ¿Cuántos centésimos hay en dos décimos? ¿Cuántos centésimos hay en media unidad? ¿Cuántos décimos hay en 1 unidad + $\frac{5}{10}$? ¿Cuántos milésimos tienen 1.5 unidades? **Métrica:** Recortar tiras de 3cm de ancho por 1m de largo.			

1.5 unidades. **Convenios:** A cada parte llámenla 1 décimo de la unidad o $\frac{1}{10}$, o bien 0.1. A cada parte llámenla 1 centésimo de la unidad o $\frac{1}{100}$, o bien 0.01. A cada parte se le conocerá como 1 milésimo de la unidad o $\frac{1}{1000}$, que también se puede expresar como 0.001.	**Gráficas y de representación:** Dividir en 10 partes iguales.	$\frac{1}{100}$ 0.01 1 milésimo $\frac{1}{1000}$ 0.001 **Manipulativo:** 1 décimo de la unidad. 1 centésimo de la unidad. **Simbólica:** $1 + \frac{5}{10}$		
Significado: • Números decimales a través del valor numérico de los décimos centésimos y milésimos, mediante las representaciones verbal y numérica, esta última en la representación de fracción decimal y números con punto en el contexto matemático a través de una situación escolar. • Dividir en partes iguales mediante la representación manipulativa por medio de tiras de papel dividas en 10 partes iguales en un contexto matemático a través de una situación escolar.				

Código: G4 B1 C1 D5		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.		
Número del desafío: 5	**Nombre del desafío:** Expresiones con punto	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

5 Expresiones con punto

Consigna

En parejas (con el material de la sesión anterior), midan los objetos que se indican en la tabla y anoten ahí mismo los resultados; deben emplear fracciones decimales y expresiones con punto decimal.

Objeto	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Medida en fracciones decimales	Medida con punto decimal
Largo de un lápiz	0	$\frac{1}{10} = 0.1$	$\frac{8}{100} = 0.08$	$\frac{7}{1000} = 0.007$	$\frac{1}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000}$	0.187
Largo de una mesa						
Largo del pizarrón						
Ancho del pizarrón						
Altura de la puerta						
Ancho de la puerta						

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1				
Hechos **Términos:** Fracciones decimales decimal Unidades Décimos Centésimos Milésimos **Notaciones:** 0 $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{8}{100} = 0.08$ $\frac{7}{100} = 0.007$ $\frac{1}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000}$ 0.187	**Destreza** **Aritmética:** Emplear fracciones decimales y expresiones con punto decimal. **Gráficas y de representación:** Medir objetos. Medir con fracciones decimales. Medir con punto decimal. Medir objetos con una misma unidad de medida. Medir utilizando unidades más pequeñas.	**Numérica:** 0 0.187 **Simbólica:** $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{8}{100} = 0.08$ $\frac{7}{100} = 0.007$ $\frac{1}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000}$ **Manipulativo:** Tiras de papel de 1m, de $\frac{1}{10}$, de $\frac{1}{100}$ y de $\frac{1}{1000}$.	Extra-matemático: Medir: Largo de un lápiz, mesa, pizarrón etc.	Pública
Significado: • Emplear números decimales en el contexto extra-matemático, en el fenómeno de medida, en una situación pública, para favorecer a la estructura conceptual de la equivalencia mediante la representación simbólica de las fracciones decimales y números con punto.				

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G4 B3 C3 D47</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 47</td><td>Nombre del desafío:
Expresiones equivalentes</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

47 Expresiones equivalentes

Consigna

En equipos, resuelvan los problemas.

1. ¿Cuántas personas pueden sentarse en la sección blanca de un auditorio si hay 4 filas de 12 butacas cada una y 3 filas de 8 butacas cada una?

2. Al invernadero La Margarita llegó el siguiente pedido: 3 paquetes con 30 docenas de rosas cada uno, 4 paquetes con 20 docenas de gerberas cada uno y 2 paquetes con 40 docenas de margaritas cada uno. ¿Cuántas docenas se van a entregar en el pedido?

3. Maura está llenando bolsas de dulces para una fiesta de cumpleaños. En cada bolsa mete 6 chocolates. Hasta este momento ha llenado 9 bolsas y aún quedan 18 chocolates en el paquete. ¿Cuántos chocolates había en el paquete?

4. Este es el registro de canastas que anotó el equipo de Luis en los últimos cuatro partidos de basquetbol. Si se sabe que cada canasta vale 2 puntos, ¿cuántos puntos ha acumulado el equipo?

Jugador	Canastas
Luis	27
Javier	25
Alfonso	21
Raúl	27
Mauricio	25

5. Para pagar la entrada al cine y comprar palomitas, Fernanda y Marisol van a cooperar con $55.50 cada una, y Lorena y yo, con $69.50 cada una. ¿Cuánto dinero vamos a reunir?

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1				
Hechos **Términos:** Expresiones equivalentes. **Notaciones:** 4 14 3 3 30 4 20 2 40 6 9 18 2 27 25 21 27 25 \$55.50 \$69.50	**Destreza** **Aritmética:** Resolver problemas. Calcular ¿Cuántas personas pueden sentarse en la sección blanca de un auditorio si hay 4 filas de 12 butacas cada una y 3 filas de 8 butacas cada una? ¿Cuántas docenas se van a entregar en el pedido? ¿Cuántos chocolates había en el paquete? ¿Cuántos puntos ha acumulado el equipo? ¿Cuánto dinero vamos a reunir?	**Numérica:** 4 14 3 3 30 4 20 2 40 6 9 18 2 27 25 21 27 25 \$55.50 \$69.50	Extra-matemático Asientos de un auditorio. Pedido de flores. Bolsas de dulces. Canastas de básquetbol Ida al cine.	Pública

Significado:

- Comprobar la equivalencia de expresiones decimales mediante la representación simbólica en el contexto matemático en una situación escolar.

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G4 B3 C3 D48</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 48</td><td>Nombre del desafío:
¿tienen el mismo valor?</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

48 ¿Tienen el mismo valor?

Consigna

En equipos de tres compañeros, comprueben si las expresiones de cada tarjeta tienen el mismo valor. En caso de no tenerlo, expliquen por qué. No se vale usar calculadora.

4.50 y $4 \times 0.50 + 8 \times 0.20$	¿Tienen el mismo valor? ________ ¿Por qué? ________________ ________________________ ________________________
$2 \times 24 + 12 + 12$ y $5 \times 6 + 12 \times 3$	¿Tienen el mismo valor? ________ ¿Por qué? ________________ ________________________ ________________________
$9 \times 0.50 + 3 \times 0.20 + 7 \times 0.10$ y $5.00 + 2 \times 0.20$	¿Tienen el mismo valor? ________ ¿Por qué? ________________ ________________________ ________________________

¿Tienen el mismo valor? ____________

¿Por qué? ____________________________

____

____

$3 \times 15 + 2 \times 12 + 3 \times 9$

y

$4 \times 23 + 4$

¿Tienen el mismo valor? ____________

¿Por qué? ____________________________

____

____

$3 + 4 \times 0.10 + 0.50$

y

$3.50 + 2 \times 0.20$

¿Tienen el mismo valor? ____________

¿Por qué? ____________________________

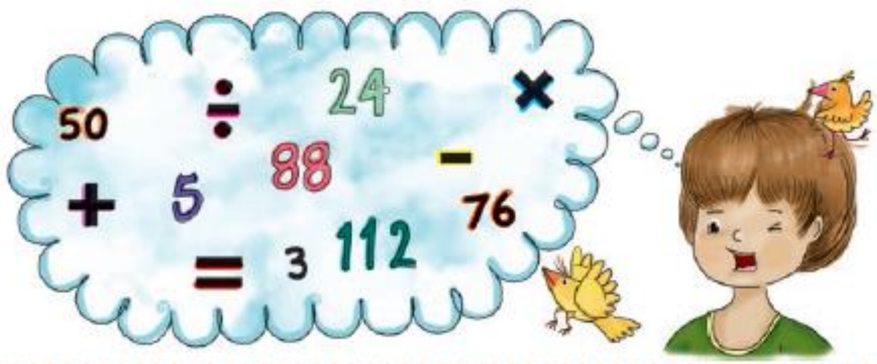
____

____

$4 \times 60 + 5 \times 8$

y

$125 + 98$



<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Numérica:
4.50

Simbólica:

4 X 0.50 + 8 X 0.20

2 X 24 + 12 + 12
5 X 6 +12 X 3

9 X 0.50 + 3 X 0.20 + 7 X 0.10
5.00 + 2 X 0.20

3 X 15 + 2 X 12 + 3 X 9
4 X 23 + 4

3 + 4 X 0.10 + 0.50
3.50 + 2 X 0.20.

4 X 60 + 5 X 8
125 + 98</td><td rowspan="2">Matemático</td><td rowspan="2">Escolar</td></tr>
<tr><td>Hechos

Términos:
Expresiones que tienen el mismo valor.

Notaciones:

4.50
4 X 0.50 + 8 X 0.20

2 X 24 + 12 + 12
5 X 6 +12 X 3

9 X 0.50 + 3 X 0.20 + 7 X 0.10
5.00 + 2 X 0.20

3 X 15 + 2 X 12 + 3 X 9
4 X 23 + 4

3 + 4 X 0.10 + 0.50
3.50 + 2 X 0.20.

4 X 60 + 5 X 8
125 + 98</td><td>Destreza

Aritmética:
Comprobar si las expresiones tienen el mismo valor.

Explicar el por qué las expresiones no tienen el mismo valor.</td></tr>
</table>

Significado:

- Comprobar la equivalencia de expresiones decimales mediante la representación simbólica en el contexto matemático en una situación escolar.

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G5 B2 C2 D22</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 22</td><td>Nombre del desafío:
¿Cuánto es?</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

22 ¿Cuánto es?

Consigna

En parejas, analicen la información de cada uno de los siguientes artículos que se encontraron en una revista. Posteriormente, respondan las preguntas.

