

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”



UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS



**Enseñanza y Aprendizaje del Concepto de Área en
Alumnos de Primer Grado de Secundaria,
Mediante el Uso de Material Didáctico**

Para obtener el grado de
Maestra en Matemática Educativa
con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

Brenda Lizbeth Rodríguez Ortiz

Directoras del proyecto:

M. C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Dra. Elvira Borjón Robles

Zacatecas, Zac., abril de 2024

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías
por el apoyo económico brindado mediante la
beca con número de registro de CVU 1097610,
para la realización de mis estudios de Maestría.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 20 del mes de Diciembre del año 2023, la que suscribe Brenda Lizbeth Rodríguez Ortiz, alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 20206072; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado “Enseñanza y aprendizaje del concepto de área en alumnos de primer grado de secundaria, mediante el uso de material didáctico” bajo la dirección de la M. C. Nancy Janeth Calvillo Guevara y Dra. Elvira Borjón Robles.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad de este. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Brenda Lizbeth Rodríguez Ortiz

A QUIEN CORRESPONDA

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre “Enseñanza y aprendizaje del concepto de área en alumnos de primer grado de secundaria, mediante el uso de material didáctico” y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Brenda Lizbeth Rodríguez Ortiz egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 20 de diciembre del 2023.

M. C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Dra. Elvira Borjón Robles

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Dios y a la vida por permitirme vivir esta experiencia, por ponerme obstáculos y lograr ver que soy capaz de salir adelante a pesar de que muchas veces pensé en renunciar y que todo sueño se debe lograr con sacrificios y esfuerzo.

A mis padres, que siempre me han brindado su apoyo incondicional en cualquier situación en la que me encuentre con mucho amor, todo lo que soy es gracias a ellos, pues nunca me han soltado de la mano.

Agradezco profundamente a mi tutora la maestra Nancy Janeth Calvillo Guevara por su dedicación y paciencia, sin su apoyo, orientación y consejo no hubiera podido llegar hasta donde llegué. Gracias por ser de las maestras con más sentido humanístico, pues siempre me estuvo apoyando a pesar de que había momentos en los que ni yo misma me veía capaz.

De igual manera agradezco a mi tutora Dra. Elvira Borjón Robles por su apoyo y orientación en la dirección de este documento, pues su conocimiento y experiencia me permitió tener un mejor panorama hacia dónde ir.

A todos mis docentes, pues cada uno de diferente manera me mostró que puedo enfrentarme a todos los retos que se me pongan.

A mis compañeros, a pesar de que nos vimos pocas veces durante nuestros estudios cada uno aportó para que yo pudiera mejorar como docente.

A Francisco, por siempre apoyarme, comprenderme y tenerme paciencia en los momentos más críticos vividos en el estudio de esta maestría.

Finalmente quiero agradecer a quien vino a revolucionar mi vida, mi pequeña hija Romina, quien, aunque aún no llegaba a este mundo me acompañó durante nueve meses en la barriga tomando clases y luego haciéndolo en mis brazos. Amor, eres la inspiración más grande que tengo en la vida y por quien me levantaré una y mil veces para mostrarte que si es posible lograr lo que te propongas, que solo hay una vida para hacerlo, que las cosas no se dejan para después, que no está mal tener miedo y que hay personas buenas que pueden ayudarte.

Resumen

Este trabajo surge a partir de identificar desde la experiencia como estudiante, los años de práctica como docente y un análisis realizado de diferentes trabajos, que las matemáticas son vistas como un producto acabado y no como un proceso de descubrimiento, aunado a que dentro de la didáctica tradicional se favorece la memorización y la mecanización obligando a los alumnos a aprender conceptos y fórmulas sin un razonamiento ni una comprensión.

De manera particular, la didáctica de la Geometría es una de las más complejas dentro de las ramas de las matemáticas. Dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de esta materia se encuentran diferentes errores, por ejemplo, al resolver un problema de manera algebraica en el que se requiera calcular perímetros, áreas y volúmenes, algunos estudiantes no identifican cuál fórmula aplicar, o tienen dificultades para interpretar qué es lo que dice un problema (Araya y Alfaro, 2010; Gutiérrez y Jaime, 1996).

Por otra parte, diversos autores defienden la idea de que el uso de materiales didácticos en la enseñanza de contenidos geométricos desarrolla diferentes habilidades para lograr una comprensión del contenido, tales como visualizar, pensar críticamente, argumentar, validar, etc., (Lastra, 2005; Báez e Iglesias, 2007; Jones, 2003). Así, la Geometría representa un área importante de la matemática dado que favorece actividades como la visualización y la argumentación, que resultan ser de gran importancia para la generación de un pensamiento matemático.

Ante este panorama, creemos que las dificultades y errores que tienen los estudiantes al trabajar con el concepto de área en todos los niveles de educación dependerán de la experiencia vivida en el proceso, lo cual puede afectar en su construcción. Por tal motivo, el objetivo de esta investigación es diseñar y adaptar una situación didáctica que incorpore material didáctico para ayudar a los estudiantes a mejorar los aprendizajes relacionados con el concepto de área en el primer grado de secundaria.

Como marco teórico se utiliza la Teoría de Situaciones Didáctica (Brousseau, 1986) la cual se centra en la elaboración de situaciones didácticas creadas por el profesor con una intencionalidad, en la que el objeto matemático es construido por los estudiantes. Como metodología se propone la Ingeniería Didáctica desarrollada por Artigue (1995).

El principal resultado señala que con la implementación de la situación didáctica mediante la manipulación del material didáctico los estudiantes de primer grado de secundaria mejoraron su conocimiento con respecto al concepto de área en el sentido de que, al recortarlo, tocarlo, acomodarlo y pegarlo, identificaron al área como la relación con la superficie que se toma como la unidad y que recubre a las figuras completamente.

Palabras clave: Área, errores, geometría, material didáctico, situación didáctica.

Abstract

This work arises from identifying from the experience as a student, the years of practice as a teacher and an analysis carried out of different works, that mathematics is seen as a finished product and not as a discovery process, coupled with the fact that within the Traditional didactics favor memorization and mechanization, forcing students to learn concepts and formulas without reasoning or understanding.

In particular, the didactics of Geometry is one of the most complex within the branches of mathematics. Within the teaching and learning process of this subject there are different errors, for example, when solving a problem algebraically in which it is required to calculate perimeters, areas and volumes, some students do not identify which formula to apply, or have difficulties interpreting what does a problem say (Araya and Alfaro, 2010; Gutiérrez and Jaime, 1996).

On the other hand, several authors defend the idea that the use of didactic materials in the teaching of geometric contents develops different skills to achieve an understanding of the content, such as visualizing, thinking critically, arguing, validating, etc., (Lastra, 2005; Báez and Iglesias, 2007; Jones, 2003). Thus, Geometry represents an important area of mathematics since it favors activities such as visualization and argumentation, which turn out to be of great importance for the generation of mathematical thought.

Given this panorama, we believe that the difficulties and errors that students have when working with the concept of area at all levels of education will depend on the experience in the process, which may affect its construction. For this reason, the objective of this research is to design and adapt a didactic situation that incorporates didactic material to help students improve learning related to the concept of area in the first grade of secondary school.

As a theoretical framework, the Theory of Didactic Situations (Brousseau, 1986) is used, which focuses on the elaboration of didactic situations created by the teacher with an intention, in which the mathematical object is built by the students. As a methodology, the Didactic Engineering developed by Artigue (1995) is proposed.

The main result indicates that with the implementation of the didactic situation through the manipulation of the didactic material, the first grade students of secondary school improved their knowledge regarding the concept of area in the sense that, by cutting it, touching it, arranging it and pasting it, they identified to the area as the relationship with the surface that is taken as the unit and that completely covers the figures.

Key Words: Area, errors, geometry, didactic material, didactic situation.

ÍNDICE

Resumen	v
Abstract.....	vi
Introducción.....	xiii
Capítulo I. Planteamiento del problema de investigación.....	1
1.1 Motivación	2
1.2 Antecedentes.....	3
1.2.1 <i>La importancia de la Geometría</i>	3
1.2.2 <i>Dificultades y Errores</i>	5
1.2.3 <i>Propuestas para el aprendizaje de la geometría</i>	9
1.3 Reflexión	12
1.4 Planteamiento del problema de desarrollo profesional	13
1.4.1 <i>Problemática</i>	13
1.4.2 <i>Problema</i>	14
1.4.3 <i>Pregunta de desarrollo profesional</i>	14
1.4.4 <i>Supuesto</i>	14
1.4.5 <i>Objetivo general</i>	15
1.4.5.1 <i>Objetivos particulares</i>	15
1.4.6 <i>Justificación</i>	15
Capítulo II. Fundamentos Teóricos	17
2.1 Fundamentos Matemáticos	18
2.2 Uso de materiales didácticos para el aprendizaje de la geometría.....	21
2.3 Teoría de Situaciones Didácticas	23
2.4 Metodología	30
2.4.1 <i>La ingeniería didáctica</i>	31
2.4.2 <i>Análisis preliminares</i>	32
2.4.3 <i>Concepción y análisis a priori</i>	33
2.4.4 <i>Experimentación</i>	35
2.4.5 <i>Análisis a posteriori y validación</i>	35
Capítulo III. Análisis Preliminares, concepción y análisis apriori	37
3.1 Análisis preliminares	38

3.1.1 <i>Análisis epistemológico del concepto de área</i>	38
3.1.2 <i>Análisis didáctico</i>	40
3.1.3 <i>Análisis preliminar cognitivo del concepto de área</i>	48
3.2 <i>Concepción de la situación didáctica</i>	59
3.2.1 <i>Actividad I</i>	59
3.2.2 <i>Actividad II</i>	61
3.2.3 <i>Actividad III</i>	63
3.2.3 <i>Actividad IV</i>	65
3.3 <i>Análisis a priori</i>	67
3.3.1 <i>Actividad I</i>	67
3.3.2 <i>Actividad II</i>	71
3.3.3 <i>Actividad III</i>	74
3.3.4 <i>Actividad IV</i>	76
3.3.5 <i>Aplicación preliminar de la situación didáctica</i>	78
Capítulo IV. <i>Experimentación, Análisis a posteriori y Validación</i>	83
4.1 <i>Experimentación</i>	84
4.2 <i>Análisis a posteriori</i>	84
4.3 <i>Actividad I</i>	84
4.3.1 <i>Situación de acción (Actividad I)</i>	85
4.3.2 <i>Situación de formulación (Actividad I)</i>	86
4.3.3 <i>Situación de validación (Actividad I)</i>	97
4.3.4 <i>Situación de institucionalización (Actividad I)</i>	99
4.4 <i>Actividad II</i>	100
4.4.1 <i>Situación de acción (Actividad II)</i>	100
4.4.2 <i>Situación de formulación (Actividad II)</i>	102
4.4.3 <i>Situación validación (Actividad II)</i>	110
4.4.4 <i>Situación de institucionalización (Actividad</i>	112
4.5 <i>Actividad III</i>	112
4.5.1 <i>Situación de acción (Actividad III)</i>	112
4.5.2 <i>Situación de formulación (Actividad III)</i>	113
4.5.3 <i>Fase de validación (Actividad III)</i>	117
4.5.4 <i>Situación de institucionalización (Actividad III)</i>	121
4.6 <i>Actividad IV</i>	121

4.6.1 Situación de acción (Actividad IV)	121
4.6.2 Situación de Formulación (actividad IV)	122
4.6.3 Situación de Validación (actividad IV)	127
4.6.4 Situación de institucionalización (Actividad IV).	129
4.7 Fase de Validación	129
4.7.1 Validación – Situación de acción (actividad I)	130
4.7.2 Validación – Situación de formulación (actividad I)	130
4.7.3 Validación – Situación de validación (actividad I)	131
4.7.4 Validación – Situación de institucionalización (actividad I)	131
4.7.5 Validación – Situación de acción (actividad II)	132
4.7.6 Validación – Situación de formulación (actividad II)	132
4.7.7 Validación – Situación de validación (actividad II)	132
4.7.8 Validación – Situación de institucionalización (actividad II)	132
4.7.9 Validación – Situación de acción (actividad III)	133
4.7.10 Validación – Situación de formulación (actividad III)	133
4.7.11 Validación – Situación de validación (actividad III)	133
4.7.12 Validación – Situación de institucionalización (actividad III)	133
4.7.13 Validación – Situación de acción (actividad IV)	134
4.7.14 Validación – Situación de formulación (actividad IV)	134
4.7.15 Validación – Situación de validación (actividad IV)	134
4.7.16 Validación - Situación de institucionalización (actividad IV)	135
Reflexiones Finales	136
Referencias	143
Anexos	147

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Avance de los estudios en cada fase.....	11
Figura 2. Fórmulas para calcular el área de figuras trabajadas en primero de secundaria.	19
Figura 3. Obteniendo el área de un rectángulo	20
Figura 4. Transposición externa e interna	24
Figura 5. Figura irregular	27
Figura 6. <i>Polígono dividido en triángulos</i>	39
Figura 7. <i>Método exhaustivo</i>	39

Figura 8. <i>Actividad 1 de inicio propuesta por el libro</i>	41
Figura 9. <i>Actividad 2 propuesta por el libro para el tratamiento del rectángulo</i>	42
Figura 10. <i>Actividad 2 propuesta por el libro para el tratamiento del rectángulo</i>	43
Figura 11. <i>Actividades propuestas por el libro para el tratamiento del romboide y trapecio</i>	44
Figura 12. <i>Actividades propuestas por el libro para el tratamiento del trapecio y cuadrado</i>	45
Figura 13. <i>Actividades propuestas por el libro para el tratamiento del trapecio y cuadrado</i>	46
Figura 14. <i>Actividad para determinar fórmula del área para diferentes figuras</i>	47
Figura 15. Resultados del cuestionario a la pregunta 1.	48
Figura 16. Resultados del cuestionario a la pregunta 2.	49
Figura 17. Resultados del cuestionario a la pregunta 3.	49
Figura 18. Resultados del cuestionario a la pregunta 3 del A1.....	50
Figura 19. Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 4.	50
Figura 20. Resultados del cuestionario a la pregunta 4.	51
Figura 21. Resultados del cuestionario a la pregunta 5.	51
Figura 22. Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 5.	51
Figura 23. <i>Resultados del cuestionario a la pregunta 6</i>	52
Figura 24. Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 6.	53
Figura 25. Resultados del cuestionario a la pregunta 7	53
Figura 26. Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 7.	53
Figura 27. Resultados del cuestionario a la pregunta 8.	54
Figura 28. Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 8.	55
Figura 29. Resultados del cuestionario a la pregunta 9.	55
Figura 30. Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 9.	56
Figura 31. Resultados del cuestionario a la pregunta 10.	56
Figura 32. Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 10.	57
Figura 33. <i>Figuras de las consigna 1</i>	60
Figura 34. <i>Figura de la consigna 2</i>	62
Figura 35. <i>Figuras de la consigna 3</i>	64
Figura 36. <i>Figura de la consigna 4-1</i>	65
Figura 37. <i>Figura de la consigna 4-2</i>	66
Figura 38. <i>Figura de la consigna 4-3</i>	66
Figura 39. <i>Análisis a priori, figuras de las consigna 1</i>	69
Figura 40. <i>Análisis a priori, figuras de las consigna 2</i>	72
Figura 41. <i>Análisis a priori, figuras de las consigna 3</i>	74
Figura 42. <i>Análisis a priori, figuras de las consigna 4</i>	76
Figura 43. Respuestas de los estudiantes a la consigna 1 de la actividad I.....	79
Figura 44. Respuestas de los alumnos, actividad I.	79
Figura 45. Procedimiento de los alumnos, actividad II.	80
Figura 46. Procedimiento de los alumnos para la actividad III.	81
Figura 47. Resultados de los alumnos.....	82
Figura 48. Equipo 1 y 2 comenzando a manipular el material.	86
Figura 49. Estrategia para cubrir los polígonos del equipo 1.	88
Figura 50. Polígono 1.....	88
Figura 51. <i>Producto polígono 1, equipo 2</i>	89

Figura 52. <i>Polígono 2</i>	89
Figura 53. <i>Producto polígono 2, equipo 4</i>	89
Figura 54. <i>Polígono 3</i>	90
Figura 55. <i>Producto polígono 3, equipo 1</i>	90
Figura 56. <i>Polígono 4</i>	90
Figura 57. <i>Producto polígono 4, equipo 3</i>	90
Figura 58. <i>Polígono 5</i>	91
Figura 59. <i>Producto polígono 5, equipo 4</i>	91
Figura 60. <i>Polígono 6</i>	91
Figura 61. <i>Producto polígono 6, equipo 1</i>	91
Figura 62. <i>Polígono 7 y 8</i>	92
Figura 63. <i>Producto polígono 7 y 8, equipo 3</i>	92
Figura 64. <i>Polígono 9</i>	92
Figura 65. <i>Producto polígono 9, equipo 4</i>	93
Figura 66. <i>Equipo 2 determinando el área de los polígonos</i>	93
Figura 67. <i>Respuesta a la pregunta 1 del equipo 1</i>	94
Figura 68. <i>Respuesta a la pregunta 2, equipo 3 y 4</i>	95
Figura 69. <i>Respuesta a la pregunta 3 del equipo 4</i>	96
Figura 70. <i>Respuestas a la pregunta 4 y 5 del equipo 3</i>	96
Figura 71. <i>Alumnos explorando el material de la actividad 2</i>	101
Figura 72. <i>Alumnos formando figuras con el tangram</i>	102
Figura 73. <i>Mensaje creado por el equipo 1, actividad 2</i>	103
Figura 74. <i>Mensaje del equipo 2</i>	104
Figura 75. <i>Mensaje creado por el equipo 3</i>	106
Figura 76. <i>Polígono construido por el equipo 2</i>	108
Figura 77. <i>Polígono construido por el equipo 3</i>	108
Figura 78. <i>Repuestas a la pregunta 1 y 2 del equipo 3</i>	109
Figura 79. <i>Respuesta a la pregunta 3 y 4 del equipo 2</i>	109
Figura 80. <i>Respuesta a la pregunta 5 del equipo 1</i>	110
Figura 81. <i>Equipo 1 empalmando los polígonos</i>	114
Figura 82. <i>Equipo 2 tomando medias de los polígonos para obtener su área</i>	115
Figura 83. <i>Respuesta del equipo 1 a la pregunta 1</i>	116
Figura 84. <i>Respuesta a la pregunta 2 del equipo 3</i>	116
Figura 85. <i>Respuesta a la pregunta 3 del equipo 3</i>	116
Figura 86. <i>Respuesta a la pregunta 4, del equipo 2</i>	117
Figura 87. <i>Respuesta a la pregunta 5, equipo 1</i>	117
Figura 88. <i>Equipo 1 en el pizarrón</i>	118
Figura 89. <i>Equipo 3 exponiendo su procedimiento</i>	120
Figura 90. <i>Respuesta al problema 1, equipo 3</i>	123
Figura 91. <i>Respuesta al problema 1, equipo 2</i>	124
Figura 92. <i>Respuesta del equipo 1, al problema 2</i>	125
Figura 93. <i>Respuesta al problema 2, equipo 2</i>	125
Figura 94. <i>Respuesta al problema 3, equipo 3</i>	126
Figura 95. <i>Respuesta al problema 3, equipo 2</i>	127

Figura 96. Respuesta de un alumno a la pregunta ¿Qué es el área?	129
---	-----

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Métodos y técnicas	35
Tabla 2 Variables macrodidácticas de la actividad I.....	61
Tabla 3. Variables macrodidácticas de la actividad II.....	63
Tabla 4. Variables macrodidácticas de la actividad III.	64
Tabla 5. Variables macrodidácticas de la actividad IV.....	67
Tabla 6. Resultados de la actividad 1.....	97

Introducción

La Geometría es una de las ramas de la matemática más complejas y con mayor presencia dentro del contexto. Sin embargo, dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de esta materia se encuentran diferentes errores en los procedimientos realizados por los alumnos, por ejemplo, al resolver un problema algebraicamente, al calcular perímetros, áreas y volúmenes, debido a que los estudiantes no identifican cuál fórmula aplicar, así como dificultades para interpretar qué es lo que dice un problema (Araya y Alfaro, 2010; Gutiérrez y Jaime (1996).

Una posible causa de estos errores es lo que mencionan Araya y Alfaro (2010), pues señalan que, en el sistema de educación formal en nivel básico, los contenidos de Geometría “son presentados al estudiantado como el producto acabado de la actividad matemática” (p. 125) limitando a los alumnos de una geometría “basada en la búsqueda, descubrimiento y comprensión de los conceptos y propiedades geométricas en función de explicarse aspectos del mundo en que vive” (Bressan, Bogisic y Crego, 2000 citados en Villarroel y Sgreccia, 2011, p. 4).

Por otra parte, diversos autores defienden la idea de que el uso de materiales didácticos en la enseñanza de contenidos geométricos desarrolla diferentes habilidades para lograr una comprensión del contenido, tales como visualizar, pensar críticamente, argumentar, validar, etc., (Lastra, 2005; Báez e Iglesias, 2007; Jones, 2003). Así, la Geometría representa un área importante de la matemática dado que favorece actividades como la visualización y la argumentación, que resultan ser de gran importancia para la generación de un pensamiento matemático.

Ante este panorama, este trabajo está centrado en el diseño, adaptación e implementación de una situación didáctica para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de área, utilizando como apoyo material didáctico concreto con el fin de que los estudiantes consigan mejorar su conocimiento con respecto al concepto. Por tal motivo se decidió plantear el siguiente objetivo general: Diseñar y adaptar una situación didáctica que incorpore material didáctico que ayude a los estudiantes a mejorar los aprendizajes relacionados con el concepto de área en el primer grado de secundaria.

Como marco teórico se utiliza la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau (1986) durante los años setenta, la cual se centra en la elaboración de situaciones didácticas creadas por el profesor con una intencionalidad, en la que el objeto matemático es construido por los estudiantes. Como metodología se propone la Ingeniería Didáctica desarrollada por Artigue. A continuación, se describe la estructura de este trabajo:

En el primer capítulo se mencionan los motivos que nos orientaron a plantear y desarrollar la presente investigación, así como también el análisis que se realizó de las diferentes investigaciones en torno a la importancia del estudio de la geometría, las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje y algunas propuestas didácticas.

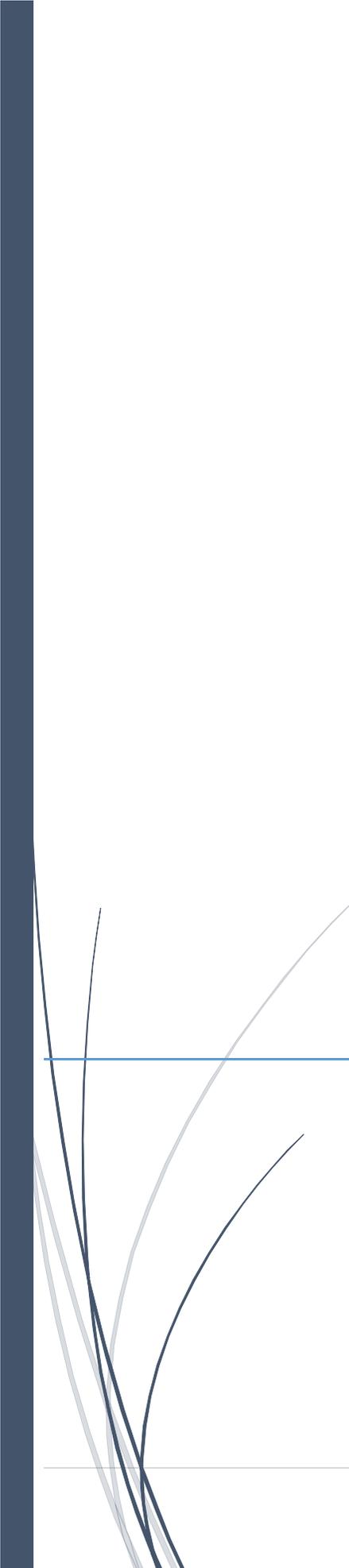
En el capítulo dos se presenta los fundamentos teóricos que guían nuestra investigación. Se comienza rescatando los conceptos que se involucran en la enseñanza del área en nivel secundaria, después se destaca la importancia de la implementación de los materiales didácticos. Proseguimos analizando la teoría de situaciones didácticas como modelo en esta investigación, para finalizar con la Ingeniería Didáctica como metodología, la cual Artigue (1995, p.36) señala como “un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase”.

En el capítulo tres, se realizan los análisis preliminares, para identificar la manera en la que el concepto aparece, así como también el tratamiento que se le da en los libros de texto y los conocimientos previos que tienen los estudiantes con respecto al tema. Posteriormente se presenta la concepción de la situación didáctica y se establecen en el análisis a priori algunas hipótesis relacionadas con la implementación de la situación didáctica.

En el capítulo cuatro, se abordan aspectos relacionados con la implementación de la situación didáctica, así como el análisis de ésta y la validación, realizando una comparación entre las hipótesis y lo que realmente sucedió.

Los resultados obtenidos en esta investigación nos muestran que los alumnos de primer grado de secundaria mejoraron su conocimiento con respecto al concepto de área mediante la manipulación del material didáctico, ya que, al recortarlo, tocarlo, acomodarlo y pegarlo, identificaron al área como la relación con otra superficie que se toma como la unidad y que recubre a las figuras completamente.

Finalmente, esta investigación podría servir para que profesores de nivel básico puedan utilizarla para dar tratamiento a este tópico, pues se puede replicar al no requerir de material costoso ni difícil y es útil para que los estudiantes puedan mejorar su conocimiento con respecto al concepto de área, ya que los resultados dan muestra de la funcionalidad de la situación didáctica.



Capítulo I. Planteamiento del problema de investigación

En este capítulo se presentan los motivos que orientaron esta investigación, donde se destaca la importancia con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, de manera específica del concepto área, así como también algunos errores y dificultades en su tratamiento y algunas propuestas para la enseñanza. Finalmente, se plantean la problemática, problema y objetivos que se pretenden alcanzar.

1.1 Motivación

Durante mi vida estudiantil y mis años de experiencia como docente frente a grupo, he podido diferenciar entre enunciar la definición y comprender un concepto matemático y que uno o el otro repercutirán en el desempeño del estudiante en el salón de clases y en su vida diaria. He observado que resulta difícil para los alumnos el estudio de los objetos matemáticos, pues intervienen múltiples factores que van desde estilos de aprendizaje, su conocimiento previo, intereses personales, los planes y programas de estudio, los contextos familiares, sociales y económicos, las ideologías e intervenciones de los profesores, etc.

En este sentido, la Geometría es una de las áreas de las matemáticas más enriquecedoras para el aprendizaje, pues para nivel secundaria, además de realizar procedimientos y trabajar con conceptos, le permite al alumno “comprender, descubrir y representar el entono en el que viven” (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017, p. 167). Sin embargo, de manera personal, al cursar este nivel, me resultaba difícil, pues podía memorizar fórmulas o conceptos con facilidad para hacer ejercicios, pero al momento de aplicarlos a problemas, no lograba identificar cuál debía utilizar ni podía establecer una relación entre los datos del problema.

Debido a esta experiencia, al cursar mi último año de estudios de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemática en el Centro de Actualización del Magisterio en Zacatecas, centré mi trabajo de grado en el uso de materiales didácticos buscando una manera en la que mis estudiantes no se quedaran solo en la memorización.

Dentro de mi propuesta utilicé la oca matemática y el juego de geometría y hojas de trabajo con diferentes figuras, en la cual analicé el impacto que tuvieron en el estudio de temas como el azar. A partir de la revisión de la propuesta, identifiqué que es más fácil abordar los temas con algún apoyo (materiales didácticos) y que, con ellos, los alumnos utilizan sus conocimientos previos en la construcción del contenido que se aborda, además aplican los conceptos.

De esta manera es que considero que la Geometría es una de las ramas de las matemáticas que permiten la aplicación de una variada gama de materiales didácticos en sus temas y que a la fecha existen muchos de ellos al alcance de todos, sin embargo,

se siguen realizando prácticas tradicionales donde no se incorporan. Esto se puede deber al desconocimiento o falta de información para los docentes, esta es la razón por la cual se pretende utilizar en este trabajo materiales didácticos como apoyo para trabajar el concepto de área, buscando realizar algún aporte que les ayude a reflexionar sobre la importancia de implementar estos recursos en el salón de clases y los beneficios que trae consigo hacerlo.

1.2 Antecedentes

En este apartado se presenta la revisión y el análisis de trabajos e investigaciones relacionadas con el tema de interés. De manera inicial se comenzó con una búsqueda en fuentes como repositorios de revistas matemáticas (Redalyc, Dialnet, Scielo), además de búsquedas en Google Académico mediante el uso de palabras clave tales como: “geometría” “material didáctico” “dificultades en el aprendizaje de la geometría”, “área”, etc.

Para su reporte, este apartado se ha dividido en tres categorías: en las que se describe la postura de diferentes autores ante la importancia del estudio de la geometría dentro del desarrollo académico de los estudiantes; la segunda muestra investigaciones relacionadas con los “errores y dificultades” en el aprendizaje de la geometría, y en particular del área, finalmente se analizan algunas propuestas didácticas entorno a su enseñanza.

1.2.1 La importancia de la Geometría

La Geometría resulta de gran importancia dentro del desarrollo de los individuos, puesto que permite adquirir diferentes habilidades que pueden ser aplicadas dentro del contexto social. Según Bressan, Bogisic y Crego (2000 citados en Villarroel y Sgreccia, 2011), señalan su enseñanza en dos orientaciones:

Lógica-racional, la cual define a la Geometría como una teoría axiomática que se desarrolla bajo leyes rigurosas de razonamiento deductivo, o la más intuitiva y experimental, basada en la búsqueda, descubrimiento y comprensión por parte del sujeto que aprende de los conceptos y propiedades geométricas en función de explicarse aspectos del mundo en que vive. (p. 4)

Dentro del nivel secundaria la enseñanza de la geometría intuitiva y experimental crea las posibilidades y atiende necesidades cognitivas de los alumnos. Asimismo “el docente debe saber que su meta en este nivel es crear las condiciones para que el alumno pueda avanzar, en estudios posteriores, hacia la lógica-racional” (Villarroel y Sgreccia, 2011, p. 76). Sin embargo, se puede observar en los salones de clases, que no se comprende la relación entre estas dos vertientes, pues su enseñanza se enfoca en la memorización de fórmulas y conceptos, lo que complica en niveles más avanzados la comprensión de los axiomas obstaculizando llegar a una lógica-racional.

Al respecto, Lastra (2005) señala que “la Geometría como cuerpo de conocimientos permite analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales, que favorecen la comprensión y admiración por el entorno natural” (p. 2). Además, permite la estimulación de la creatividad y una actitud positiva hacia las matemáticas en los estudiantes y “en los profesores utilizar estrategias que usen el plegado, la construcción, el dibujo, modelamientos, software, variadas actividades que enriquezcan los procesos en el aula” (Lastra, 2005, p. 2).

En este sentido Báez e Iglesias (2007) mencionan que el estudio de la Geometría en todos los niveles educativos ha sido durante siglos uno de los pilares de formación académica del individuo, debido a su aplicación en diferentes contextos y su capacidad formadora del razonamiento lógico. Además “contribuye a ayudar a los estudiantes a desarrollar las habilidades de visualización, pensamiento crítico, intuición, perspectiva, resolución de problemas, conjeturas, razonamiento deductivo, argumento lógico y prueba” (Jones, 2003, p. 125).

En la investigación de Guillén, González y García (2009) se reconoce a “la Geometría como una disciplina que tiene gran relación y aplicación en el mundo que nos rodea y su estudio permite desarrollar el razonamiento lógico, la percepción espacial y la visualización” (p. 2).

Con respecto a lo mencionado, Peña (2010) señala que es una parte importante de la cultura del hombre, pues considera que no es fácil encontrar contextos en que ésta no aparezca de forma directa o indirecta. Menciona además que “la podemos encontrar en actividades variadas desde el deporte, la arquitectura, la pintura o la jardinería donde se sirven de la utilización, consciente o no, de procedimientos geométricos” (p. 60). Por ejemplo, se utiliza para realizar diseños de canchas, casas, obras de arte o formas de los jardines.

Sandoval, Lupiáñez y Moctezuma (2016) en su trabajo, referente al conocimiento matemático para la enseñanza de prismas, destacan que “la geometría posibilita en los estudiantes el estudio de las figuras del espacio y sus relaciones. El espacio geométrico es construido a partir de la exploración empírica que parte de un espacio real y llevado hacia una abstracción geométrica” (p. 482).

Lo expuesto anteriormente, da un panorama general referente a la importancia de la Geometría. Como la mayoría de los autores mencionan, podemos identificar que dentro del estudio de la Geometría en el nivel secundaria se favorece el desarrollo de habilidades que los estudiantes utilizarán dentro de su contexto social a través de variadas actividades, facilitando la construcción de bases para una estructura lógica de esta disciplina.

1.2.2 Dificultades y Errores

En este apartado se abordan algunas dificultades y errores que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en general, en el concepto área de manera específica y las posibles causas que los ocasionan desde la postura de varios autores.

1.2.2.1 Dificultades y errores en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Araya y Alfaro (2010) señalan que, en el sistema de educación formal en nivel básico, los contenidos de Geometría “son presentados al estudiantado como el producto acabado de la actividad matemática” (p. 125), debido a la poca oportunidad que se les da a los estudiantes de involucrarse en el proceso. Derivado de esta forma de enseñanza-aprendizaje, algunos autores han identificado los errores y dificultades en su tratamiento, cabe señalar que los alumnos pudieran tenerlas antes de comenzar a estudiarla.

Además, estos autores realizaron un estudio con el objetivo de identificar las percepciones que tienen los estudiantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. En su desarrollo, mediante un cuestionario, se recabó información desde la opinión de los alumnos hasta las dificultades que presentan en el tratamiento de la disciplina. De los resultados obtenidos se encontró que las principales dificultades que los alumnos presentan son: “al resolver un problema algebraicamente; calcular perímetros, áreas y volúmenes, debido a que no identifican cuál fórmula aplicar y dificultad para interpretar qué es lo que dice un problema” (Araya y Alfaro, 2010, p. 140).

En este trabajo se concluye mencionando que la causa de estas dificultades se debe a que la geometría se presenta “como una “receta” de definiciones, fórmulas y teoremas totalmente alejada de su realidad y donde los ejemplos y ejercicios no poseen ninguna relación con su contexto” (p. 140) y que “esto se debe, principalmente, a la forma tradicional de enseñanza en la que se desarrolla la disciplina en las aulas de secundaria, los principales recursos utilizados son pizarra, tiza o pilot y borrador, material fotocopiado y libro de texto” (p. 140).

En este mismo sentido, Barrantes y Zapata (2008) analizan dificultades de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría puntualizando las siguientes:

- La simbología visual del concepto, puesto que se presenta a los alumnos imágenes limitadas de los conceptos geométricos y en una sola representación. Este tipo de dificultades también se atribuyen a la falta de recursos o materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno, pues se suele limitar al uso del libro de texto.
- Distractores de orientación (Vinner y Hershkowitz, 1983, citados en Barrantes y Zapata, 2008), los cuales son definidos como “aquellas propiedades visuales

que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto”. Por ejemplo, en los libros de texto los triángulos suelen presentarse apoyando la base con el lado horizontal del borde del libro, las líneas paralelas se presentan de la misma manera, etc., logrando con ello que los alumnos cometan errores y asocien estas características visuales que no se relacionan con la definición del concepto geométrico.

- Los distractores de estructuración son otra de las dificultades que presentan los autores, éstos hacen referencia a una débil presentación del concepto donde elementos o propiedades de este son excluidos en su enseñanza. A veces los alumnos tienen ideas erróneas que se desarrollan con el proceso de aprendizaje y que tienen incidencia durante varios cursos. Un ejemplo alusivo a estos distractores es la presentación de los triángulos isósceles con los lados iguales siempre más grandes que el lado desigual y siempre apoyado sobre este lado.
- Un error que se presenta es a partir de los nombres de las figuras, donde los alumnos solo son capaces de identificar como ciertas a aquellas con las que han trabajado. Por ejemplo, nombrar a los polígonos regulares hasta el decágono y creer que para los mayores a 10 lados no exista un nombre.
- De las imágenes reales del concepto. Un ejemplo poco cercano al niño es presentar como primera pirámide una fotografía de las pirámides de Egipto que no están en planos principales y que no pueden formar una imagen mental adecuada al concepto.
- Las definiciones se ven agravadas debido a los errores que sobre éstas presentan los libros de textos. Así ciertos objetos geométricos pueden ser definidos de formas diferentes y llevar a los alumnos a graves confusiones. Por ejemplo, las definiciones de los elementos notables de un triángulo como altura o medianas tienen dos acepciones: bien como segmentos (en textos de Primaria) o bien como rectas (textos de E.S.O.).
- La clasificación de las formas planas, tanto de triángulos como de cuadriláteros. Las confusiones que los alumnos tienen sobre estas clasificaciones hacen que les sea imposible clasificar otros conjuntos donde repercuten éstas como es la clasificación de los sólidos, en particular en el caso de los paralelepípedos.

Por su parte Gutiérrez y Jaime (1996, citados en Barrantes y Zapata, 2008), señalan dos formas diferentes de cómo los maestros y libros de texto presentan las definiciones a los alumnos que pueden ser otra de las causas de las dificultades:

Mediante el enunciado de la definición, ejercicios de memorización y reconocimientos de algunas figuras concretas, o bien presentando primeramente ejemplos de figuras, describiendo sus características para pasar a definir las,

realizar ejercicios memorísticos de la definición, así como actividades de reconocimiento de otras figuras.” (Gutiérrez y Jaime 1996, citados en Barrantes y Zapata, 2008, p. 8).

Algunas investigaciones (Araya y Alfaro, 2010) señalan que estos problemas, como algunos otros, se deben a que muchos países han intentado sortear los obstáculos reduciendo la cantidad de Geometría enseñada o recurriendo a enfoques pedagógicos que dependen en gran medida de memorización. Como resultado, no hay mucha base de buenas prácticas en el que basar el desarrollo. La Royal Society and Joint Mathematical Council (2001) sostiene que hay un problema adicional: “hay muchos profesores a los que se les ha enseñado Geometría a través de estilos de la enseñanza que no abogaríamos como apropiada” (p. 19). Esto hace referencia que algunos de los profesores tienen poca experiencia propia en la que basarse o desarrollar su práctica.

Por su parte Blanco (2001) en su investigación con alumnos de secundaria, la cual tenía como objetivo identificar los errores en el proceso de enseñanza y de aprendizaje en la geometría, señala que éstos suelen ser provocados principalmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje que pasaron en la escuela primaria, menciona además que para comprender la situación a la que nos enfrentamos, tenemos que realizar el análisis de los conceptos involucrados y los diferentes subconceptos que los componen. Añade que:

(...) el reconocimiento del error es un punto de partida eficaz, interesante y motivador desde que continuar la actividad y proponer nuevas actividades específicas, ambas diseñadas para llenar estos vacíos en sus conocimientos matemáticos y en la enseñanza de la geometría. (p. 5)

A partir de lo analizado podemos identificar cómo la enseñanza y aprendizaje de la Geometría presenta una serie de dificultades y errores, y que éstos están relacionados con la manera en la que los profesores llevan a cabo su tratamiento, además de las implicaciones que lleva consigo hacerlo así y el impacto que tiene en la construcción del aprendizaje de los alumnos.

1.2.2.2 Dificultades y Errores en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje del concepto de área. En este apartado especificaremos algunas dificultades que presentan varios autores en torno a la enseñanza y aprendizaje del concepto área y las posibles causas que los ocasionan.

Consideramos necesario especificar que dentro de la búsqueda de investigaciones realizada referente a las dificultades y errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría analizamos distintos estudios como los mencionados anteriormente. En los trabajos enfocados al concepto de área se refleja la

enseñanza descrita, en la que los alumnos deben memorizar fórmulas y aplicarlas sin ninguna contextualización real que les ayude al estudio de concepto en cuestión.

En este sentido, Delgado y Pochulu (2006, citados en Araya y Alfaro, 2010) señalan que:

Algunas y algunos docentes priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de Geometría hacia el final del curso, lo que les implica, en variados casos, la exclusión de estos temas o su atención de manera superficial. (p. 127)

Con base en la idea anterior dentro de “la enseñanza tradicional se ha enfatizado en la memorización de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, así como definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas” (Araya y Alfaro, 2010, p.125). Es aquí donde podemos identificar cómo la enseñanza del área se ve limitada por la manera en la que el docente decide llevar a cabo este contenido.

Hart (1984, citado en Bohórquez, 2004) aplicó diferentes instrumentos que le ayudaron a determinar problemas en la comprensión del concepto geométrico de área, su estudio se basó en la solución de problemas de área usados por estudiantes que tenían entre 12 y 14 años. En esta investigación se encontró que la principal dificultad que demuestran es la confusión con el concepto de perímetro, pues la autora menciona que “en muchos casos los niños calculan el área y el perímetro y le asignan el dato mayor al área y el menor al perímetro”. (Hart 1984, citado en Bohórquez, 2004, p. 12)

Otra de las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del concepto de área, es la que menciona Bohórquez (2004), la autora señala que los niños no asocian figuras de diferentes formas con la misma área, lo que da muestra de que no comprenden la conservación del área.

Además de estas dificultades se señalan otras, como la que se presenta con respecto a la medida del área, pues menciona que no se tienen en cuenta los sentidos para manejar atributos de la superficie y solo se manipulan instrumentos convencionales (Olmo, Moreno y Gil 1993, citado en Bohórquez 2004), como el juego de geometría, los cuales en muchas ocasiones los alumnos no saben utilizar. Una dificultad más encontrada por este autor se presenta cuando los problemas contienen datos no reales, erróneos o solo se pide que calculen el área de figuras regulares.

En este sentido Bocco y Center (2010) dentro de su investigación para identificar los errores en geometría de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Agronómica, retoman la clasificación de autores como Radatz (1979), Movshovitz (1987), Socas (1997), entre otros, realizan una evaluación antes y después de llevar el curso donde

identifican que los estudiantes de nivel universitario continúan presentando errores como:

- Utilizar datos de forma errónea.
- Inventar datos.
- Confundir el concepto involucrado en la resolución del ejercicio (confunden superficie con perímetro, diámetro con perímetro, asociar superficie de un área cualquiera con la superficie de un cuadrado).
- No relacionar el concepto con las unidades que le corresponden.
- Conversión incorrecta de unidades o bien operar sin tener en cuenta las unidades involucradas.
- Ante el desconocimiento de la fórmula apropiada inventar una.
- Realizar operaciones aritméticas de forma defectuosa.
- Usar regla de tres simple en ocasiones donde no es factible la aplicación de esta.
- Operar sin relacionar con la situación planteada.
- No comprender el enunciado del problema.

Con respecto al concepto de área se identifica la recurrencia referente a la dificultad, aun en nivel universitario, de confundir la superficie con el perímetro y asociar superficie de un área cualquiera con la superficie de un cuadrado. También se reconoce la importancia que tiene la manera en la que el profesor presenta este contenido al estudiante, pues de ésta dependerá su aprendizaje. De ahí que se pueden presentar dificultades y errores cuando se les pide a los alumnos memorizar su fórmula y concepto.

Además, para Chamorro (2003), el presentar las figuras geométricas solamente dibujadas (no recortadas), los alumnos no reconocen la superficie como el interior delimitado por dicho borde (obstáculo didáctico).

1.2.3 Propuestas para el aprendizaje de la geometría

En esta sección se presenta una revisión de propuestas para el aprendizaje de la Geometría abordadas en diferentes conceptos, medios o estrategias. Se realiza un análisis de los objetivos, las estrategias implementadas y los resultados obtenidos.

Antes de empezar a describir estos trabajos, nos gustaría comenzar resaltando la importancia de conocer la historia y orígenes de la Geometría, pues esto nos ayudará a comprender el proceso y cambios que ha tenido a lo largo de los años y con ello poder centrarnos en su enseñanza. Al respecto, Peña (2010) señala que para los profesores conocer la historia de la Geometría y los cambios que ha tenido al paso de los años les ayudará a comprender que las formas de enseñarla también han cambiado. Añade que los profesores deben saber “qué es la Geometría, estudiar su historia, usar diferentes metodologías y estrategias de enseñanza, estudiar el impacto que la Geometría ha tenido, tiene y seguirá teniendo en el desarrollo de nuestra sociedad” (p. 26).

La investigación de Peña (2010) tenía como objetivo analizar las posibilidades de las TIC en el desarrollo de actividades para apoyar y mejorar la enseñanza de la Geometría en Educación Secundaria Obligatoria. La metodología la desarrolló en cinco fases. La primera consistió en una búsqueda de bibliografía, posteriormente hizo un planteamiento empírico, luego el análisis estadístico y de resultados, para luego realizar su propuesta pedagógica con TIC y finalmente el autor concluye que los alumnos que han usado las TIC en sus clases de Geometría mejoran algo su rendimiento, sus capacidades cognitivas, así como la actitud y los valores hacia la materia.

Por su parte, Hernández, R. (2016) señala que el estudio de las propiedades de los triángulos “es una oportunidad para mejorar el aprendizaje de la geometría” (p. 11) e implementa una secuencia didáctica que incorpora material didáctico manipulable con la finalidad de favorecer el aprendizaje de la desigualdad del triángulo en el nivel Secundaria. En este estudio se reportó que los estudiantes pudieron identificar:

Las características de los lados de un triángulo, considerando que el material didáctico y la secuencia didáctica se complementaron para ayudar a que los alumnos se apropiaran del tópico matemático estudiado, así como también se generaron momentos de formulación importantes que propiciaron argumentaciones válidas entre los estudiantes cuando expresaban sus respuestas, provocando que los demás se convencieran de que se habían equivocado (Hernández, 2016, p. 142)

La investigación realizada por Hernández, E. (2016) tenía como principal objetivo implementar una estrategia apoyada en una unidad didáctica, vinculada con la enseñanza del concepto de área y de volumen en el grado noveno con el uso de material concreto como fue el origami y con las tecnologías digitales: geogebra y sweet home 3D.

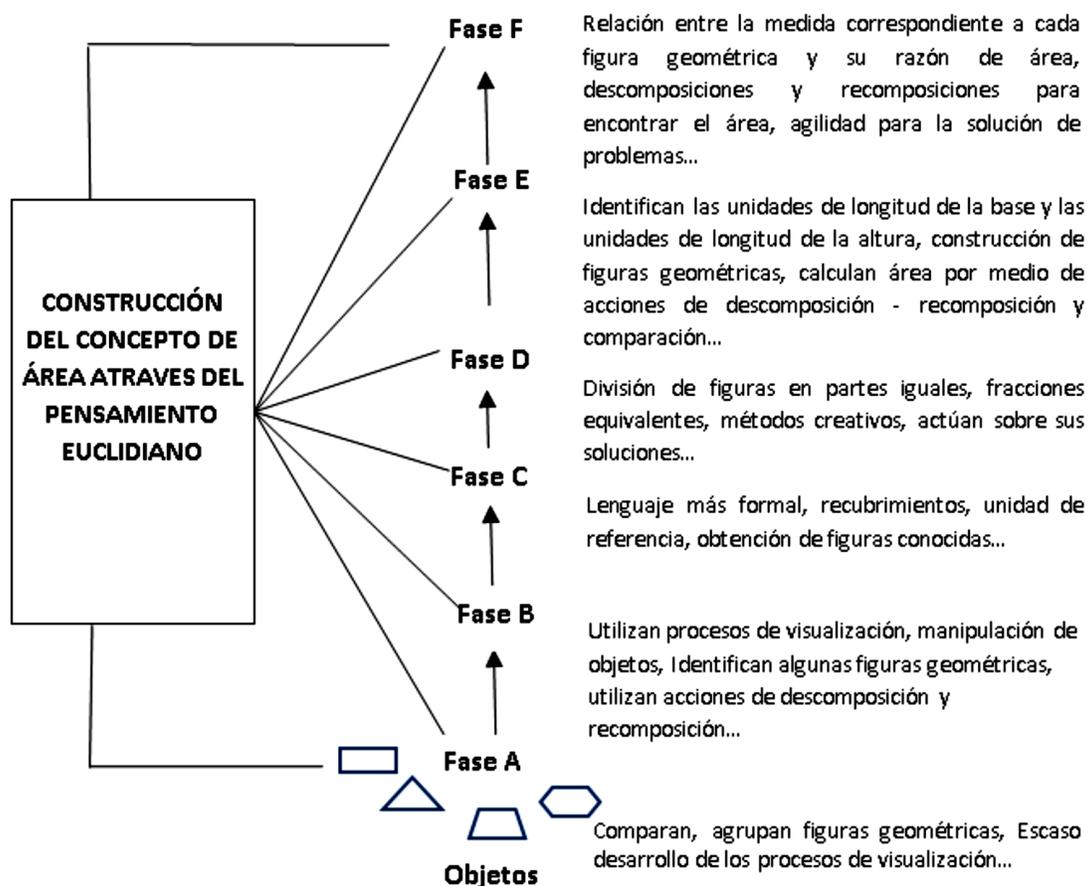
Para llevar a cabo esta investigación, el autor realizó una prueba de entrada para identificar los conocimientos previos que tenían sus estudiantes, en la cual, al preguntar respecto a algunos conceptos, de manera específica en el área encontró que los estudiantes tienen dificultad para definirlo pues señala que las “respuestas son ambivalentes e incongruentes” (Hernández, 2016, p. 75) con relación con la pregunta realizada. Su propuesta constituyó tres guías, las cuales indagaban por el concepto de área y de volumen; distribuidas en el programa geogebra, material concreto “origami” y el programa sweet home 3D, de manera específica respecto al concepto de área con el uso del origami se les pedía a los alumnos ir realizando dobleces, analizarlos y obtener sus áreas.

A partir de la implementación de este material didáctico se reportó que “se favoreció la motivación del estudiante en un ambiente de aprendizaje, en donde los conceptos aprendidos, no se quedaron únicamente en el proceso memorístico, sino que trascendieron a su realidad inmediata” (p. 94), además de que permitió al “estudiante

ser parte activa de su proceso de aprendizaje apropiándose de la información, enriqueciendo así, sus conocimientos” (p. 94).

En la investigación de Pérez (2017) el propósito fue contribuir a la caracterización del pensamiento geométrico con la construcción de significado robusto para el concepto de área. La investigación se llevó a cabo en cuatro colegios y se implementaron algunas actividades didácticas de las cuales se establecen seis fases para identificar el proceso de los estudiantes en la construcción del significado robusto del área, las cuales las podemos observar en la Figura 1:

Figura 1.
Avance de los estudios en cada fase.



Nota: Figura tomada de Pérez (2017, p. 15)

Se realizaron grabaciones para analizar las estrategias de los estudiantes y se finalizó con una prueba-entrevista de forma individual. Dentro de esta investigación se encontró que:

La construcción de un significado robusto del concepto de área se logra cuando el individuo usa la estrategia euclidiana basada en igualdad de área buscando

diferentes estrategias de división de una región del plano o figura geométrica. Con base en estas transformaciones el individuo utiliza herramientas de traslación y rotación, entre otras, para reconfigurar estas “piezas” geométricas, y de esta manera, formar una nueva figura geométrica, comprendiendo con claridad que el área permanece igual (invariante). (p. 16)

A partir de analizar las propuestas, podemos identificar cómo al incorporar material didáctico, se obtuvieron resultados satisfactorios en cuanto al aprendizaje de los conceptos abordados, puesto que los estudiantes desarrollaron sus capacidades cognitivas, mejoraron su actitud en el aprendizaje del material, argumentaron y validaron sus respuestas, se favoreció la motivación y el aprendizaje no se quedó únicamente en la memorización.

1.3 Reflexión

A partir del análisis de los antecedentes, con respecto a las dificultades y errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje en geometría, y de manera específica en el concepto geométrico área como conocimiento básico para abordar los temas en el nivel secundaria se retoman los siguientes aspectos para orientar la elaboración de nuestro proyecto:

Las prácticas realizadas por los profesores en la actualidad en el área de Geometría se basan en la memorización de fórmulas y conceptos (Araya y Alfaro, 2010), sin considerar que en esta materia los alumnos deben fortalecer la visualización, comprender el espacio, el análisis, la comparación, la argumentación entre otras muchas habilidades.

Algunas de las dificultades y errores cometidos en la Geometría ocurren a partir de la manera en la que los profesores presentan la información a los alumnos, puesto que como ya se analizó, por lo regular se utilizan pocos recursos, entre ellos, el libro de texto (Barrantes y Zapata, 2008), hecho que limita la visualización por parte de los alumnos.

El análisis realizado referente al aprendizaje del concepto de área para el nivel secundaria se realizó a partir de los trabajos de (Araya y Alfaro, 2010; Bohórquez, 2004; Hart, 1984; Pérez, 2017; Hernández, E. 2016), cabe señalar que para el nivel superior hay varios trabajos más, pero usando el concepto de la integral. Las investigaciones realizadas arrojan que los alumnos comúnmente tienden a confundir este concepto con el de perímetro (Bohórquez, 2004) y no lo pueden aplicar a problemas de la vida cotidiana, lo cual nos lleva a deducir que no comprenden la definición.

La importancia de conocer los orígenes de la geometría e implementarlo en el salón de clase, rescatando el tipo de problemas que llevaron al uso de la Geometría les permitirá tanto al alumno como al profesor identificar las causas de esta disciplina y

tratar de adaptarlas en nuestra actualidad (Peña, 2010). Es interesante saber que fue generada a partir de una necesidad o problemática común en el hombre, lo cual lo orilló a buscar una estrategia que le ayudara a resolverla.

Es importante comprender que la sociedad está en constante cambio, que las prácticas tradicionales de hace años no deben ser las que se implementen en la actualidad, y no se hace referencia a que sean malas, sino a que el tiempo ha hecho que las personas cambien, con ello las formas de enseñar y aprender también. Por ello es necesario que los docentes centren su atención en enseñar matemáticas a través de variados materiales didácticos que le permitan al alumno la exploración de los contenidos (Peña, 2010; Hernández, R., 2016; Hernández, E., 2016; Pérez, 2017).

El análisis de estos antecedentes permite tener una visión más completa con respecto a los estudios realizados referentes al aprendizaje del concepto área y los errores y dificultades que se presentan, con el fin de retomar este tipo de ideas para el proyecto de desarrollo profesional que se pretende realizar.

1.4 Planteamiento del problema de desarrollo profesional

En esta sección se presenta la problemática referente a nuestro tema de estudio, así como el problema que pretendemos abordar, la pregunta de desarrollo profesional que trataremos de dar respuesta, el supuesto de esta investigación, el objetivo general y específicos y la justificación.

1.4.1 Problemática

En el sistema de educación formal en nivel básico, los contenidos de geometría son presentados al estudiantado como el producto acabado de la actividad matemática (Araya y Alfaro, 2010). Hemos visto que en los métodos y estrategias tradicionales implementadas por los docentes al momento de impartir sus clases de geometría se enfatiza la memorización de fórmulas, definiciones, teoremas y propiedades (Araya y Alfaro, 2010), y se utilizan pocos recursos para la enseñanza, entre ellos, el libro de texto, el cual contiene limitadas imágenes simbólicas de los conceptos (Barrantes y Zapata, 2008). Por ello su enseñanza se ha limitado a reconocer figuras y dibujarlas en el papel (Araya y Alfaro, 2010).

En torno a la enseñanza y el aprendizaje del concepto área en geometría, las investigaciones dan evidencia de que, al trabajarlo, los estudiantes recurren a la memorización y es entonces cuando se enfrentan a una serie de dificultades y errores, como son:

- Al resolver un problema algebraicamente y pedirles que calculen el área no identifican cuál fórmula aplicar y tienen dificultad para interpretar qué es lo que dice un problema (Araya y Alfaro, 2010).

- Confundir el concepto de área con el concepto de perímetro, en muchos casos los niños calculan el área y el perímetro y le asignan el dato mayor al área y el menor al perímetro (Hart 1984, citado en Bohórquez, 2004).
- No asocian figuras de diferentes formas con la misma área (Bohórquez, 2004).
- Utilizar datos de forma errónea o inventar datos y ante el desconocimiento de la fórmula apropiada inventar una (Bocco y Center, 2010).
- No relacionar el concepto con las unidades que le corresponden (Bocco y Center, 2010).
- Tienen dificultad para definirlo (Hernández, E., 2016, p. 75).
- Se presentan las figuras geométricas solamente dibujadas (no recortadas), por lo que los alumnos no reconocen la superficie como el interior delimitado por dicho borde (obstáculo didáctico) (Chamorro, 2003).

Las dificultades y errores que tienen los estudiantes al trabajar con el concepto de área en todos los niveles de educación dependerán de la experiencia vivida en el proceso, lo cual puede afectar en la construcción de este concepto.

1.4.2 Problema

Una de las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del área, se debe a que se prioriza la enseñanza de las matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de Geometría hacia el final del curso (Delgado y Pochulu 2006, citados en Araya y Alfaro 2010).

Además, los estudiantes tienen dificultades con el estudio del concepto de área (Hernández, E., 2016, p. 93), tales como relacionarlo con fórmulas y no poder utilizarlo en la resolución de problemas y ejercicios, así como también no reconocer al área como la medida de la superficie delimitada por un borde, asignar el dato mayor al área y el menor al perímetro (Hart 1984, citado en Bohórquez, 2004), no asociar figuras de diferentes formas con la misma área o solo sacar el área de figuras regulares (Bohórquez, 2004).

1.4.3 Pregunta de desarrollo profesional

¿Cómo la aplicación de una situación didáctica que incorpora material didáctico como estrategia didáctica, puede contribuir a mejorar los aprendizajes relacionados con el concepto de área en los estudiantes de 1º de secundaria?

1.4.4 Supuesto

La aplicación de una situación didáctica que incorpora material didáctico como estrategia didáctica, contribuye a mejorar los aprendizajes relacionados con el concepto de área en los estudiantes de 1º de secundaria.

La implementación de una situación didáctica con el uso de material didáctico, donde el profesor sea una guía en el proceso de la construcción del concepto de área, le permitirá analizar como los estudiantes fortalecen, completan o aplican tal concepto en la experimentación y tomar decisiones en torno a lo que va sucediendo en la clase, podría generar en los alumnos la construcción del concepto de área.

Para ampliar la posibilidad que los alumnos construyan y le den significado al concepto de área, el profesor debe contemplar incluir en su situación didáctica actividades con el uso de materiales didácticos, como las TIC (Peña, 2010) o materiales didácticos concretos (Hernández, 2016: Hernández, E., 2016) pues, como lo menciona Hernández, E. (2016, p. 94) el uso de estos “permite al estudiante ser parte activa de su proceso de aprendizaje apropiándose de la información, enriqueciendo así, sus conocimientos”.

1.4.5 Objetivo general

Diseñar y adaptar una situación didáctica que incorpore material didáctico que ayude a los estudiantes a mejorar los aprendizajes relacionados con el concepto de área en el primer grado de secundaria.

1.4.5.1 Objetivos particulares

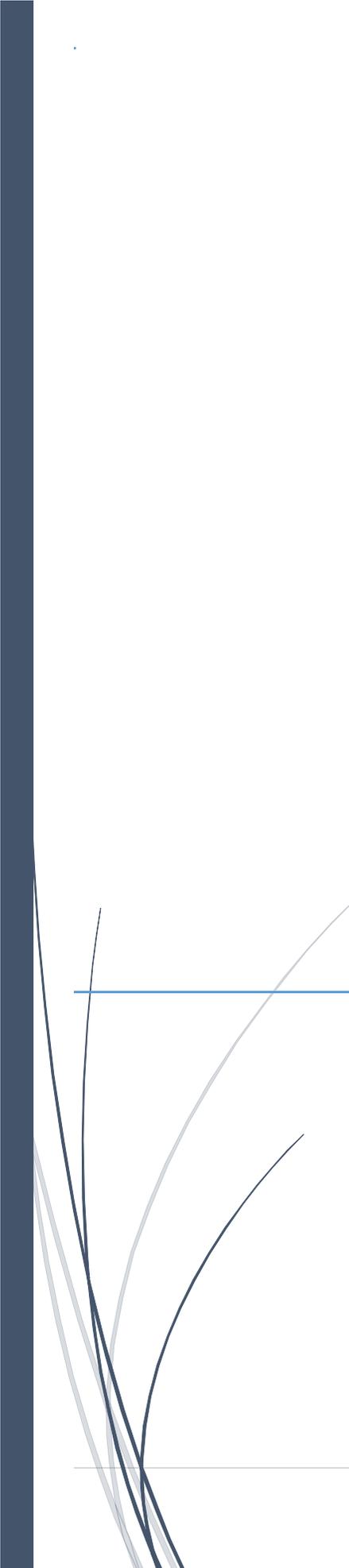
- Realizar un análisis preliminar que permita rescatar elementos para el diseño de la situación didáctica.
- Diseñar y adaptar una situación didáctica para mejorar los conocimientos de los alumnos respecto al concepto área a partir de los errores identificados.
- Seleccionar y diseñar material didáctico para utilizarlo en la situación didáctica.
- Implementar la situación didáctica con la utilización del material didáctico con alumnos de primer grado de secundaria.
- Recoger y analizar los datos obtenidos en la situación propuesta.

1.4.6 Justificación

Con este estudio los profesores de matemáticas del nivel secundaria tendrán referencia de los principales errores y dificultades que presentan los estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje del concepto de área en geometría, debido a que el análisis realizado de investigaciones muestra el poco avance que se tiene al respecto.

Además de conocer los posibles errores y dificultades con los que el docente de secundaria se puede enfrentar, se verá una alternativa con lo cual éstos pueden ser atendidos, pues muestra las ventajas de uso de materiales didácticos para la enseñanza de este concepto, brindando a los profesores en particular, una situación didáctica que incorpore material didáctico que puedan modificar a partir de las necesidades y contextos en los que se encuentre.

Para los docentes, tener este referente proporcionará una visión más amplia de las herramientas que pueden utilizar en el salón de clase, así como prever posibles errores o dificultades en el tratamiento de este concepto geométrico.



Capítulo II. Fundamentos Teóricos

Este capítulo está dividido en cuatro apartados. En el primero se definirán algunos conceptos relacionados al área en el apartado de fundamentos matemáticos. En el segundo se aborda lo referente a materiales didácticos. En el tercero se describe el marco teórico que utilizaremos en la presente investigación, basado en los fundamentos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau. En el último apartado se analiza en método que se llevará a cabo en nuestra investigación el cual se basa en la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

2.1 Fundamentos Matemáticos

En este apartado se presenta la definición de área y los conceptos involucrados en su tratamiento, los cuales nos permitirán llevar a cabo nuestra situación didáctica.

Como ya se ha mencionado, los alumnos suelen confundir el concepto de área en secundaria con algunos otros que se trabajan en ese nivel por los factores ya descritos, por lo que consideramos pertinente definir aquellos conceptos relacionados con su estudio. Para diferenciar entre superficie y área consideramos las definiciones de Baldor (2006) las cuales presentamos a continuación:

- Superficie: La superficie se refiere a la forma. Hay superficies rectangulares, cuadradas, circulares, etc.
- Área: Es la medida de una superficie. El área se refiere al tamaño. (p. 203)

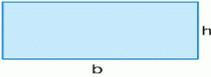
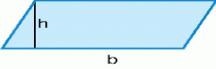
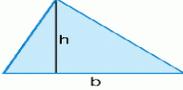
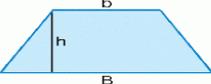
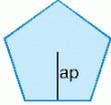
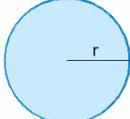
Para efectuar la medida de una superficie se toma como unidad un cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud. En la práctica el cálculo del área de una figura se efectúa directamente, es decir, midiendo la longitud de alguno de los elementos de la figura y realizando ciertas operaciones con dichas medidas (Baldor, 2006).

Londoño (2006) define al área como “las superficies planas que tienen una extensión, y la medida de la extensión es un número real que se llama área de la región plana” (citado en Villamil, Aldama y Wagner 2017, p. 70). Por su parte, Barnett y Uribe (1990) mencionan en que se llama área de una figura a “la medida de la superficie ocupada por dicha figura” (citado en Villamil, Aldama y Wagner 2017, p. 70). La Real Academia Española define al área como la superficie comprendida dentro de un perímetro (Real Academia Española: *Diccionario de la lengua española*, 23.^a ed., [versión 23.4 en línea]. <<https://dle.rae.es>> [21 de septiembre 2021]).

En nivel secundaria al trabajar el concepto de área los alumnos deben utilizar algunas fórmulas de figuras regulares, por ejemplo, la del cuadrado, rectángulo, triángulo, rombo, romboide, trapecio, círculo y polígonos regulares, las cuales presentamos en la figura 2:

Figura 2.

Fórmulas para calcular el área de figuras trabajadas en primero de secundaria.

Figura	Área
 <p>Rectángulo</p>	$A = b \cdot h$
 <p>Cuadrado</p>	$A = a \cdot a = a^2$
 <p>Romboide</p>	$A = b \cdot h$
 <p>Rombo</p>	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
 <p>Triángulo</p>	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
 <p>Trapecio</p>	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$
 <p>Poligono regular</p>	$A = \frac{P \cdot ap}{2}$
 <p>Círculo</p>	$A = \pi \cdot r^2$

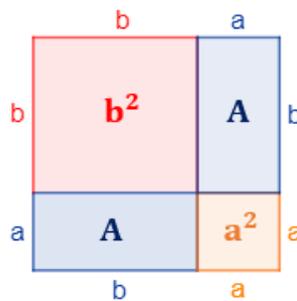
Nota: Figura tomada de <https://matematicasn.blogspot.com/2015/12/areas-y-perimetros-ejercicios-resueltos.html>

A continuación, presentamos la demostración para calcular el área del rectángulo con ayuda de la fórmula del área de un cuadrado, pues en nivel secundaria

se considera la base para la demostración del resto de fórmulas que se trabajan (ver Figura 3.)

- La fórmula de un cuadrado de lado L es: $A = L^2 = L \times L$
- Para calcular el área de un rectángulo de base b y altura a , representamos un cuadrado de lado a , un cuadrado de lado b y dos rectángulos de base b y altura a :

Figura 3.
Obteniendo el área de un rectángulo



Fuente: Elaboración propia.

- En rojo tenemos el cuadrado de lado b . Su área es b^2 .
 - En naranja, el cuadrado de lado a . Su área es a^2 .
 - Y en azul, los dos rectángulos de lado a y b . tienen la misma área (A) porque son iguales.
- Los cuatro cuadriláteros conforman un único cuadrado y su área es la suma de las cuatro áreas:

$$b^2 + a^2 + A + A = b^2 + a^2 + 2A$$

- Este cuadrado tiene de lado $a + b$, así que, por la fórmula del área del cuadrado, su área es:

$$L \times L = (a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$$

- Desarrollamos el cuadrado de la suma:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2(a)(b) + b^2$$

- Igualamos ambas áreas:

$$b^2 + a^2 + 2A = a^2 + 2(a)(b) + b^2$$

- De esta igualdad obtenemos el área del rectángulo de lado a y b :

$$A = (a)(b)$$

2.2 Uso de materiales didácticos para el aprendizaje de la geometría

En este apartado se señala la importancia de implementar los materiales didácticos en las clases como apoyo en la construcción de los conceptos matemáticos, así como también retomamos algunas definiciones desde la postura de varios autores.

Dentro de las investigaciones realizadas por Alsina (2004) se puede observar los motivos fundamentales del escaso interés e implicación por parte del alumnado hacia el área de las matemáticas, lo cual viene originados por la carencia de uso de los materiales didácticos.

En la actualidad existen muchos materiales didácticos que pueden servir de alternativa para cambiar la rutina que se ha llevado en la clase de matemáticas antes mencionadas (memorización y mecanización) que ayudan a los profesores a tener un cambio en su salón de clase. Navarrete (2017) menciona que se debe ser consciente de que “no se consigue nada con simples transformaciones en el currículum, es decir cambiar de una organización por contenidos por una de competencias; la clave está en provocar cambios en la realidad escolar” (p. 8). Esto es, por más cambios que realice el profesor dentro de la organización de la clase, esto impactará siempre y cuando los cambios se centren en la realidad que vive el alumno.

Por su parte González (2010) destaca las finalidades que se pueden obtener con la utilización de los materiales didácticos, entre los cuales podemos rescatar:

- Motiva; provoca un mayor interés en el alumno/a.
- Estimula el aprendizaje.
- Favorece la búsqueda de información y resolución de problemas.
- Potencia una enseñanza más activa, participativa y creativa.
- Fomenta el pensamiento matemático.

Pero, ¿Qué podemos definir como material didáctico? Navarrete (2017) realizó una investigación con el objetivo principal de reivindicar y argumentar la importancia de los materiales didácticos en el aula, el autor pretendía ayudar a los profesores en el uso de éstos para implementarlos en sus aulas. Parcensa (1996, citado en Navarrete, 2017) menciona “que los materiales didácticos son aquellos artefactos que empleados de distintas formas de representación (simbólica, objetos) ayudan y favorecen a la construcción de conocimiento, dentro de una estrategia de enseñanza más amplia”.

Por otra parte, en Navarrete (2017) menciona que los materiales didácticos son considerados, según Cebrián (s.f.) como:

Todos los objetos, equipos y aparatos tecnológicos, espacios y lugares de interés cultural, programas o itinerarios medioambientales, materiales educativos que, en unos casos utilizan diferentes formas de representación simbólica, y en otros,

son referentes directos de la realidad. Estando siempre sujetos al análisis de los contextos y principios didácticos o introducidos en un programa de enseñanza, favorecen la reconstrucción del conocimiento y de los significados culturales del currículum. (Cebrián, s.f., citado en Navarrete, 2017).

Morales (2012) define a los materiales didácticos como al conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos materiales pueden ser tanto físicos como virtuales, asumen como condición, despertar el interés de los estudiantes, adecuarse a las características físicas y psíquicas de los mismos (Morales, 2012 p. 10).

Marqués (2001) menciona que lo que debemos tener en cuenta cuando queremos utilizar un material didáctico es que se requiere de “una previa planificación, programación y con una finalidad clara sobre aquello que se pretende alcanzar como objetivo”, puesto que con el simple uso de los materiales didácticos no se generará un aprendizaje en los alumnos de los contenidos a trabajar de manera espontánea. Sugiere a demás que debemos adaptar el material didáctico seleccionado o creado de manera adecuada para trabajar un contenido, a las características y los conocimientos previos de nuestros estudiantes.

El mismo autor propone cinco aspectos principales para tener en cuenta a la hora de seleccionar un material didáctico:

- Los objetivos educativos que se pretenden alcanzar.
- Los contenidos que se pretenden trabajar mediante la utilización del material didáctico seleccionado.
- Las características de los alumnos/as que van a usar dicho material. (conocimientos previos, capacidades, intereses, experiencia o habilidades)
- Las características del contexto (físico o curricular), donde se lleva a cabo la labor docente y donde se tiene pensado impartir el uso del material didáctico.
- Las estrategias didácticas que se pueden diseñar teniendo en cuenta el uso del material didáctico.

Marqués (2001, pag.2)

Por su parte Navarrete (2017) dentro de su investigación determina que el uso de materiales didácticos permite:

- Presentar los temas de manera más objetiva, clara y precisa.
- Proporcionar al alumno(a) un gran número variado de medios de aprendizaje.
- Estimular el interés por la participación y motivación del alumnado.
- Acercar a los dicentes a la realidad sin ningún tipo de mediación.
- Facilitar la comunicación entre el alumnado (Posibilitando la interacción alumno(a)-alumno(a) y alumno(a)-material didáctico).

- Dar significado a los aprendizajes adquiridos.
- Permitir una mejor administración del tiempo.
- Fomentar el pensamiento matemático del alumnado.

Por su parte, Arrieta (1998) menciona que el uso de material didáctico “facilita la comprensión y la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, favorece la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia la matemática, convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento”. (p. 17). El uso de los materiales les permitirá a los alumnos en un primer momento interesarse por el trabajo y a su vez profundizar el contenido que están abordando con mayor claridad.

Gairín (2008) citado en Hernández (2016), comenta que el material didáctico permite, entre otras cosas: “aproximar al alumno a la realidad de lo que se quiere enseñar, motivar a la clase, facilitar la percepción y la comprensión de los hechos y de los conceptos, concretar e ilustrar lo que se está exponiendo oralmente, economizar esfuerzos para conducir a los alumnos a la comprensión de hechos y conceptos, contribuir a la fijación del aprendizaje a través de la impresión más viva y sugestiva que puede provocar el material y a dar oportunidad a que se manifiesten sus aptitudes” (p. 17).

El reporte realizado por la autora permite identificar cómo los materiales didácticos le proporcionan al estudiante visualizar desde otro tipo de representaciones los conceptos trabajados, argumentar y justificar los razonamientos que utiliza en la resolución de problemas, además los mantiene motivados e interesados en las clases.

Los materiales didácticos contribuyen a que los alumnos identifiquen diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos, además favorecen la comprensión del concepto matemático trabajado (Arrieta, 1998). Un aspecto que se considera importante resaltar es cómo los materiales didácticos favorecen en el estudio de los conceptos matemáticos, dado que su uso les permite a los estudiantes tener un aprendizaje más completo pues mediante la exploración de los mismos, los alumnos son los que están construyendo su propio conocimiento.

2.3 Teoría de Situaciones Didácticas

En esta sección se presentan las bases y fundamentos referentes a la Teoría de situaciones didácticas. Se parte de la transformación de los saberes científicos a los saberes enseñados para que puedan ser comprendidos por los alumnos, así como de la importancia del profesor en la creación de las condiciones para que esto se logre.

La enseñanza de las matemáticas en educación básica requiere de un proceso, puesto que la elección de los contenidos y el nivel en el que se abordarán no se dan de manera espontánea. El profesor de matemáticas debe comprender que el saber matemático (puro) “permite definir en cada instante los objetos que se estudian con

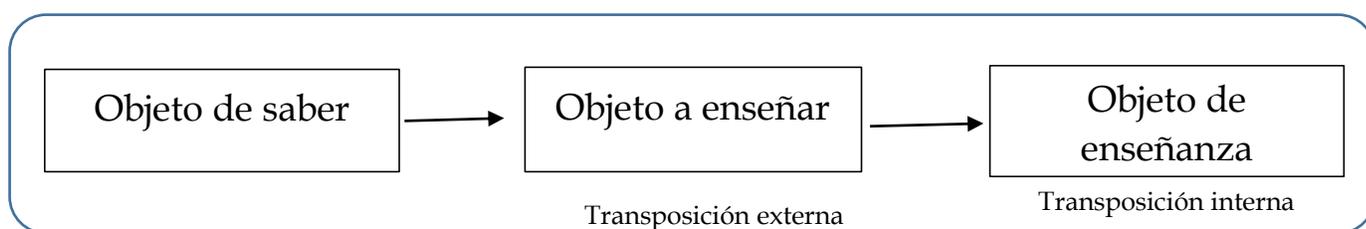
ayuda de las nociones introducidas precedentemente y, así, organizar la adquisición de nuevos conocimientos con el auxilio de adquisiciones anteriores” (Brousseau, 1986, p. 2). Sin embargo, para que el saber matemático pueda ser un saber enseñado debe sufrir una serie de transformaciones, pues difícilmente podría ser comprendido por los alumnos.

Así mismo Brousseau (1986) menciona que “para facilitar la enseñanza, se aíslan ciertas nociones y propiedades del tejido de actividades en donde han tomado su origen, su sentido, su motivación y su empleo. Ello los traspone en el contexto escolar” (p. 3). En este sentido es necesario que el profesor identifique qué de ese saber matemático va a enseñar y cuáles serán las modificaciones que debe realizar a partir de establecer los objetivos que pretende alcanzar, con el fin de que sus estudiantes identifiquen que ellos están construyendo su propio conocimiento en torno a las interacciones que se dan en el aula.

Por estas razones la transformación de los saberes científicos en su proceso para ser enseñados supone “la delimitación de saberes parciales, la descontextualización y finalmente una despersonalización, programabilidad y publicidad del saber” (Chevallard, 1980, citado en Alfaro y Chavarría 2012, p. 2). Se crea con esto la necesidad de una trasposición de un saber sabio a un saber enseñado, puesto que los objetos a enseñar deben corresponder a las exigencias y necesidades de la sociedad. Estas transformaciones que sufre el saber lo podemos observar en la Figura 4.

Figura 4.

Trasposición externa e interna



Fuente: Chevallard (1980)

El proceso para determinar qué del saber matemático se abordará en las aulas, se lleva a cabo en la noosfera, la cual según Chevallard (1980, citado en Alfaro y Chavarría, 2012) es:

El conjunto de lugares o instancias donde se lleva a cabo las negociaciones, donde se establecen los cambios entre el sistema educativo y su entorno, es en ella donde deben proporcionarse soluciones provisionales a los problemas que se presentan en las distintas terna didácticas con el objetivo de converger el proyecto social definido... En la Noosfera deben intervenir especialistas en

matemáticas, psicólogos, pedagogos, política, sindicales, empresariales, entre otros. (p. 4)

A partir de lo anterior los profesores deben “producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos. Éstos van a convertirse en conocimientos del alumno; es decir, una respuesta natural, en unas condiciones relativamente particulares, condiciones indispensables para que tengan un sentido para él” (Brousseau, 1986 p. 7). Por ello la tarea del docente se centra en buscar las estrategias y métodos didácticos que ayuden a los estudiantes a construir su propio conocimiento, brindando los espacios necesarios en sus aulas.

La génesis artificial de los conceptos es un intento por crear las condiciones necesarias que permita a los estudiantes construir y darle sentido a su conocimiento, ésta fue creada por Guy Brousseau dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas. Peres (1982, citado en Gálvez, 2002) la define de la siguiente manera:

El camino que hemos seguido consiste en construir un proceso de aprendizaje en el que el conocimiento no es ni directa ni indirectamente enseñado por el maestro, sino que debe aparecer progresivamente en el niño a partir de múltiples condicionantes estructurales: es el resultado de confrontaciones con cierto tipo de obstáculos encontrados durante la actividad. Son las múltiples interacciones en el seno de la situación las que deben provocar las modificaciones en el alumno y favorecer la aparición de los conceptos deseados... Si el conocimiento que se quiere que los alumnos aprendan debe aparecer en la exacta medida en que llega a ser un instrumento necesario para adaptarse a una situación problemática (las estrategias utilizadas espontáneamente se revelan ineficaces), todo el esfuerzo del análisis en didáctica debe concentrarse en esta situación. (p. 6)

El docente entonces será el encargado de crear las condiciones necesarias de manera artificial, centrando su papel como guía en el proceso, con el fin de que sus estudiantes le den sentido a lo que realizan y logren la construcción de su propio conocimiento.

En este sentido, en nuestra investigación se utilizará la Teoría de Situaciones Didácticas la cual está sustentada en una concepción constructivista (en el sentido Piagetiano) del aprendizaje. “Se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea” (Panizza, 2004, p. 60). Dentro de esta teoría, Brousseau (1986, citado en Panizza, 2004) considera que:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este

saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p. 61)

La situación dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas, toma un rol importante en la construcción del conocimiento, la cual Brousseau (1999) describe como:

Un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición ‘anterior’ de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”. (p. 61)

Dentro de la Teoría podemos distinguir la **situación didáctica**, la cual es construida intencionalmente por el docente con el fin de lograr que los alumnos adquieran los conocimientos requeridos. Brousseau (1982, citado por Gálvez, 2002) la define como:

Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor), con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (p. 42)

Dentro de este tipo de situación el profesor ayuda a los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento por medio de una situación didáctica elaborada previamente por él, por lo cual debe tomar un papel de guía, observando lo que los alumnos realizan, haciendo preguntas que los ayuden a reflexionar, pensar en lo que hacen y actuar en consecuencia.

Para analizar la situación didáctica Brousseau (s. f. citado por Gálvez, 2002, pp. 43-44) distingue cuatro tipos de situaciones: situación acción, formulación, validación e institucionalización:

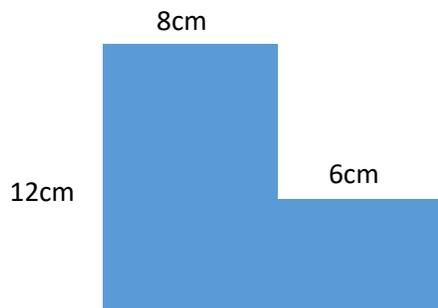
1. **Situaciones de acción:** el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos.
2. **Situaciones de formulación:** un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.
3. **Situaciones de validación:** dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las

mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aseveraciones.

4. Las **situaciones de institucionalización**, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Por ejemplo, a los estudiantes se les presenta una figura irregular y se les pide que calculen su área (ver Figura 5). Cuando se les presenta el problema y comienzan a ver cómo pueden dar respuesta, con qué información y recursos cuentan, estarán en la situación de acción.

Figura 5.
Figura irregular



Fuente: Elaboración propia.

La situación de formulación se presentará cuando los estudiantes comuniquen con sus compañeros, o bien, cuando plasmen en sus hojas de trabajo las posibles estrategias de solución, de manera que todos entiendan el mensaje. Retomando el ejemplo, los alumnos pueden formular su respuesta en torno a transformar la figura original en otras que ellos conozcan. Para la situación de validación los alumnos tienen que demostrar con argumentos la validez de su respuesta, si su estrategia fue la transformación de figuras tendrán que evidenciar que su respuesta es correcta.

El profesor debe tomar el control de la situación didáctica y debe lograr que sus estudiantes identifiquen que en las situaciones de acción, formulación y validación han construido su propio conocimiento, el cual relacionarán con las convenciones establecidas al abordar la última situación para darle sentido a éste, es decir, en la institucionalización. Cabe señalar que estas situaciones pueden aparecer en diferentes momentos de la clase.

En torno a esto, el profesor debe responsabilizar a los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento. Sin embargo, es necesario mencionar que no significa que se deje solo a los estudiantes en el proceso y que los docentes pierdan la responsabilidad de su actuar en el aula. Dentro de la necesidad de identificar esos momentos se da lugar a la **situación a-didáctica**, la cual es definida por Brousseau (1986, citado por Panizza 2004) como:

El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (p. 62)

A partir de lo anterior podemos distinguir que la situación didáctica contiene la relación intrínsecamente entre personas para que alguien aprenda. Esta situación se conserva en la situación a-didáctica, considerando que la no intencionalidad se refiere a que el alumno debe resolver el problema utilizando sus conocimientos, sin que el docente intervenga directamente, actuando como guía, puesto que en ella se da el proceso de aprendizaje.

Dentro de la situación a-didáctica se contienen tres aspectos importantes que es necesario mencionar (Panizza, 2004, pp. 63-65).

1. El carácter de “**necesidad**”: de los conocimientos: la “situación” se organiza de manera tal que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución, en el sentido de que la situación “(...) no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende (...)”.
2. La noción de “**sanción**”: no debe entenderse como “castigo” por una “culpa, o equivocación”. La idea es que la situación debe estar organizada de manera tal que el alumno interactúe con un medio que le ofrezca información sobre su producción.
3. La “**no intervención**” del maestro en relación al saber.

Con base en estos aspectos el profesor debe ser consciente de la situación que plantea a los estudiantes con el fin de que sean ellos los que por medio de su conocimiento den respuesta a tal situación. Además de saber las restricciones que implementará para guiarlos u orientarlos en la aplicación de situación didáctica mediante un “contrato didáctico”, el cual Chavarría (2006, p. 33) define como: “la consigna establecida entre profesor y alumno, de esta forma, comprende el conjunto de

comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente” los cuales deberán ser respetados por ambos.

La no intervención del docente en la situación a-didáctica dio lugar al concepto de “devolución” desarrollado por Brousseau (1998, citado en Panniza, p.65): “es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia”. A partir de esto Margolinas realizó un análisis con respecto a la participación del maestro en la fase a-didáctica donde rescata que:

En efecto, no es el silencio del maestro lo que caracteriza las fases a-didácticas, sino lo que él dice. (...) En la devolución el maestro se despoja de la parte de responsabilidad que es específica del saber a enseñar (...). (Margolinas, 1993, citado en Panniza, p. 65)

Menciona que no significa que el maestro se vuelva un espectador, lo importante en esta fase es lo que el maestro dice. Concluye en que:

La devolución parece ser un proceso que se desarrolla durante toda la situación a-didáctica, y no solamente en la fase de establecimiento (...). El maestro es entonces responsable no solamente de una simple disciplina aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del alumno en una relación a-didáctica con el problema (...). (Panizza, 2004, p. 65)

La devolución puede pasar por varias etapas, y no solo se da al inicio de la situación. Las etapas que menciona Brousseau (1986, p. 16-17) son las siguientes:

- Acercamiento puramente lúdico. En esta el profesor permite que el alumno interactúe con el medio, manipulando los objetos que están es su disposición. Éste aún, no podrá identificar qué está haciendo de manera correcta y que no.
- Devolución de una preferencia. Aquí los alumnos comprenden que para todo efecto existe una causa, por lo que si ellos manipulan un objeto habrá un resultado.
- Devolución de una responsabilidad y una causalidad. Consiste en que todos los posibles procedimientos ensayados, el alumno elije uno, por lo que debe aceptar que fue responsable de esa elección.
- Devolución de la anticipación. El alumno se da a la tarea de pensar antes de actuar, considerando la relación que existirá entre la decisión que él pueda tomar y el resultado.
- Devolución de la situación a-didáctica. El alumno debe poder identificar las situaciones en las cuales lo que aprendió le puede ser útil. (p. 17).

La variable didáctica es otra noción importante dentro de la teoría de situaciones didácticas. Bartolomé y Fregona (s.f. citado en Panizza, 2004, p. 66) presenta de la siguiente manera la noción es su artículo:

La noción de variable didáctica, surgida en el marco de la teoría de las Situaciones Didácticas, (...) Las Situaciones Didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación.

En este sentido, el docente proporciona a los alumnos las condiciones necesarias para que por medio de sus conocimientos previos traten de dar respuesta al problema que se les plantea, para luego, realizar una modificación (variable didáctica), logrando que el problema sea más sencillo o complejo y así lograr que los alumnos cambien las estrategias que están utilizando y reconstruyan su conocimiento para dar respuesta al problema.

El docente será el encargado de identificar qué y en qué momentos de su situación didáctica deberá realizar una variación en los problemas para controlar las estrategias y procedimientos que los estudiantes están implementando con el fin de provocar cambios en el nivel de razonamiento según lo requieran.

La Teoría de Situaciones Didácticas permite que los alumnos participen de manera activa para mejorar su conocimiento respecto al concepto de área, pues a partir de las diferentes fases (acción, formulación y validación), son ellos los que mediante el uso del material didáctico y con la orientación del docente reestructuran su conocimiento, situación que se pretende al llevar a cabo este trabajo.

2.4 Metodología

En este apartado se describe el método que utilizamos para llevar a cabo nuestra investigación, el cual se basa en la metodología de la ingeniería didáctica de Artigue, por lo que se describen las fases en las que llevaremos a cabo.

Bojacá (s.f.) plantea una definición etimológica, de método: (meta odos = a lo largo del camino) se dice del “conjunto armónico de medios para lograr un fin (citado en Cifuentes, 2016).

Además, este trabajo se centra en un enfoque cualitativo, pues se “intentan describir sistemáticamente las características de las variables y fenómenos (para generar y perfeccionar categorías conceptuales, descubrir y validar asociaciones entre fenómenos o comparar los constructos y postulados generados a partir de fenómenos observados en distintos contextos)”. (Quecedo y Castaño, 2002, p. 12)

Como metodología de investigación se propone la ingeniería didáctica de Artigue, la cual consta de cuatro etapas: la primera consiste en realizar algunos análisis preliminares, la segunda en la concepción y análisis a priori, la tercera en la experimentación y finalmente en la cuarta el análisis a posteriori y la validación.

2.4.1 La ingeniería didáctica

La noción de ingeniería didáctica surgió en la Didáctica de las Matemáticas a comienzo de los años ochenta. Se nombró de esta manera debido a la forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo de un ingeniero. Artigue (1995) señala que la Ingeniería Didáctica llega a “significar tanto producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica”. (p. 38). Esta metodología se caracteriza por ser “un esquema experimental basado en las ‘realizaciones didácticas’ en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza”. (Artigue, 1995, p. 36)

La metodología de la Ingeniería Didáctica se distingue en comparación con otras investigaciones basadas en la experimentación en la clase, por el tipo de registro y las formas de validación. Douady (1995, p. 61) caracteriza a la Ingeniería Didáctica de la siguiente manera:

Designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la Ingeniería Didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase.

Por lo tanto, la metodología a seguir dentro de la Ingeniería Didáctica le permite al profesor prever aspectos necesarios antes de realizar su situación didáctica, los cuales le brindan información al respecto de cómo abordar el concepto, de tal forma que se logre la construcción de los conocimientos de los alumnos.

La metodología de la Ingeniería didáctica, se compone de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori, las cuales se describen a continuación.

2.4.2 Análisis preliminares

En una investigación, la fase de concepción además de basarse en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos previamente adquiridos, se basa en un determinado número de análisis preliminares, los más frecuentes son (Artigue, 1995):

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (Didáctico).
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (Cognitivo).

(p. 36)

En este sentido, en nuestro proyecto realizaremos un análisis epistemológico concerniente del concepto de área, luego un análisis didáctico, que permita presentar un panorama de cómo se da la enseñanza de este tema en el nivel secundaria, a través del libro de texto que usualmente se utiliza en la escuela donde se aplicará la situación didáctica. Por último, para llevar a cabo el análisis cognitivo se diseñará un instrumento para analizar los errores que comenten los estudiantes tanto al trabajar con tareas relacionadas con el área, como con sus conocimientos previos.

Análisis epistemológico.

El análisis epistemológico, considera dar un paso por la historia referente al área, para identificar la evolución referente al uso de dicho contenido matemático, explicar cómo surgió y qué necesidades o problemas dieron paso a la construcción de este conocimiento.

Análisis didáctico.

El análisis didáctico se enfoca a lo relacionado con el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido. Hernández (2016, p. 52) menciona que para llevarlo a cabo (...) en primer lugar se ubica el tema (...) en el programa de estudios propuesto por la Secretaría de Educación Pública (2017), luego se analiza el libro de texto que utilizaban en la escuela secundaria (...), para ubicar el tema, las sesiones destinadas para abordarlo y la estructura utilizada por el libro de texto para el desarrollo de las actividades. Por último, se describe específicamente la actividad considerada en el libro para abordar el tema (...).

En este sentido, analizaremos el programa y programa de estudios 2017 Aprendizajes Clave para la educación integral, (SEP, 2017), así como el libro de matemáticas más utilizado en la secundaria donde llevaremos a cabo la implementación de nuestra propuesta.

Análisis cognitivo.

En el análisis cognitivo, se deben considerar los posibles obstáculos, dificultades y errores que enfrentan los estudiantes con respecto al conocimiento que construyen con la implementación de la situación didáctica.

Este análisis pretende acercarse lo más posible a los conocimientos previos que puede llegar a tener el estudiante sobre el tema, lo cual arroja ciertos datos que pueden ser considerados por el profesor antes de implementar la situación didáctica con los estudiantes”. (Hernández, 2016, p. 52)

En este sentido, se diseñará un instrumento para analizar los errores que comenten los estudiantes tanto al trabajar con tareas relacionadas con el área, mencionados por los antecedentes, así como recatar y aproximarnos lo más posible a sus conocimientos previos, por ejemplo, si identifican las partes que conforman una figura, las fórmulas que conocen, etc.