Artículo 1

¿Sabías que los colibríes…?

Son los pájaros más pequeños que existen. La especie de menor tamaño es el colibrí zunzuncito o elfo de las abejas, que desde la punta del pico hasta la punta de la cola mide entre 4.8 y 5.5 cm, y puede pesar entre 2 y 2.7 g. La especie más grande es el llamado colibrí gigante que llega a medir hasta 25 cm; su peso puede oscilar entre 22.5 y 24 g.

a) ¿Cuántos milímetros puede medir el colibrí zunzuncito desde la punta del pico hasta la punta de la cola?

b) ¿Cuántos miligramos puede pesar el colibrí zunzuncito?

c) ¿Cuántos milímetros más de los que mide un colibrí zunzuncito puede medir uno gigante?

d) ¿Cuántos miligramos más de los que pesa un colibrí zunzuncito puede pesar uno gigante?

Artículo 2

La población del mundo

Durante 2010 se llevó a cabo en varios países el censo poblacional. De acuerdo con la información reportada por el Inegi, en México hay 112 337 000 habitantes. Se encuentra entre los 12 países más poblados del mundo y es el tercer país más poblado del continente americano.

País	Población aproximada (millones de habitantes)	Lugar que ocupa mundialmente
Brasil	192.38	5º
China	1313.98	1º
Estados Unidos	308.745	3º
India	1241.5	2º
México		11º
Rusia	142.9	8º

a) ¿Qué significa .5 en la población aproximada de habitantes de India?

b) ¿A cuántos habitantes equivale el número .38 en la población de Brasil?

c) ¿A cuántos habitantes equivale el número .9 en la población de Rusia?

d) Registren la población de México en la tabla.

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1				Pública
Hechos **Términos:** Equivale **Notaciones:** 4.8 cm 5.5 cm 2g 2.7g 25 cm 22.5g 24g 112337000 192.38 1313.98 308.745 1241.5 142.9 .5 .38 .9	**Destreza** **Aritmética:** Calcular: ¿Cuántos milímetros puede medir el colibrí zunzuncito desde la punta del pico hasta la punta de la cola? ¿Cuántos miligramos puede pesar el colibrí zunzuncito? ¿Cuántos milímetros más de los que mide un colibrí zunzuncito puede medir uno gigante? ¿Cuántos miligramos más de los que pesa un colibrí zunzuncito puede pesar uno gigante? ¿A cuántos habitantes equivale el número .38	**Verbal:** Milímetros. Miligramos. Millones de habitantes. **Numérica:** 4.8 5.5 2 2.7 25 22. 24 112337000 192.38 1313.98 308.745 1241.5 142.9 .5 .38 .9	Extra-matemático Medir Peso Población	

	en la población de Brasil? ¿A cuántos habitantes equivale el número .9 en la población de Rusia? Explicar: ¿Qué significa .5 en la población aproximada de habitantes de India? Registrar información la población de México en la tabla.			
Significado: • Explicar el significado de la parte decimal utilizando el término de equivalencia de la estructura conceptual a través de la representación numérica de números con punto mediante el contexto extra matemático en una situación pública en el fenómeno de medida.				

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G5 B2 C2 D23</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 23</td><td>Nombre del desafío:
¿Es lo mismo?</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

23 ¿Es lo mismo?

Consigna

Respondan las siguientes preguntas en equipos.

En el diario *El Mensajero Oportuno* se dieron a conocer los resultados del Torneo Nacional de Triatlón que se llevó a cabo en la zona huasteca del país.

Deportes

Bailes y cantos folclóricos engalanaron la ceremonia de clausura

Tuxpan, 16 de agosto. Muy emotiva fue la ceremonia con la que se clausuró el Torneo Nacional de Triatlón. Después de varios números musicales, representativos del rico folclor de la región, se entregaron reconocimientos a los deportistas participantes y premios a los ganadores.

Resultados de los ganadores

Tiempos					
Participante	Natación (1.9 km)	Ciclismo (90 km)	Carrera a pie (10.1 km)	Tiempo total	Medalla
Fernando Moreno	0.5 h	1.4 h	4.8 h	6.7 h	Oro
Pedro Lorenzo	0.6 h	1.6 h	5 h	7.2 h	Plata
Luis Daniel Villa	0.9 h	1.6 h	5.1 h	7.6 h	Bronce

a) ¿Cuántos metros debieron nadar los participantes?

b) ¿De cuántos metros fue la prueba de la carrera a pie?

c) ¿Cuántos minutos hay de diferencia entre las marcas de Pedro y Fernando en la prueba de ciclismo?

d) ¿La diferencia entre los tiempos que hicieron Fernando y Luis Daniel en la prueba de natación es de 4 min? ¿Por qué?

e) ¿Cuántos minutos de diferencia hay entre el tiempo total de los lugares primero y tercero?

f) ¿Significa lo mismo el .1 en 20.1 km que en 5.1 h? ¿Por qué?

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Verbal:
Metros
Minutos

Numérica:
1.9
0.5
0.6
0.9
90
1.4
1.6
10.1
4.8
5
5.1
6.7
7.2
7.6
.1
20.1
5.1</td><td rowspan="2">Extra-matemático

Tiempo
Distancia</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Notaciones:
1.9 km
0.5 h
0.6 h
0.9 h
90 km
1.4 h
1.6 h
10.1 km
4.8 h
5 h
5.1 h
6.7 h
7.2 h
7.6 h
4 min
.1
20.1 km
5.1 h</td><td>Destreza

Aritmética:
Calcular
¿Cuántos metros debieron nadar los participantes?

¿De cuántos metros fue la prueba de la carrera a pie?

¿Cuántos minutos hay de diferencia entre las marcas de Pedro y Fernando en la prueba de ciclismo?

¿Cuántos minutos de diferencia hay entre el tiempo total de los lugares primero y tercero?

Explicar:
¿La diferencia entre los tiempos que hicieron</td></tr>
</table>

	Fernando y Luis Daniel en la prueba de natación es de 4 min? ¿Por qué? ¿Significa lo mismo el .1 en 20.1 km que en 5.1 h? ¿Por qué?			
Significado: • Explicar el significado de la parte decimal utilizando el término de equivalencia de la estructura conceptual a través de la representación numérica de números con punto mediante el contexto extra matemático en una situación pública en el fenómeno de medida.				

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B1 C1 D4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 4</td><td>Nombre del desafío:
¿Qué pasa después del punto?</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

4 ¿Qué pasa después del punto?

Consigna

Reúnanse en parejas y lleven a cabo el siguiente juego.

- Designen quién será el jugador 1 y quién el 2.
- Recorten la tabla de la página 179 y escriban sus nombres en las columnas correspondientes.
- Observen que hay un cero y un punto, seguidos de uno, dos o tres espacios. Tiren el dado tantas veces como espacios haya y formen el mayor número posible con las cifras que les salgan, anotándolas en los espacios. Por ejemplo: si hay dos espacios lancen dos veces el dado; si salió 1 y 4, escriban 41 después del punto, es decir 0.41. Si sólo hay un espacio, se tira una vez y se anota sólo ese número.
- Después de que los dos jugadores hayan formado su número, los comparan. Quien haya escrito el número mayor gana la jugada y anota su nombre en la cuarta columna.

Jugada	Jugador 1 ____	Jugador 2 ____	Ganador de la jugada
1ª	0.___	0.___	
2ª	0.___	0.___	
3ª	0.___	0.___	
4ª	0.___	0.___	
5ª	0.___	0.___	
6ª	0.___	0.___	

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Numérica:
1
4
41
0.41</td><td rowspan="2">Matemático</td><td rowspan="2">Escolar</td></tr>
<tr><td>Hechos

Términos:
Cero y un punto.

Notaciones:
1
4
41
0.41</td><td>Destreza

Aritmética:
Formar el número mayor con las cifras.

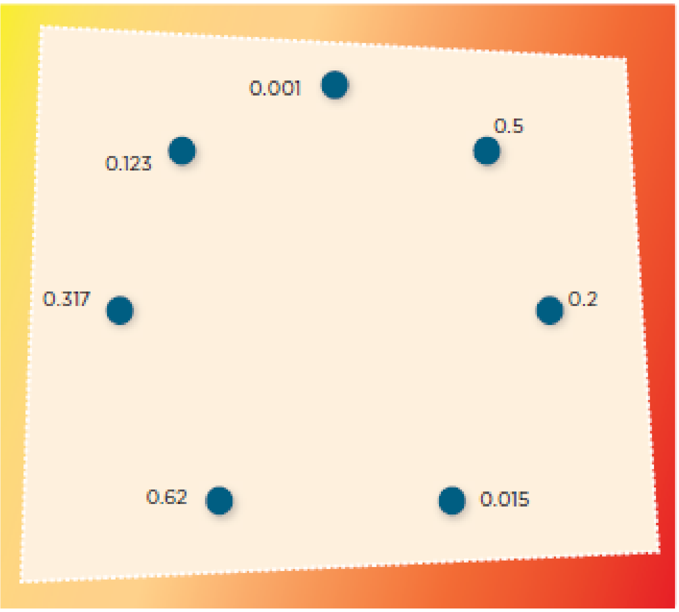
Comprar los números para saber cuál es el mayor entre los dos jugadores.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
• Comparar números decimales mediante la representación aritmética de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.</td></tr>
</table>

Código: G6 B1 C1 D5		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.		
Número del desafío: 5	**Nombre del desafío:** La figura escondida	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

5 La figura escondida

Consigna

Individualmente, descubre la figura escondida uniendo los puntos que están junto a cada número. Debes seguir un orden creciente (empezando por 0.001). Al final, traza una última línea que vaya del número mayor al 0.001.