2.4.3 Concepción y análisis a priori

Como segunda fase se tiene a la concepción, aquí el investigador decide actuar a partir de un número determinado de variables del sistema no fijas. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Artigue (1995) distingue dos tipos de variables:

- Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

(p. 42)

Las variables pueden ser generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. “Sin embargo, en el nivel micro-didáctico esta segunda distinción es clásica, ya que se diferencian las variables asociadas con el problema de las variables asociadas con la organización y la gestión del ‘medio’” (Brousseau, 1986, citado en Artigue, 1995, p. 51).

Por lo tanto, en esta etapa en cuanto a la concepción de la situación se describirán los problemas que constituirán la situación didáctica, las variables que están involucradas (micro-didácticas y macro-didácticas), la manera en la que se organizará el medio y las relaciones que se establecerán en esta.

El análisis a priori se debe concebir como un análisis de control de significado, Artigue (1995) lo describe de la siguiente manera:

(...) de forma muy esquemática, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través

de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. Nótese que la palabra teoría se toma aquí en un sentido amplio, puesto que incluye las construcciones teóricas elaboradas por G. Brousseau durante más de veinte años (como referencia de una de las primeras versiones de la teoría se podría citar a Brousseau, 1972), como también construcciones elaboradas, en conexión más o menos estrecha, por diversos investigadores, entre los cuales R. Douady es unas de las más sobresalientes.

(p. 44)

Por lo tanto, el mismo autor, define que el objetivo del análisis a priori es:

(...) determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (Artigue, 1995, p. 45)

El análisis a priori comprende tanto una parte descriptiva como una predictiva, esta última se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que va a tratar de llevar a los alumnos:

- Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprende.
- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Se proporcionan los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

(Artigue, 1995, p. 45)

Es importante señalar que en el análisis a priori, en particular en la formulación, se pueden añadir los posibles errores de nuestros estudiantes durante la fase de experimentación.

2.4.4 Experimentación

En esta fase da inicio al contrato entre el investigador y el profesor con los estudiantes con los cuales se llevará a cabo la investigación. De Faria (2006, citada en Hernández, 2016) señala que la experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

(p. 54)

Para esta fase, se lleva a cabo la experimentación de la situación didáctica, en la cual debe señalarse todo lo que la involucra, desde el lugar donde se llevó a cabo, las características de los estudiantes, el contexto donde se implementó, el material que se utilizó, etc.

Para llevar a cabo esta fase, se tiene contemplado recoger evidencias mediante videograbación de las sesiones, así como fotografías de cada una de las situaciones planteadas, las producciones de los alumnos, las notas de campo realizadas por la docente.

2.4.5 Análisis a posteriori y validación

Para esta última fase, Artigue (1995) señala que el análisis a posteriori se basa en:

(...) basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se contemplan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante el transcurso. (...) en la confrontación de los dos análisis, el a priori y el a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (p. 48)

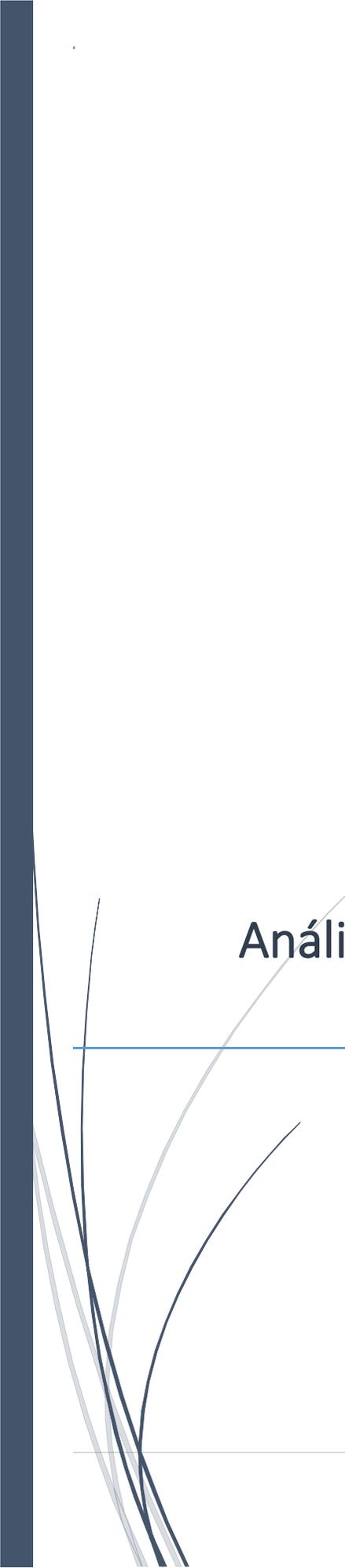
La forma sintetizada de este proceso metodológico se presenta en la

Tabla 1. Métodos y técnicas , donde se incluyen las técnicas de recogida de datos. 1.

Tabla 1.
Métodos y técnicas

Fases	Método	Técnica
-------	--------	---------

Análisis preliminar	Análisis epistemológico (Artigue, 1995)	Revisión de literatura para identificar la evolución referente al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de área.
	Análisis didáctico (Artigue, 1995)	Revisión del plan y programa de estudios 2017, de los libros de texto y materiales escolares.
	Análisis cognitivo (Artigue, 1995)	Elaboración de un cuestionario para identificar concepciones y conocimientos previos de los estandartes.
Concepción de la situación y análisis a priori	Concepción de la situación (Artigue, 1995)	Elaboración de las situaciones de acción, validación, formulación e institucionalización.
	Análisis a priori (Artigue, 1995)	Prueba piloto.
Experimental	Experimentación (Artigue, 1995)	Grabación (video y audio) de la experimentación, fotografías, registros de clase y producciones de los alumnos.
Análisis a posteriori y validación	Análisis a posteriori (Artigue, 1995)	Valoración e interpretación de los resultados alcanzados mediante rubricas.
	Validación (Artigue, 1995)	Cuadro de doble entrada.



Capítulo III. Análisis Preliminares, concepción y análisis a priori

Este capítulo se divide en tres apartados. En el primero se desarrollan los análisis preliminares, en el segundo se lleva a cabo la concepción de la situación didáctica y en el tercero se presenta el análisis a priori de la misma.

3.1 Análisis preliminares

El desarrollo de este apartado se divide en tres. El primer apartado hace referencia al análisis epistemológico del concepto de área, en particular, cómo a lo largo de la historia se ha trabajado con este concepto. En el segundo, se realizó un análisis didáctico, el cual se realizó a través del análisis de algunos libros de texto distinguiendo la manera en la que se aborda este concepto en primer grado de educación secundaria. Finalmente, para el tercer apartado a través de la elaboración de un instrumento se realizó un análisis cognitivo.

3.1.1 Análisis epistemológico del concepto de área

En este apartado se considera la manera en la que el concepto de área aparece en la geometría, su paso por la historia, las necesidades que lo generaron.

Los primeros acercamientos a la geometría se consideran muy antiguos, se cree que “se originaron en observaciones realizadas por el hombre, gracias a su habilidad para reconocer y comparar formas y tamaños” (Peña, 2010, p. 63). El concepto de área aparece de manera inmersa en el origen de la geometría con los egipcios, pues se le atribuye al valle del río Nilo, en el antiguo Egipto. Esto lo podemos observar en lo que el historiador Proclo citado en Peña (2000) dice al respecto:

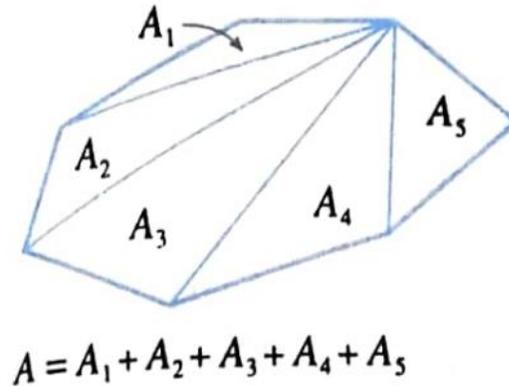
“...de acuerdo con la mayoría de las versiones, la Geometría fue primeramente descubierta en Egipto, teniendo su origen en la medición de áreas, ya que ésta era una necesidad para los egipcios, debido a que el Nilo, al desbordarse, barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada cual. Por tanto, no es sorprendente que el descubrimiento de la Geometría y otras ciencias tuvieran su origen en las necesidades prácticas, viéndose que todas las cosas se encuentran en el camino que progresa de lo imperfecto a lo perfecto”. (p. 26)

Con lo anterior, podemos observar como el concepto de área aparece en el origen de la geometría a partir de una necesidad del hombre. Además, se observa que se habla de una delimitación de superficies.

Por su parte los antiguos griegos hace unos 2500 años, hallaron áreas aplicando “el método del agotamiento”, pues sabían cómo encontrar el área de cualquier polígono al dividirlo en triángulos y sumar las áreas de los triángulos (Stewart, 2010) como se puede observar en la Figura 6.

Figura 6.

Polígono dividido en triángulos

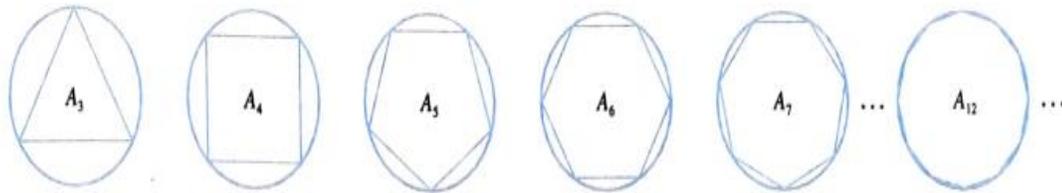


Fuente: Stewart (2010)

Por otra parte, “el método exhaustivo”, consistía en inscribir polígonos en la figura y circunscribir otros polígonos en torno a la misma y hacer que el número de los lados de los polígonos aumentara. La Figura 7 muestra el caso de un círculo, con polígonos regulares inscritos:

Figura 7.

Método exhaustivo



Fuente: Stewart (2010)

Diversas culturas (e.g., babilónica, egipcia, sumeria) resolvieron problemas concernientes al área de polígonos, a la superficie contenida en una circunferencia y a las relaciones que pueden establecerse con las áreas contenidas tanto en las curvas como por los polígonos utilizando técnicas de trazo y fórmulas que se encuentran en papiros y tablas de arcilla (Cortés, 2012 citado en González, Santa y Londoño, 2015).

Desde los tiempos más antiguos, la medición de las áreas de las superficies ha sido muy importante y necesaria para el hombre. La tradición atribuye los principios de la geometría como ciencia a las prácticas primitivas de la agrimensura en Egipto y define la palabra geometría como “la medición de la tierra” (Peña, 2010).

En la antigua Grecia el área no era expresada mediante un valor numérico ni con unidades de medida, por lo tanto, en su definición: no hay números involucrados en el

discurso; se demuestra a partir del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas, lo que le da un carácter algo lúdico. “Esta característica es común a todas las demostraciones de áreas” (Jiménez, 2010, citado en Villamil, Aldama y Wagner 2017, p. 269).

De acuerdo a Corberan (1996, citado en Villamil, Aldama y Wagner, 2017) “los procedimientos geométricos más frecuentes se realizan por la comparación directa o indirecta de las superficies” (p. 269). Estos procedimientos proponen actividades que involucran la superposición o un recorte a “trozos” de una o de las dos superficies con el fin de establecer una comparación del área considerada como el “espacio ocupado por una región”.

En la actualidad, el área es definida según la postura de diferentes autores, sin embargo, todas se encaminan o retoman lo mismo, Barnett y Uribe (1990) mencionan en que se llama área de una figura a “la medida de la superficie ocupada por dicha figura” (citado en Villamil, Aldama y Wagner 2017, p.270).

3.1.2 Análisis didáctico del concepto de área

En este apartado se analiza el libro “Matemáticas 1. Conecta Más Secundaria” (Block, García, & Balbuena, 2018), este libro se utiliza de apoyo en la secundaria en la que se llevó a cabo la experimentación, del cual se analizó la manera en la que se aborda el tema de área, cabe resaltar que éste se trabaja en conjunto con el tema de perímetro. El aprendizaje esperado que maneja el libro donde aparece el concepto es: calcula el perímetro de polígonos y área de triángulos y cuadriláteros, desarrollando y aplicando formulas (ver Figura 8).

Así, el libro comienza con una actividad donde los estudiantes deben imaginar rectángulos diferentes y algunos objetos con esta forma, para después proponer algún procedimiento para calcular su perímetro y área.

Figura 8.

Actividad 1 de inicio propuesta por el libro.

The image shows a page from a textbook. On the left, there is a purple circle with the word 'SECUENCIA' and the number '17'. The main title of the page is 'Perímetro y área I' in a large, bold, purple font. Below the title, it says 'Lección 56. Medidas de rectángulos'. There is a section titled 'Aprendizaje esperado:' followed by the text 'Calcula el perímetro de polígonos y áreas de triángulos y cuadriláteros, desarrollando y aplicando fórmulas.' To the right of this section is a numbered list starting with '1. Imagina rectángulos diferentes (pequeños, grandes, angostos...) y objetos con forma de rectángulo (losetas, ventanas, mesas, canchas deportivas...). Describe qué medidas son necesarias y qué procedimiento utilizarías para calcular su perímetro y su área.' Below the list are four horizontal lines for writing. At the bottom left, there is a small orange box with the word 'explícito:' followed by the text 'que se expresa'.

Fuente: Block, García y Balbuena (2018)

Para la actividad 2 propuesta por el libro (Figura 9 y Figura 10), se puede observar que se va de lleno a que los alumnos calculen el área y perímetro de algunos rectángulos variando únicamente la manera en el que se presentan y los datos. Se pretende que mediante la realización de estos ejercicios los alumnos lleguen a la generalización de la fórmula para calcular el área del rectángulo. Nuevamente podemos observar que el tratamiento que se le da al concepto es mediante la repetición de varios ejercicios involucrando únicamente las imágenes que propone el libro e involucrando a los estudiantes únicamente en la observación.

Figura 9.

Actividad 2 propuesta por el libro para el tratamiento del rectángulo

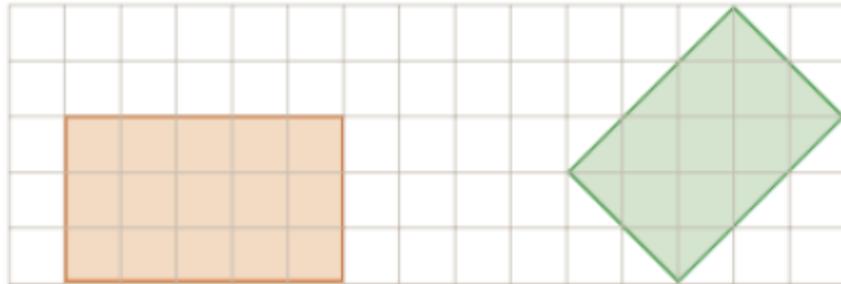
de manera clara y evidente, es decir, sin información oculta o lugar para dobles interpretaciones.

DESCUBRO MÁS

Explica por qué el área del rectángulo verde no es seis cuadrados.

2. Determina el área y el perímetro de cada rectángulo. Considera que en algunos casos la medida de los lados no se da **explícitamente**.

a) Rectángulos trazados en una cuadrícula. La unidad de área es un cuadrado pequeño y la unidad de longitud es un lado de ese cuadrado.



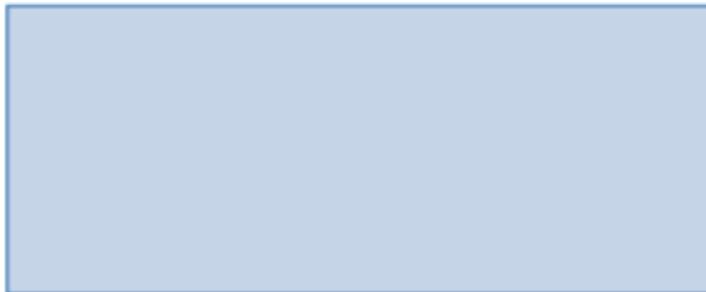
A = _____

A = _____

P = _____

P = _____

b) Rectángulo con medidas reales. Usa tu juego de geometría para medir lo necesario y responder.



A = _____

P = _____

Figura 10.

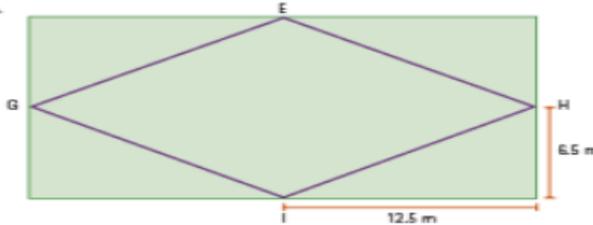
Actividad 2 propuesta por el libro para el tratamiento del rectángulo.

Forma, espacio y medida • Magnitudes y medidas

c) Rectángulos con medidas ocultas. E, G, H e I son los puntos medios de los lados del rectángulo.

A = _____

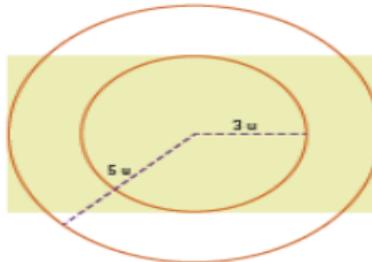
P = _____



El radio del círculo pequeño mide 3 unidades y el radio del círculo grande, 5 unidades.

A = _____

P = _____



d) Rectángulo con medidas representadas con literales. El largo mide m y el ancho mide n .

A = _____

P = _____



En grupo, analiza cada respuesta. En caso de haber diferencias, averigüen a qué se deben (tengan en cuenta que puede haber más de una respuesta correcta). Analicen la información del recuadro y comenten por qué es importante usar literales en el ejemplo que ahí se menciona.

El primer resultado del inciso d) es la expresión general del área de cualquier rectángulo y, al mismo tiempo, la fórmula con que se calcula.

La expresión con palabras es "área (del rectángulo) es igual a largo por ancho".

En este caso, la expresión con literales es $A = mn$, aunque normalmente se utilizan las literales b (base) y h (altura), de manera que la fórmula más conocida es $A = bh$, pero ambas expresiones dicen lo mismo.

DESCUBRO MÁS
¿Qué relación hay entre las medidas de los radios y las de los lados del rectángulo?

DESCUBRO MÁS
¿Por qué se suele escribir $A = bh$ en lugar de $A = b \times h$?

Fuente: Block, García y Balbuena (2018)

La secuencia propuesta por el libro en Figura 11, Figura 12 y Figura 13 espera que los alumnos determinen las fórmulas de las diferentes figuras, a partir de analizar en ellas algunas modificaciones que ya tiene ilustradas el libro. Plantear a los estudiantes este tipo de tareas no les implica un reto, pues se observa que se guía a éstos paso a paso de lo que deben realizar y no ponen en juego sus habilidades de

búsqueda para tratar de resolverlas por sí mismo mediante un análisis o con una actividad que verdaderamente les implique poner en juego sus habilidades de observación, búsqueda, análisis, etc. Además, la tarea principal de los alumnos se limita a observar las ilustraciones del libro y no se les da la oportunidad de que se involucren en el proceso, como se espera que lo hagan al trabajar geometría en este nivel.

Figura 11.

Actividades propuestas por el libro para el tratamiento del romboide y trapecio

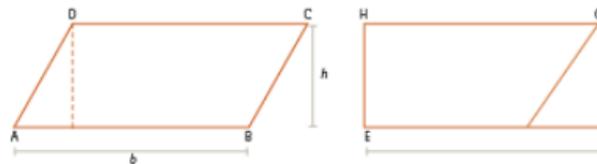
Secuencia 17

Lección 57. **Unas fórmulas surgen de otras I**

1. Analiza la información y responde o haz lo que se indica.

romboide: cuadrilátero sin ángulos rectos, con dos pares de lados opuestos paralelos y de igual medida, y con lados adyacentes desiguales.

El romboide ABCD se transformó en el rectángulo EFGH, mediante el corte y el reacomodo que se muestran con líneas punteada.



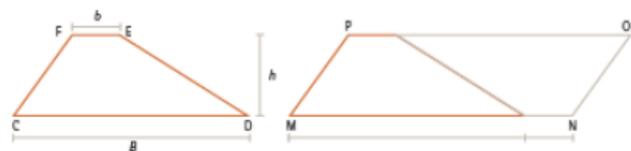
- a) Anota, junto a la figura, las medidas (ancho y largo) del rectángulo a partir de las del romboide.
- b) ¿Cuál es el área del cuadrilátero EFGH? _____ ¿Y la de ABCD? _____
- c) Completa el texto.

Cualquier romboide puede transformarse en un _____ con la misma base y la misma _____. Por tanto, la fórmula del área del romboide también es _____.

DESCUBRO MÁS
Las dos figuras de la actividad 1 tienen la misma área. Explica por qué.

trapecio: cuadrilátero con un solo par de lados paralelos.

2. El romboide MNOP se formó con dos **trapecios** CDEF. Contesta o haz lo que se indica.



- a) Con base en las medidas del trapecio (B, b, h), anota las medidas del romboide.
Base del romboide: _____ Altura del romboide: _____
- b) ¿Cuál es el área del romboide? _____
- c) ¿Y la del trapecio? _____
- d) Completa el texto.

La base del romboide MNOP es $B + b$ y su altura es _____. Por tanto, su área es _____. Como la superficie del trapecio CDEF es la mitad de la superficie del romboide, el área del trapecio es _____.

TIC MÁS
Convierte romboides en rectángulos en www.redir.mx/SCMM1-128.

Figura 12.

Actividades propuestas por el libro para el tratamiento del trapecio y cuadrado

Forma, espacio y medida • Magnitudes y medidas

Con ayuda del profesor, valida tus respuestas. Comenten si todos expresaron de la misma manera las áreas del romboide MNOF y el trapecio CDEF. Después, analicen la siguiente información.

En un trapecio se distinguen tres dimensiones: la base mayor (B), la base menor (b) y la altura (h). La fórmula del área del trapecio expresada con palabras es "base mayor más base menor por altura entre dos".

3. Otra manera de transformar el trapecio en un romboide consiste en hacer un corte paralelo a las bases y a la mitad de la altura y después reacomodar las piezas.



a) Anota las medidas del romboide a partir de las del trapecio.

Base del romboide: _____ Altura del romboide: _____

b) ¿Cuál es el área del romboide? _____

c) ¿Cuál es el área del trapecio? _____

d) Considera que $B = 9$, $b = 2$ y $h = 4$. Verifica que $\frac{(B + b)h}{2} = (B + b)\frac{h}{2}$.

4. Observa la figura y responde.

a) ¿Qué fórmula conoces para calcular el área de un cuadrado? _____

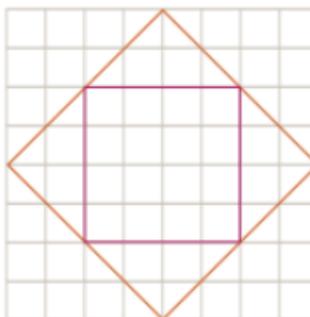
b) Si la unidad de medida es la superficie de un cuadrado, ¿cuál es el área del cuadrado central? _____

c) ¿Y la del cuadrado exterior? _____

d) ¿Qué relación hay entre las áreas de ambas figuras? _____

e) Verifica que un lado del cuadrado exterior mide lo mismo que la diagonal del central.

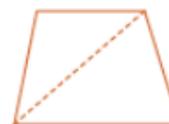
f) ¿Cómo calcularías el área de un cuadrado usando la medida de su diagonal? _____



MÁS IDEAS

Un trapecio es isósceles si los lados no paralelos son del mismo tamaño. En un trapecio escaleno, los cuatro lados tienen distinta medida. Un trapecio rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto.

diagonal: segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono. Un ejemplo en un cuadrilátero es el siguiente:



Fuente: Block, García y Balbuena (2018)

Figura 13.

Actividades propuestas por el libro para el tratamiento del trapecio y cuadrado

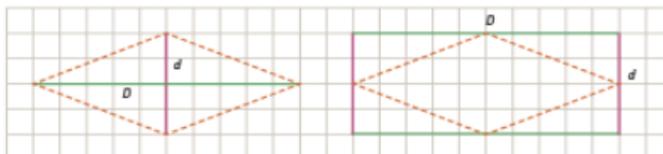
Secuencia 17

Lección 58. Unas fórmulas surgen de otras II

1. Analiza la información y responde.

MÁS IDEAS
 Todos los cuadrados son rombos, pero no todos los rombos son cuadrados.

Tanto los rombos como los cuadrados tienen cuatro lados iguales, pero difieren en que el cuadrado siempre tiene cuatro ángulos rectos, mientras que el rombo puede tener ángulos agudos y obtusos.

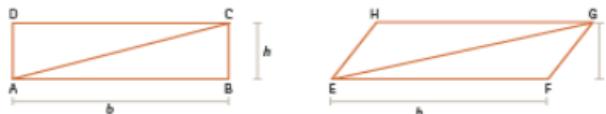


- ¿Cuál es el área del rectángulo de la derecha? _____
- ¿Qué relación hay entre el área del rectángulo y la del rombo? _____
- Considerando la respuesta anterior, ¿cuál es el área del rombo? _____
- Si el área del rectángulo es Dd , ¿cómo se expresa el área del rombo a partir de sus diagonales? _____

MÁS IDEAS
 Dd significa lo mismo que $D \times d$ (diagonal mayor por diagonal menor).

MÁS IDEAS
 Para la siguiente lección deberás traer un objeto pequeño de metal (cuchara, moneda, llavero con algunas llaves, tornillo, etc.); o bien, una piedra pequeña, del tamaño de una canica. Es importante que los objetos no representen un peligro al ser manipulados, como cuchillos o piedras cortantes. También necesitarás un recipiente pequeño (bote de medicina, frasco de perfume, probeta, etc.), de preferencia con la forma más extraña que encuentres. Con esta actividad reflexionarás cómo comparar el volumen de los objetos entre sí, usando la capacidad de los recipientes.

2. A partir de las medidas del rectángulo y el romboide, contesta o haz lo que se indica.



- ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD? _____
- La diagonal AC divide al rectángulo en dos triángulos iguales. Expresa, usando las medidas b y h , el área de uno de los triángulos. _____
- ¿Cuál es el área del romboide EFGH? _____
- La diagonal EG divide al romboide en dos triángulos iguales. Expresa, usando las medidas b y h , el área de uno de los triángulos. _____
- Completa el texto.

Cualquier triángulo corresponde a la mitad de un _____ o de un _____. Como la fórmula del área de un rectángulo o de un romboide es _____, entonces la fórmula del área de un triángulo es _____.

Fuente: Block, García y Balbuena (2018)

Para finalizar el tema, el libro propone a los alumnos complementar un cuadro donde deben colocar las fórmulas que trabajaron en la sesión anterior (Figura 14). Cabe rescatar que el estudio de la geometría debería contribuir a los estudiantes a desarrollar habilidades de visualización, a tener un pensamiento crítico, a realizar conjeturas y a desarrollar un razonamiento deductivo, argumento lógico y de prueba

(Jones, 2003) lo que se ve limitado en el libro de texto debido a que su secuencia guía a los alumnos especificando lo que deben hacer (pensar en una fórmula y aplicarla varias veces) lo que provoca que estos traten de memorizarlas y no lleguen a una comprensión.

Figura 14.

Actividad para determinar fórmula del área para diferentes figuras

Forma, espacio y medida • Magnitudes y medidas

Taller de matemáticas

1. Anota los datos que faltan en la tabla. En algunos casos se necesita información para la fórmula del perímetro.

Figura	Dimensiones	Fórmula del área	Fórmula del área con palabras	Fórmula del perímetro
	base: b altura: h			
				No hay suficiente información
			Área igual a lado por lado	
		$A = \frac{Dd}{2}$		

2. Calcula el perímetro y el área de cada figura. Haz los cálculos en tu cuaderno.

3.1.3 Análisis cognitivo del Concepto de Área

Para realizar este análisis se aplicó un cuestionario para identificar los conocimientos previos y algunos errores que tienen los alumnos según los reportes de los autores respecto al concepto de área (Araya y Alfaro, 2010; Blanco, 2001; Hart, 1984; Bohórquez, 2004; Bocco y Center, 2010). Este análisis se aplicó a 13 alumnos de primer grado, grupo B, de la escuela secundaria “Moisés Sáenz Garza” los cuales se encuentran entre los 11 y 12 años. Se presentan los resultados.

Las preguntas quedaron distribuidas de la siguiente forma:

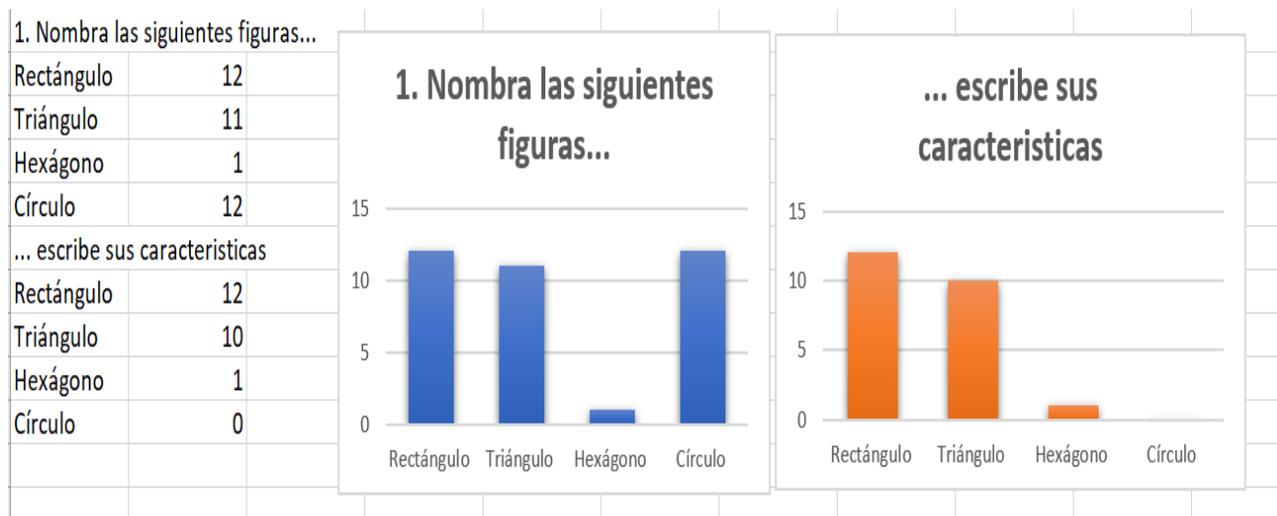
- Pregunta 1, 2, 3: identificación de figuras por su nombre y sus características.
- Pregunta 4, 5: busca definir conceptos geométricos (área y perímetro).
- Pregunta 6, 7, 9: identificación, aplicación y trazo de fórmulas de figuras geométricas.
- Pregunta 8, 10: identificación de la conservación del área y resolución de problemas.

Análisis de las preguntas:

- **Pregunta 1:** los estudiantes muestran que conocen el nombre y características del rectángulo y del triángulo. Tienen dificultades para nombrar las figuras con más de 4 lados y no identifican las características del círculo, solo lo logran nombrar (Figura 15).

Figura 15.

Resultados del cuestionario a la pregunta 1.



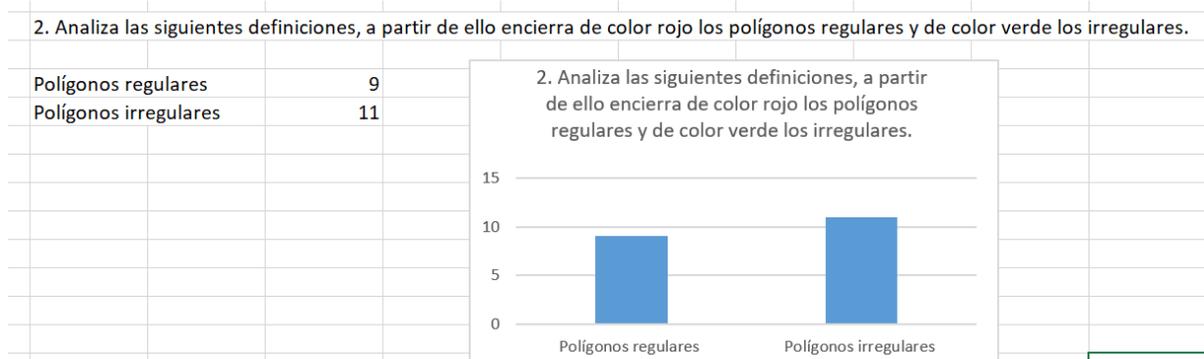
Fuente: Elaboración propia.

- **Pregunta 2:** Con esta pregunta podemos observar que los estudiantes identifican a partir de las definiciones la clasificación de polígonos regulares e

irregulares, aunque se sigue presentando un porcentaje (25%) que no logra hacerlo (Figura 16).

Figura 16.

Resultados del cuestionario a la pregunta 2.

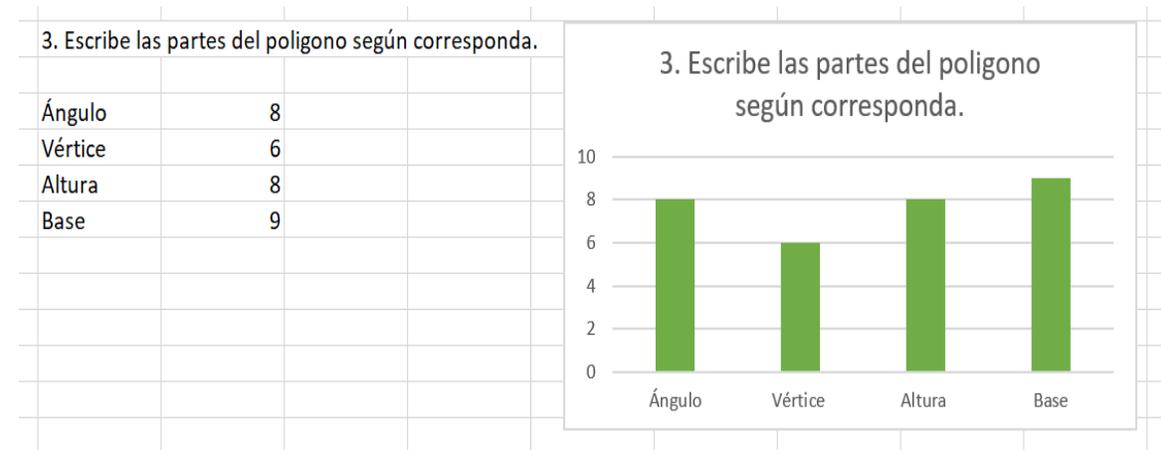


Fuente: Elaboración propia.

- **Pregunta 3:** las respuestas a esta pregunta nos permiten identificar conocimientos básicos, de lo cual podemos observar que la mayoría de los estudiantes pueden nombrar las partes de la figura, sin embargo, existen algunos (4 alumnos) que no lo logran hacer (véase Figura 17). Los estudiantes identifican la base, altura, ángulos, pero en menor medida, los vértices, y en el grupo hay 4 alumnos que no logran asociarlos.

Figura 17.

Resultados del cuestionario a la pregunta 3.

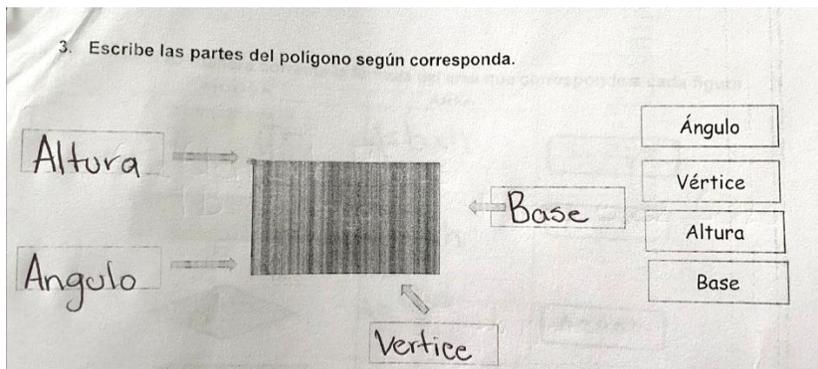


Fuente: Elaboración propia.

Una muestra de lo encontrado en la pregunta 3 es lo escrito por el alumno 1, (véase Figura 18), quien coloca las partes del polígono de manera incorrecta, pues no comprende a que hace referencia cada uno de los conceptos, por lo que el único que logra colocar de manera correcta es el ángulo, el cual lo pudo realizar por suerte.

Figura 18.

Resultados del cuestionario a la pregunta 3 del A1.



- **Pregunta 4.** Con esta pregunta pretendíamos observar si los alumnos identifican el concepto de área en una figura de manera visual, de la cual rescatamos que existe la confusión del concepto con el de perímetro pues solo tres de los estudiantes la contestaron correctamente (ver Figura 20 y Figura 20).

Figura 19.

Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 4.

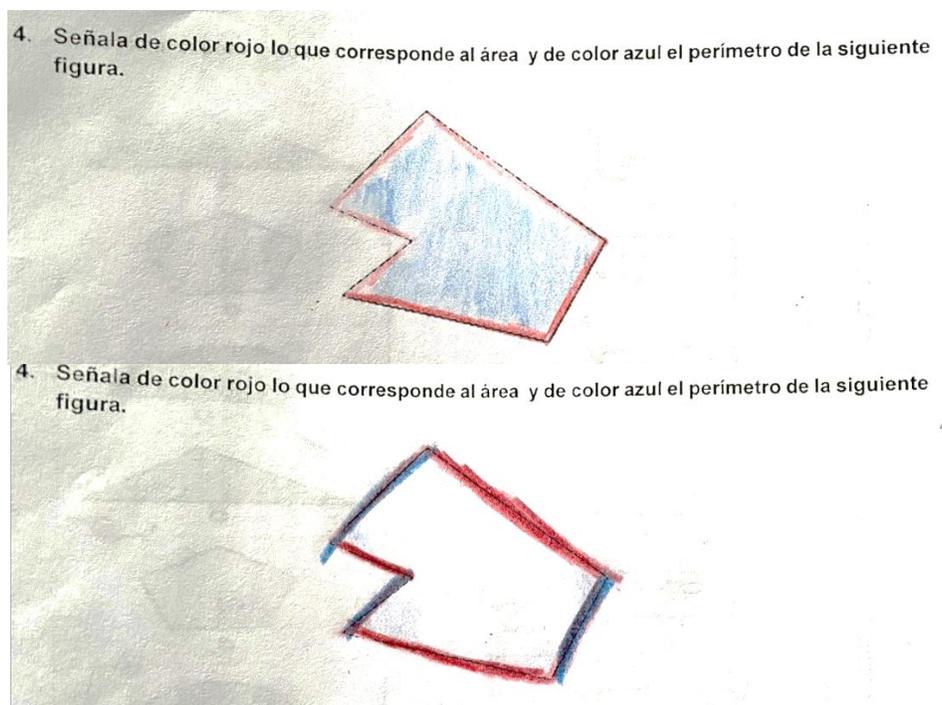
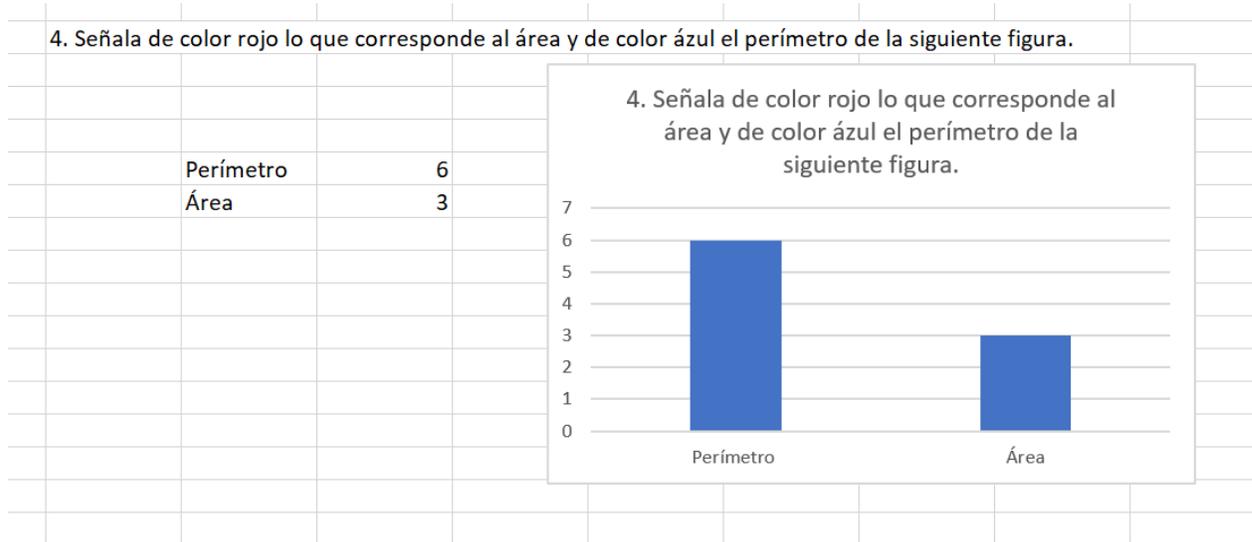


Figura 20.

Resultados del cuestionario a la pregunta 4.

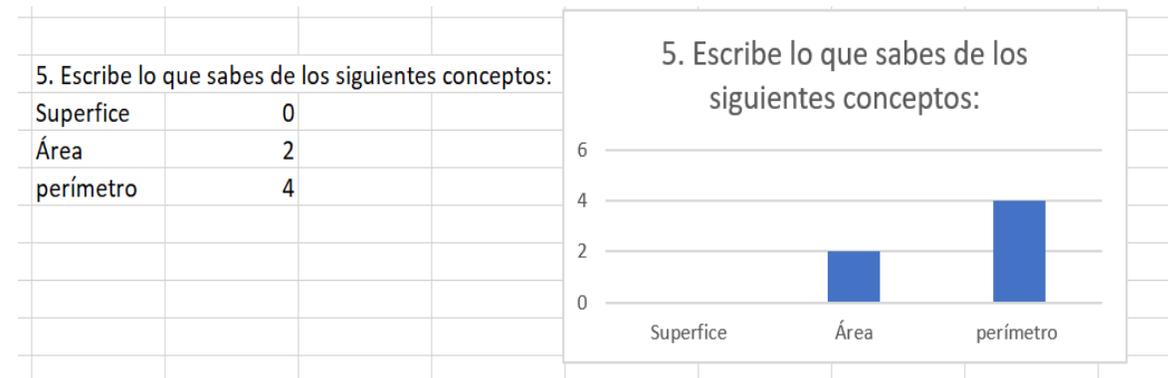


Fuente: Elaboración propia.

- **Pregunta 5:** se evidencia con esta pregunta cómo los estudiantes definen el concepto de superficie, área y perímetro a partir de lo que ellos conocen, rescatamos de ellos que los alumnos asocian la definición a las fórmulas, además que confunden los conceptos entre sí (Figura 21 y Figura 22).

Figura 21.

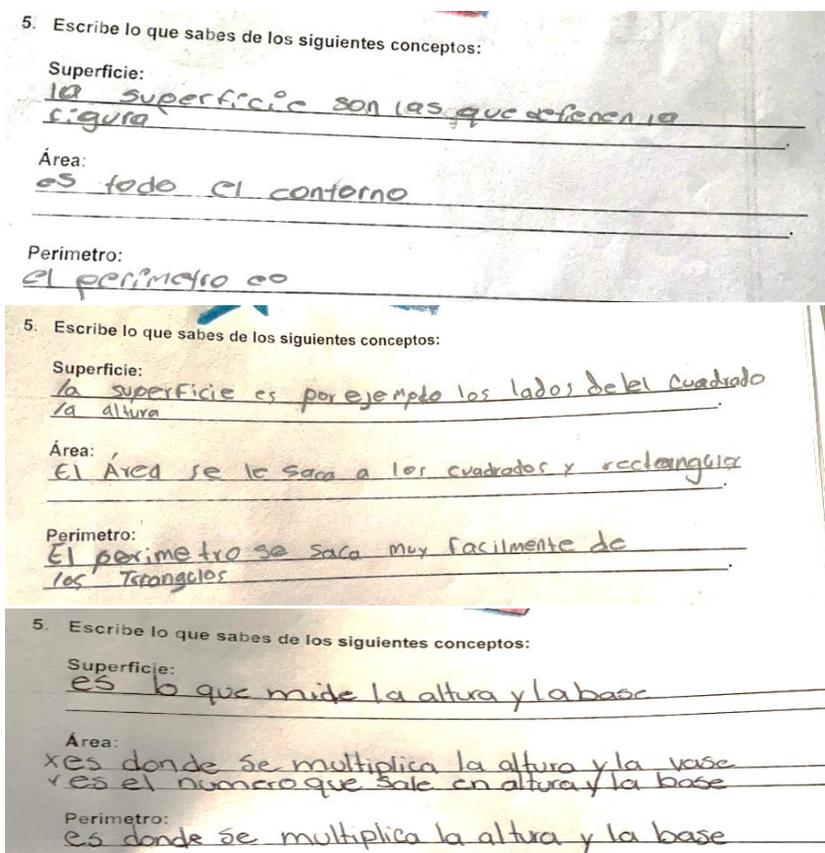
Resultados del cuestionario a la pregunta 5.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 22.

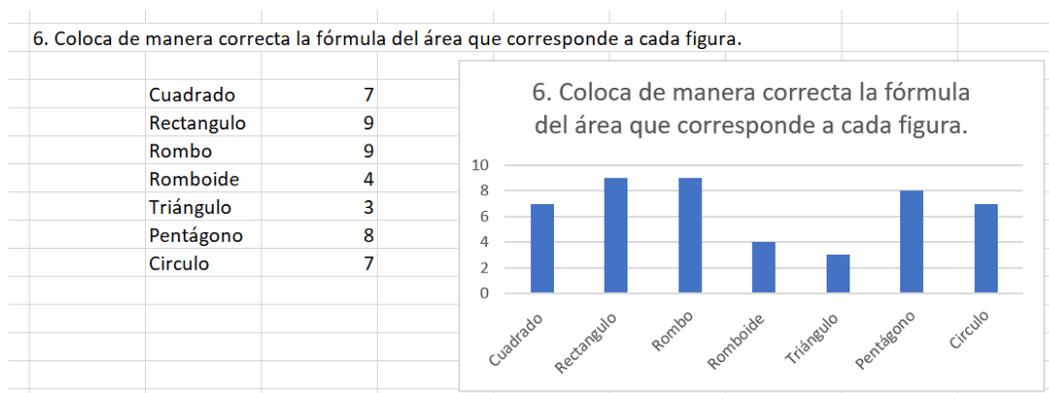
Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 5.



- **Pregunta 6:** Se evidencia que los estudiantes tienen dificultad para identificar las fórmulas del área para el romboide y triángulo, lo que nos permite identificar que éstos como lo señalan en los antecedentes trabajan regularmente con figuras comunes (Figura 23 y Figura 24).

Figura 23.

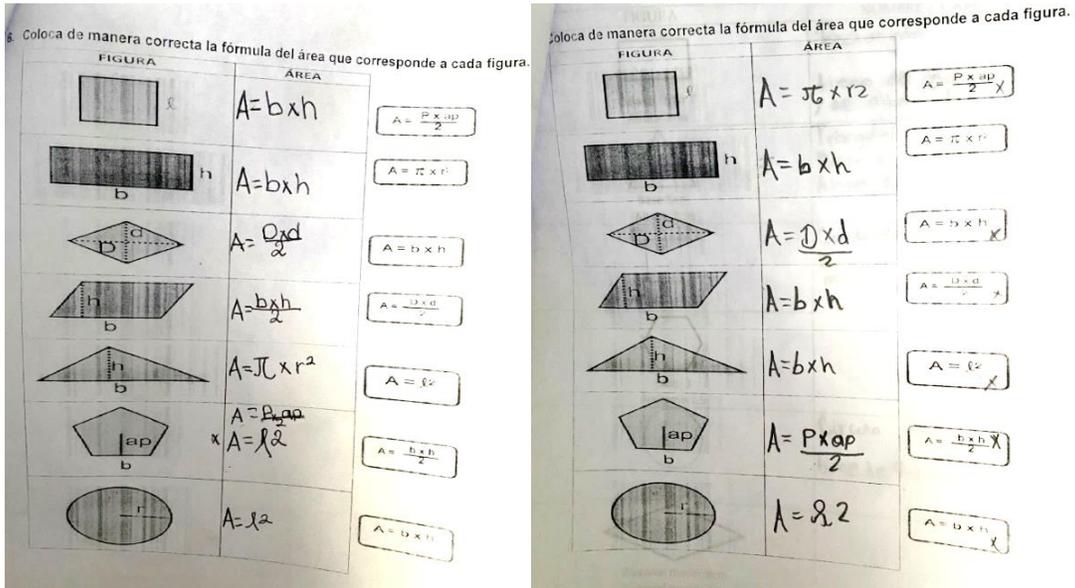
Resultados del cuestionario a la pregunta 6.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 24.

Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 6.

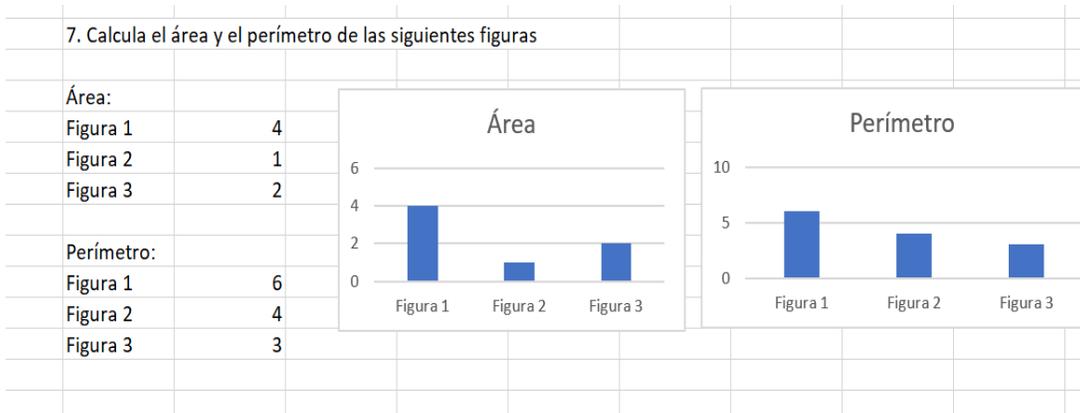


Fuente: elaboración propia.

- **Pregunta 7:** en esta pregunta se observa que los estudiantes tienen dificultad para calcular el área y el perímetro de las figuras, pues tratan de asociarlas con las fórmulas o los datos de éstas, además que la confusión entre ambos conceptos se sigue presentando (Figura 25 y Figura 26).

Figura 25.

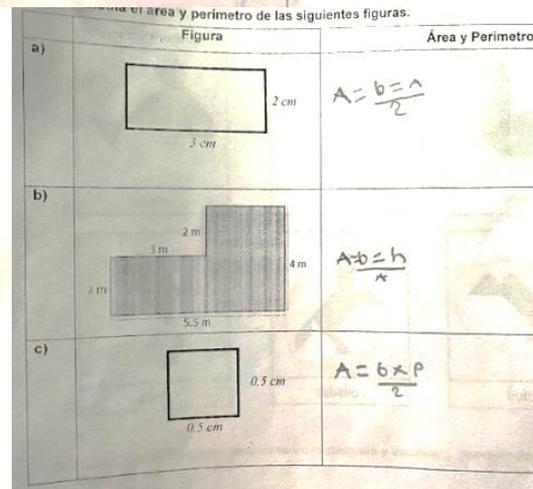
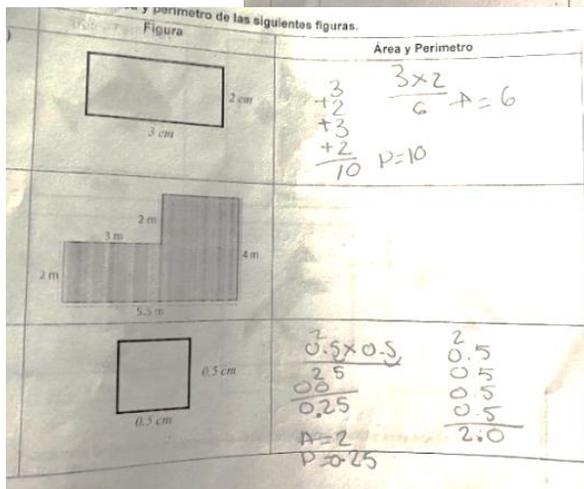
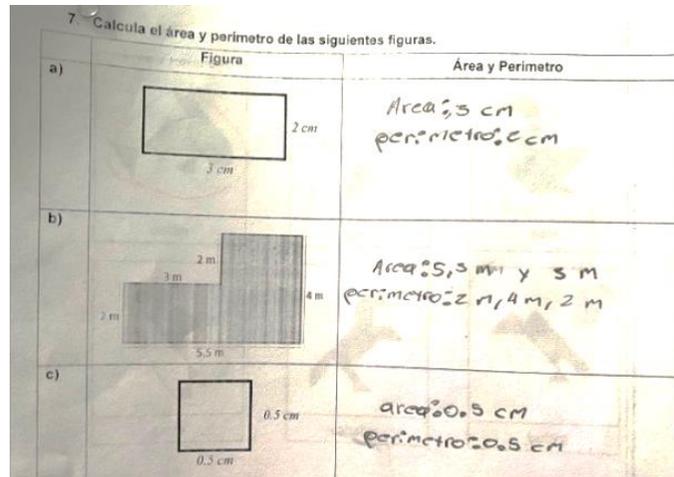
Resultados del cuestionario a la pregunta 7



Fuente: Elaboración propia.

Figura 26.

Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 7.



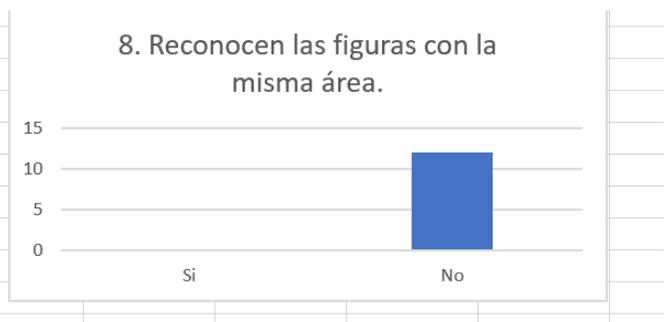
Fuente: Elaboración propia.

- **Pregunta 8:** esta pregunta nos permite observar que los estudiantes asocian el área con la forma de las figuras y tratan de señalar como iguales las que tienen formas similares y aunque éstas están elaboradas con el mismo tangram no logran identificar que tienen la misma área (Figura 27 y Figura 28).

Figura 27.

Resultados del cuestionario a la pregunta 8.

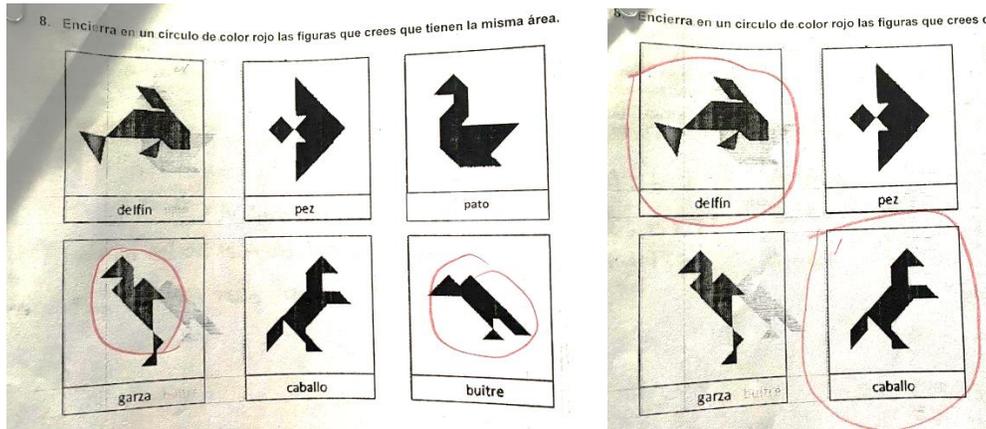
8. Reconocen las figuras con la misma área.	
Si	0
No	12



Nota: Elaboración propia.

Figura 28.

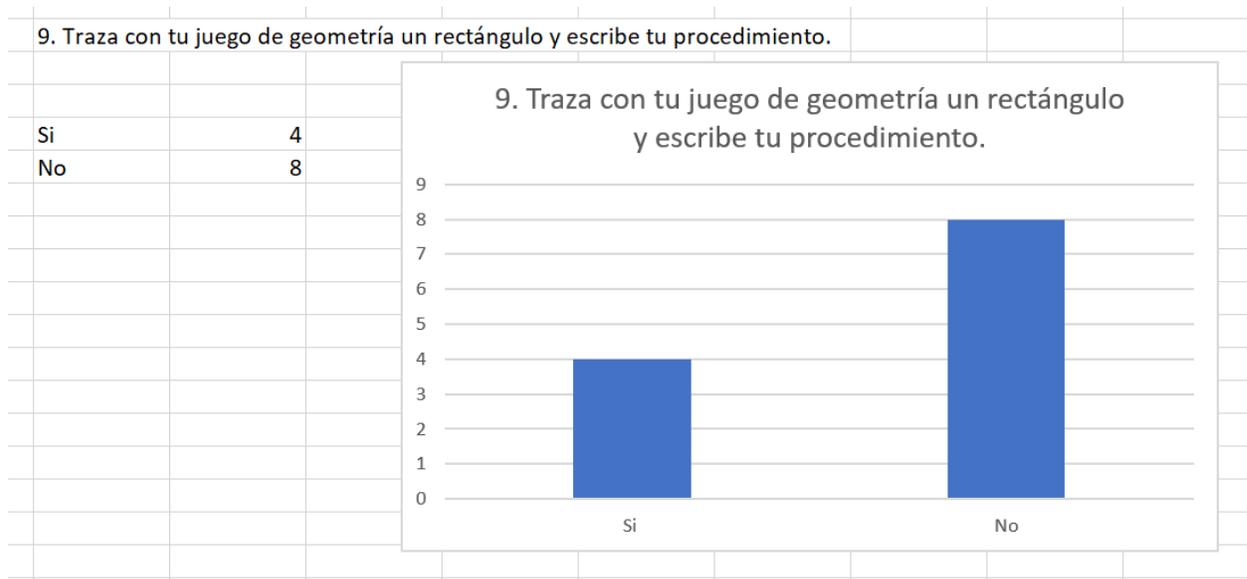
Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 8.



- **Pregunta 9:** con esta pregunta podemos identificar que el procedimiento de los alumnos para realizar el trazo del rectángulo es mediante ensayo y error, pues no utilizan ninguna estrategia elaborada para ello (Figura 29 y Figura 30).

Figura 29.

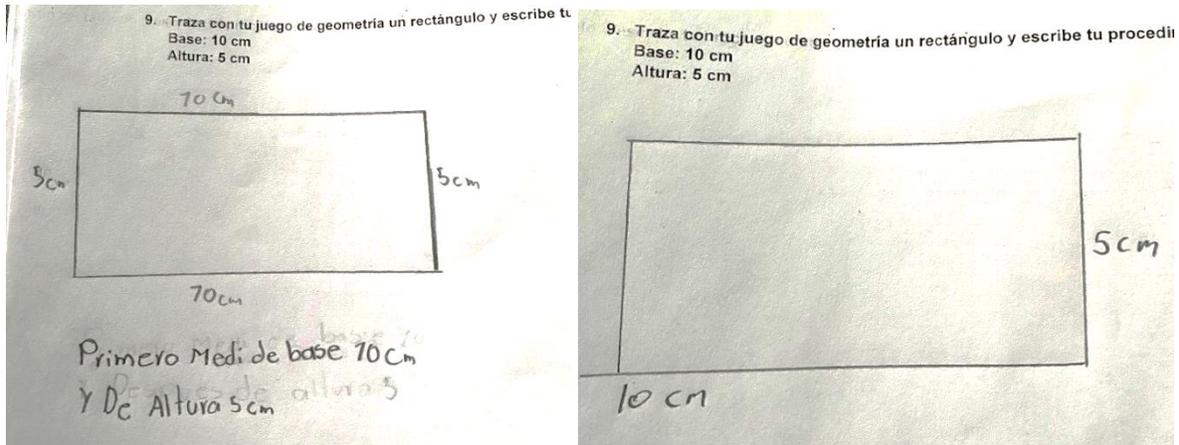
Resultados del cuestionario a la pregunta 9.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 30.

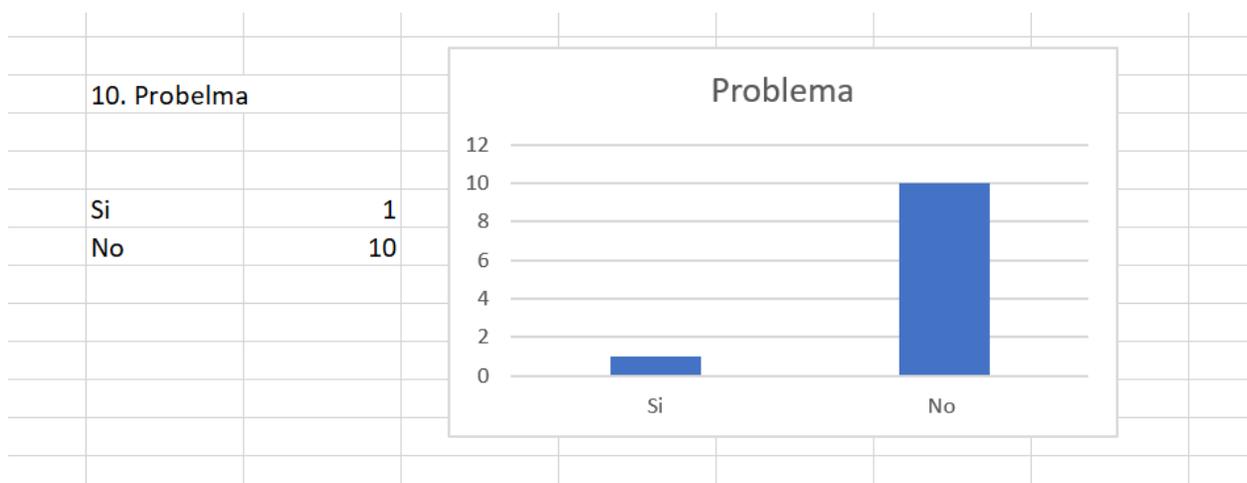
Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 9.



- **Pregunta 10:** para esta pregunta podemos observar que los estudiantes tienen dificultad para resolver problemas asociados a la obtención del área, pues se quedan en la identificación de los datos (Figura 31 y Figura 32).

Figura 31.

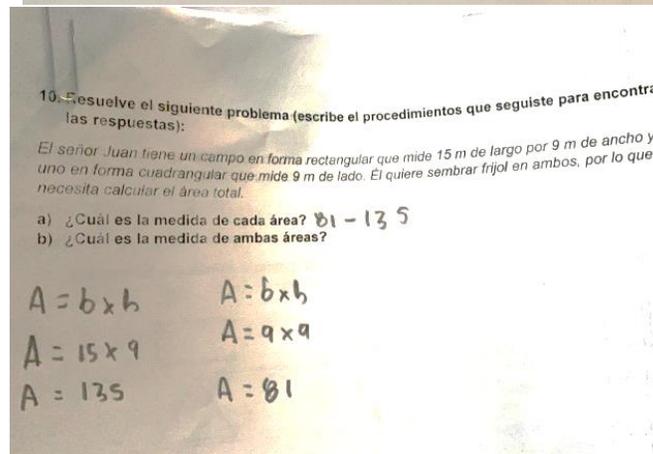
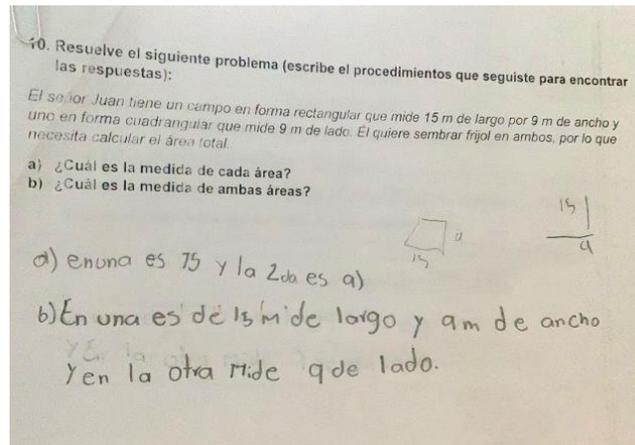
Resultados del cuestionario a la pregunta 10.



Fuente: elaboración propia.

Figura 32.

Resultados de los alumnos del cuestionario a la pregunta 10.



Fuente: elaboración propia.

De manera general, del análisis epistemológico, podemos mencionar que el concepto de área surge a partir de la necesidad de la delimitación y conservación de superficies y que su estudio en las diferentes culturas se inclina a esto. Se puede observar que la manera en la que se calculaba el área de las figuras era mediante la transformación de éstas en otras para poder así determinarla, además se destaca la importancia de la manipulación en el proceso, como en la antigua Grecia, lo cual tomamos como punto de partida para nuestra propuesta.

Del análisis didáctico, se puede observar que, en la secuencia del libro analizado, hay énfasis en la memorización de las fórmulas para calcular el perímetro y el área, no se toman en cuenta los sentidos de los alumnos para realizar el primer acercamiento al concepto, tal como se señala en los antecedentes, y en gran medida se guía a los alumnos especificando lo que deben hacer (pensar en una fórmula y aplicarla varias veces) lo que provoca que éstos traten de memorizarlas. De esta manera, es que en la situación se promoverá que los estudiantes manipulen material didáctico, para que, aprovechen sus sentidos para consolidar sus conocimientos con respecto al área.

Y, del análisis cognitivo, se observó que existe la confusión del concepto de área con el de perímetro, pues pocos estudiantes contestan y argumentan correctamente el instrumento. También, que la mayoría de los estudiantes asocian el área con la forma de las figuras y tratan de señalar como iguales las que tienen formas similares y aunque todas las figuras estaban elaboradas con el mismo tangram, ningún alumno logra identificar que tienen la misma área. Por lo que, la situación promoverá la distinción entre área y perímetro y la identificación de figuras de misma área con diferente forma.

3.2 Concepción de la situación didáctica.

En este apartado se plantea la situación didáctica con base en los análisis preliminares (epistemológico, didáctico y cognitivo). La situación didáctica está organizada en cuatro actividades. Cada actividad fue diseñada para que ayude a los alumnos en la construcción del concepto de área.

3.2.1. Actividad I

Objetivo: Se pretende que los estudiantes determinen el área de polígonos a partir del recubrimiento de éstos.

Organización de la clase: Organizar a los alumnos en equipos de 3 integrantes, se les entregará una hoja de trabajo que contenga la consigna 1, además de hojas de color con las plantillas del círculo, cuadrado y triángulo. Se especificará que los cuadrados y triángulos tienen área 1cm^2 y el círculo área 0.8cm^2 . Además, se les facilitará tijeras y pegamento. Para llevar a cabo esta actividad se estima un tiempo de 50 minutos.

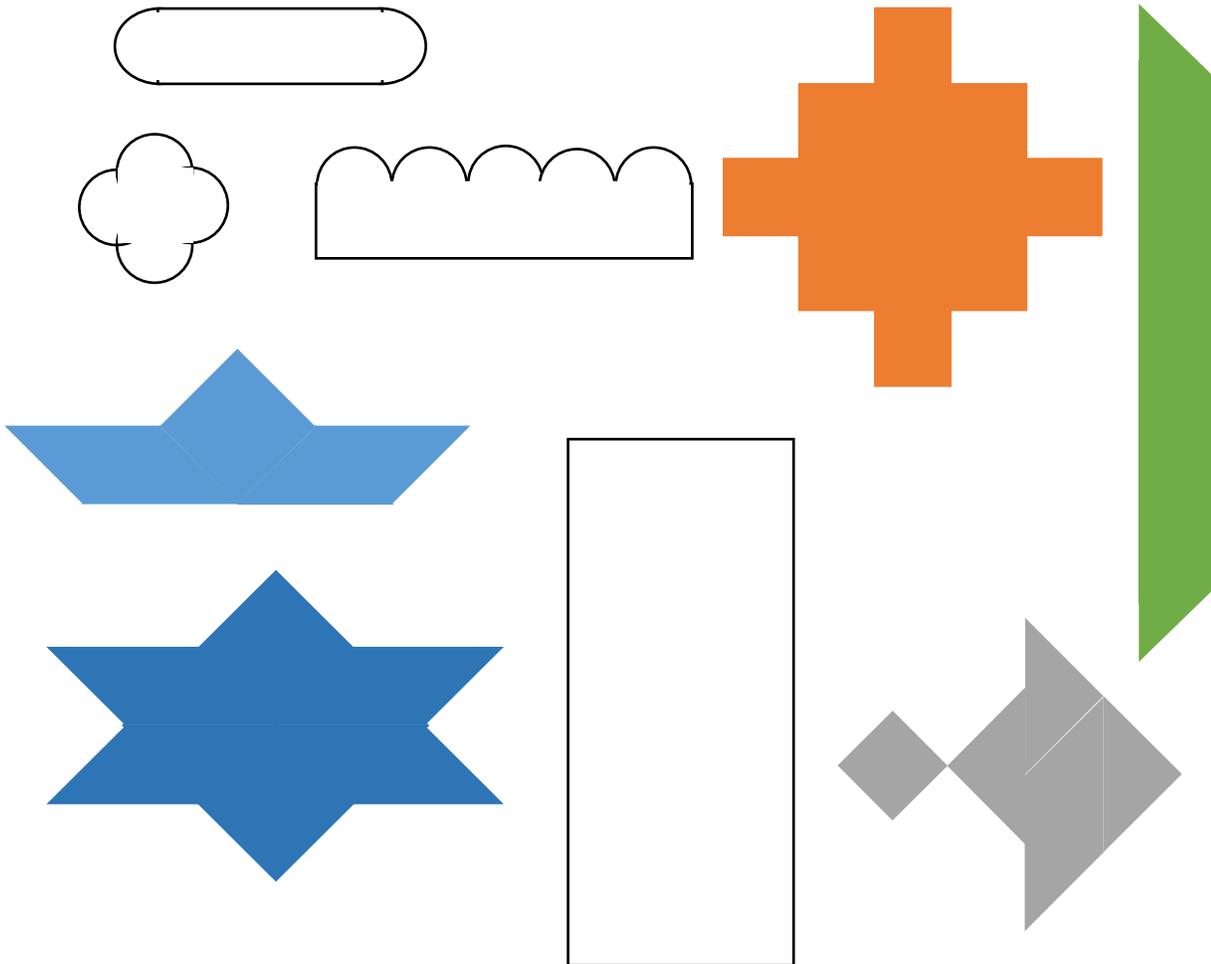
Material didáctico:

- Hoja de trabajo por equipo.
- Hoja de color amarillo con círculos de área 0.8cm^2 .
- Hoja de color rojo con cuadrados de área 1cm^2 .
- Hoja de color verde con triángulos de área 1cm^2 .
- Tijeras
- Pegamento

Consigna 1: En equipo, utilicen las figuras de las hojas de color para recubrir los polígonos (recorten tantas figuras como crean necesario) pueden hacer uso de las tres a la vez o recortarlas, lo importante es que no queden huecos en ellos, con esto, determinen el área de cada uno y respondan las preguntas (Figura 33):

Figura 33.

Figuras de las consigna 1



Fuente: Elaboración propia.

- ¿Cuál fue tu procedimiento para determinar el área de todos los polígonos?
- ¿Tuviste alguna dificultad para cubrir totalmente algún polígono con la misma figura? Si fue si, ¿Cómo lo solucionaste?
- Sino tuvieras las figuras para cubrir los polígonos, ¿podrías determinar sus áreas? Si es si, ¿de cuáles de ellos?
- ¿Qué figura te pareció más difícil de cubrir? ¿Por qué?
- ¿Cuál más fácil? ¿Por qué?

A continuación, se describen las variables macrodidácticas en la Tabla 1.

Tabla 2

Variables macrodidácticas de la actividad I

Situaciones	Objetivos	Tiempo
Acción	Los alumnos interactúan con el medio cuando se les entrega la consigna.	5 minutos
Formulación	Los alumnos determinan con cuales figuras pueden cubrir la superficie de los polígonos y determinan su área.	25 minutos
Validación	Los alumnos comunican su procedimiento para determinar cuáles figuras cubren totalmente los polígonos son dejar huecos en ellos.	20 minutos

3.2.2. Actividad II

Objetivo: Se pretende que los estudiantes descubran y justifiquen que el área de un polígono no es dependiente del perímetro y a su vez distinguan un concepto del otro.

Organización de la clase: Organizar a los alumnos en equipos de 4 integrantes (para que dos de ellos sean los receptores y dos los emisores del mensaje), se entregará el material a los alumnos, y se comienzan cada una de las fases didácticas. Para llevar a cabo esta actividad se estima un tiempo de 50 minutos.

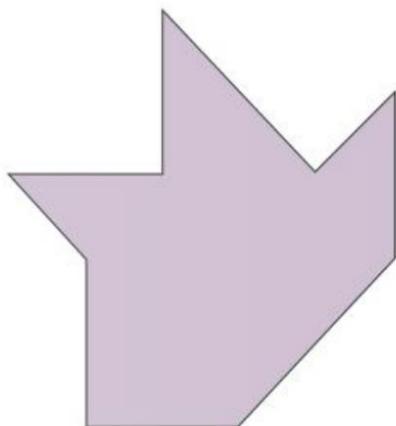
Material didáctico:

- Polígono en cartoncillo.
- Regla

Consigna 2: Busquen o creen un método para comunicar, mediante un mensaje escrito (sin utilizar dibujos) el área del siguiente polígono a alguien de su equipo que no lo vea, con la finalidad de que logre construir uno con área congruente, después respondan las preguntas (Figura 34):

Figura 34.

Figura de la consigna 2



Mensaje:

Fuente: Elaboración propia.

- ¿Cuál fue su procedimiento para crear su mensaje?
- ¿Qué datos del polígono utilizaron para crear el mensaje?
- Si no se les permitiera obtener el área del polígono, ¿Cómo podrían crear su mensaje?
- ¿Se apoyaron de otra figura para tratar de comunicar el área del polígono?, ¿Qué figura? Y ¿Por qué?
- ¿Consideran que comunicar la forma del polígono es importante para construir uno con áreas congruentes?
- ¿consideran que el perímetro de la figura es importante para lograr construir el polígono? ¿Por qué?
- ¿Sus compañeros lograron construir el polígono con áreas congruentes?, ¿si su respuesta es no, ¿Qué datos hicieron falta?
- ¿Crees que existan otros polígonos con esta área?

A continuación, se describen las variables macrodidácticas en la Tabla 3.

Tabla 3.

Variables macrodidácticas de la actividad II.

Situaciones	Objetivos	Tiempo
Acción	Los alumnos interactúan con el medio cuando se les entrega la consigna.	5 minutos
Formulación	Los alumnos escriben el mensaje a partir del análisis realizado en la situación de acción.	20 minutos
Validación	Los alumnos comunican su mensaje a los compañeros y estos tratan de aceptar este y crear el polígono.	25 minutos

3.2.3. Actividad III

Objetivo: Se pretende que los estudiantes demuestren la conservación del área en polígonos con diferente forma (áreas equivalentes).

Organización de la clase: los alumnos estarán organizados en equipos de dos. Se comenzará la clase mostrando a los alumnos los polígonos y se les preguntará si consideran que tienen la misma área, después se les entrega el material para que comiencen cada una de las fases didácticas, el inciso b quedará de tarea para que los alumnos lo resuelvan en casa, se les entregará impreso y ellos podrán utilizar el método para determinar cuales tienen la misma área. Para llevar a cabo esta actividad se estima un tiempo de 50 minutos.

Material didáctico:

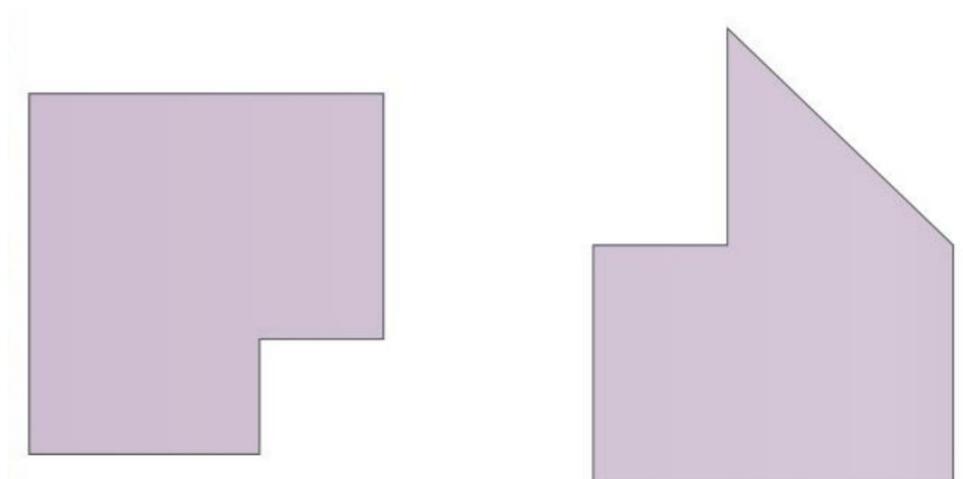
- Polígonos en cartulina de diferente color.
- Tijeras.
- Pegamento.
- Hojas de blancas.

¿Consideran que estos dos polígonos tienen la misma área? ¿Por qué? (escribir respuestas en el pizarrón)

Consigna 3: Los polígonos tienen la misma área. Demuestra que se trata de polígonos con áreas equivalentes (Figura 35).

Figura 35.

Figuras de la consigna 3



Fuente: Elaboración propia.

- ¿Qué método utilizaron para determinar que se trata de dos áreas equivalentes?
- ¿Qué datos de los polígonos les ayudaron a determinar si tienen áreas equivalentes?
- ¿Cubrir ambos polígonos con la misma figura (como en la actividad 1) podría utilizarse? Si su respuesta es sí, ¿Qué figura utilizarían y por qué?
- ¿Crees que existan otros polígonos con esta área?
- ¿crees que para que dos polígonos tengan la misma área su forma debe ser igual? ¿por qué?

A continuación, se presentan las variables macrodidácticas de la actividad III en la Tabla 4.

Tabla 4.

Variables macrodidácticas de la actividad III.

Situaciones	Objetivos	Tiempo
Acción	Los alumnos interactúan con el medio cuando se les entrega la consigna.	5 minutos
Formulación	Los alumnos identifican posibles modificaciones de los polígonos para determinar si tienen áreas equivalentes.	20 minutos
Validación	Los alumnos comunican su mensaje a los compañeros para determinar posibles respuestas.	25 minutos

3.2.3. Actividad IV

Objetivo: Se pretende que los estudiantes obtengan el área de figuras.

Organización de la clase: los alumnos estarán organizados en equipos de dos. Se entrega la hoja de trabajo, y se comienzan cada una de las fases didácticas. Para llevar a cabo esta actividad se estima un tiempo de 50 minutos.

Material didáctico:

- Hoja de trabajo.

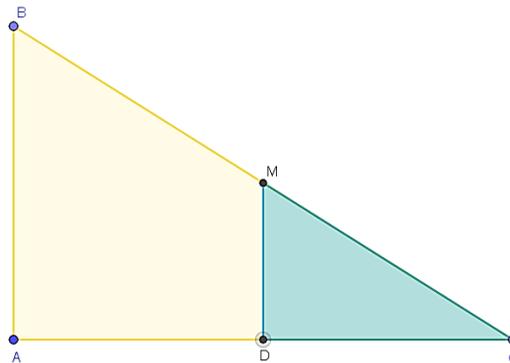
Consigna 4: Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas, para cada uno escriban su procedimiento luego respondan la pregunta (Figura 36, Figura 37 y

Figura 38):

- Los triángulos ABC y MDC son triángulos rectángulos y D es el punto medio de AC. Si el área de ABC es igual a 1m^2 , ¿cuál es el área de DMC?

Figura 36.

Figura de la consigna 4-1



Fuente: Elaboración propia.

- Si se tiene un cuadrado de 10 m de lado, y se unen los vértices del cuadrado con los puntos medios de los lados opuestos, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

Figura 37.

Figura de la consigna 4-2

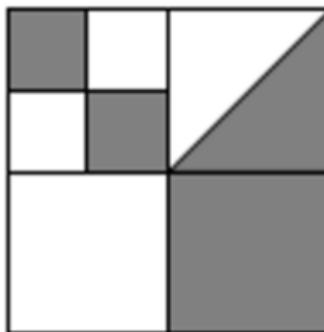


Fuente: Elaboración propia.

- Un cuadrado grande de lado 16 cm, está dividido en cuadrados más pequeños. A su vez, uno de los cuadrados está dividido por la diagonal, como se muestra. ¿Qué figura equivalente al área sombreada se puede obtener?

Figura 38.

Figura de la consigna 4-3



Fuente: Elaboración propia.

b) ¿Qué es el área?

A continuación, se presentan las variables macrodidácticas de la actividad IV, ver Tabla 5.

Tabla 5.

Variables macrodidácticas de la actividad IV.

Situaciones	Objetivos	Tiempo
Acción	Los alumnos interactúan con el medio cuando se les entrega la consigna.	5 minutos
Formulación	Los alumnos identifican posibles procedimientos para dar respuesta a los incisos.	15 minutos
Validación	Los alumnos comunican sus procedimientos a sus compañeros.	15 minutos
Institucionalización	La maestra retoma los procedimientos realizados por los alumnos y generaliza.	10 minutos

3.3 Análisis a priori

En este apartado estableceremos las hipótesis sobre lo que se espera que los alumnos respondan a cada una de las actividades y los posibles comportamientos que llegaran a tener a lo largo de la situación didáctica, con la finalidad de que una vez aplicada podamos hacer una confrontación con lo que realmente paso en la experimentación.

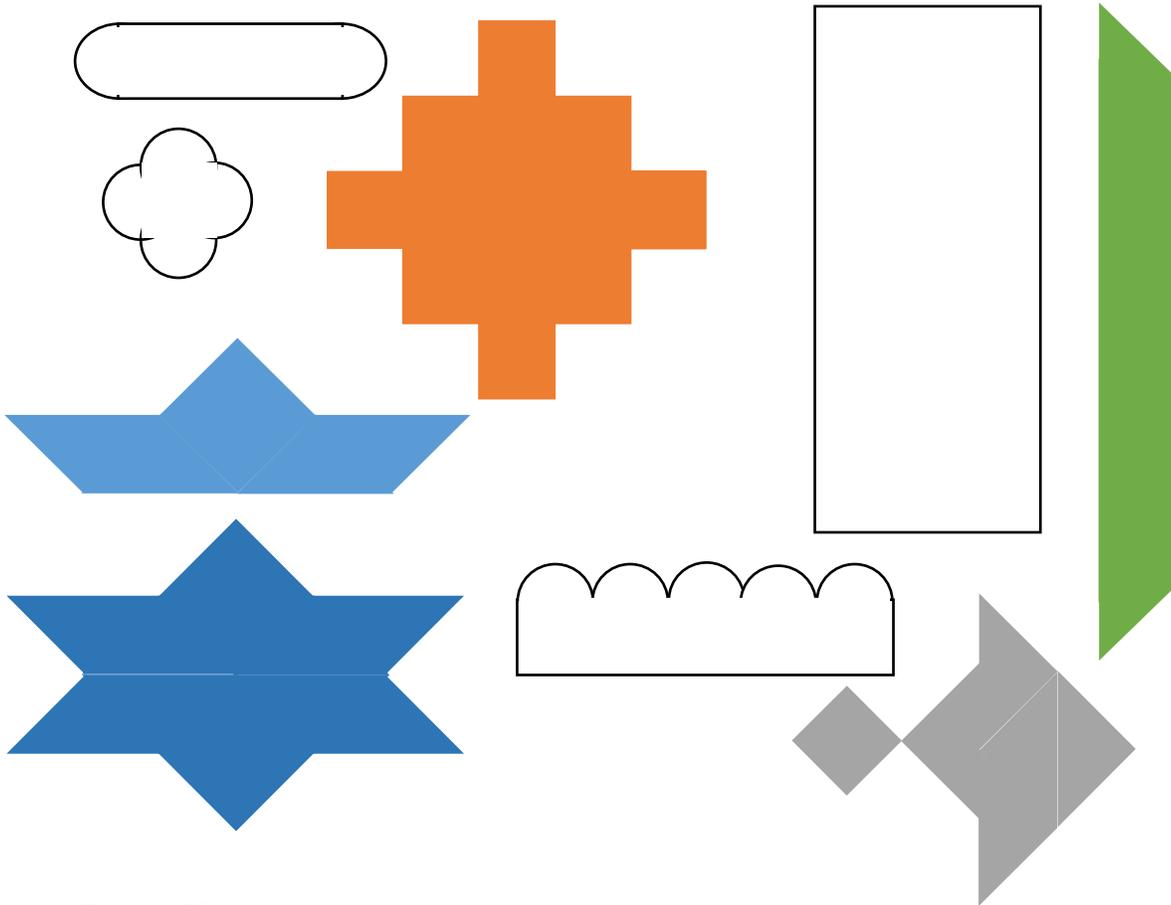
3.3.1 Actividad I

Consigna 1: En equipo, utilicen las figuras de las hojas de color para recubrir los polígonos (recorten tantas figuras como crean necesario) pueden hacer uso de las tres a la vez o recortarlas, lo importante es que no queden huecos en ellos, con ello determinar el área de cada uno y respondan las preguntas (

Figura 39):

Figura 39.

Análisis a priori, figuras de las consigna 1



Fuente Elaboración propia.

- ¿Cuál fue tu procedimiento para determinar el área de todos los polígonos?
- ¿Tuviste alguna dificultad para cubrir totalmente algún polígono con la misma figura? Si fue si, ¿Cómo lo solucionaste?
- Sino tuvieras las figuras para cubrir los polígonos, ¿podrías determinar sus áreas? Si es si, ¿de cuáles de ellos?
- ¿Qué figura te pareció más difícil de cubrir? ¿Por qué?
- ¿Cuál más fácil? ¿Por qué?

Devolución: para iniciar con la actividad, la profesora-investigadora organizará a los alumnos en equipos de tres integrantes y les entregará el material. Pedirá a unos de los equipos lea en voz alta la consigna y a otro que explique qué es lo que deben realizar con la finalidad de que se comprenda lo que deben realizar.

- **Situación de acción.**

En esta situación se da la interacción de los estudiantes con el medio, el cual en nuestro caso será el material que se entregará a cada equipo y cuando los alumnos comiencen a leer las instrucciones y las preguntas que deben resolver.

Se puede plantear como pregunta inicial, ¿de cuáles de los polígonos podrían calcular su área y de cuáles no? ¿Por qué?, con la finalidad de que una vez resulta la actividad los alumnos identifiquen que pueden calcular el área de cualquier polígono, aunque se trate de uno irregular.

Para que los alumnos comprendan mejor la consigna, se les mencionará que las plantillas están formadas por tres figuras que regularmente se usan en geometría y que para obtener su área se implementaron sus fórmulas, se les preguntará si conocen la manera en la que se pueden calcular sus áreas: ¿alguien sabe cómo podemos calcular las áreas de estas figuras? Para el cuadrado la medida de su lado es de 1cm y que se multiplico lado por lado para obtener su área, para el caso del triángulo, su base mide 2 cm y su altura 1cm, y para obtener su área se multiplico la base por la altura y se dividió entre dos, y para el círculo su radio es de 0.5cm y para obtener su área de multiplico el valor de pi (3.14) por radio al cuadrado, para este caso se especifica que el área del círculo es aproximada por el valor de pi.

Para esta actividad se espera que los alumnos no tengan dificultades en realizarla, pues les implica recortar, pegar y contar. Sin embargo, la profesora pasará por los equipos para verificar que los alumnos hayan entendido la actividad y orientarlos si es necesario, además de tratar de controlar el tiempo que los alumnos para hacer la actividad.

El material y la manipulación que les proporciona a los alumnos creemos que les ayudará a interesarse por la actividad, así como a facilitarles la resolución de la misma, pues no se les presenta únicamente de manera impresa y de ellos y su manipulación depende el cálculo de las áreas.

- **Situación de formulación.**

Las preguntas planteadas orientan a los alumnos a determinar un procedimiento, en el cual consideramos que será de contar y sumar las figuras que cubran cada uno de los polígonos. Sin embargo, se pueden presentar otros procedimientos como querer utilizar alguna fórmula que conozcan, para ellos se les mencionará que debido a que no tienen datos de las figuras y no pueden tomarlas cómo podrían calcular su área.

Para que los alumnos verifiquen su procedimiento la profesora-investigadora preguntará si podrían calcular el área de los polígonos, pues se trata de polígonos irregulares, sin el uso de las plantillas. Se les puede plantear como pregunta ¿Cuál crees

que sea la finalidad de tener las figuras (plantillas) y saber su área?, ¿Cómo las plantillas les ayudan a determinar el área de los polígonos irregulares?

Algunos de los errores que podrían presentarse en esta situación podrían ser: Errores al sumar, sobre todo cuando se trabaja con decimales. Dificultades al obtener el área las figuras: triángulo, cuadrado, círculo. Dificultades para manipular el material didáctico, por ejemplo, que se recorte mal, o que al momento de pegar queden huecos o figuras empalmadas.

- **Situación de validación.**

Para llevar a cabo la situación de validación se seleccionará a algunos equipos para que compartan al resto del grupo su procedimiento y validarlo. La profesora-investigadora irá registrando los procedimientos de los alumnos para identificar como es que ellos trabajan con el concepto de área a partir del recubrimiento de los polígonos.

Para llevar a cabo la validación se esperan dos posibles procedimientos. El primero es que los alumnos hayan hecho uso de las figuras correctamente y hayan cubierto los polígonos con ellas, lo cual les permitió calcular su área sin ningún problema sumando las áreas de las figuras que las cubren. La segunda es que no hayan podido cubrir las figuras por recortarlas de manera incorrecta o pegado dejando huecos o empalmando las figuras o las sumas sus áreas no lo hayan podido lograr por trabajar con números decimales. La profesora-investigadora validará los procedimientos realizados por los estudiantes y ellos serán los que definan con su ayuda cual es el más factible para esta actividad. Las preguntas realizadas por la profesora-investigadora dependerán de las repuestas que los alumnos hagan a las preguntas planteadas en la actividad, sin embargo, algunas de ellas podrían ser: ¿podrían calcular el área de la estrella sin las plantillas?