Estructura conceptual:		Sistemas de representación	Análisis fenomenológico:	
Campo conceptual	Campo procedimental	Tipo de representación	Contexto	Situación
Nivel 1				
Hechos Términos: Orden creciente Notaciones: 0.001 0.5 0.2 0.015 0.62 0.317 0.123 Convenios: Resultados:	Destreza Aritmética: Seguir un orden creciente al unir los números. Ordenar los números decimales de mayor a menor.	Numérica: 0.001 0.5 0.2 0.015 0.62 0.317 0.123	Matemático	Escolar
Significado: • Ordenar números decimales a través de la representación numérica de números con punto en un contexto matemático y una situación escolar.				

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B3 C1 D35</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 35</td><td>Nombre del desafío:
¿Quién es el más alto?</td><td>Estructura del libro alumno:

Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

35 ¿Quién es el más alto?

Consigna

En equipos, analicen la siguiente situación y contesten lo que se pide.

A los alumnos de un grupo de sexto grado se les solicitó la medida de su estatura. Los únicos que la sabían la registraron de la siguiente manera: Daniel, 1.4 m; Alicia, un metro con 30 cm; Fernando $1\frac{1}{4}$ m; Mauricio, 1.50 m; Pedro, metro y medio; Sofía $1\frac{1}{5}$ m y Teresa dijo que medía más o menos 1.50 m.

a) ¿Quién es el más bajo de estatura?

____

____

b) ¿Hay alumnos que miden lo mismo?

____

¿Quiénes?

____

____

c) Teresa no sabe exactamente su estatura, pero al compararse con sus compañeros se da cuenta de que es más alta que Daniel y más baja que Pedro. ¿Cuánto creen que mide?

____

____

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><th colspan="2">Nivel 1</th><td rowspan="2">Verbal:
Un metro con 30 cm.
Metro y medio.

Numérica:
1.4m
$1\frac{1}{4}$m
1.50 m
$1\frac{1}{5}$
1.50 m</td><td rowspan="2">Extra-matemático:
Medida de la estura</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Notaciones:
1.4m
$1\frac{1}{4}$m
1.50 m
$1\frac{1}{5}$
1.50 m
Un metro con 30 cm.
Metro y medio.</td><td>Destreza

Aritmética:
Registrar la medida de la estatura.

Calcular:
Teresa no sabe exactamente su estatura, pero al compararse con sus compañeros se da cuenta de que es más alta que Daniel y más baja que Pedro. ¿Cuánto creen que mide?

Comparar:
¿Quién es el más bajo de estatura?

¿Hay alumnos que miden lo mismo?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:</td></tr>
</table>

• Representar en la recta numérica los números decimales mediante la representación de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

Código: G6 B3 C1 D35		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.		
Número del desafío: 36	**Nombre del desafío:** ¿Cuál es el sucesor?	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

36 ¿Cuál es el sucesor?

Consigna

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Representen en una recta numérica los números naturales indicados e identifiquen entre ellos un tercer número natural.

a) 6 y 8

b) 4 y 5

2. Representen en una recta numérica los números decimales indicados e identifiquen entre ellos un tercer número decimal.

a) 1.2 y 1.3

b) 1.23 y 1.24

3. Con base en las actividades anteriores, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es el sucesor de 6?

____

b) ¿Todos los números naturales tienen un sucesor?

____

¿Por qué?

____

c) ¿Cuál es el sucesor de 1.2?

____

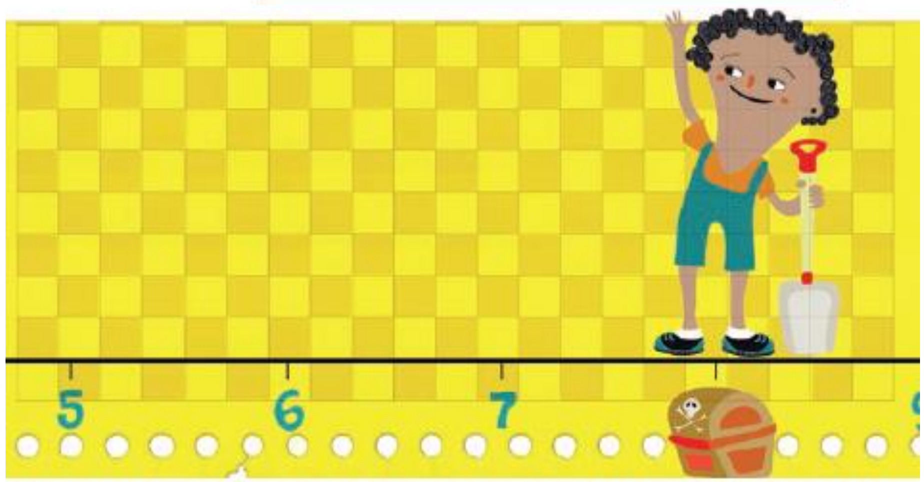
d) ¿Todos los números decimales tienen un sucesor?

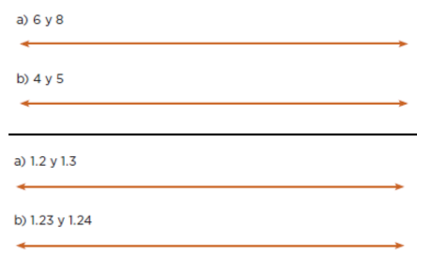
____

¿Por qué?

____

____



Estructura conceptual:		Sistemas de representación	Análisis fenomenológico:	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1				
Hechos Términos: Recta numérica Números naturales Números decimales **Notaciones:** 6 y 8 4 y 5 1.2 y 1.3 1.23 y 1.24	**Destreza** **Aritmética:** Representar en una recta numérica los números naturales indicados. Identificar entre dos números un tercer número natural. Representar en una recta numérica los números decimales indicados. Identificar entre dos números un tercer número decimal. Identificar: ¿Cuál es el sucesor de 6? ¿Cuál es el sucesor de 1.2? Explicar:	**Numérica:** 6 8 4 5 1.2 1.3 1.23 1.24 **Gráfica:** 	Matemático	Escolar

	¿Todos los números naturales tienen un sucesor? ¿Todos los números decimales tienen un sucesor?			

Significado:

- Identificar entre dos números un tercer número utilizando la estructura conceptual del orden, comparación y recta numérica usando la representación aritmética de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

Código: G4 B1 C4 D10		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.		
Número del desafío: 10	**Nombre del desafío:** La tienda de doña lucha	**Estructura del libro alumno:** Consiga 1 Consiga 2
Unidad de Análisis:		

10 La tienda de doña Lucha

Consigna 1

En equipos, analicen la siguiente información y luego contesten lo que se pide. No se vale usar calculadora.

En la tienda de doña Lucha se venden estos alimentos:

Tortas		Bebidas	
Pollo	$14.75	Licuado	$13.50
Chorizo	$15.75	Jugo	$9.45
Huevo	$10.50	Vaso de agua de sabor	$5.60
Especial	$21.80	Yogur	$15.95

1. Juan compró una torta de pollo y un jugo, y Raúl compró dos tortas de chorizo y un vaso de agua de limón. ¿Quién de los dos pagó más?

____

2. Doña Lucha vende a los maestros comida para llevar; cada pedido lo mete en una bolsa y a cada una le pone una etiqueta con el nombre del maestro y su cuenta. Anoten los alimentos que podría haber en las bolsas de Jessica y de Rogelio.

Consigna 2

También en equipos, realicen lo siguiente.

1. Paula registró en una libreta sus ahorros de una semana: el lunes, \$21.50; el martes, \$42.75; el miércoles, \$15.25; el jueves, \$32.20, y el viernes, \$13.45. ¿Cuánto ahorró en total?

2. Resuelvan los ejercicios.

   a) 35.90 + 5.60 =

   b) 89.68 + 15.60 =

   c) 145.78 + 84.90 + 19.45 =

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1		**Numérica:** 14.75 15.75 10.50 21.80 13.50 9.45 5.60 15.95 54.65 29.25 31.25 21.50 42.75 15.25 32.20 13.45 **Simbólica:** 35.90 + 5.60= 89.68 + 15.60= 145.78 + 84.90 + 19.45 =	Extra-matemático La tienda de doña luchan venden alimentos. Ahorraros de una semana. Matemático	Pública Escolar Pública
Hechos **Notaciones:** $14.75 $15.75 $10.50 $21.80 $13.50 $9.45 $5.60 $15.95 $54.65 $29.25 $31.25 $21.50 $42.75 $15.25 $32.20 $13.45 35.90 + 5.60= 89.68 + 15.60= 145.78 + 84.90 + 19.45 = **Convenio:** El signo de más indica una suma **Resultados:**	**Destreza** **Aritmética:** Calcular: ¿Quién de los dos pagó más? ¿Qué productos puede haber en las bolsas de lonche? ¿Cuánto ahorró en total? Resolver ejercicios.			

Sumar números decimales por cualquier procedimiento.				

Significado:

- Sumar números decimales en un contexto extra-matemático en una situación pública mediante el fenómeno del dinero usando la representación numérica de números con punto.
- Sumar números decimales a través de la representación simbólica y la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G4 B1 C4 D11</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 11</td><td>Nombre del desafío:
Los uniformes escolares</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1
Consigna 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

11 Los uniformes escolares

Consigna 1

En equipos, resuelvan el siguiente problema sin usar la calculadora.

Juan y su mamá están en una tienda de ropa; Juan necesita un pantalón, una camisa y un cinturón, y su mamá desea comprar un pantalón, una blusa y una falda. Los precios de las prendas que buscan son los que se muestran:

Ropa para niños	
Pantalón	$119.90
Camisa	$105.70
Cinturón	$59.90

Ropa para damas	
Pantalón	$189.90
Blusa	$175.50
Falda	$199.90

a) Si la mamá de Juan tiene $1000.00, ¿le sobra o le falta dinero para comprar esas prendas?

____

¿Cuánto?

____

Consigna 2

Individualmente, resuelvan los problemas y las sustracciones.

1. Con un billete de $20.00 se pagó una cuenta de $12.60. ¿Cuánto se recibió de cambio?

2. Paulina necesita un pincel que cuesta $37.50, y su amiga comenta: "Yo lo compré en otra papelería a $29.90". ¿Cuál es la diferencia entre los dos precios?