- **Situación de institucionalización.**

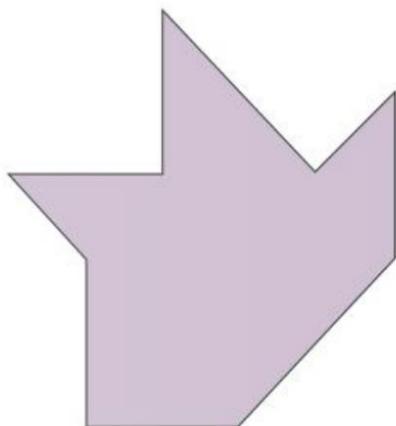
Para llevar a cabo la situación de validación se seleccionará a algunos equipos para que compartan al resto del grupo su procedimiento y validarlo. La profesora-investigadora retomará lo realizado por los estudiantes para tratar de aproximarlos al concepto de área y tratar de alejarlos de la confusión que ellos tenían con el perímetro, así como también aquella relacionada con el uso de fórmulas y así dejen de lado aspectos algorítmicos con lo que estaban trabajando.

3.3.2 Actividad II

Consigna 2: Busquen o creen un método para comunicar, mediante un mensaje escrito (sin utilizar dibujos) el área del siguiente polígono a alguien de su equipo que no lo vea, con la finalidad de que logre construir uno con área congruente, después respondan las preguntas (Figura 40):

Figura 40.

Análisis a priori, figuras de las consigna 2



Mensaje:

Fuente: Elaboración propia.

- ¿Cuál fue su procedimiento para crear su mensaje?
- ¿Qué datos del polígono utilizaron para crear el mensaje?
- Si no se les permitiera obtener el área del polígono, ¿Cómo podrían crear su mensaje?
- ¿Se apoyaron de otra figura para tratar de comunicar el área del polígono?, ¿Qué figura? Y ¿Por qué?
- ¿Consideran que comunicar la forma del polígono es importante para construir uno con áreas congruentes?
- ¿consideran que el perímetro de la figura es importante para lograr construir el polígono? ¿Por qué?
- ¿Sus compañeros lograron construir el polígono con áreas congruentes?, ¿si su respuesta es no, ¿Qué datos hicieron falta?
- ¿Crees que existan otros polígonos con esta área?

Devolución: para iniciar con esta actividad se les pedirá a unos de los estudiantes lea la consigna en voz alta y a otro explique lo que deben realizar para verificar que hayan entendido, para esto se pueden realizar preguntas como: ¿Qué es lo que debemos realizar?, ¿Cuál es la condición que nos pide la consigna?, ¿a qué se refiere la actividad con áreas congruentes?, ¿podrían dar un ejemplo de congruencia?

- **Situación de acción.**

Se entregará a los alumnos el polígono de cartoncillo y se les dará un tiempo de 15 minutos para que comiencen a explorarlo y a construir su mensaje, mientras que los que serán los receptores se les pedirá que formen figuras con el tangram (anexo 1). Para orientar a los alumnos en la construcción de su mensaje se les puede mencionar que deben pensar bien en los datos que deben proporcionar a sus compañeros para que

logren construir un polígono con áreas congruentes, que en el momento de entregar su mensaje piensen que es a ellos a quienes se les está entregando y piensen que si esos datos son suficientes para construirlo.

Se mencionará a los alumnos que pueden hacer uso de otras herramientas como las hojas para poder crear su mensaje, así como también pueden tomar las medidas que crean necesarias, lo importante es que utilicen todo lo que ellos crean necesario para que sus compañeros puedan realizarlo.

- **Situación de formulación.**

Para esta actividad se espera que los alumnos realicen alguno de los siguientes procedimientos:

- Dividan el polígono en triángulos y proporcionar sus datos.
- Obtener el área del polígono a partir de dividirlo en otros y crear un polígono regular.
- Retomar la forma del polígono y su perímetro.

La profesora-investigadora pasara por los lugares para analizar los mensajes que van creando los alumnos y les preguntará: ¿creen que esos datos son suficientes para creas el polígono? ¿creen que haga falta algún otro?, las preguntas que se realicen dependerán en gran medida de las repuestas que proporcionen los estudiantes.

Una vez que los alumnos hayan elaborado su mensaje intercambiaran lugares con los alumnos receptores para que estos en la cartulina construyan el polígono con el mensaje proporcionado por sus compañeros. El tiempo en la construcción del polígono será de 10 minutos. Posteriormente se les pedirá que comparen ambos polígonos y así puedan dar respuesta a las preguntas.

Algunos de los errores que podrían presentarse en esta situación podrían ser: Dificultades para realizar la tarea, ya sea porque no se dan los datos suficientes, o bien, que el receptor del mensaje considere que no tiene los datos suficientes. Errores al calcular el área de la figura irregular (sobre todo si incluye decimales). Considerar que tienen tomar en cuenta la forma, para la reproducción de la figura con igual área.

- **Situación de validación.**

Para la situación de validación se pasará al pizarrón a dos equipos, uno que no haya podido construir el polígono y otro que sí, se les pedirá a los alumnos justifiquen sus procedimientos mientras que el resto del grupo lo valida, de ser necesario se realizarán los ajustes necesarios para mejorar el mensaje y se pueda construir el polígono. Para esta situación se preguntará a los alumnos que, si como dato importante para construir áreas congruentes es el perímetro, si los alumnos presentan alguna dificultad en distinguir un concepto de otro se les pedirá que proporcionen un ejemplo

de dos figuras que tengan diferente perímetro, pero misma área (procedimiento dos) para que identifique que se trata de valores independientes.

- **Situación de institucionalización.**

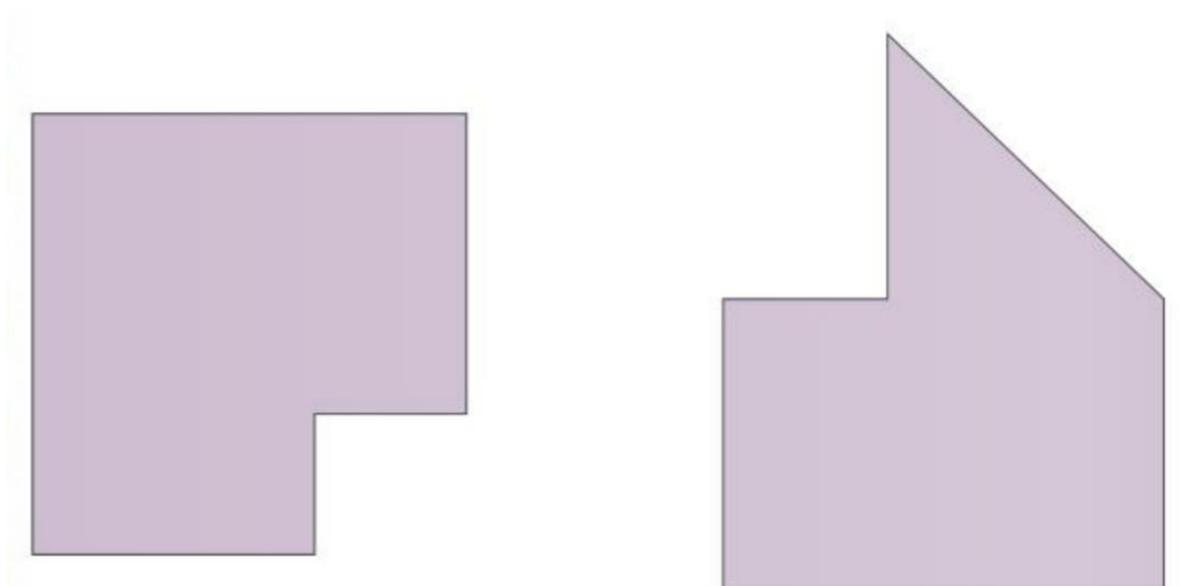
La profesora-investigadora validará los procedimientos de los alumnos a partir de las respuestas que den a las preguntas planteadas, donde retomará que el área de un polígono no es dependiente del perímetro y a su vez distinguen un concepto del otro.

3.3.3 Actividad III

Consigna 3: Los polígonos tienen la misma área. Demuestra que se trata de polígonos con áreas equivalentes (Figura 41).

Figura 41.

Análisis a priori, figuras de la consigna 3



Fuente: Elaboración propia.

- ¿Qué método utilizaron para determinar que se trata de dos áreas equivalentes?
- ¿Qué datos de los polígonos les ayudaron a determinar si tienen áreas equivalentes?
- ¿Cubrir ambos polígonos con la misma figura (como en la actividad 1) podría utilizarse? Si su respuesta es sí, ¿Qué figura utilizarían y por qué?
- ¿Crees que existan otros polígonos con esta área?
- ¿Crees que para que dos polígonos tengan la misma área su forma debe ser igual? ¿por qué?

Devolución: Se mostrará a los alumnos los polígonos con diferente forma, pero misma área y se les preguntará si creen que tienen la misma área, las respuestas proporcionadas se escribirán en el pizarrón para retomarlas al final de la clase. Posteriormente se entregará a los alumnos la hoja de trabajo y el material. Se le pedirá que analicen la consigna para después pedir a un alumno la lea en voz alta y exponga que es lo que entiende deben realizar.

- **Situación de acción.**

La profesora-investigadora pasará por los lugares para identificar los procedimientos que los alumnos están planteando para resolver la actividad, se les mencionará que pueden manipular los polígonos como ellos crean necesario. Se espera que los alumnos realicen los siguientes procedimientos:

- Quieran calcular el área de ambos polígonos tomando algunas medidas.
- Sobrepongan los polígonos.
- Traten de pavimentar un polígono con otro.
- Utilicen alguna figura que cubra ambos polígonos la misma cantidad de veces.

- **Situación de formulación.**

La profesora-investigadora pasará por los lugares para analizar los posibles procedimientos de los alumnos, de los cuales se espera que al querer calcular el área de los polígonos midiendo sus lados, se les mencionará que su procedimiento es correcto aunque será tardado; al tratar de sobreponer o pavimentar los polígonos es un procedimiento rápido pues al cubrir un polígono con el otro garantizamos que tienen la misma área; y el de utilizar una figura que cubra ambos la misma cantidad de veces también es correcto pero también les implicara tiempo. Aunque se les mencione lo anterior a los alumnos ellos serán los que determinen cuál de los procedimientos es el mejor en la situación de validación.

Además de lo anterior, es posible que los estudiantes comentan algunos errores al momento de tratar de resolver la situación planteada, tales como:

- Confundir el área con el perímetro,
- Inventar o utilizar erróneamente los datos para dar respuesta a la situación.
- No asociar figuras de diferente forma con la misma área.
- Errores al realizar operaciones aritméticas: al calcular el área, o al sumar áreas, si es que se dividen las figuras.

- **Situación de validación.**

Se pedirá que algunos de los equipos pasen al pizarrón para que compartan su procedimiento, la elección de los equipos dependerá de lo que hayan realizado los

alumnos, sin embargo, se seleccionarán procedimientos diferentes (si se presentan) para que los alumnos comparen y determinen el más factible.

- **Situación de institucionalización.**

La profesora-investigadora preguntará a los alumnos si su método determina que se trata de dos áreas equivalentes y como lo podemos demostrar. Además, se les preguntará si la forma de la figura depende para determinar áreas equivalentes. Así como también si creen que existan otros polígonos con esta área. Para reforzar la diferenciación del concepto de área con el del perímetro se les pedirá a los alumnos midan el perímetro de ambos polígonos y señalen si existe relación entre ambos conceptos. Para cerrar la sesión la profesora-investigadora retomará lo realizado por los alumnos.

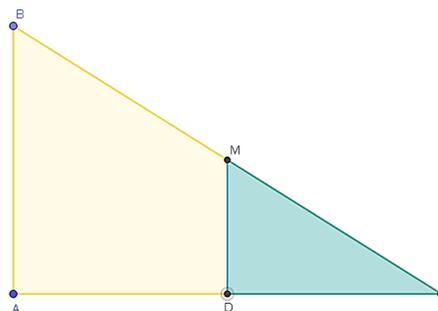
3.3.4 Actividad IV

Consigna 4: Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas, para cada uno escriban su procedimiento luego respondan la pregunta (Figura 42):

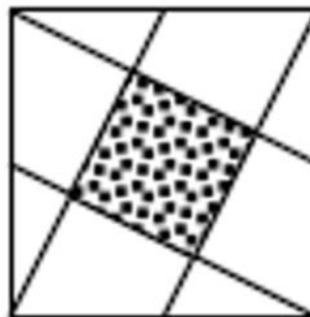
Figura 42.

Análisis a priori, figuras de las consigna 4

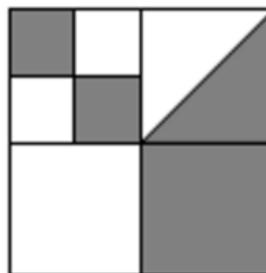
- Los triángulos ABC y MDC son triángulos rectángulos y D es el punto medio de AC. Si el área de ABC es igual a 1m^2 , ¿cuál es el área de DMC?



- Si se tiene un cuadrado de 10 m de lado, y se unen los vértices del cuadrado con los puntos medios de los lados opuestos, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



- Un cuadrado grande de lado 16 cm, está dividido en cuadrados más pequeños. A su vez, uno de los cuadrados está dividido por la diagonal, como se muestra. ¿Qué figura equivalente al área sombreada se puede obtener?



Fuente: Elaboración propia.

b) ¿Qué es el área?

Devolución: se mencionará a los alumnos que en las sesiones anteriores trabajaron con el concepto de área, calcular la de algunas figuras y demostraron cuando se trata de áreas congruentes, por lo que se les entregará nuevamente una hoja de trabajo donde utilizando el procedimiento que ellos mejor les parezca resolverán algunos problemas que implican tal concepto. Se entregará a los alumnos la hoja de trabajo y se le pedirá a alguno la lea en voz alta completa (con los problemas) para que posteriormente algún otro explique lo que entendió deben hacer.

- **Situación de acción.**

Se mencionará a los alumnos que pueden utilizar el procedimiento que a ellos mejor les parezca, así como la libertad de realizar las modificaciones a las figuras que ellos crean les ayudará poder resolver lo que se les pide.

La profesora-investigadora pasará por los lugares para identificar así los estudiantes han comprendido los problemas e identificar como estos han o no aceptado la responsabilidad de dar respuesta a los problemas.

- **Situación de formulación.**

Para el primer problema se espera que los alumnos puedan utilizar dos posibles procedimientos. Uno de los procedimientos es que los estudiantes utilicen la parte sombreada de la figura para tratar de recubrir el resto utilizándola y así identifiquen que ésta se localiza cuatro veces para poder obtener el área solicitada. Como segundo procedimiento se espera que los alumnos tracen un cuadrado y con ayuda de las divisiones que se proporcionan en la figura, construyan ocho triángulos.

Para el segundo problema se espera que los estudiantes hagan movimientos en la figura con los cuales completarán cuadrados para después dividir el área total en los cuadrados formados. En particular, que ellos observen que los triángulos pueden girarse y formar junto con los trapecios, un cuadrado. Que este procedimiento lo pueden hacer con todos los triángulos y trapecios, y lo que se obtendrá, serán 4 cuadritos formados con esas piezas. Así que resulta que el área del cuadrado original es

igual a la que se forma con la cruz que se forma con esos 5 cinco cuadritos. Si el área del cuadrado original es 100 m^2 , cada cuadrito tiene como área 20 m^2 .

Para el tercer problema, se espera que los alumnos realicen movimientos en las figuras para que completen la mitad del cuadrado y así identificar el área de la figura congruente o calculando el área por separado de la parte sombreada por ser cuadrados y triángulos.

Algunos de los posibles errores que podrían aparecer son:

- Utilizar datos de forma errónea.
- No relacionar el problema con las unidades que le corresponden, realizar una conversión incorrecta de unidades, o bien, operar sin tener en cuenta las unidades involucradas.
- Realizar operaciones aritméticas de forma defectuosa: errores en los cálculos, ya sea al dividir, multiplicar o sumar, para obtener las áreas.

- **Situación de validación.**

Se pasará a cada equipo para que comparta sus procedimientos realizados en cada uno de los problemas a partir de las estrategias que estos hayan utilizado en los problemas.

- **Situación de institucionalización.**

La profesora-investigadora retomará lo realizado por los estudiantes para verificar las respuestas que éstos dan a cada uno de los problemas. Posteriormente pedirá a los equipos, escriban que es lo que entienden por área y así cerrar la clase.

3.3.5 Aplicación preliminar de la situación didáctica

Para validar la situación didáctica, se aplicó a dos estudiantes de primer grado de la Escuela Secundaria técnica #25. La intención de esta aplicación fue ver si la situación didáctica cumplía con el objetivo propuesto, es decir, ayudar a los alumnos en la construcción del concepto de área o si era necesario realizar algún ajuste antes de llevarla a la experimentación. Los resultados en cada actividad se presentan a continuación:

- **Actividad I.**

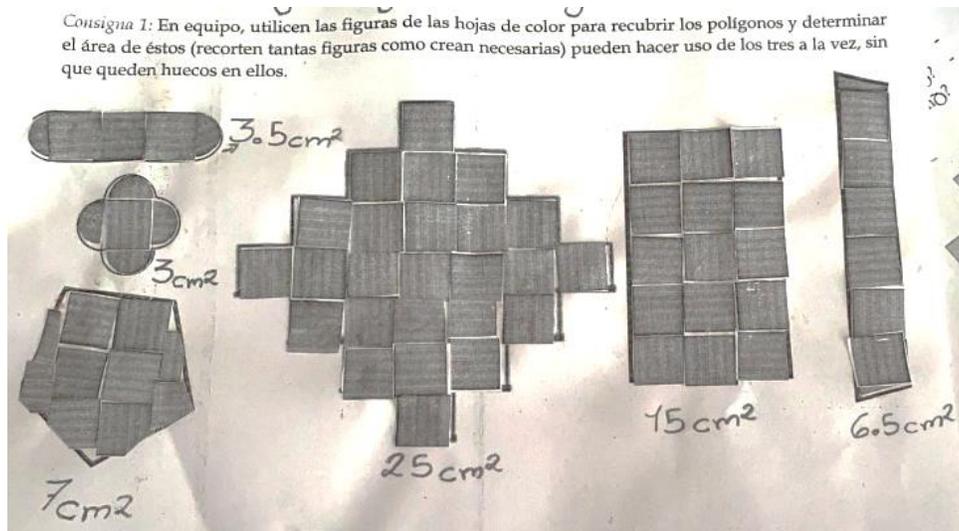
En esta actividad se previó que los polígonos pudieran ser cubiertos totalmente con las figuras de área 1 cm^2 (cuadrado, triángulo y círculo) sin embargo, al momento de la impresión, los estudiantes tuvieron dificultad con las estrellas, pues los triángulos

no embonaban correctamente, en ese momento se optó por que no se realizaran. Por ello, creemos conveniente trazarlos manualmente para evitar esta situación.

El tiempo destinado para cada una de las situaciones didácticas (acción, formulación y validación) fue el adecuado. Los alumnos mostraron interés al recortar y pegar las figuras en los polígonos. Como se puede observar en la Figura 43, los alumnos llegaron a la obtención de las áreas a partir del recubrimiento de los polígonos con las figuras. Al preguntarles sobre su procedimiento en la situación de formulación, comentaron que ellos contaron las figuras que cubrían al polígono, pues sabían que cada una tenía de área 1cm^2 y bastaba con sumarlos.

Figura 43.

Respuestas de los estudiantes a la consigna 1 de la actividad I.

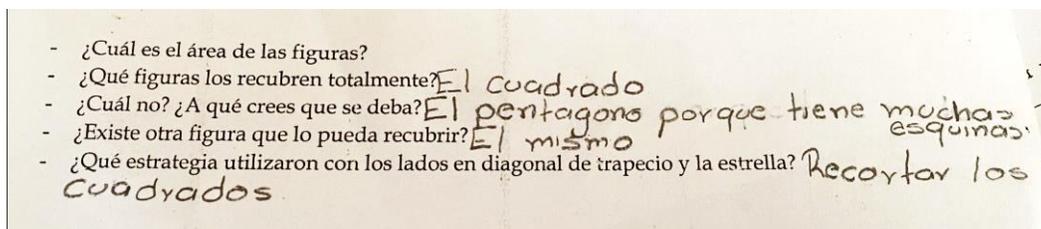


Al realizar la situación de institucionalización, identificamos en la actividad que las preguntas no profundizaban en el contenido ni lográbamos ver realmente lo que pensaban los alumnos (ver Figura 44), por lo que creemos conveniente realizar los siguientes ajustes:

- ¿Cuál fue tu procedimiento para determinar el área de todos los polígonos?
- ¿Tuviste alguna dificultad para cubrir totalmente algún polígono con la misma figura? Si fue si, ¿Cómo lo solucionaste?
- Sino tuvieras las figuras para cubrir los polígonos, ¿podrías determinar sus áreas? Si es si, ¿de cuáles de ellos?
- ¿Qué figura te pareció más difícil de cubrir? ¿Por qué?
- ¿Cuál más fácil? ¿Por qué?

Figura 44.

Respuestas de los alumnos, actividad I.

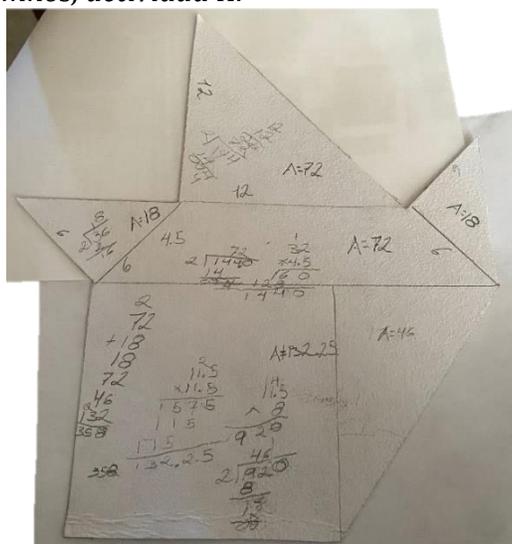


• **Actividad II.**

En la actividad II se entregó a los estudiantes el polígono en el cartoncillo. Ellos mencionaron que para poder realizar el mensaje lo primero que debían conocer era el área del polígono, por lo que, para calcularla, realizaron trazos de figuras que ellos conocían y de las cuales podían calcular el área (Figura 45). Para esta actividad los estudiantes pueden utilizar varios procedimientos, el realizado por estos alumnos es uno de ellos.

Figura 45.

Procedimiento de los alumnos, actividad II.



Los alumnos no toman en consideración la forma de la figura para escribir su mensaje, pues mencionan que se solicita realizar un polígono con áreas congruentes, por lo que sugieren realizar un cuadrado con la misma área.

Las preguntas para esta actividad quedaron de la siguiente manera:

- ¿Cuál fue su procedimiento para crear su mensaje?
- ¿Qué datos del polígono utilizaron para crear el mensaje?
- Si no se les permitiera obtener el área del polígono, ¿Cómo podrían crear su mensaje?
- ¿Se apoyaron de otra figura para tratar de comunicar el área del polígono?, ¿Qué figura? Y ¿Por qué?

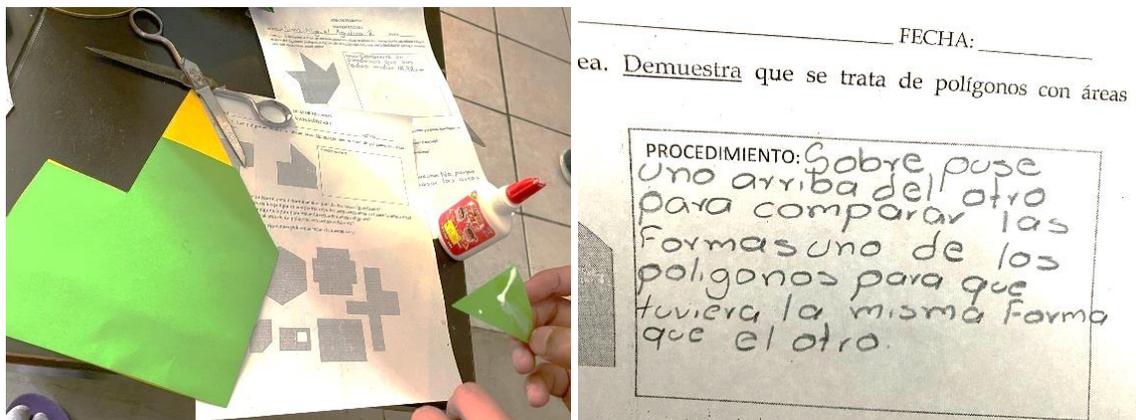
- ¿Consideran que comunicar la forma del polígono es importante para construir uno con áreas congruentes?
- ¿consideran que el perímetro de la figura es importante para lograr construir el polígono? ¿Por qué?
- ¿Sus compañeros lograron construir el polígono con áreas congruentes?, ¿si su respuesta es no, ¿Qué datos hicieron falta?
- ¿Crees que existan otros polígonos con esta área?

● **Actividad III.**

En esta actividad los alumnos utilizaron como procedimiento sobreponer los polígonos y tratar de ver como uno cubría al otro, después realizaron algunos cortes en ellos y lograron ver que ambos tenían la misma área (Figura 46).

Figura 46.

Procedimiento de los alumnos para la actividad III.



Al realizar la actividad consideramos que es necesario realizar algunas modificaciones para que los alumnos profundicen más en la conservación del área, las cuales quedaron de la siguiente manera:

- Mostrar a los alumnos los polígonos y preguntar:
 - ¿Consideran que estos dos polígonos tienen la misma área? ¿Por qué? (escribir respuestas en el pizarrón)
- Al plantear la actividad:
 - ¿Qué método utilizaron para determinar que se trata de dos áreas equivalentes?
 - ¿Qué datos de los polígonos les ayudaron a determinar si tienen áreas equivalentes?
 - ¿Cubrir ambos polígonos con la misma figura (como en la actividad 1) podría utilizarse? Si su respuesta es sí, ¿Qué figura utilizarían y por qué?

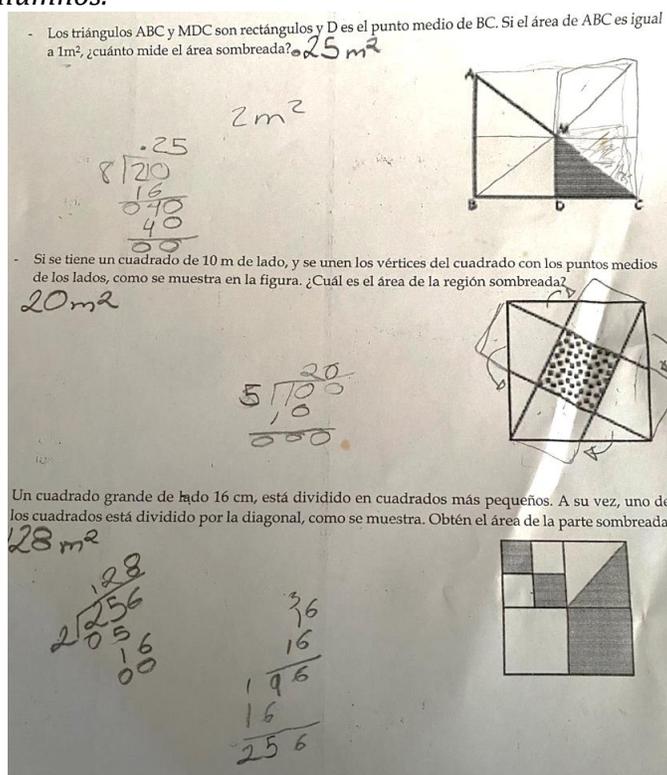
- ¿Crees que existan otros polígonos con esta área?

- **Actividad IV.**

En esta actividad los alumnos calcularon el área de los problemas realizando modificaciones en las figuras, consideramos que la manipulación que tuvieron en las actividades a priori les permitió llegar a esa visualización (ver Figura 47).

Figura 47.

Resultados de los alumnos.

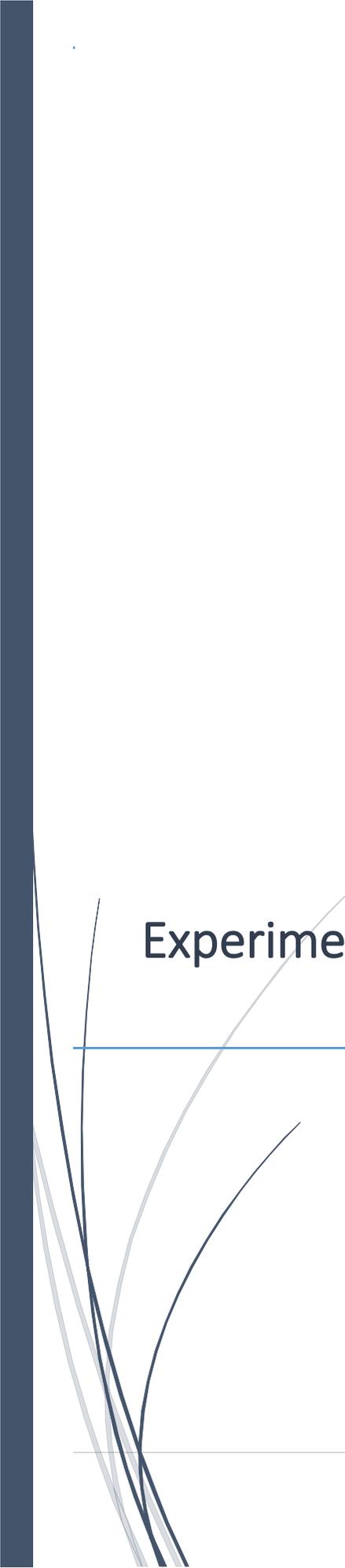


Como modificación a esta actividad, se incluye las siguientes preguntas:

- Para cada problema, señalar su procedimiento.
- Como pregunta de cierre, ¿Qué es el área?

A la segunda pregunta los alumnos respondieron que el área son los cm^2 que tiene alguna figura dentro. Con esta pregunta nos podemos percatar que la definición al concepto no la relacionan a la fórmula como lo hacían anteriormente.

La aplicación de la situación didáctica nos permitió identificar que debíamos realizar algunas modificaciones en las actividades para que éstas realmente cumplieran con su objetivo y que debíamos tener cuidado en la precisión de los materiales que se le proporcionaban a los alumnos.



Capítulo IV. Experimentación, Análisis a posteriori y Validación

En este apartado se presentan los aspectos referentes a la experimentación, la escuela donde se implementó, las características del grupo, así como el análisis a posteriori donde damos a conocer los resultados obtenidos en su implementación, detallando los aspectos más significativos de la propuesta, para finalmente realizar la fase de validación confrontando el análisis a priori con él a posteriori.

4.1 Experimentación

La experimentación se llevó a cabo en la Escuela Secundaria General “Moisés Sáenz Garza”, la cual está ubicada en la comunidad Ignacio Zaragoza en el municipio de Noria de Ángeles del estado de Zacatecas, a unos 111 km de la capital. Se trata de una escuela de concentración, pues a ella acuden alumnos de las rancherías circunvecinas como lo son: Providencia, Santa Elena y Santa María. Los alumnos acuden en un horario de 8:00 a.m. a 2:10 p.m. con un receso de 20 minutos, con módulos de 50 minutos para las materias.

La escuela cuenta con 10 aulas para la clase, un centro de cómputo con 15 computadoras e internet, una biblioteca, una dirección, un comedor, tres talleres (corte y confección, dibujo y computación), una cancha de fútbol y una de basquetbol, una plaza cívica con domo y área verde. Tiene servicio de drenaje y energía eléctrica. Cuenta con la asociación de padres de familia. Su personal está conformado por trece profesores, una trabajadora social, una prefecta, dos secretarías, una contralora, tres intendentes, una subdirectora y un director, así como un total de 172 alumnos, 43 de primero, 65 de segundo y 64 de tercero.

La implementación de la situación se llevó a cabo con los alumnos de primer grado grupo B, el cual está conformado por 12 alumnos de los cuales 7 son mujeres y 5 hombres. Sus edades oscilan entre los 12 y 13 años. Es un grupo participativo, colaborativo y curioso.

4.2 Análisis a posteriori

El análisis a posteriori está organizado con las cuatro actividades realizadas en la experimentación y en los ítems que se trabajaron en ellas.

4.3 Actividad I.

Con esta actividad se pretende que los alumnos logren determinar el área de polígonos a partir del recubrimiento de éstos, así como también identificar al área como la relación con otra superficie que se toma como la unidad y que se pueden hacer uso varias figuras para determinar esto, además que identifiquen que la obtención del área no se centra únicamente en las fórmulas, sino que existen otras maneras de obtenerla.

4.3.1 Situación de acción (Actividad I)

En la situación de acción los alumnos comienzan la interacción con la actividad que se les proporciona a través de la lectura de las instrucciones, la manipulación del material didáctico. A continuación, se describe lo sucedido en esta situación referente a la actividad 1.

La profesora-investigadora es también la titular del grupo, por lo que existe ya una relación con los estudiantes y para ellos es natural verla entrar al salón de clases. Al ingresar saluda a los alumnos y estos se ponen de pie para recibirla, les pide que se sienten y tomen su lugar.

P: Buenos días, para realizar la actividad del día de hoy nos vamos a organizar en equipos de tres integrantes y les voy a entregar una hoja de trabajo y un material. Mientras les entrego la hoja vayan leyendo las instrucciones.

//la profesora pasa por los lugares y entrega el material a los estudiantes//

P: vamos a guardar silencio, por favor en voz alta lea las instrucciones.

A1: Instrucciones: En equipo, utilicen las figuras de las hojas de color para recubrir los polígonos (recorten tantas figuras como crean necesario) pueden hacer uso de las tres a la vez o recortarlas, lo importante es que no queden huecos en ellos, con ello determinar el área de cada uno y respondan las preguntas.

P: con sus propias palabras, ¿Qué es lo que vamos a hacer?

A2: Vamos a rellenar las figuras con estas figuras *//señala las figuras de las hojas de color//* y obtener el área de los polígonos.

Se puede observar en la respuesta que da el alumno que debe utilizar las platillas para cubrir los polígonos y que con ello debe encontrar el área de éstos. Por lo que la profesora-investigadora retoma la respuesta del alumno y continúa diciendo:

P: Bien, vamos a recortar las figuras de las hojas de color y vamos a tratar de cubrir los polígonos que están en la hoja de trabajo, para después obtener su área. Pero listos aquí, cada una de las figuras de las hojas de color tienen su área ya, la cual vamos a utilizar para obtener el área total de los polígonos. El cuadrado, tienen de lado 1cm y para obtener su área multiplicamos 1 por 1 y me dio 1cm^2 , luego tenemos el triángulo, tiene de base 2 cm y de altura 1 cm, para obtener su área multiplicamos base por altura y lo dividimos entre dos, en este caso sería 2 por 1, 2 entre 2, 1 cm^2 . *//los alumnos ayudan a resolver las operaciones, se encuentran atentos al pizarrón //* para el caso del círculo es diferente *//un alumno dice la fórmula//* el círculo tienen de radio 0.5 y para obtener su área debemos multiplicar, pi por r^2 , pi es un valor determinado y siempre será el mismo 3.14 hay muchos más decimales, pero ahorita solo trabajaremos con estos dos. Entonces multiplico el radio al cuadrado y luego por pi y el área me da 0.8cm^2 , esto es aproximado porque no estamos tomando todos los valores de pi. Con estas figuras ustedes van a tratar de obtener el área de los

polígonos, luego responden las preguntas que están en la parte de abajo, ¿tienen alguna duda?

As: no.

P: muy bien, entonces pongámonos a trabajar, aquí tengo tijeras y pegamento si a alguien le hace falta.

//los alumnos se acercan al escritorio por material//

Las plantillas se entregan en hojas de diferentes colores (amarrillo, verde y rojo) para que los alumnos pudieran diferenciar en los polígonos cuando los trataran de cubrir con las diferentes figuras y pudieran con ello determinar su área, además se quería que les fuera de su interés. Una vez que los alumnos exploraron el material, éstos se reparten tareas como recortar e ir analizando como acomodar las figuras de colores en los polígonos, como se puede observar en la Figura 48, relacionando ya el material con la actividad, aquí se presenta la devolución de una preferencia, pues ellos toman la decisión de qué figuras de las plantillas van a utilizar cuidando que no queden huecos ni sobrepuestas.

Figura 48.

Equipo 1 y 2 comenzando a manipular el material.



4.3.2 Situación de formulación (Actividad 1)

A continuación, se describen las formulaciones que se realizaron entre los integrantes de los cuatro equipos y los procedimientos que utilizaron para resolver la actividad 1.

Para dar respuesta a las preguntas los alumnos debían cubrir primero los polígonos con las figuras de las plantillas, pues esto les permitiría determinar su área, por lo que la profesora-investigadora les da un tiempo para que ellos empiecen a identificar que figuras de las plantillas deben utilizar, posteriormente pasa por los equipos para observar las estrategias que están utilizando.

Equipo 1.

P: ¿Este polígono con que los vas a rellenar? //se señala el primer polígono//

A1: cuadrados y este va a llevar triángulos //señala otro polígono//

P: cuadrados, ok. La condición es que no se empalmen ni queden huecos.

As: si, maestra.

Equipo 2.

P: ¿Cómo vamos?

As: bien.

P: ¿Esta figura con que la vas a cubrir?

A2: con triángulos.

P: ¿Con triángulos? No deben quedar huecos, ok.

Equipo 3.

P: ¿Cómo vamos?

As: bien, ya vamos terminado.

P: Ya recortaron las figuras. ¿con que van cubrir esta figura?

As: con cuadrados y círculos //señalan la figura uno//

Equipo 4.

P: ¿Cómo vamos? Aquí estamos rompiendo una regla, ¿la ven?

As: ¿Cuál?

P: lea esto de aquí. //señala las instrucciones//

A5: sin que queden huecos.

P: ¿Qué hay aquí?

A5: huecos.

P: bueno, hay que corregir, recuerda que podemos combinar las figuras si es necesario, hasta podemos recortarlas a la mitad.

En la Figura 49 se observa como integrantes del equipo 1 se encuentran en la fase de formulación, pues están analizando la forma en la que deben colocar las figuras de las plantillas para que éstas puedan cubrir el polígono en su totalidad, según la forma del polígono utilizan las figuras de las plantillas, pudieron hacer todos los movimientos que querían para colocarlas de manera correcta, una vez que están seguros de cumplir con las reglas de la actividad, pegaban sus figuras a la hoja de trabajo y determinaban el área de los polígonos. Esta estrategia para cubrir los polígonos fue utilizada por los cuatro equipos.

Figura 49.
Estrategia para cubrir los polígonos del equipo 1.



Las figuras que los estudiantes utilizaron para cubrir los polígonos se muestran a continuación, así como las áreas que ellos determinaron:

Figura 50.
Polígono 1.



Para cubrir el polígono 1 (véase Figura 50), los cuatro equipos utilizaron tres cuadrados al centro y un círculo dividido a la mitad para los extremos, en el caso del equipo 4, estos habían colocado puros círculos, cuando la profesora-investigadora pasó por los lugares, les señaló que estaban rompiendo una de las reglas como se ve en el diálogo anterior, así que corrigieron y colocaron los cuadrados para evitar los huecos. El área que determinaron todos los equipos fue de 3.8 cm^2 , la estrategia para llegar a este valor fue que sumaron las áreas de los tres cuadrados y de un círculo como se puede ver en la Figura 51.

Figura 51.

Producto polígono 1, equipo 2.

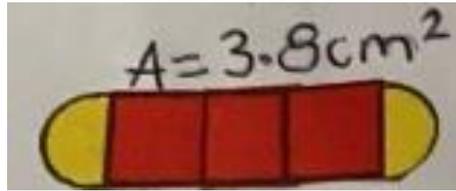


Figura 52.

Polígono 2



Para el polígono 2 (véase Figura 52), los cuatro equipos utilizaron un cuadrado y dos círculos los cuales dividieron a la mitad. El equipo 1, 2 y 3 obtuvieron un área de 2.6 cm^2 , mientras que el equipo 4 un área de 1.16 cm^2 . El error que presenta el equipo 4 se da debido a que no suman correctamente las áreas, pues al sumar $0.8 + 0.8$ éstos determinan que el resultado es 0.16 y no 1.6 como se puede observar en la Figura 53. Cabe señalar que esto se analiza con los alumnos hasta la fase de validación.

Figura 53.

Producto polígono 2, equipo 4.

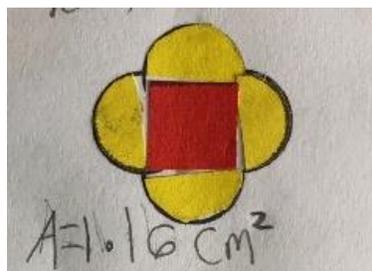


Figura 54.

Polígono 3.



Para el polígono 3 (véase Figura 54), los equipos utilizaron 6 triángulos para cubrirlo y determinaron que tenía un área de 6 cm^2 , pues cada triángulo tiene un área de 1 cm^2 y su estrategia fue sumar estas áreas como se puede ver en la Figura 55.

Figura 55.

Producto polígono 3, equipo 1.

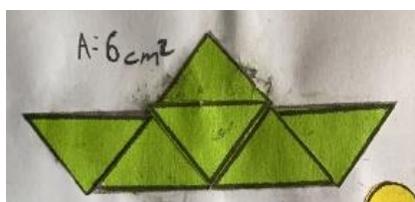


Figura 56.

Polígono 4.



En el polígono 4 (véase Figura 56) los equipos utilizaron cuadrados para cubrirlo y el área que determinaron fue de 13 cm^2 , la estrategia para llegar a este valor fue sumar las áreas de los 13 cuadrados (Figura 57).

Figura 57.

Producto polígono 4, equipo 3.

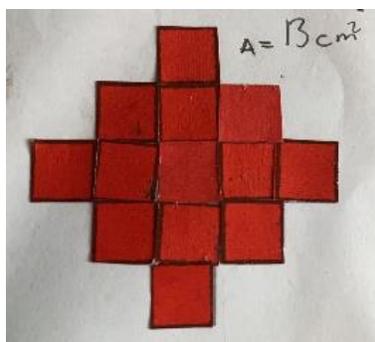


Figura 58.

Polígono 5



En cuanto al polígono 5 (véase Figura 58), los equipos también utilizaron cuadrados y obtuvieron un área de 21 cm^2 , aquí el equipo 4 presentó dificultades para cubrir la figura, pero esta se inclinaba a la manera en la que recortaban los cuadrados pues al momento de colocarlos algunos les quedaban más pequeños con otros por no respetar las líneas, sin embargo, al realizar varios recortes pudieron cubrir bien la figura como se puede observar en la Figura 59.

Figura 59.

Producto polígono 5, equipo 4.



Figura 60.

Polígono 6.



El polígono 6 (véase Figura 60) fue cubierto por 7 triángulos por los equipos 1, 3, y 4, mientras que el equipo 2 lo cubrió con 6 cuadrados y un triángulo y su área fue de 7 cm^2 para todos los equipos. (Figura 61)

Figura 61.

Producto polígono 6, equipo 1.

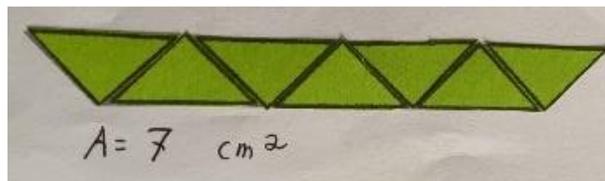


Figura 62.

Polígono 7 y 8.



En el polígono 7 y 8 (véase Figura 62) los cuatro equipos combinaron figuras de las plantillas; para el polígono 7 utilizaron 5 cuadrados y dos y medio círculos, el equipo 1 y 2 obtuvieron un área de 7cm^2 , mientras que el equipo 3 y 4 un área de 5.20cm^2 , se observa que el equipo 3 y 4 cometen el mismo error, pues al sumar los decimales obtienen 0.20 en lugar de 2; para el polígono 8 los equipos utilizaron cinco triángulos y un cuadrado, obteniendo como área 6cm^2 , como se puede ver en la Figura 63.

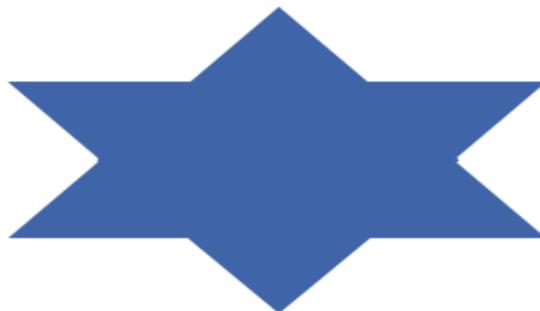
Figura 63.

Producto polígono 7 y 8, equipo 3.



Figura 64.

Polígono 9.

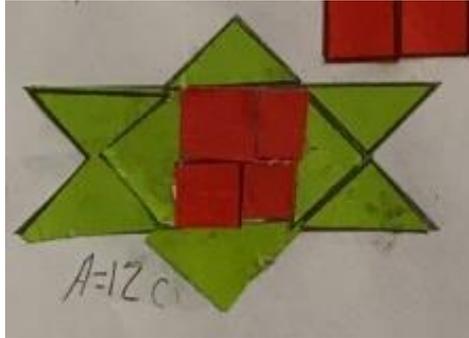


Para el polígono 9 (véase Figura 64) el equipo 1 utilizó 12 triángulos, mientras que los equipos 2, 3 y 4 utilizaron 4 cuadrados y 8 triángulos, cabe señalar que los cuatro equipos llegan a la respuesta correcta que es 12cm^2 , sin embargo, en el producto

del equipo 4 (Figura 65) se observa que los alumnos hacen modificaciones al cuadrado y queda más pequeño, pero siguen considerando que este tiene área 1cm^2 . Este error se puede deber a que los alumnos están asociando la forma de la figura al área y no sus dimensiones.

Figura 65.

Producto polígono 9, equipo 4.