3. La mamá de Perla fue al mercado y compró 2 kg de tomate en $30.60 y 3 kg de papa en $45.50. ¿Cuánto le dieron de cambio si pagó con un billete de $100.00?

4. Agustín tenía cierta cantidad de dinero ahorrado, su papá le dio $48.30 y ahora tiene $95.80. ¿Cuánto tenía ahorrado?

5. 35.60 − 5.90 =

6. 79.95 − 25.60 =

7. 184.90 − 59.45 =

Estructura conceptual:		Sistemas de representación	Análisis fenomenológico:	
Campo conceptual	Campo procedimental	Tipo de representación	Contexto	Situación
Nivel 1		Numérica:	Extra-matemático	Pública
Hechos **Términos:** Sustracciones. Diferencia. **Notaciones:** $119.90 $105.70 $59.90 $189.90 $175.50 $199.90 $1000.00 $20.00 $12.60 $37.50 $29.90 $30.60 $45.50 $100.00 $48.30 $95.80 35.60 – 5.90= 79.95 – 25.60= 184.90 – 59.45 = **Convenios:**	**Destreza** **Aritmética:** Resolver problemas sin usar calculadoras. Calcular: ¿Le sobra o le falta dinero para comprar esas prendas?. Resolver problemas y sustracciones. Calcular: ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es la diferencia entre los dos precios? ¿Cuánto le dieron de cambio si pagó con un billete de $100.00? ¿Cuánto tenía ahorrado?	119.90 105.70 59.90 189.90 175.50 199.90 1000.00 20.00 12.60 37.50 29.90 30.60 45.50 100.00 48.30 95.80 **Simbólica:** 35.60 – 5.90= 79.95 – 25.60= 184.90 – 59.45 =	Dinero Comprar prendas de ropa. Dinero Comprar en una papelería, mercado. Ahorrar dinero. Matemático	Escolar Pública

<table>
<tr><td>El signo de menos indica una resta.

Resultados:
Restar números por cualquier procedimiento.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
Restar números decimales en un contexto extra-matemático en una situación pública mediante el fenómeno del dinero usando la representación numérica de números con punto.
Restar números decimales a través de la representación simbólica y la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.</td></tr>
</table>

Código: G4 B2 C3 D31		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.		
Número del desafío: 31	**Nombre del desafío:** El más rápido	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

31 El más rápido

Consigna

En equipos, organicen una competencia con las siguientes reglas:

- Cada equipo debe tener una tarjeta de su material recortable (páginas 243-245), en la que escribirá su respuesta. Coloquen la tarjeta hacia abajo, de manera que no se vea lo que tiene escrito.
- El que inicie la competencia toma la tarjeta y lee lo que aparece escrito en el primer renglón de la tabla. Hace el cálculo mental y escribe el resultado donde dice "cantidad", incluyendo el signo + o − según se deba sumar o restar. Enseguida, voltea la tarjeta otra vez hacia abajo y la pasa al compañero que sigue.
- El estudiante en turno lee el segundo renglón, anota el resultado después de hacer mentalmente el cálculo y pasa la tarjeta volteada hacia abajo al siguiente compañero.
- Se repite el procedimiento anterior hasta terminar con todos los renglones de la tabla.
- El equipo que complete primero la tabla será el ganador.
- Si alguien hace la operación por escrito o con calculadora, perderá su equipo.

Lo que tengo	Cantidad	Lo que quiero
5.5		4
0.15		1
0.7		2.7
1.49		0.39
6.24		2.2
4.01		3
1.03		2.30
1.29		10.30
0.28		3.5
1.11		1.1

Lo que tengo	Cantidad	Lo que quiero
1.5		2
3.5		1.5
0.07		2.77
0.49		0.11
6.24		6.42
4.01		10.04
0.03		3.3
1.59		1.6
5.28		2.20
1.10		1.67

Lo que tengo	Cantidad	Lo que quiero
0.05		2
1.51		0.51
0.70		1
2.12		0.12
0.85		0.50
1.59		2
5.28		3.28
0.3		0.7
0.6		0.06
1.15		0.5

Lo que tengo	Cantidad	Lo que quiero
1.8		3
3.05		1.50
0.07		0.77
0.49		0.11
2.4		2.42
4.01		1.04
0.03		0.3
1.09		1.05
5.28		10
0.3		3

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1		**Numérica:** 5.5 _____ 4 0.15 _____ 1 0.7 _____ 2.7 1.49_____ 0.39 6.24 _____ 2.2 4.01 _____ 3 1.03 ____ 2.30 1.29____ 10.30 0.28 _____ 3.5 1.11 _____ 1.1 1.5 _____ 2 3.5 _____ 1.5 0.07 ____ 2.77 0-49____ 0.11 6.24 ____ 6.42 4.01 ___ 10.04 0.03 ____ 3.3 1.59____ 1.6 5.28 _____ 2.2 1.10 ____ 1.67 0.05_____ 2 1.51 ____ 0.51 0.70 ____ 1 2.12 ____ 0.12	Matemático	Escolar
Hechos **Términos:** Sumar Restar **Notaciones:** 5.5 _____ 4 0.15 _____ 1 0.7 _____ 2.7 1.49_____ 0.39 6.24 _____ 2.2 4.01 _____ 3 1.03 _____ 2.30 1.29____ 10.30 0.28 _____ 3.5 1.11 _____ 1.1 1.5 _____ 2 3.5 _____ 1.5 0.07 ____ 2.77 0-49____ 0.11 6.24 ____ 6.42 4.01 ___ 10.04 0.03 ____ 3.3 1.59____ 1.6 5.28 _____ 2.2 1.10 ____ 1.67	**Destreza** **Aritmética:** Leer números decimales. Hacer el cálculo mental. Escribir la cantidad incluyendo el signo + ó – según se deba sumar o restar.			

0.05 ____ 2 1.51 ____ 0.51 0.70 ____ 1 2.12 ____ 0.12 0.85 ____ 0.50 1.59 ____ 2 5.28 ___ 3.28 0.3 ____ 0.7 0.6 ____ 0.06 1.15 ____ 0.5 1.8 ____ 3 3.05 ____ 1.50 0.07 ____ 0.77 0.49 ____ 0.11 2.4 ____ 2.42 4.01 ____ 1,04 0.03 ____ 0.3 1.09 ____ 1.05 5.28 ____ 10 0.3 ____ 3 +, - **Resultados:** Sumar y restar números decimales mentalmente.		0.85 ____ 0.50 1.59 ____ 2 5.28 ___ 3.28 0.3 ____ 0.7 0.6 ____ 0.06 1.15 ____ 0.5 1.8 ____ 3 3.05 ____ 1.50 0.07 ____ 0.77 0.49 ____ 0.11 2.4 ____ 2.42 4.01 ____ 1,04 0.03 ____ 0.3 1.09 ____ 1.05 5.28 ____ 10 0.3 ____ 3		
Significado: • Leer números decimales simbolizados mediante la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.				

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G4 B2 C3 D32</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 32</td><td>Nombre del desafío:
Tarjetas decimales</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

32 Tarjetas decimales

Consigna

En equipos, nombren a un juez o árbitro en cada uno y jueguen lo siguiente con el material recortable (páginas 239-241).

- Cada equipo tiene dos mazos de 15 tarjetas cada uno. El árbitro colocará un mazo a su derecha y otro a su izquierda. Todas las tarjetas deben tener el número hacia abajo.
- El árbitro tomará una tarjeta del mazo que está a su derecha y la mostrará al resto del equipo; después tomará una tarjeta del mazo que está a su izquierda y también la mostrará. Enseguida, otra vez volteará las tarjetas hacia abajo.
- Los demás integrantes del equipo harán mentalmente la operación que sea necesaria (suma o resta) para pasar del primer número mostrado al segundo.
- El primero que dé el resultado correcto se lleva las dos tarjetas, y ahora él será el árbitro.
- Para saber si el resultado es correcto, el árbitro puede hacer la operación con la calculadora o con lápiz y papel.
- El juego finaliza cuando se terminan las tarjetas de los dos mazos, y gana quien haya logrado reunir más tarjetas.

32. Tarjetas decimales

17.22	1.1	2.25	7.15	16.3
6.5	10.15	5.25	2.9	8.8
0.75	4.68	12.13	10.10	4.5

32. Tarjetas decimales

6.78	2.1	19.23	3.33	14.25
3.5	7.11	13.17	8.18	0.5
0.45	3.7	18.52	0.01	4.3

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1		**Numérica:** 0.75 6.5 17.22 4.68 10.15 1.1 12.14 5.25 2.25 10.10 2.9 7.15 4.5 8.8 16.3 0.45 3.5 6.78 3.7 7.11 2.1 18.52 13.17 19.23 0.01 8.18 3.33	Matemático	Escolar
Hechos **Términos:** Decimales Suma Resta **Notaciones:** 0.75 6.5 17.22 4.68 10.15 1.1 12.14 5.25 2.25 10.10 2.9 7.15 4.5 8.8 16.3 0.45 3.5 6.78 3.7	**Destreza** **Aritmética:** Hacer la operación de suma y resta para pasar del primer número mostrado al segundo. Hacer la operación con calculadora o con lápiz y papel.			

7.11 2.1 18.52 13.17 19.23 0.01 8.18 3.33 4.3 0.5 14.25		4.3 0.5 14.25		
Significado: • Sumar o restar mentalmente números decimales mediante la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.				

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G4 B4 C3 D71</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 71</td><td>Nombre del desafío:
Problemas olímpicos</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1
Consigna 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

71 Problemas olímpicos

Consigna 1

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. La gimnasia femenil es una de las pruebas que se llevan a cabo en las Olimpiadas. Las gimnastas participan en cuatro pruebas: caballo o potro, barra de equilibrio, barras asimétricas y ejercicios de piso. Las medidas de los aparatos son:

Aparato	Altura desde el piso	Largo	Ancho
Barras asimétricas	Superior: 2.35 m Inferior: 1.5 m	1.50 m	0.07 m
Barra de equilibrio	1.2 m	5 m	0.10 m
Caballo o potro	1.20 m	1.6 m	0.35 m

a) ¿Cuál es la diferencia entre el largo del caballo y el largo de la barra de equilibrio?

____

b) ¿Cuántos centímetros mide el ancho de cada barra asimétrica?

____

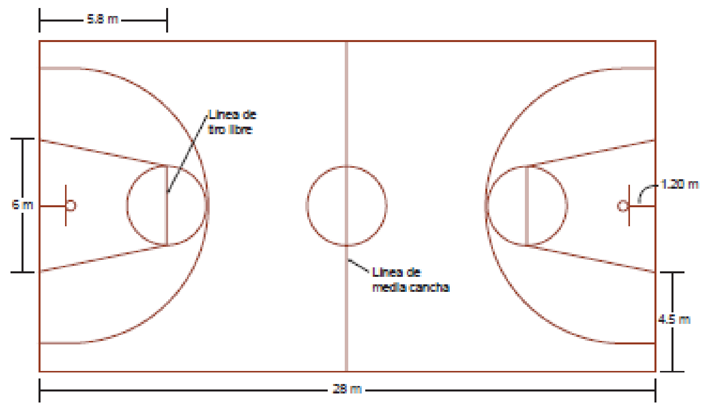
c) ¿Cuántos centímetros es más ancho el caballo que la barra de equilibrio?

____

d) ¿Cuál es la diferencia entre la altura de las dos barras asimétricas?

____

2. El basquetbol se hizo oficial como categoría olímpica en los Juegos Olímpicos de 1936; en los Juegos Olímpicos de 1928 y de 1932 solamente fue un deporte de exhibición. Estas son algunas medidas de la cancha en la que se practica este deporte.



a) ¿Cuál es la distancia entre la línea de tiro libre y la línea de media cancha?

____

b) ¿Qué distancia hay entre las dos líneas de tiro libre?

____

c) Si un jugador logra encestar desde la línea de media cancha, ¿cuál es la distancia a la que está de la canasta?

____

d) ¿Cuál es la medida del ancho de la cancha?

____

Consigna 2

Organizados en parejas escriban los signos >, < o = para comparar estas expresiones. No se vale usar calculadora.

a) 8.15 m ☐ 12.87 m − 4.68 m

b) 4.60 m ☐ 0.25 m + 3.48 m + 0.50 m

c) 63 cm + 78 cm + 59 cm ☐ 2.08 m

d) 8 dm + 35 dm ☐ 3.30 m

e) 3.52 m ☐ 35 dm + 2 cm

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1		**Verbal:** Centímetros **Numérica:** 2.35m 1.5m 1.2m 1.20m 1.50m 5m 1.6 m 0.07m 0.10m 0.35m 5.8m 6m 28m 4.5m 1.20m 8.15 m 4.60 m 2.08 3.30m 3.52 m **Simbólica:** 12.87m – 4.68	Extra-matemático Medida de los aparatos gimnásticos Medidas de la cancha de basquetbol. Matemático	Pública Escolar
Hechos **Términos:** Más Diferencia **Notaciones:** 2.35m 1.5m 1.2m 1.20m 1.50m 5m 1.6 m 0.07m 0.10m 0.35m 5.8m 6m 28m 4.5m 1.20m Signos >, < o = 8.15 m 12.87m – 4.68 4.60 m	**Destreza** **Aritmética:** Resolver los problemas. Calcular ¿Cuál es la diferencia entre el largo del caballo y el largo de la barra de equilibrio? ¿Cuántos centímetros mide el ancho de cada barra asimétrica? ¿Cuántos centímetros es más ancho el caballo que la barra de equilibrio? ¿Cuál es la diferencia entre la altura de las dos barras asimétricas? ¿Cuál es la distancia entre la línea de tiro libre y la línea de media cancha?			

0.25 m + 3.48 m + 0.50 m 63 cm + 78 cm + 59 cm 2.08 8 dm + 35 dm 3.30m 3.52 m 35 dm + 2 cm. **Convenio:** Este símbolo significa mayor que (>). Este símbolo significa menor que (<). Este símbolo significa igual que (=). **Resultado:** Comparar números decimales mayores, menores o iguales sumando o restando según corresponda.	¿Qué distancia hay entre las dos líneas de tiro libre? ¿Cuál es la distancia a la que está de la canasta? ¿Cuál es la medida del ancho de la cancha? Escribir los signos >, < o = para comparar estas expresiones.	0.25 m + 3.48 m + 0.50 m 63 cm + 78 cm + 59 cm 8 dm + 35 dm 35 dm + 2 cm.		

Significado:

- Resolver problemas de números decimales simbolizados por la representación numérica de números con punto en el contexto extra-matemático en una situación pública usando el fenómeno de la medida.
- Comparar expresiones decimales, mediante la representación simbólica y numérica usando la simbolización de números con punto mediante los símbolos de mayor que, menor que e igual en un contexto matemático en una situación escolar.

Código: G4 B4 C3 D72		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.		
Número del desafío: 72	**Nombre del desafío:** Cambiemos números decimales	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

72 Cambiemos decimales

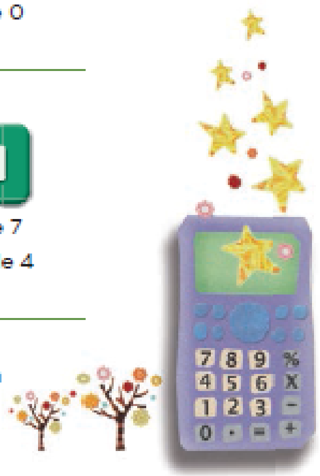
Consigna

En equipos, hagan los ejercicios.

Cada dibujo representa la pantalla de una calculadora. Anoten sobre la línea la operación que, sin borrar el número escrito, deben hacer para que en las pantallas cambien las cifras que se indican.

1.25 1 en lugar de 2	4.258 7 en lugar de 5
7.025 1 en lugar de 2	5.024 3 en lugar de 0
0.128 3 en lugar de 2 y 6 en lugar de 8	3.794 2 en lugar de 7 y 0 en lugar de 4

Con la calculadora, verifiquen que la operación que anotaron sobre cada línea produce el cambio esperado. Si no ocurre, averigüen cuál fue el error y coméntenlo con el grupo.



<table>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Estructura conceptual:</td><td>Sistemas de representación</td><td colspan="2">Análisis fenomenológico:</td></tr>
<tr><td>Campo conceptual</td><td>Campo procedimental</td><td>Tipo de representación</td><td>Contexto</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Numérica:
1.25
1 en lugar de 2

4.258
7 en lugar de 5

7.025
1 en lugar de 2

5.024
3 en lugar de 0

0.128
3 en lugar de 2 y 6 en lugar de 8

3.794
2 en lugar de 7 y 0 en lugar de 4</td><td rowspan="2">Matemático</td><td rowspan="2">Escolar</td></tr>
<tr><td>Hechos

Términos:
Decimales

Notaciones:
1.25
1 en lugar de 2

4.258
7 en lugar de 5

7.025
1 en lugar de 2

5.024
3 en lugar de 0

0.128
3 en lugar de 2 y 6 en lugar de 8

3.794
2 en lugar de 7 y 0 en lugar de 4</td><td>Destreza

Aritmética:
Hacer los ejercicios.

Anotar la operación que, sin borrar el número escrito, deben hacer para que en las pantallas cambien las cifras que se indican.

Verificar si la operación que anotaron sobre cada línea produce el cambio.

Sino ocurre el cambio, averiguar cuál fue el error.</td></tr>
</table>

Significado:
• Identificar qué operación anotar para que cambien las cifras decimales que indican usando la representación numérica de números decimales en un contexto matemático en una situación escolar.

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G4 B4 C3 D73</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 73</td><td>Nombre del desafío:
Son equivalentes</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

73 Son equivalentes

Consigna

En parejas, resuelvan los problemas.

1. Registren en las líneas las expresiones fraccionarias y decimales que representan el mismo valor.

a) $3 + \frac{748}{1000}$	b) $\frac{2}{100} + \frac{9}{1000}$	c) 0.25 + 0.034
d) 0.468	e) 4.6 + 0.05	f) $2 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$
g) 0.02 + 0.009	h) $\frac{1}{10} + \frac{9}{1000}$	i) 2 + 0.6 + 0.005
j) 2 + 0.5 + 0.06	k) $\frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000}$	l) 3 + 0.7 + 0.04 + 0.008
m) 0.109	n) $4 + \frac{6}{10} + \frac{50}{1000}$	ñ) 0.019
o) $\frac{1}{100} + \frac{9}{1000}$	p) $2 + \frac{6}{10} + \frac{5}{1000}$	q) 4.650
r) $\frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{4}{1000}$		s) 0.029

I. ______________ y ______________

II. ______________ y ______________

III. ______________ y ______________

IV. ______________ y ______________

V. ______________ y ______________

VI. ______________ y ______________

VII. ______________ y ______________

VIII. ______________ y ______________

IX. ______________ y ______________

2. Escriban el número que está formado por:

a) 15 décimos, 12 centésimos y 17 milésimos.

____

b) 432 milésimos, 23 centésimos y 39 décimos.

____

c) 25 décimos y 128 milésimos.

____

d) 43 décimos y 7 milésimos.

____

e) 6 décimos y 3 centésimos.

____

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1		**Verbal:** 15 décimos, 12 centésimos y 17 milésimos. 432 milésimos, 23 centésimos y 39 décimos. 25 décimos y 128 milésimos. 43 décimos y 7 milésimos. 6 décimos y 3 centésimos. **Numérica:** 0.468 0.109 0.019 4.650	Matemático	Escolar
Hechos **Términos:** Equivalentes **Notaciones:** $3 + \frac{748}{1000}$ $\frac{2}{100} + \frac{9}{1000}$ 0.25 + 0.034 0.468 4.6 + 0.05 $2 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$ 0.02 + 0.009 $\frac{1}{10} + \frac{9}{1000}$	**Destreza** **Aritmética:** Resolver problemas. Registrar las expresiones fraccionarias y decimales que representan el mismo valor. Escribir el número que está formado por: 15 décimos, 12 centésimos y 17 milésimos. 432 milésimos, 23 centésimos y 39 décimos. 25 décimos y 128 milésimos. 43 décimos y 7 milésimos.			