Los equipos se observan motivados al manipular el material (Figura 66), la profesora-investigadora vuelve a pasar por los lugares para analizar cómo éstos, después de cubrir los polígonos y determinar sus áreas, dan respuesta a las preguntas planteadas.

Figura 66.

Equipo 2 determinando el área de los polígonos.



La pregunta 1 tiene la intención de comprobar si los alumnos han comprendido la relación del área con otra superficie que se toma como la unidad, pues al determinar el procedimiento utilizado nos permitirá identificar si éstos toman en cuenta las áreas de las plantillas para determinar el área del polígono o no.

Equipo 1.

P: ¿cómo le van a hacer para obtener el área?

As: contar, multiplicar.

A1. Sumar los cm^2 .

A2: sumar las áreas de cada figura.

Se puede observar en el diálogo anterior que algunos de los integrantes del equipo 1 no tenían claro cuál era el procedimiento para determinar las áreas, sin embargo, intervienen otro de los alumnos y señala que simplemente deben sumar las áreas de las figuras que cubren al polígono para saber el área que éste tiene.

Equipo 2.

P: ¿Cómo le vamos a hacer para determinar el área de los polígonos? Por ejemplo, cada cuadrado tiene área 1 cm^2 , ¿Cómo podríamos determinar el área total del rectángulo?

As: multiplicar.

P: pero no tenemos las medidas del rectángulo. Si les pido que calculen el área de la estrella ¿qué multiplicarían? O ¿Qué medidas tomarían?

//los alumnos piensan y observan los polígonos//

A5: Sumando.

El equipo 2 en un primer momento no logra identificar la utilidad de saber el área de las figuras de las plantillas y quiere utilizar alguna fórmula para calcular el área de los polígonos lo cual es correcto, sin embargo, cuando se le cuestiona sobre alguno de los polígonos irregulares se dan cuenta que para ellos no hay fórmula y que para determinar el área pueden sumar las de las figuras que utilizaron para cubrirlo.

La respuesta que dan los alumnos a la pregunta 1 con respecto al procedimiento utilizado para calcular el área de los polígonos es que sumaron las áreas de las figuras como se puede ver en la Figura 67, sin embargo algunas cuestiones que se presentaron fue el error de los alumnos al sumar los números decimales que aunque el procedimiento que realizan de sumar las áreas es correcto el resultado es erróneo, además de las modificaciones que hace el equipo 4 a las figuras del polígono 9 asociando la forma de la figura al área y no al espacio que ésta ocupa.

Figura 67.

Respuesta a la pregunta 1 del equipo 1.

- ¿Cuál fue tu procedimiento para determinar el área de todos los polígonos?
Dependiendo las figuras que caben dentro sumamos sus áreas y obtuvimos el resultado.
- ¿Tuviste alguna dificultad para cubrir totalmente algún polígono con la

La pregunta 2 tiene la intención de identificar las posibles dificultades a las que se enfrentaron los alumnos y cómo estos las resolvieron. El equipo 3 y 4 señalaron que para cubrir los polígonos recortaron las figuras, como se puede ver en la Figura 68. En el caso del equipo 4 no cuidaron que al recortar las figuras el área de estas sería modificada y que esta situación debían contemplarla al calcular el área de los polígonos. El equipo 1 y 2 señalan que no tuvieron dificultad, sin embargo, sí recortan las figuras para cubrir los polígonos cuidando esta modificación al obtener el área.

Figura 68.

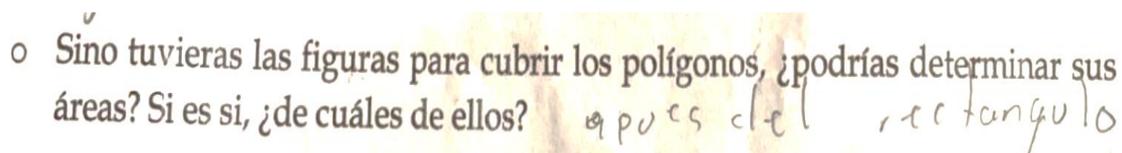
Respuesta a la pregunta 2, equipo 3 y 4.

- ¿Tuviste alguna dificultad para cubrir totalmente algún polígono con la misma figura? Si fue si, ¿Cómo lo solucionaste? Si, recortando la figura.
- ¿Tuviste alguna dificultad para cubrir totalmente algún polígono con la misma figura? Si fue si, ¿Cómo lo solucionaste? primero pusimos las figuras por encima sin pegarlas para ver si estaban bien y las que no las recortamos

La pregunta 3 tiene la intención de que los alumnos identifiquen que existen más maneras de calcular el área que aplicando una fórmula de manera directa y más aún cuando se les presentan polígonos irregulares. Los cuatro equipos señalan que únicamente podrían calcular el área del rectángulo (Figura 69), lo que les permite identificar la utilidad de las figuras de las plantillas.

Figura 69.

Respuesta a la pregunta 3 del equipo 4.

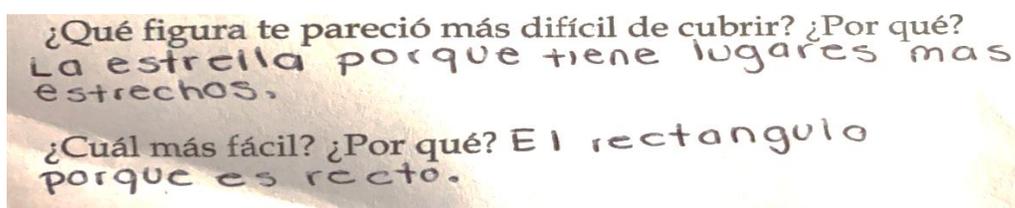


o Si no tuvieras las figuras para cubrir los polígonos, ¿podrías determinar sus áreas? Si es si, ¿de cuáles de ellos? *apues del rectangulo*

La pregunta 4 y 5 tienen la intención de identificar cuáles de los polígonos les pareció más difíciles o fáciles a los alumnos y a que se lo atribuían. Entre las respuestas, el equipo 1 señaló que le pareció más difícil aquellos que incorporaban círculos y que debían dividir a la mitad y más fáciles los en lo que utilizaban únicamente cuadrados. Para el equipo 2, 3 y 4 la estrella fue la más difícil por el acomodo de las figuras y el rectángulo el más fácil por su forma, lo cual se puede observar en la Figura 70.

Figura 70.

Respuestas a la pregunta 4 y 5 del equipo 3.



¿Qué figura te pareció más difícil de cubrir? ¿Por qué?
La estrella porque tiene lugares mas estrechos.

¿Cuál más fácil? ¿Por qué? *El rectangulo porque es recto.*

Como se puede observar los cuatro equipos llegan a la respuesta correcta al determinar las áreas de los polígonos al recubrirlos con las figuras de las plantillas. Con las respuestas de las preguntas más allá de identificar si son correctas o incorrecta se buscaba identificar el razonamiento que los alumnos utilizaron para determinar las áreas, las cuales dan muestra de que éstos llegan a establecer la relación del área de los polígonos con el área de las figuras. Es importante mencionar que el equipo 4 no llega a determinar de manera correcta el área del polígono 9, pero logra establecer la relación entre el área y el espacio de la figura, la asocia a la forma, dándole más importancia a ello que a el área de la figura.

En la tabla 1, se muestran los aciertos (1) y los errores (0) que tuvieron los equipos al obtener el área de las figuras en la actividad 1. Cuando los alumnos trabajaron con valores decimales es cuando se presentan los errores, aunque su procedimiento es correcto, al trabajar con valores enteros los alumnos lo realizan de manera correcta.

Tabla 6.
Resultados de la actividad 1.

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6	Fig. 7	Fig. 8	Fig. 9
Equipo 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Equipo 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Equipo 3	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Equipo 4	0	1	1	1	1	1	0	1	1

Nota: Aciertos (1) y errores (0).

4.3.3 Situación de validación (Actividad 1)

En esta situación se analizan las explicaciones que dan dos de los equipos respecto a los procedimientos que utilizaron para dar respuesta a la actividad 1. Solo se pasa a dos equipos debido al tiempo, pues no se alcanzaría a pasar a los cuatro equipos. Se seleccionó a los equipos que cubrieron sus polígonos de manera diferente a los otros y a los que tuvieron alguna dificultad.

La profesora-investigadora pasa al pizarrón al equipo tres, para analizar las repuestas que estos dieron a las preguntas les pide que las lean y respondan en voz alta, para entender mejor las respuestas de los alumnos realiza algunas que no estaban en la hoja de trabajo.

Equipo 3.

P: ¿Cuál fue su estrategia para determinar el área de los polígonos?

As: ver cuantas figuras cubrían al polígono y luego sumar sus áreas.

P: ¿Qué área obtuvieron para la figura 7? Y ¿Cómo la obtuvieron?

A9: 5.20cm^2 y sumamos 5 más 0.20 de los círculos.

P: ¿están de acuerdo con sus compañeros?

As: no, no da 0.20 da 2.

P: al sumar los decimales debemos tener cuidado de acomodar correctamente las cantidades, sus compañeros tienen razón, el resultado es 2. El resto de las áreas son correctas //lo anota en el pizarrón//

Es evidente que los alumnos tienen un error a la hora de hacer la suma, pues al sumar los decimales estos no llegan a la obtención de 2 sino de 0.20, la profesora-investigadora al percatarse de este error en la fase de formulación lo retoma pues otro de los equipos lo comete de igual manera en la misma figura.

P: Para la pregunta número 2, ¿tuviste alguna dificultad... //lee la pregunta//

As: Sí.

P: y, ¿Qué hicieron para solucionarlo?

As: recortamos las figuras para poderlas cubrir.

P: Muy bien.

//un alumno menciona que ellos tuvieron el mismo problema y lo solucionaron igual//

La estrategia que señala el equipo al recortar la figura para cubrir los polígonos es una estrategia que utilizaron el resto de los equipos, pues combinaron algunas de las figuras, sin embargo, no se señala que al hacer esto ellos debían cuidar que el área de las figuras también cambiaría. Los equipos al hacer esta modificación únicamente lo hacen con el círculo al dividirlo por la mitad.

P: siguiente pregunta, ¿si no tuvieran las figuras... *//lee la pregunta//* podrían hacerlo?

A7: no, bueno sí. Con los centímetros.

P: ah, usarían una regla. ¿y para el caso de la estrella?

//los alumnos permanecen en silencio//

P: Sería más complicado verdad, ¿Cómo les ayudaron estas figuras?

A7: ya sabemos los cm^2 y sumamos.

Como se puede leer en los diálogos anteriores, los alumnos identifican la utilidad de las figuras de las plantillas para determinar el área de los polígonos irregulares, pues saben que sin el uso de éstas les sería complicado llegar a la obtención de su área, pues como se observa, únicamente podrían calcular el área del rectángulo, por ser una de las figuras que comúnmente trabajan en el salón de clases.

La profesora-investigadora únicamente retoma la respuesta que el equipo tres tenía incorrecta, por lo que da por hecho que el resto de las áreas son correctas, permitiéndole al resto de los alumnos validar únicamente las preguntas de la actividad, en ese momento la profesora no se da cuenta de su error y continua con la clase.

La profesora-investigadora pasa al equipo cuatro al pizarrón y realiza la misma dinámica para que éstos compartan sus resultados.

Equipo 4.

P: platíquenos que fue lo que hicieron ustedes.

A10: vimos como acomodar las figuras.

P: y, ¿para sacar su área?

A11: sumamos, las áreas de las figuritas.

P: ok, su procedimiento fue sumar las áreas de las figuras, como el de sus compañeros.

Miren *//le dicen al resto del grupo//* el equipo 3 utilizó puros triángulos y el equipo 4 además de triángulos uso cuadrados y obtuvieron la misma área. *//los alumnos observan//*

En este momento la profesora-investigadora no se percató de que los alumnos del equipo 4 habían modificado y hecho más pequeños los cuadrados, lo cual les permitió que se quedaran con ese error de no respetar el área de las figuras y señalarles que al modificarlas, su área también lo haría. En los diálogos anteriores solo resalta que existían diferentes maneras de combinar las figuras para cubrir los polígonos y que estos procedimientos los llevarían al mismo resultado. Por lo que al resultar lo anterior continúa con la clase.

P: tuvieron alguna dificultad... //lee la siguiente pregunta//

As: si, combinamos algunas figuras, primero pusimos los cuadrados y luego recortamos el círculo.

P: ¿si no tuvieras las figuras, podrían determinar su área? ¿Qué estrategia hubieran utilizado para determinar el área del barquito?

As: hubiéramos medido, dividido la figura.

P: hubieran dividido la figura en otras conocidas. Muy bien. ¿Qué figura les pareció más difícil y por qué?

A9: el rectángulo porque a veces recortábamos más chicos los cuadrados o más grandes.

P: oh, era por la manera en la que recortaban. Y ¿Cuál más fácil?

As: el barquito, porque quedaba muy bien la figura.

Como se puede observar en el diálogo anterior, los alumnos determinan que les parece más fácil trabajar con aquellas figuras que ya conocen y que para determinar el área de las que no conocen, alguna fórmula, pueden hacer uso de dividir las en figuras conocidas para poder determinar su área.

4.3.4 Situación de institucionalización (Actividad I)

Aquí la profesora-investigadora toma el control de la actividad y retoma lo elaborado por los alumnos para que éstos le den significado a lo que hicieron, en este caso, al concepto de área, a partir del recubrimiento de los polígonos y establezcan la relación del concepto de área con otra superficie que se toma como la unidad, además que identifiquen que la obtención del área no se centra únicamente en las fórmulas, sino que existen otras maneras de obtenerla.

P: Jóvenes, ¿Cuál creen que sea la finalidad de las figuras?

As: sacar el área de figuras irregulares.

P: siempre nos piden, por lo regular, que obtengamos el área de figuras regulares, verdad, por ejemplo, un cuadrado. Pero cuando se nos presentan figuras que nos son regulares es cuando decimos y ¿Cómo le vamos a hacer? En este caso, hicimos uso de otras figuras para cubrirlas totalmente, la consigna era que no quedaran huecos, porque si no, nos faltaría área, ni que

empalmáramos figuras. Si se fijan, ustedes pueden calcular el área de cualquier figura irregular y pueden hacer uso de otras estrategias para determinar su área. En este caso yo les di cuadrados, triángulos y círculos, pero hay más figuras. Entonces ¿Qué me pueden decir del área?, ¿Qué es el área?

A9: lo que tiene cada figura.

A1: lo que mide cada figura.

P: por ejemplo, esto mide esta figura //señala un lado de la figura// ¿Esto es el área?

As: no, lo que está adentro.

P: lo que está adentro, ¿en qué unidad estábamos trabajando?

As: cm^2

P: entonces, ¿Qué es el área?

A2: El área van a ser los cm^2 que contenga una figura.

P: ¿Qué hicieron para obtener el área?

A7: Sumamos los cm^2 que tenían las figuras.

P: Entonces, el área serán los cm^2 que estarán contenidos en una figura.

Como se puede leer en los diálogos, en la situación de institucionalización se caracteriza el área retomando lo realizado por los alumnos, se observa que los estudiantes tienen una idea, pero que, de inicio, no pueden concretarla, por lo que la profesora realiza algunas devoluciones para que éstos reconozcan mejor lo que piensan y relacionen lo hecho con el concepto. En este momento, el propósito de la profesora es que los estudiantes vean cómo la actividad contribuye para reconocer qué es el área y cómo se puede obtener: con el uso de fórmulas, tomando alguna figura como la unidad, o dividirla en figuras conocidas (aunque posteriormente se propondrá el uso de dicha estrategia).

El tiempo del módulo termina, cabe señalar que en esta escuela son los profesores los que se mueven de salón, por lo que la profesora-investigadora guarda sus cosas y sale del salón de clases despidiéndose de los estudiantes.

4.4 Actividad II

La intención de la Actividad II es que los estudiantes descubran y justifiquen que el área de un polígono no es dependiente del perímetro y a su vez distingan un concepto del otro. La actividad se llevó a cabo el día miércoles 23 de marzo del año 2022 en un horario de 11:00 a.m. a 11:40 a.m. con el grupo de primero B, con 12 alumnos en el aula.

4.4.1 Situación de acción (Actividad II)

Esta actividad requería que los alumnos estuvieran divididos en dos grupos, el primero debería comenzar con la consigna analizando al polígono para realizar el mensaje y el segundo esperar a que se les entregara éste para continuar con la actividad, por ello se optó que el primer grupo dividido en 3 equipos de dos alumnos estuviera trabajando en un área verde, mientras que el resto del grupo trabajaba en el salón formando figuras con el tangram.

Una vez dividido el grupo, la profesora va con el primero de ellos para entregarles la hoja de trabajo, el material y comenzar con la actividad. Al entregarles la hoja de trabajo los estudiantes inmediatamente comienzan a leer las instrucciones por lo que la profesora les da un momento y después continúa:

Grupo 1

P: Bien, lea las instrucciones por favor. *//le pide a uno de los estudiantes//*

A1: Busquen o creen un método para comunicar, mediante un mensaje escrito (sin utilizar dibujos) el área del siguiente polígono a alguien de su equipo que no lo vea, con la finalidad de que logre construir uno con área congruente, después respondan las preguntas:

P: ¿qué es lo que entiende vamos a hacer?

A2: vamos a escribir un mensaje para que nuestros compañeros hagan la figura.

P: Van a tomar todas las características que crean necesarias para que cuando ustedes les entreguen el mensaje a algunos de sus compañeros, estos únicamente con ello puedan crear un polígono con áreas congruentes. El concepto congruencia hace referencia que las áreas deben ser iguales.

//la profesora hace ver a los alumnos que es una tarea muy importante, que sus compañeros no deben ver el polígono y que el mensaje más completo será aquel que logre que sus compañeros construyan el polígono solicitado//

Además de la hoja de trabajo la profesora entrega a los alumnos el polígono en cartulina de color verde, del cual pueden tomar los datos que crean necesarios para hacer su mensaje. Los alumnos comienzan a manipular el material, observando en este primer momento que ya están pensando en alguna estrategia pues tratan de tomar algunas medidas y a dividirlo en posibles figuras como se puede observar en la Figura 71.

Figura 71.

Alumnos explorando el material de la actividad 2.



Una vez que los alumnos comenzaron a explorar el material, la profesora regresa al salón de clases y entrega a los otros tres equipos un tangram y una hoja con figuras, y les pide que comiencen a formar la primera, como se puede observar la Figura 72.

Figura 72.

Alumnos formando figuras con el tangram



La intención de esta actividad complementaria es, además de que trabajen con áreas, acercarlos a la actividad 3 en la que se aborda la conservación de áreas. Para llevar a cabo esta actividad se hace una especie de competencia para motivar a los alumnos se registra en el pizarrón el número de figuras que van formando, antes de que sus compañeros hayan finalizado el mensaje se les cuestiona a los alumnos si las figuras que formaron tienen la misma área como se ve en el siguiente diálogo.

P: ¿la vela y el barco tienen la misma área?

A3: No.

A4: Sí, porque las estamos haciendo con las mismas figuras.

P: ¿qué dicen los demás?

As: Sí, sí, tienen la misma área, porque todas tienen las mismas figuras.

La actividad orienta a los alumnos a identificar que existen figuras que, aunque tengan distinta forma su área puede ser la misma.

4.4.2 Situación de formulación (Actividad II)

La situación de formulación se centra en la creación del mensaje, la estrategia que utilizaron y los datos que tomaron en cuenta para crearlo. Los alumnos se sienten motivados pues sienten la responsabilidad de hacerlo bien para que sus compañeros lleguen a la construcción del polígono solicitado. La profesora-investigadora regresa a los equipos para analizar las estrategias que están pensando para hacer su mensaje:

Equipo 1.

P: ¿Cómo vamos?

As: maestra, ¿podemos dividir la figura en triángulos?

P: ¿para qué?

As: para obtener el área de la figura.

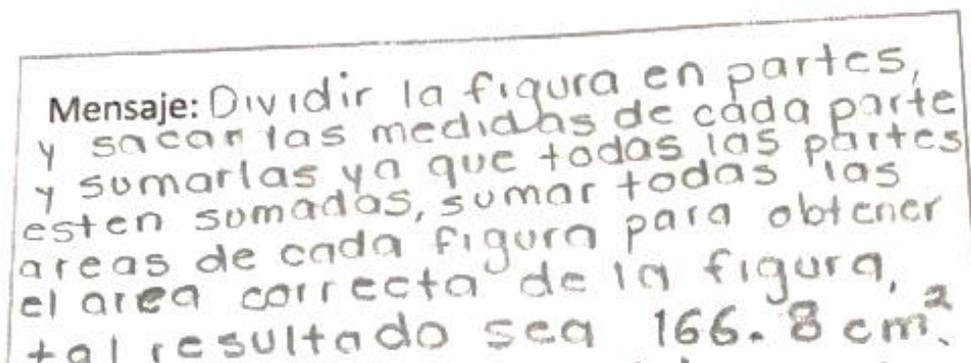
P: ah, muy bien.

Se puede observar en la estrategia del equipo 1 que han identificado que deben obtener el área de la figura pues es el dato principal de la actividad y además como se trata de una figura irregular deben hacer una transformación a este mediante triángulos (figura conocida para ellos) para poder calcular.

La Figura 73, muestra como el mensaje del equipo 1 señala la manera en la que ellos dividieron al polígono y obtuvieron su área, ellos no toman en cuenta la forma del polígono, únicamente señalan que para construir otro con áreas congruentes deben respetar el área de 166.8 cm^2 .

Figura 73.

Mensaje creado por el equipo 1, actividad 2



Mensaje: Dividir la figura en partes, y sacar las medidas de cada parte y sumarlas ya que todas las partes esten sumadas, sumar todas las areas de cada figura para obtener el area correcta de la figura, tal resultado sea 166.8 cm^2 .

Equipo 2.

P: ¿Cómo vamos?

//los alumnos dividieron el polígono en otras figuras, pero en su mensaje solo mencionan en cuales figuras han dividido el polígono, pero no proporcionan ninguna medida o dato//

P: ¿Creen que con solo mencionar las figuras en las que dividieron su polígono sea suficiente para que al entregar su mensaje sus compañeros hagan el polígono? Recuerden que sus compañeros no pueden verlo, únicamente será la información que ustedes les den.

As: No, entonces les faltan datos.

P: Como ustedes creen que es mejor, únicamente piensen que si a ustedes les dan esa información, sea suficiente.

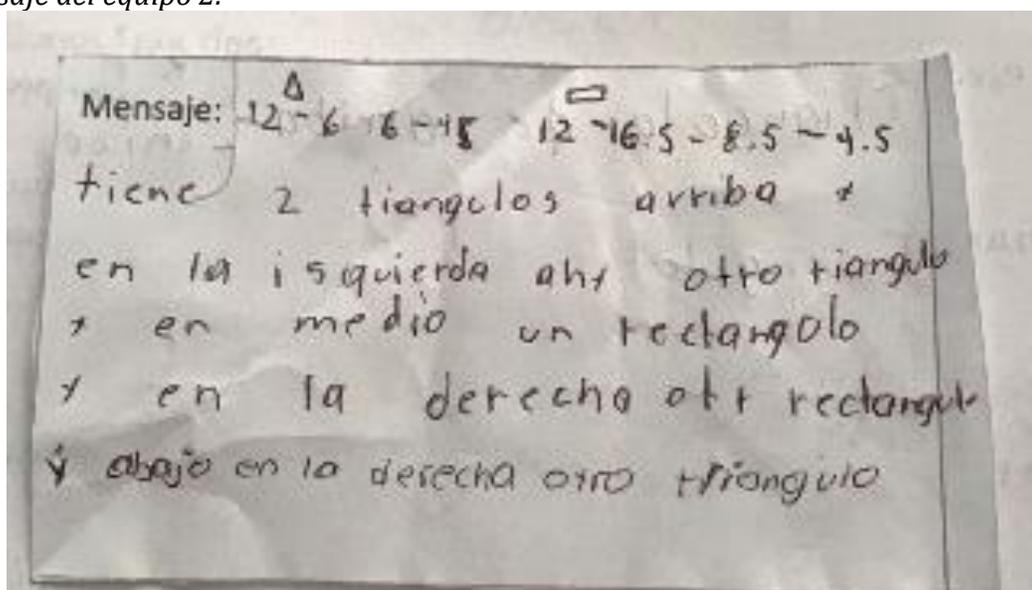
El equipo dos ya tenía dividido su polígono en otras figuras y habían comenzado a escribir su mensaje, sin embargo, en él solo contenían las figuras en las que lo habían dividido sin ningún dato más, por lo que la profesora-investigadora los cuestiona para

que identifiquen que si a ellos les entregan ese mensaje sería suficiente para que pudieran crear el polígono, a lo que responden que no y comienzan a darles datos a las figuras que ya tienen en su mensaje.

Se puede observar en la Figura 74 como el mensaje creado por el equipo dos, toma en cuenta la forma del polígono y cuida en su mensaje señalar hacia donde se encuentran las figuras en las que ellos lo dividieron. Como se les cuestionó si era suficiente, ellos decidieron anotar las medidas de las figuras. Se puede observar que ellos trataron de que sus compañeros formaran el mismo polígono y que con ello podrían obtener la misma área, sin identificar que la actividad solo les pedía un polígono con la misma área y no con la misma forma.

Figura 74.

Mensaje del equipo 2.



Equipo 3.

P: ¿Cómo vamos?

As: bien maestra, primero obtuvimos el área del polígono y estamos creando el mensaje por pasos para que se entienda mejor.

P: ¿Qué datos están tomando en cuenta?

As: pues dividimos el polígono en figuras y estamos dando los datos de las figuras y donde están.

P: Muy bien, dense prisa para terminar su mensaje y pasar al salón.

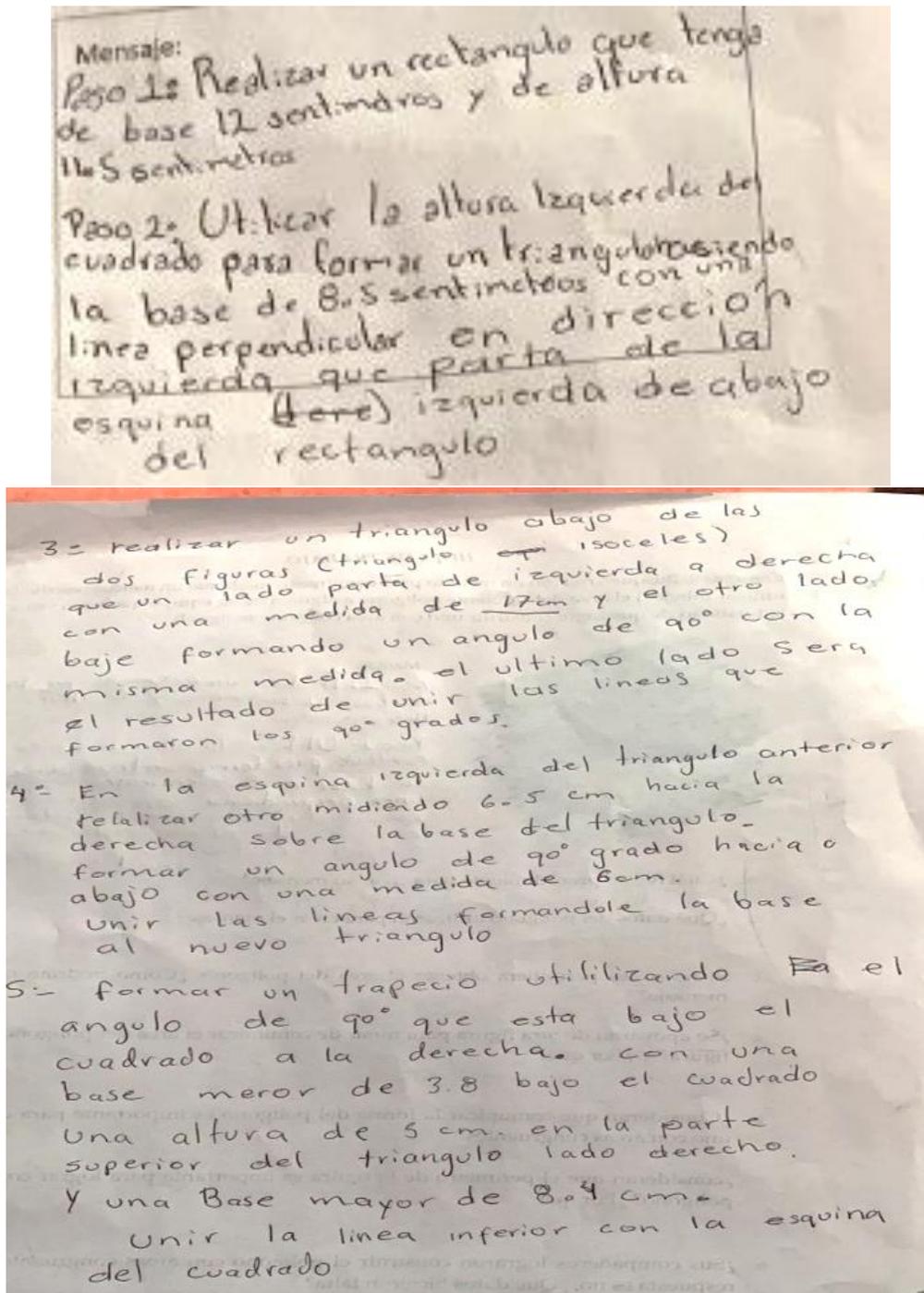
En el equipo tres se observa mejor organización, éstos ya habían calculado el área del polígono dividiéndolo primero en figuras, y estaban creando su mensaje por pasos, de tal forma que para que cuando se entregara a sus compañeros, éstos pudieran

seguirlos y así crear el polígono. Se señala a los alumnos que de los 15 minutos que se les dieron para crear el mensaje les quedaban únicamente 3 para entregarlo.

Se puede observar en la Figura 75 que el equipo 3 al igual que el equipo 2, trataron de comunicar en su mensaje la forma del polígono y aunque el equipo tres lo hace de manera organizada no será suficiente y no consideraron que no se les solicita crear el mismo polígono.

Figura 75.

Mensaje creado por el equipo 3.



Una vez transcurrido el tiempo, los alumnos regresan al salón y del resto de grupo se integran a su equipo 2 alumnos más (los que serán encargados de crear el polígono) quedando así tres equipos de 4 integrantes cada uno. Los alumnos responsables de hacer el polígono comienzan a analizar el mensaje y a construir a partir de él.

P: muy bien, sus compañeros estuvieron trabajando en un mensaje, con el cual ustedes deben seguir para crear un polígono según la información que se les está dando. Tendrán un tiempo de 10 a 25 minutos para hacerlo. Ahorita no vamos a revisar si está bien o mal, únicamente es que ustedes formen el polígono como entiendan el mensaje.

//los alumnos comienzan a descifrar el mensaje//

Equipo 1.

P: ¿Cómo van?

As: no nos sale.

P: ¿no pueden?

As: no.

P: ¿la información que tienen no es suficiente para construir el polígono?

As: no.

P: ¿qué creen que le hace falta a este mensaje?

As: las figuras.

P: el único dato es el área, ¿no creen que sea suficiente?

As. No, no sabemos que polígono es.

P: Ok, traten de contestar las preguntas.

Se puede observar como el equipo 1 cree necesario que para poder construir el polígono se necesita como dato importante la forma que éste tiene y no se dan cuenta que tienen el dato más importante que el área. La profesora-investigadora trata de que ellos salgan de este error, pero creen imposible crearlo, por lo que considera será un dato importante en la situación de validación pues los alumnos no llegan a la construcción.

Equipo 2.

P: ¿Cómo vamos?

As: es que no le entendíamos, pero ya le entendimos.

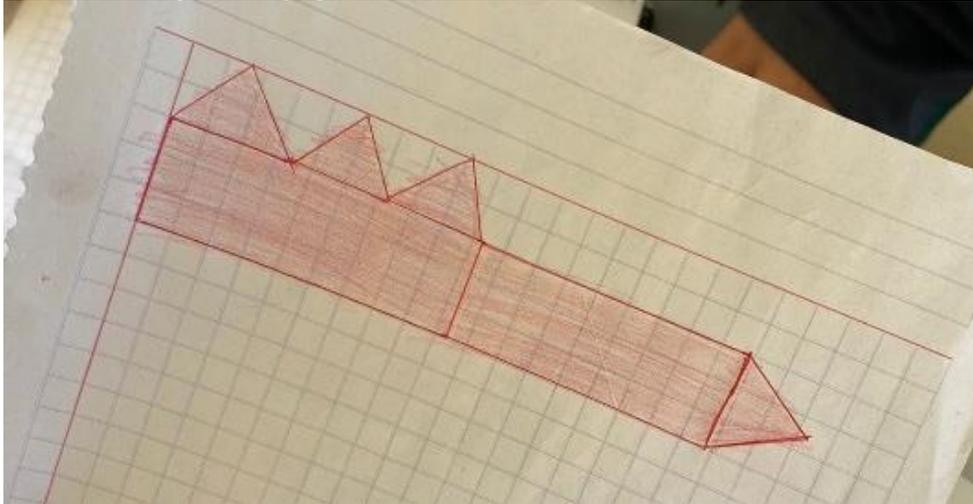
//la alumna señala las figuras//

P: van a formar las figuras y luego las van a juntar, muy bien.

El equipo 2, en su mensaje tienen las figuras y las medidas de éstas por lo que piensan que primero las realizarán por separado para después juntarlas y así formar el polígono. El polígono al que llegan los alumnos se puede ver en la Figura 76.

Figura 76.

Polígono construido por el equipo 2.



Equipo 3.

P: ¿Cómo vamos?

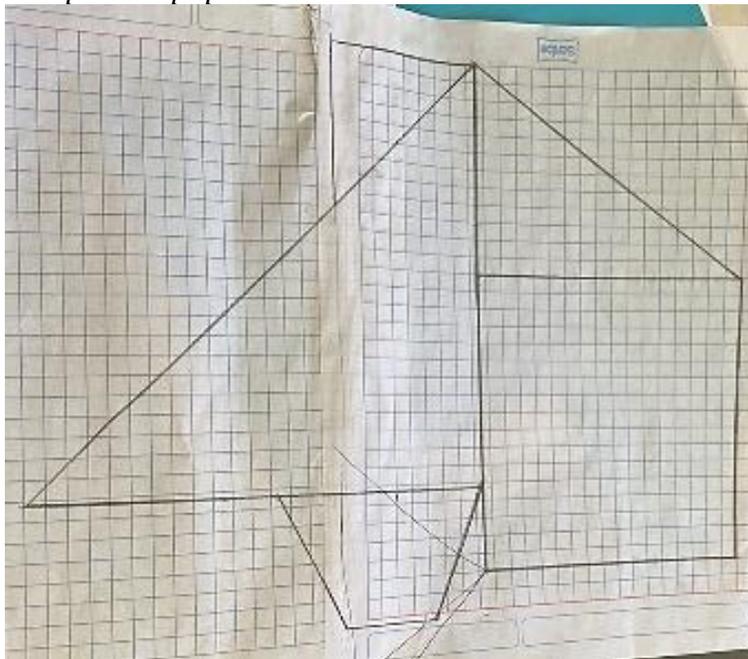
As. Estamos siguiendo los pasos.

P: Ok, traten de construir el polígono con este mensaje.

El equipo 3 está tratando de seguir los pasos señalados por su mensaje, sin embargo, se observan confundidos pues no comprenden bien hacia donde deben ir formando las figuras. El polígono que lograron construir se observa en la Figura 77.

Figura 77.

Polígono construido por el equipo 3.



Las preguntas 1 y 2 tienen la intención de identificar cual fue el razonamiento de los alumnos para crear su mensaje y que datos del polígono les parecieron indispensables para ello. La respuesta de los tres equipos está centrada en la división del polígono y en los datos de las figuras en los que lo dividieron. Para el equipo uno esta división les servía para obtener el área, mientras que el equipo 2 y 3 se centraron en la forma de éste como se puede observar en la Figura 78.

Figura 78.

Respuestas a la pregunta 1 y 2 del equipo 3.

- o ¿Cuál fue su procedimiento para crear su mensaje?
Se dividió en partes para explicar mejor
- o ¿Qué datos del polígono utilizaron para crear el mensaje?
las medidas de las figuras divididas

Las preguntas 3 y 4 tienen la intención de identificar qué otra estrategia pondrían en práctica los alumnos si no se les permitiera obtener el área del polígono y si para ellos el perímetro sería un dato importante, sin embargo, los alumnos se centraron en la utilización de figuras auxiliares, por lo que los equipos señalaron que harían uso de otras figuras como lo son el triángulo y cuadrado, tal y como lo hicieron el equipo 2 y 3 para crear su mensaje, situación que se puede analizar en la respuesta del equipo 2 en la Figura 79.

Figura 79.

Respuesta a la pregunta 3 y 4 del equipo 2.

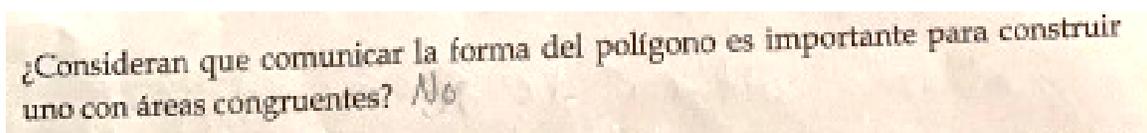
Si no se les permitiera obtener el área del polígono, ¿Cómo podrían crear su mensaje? ayudarnos con algunas figuras

¿Se apoyaron de otra figura para tratar de comunicar el área del polígono?, ¿Qué figura? Y ¿Por qué? Si de triángulos y cuadrados para que sea más fácil de explicar

La pregunta 5 tienen la intención de que los alumnos identifiquen que la forma del polígono no era un dato importante para construir uno con áreas congruentes, pues no se señalaba en las instrucciones, aspecto que únicamente fue considerado por el equipo 1 como se puede ver en la Figura 80, mientras que el equipo 2 y 3 lo tomaron como un dato muy importante.

Figura 80.

Respuesta a la pregunta 5 del equipo 1.



Para esta pregunta consideramos necesario haber pedido a los alumnos justificaran su respuesta del porque ellos consideraban o no un dato importante la forma del polígono.

La pregunta 6 tienen la intención de identificar si para los alumnos el perímetro es un dato importante, a lo que los tres equipos respondieron que no, situación que se puede analizar en sus mensajes, pues ninguno de los tres equipos lo incluyó como dato. Este aspecto es retomado en la situación de institucionalización.

La pregunta 8 tiene la intención de que los alumnos vayan pensando respecto a la conservación de áreas e identifiquen que los polígonos pueden tener distinta forma, pero misma área. A esta pregunta los alumnos respondieron que sí, que pueden existir otros polígonos con la misma área.

4.4.3 Situación validación (Actividad II)

En esta situación se analizan las explicaciones que dan dos de los equipos con respecto a los procedimientos que utilizaron para dar respuesta a la actividad 2. Se pasa a los tres equipos, pero no se abordan todas las preguntas pues el tiempo así lo dispuso.

Equipo 1.

P: ¿Cuál fue el polígono que ustedes crearon? ¿pudieron construir el polígono?

As: no.

P: ¿Qué datos les daban en su mensaje?

As: solo el área. Nos faltaron las medidas.

P: ¿las medidas de qué?

As: de los lados para completar las figuras.

P: y ¿Cuál fue su procedimiento para crear su mensaje? Y ¿Qué datos utilizaron?

As: pues dividieron el polígono en triángulos y con ello sacamos el área.

P: pero la consigan no señalaba que debían construir el mismo polígono, sino uno con misma área. Se fijan que el equipo solo comunico el área. Con ese dato ustedes podían construir cualquier polígono que tuviera la misma área.

Cuando el equipo 1 pasa al pizarrón señalan que no pudieron construir su polígono porque no se les comunicó la forma que debía tener el polígono, por lo que la profesora-investigadora les menciona que ese no era un dato importante pues con el

área podían construir cualquier polígono con esa área. Con ello los alumnos se dan cuenta que no comprendieron bien las instrucciones y que, a decir verdad, era el único equipo que estaba en las posibilidades de crear el polígono solicitado.

Equipo 3.

P: ¿Pudieron construir el polígono?

As. Sí, creemos que sí. *//los alumnos muestran su polígono//*

P: y ¿Cuál fue su procedimiento para crear su mensaje? Y, ¿Qué datos utilizaron?

As: Se dividió el polígono en otros y se fueron haciendo pasos con los datos.

P: ¿Qué dificultad tuvieron?

As. No sabíamos si estábamos poniendo las figuras donde era.

Los integrantes del equipo 3, al pasar al pizarrón señalan que, aunque su mensaje contenía los pasos, no les fue fácil construir el polígono, pues los pasos señalaban algunas orientaciones y no tenían claro hacia dónde lo debían construir.

Equipo 2.

P: ¿cuál fue el polígono que crearon? *//los alumnos muestran su polígono//*

P: muy bien. ¿Creen que fue importante comunicar la forma del polígono?

As: sí, porque no sabíamos dónde poner las figuras.

P: ¿consideran que comunicar el perímetro del polígono era importante para hacer el mensaje o hubiera cambiado algo para que si lo pudieron construir?

As: no.

P: ¿en algún mensaje lo consideraron?

As: no.

P: ¿creen que existan más polígonos con esta área?

As: sí.

A los miembros del equipo 2, aunque les resultó un polígono distinto, el área no era la misma, pues los datos que les proporcionaron sus compañeros no fueron suficientes ni correctos. Además, con este equipo se cuestiona al perímetro como dato probable, a lo que responden que no fue importante, pues ningún equipo lo consideró y no cambiarían nada al respecto.

Una vez que los equipos pasaron al pizarrón y mostraron sus resultados, la profesora-investigadora mostró el polígono con el que habían trabajado sus compañeros y les preguntó si sus polígonos se acercaban al área, a lo que los alumnos respondieron que no.

4.4.4 Situación de institucionalización (Actividad 2)

Aunque los estudiantes no llegaron a la construcción del polígono la profesora-investigadora retoma lo realizado por éstos, para llevar a cabo la situación de institucionalización y rescatar los datos más importantes.

P: si se fijan en los mensajes donde tomaron en cuenta la forma de la figura no se llegó a formar la misma, ni al área, porque no dan los datos de las figuras en las que se dividió el polígono. Datos como el perímetro no eran necesarios porque podemos encontrar polígonos con misma área y diferente perímetro o al contrario, así que era un dato innecesario. En esta actividad ningún equipo llegó a construir el polígono, pero no quiere decir que sea todo perdido, pues descubrimos qué datos son necesarios para construir polígonos con áreas congruentes y que tanto la forma, como el perímetro, son datos que no son necesarios para crear el mensaje.

4.5 Actividad III

La intención de la actividad III es que los estudiantes demuestren mediante la manipulación de los polígonos con diferente forma, que éstos tienen áreas equivalentes, trabajando con ello la conservación del área. Esta actividad se llevó a cabo el día jueves 24 de marzo del año 2022 en un horario de 9:20 a.m. a 10:00 a.m. con el grupo de primero B, con 12 alumnos en el aula.

4.5.1 Situación de acción (Actividad III)

En la situación de acción analizamos la interacción de los alumnos con la actividad que se les proporcionó, la manera en la que leen las instrucciones y el problema, así como también la manipulación del material didáctico. A continuación, se describe lo sucedido en esta situación referente a la actividad III.

La profesora entra al salón de clases y saluda a los alumnos, estos se ponen de pie y responden el saludo, a lo que se les pide tomen su lugar para comenzar con la clase. El ambiente en el salón de clases es tranquilo, los alumnos permanecen en su lugar esperando que la profesora acomode sus cosas para comenzar con la actividad

Para comenzar con la clase la profesora, les pide a los alumnos se reúnan por equipos, dándoles la libertad de hacerlo con quien ellos quieran, esto con la intención de identificar si la actividad como el material logra que los alumnos se centren en realizarla, aunque puedan distraerse platicando.

Antes de entregarles la hoja de trabajo, la profesora muestra a los alumnos los dos polígonos con diferente forma hechos con cartulina de diferentes colores (morado y verde) y hace algunas preguntas:

P: ¿creen que estos polígonos tengan la misma área? //muestra los polígonos a los alumnos//

As: no. Uno tiene un pico.

As: sí.

P: levanten la mano quien dice que no // *la mayoría visible levanta la mano*//
ahora los que digan que si // *un par de alumnos levantan la mano con duda*//

P: pues dejen les digo que sí, tienen la misma área. Les voy a entregar una hoja de trabajo con los polígonos, vayan leyendo las instrucciones mientras lo hago.
//la profesora pasa por los lugares//

Los polígonos se realizan en dos cartulinas de diferente color para que los alumnos logren distinguir uno del otro al momento de trabajar con ellos, además se les muestran al principio para causarles incertidumbre al decir que tienen la misma área respuesta contraria a la que ellos dan y así puedan buscar las estrategias para determinar que se trata de polígonos con áreas equivalentes y que su forma no es un factor determinante.

Una vez que la profesora entregó a los equipos las hojas de trabajo y los polígonos, continua con la actividad solicitándole a uno de los alumnos lea las instrucciones.

P: Lea las instrucciones por favor.

A1: Los polígonos tienen la misma área. Demuestren que se trata de polígonos con áreas equivalentes.

P: En este caso, ustedes deben demostrarme con el procedimiento que quieran que se trata de dos polígonos con la misma área. Pueden hacer uso de ellos como ustedes quieran.

Los alumnos comienzan a explorar los polígonos, se observan motivados con el material, pues enseguida comienzan a buscar estrategias.

4.5.2 Situación de formulación (Actividad III)

La profesora-investigadora les da un tiempo para que los estudiantes realicen la exploración de material didáctico y comiencen a proponer estrategias para dar solución a la actividad. Luego del tiempo que se les da a los alumnos, la profesora-investigadora pasa por los equipos para identificar las formulaciones realizadas por los estudiantes.