2 + 0.6 + 0.005 2 + 0.5 + 0.06 $\frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000}$ 3 + 0.7 + 0.04 + 0.008 0.109 $4 + \frac{6}{10} + \frac{50}{1000}$ 0.019 $\frac{1}{100} + \frac{9}{1000}$ 4.650 $\frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{4}{1000}$ 0.029 **Convenio:** El signo de más indica una suma.	6 décimos y 3 centésimos.	0.029 **Simbólica:** $3 + \frac{748}{1000}$ $\frac{2}{100} + \frac{9}{1000}$ 0.25 + 0.034 4.6 + 0.05 $2 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$ 0.02 + 0.009 $\frac{1}{10} + \frac{9}{1000}$ 2 + 0.6 + 0.005 2 + 0.5 + 0.06		

El signo de menos indica una resta. **Resultado:** Identificar mediante una suma o resta expresiones que tienen el mismo valor.		$\frac{4}{10}+\frac{6}{100}+\frac{8}{1000}$ 3 + 0.7 + 0.04 + 0.008 $4+\frac{6}{10}+\frac{50}{1000}$ $\frac{1}{100}+\frac{9}{1000}$ $\frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{4}{1000}$		

Significado:

- Registrar las expresiones fraccionarias y decimales que representan el mismo valor, a través de la estructura conceptual de equivalencia mediante la representación simbólica y numérica está a través de la representación de números con punto y fracciones decimales en un contexto matemático y una situación escolar.
- Escribir números decimales usando la estructura conceptual de la equivalencia, mediante la representación verbal y numérica, en un contexto matemático en una situación escolar.

Código: G5 B3 C2 D39		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones.		
Número del desafío: 39	**Nombre del desafío:** ¡Atajos con decimales!	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

39 ¡Atajos con decimales!

Consigna

De manera individual y mentalmente, resuelve las siguientes operaciones; utiliza el procedimiento más breve posible. Escribe en la tabla los resultados y los procedimientos que utilizaste.

Cálculo	Resultado	Procedimiento
El doble de 0.25		
El doble de 0.5		
La mitad de 2.6		
La mitad de 2.7		
0.25 + 0.75		
0.25 + 9.75		
0.20 + 0.30		
1 – 0.2		

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Verbal:
El doble de 0.25
El doble de 0.5
La mitad de 2.6
La mitad de 2.7

Numérica:
0.25, 0.75
0.25, 9.75
0.20, 0.30
1, 0.2

Simbólica:
0.25 + 0.75
0.25 + 9.75
0.20 + 0.30
1 – 0.2</td><td rowspan="2">Matemático</td><td rowspan="2">Escolar</td></tr>
<tr><td>Hechos

Términos:
Notaciones:
0.25
0.5
2.6
2.7
0.25 + 0.75
0.25 + 9.75
0.20 + 0.30
1 – 0.2

Convenio:
El signo de más indica suma.
El signo de menos indica una resta.</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver las operaciones mentalmente.

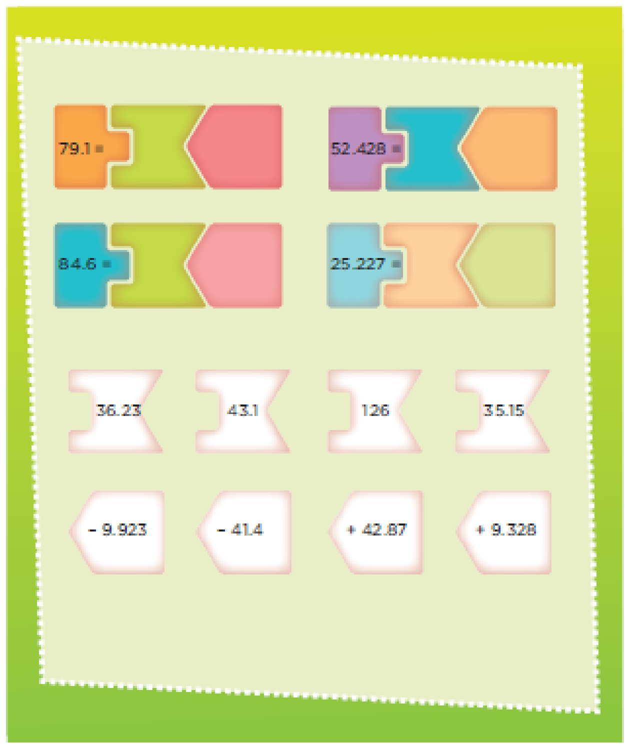
Escribir el procedimiento más breve posible.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
Resolver operaciones mentalmente escribiendo el procedimiento más breve utilizando las representaciones de simbólica, verbal y numérica, en un contexto matemático en una situación escolar.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B1 C2 D7</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 7</td><td>Nombre del desafío:
Rompecabezas</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1
Consigna 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

7 Rompecabezas

Consigna 1

Reúnete con un compañero para realizar esta actividad. De las piezas blancas que están en la parte inferior, elijan las que integran correctamente cada rompecabezas.



Consigna 2

1. Si en la calculadora tienes el número 0.234, ¿qué operación debes realizar para obtener las siguientes cantidades?

   0.134 ______________________

   0.244 ______________________

   1.23 ______________________

   2.234 ______________________

   0.24 ______________________

2. ¿Qué números se obtienen si a cada uno de los números de abajo sumas 0.09 y restas 0.009?

   8.6 ______________________

   12.5 ______________________

   1.25 ______________________

   0.75 ______________________

   1.20 ______________________

<table>
<tr><th colspan="2"><u>Estructura conceptual:</u></th><th><u>Sistemas de representación</u></th><th colspan="2"><u>Análisis fenomenológico:</u></th></tr>
<tr><th><u>Campo conceptual</u></th><th><u>Campo procedimental</u></th><th><u>Tipo de representación</u></th><th><u>Contexto</u></th><th><u>Situación</u></th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Nivel 1</u></td><td rowspan="2"><u>Numérica:</u>
79.1 =
52.438 =
84.6 =
25.227 =
36.23
43.1
126
35.15
- 9.923
-41.4
+ 42.87
+ 9.328

0.34
0.134
0.244
1.23
2.234
0.24
0.09
0.009
8.6
12.5
1.25
0.75
1.20</td><td rowspan="2">Matemático</td><td rowspan="2">Escolar</td></tr>
<tr><td><u>Hechos</u>

<u>Términos:</u>
Suma
Resta

<u>Notaciones:</u>
79.1 =
52.438 =
84.6 =
25.227 =
36.23
43.1
126
35.15
- 9.923
-41.4
+ 42.87
+ 9.328

0.34
0.134
0.244
1.23
2.234
0.24
0.09</td><td><u>Destreza</u>

<u>Aritmética:</u>
Elegir las operaciones que den el resultado solicitado.

Identificar qué operación realizar para obtener el resultado solicitado.

Sumar o restar números para obtener un resultado.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>0.009
8.6
12.5
1.25
0.75
1.20
Convenios:
El signo de más indica una suma.
El signo de menos indica una resta.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
Elegir cantidades que den un resultado solicitado, utilizando las representaciones simbólica y numérica, esta última mediante la representación de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.
Identificar qué operación realizar para llegar al resultado solicitado, utilizando la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.
Sumar o restar números para obtener un resultado mediante la representación numérica de números con punto en un contexto matemático en una situación escolar.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G5 B5 C4 D84</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 84</td><td>Nombre del desafío: La papelería</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

84 La papelería

Consigna

En equipo, resuelvan el siguiente problema sin usar calculadora.

Ramiro trabaja en una papelería y tiene que estar muy atento a lo que debe cobrar, pues si le falta dinero lo paga de su sueldo.

a) Una persona pidió 8 fotocopias tamaño oficio y 8 CD. ¿Cuánto deberá cobrarle en total?

____

b) Otra persona pidió 3 CD y 5 fotocopias tamaño carta. ¿Cuánto le deberá pagar?

____

c) Araceli le pidió a Ramiro 23 fotocopias tamaño oficio y que las engargolara. Pagó con un billete de $50. ¿Cuánto debe regresarle de cambio?

____

Estructura conceptual:		Sistemas de representación	Análisis fenomenológico:	
Campo conceptual	Campo procedimental	Tipo de representación	Contexto	Situación
Nivel 1		Numérica: 0.50 0.75 13.50 4.90 8 3 5 23 50	Extra-matemático Dinero	Pública
Hechos Notaciones: $0.50 $0.75 $13.50 $4.90 8 3 5 23 $50	Destreza Aritmética: Resolver el problema. Calcular: ¿Cuánto deberá cobrarle en total? ¿Cuánto le deberá pagar? ¿Cuánto debe regresarle de cambio?			
Significado: • Resolver problemas sin usar calculadora, utilizando la representación numérica de números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública.				

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G5 B5 C4 D85</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 85</td><td>Nombre del desafío:
¿Qué hago con el punto?</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

85 ¿Qué hago con el punto?

Consigna

Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas.

1. Una tubería tiene 7 tramos iguales de 0.75 m. ¿Cuál es la longitud de la tubería?

____

2. Esther compró 3 frascos de pegamento de $4.80 cada uno. ¿Cuánto pagó en total?

____

3. Sonia compró 5 paquetes de queso panela con un peso de 0.375 kg cada uno y 6 paquetes de jamón con un peso de 0.250 kg cada uno. ¿Cuál es el peso total de los quesos y el jamón?

____

4. José fue a una papelería y sacó 10 fotocopias a color tamaño carta, a $2.75 cada una, y 100 fotocopias blanco y negro tamaño carta, a $0.75 cada una. ¿Cuánto pagó en total por todas las fotocopias?

____

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Verbal:
Numérica:
7
0.75
3
4.80
5
0.375
6
0.250
10
2.75
100
0.75</td><td rowspan="2">Extra-matemático
Comprar y dividir una tubería.</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Notaciones:
7
0.75m
3
$4.80
5
0.375kg
6
0.250kg
10
$2.75
100
$0.75</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver problemas.

Calcular:
¿Cuál es la longitud de la tubería?
¿Cuánto pagó en total?
¿Cuál es el peso total de los quesos y el jamón?
¿Cuánto pagó en total por todas las fotocopias?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
• Resolver problemas sin usar calculadora, utilizando la representación numérica de números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G5 B5 C4 D86</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 86</td><td>Nombre del desafío: La excursión</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

86 La excursión

Consigna

En equipos, resuelvan el siguiente problema sin usar calculadora.

El profesor Héctor y sus alumnos organizaron una excursión a la Ciudad de México. Visitarán el Centro Histórico, el Castillo de Chapultepec y el Museo de Antropología. El costo del transporte por alumno es de $310.75 y no incluye alimentos.

a) Para pagar el transporte, el profesor Héctor tiene que juntar el dinero de los 37 alumnos que participarán en la excursión. ¿Cuánto dinero debe reunir?

____

b) Para comer, seleccionaron un restaurante que ofrece un paquete de hamburguesa con papas y agua fresca por $37.50. Antes de salir a la Ciudad de México, el profesor decidió juntar el dinero de la comida de todo el grupo. ¿Qué cantidad debe reunir?

____

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Numérica:
$310.75
37
$37.50</td><td rowspan="2">Extra-matemático
Dinero</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Notaciones:
$310.75
37
$37.50</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver el problema.
Calcular:
¿Cuánto dinero debe reunir?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
• Resolver problemas sin usar calculadora, utilizando la representación numérica de números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública.</td></tr>
</table>

Código: G5 B2 C2 D24		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.		
Número del desafío: 24	**Nombre del desafío:** En partes iguales	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

24 En partes iguales

Consigna

En parejas, resuelvan los problemas.

1. Raúl, Manuel, Andrés y Mario quieren comprar un balón con valor de $150. ¿Cuánto le tocará poner a cada uno si se dividen el costo en partes iguales?

___

2. Don Fernando les dio $161 a sus cinco nietos para que se los repartieran en partes iguales, sin que sobrara nada. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

___

3. Si se pagaron $710 por 200 plumas iguales, ¿cuánto costó cada pluma?

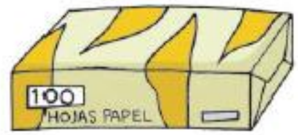
___

4. Luisa tiene 32 metros de listón para hacer moños. Si quiere elaborar 40 moños del mismo tamaño y usar todo el listón, ¿con qué cantidad de listón hará cada moño?

___

5. Si un paquete de 100 hojas iguales mide 1 cm de altura, ¿cuál es el grosor de una hoja?

____



6. La cooperativa de la escuela Leona Vicario entregará a sus 96 socios las ganancias de este año, que fueron de $5616. ¿Cuánto recibirá cada uno si el reparto es equitativo?

____

____

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Verbal:
Cinco
32 metros.

Numérica:
$150
$161
$710
200
32 metros
40
100
1 cm
96
$5616</td><td rowspan="2">Extra-matemático:

Dinero</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Términos:
Partes iguales.

Notaciones:
$150
$161
$710
200
32 metros
40
100
1 cm
96
$5616</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver problemas.
Calcular:
¿Cuánto le tocará poner a cada uno si se dividen el costo en partes iguales?

¿Cuánto le tocará a cada uno?

¿Con qué cantidad de listón hará cada moño?

¿Cuál es el grosor de una hoja?

¿Cuánto recibirá cada uno si el reparto es equitativo?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
• Resolver problemas mediante la destreza aritmética de dividir en partes iguales favoreciendo el término de la estructura conceptual partes iguales usando la representación de números enteros en un contexto extra-matemático en una situación pública.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B1 C3 D8</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 8</td><td>Nombre del desafío: El equipo de caminata</td><td>Estructura del libro alumno: Consigna 1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G5 B2 C3 D25</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 25</td><td>Nombre del desafío:
Repartir lo que sobra</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

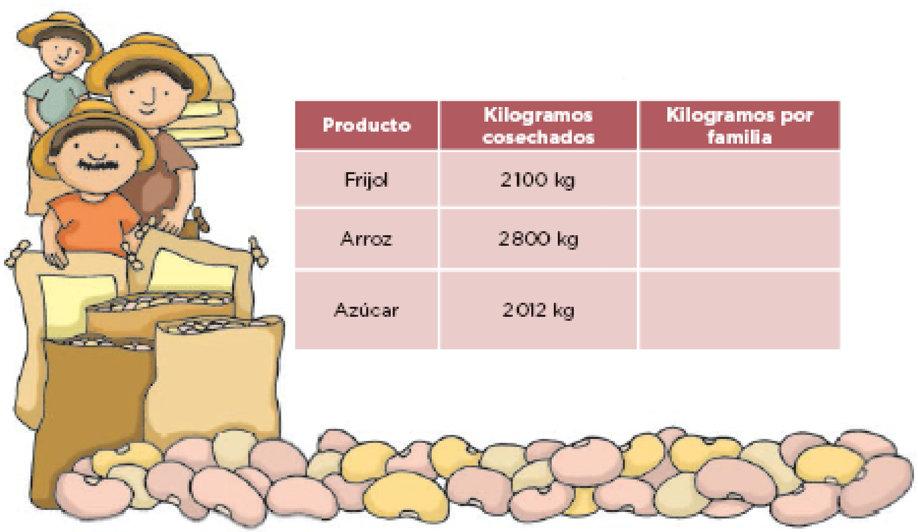
25 Repartir lo que sobra

Consigna

En parejas, resuelvan los problemas mediante el algoritmo usual de la división.

1. Un grupo de campesinos tiene un terreno de 3278 m^2 donde van a sembrar, en partes iguales, cinco tipos de granos diferentes. ¿Qué cantidad de terreno corresponde a cada tipo de grano?

2. La siguiente tabla muestra los productos que cosecharon 16 familias de ejidatarios. Complétenla considerando que se van a repartir los productos cosechados por partes iguales y sin que sobre nada.



Producto	Kilogramos cosechados	Kilogramos por familia
Frijol	2100 kg	
Arroz	2800 kg	
Azúcar	2012 kg	

<table>
<tr><td colspan="2">Estructura conceptual:</td><td>Sistemas de representación</td><td colspan="2">Análisis fenomenológico:</td></tr>
<tr><td>Campo conceptual</td><td>Campo procedimental</td><td>Tipo de representación</td><td>Contexto</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Verbal:
Cinco
Numérica:
3278
2100
2800
2012</td><td rowspan="2">Extra-matemático
Medida</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Términos:
Algoritmo usual de división.
Partes iguales.
Notaciones:
3278 m^2
2100 kg
2800kg
2012 kg

Resultados:
Resolver problemas mediante el algoritmo usual de la división.</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver problemas mediante el algoritmo usual de la división.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
• Resolver problemas usando el algoritmo usual de la división mediante la representación numérica de números enteros en un contexto extra-matemático en una situación pública.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B1 C3 D8</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 8</td><td>Nombre del desafío: El equipo de caminata</td><td>Estructura del libro alumno: Consigna 1</td></tr>
</table>

Unidad de Análisis:

8 El equipo de caminata

Consigna

En parejas resuelvan este problema.

El equipo de caminata de la escuela recorre un circuito de 4 km. El maestro está registrando en una tabla como la de abajo las vueltas y los kilómetros recorridos por cada uno de los integrantes. Analicen la tabla y complétenla.

Nombre	Rosa	Juan	Alma	Pedro	Víctor	Silvio	Eric	Irma	Adriana	Luis	María
Vueltas	1	2	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$2\frac{7}{8}$	0.75	1.25	1.3	2.6
km											

<table>
<tr><th colspan="2"><u>Estructura conceptual:</u></th><th><u>Sistemas de representación</u></th><th colspan="2"><u>Análisis fenomenológico:</u></th></tr>
<tr><th><u>Campo conceptual</u></th><th><u>Campo procedimental</u></th><th><u>Tipo de representación</u></th><th><u>Contexto</u></th><th><u>Situación</u></th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Nivel 1</u></td><td rowspan="2"><u>Numérica:</u>
4 km
1
2
5
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{5}$
$2\frac{7}{8}$
0.75
1.25
1.3
2.6</td><td rowspan="2"><u>Extra-matemático</u>
Kilómetros recorridos por cada vuelta de cada integrante.</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td><u>Hechos</u>
<u>Notaciones:</u>
4 km
1
2
5
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{5}$
$2\frac{7}{8}$
0.75
1.25
1.3
2.6</td><td><u>Destreza</u>
<u>Aritmética:</u>
Resolver el problema.
Calcular cuántos kilómetros recorre por cada vuelta.
Analizar la tabla y completarla.</td></tr>
<tr><td colspan="5"><u>Significado:</u>
• Resolver problemas usando la representación numérica de números enteros, fraccionarios y números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública.</td></tr>
</table>

Código: G6 B1 C3 D9		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.		
Número del desafío: 9	**Nombre del desafío:** El rancho de don Luis	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

9 El rancho de don Luis

Consigna

En parejas, resuelvan los problemas.

1. En el rancho de don Luis hay un terreno en el que siembran hortalizas que mide $\frac{1}{2}$ hm de ancho por $\frac{2}{3}$ hm de largo. Don Luis necesita saber el área del terreno para comprar las semillas y los fertilizantes necesarios. ¿Cuál es el área de este terreno?