Equipo 1.

P: ¿Cómo vamos? ¿Qué piensan hacer?

//los alumnos analizan las figuras, luego uno de ellos empalma los polígonos y se da cuenta que si recorta uno de ellos, puede ponerlo para que quede igual que el otro//

A2: ¿maestra y lo podemos cortar?

P: Sí.

A2: es que mire, aquí queda igual.

P: Muy bien, si un polígono cubre totalmente a otro quiere decir que tendrán áreas iguales.

Al pasar por el equipo los alumnos aún no tenían claro que estrategia utilizar, mientras un alumno manipulaba los polígonos se dio cuenta que, al juntarlos, uno podía cubrir al otro si lo modificaban, por lo que preguntan si se pueden recortar, la profesora-investigadora retoma por qué la estrategia que ellos eligieron está bien. Por lo que los alumnos comienzan a realizar algunos recortes en uno de los polígonos, como los podemos ver en la Figura 81.

Figura 81.

Equipo 1 empalmando los polígonos.



Luego de analizar la estrategia de los alumnos del equipo 1, la profesora-investigadora, pasa a analizar la estrategia del equipo 2.

Equipo 2.

P: ¿Cómo vamos? ¿Qué piensan hacer?

A5: pues vamos a dividir al polígono en estas figuras //señala las figuras// y luego vamos a obtener su área para ver si son las mismas.

P: ah, muy bien.

La estrategia planteada por el equipo dos, era que a ambos polígonos los dividirían en figuras para después obtener sus áreas y compararlas entre sí como se

puede ver en la Figura 82. Este procedimiento también fue realizado por el equipo 3, el polígono morado lo dividieron en dos rectángulos para sacar su área y luego sumarlas y el polígono azul en un rectángulo y un triángulo, también para después sumarlas. Para obtener sus medidas hicieron uso de una regla.

Figura 82.

Equipo 2 tomando medias de los polígonos para obtener su área.



La pregunta 1 tienen la intención de que los alumnos determinen su método para saber que se trata de áreas equivalentes, la respuesta que da el equipo 1 véase Figura 83, hace referencia a que ellos empalmaron los polígonos y acomodaron lo sobrante, mientras que los equipos 2 y 3, lo dividieron en figuras para calcular su área con la ayuda de éstas.

Figura 83.

Respuesta del equipo 1 a la pregunta 1.

- ¿Qué método utilizaron para determinar que se trata de dos áreas equivalentes? *que lo cortamos*

La pregunta 2, tiene la intención de identificar que datos según el criterio de los alumnos son necesarios para determinar que se trata de áreas equivalentes, el equipo 1, mencionó que a partir de su procedimiento lo que les ayudó fue poner uno encima del otro, que si estos se recubrían totalmente, quería decir que tenían mismas áreas, mientras que el equipo 2 y 3 señalaron, que las medidas que tenía el polígono, pues al dividirlo lo que hicieron fue medir de manera directa sus lados, para así poder obtener su área, respuesta que podemos observar en la Figura 84.

Figura 84.

Respuesta a la pregunta 2 del equipo 3.

- ¿Qué datos de los polígonos les ayudaron a determinar si son equivalentes? *triángulo y rectángulo*

La pregunta 3, tienen la intención de que los alumnos identifiquen que además del sobreponer un polígono con el otro o calcular se área de manera directa, el recubrimiento de los polígonos con otra figura puede ser otra manera de identificar si ambos polígonos tienen la misma área, tal como lo trabajaron en la actividad 1. El equipo 1, mencionó que si se puede, pero ellos se enfocaron en utilizar un polígono con otra y solo acomodar lo sobrante, el equipo 2, señaló que se pueden utilizar triángulos para que sea más fácil de colocarlos en el polígono que tienen uno, mientras que el equipo 3 mencionó que lo harían con triángulos y que algunos de ellos los dividirían para respetar al polígono que tiene forma de triángulo como lo podemos ver en la Figura 85.

Figura 85.

Respuesta a la pregunta 3 del equipo 3.

- ¿Cubrir ambos polígonos con la misma figura (como en la actividad 1) podría utilizarse? Si su respuesta es sí, ¿Qué figura utilizarían y por qué? *Triángulo*

La pregunta 4, tienen la intención de identificar si para los estudiantes, a partir de la manipulación del material y las comparaciones realizadas pueden determinar si existen otros polígonos con la misma área diferentes a los que ya trabajaron, a lo que

reponen los tres equipos que sí, que efectivamente pueden existir otros polígonos que tengan la misma área, como se puede ver en la Figura 86.

Figura 86.

Respuesta a la pregunta 4, del equipo 2.

- ¿Crees que existan otros polígonos con esta área? Si

La pregunta 5, consideramos es la más detonante pues en ella preguntamos si los estudiantes consideran que la forma es un aspecto importante para que dos o más polígonos tengan la misma área, aspecto en el cual los alumnos anteriormente sí lo consideraban, a lo que los tres equipos respondieron que no, que la forma no determina áreas equivalentes en los polígonos y que para comprobar esto existen muchas maneras de hacerlo, ver Figura 87.

Figura 87.

Respuesta a la pregunta 5, equipo 1.

¿crees que para que dos polígonos tengan la misma área su forma debe ser igual? ¿por qué? No, por que la forma no importa

4.5.3 Fase de validación (Actividad III)

En esta situación se analizan las explicaciones que dan dos de los equipos respecto a los procedimientos que utilizaron para dar respuesta a la actividad 4. Solo se pasa a dos equipos debido al tiempo, pues la clase fue interrumpida por una reunión previa a la junta de padres de familia.

Una vez que los equipos terminaron de dar respuesta a la actividad, se optó por pasar al equipo 1 y 2 al pizarrón pues eran procedimientos diferentes y de los cuales los alumnos podían comparar.

La profesora investigadora pasa al pizarrón al equipo 1, ver Figura 88.

Figura 88.

Equipo 1 en el pizarrón.



Equipo 1.

P. ¿Cuál fue su procedimiento?

As: las empalmamos, y lo que sobraba lo cortamos y lo completamos acá.

P: ¿de qué se dieron cuenta?

As. Se completaba la figura.

P: Muy bien, sus compañeros se dieron cuenta que se completaba la figura y al contemplarse la figura quiere decir que si sobreponemos una figura encima de otra y está la cubre totalmente, quiere decir que sus áreas son iguales.

//el resto del grupo observa atento y señala fue un procedimiento muy rápido y eficaz//

Los integrantes del equipo 1, señalan que su estrategia fue sobreponer las figuras y que con ello se dieron cuenta que lo restante lo podían colocar en otra parte del polígono y así lograr que ambos estuvieran igual. Los alumnos se escuchan seguros

y confiados en su procedimiento, pues expresan además que éste garantiza la equivalencia de áreas. Una vez que compartieron su procedimiento, la profesora-investigadora continúa con la clase y les pide que compartan a sus compañeros las respuestas a las preguntas.

Equipo 1.

P: ¿Cuál fue la primera pregunta?

A1. ¿Qué método utilizaron para determinar que se trata de dos áreas equivalentes?

Poniendo encima una de la otra y cortando lo que sobraba.

P: Muy bien, ¿segunda pregunta?

As: ¿Qué datos de los polígonos les ayudaron a determinar si tienen áreas equivalentes? Midiendo las figuras y costándolas.

P: Muy bien. Siguiendo pregunta.

As. ¿Cubrir ambos polígonos con la misma figura (como en la actividad 1) podría utilizarse? Si su respuesta es sí, ¿Qué figura utilizarían y por qué? Si, poniendo lo que sobraba.

P: siguiente

As. ¿Crees que existan otros polígonos con esta área? Sí, hay más, muchos.

P: Muy bien, sí hay más. Y la última pregunta.

As. ¿Crees que para que dos polígonos tengan la misma área su forma debe ser igual? ¿por qué? No, no debe ser igual, porque puede tener la misma área, pero diferente forma.

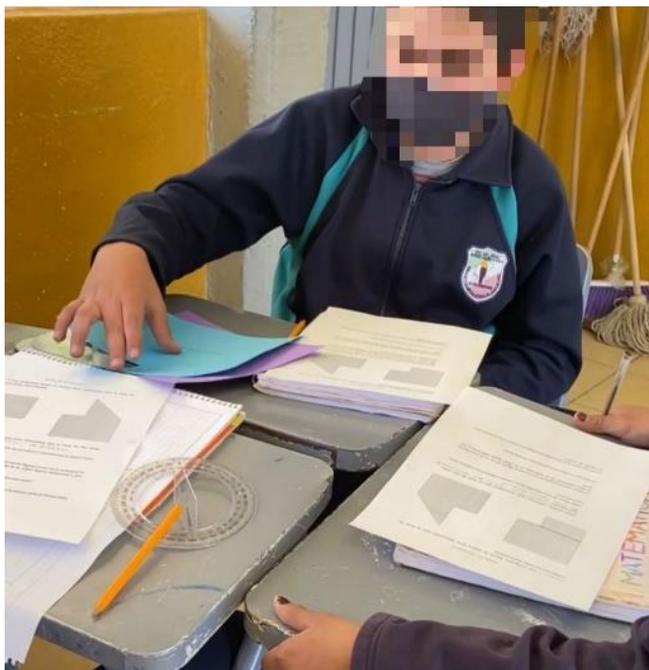
P: En este caso las formas no eran iguales y los polígonos tienen la misma área

Los alumnos del equipo 1 muestran confianza al dar respuesta a sus preguntas, pues la manipulación del material didáctico les permitió realizar comparaciones de manera directa y con ello descartar o afirmar situaciones que estaban relacionadas, como por ejemplo señalar si tenían la misma área o mencionar que existen otros con la misma área pues dos que no tenían la misma forma la tuvieron y con ello pueden existir otros.

Debido a la suspensión de las clases el tiempo estaba por terminar, por lo que el equipo 3 expuso únicamente su procedimiento y lo hizo desde su lugar, véase Figura 89.

Figura 89.

Equipo 3 exponiendo su procedimiento.



Equipo 3.

P: ustedes, ¿qué obtuvieron? ¿la misma área?

As: Sí, y sin cortar.

P: ¿Cuál fue su procedimiento?

As: Dividimos en figuras y le sacamos el área a las dos figuras, el área de las dos figuras las sumamos.

P: Muy bien. Se dan cuenta que los dos llegaron a lo mismo, con la diferencia de que el procedimiento que realizaron sus compañeros (Equipo 1) fue más rápido.

As: Sí.

El equipo 3, señaló que su procedimiento se basó en calcular las áreas de las figuras en las que dividieron sus polígonos y que al sumarlas las áreas de éstos eran iguales, lo que les permitió determinar que efectivamente estos tenían áreas equivalentes, pues obtenían el mismo resultado.

La clase termina antes de tiempo y la situación de institucionalización se realiza en la siguiente clase.

4.5.4 Situación de institucionalización (Actividad III)

La profesora-investigadora comienza la clase con la situación de institucionalización, retomando lo realizado por los alumnos en la actividad III.

P: Los polígonos que les mostré tenían formas diferentes pero la misma área. Una manera de comprobarlo de manera rápida es sobreponer uno encima de otro y si esta la cubre completamente quiere decir que se trata de polígonos con la misma área.

La profesora-investigadora retoma el procedimiento realizado por el equipo uno para señalar que cuando dos polígonos son sobrepuestos y uno cubre al otro totalmente, estos tienen la misma área, tal como lo señalaron los alumnos.

P: el procedimiento que utilizó el equipo dos y tres fue el mismo, medir los lados de las figuras y sacar su área. Si se fijan fue un procedimiento un poco más tardado, pero llegamos al mismo resultado, la forma no determina que se tenga la misma área mientras ustedes puedan demostrarlo como lo hicieron, los polígonos pueden tener diferente forma, pero misma área.

La profesora, como se puede observar, señala a los alumnos que ambos procedimientos son correctos y que lo importante en la actividad es que ellos se dieran cuenta que tener la misma forma no es un aspecto importante para señalar que se tenga la misma área, sino que pueden existir muchos polígonos que tengan la misma área pero que su forma sea diferente.

4.6 Actividad IV

La intención de la actividad IV es que los estudiantes obtengan el área de figuras a partir de las estrategias y conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores.

4.6.1 Situación de acción (Actividad IV)

En la situación de acción analizamos la interacción de los alumnos con la actividad, cómo ellos ponen en práctica sus conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores, la manera en la que leen las instrucciones y el problema, qué del material didáctico trabajado utilizan para dar resolución a esta actividad. A continuación, se describe lo sucedido en esta situación referente a la actividad IV.

Los alumnos se encuentran en su lugar, ellos están establecidos en un salón y es la profesora la que acude a él. La profesora-investigadora llega al salón de clases y les pide se reúnan en equipos para hacer la entrega de la hoja de trabajo, mientras ella se instala en el escritorio los alumnos hacen una exploración a la hoja de trabajo que se les entrega. Pasado un momento, para asegurarse que existe devolución, se le pide a uno de los alumnos haga la lectura de las instrucciones y problemas para analizarlos y así comiencen con la actividad.

A1: Organizados en equipos resuelvan los siguientes problemas, para cada uno escriban su procedimiento.

P: A3 de lectura al primer problema. *//el alumno lee el problema//*

P: Tienen este triángulo, *//dibuja el triángulo en el pizarrón//* y anota los datos en el pizarrón y la pregunta es ¿Cuál es el área del triángulo pequeño? Y un dato importante es que este punto está en el centro del lado *//señala en el pizarrón//* Deben buscar la manera de obtener el área.

La profesora-investigadora resalta únicamente los datos que está proporcionando el problema y lo que se espera que calculen los alumnos, no hace referencia a estrategias ni procedimientos que puedan efectuar, esto con la intención de que sean los alumnos los que tomen esta decisión, aquí se presenta la devolución de una responsabilidad y una causalidad, pues de todos los posibles procedimientos, son los alumnos los que eligen uno y deben aceptar que fue su responsabilidad esta elección.

P: A5 de lectura al problema 2.

//El alumno lee el problema 2//

P: *//dibuja el cuadro en el pizarrón y sus datos//*. Vamos a obtener el área sombreada. Vean qué, del problema, les ayuda a determinar esta área, A2.

Problema 3. *//El alumno lee el problema 3//*

P: *//Dibuja la figura en el pizarrón y escribe los datos//* ¿Qué es lo que vamos a hacer?

As. Obtener el área.

P. Luego que tengamos el área debemos dibujar una figura con áreas equivalentes a las sombreadas. ¿Dudas?

As: No.

La hoja de trabajo entregada a los alumnos contiene tres problemas, cada uno de ellos con una figura que hace referencia a lo que se solicita. En esta actividad se decide no entregar algún material de manera específica, pues se pretende que los alumnos busquen con lo trabajado en las sesiones anteriores la manera de obtener el área solicitada. En esta actividad se presenta una devolución de la situación a-didáctica, pues se pretende que los alumnos puedan identificar las situaciones en las cuales, lo que aprendió, le puede ser útil.

Una vez que se terminan de leer los problemas en plenaria, los alumnos comienzan a analizarlos en sus equipos, revisando las figuras de cada uno y proponiendo algunas estrategias de solución, lo que permite pasar a la situación de formulación.

4.6.2 Situación de Formulación (actividad IV)

A continuación, se describen las formulaciones que se realizaron entre los integrantes de los tres equipos y los procedimientos que utilizaron para resolver cada uno de los problemas planteados en la actividad 4.

La profesora-investigadora pasa por los lugares para identificar los procedimientos realizados por los equipos.

Equipo 1:

P: ¿Qué es lo que están pensando para este problema? //problema 1//

As: lo dividimos y vimos que era la misma medida.

P: en esos 4 triángulos.

As: Sí, y como es 100 cm^2 y son 4 y nos salió 0.25 cm^2 .

P: Listos, si trabajan en cm^2 entonces serían 25 cm^2 y si lo trabajan en metros entonces sí serían 0.25 m^2 .

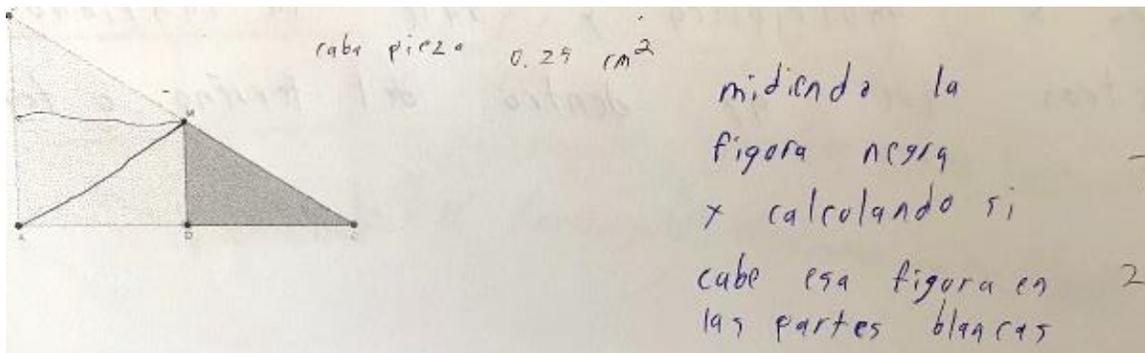
As: Ah, sí.

Para dar respuesta al primer problema los equipos deciden realizar algunas transformaciones a la figura planteada. Los equipos uno y tres, dividen el triángulo en cuatro triángulos del mismo tamaño, considerando que el triángulo sombreado recubre la parte blanca tres veces más, por lo que dividen el área total entre cuatro.

El error que se presenta es que los alumnos tienen una confusión al trabajar las unidades de medida, pues el resultado, aunque es correcto, lo expresan en cm^2 y no en m^2 como se puede ver en la Figura 90.

Figura 90.

Respuesta al problema 1, equipo 3.



Equipo 2:

P: ¿Cómo vamos?

As: bien.

P: ¿Qué van a hacer para el primer problema?

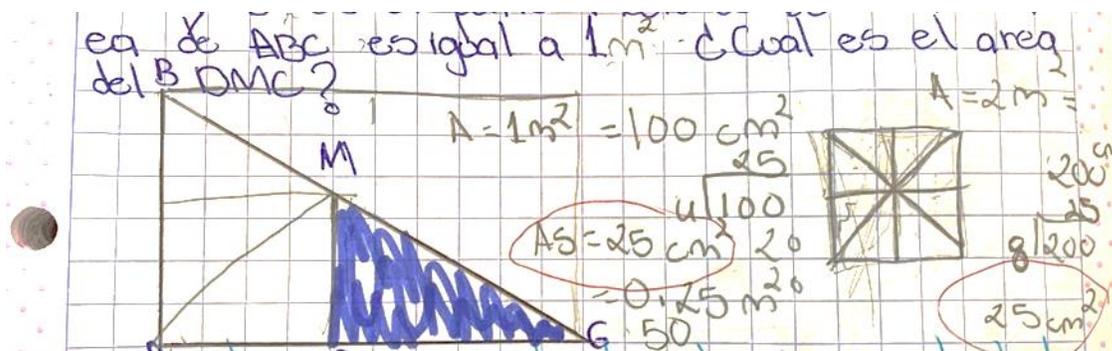
As: completamos para hacer un cuadrado y luego lo dividimos en triángulos.

P: Muy bien. Buena estrategia.

En el equipo 2 los alumnos realizan trazos a la figura para formar un cuadrado y a su vez comienzan a realizar algunas divisiones en triángulos a partir de las diagonales y el triángulo que ya se tiene como se puede ver en la Figura 91, de igual manera utilizan el procedimiento de los otros equipos para comprobar si su respuesta es correcta, lo cual efectivamente los lleva al mismo resultado.

Figura 91.

Respuesta al problema 1, equipo 2



La estrategia de resolución de los estudiantes para este primer problema nos permite identificar que la manipulación del material didáctico les permitió una mayor visualización de lo que se les está planteando, pues las estrategias que proponen no se basan en la obtención del área por medio de una fórmula, sino que buscan a partir de los datos que les proporciona el problema, una estrategia la cual se basa en la modificación de la figura.

Equipo 1:

P: ¿Cómo van a resolver el segundo problema?

As: Pues vamos a completar las figuras, es que, si ve, aquí si movemos esta figura para acá se completa un cuadrado y así con los otros.

Para el segundo problema los tres equipos realizaron el procedimiento de completar los cuadrados, como si se tratara de un rompecabezas, para posteriormente dividir el área que se les proporcionó entre los cuadrados que lograron formar. Los tres equipos lograron obtener 20 m^2 de área para la región sombreada, un ejemplo se puede observar en la Figura 92, donde los estudiantes señalan que completaron los cuadrados con las partes para después dividir el área entre los cinco cuadrados obtenidos.

Equipo 1.

P: ¿Para el tercero, que van a hacer?

As. Pues vimos que éste, si lo ponemos aquí y éste aquí, se completa la mitad del cuadro grande. //señala la figura//

P: ¿cómo sacamos el área de un cuadrado?

As: multiplicamos 16 por 16.

P: ¿y luego.?

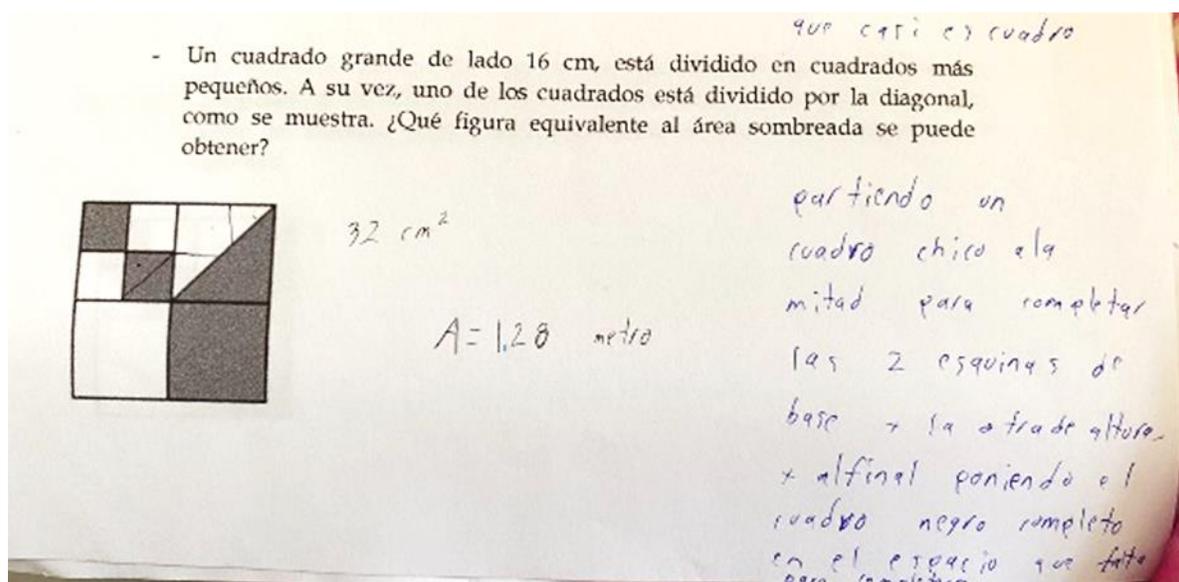
As: Solo vamos a tomar la mitad.

P. Muy bien.

Para el problema 3, los equipos 1 y 3 completaron la mitad del cuadrado imaginando mover las piezas, dividen uno de los cuadrados sombreados pequeños por la mitad, para acomodar los triángulos resultantes, así como el otro cuadrado pequeño como se puede ver en la Figura 94.

Figura 94.

Respuesta al problema 3, equipo 3.

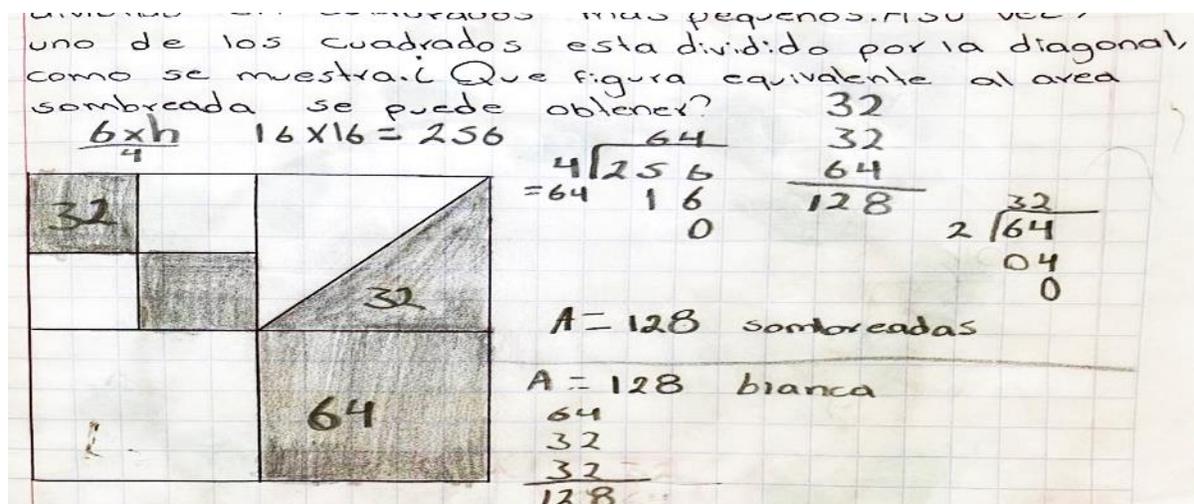


El equipo 2, calcula el área de la región sombreada por separado tomando como base la medida del lado del cuadrado mayor y realizando el acomodo de las figuras resultantes, para finalmente sumar las áreas y llegar al mismo resultado como se puede observar en la Figura 95. Aunque los alumnos llegan a la obtención del área sombreada de manera correcta, éstos no señalan la figura equivalente que se puede formar, y la

profesora-investigadora no lo señala debido al tiempo, retomando únicamente si éstos habían podido calcular este valor.

Figura 95.

Respuesta al problema 3, equipo 2.



Los procedimientos que utilizan los alumnos para dar respuesta a los problemas nos permiten identificar que su razonamiento de resolución ha avanzado, así como su comprensión del concepto de área.

Las estrategias planteadas por los equipos en esta actividad 4 reflejan que, para dar solución a los problemas, utilizan un razonamiento espacial, donde ponen en práctica habilidades de visualización, imaginación, movimientos, rotaciones, etc., mismas que no reflejaron en el análisis preliminar cognitivo.

4.6.3 Situación de Validación (actividad IV)

En esta situación se analizan las explicaciones que dan dos de los equipos con respecto a los procedimientos que utilizaron para dar respuesta a los problemas planteados de la actividad 4. Dado que la mayoría de los equipos construyó procedimientos acertados, cada uno de los equipos pasa al pizarrón a explicar uno de los problemas. Además, por el tiempo de que se disponía, no se podría pasar a los tres equipos para que explicaran los tres problemas.

La profesora-investigadora pide al equipo 1 pase al pizarrón para que explique lo que realizó en cuanto al problema 1.

P. bien, va a pasar el equipo 1. Vamos a ver como ellos resolvieron el primer problema.

//leen el problema en voz alta//

P. ¿Qué fue lo que hicieron?

As: Medimos la figura *//sombreada//* y luego vimos el espacio que quedaba y dividimos las medidas y vimos que salían 4 partes iguales y luego dividimos los 100 cm entre 4 y era de 25.

P. muy bien 25 m², ¿están de acuerdo con sus compañeros?

As: Sí.

El equipo 1, realiza la división de la figura a partir de los datos que proporciona el problema, pues éste, aunque no lo menciona, se encuentra en el punto medio del lado, lo considera como un dato importante al hacer sus divisiones, lo que les permite llegar a obtener el resultado. Cabe señalar que, en este problema, los alumnos no consideraron que las unidades eran metros cuadrados, no centímetros.

P: Equipo 2, pase al pizarrón.

//los alumnos pasan al frente y dan lectura al problema 2//

As: nosotros completamos la figura con las otras y vimos que eran 5 cuadrados y sacamos el área de cuadro grande y nos salió 20 m².

P: ¿Alguien tiene un procedimiento diferente?

As: No.

Los alumnos del equipo 2 al pasar al pizarrón muestran seguridad y confianza en su procedimiento, ellos señalan que este lo realizaron mediante el acomodo de las piezas, aunque no lo hicieron de manera tangible, lo que les permitió llegar a estas conclusiones, fue la manipulación que realizaron en las actividades anteriores.

Finalmente, la profesora-investigadora pasa al equipo 3 al pizarrón.

P: Muy bien y para el tercer problema, equipo 3 al pizarrón.

As: Éste lo dividimos en dos *//cuadrado pequeño//* y la mitad de este cabe aquí y la otra mitad cabe aquí y este cuadro aquí. Entonces se hacen los dos cuadros. Y luego multiplicamos 16 por 16 y lo que nos salió lo dividimos entres dos.

P: Porque es la mitad del cuadro.

As: Ajá.

P: Y, ¿cuánto les salió?

As: 128 cm².

P: Muy bien. ¿Alguien tiene algún procedimiento diferente?

As: No.

Los alumnos del equipo 3 señalan en su procedimiento el reacomodo de las piezas de manera imaginativa, realizaron algunas modificaciones y las acomodaron como una especie de rompecabezas dándoles así la mitad del cuadrado grande, permitiéndoles obtener el área y luego dividirla entre dos para obtener el resultado. Cabe señalar que, por el tiempo del que se disponía, ya no se les cuestionó por la figura nueva que podría resultar con el área que acababan de obtener.

4.6.4 Situación de institucionalización (Actividad IV).

Una vez que los alumnos terminan de presentar a sus compañeros los procedimientos realizados y éstos los validaron, la profesora-investigadora cierra la clase mencionando que para la resolución de los problemas podían utilizar varios procedimientos y que, si éstos los llevaban a la solución correcta del problema, estaba bien.

P. muy bien, si se dan cuenta para resolver estos problemas se utilizaron varios procedimientos y todos son correctos.

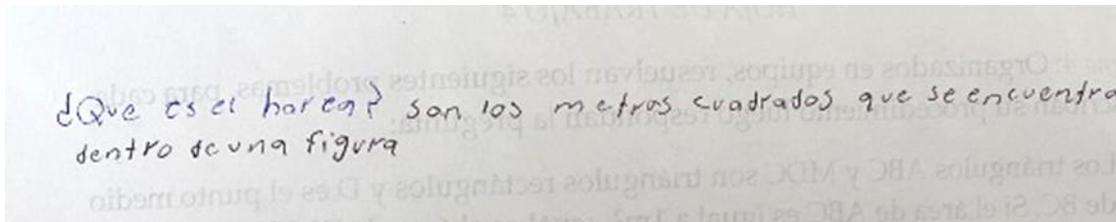
Para finalizar la clase la profesora-investigadora pide a los alumnos den respuesta a la pregunta ¿Qué es el área?, con el fin de conocer cómo los estudiantes con las actividades trabajadas reestructuran el concepto que tenían de área.

P: para finalizar, van a responder la siguiente pregunta, escriban en la hoja. ¿Qué es el área?

Debido al tiempo no se pudo socializar la pregunta, pero las respuestas de los alumnos se inclinan a mencionar que el área son los cm^2 o m^2 contenidos en una figura, como se puede observar en la Figura 96. Esta respuesta nos permite identificar que los alumnos, a partir de las actividades trabajadas, mejoraron su conocimiento con respecto al concepto de área, y, concibieron al área como la relación con la superficie que se toma como la unidad y que recubre a las figuras completamente.

Figura 96.

Respuesta de un alumno a la pregunta ¿Qué es el área?



4.7 Fase de Validación

En esta fase ponemos en confrontación el análisis a priori y el análisis a posteriori, con el fin de validar las hipótesis que se formularon en el análisis a priori mediante las respuestas de los alumnos en cada una de las situaciones didácticas (acción, validación, formulación e institucionalización) y valorar el alcance del objetivo planteado en esta investigación.

4.7.1 Validación – Situación de acción (actividad I)

Se considera que como los alumnos ya tienen una relación con la profesora-investigadora esta comenzaría la clase saludándolos y mencionándoles que se les hará la entrega de una hoja de trabajo y un material, donde los alumnos mostrarían interés al recibirlo y al tratar de dar solución a la actividad, lo cual en el análisis a posteriori se logró evidenciar, pues éstos exploran el material con curiosidad de manera ludia en un principio presentándose la primera etapa de la devolución.

Asimismo, se mencionaría a los alumnos que las plantillas con las que trabajarían en la clase contenían figuras conocidas para ellos y se les explicaría la manera en la que se calculó su área y cual era ésta, con el fin de que al trabajar con ellas pudieran calcular el área de los polígonos, lo cual si sucedió en esta situación, pues la profesora-investigadora al entregar el material menciona a los alumnos que las plantillas contenían cuadrados, círculos y un triángulo y les recordó la manera en la que se obtiene su área en el pizarrón.

Se esperaba que los alumnos mediante la manipulación del material didáctico, desde recortarlo, acomodarlo y pegarlo les ayudara a mejorar su conocimiento respecto al concepto de área, pues les permitiría identificarla como la relación con otra superficie que se toma como la unidad y que esta cubre a las figuras completamente, la cual sucedió en la experimentación.

En general se logró la devolución en la actividad I, ya que los alumnos mostraron interés por la actividad y les facilitó la resolución de ésta mediante la manipulación del material.

4.7.2 Validación – Situación de formulación (actividad I)

Para la pregunta uno se esperaba que los alumnos utilizaran como procedimiento para calcular el área de los polígonos, sumar el área de las figuras en las plantillas utilizadas en ellos, situación que se presentó en las formulaciones, pues los estudiantes, en su estrategia para calcular el área, mencionaron que lo harían mediante la suma.

De igual manera, se esperaba que debido al conocimiento previo que los estudiantes tenían con respecto al área, éstos quisieran utilizar alguna fórmula para calcular la de alguno de los polígonos, lo cual efectivamente sucedió con el equipo 2, pues los alumnos al ver que se trataba de un rectángulo ellos podrían obtener su área multiplicando, a lo que la profesora-investigadora les comentó que no tenían las medidas de éste y que ¿si esa estrategia la podrían utilizar con algún otro polígono?, lo cual ayudó a los alumnos a buscar alguna estrategia que pudieran implementar.

Para la pregunta 2 cuya intención era identificar las dificultades que se les presentarían a los alumnos y como ellos darían solución a éstas, se observó en el análisis

a posteriori como los alumnos al no poder cubrir con las plantillas los polígonos de manera completa, realizan algunos recortes y es el equipo 4, quien al recortar los cuadrados no cuidan la modificación que este recorte implica con respecto al área.

La pregunta 3 tuvo la intención de que los alumnos se dieran cuenta que pueden calcular el área de los polígonos irregulares y que para hacerlo pueden utilizar diferentes estrategias y no únicamente la aplicación de fórmulas directamente, pues señalan que de todos los polígonos que se les presentan, únicamente podrían calcular el área del rectángulo, pensamiento que modifican posteriormente, el cual se ve reflejado en el análisis a posteriori.

Con las preguntas 4 y 5 se tenía la intención de identificar con cuales de los polígonos los estudiantes tuvieron dificultad de cubrir y con cuales no, con la finalidad de considerar la reestructuración de la actividad para mejorarla, se esperaba que los alumnos señalaran como fácil el rectángulo, lo cual efectivamente sucedió y en cuanto a la más compleja los alumnos señalaron a la estrella.

4.7.3 Validación – Situación de validación (actividad I)

En esta situación se esperaba que dos de los cuatro equipos pasaran al pizarrón para que el resto de sus compañeros validara sus procedimientos, lo que sucedió en la experimentación, pues la profesora-investigadora solicitó a dos de los equipos para pasar al pizarrón.

En esta situación se esperaban dos aspectos, uno de ellos era que los alumnos sumaran correctamente el área de las plantillas, lo cual sucedió con uno de los equipos que pasó al pizarrón, y otro donde los alumnos tuvieron alguna dificultad al hacerlo, ya sea por un mal recorte, dejando huecos, empalmando figuras o sumando de manera incorrecta los decimales, lo cual también sucedió con el otro equipo, pues al sumar los decimales los alumnos lo hacen de manera incorrecta, situación atendida por la profesora-investigadora y el resto del grupo.

4.7.4 Validación – Situación de institucionalización (actividad I)

En esta situación se retoma lo que la profesora-investigadora institucionalizó de la actividad, utilizando lo realizado por los alumnos, en este caso el concepto de área a partir del recubrimiento de los polígonos y la relación del concepto con otra superficie que se toma como la unidad, además que identifiquen que la obtención del área no se centra únicamente en las fórmulas, sino que existen otras maneras de obtenerla, lo cual se presenta en el análisis a posteriori, pues aquí la profesora-investigadora cuestiona a los alumnos para llegar a este fin.

La profesora-investigadora mediante las preguntas que plantea a los alumnos va orientándolos a que expresen de manera general lo que ellos pueden hacer con respecto

al área, tratando siempre de que retomen lo hecho en la actividad y siendo partícipes de la construcción y no únicamente receptores de información.

4.7.5 Validación – Situación de acción (actividad II)

Con esta actividad se esperaba que los estudiantes aceptaran la responsabilidad de crear el mensaje para que sus compañeros pudieran construir un polígono con áreas congruentes, aspecto que sucedió en la experimentación, pues una vez que se realizaron los equipos y se entregó la actividad y el material a los alumnos, se sintieron motivados al tratar de escribir su mensaje, comenzaron a tomar datos del polígono y a establecer una estrategia para que su equipo pudiera llegar a la construcción.

4.7.6 Validación – Situación de formulación (actividad II)

Para esta actividad se esperaba que los alumnos utilizaran alguno de los siguientes procedimientos:

- Dividan el polígono en triángulos y proporcionar sus datos y orientación.
- Obtener el área del polígono a partir de dividirlo en otros polígonos.
- Retomar la forma del polígono y su perímetro.

De los procedimientos anteriores los equipos utilizaron únicamente los dos primeros, pues en el análisis a posteriori se observa como los equipos dividieron al polígono en otras figuras y trataron de proporcionar los datos de éstas, así como la forma del polígono.

De igual manera se esperaba que los alumnos no proporcionaran suficientes datos, por lo que se esperaba que la profesora-investigadora pasara por los equipos para cuestionarlos con respecto a la información que estaban proporcionando, lo cual sí sucedió en la experimentación.

Por otro lado, se esperaba que los alumnos utilizaran como dato relevante al perímetro, aspecto que no sucedió, pues como se puede observar en el análisis a posteriori, los alumnos no retomaron este concepto para crear su mensaje, sin embargo, en la profesora-investigadora lo retoma en su discurso.

4.7.7 Validación – Situación de validación (actividad II)

De manera general se esperaba que los equipos compartieran su estrategia con respecto a la creación del mensaje y si sus compañeros lograron o no la construcción del polígono, lo cual, en efecto, sí sucedió, ya que los alumnos pasaron al pizarrón a compartir lo que realizaron y aunque ninguno de los equipos llegó a la construcción de éste, retomaron aspectos importantes en su elaboración.

4.7.8 Validación – Situación de institucionalización (actividad II)

En esta etapa de la situación, la profesora-investigadora retomó lo que realizaron los alumnos y aunque éstos no lograron la construcción del polígono, destacó

datos importantes como la importancia que éstos le dieron a la forma y no consideraron que no era un dato importante, también que datos como el perímetro no eran necesarios para llegar a la construcción de polígonos congruentes.

4.7.9 Validación – Situación de acción (actividad III)

En esta situación la profesora-investigadora pasaría por los lugares para identificar los procedimientos realizados por los equipos, una vez entregado el material a los alumnos, se esperaba que éstos se interesaran por él, mediante la manipulación que podrían hacer.

Los alumnos mostraron interés y control de la actividad, pues cuando se les entrega, enseguida comienzan a proponer estrategias, por ejemplo, se puede observar en la experimentación como uno de los equipos comienza a trazar algunas figuras conocidas, mientras que otro los comienza a explorar de manera conjunta, con ello, aceptando la responsabilidad de la devolución de la actividad.

4.7.10 Validación – Situación de formulación (actividad III)

Para esta etapa de la situación se esperaba que los equipos utilizaran dos procedimientos, el primero hace referencia a la obtención del área del polígono utilizando la transformación de éste en figuras conocidas para los estudiantes, aspecto que si sucedió, pues dos de los tres equipos optaron por esta estrategia, transformando el polígono en dos figuras, tomando medidas de manera directa a éste y calculado su área; mientras que el otro equipo utilizó el otro procedimiento previsto, pues sobrepuso un polígono con el otro y reacomodo lo sobrante para que quedaran de la misma forma, situación que se puede observar en la experimentación.

4.7.11 Validación – Situación de validación (actividad III)

En esta situación se esperaba que los equipos pasaran al pizarrón a compartir con sus compañeros las estrategias utilizadas en la solución de la actividad III, para que éstos las validaran y así pudieran determinar cuál de ellas era más factible de utilizar, lo cual se puede confirmar que, sí sucedió, ya que se logró evidenciar en el análisis a posteriori.

4.7.12 Validación – Situación de institucionalización (actividad III)

En la situación de institucionalización se contempló mencionar la conservación del área en los polígonos, aunque se tengan formas diferentes, aspecto que, sí sucedió, pues se puede observar como la profesora-investigadora retoma la actividad mencionando que los polígonos que habían trabajado tenían formas diferentes y como mediante sus procedimientos habían llegado al mismo resultado.

4.7.13 Validación – Situación de acción (actividad IV)

En esta situación se esperaba que los equipos dieran solución a los tres problemas retomando aspectos trabajados como el recubrimiento de las figuras con otras, la división en figuras conocidas o sobreponer una figura en otra, situación que se presentó en la experimentación, pues los estudiantes hicieron uso de estas estrategias en la solución de los problemas.

Para esta actividad únicamente se entrega una hoja de trabajo, pues se espera que, al no entregar algún material tangible de manera específica, los alumnos buscarían como obtener el área solicitada sin hacer uso del material, lo cual sucedió en el análisis a posteriori.

4.7.14 Validación – Situación de formulación (actividad IV)

Para esta situación se esperaba que los estudiantes propusieran algunos procedimientos para dar solución a cada uno de los problemas planteados mediante los conocimientos y estrategias que los mismos alumnos ya habían planteado en actividades anteriores.

Para el primer problema, se esperaba que los alumnos hicieran uso de dos procedimientos. El primero mediante el recubrimiento de la figura haciendo uso de la parte sombreada y el segundo realizando trazos auxiliares con los que realizaran un cuadrado para posteriormente dividirlo, procedimientos que sí fueron utilizados por los estudiantes en la experimentación. Para el segundo problema se esperaba que los estudiantes hicieran movimientos en la figura (de manera mental, o generando nuevas figuras, a partir de rotaciones o traslaciones de las partes de la figura original), con los cuales completaran cuadrados para después dividir el área total en los cuadrados formados, lo que fue utilizado por todos los equipos. Para el tercer y último problema, se esperaba que los estudiantes completaran la mitad del cuadrado y así obtener su área o lo hicieran por separado, lo cual si sucedió en el análisis a posteriori, y aunque en este ejercicio encontraron el área buscada, no respondieron a la pregunta de qué otra figura se podría generar con dicha área. Por otro lado, algunos equipos omitieron el uso de la unidad que se les daba, por ejemplo, en lugar de usar metros cuadrados, usaron centímetros cuadrados.

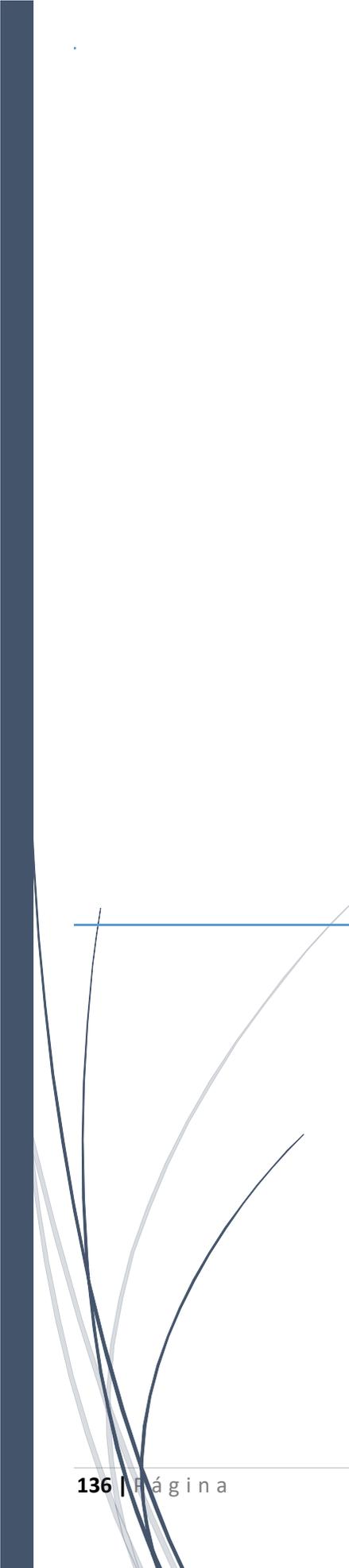
4.7.15 Validación – Situación de validación (actividad IV)

En general en esta etapa de la situación se tenía contemplado pasar a cada equipo para que presentara las estrategias que utilizaron para dar solución a uno de los problemas mientras que el resto del grupo las validara, lo cual se presentó en el análisis a posteriori, pues los equipos pasan al pizarrón a compartir sus estrategias. En esta parte, solo se observó que faltó un poco de tiempo, para corregir las cuestiones del uso de las unidades propuestas, y para que completaran la respuesta de la actividad 4.