2. En otra parte del rancho de don Luis hay un terreno de $\frac{5}{6}$ hm de largo por $\frac{1}{4}$ hm de ancho donde se cultiva durazno. ¿Cuál es el área de este terreno?

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><td>Campo conceptual</td><td>Campo procedimental</td><td>Tipo de representación</td><td>Contexto</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Numérica:
$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{4}$</td><td rowspan="2">Extra-matemático
Cosechar productos</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Notaciones:
$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{4}$</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver problemas.
Calcular:
¿Cuál es el área de este terreno?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
No se obtuvo significado debido a que el desafío se enfocó a las fracciones.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B1 C3 D9</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 10</td><td>Nombre del desafío: La mercería</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

10 La mercería

Consigna

Reunidos en equipos resuelvan el siguiente problema.

Guadalupe fue a la mercería a comprar 15.5 m de encaje blanco que necesita para la clase de costura. Si cada metro cuesta $5.60, ¿cuánto pagó por todo el encaje que necesita?

También pidió 4.75 m de cinta azul que le encargó su mamá. Si el metro cuesta $8.80 y su mamá le dio $40.00, ¿le alcanzará el dinero para comprarla?

¿Le falta o le sobra dinero? ¿Cuánto?

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Numérica:
15.5
5.60
4.75
8.80
40.00</td><td rowspan="2">Extra-matemático
Dinero</td><td rowspan="2">Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Notaciones:
15.5m
$5.60
4.75m
$8.80
$40.00</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver problemas.
Calcular:
¿Cuánto pagó por todo el encaje que necesita?
¿Le alcanzará el dinero para comprarla?

¿Le falta o le sobra dinero? ¿Cuánto?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:
Resolver problemas usando la división mediante la representación numérica de números con punto en un contexto extra-matemático en una situación pública.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B5 C3 D80</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 80</td><td>Nombre del desafío:
Repartos equitativos</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

80 Repartos equitativos

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas.

1. Cuando Raúl y Esperanza llegaron a una fiesta quedaban $\frac{3}{10}$ del pastel, así que se dividieron esa porción en partes iguales. ¿Qué parte del pastel completo le tocó a cada uno?

____

____

2. Cuatro amigos van a repartirse, por partes iguales y sin que sobre nada, $\frac{5}{8}$ de una pizza. ¿Qué parte del total, es decir, de la pizza completa, le tocará a cada uno?

____

____

3. Patricia tiene $\frac{3}{4}$ m de listón y lo va a cortar para hacer 4 moños iguales. ¿Qué cantidad de listón ocupará para cada moño?

____

____

Estructura conceptual:		**Sistemas de representación**	**Análisis fenomenológico:**	
Campo conceptual	**Campo procedimental**	**Tipo de representación**	**Contexto**	**Situación**
Nivel 1		**Numérica:** $\frac{3}{10}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$ 4	Extra-matemático Repartir una pizza, un pastel y un listón.	Pública
Hechos **Términos:** Partes iguales división **Notaciones:** $\frac{3}{10}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$ 4	**Destreza** **Aritmética:** Resolver los siguientes problemas. Calcular: ¿Qué parte del pastel completo le tocó a cada uno? ¿Qué parte del total, es decir, de la pizza completa, le tocará a cada uno? ¿Qué cantidad de listón ocupará para cada moño? Dividir una porción en partes iguales. Repartir en partes iguales, sin que sobre nada una porción de pizza.			

	Hacer moños iguales.			

Significado:

- No se obtuvo significado de los números decimales.

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B5 31 D81</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 81</td><td>Nombre del desafío:
¿Cuánto cuesta el jabón?</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1
Consigna 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

81 ¿Cuánto cuesta un jabón?

Consigna 1

En equipos, resuelvan este problema.

En el almacén La Abarrotera pusieron en oferta paquetes de jabón para tocador. De acuerdo con la información de la tabla, ¿cuál es la oferta que más conviene?

____

Marca	Número de jabones	Precio del paquete ($)
Cariño	5	17.50
Fresquecito	4	10.80
Darling	7	26.60
Siempre floral	6	32.40

Consigna 2

Individualmente, resuelve las siguientes operaciones.

a) 10.5 ÷ 4 =

b) 350.45 ÷ 8 =

c) 258.9 ÷ 10 =

d) 57 689.6 ÷ 100 =

e) 674 567 ÷ 1000 =

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Numérica:
5
4
7
6

17.50
10.80
26.60
32.40

Simbólica:
10.5 ÷ 4 =
350.45 ÷ 8 =
258.9 ÷ 10 =
57 689.6 ÷ 100 =
674 567 ÷ 1 000 =</td><td rowspan="2">Matemático
Extra-matemático
Dinero</td><td rowspan="2">Situación
Escolar
Pública</td></tr>
<tr><td>Hechos

Notaciones:
5
4
7
6

17.50
10.80
26.60
32.40

10.5 ÷ 4 =
350.45 ÷ 8 =
258.9 ÷ 10 =
57 689.6 ÷ 100 =
674 567 ÷ 1 000 =

Convenios:
El signo ÷ indica una división.

Resultados:
Realizar divisiones con el dividendo tenga números decimales.</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver problema.

Identificar:
¿Cuál es la oferta que más conviene?

Resolver las operaciones.</td></tr>
</table>

Significado:

- Resolver problemas usando la división mediante la representación numérica de fracciones, en un contexto extra-matemático en una situación pública.
- Resolver problemas mediante la división usando la representación simbólica y numérica en un contexto matemático mediante una situación escolar.

<table>
<tr><td colspan="3">Código: G6 B4 C2 D58</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial.</td></tr>
<tr><td>Número del desafío: 58</td><td>Nombre del desafío:
¿Cómo va la sucesión?</td><td>Estructura del libro alumno:
Consigna 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad de Análisis:</td></tr>
</table>

58 ¿Cómo va la sucesión?

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas. Pueden utilizar su calculadora.

1. Si una sucesión aumenta de 1.5 en 1.5, ¿cuáles son los primeros 10 términos si el primero es 0.5?

   ___

2. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de una sucesión si el inicial es $\frac{2}{3}$ y la diferencia entre dos términos consecutivos es $\frac{1}{6}$?

   ___

3. El primer término de una sucesión es $\frac{1}{3}$ y aumenta constantemente 0.5. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de la sucesión?

   ___

4. La regularidad de esta sucesión consiste en obtener el término siguiente multiplicando por 3 al anterior. Si el primer término es 1.2, ¿cuáles son los primeros 10 términos de la sucesión?

   ___

5. ¿Cuáles son los cinco términos siguientes de la sucesión 1, 3, 6, 10... si la regla para obtenerlos es: un término se obtiene sumando al anterior el número de su posición?

   ___

<table>
<tr><th colspan="2">Estructura conceptual:</th><th>Sistemas de representación</th><th colspan="2">Análisis fenomenológico:</th></tr>
<tr><th>Campo conceptual</th><th>Campo procedimental</th><th>Tipo de representación</th><th>Contexto</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel 1</td><td rowspan="2">Verbal:
Cinco

Numérica:
1.5
10
0.5

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}$

0.5
3
1.2
1, 3, 6, 10 …</td><td rowspan="2">Matemático</td><td rowspan="2">Escolar</td></tr>
<tr><td>Hechos

Términos:

Notaciones:
1.5
10
0.5

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}$

0.5
3
1.2
1, 3, 6, 10 …</td><td>Destreza

Aritmética:
Resolver los siguientes problemas.

Calcular:
Los primeros 10 términos de una sucesión.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significado:</td></tr>
</table>

Código: G6 B4 C2 D59		
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial.		
Número del desafío: 59	**Nombre del desafío:** Así aumenta	**Estructura del libro alumno:** Consigna 1
Unidad de Análisis:		

59 Así aumenta

Consigna

En parejas, escriban los términos que faltan y la regularidad que presenta cada sucesión.

a) $\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{9}{16}, \frac{13}{16}$, ___, ___, ___,...

Regularidad: ______________________

b) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$, ___, $\frac{5}{8}$, ___, ___,...

Regularidad: ______________________

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}$, ___, ___, ___,...

Regularidad: ______________________

d) 0.75, 1.5, 3, ______, 12, 24, ______, ______,...

Regularidad: ______________________

e) 2, 5, 10, 17, ______, ______, ______,...

Regularidad: ______________________

f) 0, 3, 8, 15, 24, ______, ______, 63, 80,...

Regularidad: ______________________

<table>
<tr><th colspan="2"><u>Estructura conceptual:</u></th><th><u>Sistemas de representación</u></th><th colspan="2"><u>Análisis fenomenológico:</u></th></tr>
<tr><th><u>Campo conceptual</u></th><th><u>Campo procedimental</u></th><th><u>Tipo de representación</u></th><th><u>Contexto</u></th><th><u>Situación</u></th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Nivel 1</u></td><td rowspan="2"><u>Numérica:</u>
$\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{9}{16}, \frac{13}{16}$

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \quad , \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}$

0-75, 1.5, 3, ____, 12; 24

2, 5, 10, 17

2, 5, 10, 17

0, 3, 8, 15, 24, ___, ___, 63, 80</td><td rowspan="2">Matemático</td><td rowspan="2">Escolar</td></tr>
<tr><td><u>Hechos</u>

<u>Términos:</u>

<u>Notaciones:</u>
$\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{9}{16}, \frac{13}{16}$, ___, ___, ___, …

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$, ___, $\frac{5}{8}$, ___, ___ …

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}$, ___, ___, …

0-75, 1.5, 3, ____, 12; 24, ___, ____ …

2, 5, 10, 17, ___, ____, ____ …

2, 5, 10, 17, ___, ___, ___ …

0, 3, 8, 15, 24, ___, ___, 63, 80, …

<u>Resultados:</u>
Escribir la regla de regularidad la sucesión.</td><td><u>Destreza</u>

<u>Aritmética:</u>
Escribir los términos que faltan en la sucesión.

Escribir la regularidad que presenta cada sucesión.</td></tr>
</table>

Calcular los términos de la sucesión.				
Significado:				