4.7.16 Validación - Situación de institucionalización (actividad IV)

En esta etapa se contempló retomar el concepto de área una vez socializados los problemas, lo cual si ocurrió y se puede observar en el análisis a posteriori. Para finalizar la sesión la profesora pide a los alumnos a responder la pregunta ¿Qué es el área? A lo que los alumnos responden que se trata de los metros o centímetros cuadrados que contiene una figura, respuesta que se creía podrían dar debido a las actividades trabajadas durante toda la situación didáctica.

Como se ha mencionado anteriormente, se considera que estos estudiantes concibieron al área como la relación con la superficie que se toma como la unidad y que recubre a las figuras completamente.



Reflexiones Finales

En esta sección se presentan el alcance los objetivos planteados en el planteamiento del problema y la respuesta a la pregunta de desarrollo profesional. También se añaden las limitaciones que se tuvieron al realizar el proyecto, así como ideas para futuras investigaciones. Por último, se presenta una reflexión personal, al haber sido estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria y haber desarrollado este proyecto.

Con respecto a los objetivos particulares:

- Realizar un análisis preliminar que permita rescatar elementos para el diseño de la situación didáctica.
- Diseñar y adaptar una situación didáctica para mejorar los conocimientos de los alumnos con respecto al concepto área a partir de los errores identificados, así como seleccionar y diseñar material didáctico para utilizarlo en la situación didáctica.

La ingeniería didáctica de Artigue, la cual utilizamos como metodología para nuestro trabajo de desarrollo profesional, permitió analizar la problemática entorno al estudio del área, para posteriormente, plantear una propuesta. Partimos de los análisis preliminares epistemológico, didáctico y cognitivo, los cuales nos dieron pauta para incorporar las actividades que conformarían la situación didáctica.

De manera general, del análisis epistemológico, se observó que antiguamente la forma de calcular el área de las figuras era mediante la transformación de éstas en otras, para poder así determinarla; además, se destaca la importancia de la manipulación en el proceso. Del análisis didáctico, se distinguió, como ya lo habían reportado Araya y Alfaro (2010), que hay énfasis en la memorización de las fórmulas para calcular el perímetro y el área; es decir, no se toman en cuenta los sentidos de los alumnos para realizar el primer acercamiento al concepto, y en gran medida se les guía, especificando lo que deben hacer.

Con respecto al análisis cognitivo, se confirmó que tal como se señala en Hart (1984, citado en Borhórquez, 2004) que los alumnos confunden el concepto de área con el de perímetro, también, que la mayoría de los estudiantes asocian el área con la forma de las figuras y tratan de señalar como iguales las que tienen formas similares, tal como ya se había reportado en Bohórquez (2004), los jóvenes no identifican la conservación del área en figuras de diferentes formas.

Es así que estos análisis nos ayudaron a definir que, en nuestra propuesta, la manipulación del material didáctico para encontrar el área, sería una parte fundamental, de manera que, a través de ésta, los estudiantes aprovecharan sus sentidos para consolidar sus conocimientos, y más que darles un proceso, se les permitiría que ellos elaboraran sus propios procedimientos. Además de que, se promovería la distinción entre área y perímetro y la identificación de figuras de misma

área con diferente forma (conservación del área), involucrando figuras regulares e irregulares.

- Implementar la situación didáctica con la utilización del material didáctico con alumnos de primer grado de secundaria.
- Recoger y analizar los datos obtenidos en la situación propuesta.

A partir de la ingeniería didáctica y con ayuda de la teoría de situaciones didácticas, se crearon las condiciones para que los estudiantes de primer grado, mediante la génesis artificial, a través de las diferentes situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, mejoraran sus aprendizajes con respecto al concepto de área, pues lograron identificar al área como la relación con otra superficie que se toma como la unidad. Por otro lado, se logró que los alumnos llegaran a la obtención de ésta utilizando diferentes estrategias, además de la aplicación directa de fórmulas.

Como se ha señalado, a partir de la sugerencia de Chamorro (2003), de presentar las figuras no solamente dibujadas, si no recortadas, ayudó a superar el obstáculo didáctico asociado a no reconocer la superficie como el interior delimitado por un borde.

Sin embargo, aunque la mayoría de los estudiantes lograron concebir al área relacionando las unidades trabajadas y la cantidad que contiene una figura de ellas, cabe señalar que pocos estudiantes presentaron dificultades al momento de obtener el área. Se considera que esto sucedió porque ellos han trabajado de manera cotidiana figuras regulares y al presentarles algunas figuras irregulares tuvieron la necesidad de realizar modificaciones, lo que provocó que trabajaran con números decimales, los cuales no pudieron operar de manera correcta, aunque la lógica de su resolución fue adecuada.

En cuanto a la conservación del área, notamos que los alumnos lograron identificar que existen figuras que, aunque tengan formas diferentes su área puede ser igual, siempre y cuando cumplan con condiciones como: cubrir una a la otra de manera completa y/o puedan ser cubiertas con la misma figura, la misma cantidad de veces. Además de percibir esto de manera visual, gracias a las diferentes estrategias planteadas por los discentes, éstos pudieron hacer la comprobación de ello, pues algunos de los equipos optaron por realizar operaciones y así obtuvieron los mismos resultados.

El papel que jugó el material didáctico para la obtención de estos resultados fue importante, pues gracias a la manipulación que se les permitió realizar: desde recortar, acomodar, comparar, visualizar, imaginar, medir, tocar, los estudiantes fueron capaces de reestructurar el concepto de área que presentaron en el análisis preliminar cognitivo.

Por lo que confirmamos, al igual que Hernández, R. (2016), Hernández, E. (2016) y Pérez (2017) que la utilización de diferentes materiales ayuda a los alumnos en mejorar su conocimiento y les permite les sea significativo para su vida estudiantil. Además, provocó que los alumnos se mostraran motivados al realizar la actividad, pues en cada una de ellas, éstos se vieron interesados y participativos.

Dentro de los errores que se presentaron en la aplicación de la situación didáctica, se encuentran los siguientes: los alumnos tienen dificultades para operar con números decimales, por lo que cometen errores al determinar el área de algunas de las figuras que los involucraban; por tal motivo, consideramos importante que, aunque el tema central sea el área, los alumnos trabajen algunas actividades complementarias relacionadas con los conceptos que se ven de manera implícita, para que al momento de abordar el tema, este tipo de dificultades se presenten en menor medida.

También se identifica que, aunque los estudiantes lograron determinar que existen polígonos con diferente forma y misma área, aún le dan importancia a la forma al momento de construir polígonos con áreas congruentes, como se había reportado en Bohórquez (2004); y que al momento de definir el concepto de área, algunos de ellos lo siguen relacionando con alguna fórmula de manera específica, hecho que también ha sido identificado por Araya y Alfaro (2010).

Por otro lado, consideramos que es necesario modificar la actividad número dos, pues, aunque los alumnos lograron rescatar algunas características importantes para diferenciar el concepto de área y perímetro, no lo consideraron importante para crear su mensaje, por lo que ésta puede ser omitida o modificada para una futura aplicación.

Con respecto al objetivo general y a la pregunta de desarrollo profesional:

Diseñar y adaptar una situación didáctica que incorpore material didáctico que ayude a los estudiantes a mejorar los aprendizajes relacionados con el concepto de área en el primer grado de secundaria.

Al contrastarlo con los resultados, se puede afirmar que, la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica fueron el sustento y la base para llevar a cabo este proyecto de desarrollo profesional. En principio nos ayudaron a identificar la importancia de incluir en la situación didáctica el material didáctico tangible, de manera que ayudara a distinguir el concepto de área con el de perímetro, esto a partir de proponer con las situaciones planteadas, la concepción del área como la relación con otra superficie que se toma como la unidad. También, que se promoviera la concepción de la conservación del área y el uso de diferentes estrategias para la resolución de problemas que involucraran el área, tales como la visualización, imaginación, movimientos y rotaciones, además del uso de fórmulas para calcular el área.

En conclusión, esto ayudó para que los estudiantes en el primer grado de secundaria mejoraran su aprendizaje con respecto al concepto de área, logrando distinguirla del perímetro, y acunando una concepción de ésta, como la relación con otra superficie que se toma como la unidad. Además, los jóvenes mejoraron su concepto acerca de la conservación del área, pues lograron identificar figuras de igual área, pero diferente forma. Por último, a través de esta propuesta se logró que los estudiantes obtuvieran áreas de figuras no regulares, y resolvieran problemas de cálculo de áreas, construyendo así, sus propias estrategias de razonamiento espacial, desarrollando habilidades de visualización y comparación, dejando de lado el uso de fórmulas, de manera exclusiva.

En consecuencia, la respuesta a la pregunta de desarrollo profesional, es la siguiente:

¿Cómo la aplicación de una situación didáctica que incorpora material didáctico como estrategia didáctica, puede contribuir a mejorar los aprendizajes relacionados con el concepto de área en los estudiantes de 1º de secundaria?

A partir de los resultados obtenidos con la aplicación de la situación didáctica mediante la manipulación de material didáctico, se considera que la mayoría de los estudiantes lograron concebir el área como la medida de la superficie, esto en el sentido de que, al recortar, tocar, acomodar y pegar figuras, identificaron al área como la relación con la superficie que se toma como la unidad y que recubre a las figuras completamente, esto mismo permitió que en los problemas subsecuentes, desarrollaran y utilizaran un razonamiento espacial, donde pusieron en práctica habilidades de visualización, imaginación, movimientos, rotaciones, etc., mismas que no se observaron en el análisis preliminar cognitivo.

En cuanto a los alcances de este proyecto, se considera que cumplió con sus objetivos, se desarrolló una situación didáctica que incorporara material didáctico que ayudara a los estudiantes a mejorar los aprendizajes relacionados con el concepto de área en el primer grado de secundaria. Se considera que ésta puede ser retomada, toda o en partes, por profesores que deseen fortalecer los conocimientos de sus estudiantes, con respecto al área, además de que el material didáctico utilizado puede elaborarse sin mayor dificultad.

Aunque también se presentaron dificultades, una de las principales fue que la enseñanza tradicional, que permea en el estudio del área, propició que algunos (pocos) de los estudiantes, continuaran relacionando el concepto con alguna fórmula de manera específica, o bien, no identificaran la importancia y distinción de las unidades de superficie, se considera necesario seguir fortaleciendo este aspecto.

Además de esto, el tiempo destinado para desarrollar la situación didáctica se vio limitado, por las características propias del sistema escolar. De haber contado con un poco más de tiempo, seguramente se podría haber institucionalizado el tema, de manera más amplia.

Ideas para futuras investigaciones

La situación didáctica producto de este proyecto de desarrollo profesional podría adaptarse para estudiantes del nivel primaria, de manera que su acercamiento al concepto del área se vea favorecido al incluir material didáctico tangible. Se puede jugar con las variables didácticas, para que el área sean números naturales (para el nivel primaria), o bien, números decimales (para nivel secundaria), que como se observó, añaden dificultad a la hora de calcular el área. Incluso se podrían proponer otras figuras, de preferencia irregulares.

De igual manera, aunque los problemas propuestos pueden resolverse utilizando razonamiento espacial, en un segundo momento, podría pedirse que los estudiantes argumenten sus respuestas de manera más formal, dependiendo de los saberes que el profesor identifique en ellos.

Reflexión

La experiencia en el estudio de esta Maestría en Matemática Educativa Profesionalizante, la defino como evolución, pues marcó un antes y un después en muchos de los ámbitos de mi persona, tanto profesional como personal.

En lo profesional, me ayudó para crecer y refrescar la manera en la que me encontraba dando clases, pues antes de entrar sentía la necesidad de mejorar, por esta razón tomé la decisión de entrar a la maestría y lo hice con muchas ganas por aprender; sin embargo, al transcurso del tiempo me di cuenta que no era nada fácil, como creía y que quizá no tenía las habilidades ni la capacidad para cursarla, pero me di cuenta que todo cambio debe ser doloroso para que realmente sea verdadero y significativo.

Me descubrí en mi propio crecimiento profesional con la ayuda de todos los expertos y su experiencia, mejorando mis conocimientos matemáticos, otras maneras en las que puedo enseñar a mis alumnos, qué y cómo enseñar matemáticas y sobre todo con algunos de mis maestros, el lado humanista que algunas veces se deja de lado y que me doy cuenta que es realmente importante pues cada persona está viviendo su propio proceso y este siempre estará impactando en su vida escolar.

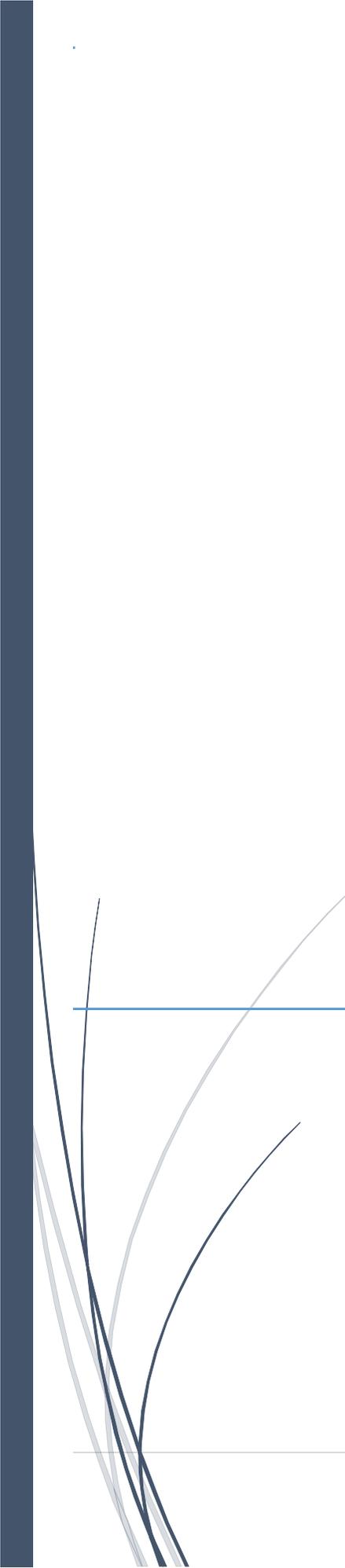
En este momento siento que soy una mejor docente de matemáticas, pues la MME me ayudó a desarrollar habilidades y conocimiento con mayor riqueza, y deja en mí la “espinita” de siempre querer mejorar y crecer como docente y sobre todo, que hacerlo no será fácil, pero tampoco imposible.

Al día de hoy, tengo la confianza para poder expresar mis ideas sin el temor de que sea juzgada, criticada o rechazada por otros docentes de matemáticas, puedo hacer críticas constructivas cuando realmente estoy en desacuerdo con alguna idea, incluso siendo la única docente rodeada de directivos puedo defender con argumentos mis ideas, confianza que logré desarrollar y que me costó verdaderamente mucho, pues tendía a bajar la cabeza y no decir nada cuando alguien me señalaba.

Por otro lado, me permitió no temer a los nuevos retos que se me presenten como maestra de matemáticas, buscando la manera en la que los pueda enfrentar, pensando en ellos no como un obstáculo, sino como una oportunidad para crecer y ser mejor maestra, todo ello, con la finalidad de que mis estudiantes tengan la posibilidad de tener una clase en la que realmente puedan aprender matemáticas y que sea para ellos un aprendizaje significativo, lleno de descubrimiento, retos y diversión.

La realización de este proyecto me mostró que la enseñanza de las matemáticas no se basa en una actividad, que el aprendizaje de un concepto es un proceso realmente largo para los estudiantes y que la enseñanza de los profesores siempre repercutirá en los alumnos, ya sea positiva o negativamente. Para aportar a ese conocimiento, los estudiantes deben participar activamente en el proceso y para ello existen muchas maneras de hacerlo, ya sea con material concreto, visual, auditivo, etc., pues es la manera en la que descubrirán y experimentarán para que se quede registrado en ellos y así puedan lograr transformarlo cuando lo requieran.

En lo personal, me mostró que tengo la capacidad de hacer lo que me proponga, pues además de estudiar la Maestría era trabajadora, esposa y madre de una bebé recién nacida, lo cual multiplicaba las posibilidades de quizá no poder continuar, pues son aspectos que demandan mucho tiempo y concentración. Sin embargo, a pesar de ello, me di el tiempo para poder llevar a cabo mis estudios y no abandonar lo que por mucho tiempo buscaba, mejorar como docente de matemáticas. Desarrolló en mí, confianza y seguridad como persona, además de lograr ser inspiración de las personas que me rodean, que creo que también es para mí una gran satisfacción.

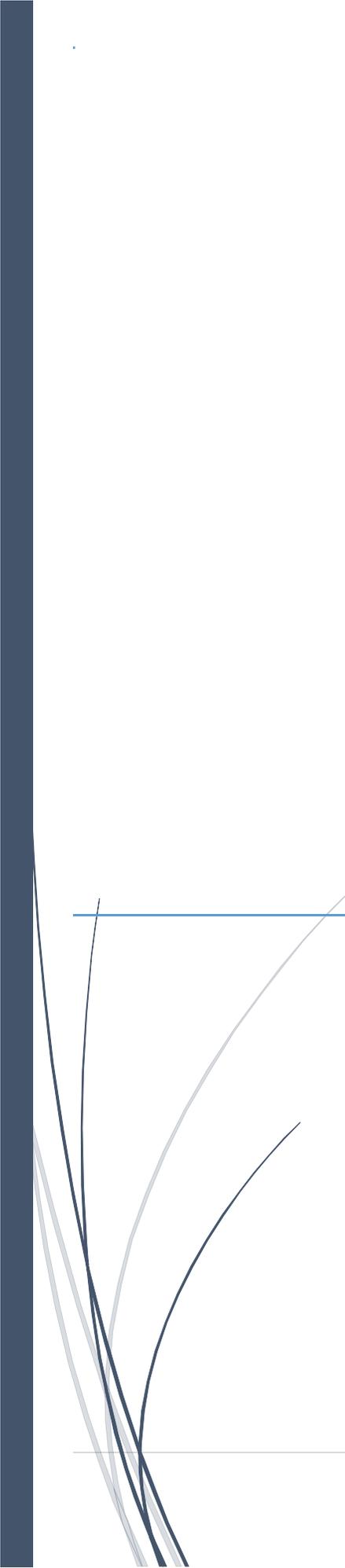


Referencias

- Alfaro, C., & Chavarría, J. (2012). Didactic transposition: an example in the educative system in costa rica. *Uniciencia*, 26(1-2), 153-168.
- Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico manipulativos: para niños y niñas de 6 a 12 años*. Narcea.
- Araya, R. G., y Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la Geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica EDUCARE*, 14(2), 125-142.
- Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Revista de psicodidáctica*, (5), 107-114.
- Báez, R., e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática*, 12(Número extraordinario), 67-87.
- Barrantes, M., y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 27(1), 55-71.
- Blanco, L. J. (2001). Errors in the teaching/learning of the basic concepts of geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 24, 1-11.
- Bohórquez, L. (2004). Aprendizaje del concepto de área. *Incidencia del trabajo en colaboración, la resolución de problemas y el Cabri-Geometry en la comprensión de aspectos asociados al concepto de área* [Tesis de maestría, Universidad de los Andes]. <https://repositorio.uniandes.edu.co/entities/publication/c751a1bb-eb4f-4bc2-a218-9d81885ec763>
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-155. (Versión castellana).
- Chamorro, M.C. (2003). Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 245-272). Pearson.
- Cifuentes, J. E. (2016). El método científico y la nueva filosofía de la ciencia: aportes y perspectivas. *Rastros Rostros*, 18(33), 61-70. Doi: <http://dx.doi.org/10.16925/ra.v18i33.1681>
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 61-96). Iberoamérica.
- Gálvez, G. (2002): La didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones. 9ª Reimpresión* (pp. 39 – 63). Paidós Educador.
- González, J.L. (2010). Recursos, Material didáctico y juegos y pasatiempos: consideraciones generales. En J. L. González (Ed.), *Matemáticas Infantil, Primaria y ESO* (1-24). Didáctica de las Matemáticas. UMA.
- Guillén, G., González, E., y García, M. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (247-258). SEIEM.

- Hernández, E. (2016). *Estrategia para la Enseñanza del Concepto de Área y de Volumen, utilizando como mediadores de Aprendizaje el Origami y las Tecnologías Digitales*. [Tesis de Maestría, Universidad de Medellín]. <http://funes.uniandes.edu.co/11411/>
- Hernández, R. (2016). La desigualdad del triángulo, una secuencia didáctica para alumnos de secundaria incorporando material didáctico manipulable. [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas]. <http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/bitstream/20.500.11845/1213/1/2016%20Castruita%2C%20R..pdf>
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice* (pp. 121-139). Routledge Falmer.
- Laliena, F. J. (2013). *Dificultades en el proceso de la enseñanza de la Geometría en 1º de la ESO*. [Tesis de maestría, Universidad Internacional de la Rioja]. <https://reunir.unir.net/handle/123456789/1957>
- Marqués, P. (7 de agosto de 2011). *La selección de materiales didácticos*. Los medios didácticos. <https://peremarques.net/medios.htm#selec>
- Morales, P. (2012). *Elaboración de material didáctico*. Red Tercer Milenio.
- Navarrete, P. (2017). *Importancia De Los Materiales Didácticos En El Aprendizaje De Las Matemáticas*. [Trabajo de fin de grado, Universidad de Jaén]. España <https://hdl.handle.net/10953.1/5752>
- Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza (Ed.), *Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.: Análisis y propuestas* (pp. 59-71). Paidós.
- Peña, A. (2010). Enseñanza de la Geometría con TIC en Educación Secundaria Obligatoria. [Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Educación a Distancia]. España. <http://e-spacio.uned.es/fez/view.php?pid=tesisuned:Educacion-Apena>
- Pérez, D., y Falk, M. (2017). Construcción de significado robusto para el concepto de área y caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado (niños entre 10 y 13 años). En Chacón, G., García, M., Rojas, O., Menéndez, R., Sánchez, R., Rincón, G. (Eds.), *Acta Simposio de Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 10-20). Universidad Antonio Nariño.
- Quecedo, R., y Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*, (14), 5-39. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17501402>
- Royal Society and Joint Mathematical Council (2001). *Teaching and Learning Geometry 11-19*. The Royal Society.
- Secretaría De Educación Pública (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programa de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación. Matemáticas. Educación secundaria*. SEP.
- Villamil-Rincón, D. L., Aldana-Bermúdez, E., & Wagner-Osorio, G. (2017). Análisis de contenido del concepto de área en educación superior. *Rev.investig.desarro.innov*, 8(2), 265-278.

Villarroel, S., y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas*, 78, 73-94.



Anexos

Transcripción del desarrollo de las actividades y evidencias fotográficas de las clases y producciones de los alumnos

- **ACTIVIDAD 1.**

Esta actividad tiene como objetivo que los estudiantes determinen el área de polígonos a partir del recubrimiento de éstos, para ello se les proporciona la hoja de trabajo y el material recortable para que lo realicen.

- **Situación de Acción**

La situación de acción empieza cuando los estudiantes comienzan a interactuar con la consigna, desde leer las instrucciones hasta la manipulación del material didáctico proporcionado.

La profesora-investigadora entra al salón de clases y saluda a los estudiantes.

P: Buenos días, para realizar la actividad del día de hoy nos vamos a organizar en equipos de tres integrantes y les voy a entregar una hoja de trabajo y un material. Mientras les entrego la hoja vayan leyendo las instrucciones.

//la profesora pasa por los lugares y entrega el material a los estudiantes//

P: vamos a guardar silencio, alumno 1 por favor en voz alta lea las instrucciones.

A1: En equipo, utilicen las figuras de las hojas de color para recubrir los polígonos (recorten tantas figuras como crean necesario) pueden hacer uso de las tres a la vez o recortarlas, lo importante es que no queden huecos en ellos, con ello determinar el área de cada uno y respondan las preguntas.

P: Alumno 2, con tus propias palabras, ¿Qué es lo que vamos a hacer?

A2: Vamos a rellenar las figuras con estas figuras //señala las figuras de las hojas de color// y obtener el área de los polígonos.

P: Bien, vamos a recortar las figuras de las hojas de color y vamos a tratar de cubrir los polígonos que están en la hoja de trabajo, para después obtener su área. Pero listos aquí, cada una de las figuras de las hojas de color tienen su área ya, la cual vamos a utilizar para obtener el área total de los polígonos. El cuadrado, tienen de lado 1cm y para obtener su área multiplicamos 1 por 1 y me dio 1cm^2 , luego tenemos el triángulo, tiene de base 2 cm y de altura 1 cm, para obtener su área multiplicamos base por altura y lo dividimos entre dos, en este caso sería 2 por 1, 2 entre 2, 1cm^2 . //los alumnos ayudan a resolver las operaciones, se encuentran atentos al pizarrón // para el caso del círculo es

diferente //un alumno dice la formula// el círculo tienen de radio 0.5 y para obtener su área debemos multiplicar, pi por r^2 , pi es un valor determinado y siempre será el mismo 3.14 hay muchos más decimales, pero ahorita solo trabajaremos con estos dos. Entonces multiplico el radio al cuadrado y luego por pi y el área me da 0.8cm^2 , esto es aproximado porque no estamos tomando todos los valores de pi. Con estas figuras ustedes van a tratar de obtener el área de los polígonos, luego responden las preguntas que están en la parte de abajo, ¿tienen alguna duda?

As: no.

P: muy bien, entonces pongámonos a trabajar, aquí tengo tijeras y pegamento si a alguien le hace falta.

//los alumnos se acercan al escritorio por material//

- **Situación de formulación**

Los alumnos comienzan a recortar y sobreponer algunas figuras en los polígonos. La profesora-investigadora pasa por los equipos para analizar las estrategias que estos están implementando en la consigna y analizar las posibles estrategias utilizadas.

Equipos 1.

P: ¿Este polígono con que los vas a rellenar? //se señala el primer polígono//

A1: cuadrados y aquí va a llevar otro triángulo //señala otro polígono//

P: cuadrados, ok. La condición es que no se empalmen ni queden huecos.

As: si, maestra.

Equipo 2.

P: ¿Cómo vamos?

As: bien.

P: ¿Esta figura con que la vas a cubrir?

A2: con triángulos.

P: ¿Con triángulos? No deben quedar huecos, ok.

Equipo 3.

P: ¿Cómo vamos?

As: bien, ya vamos terminado.

P: Ya recortaron las figuras. ¿con que van cubrir esta figura?

As: con cuadrados y círculos //señalan la figura//

Equipo 4.

P: ¿Cómo vamos? Aquí estamos rompiendo una regla.

As: ¿Cuál?

P: lea esto de aquí.

A5: sin que queden huecos.

P: ¿Qué hay aquí?

A5: huecos.

P: bueno, hay que corregir, recuerda que podemos combinar las figuras si es necesario, hasta podemos recortarlas a la mitad.

//los equipos se observan motivados al manipular el material, recortan y comienzan a pegar las figuras en los polígonos de diferentes maneras según su criterio y decisión por equipo, se da un tiempo para que los alumnos manipulen el material y la profesora-investigadora vuelve a pasar por los lugares para analizar la estrategia para obtener el área de los polígonos y responder las preguntas//

Equipo 1.

P: ¿cómo le van a hacer para obtener el área?

As: contar, multiplicar.

A1. Sumar las cm^2

A2: sumar las áreas de cada figura.

P: Muy bien, y ¿para la siguiente pregunta?

A3: ¿tuviste alguna dificultad... *//lee la pregunta//* recortando, bueno primero si, recortamos la figura. Lee la pregunta 3, ¿si no tuvieras las figuras podrías determinar sus áreas? Mm sí.

P: ¿por ejemplo la de la estrella?

As: mmm no, nada más podría del rectángulo.

Equipo 2.

P: ¿Cómo le vamos a hacer para determinar el área de los polígonos? Por ejemplo, cada cuadrado tiene área 1 cm^2 , ¿Cómo podríamos determinar el área total del rectángulo?

As: multiplicar.

P: pero no tenemos las medidas del rectángulo.

//una alumna pregunta el nombre de un polígono//

P: cada cuadrado tiene 1 cm^2 de área, ¿Cómo podemos saber cuánto es al área si cada uno es 1 cm^2 ?

As: Sumando.

Los alumnos trabajan de manera colaborativa, se observa como discuten entre ellos para poder determinar el área contando las figuras y como algún mal recorte o acomodo de las figuras les dificulta esta tarea y si su estrategia cubre totalmente todos los polígonos.

- **Situación de validación**

La profesora-investigadora pasa a dos de los quipos al pizarrón para que compartan al resto su procedimiento para dar respuesta a la consigna.

Equipo 3.

P: ¿Cuál fue su estrategia para determinar el área de los polígonos?

As: ver cuantas figuras cubrían al polígono y luego sumar sus áreas.

P: para la pregunta número 2, ¿tuviste alguna dificultad... *//lee la pregunta//*

As: Sí.

P: y, ¿Qué hicieron para solucionarlo?

As: costamos las figuras para poderlas cubrir.

P: muy bien.

//un alumno menciona que ellos tuvieron el mismo problema y lo solucionaron igual//

P: siguiente pregunta, ¿si no tuvieran las figuras... *//lee la pregunta//* podrían hacerlo.

A7: no, bueno sí. Con los centímetros.

P: ah, usarían una regla. ¿y para el caso de la estrella?

//los alumnos permanecen en silencio//

P: Sería más complicado verdad, ¿Cómo les ayudaron sestas figuritas?

A7: ya sabemos los cm^2 y sumamos.

P: siguiente pregunta, ¿Qué figura te pareció más difícil de cubrir y por qué?

As: el pez. Porque no le entendíamos como íbamos a poner las figuras.

P: muy bien, y ¿Cuál más fácil?

As: el rectángulo, porque solo eran cuadrados y eran dos filas.

P: muy bien chicos, muchas gracias.

//los alumnos pasan a su lugar//

Equipo 4.

P: platíquenos que fue lo que hicieron ustedes.

A8: vimos como acomodar las figuras.

P: y, ¿para sacar su área?

As: sumamos, las áreas de las figuritas.

P: ok, su procedimiento fue sumar las áreas de las figuras, como el de sus compañeros.

P: miren *//le dicen al resto del grupo//* ellos utilizaron un procedimiento diferente para cubrir la estrella, ellos utilizaron puros triángulos y ellos algunos cuadrados y obtuvieron la misma área. *//los alumnos observan//*

P: tuvieron alguna dificultad... *//lee la siguiente pregunta//*

As: si, combinamos algunas figuras, primero pusimos los cuadrados y luego recortamos el círculo.

P: ¿sino tuvieras las figuras, podrían determinar su área? ¿Qué estrategia hubieran utilizado para determinar el área del barquito?

As: hubiéramos medido, dividido la figura.

P: hubieran dividido la figura en otras conocidas. Muy bien. ¿Qué figura les pareció más difícil y por qué?

A9: el rectángulo porque a veces recortábamos más chicos los cuadrados o más grandes.

P: oh, era por la manera en la que recortaban. Y ¿Cuál más fácil?

As: el barquito, porque quedaba muy bien la figura.

- **Situación de institucionalización**

P: Jóvenes, ¿Cuál creen que sea la finalidad de las figuritas?

As: sacara el área de figuras irregulares.

P: siempre nos piden por lo regular que obtengamos el área de figuras regulares, verdad, por ejemplo, un cuadrado. Pero cuando se nos presentan figuras que no son regulares es cuando decimos y ¿Cómo le vamos a hacer? En este caso, hicimos uso de otras figuras para cubrir las totalmente, la consigna era que no quedarán huecos porque si no nos faltaría área ni que empalmáramos figuras. Si se fijan ustedes pueden calcular el área de cualquier figura irregular y pueden hacer uso de otras estrategias para determinar su área. En este caso yo les di cuadrados, triángulos y círculos, pero hay más figuras. Entonces ¿Qué me pueden decir del área?, ¿Qué es el área?

A9: lo que tiene cada figura.

A1: lo que mide cada figura.

P: por ejemplo, esto mide esta figura //señala un lado de la figura// ¿esto es el área?

As: no, lo que está adentro.

P: lo que está adentro, ¿en qué unidad estábamos trabajando?

As: cm^2

P: El área van a hacer los cm^2 que contenga una figura. ¿Qué hicieron para obtener el área? Sumaron los cm^2 que tenían las figuras verdad. Entonces, el área serán los cm^2 que estarán contenidos en una figura.





HOJA DE TRABAJO

Nombres: Esteliana Soto, Charoena Sady Daniela esquivel
Soto, Kassandra Lizbeth Cruz Soto

Consigna 1: En equipo, utilicen las figuras de las hojas de color para recubrir los polígonos y determinar el área de éstos (reproduzcan tantas figuras como crean necesarias) pueden hacer uso de los tres a la vez, sin que queden huecos en ellos.

- ¿Cuál fue tu procedimiento para determinar el área de todos los polígonos?
Sumando la medida de las figuras.
- ¿Tuviste alguna dificultad para cubrir totalmente algún polígono con la misma figura? Si fue sí, ¿Cómo lo solucionaste? no
- Sino tuvieras las figuras para cubrir los polígonos, ¿podrías determinar sus áreas? Si es sí, ¿de cuáles de ellos? el rectángulo, el barco, el pez y la nube etc.
- ¿Qué figura te pareció más difícil de cubrir? ¿Por qué? la estrella, no sabía que figuras usar
- ¿Cuál más fácil? ¿Por qué? el rectángulo, no fue difícil descubrir que figuras iban en el rectángulo

Consigna 1: En equipo, utilicen las figuras de las hojas de color para recubrir los polígonos y determinar el área de éstos (reproduzcan tantas figuras como crean necesarias) pueden hacer uso de los tres a la vez, sin que queden huecos en ellos.

- ¿Cuál fue tu procedimiento para determinar el área de todos los polígonos?
Sumar las áreas de cada figura.
- ¿Tuviste alguna dificultad para cubrir totalmente algún polígono con la misma figura? Si fue sí, ¿Cómo lo solucionaste? Si, recortando la figura.
- Sino tuvieras las figuras para cubrir los polígonos, ¿podrías determinar sus áreas? Si es sí, ¿de cuáles de ellos? Solo podría del: rectángulo, barco y trapecio.
- ¿Qué figura te pareció más difícil de cubrir? ¿Por qué?
La estrella porque tiene lugares más estrechos.
- ¿Cuál más fácil? ¿Por qué? El rectángulo porque es recto.

- **ACTIVIDAD II.**

El objetivo de la actividad II es que los estudiantes descubran y justifiquen que el área de un polígono no es dependiente del perímetro y a su vez distingan un concepto del otro.

La actividad se llevó a cabo el día miércoles 23 de marzo del presente año en

- **Situación de acción**

P: para llevar a cabo esta actividad vamos a hacer equipos de dos integrantes, y vamos a dividir el grupo en dos, mientras que unos de sus compañeros realizan una actividad, la otra mitad realizara otra para después volverlos a reunir todos.

//la profesora-investigadora pide a tres de los equipos salgan a un área verde los que estarán encargados de hacer el mensaje, mientras que la otra mitad estará formando figuras con el tangram. Una vez separados los equipos se comienza con las situaciones didácticas//

Alumnos que harán el mensaje

P: Bien, alumno 1 lea las instrucciones por favor.

A1: Busquen o creen un método para comunicar, mediante un mensaje escrito (sin utilizar dibujos) el área del siguiente polígono a alguien de su equipo que no lo vea, con la finalidad de que logre construir uno con área congruente, después respondan las preguntas:

P: alumnos 2, que es lo que entiende vamos a hacer.

A2: vamos a escribir un mensaje para que nuestros compañeros hagan la figura.

P: muy bien, van a tomar todas las características que crean necesarias para que cuando ustedes les entreguen el mensaje a algunos de sus compañeros, estos únicamente con ello puedan crear un polígono con áreas congruentes. El concepto congruencia hace referencia que las áreas deben ser iguales.

//la profesora hace ver a los alumnos que es una tarea muy importante, que sus compañeros no deben ver el polígono y que el mensaje más completo será aquel que logre que sus compañeros construyan el polígono solicitado//

Al resto del grupo de le entrega un tangram y una hoja con figuras, las cuales deben construir haciendo uso de todas las figuras del tangram, se hace una especie de competencia. Los alumnos se observan motivados para llevar a cabo la actividad solicitada. Y se les pregunta si las figuras tienen la misma área a lo que responden que si debido a que están formadas por las mismas figuras.

- **Situación de formulación**

La profesora-investigadora regresa con los equipos para analizar los datos que están incorporando en su mensaje.

Equipo 1.

P: ¿Cómo vamos?

As: maestra, ¿podemos dividir la figura en triángulos?

P: ¿eso para qué?

As: para obtener el área de la figura.

P: ah, muy bien.

Equipo 2.

P: ¿Cómo vamos?

// los alumnos dividieron el polígono en otras figuras, pero en su mensaje solo mencionan en cuales figuras han dividido el polígono, pero no proporcionan ninguna medida o dato//

P: ¿Creen que con solo mencionar las figuras en las que dividieron su polígono sea suficiente para que al entregar su mensaje sus compañeros hagan el polígono? Recuerden que sus compañeros no pueden verlo, únicamente será la información que ustedes les den.

As: no, entonces les datos los datos.

P: como ustedes crean que es mejor, únicamente piensen que si a ustedes les dan esa información sea suficiente.

Equipo 3.

P: ¿Cómo vamos?

As: bien maestra, primero obtuvimos el área del polígono y estamos creando el mensaje por pasos para que se entienda mejor.

P: ¿Qué datos están tomando en cuenta?

As: pues dividimos el polígono en figuras y estamos dando los datos de las figuras y donde están.

P: Muy bien, dense prisa para terminar su mensaje y pasar al salón.

//se da un poco más de tiempo a los alumnos y una vez que crearon su mensaje se pide pasen al salón para entregarlo a sus compañeros//

- **Situación de validación**

Se organizan integrando a los alumnos que hicieron el mensaje.

P: muy bien, sus compañeros estuvieron trabajando en un mensaje, con el cual ustedes deben seguir para crear un polígono según la información que se les está dando. Tendrán un tiempo de 10 a 25 minutos para hacerlo. Ahorita no vamos a revisar si está bien o mal, únicamente es que ustedes formen el polígono como entiendan el mensaje.

//los alumnos comienzan a descifrar el mensaje//

Equipo 2.

P: ¿Cómo van?

As: no nos sale.

P: ¿no pueden?

As: no.

P: ¿la información que tienen no es suficiente para construir el polígono?

As: no.

P: ¿Cuál es el mensaje que les dieron?

As: //lee el mensaje// figura 1

P: ¿qué le hace falta a este mensaje?

As: datos //ruido//

P: no hay medias verdad. Ok, traten de contestar las preguntas.

Equipo 3.

P: ¿Cómo vamos?

As: es que no le entendíamos, pero ya le entendimos.

//la alumna señala las figuras//

P: van a formar las figuras y luego las van a juntar, muy bien. //la profesora pasa al otro equipo//

P: ¿Qué dice su mensaje?

A3: //lee el mensaje (divido en triángulos y sin medidas) //

P: Ok, traten de construir el polígono con este mensaje.

A6: maestra necesitamos una hoja de oficio, sino vamos a poder.

As: leen el mensaje.

P: ¿creen que esos datos sean suficientes?

As: pues no, pero lo estamos intentando.

P: Muy bien, ahorita vamos a ver cuál es el polígono.

//una vez que los alumnos terminaron de construir el polígono con el mensaje pasan al pizarrón//

P: ¿Cuál fue el polígono que ustedes crearon? Muéstrenlo a sus compañeros. //los alumnos muestran el polígono// cual fue el mensaje que ustedes tenían, lea el mensaje por favor.

A1: //lee el mensaje (solo les dan el área) //

P: ¿tenían medias para hacer su figura?

As: sí.

P: muy bien. Siguiendo equipo. Lean el mensaje.

As: //leen el mensaje//

P: ¿pudieron construir el polígono?

As: no.

P: ¿Qué le hizo falta a ese mensaje?

As: las medidas.

P: ¿las medidas de qué?

As: de los lados para completar las figuras.

P: muy bien, pase el siguiente equipo, lean su mensaje por favor.

As: //le el mensaje (mensaje con pasos) //

P: ¿pudieron construir el polígono?

//los alumnos muestran lo que pudieron construir//

As: sí.

- **Situación de institucionalización**

P: ustedes se están quejando porque el mensaje no contenía los datos necesarios para construir su polígono, ahorita les voy a mostrar el polígono con el que trabajaron sus compañeros //se muestra el polígono a los alumnos// y me van a dar sugerencias de los datos que hagan falta, además me darán las repuestas de las preguntas que contestaron.

P: equipo 1, ¿Cuál fue su procedimiento para crear su mensaje? Y ¿Qué datos utilizaron?

As: pues dividieron el polígono en triángulos y sacaron las medias.

P: ¿equipo 2?

As: se dividió el polígono en otros y se fueron haciendo pasos con los datos.

P: equipo 3.

As: pues se sacó el área del polígono a partir de otras figuras y se les dijo cuál era el área.

P: si no se les permitiera obtener el área, ¿Cómo podrían crear su mensaje?

As: con ayuda de otras figuras, como triángulos.

P: muy bien. ¿Creen que fue importante comunicar la forma del polígono?

As: si, porque no sabíamos dónde poner las figuras.

P: pero la consigan no señalaba que debían construir el mismo polígono, sino uno con misma área. Se fijan que un equipo solo comunico el área. Con ese dato ustedes podían construir cualquier polígono.

As: ah...

P: ¿consideran que comunicar el perímetro del polígono era importante para hacer el mensaje?

As: no.

P: ¿en algún mensaje lo consideraron?

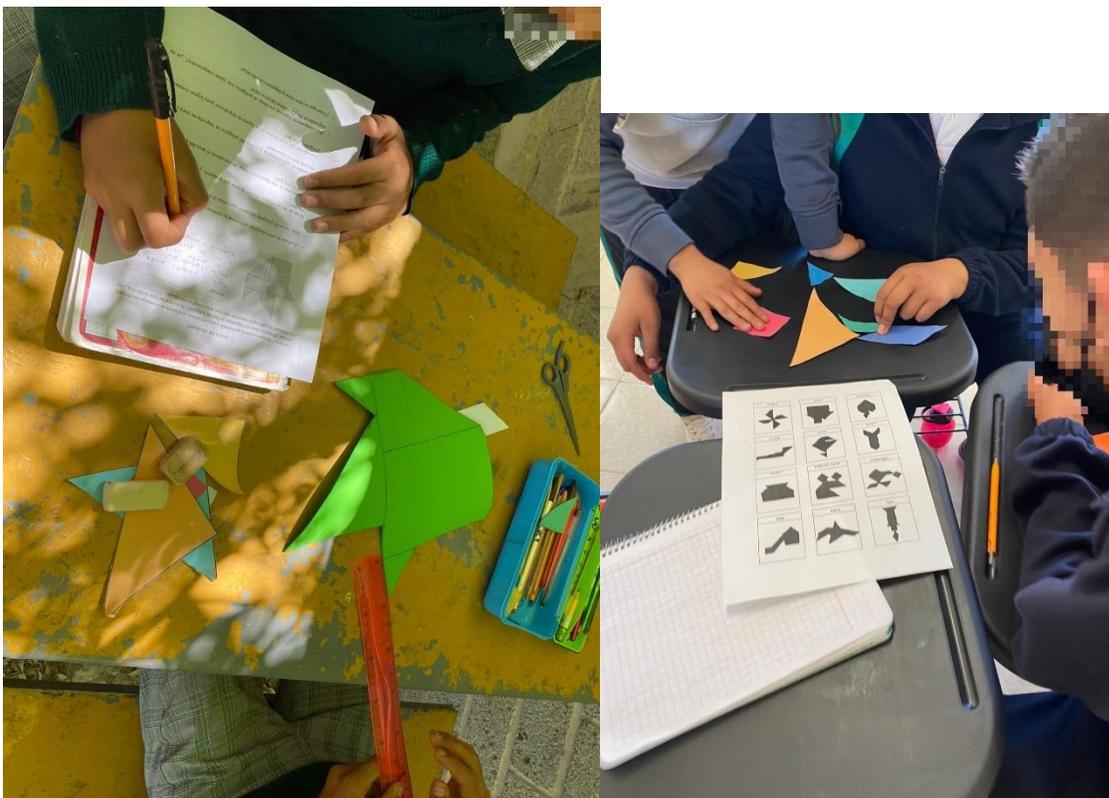
As: no.

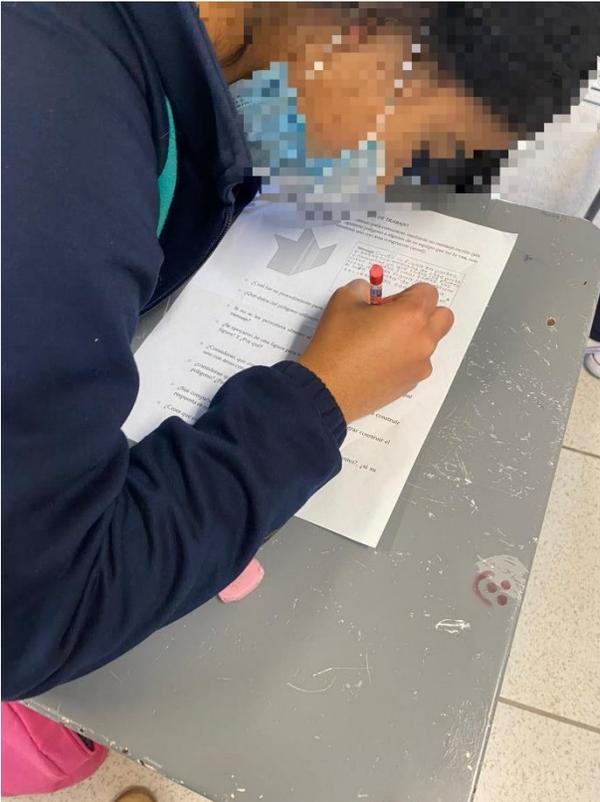
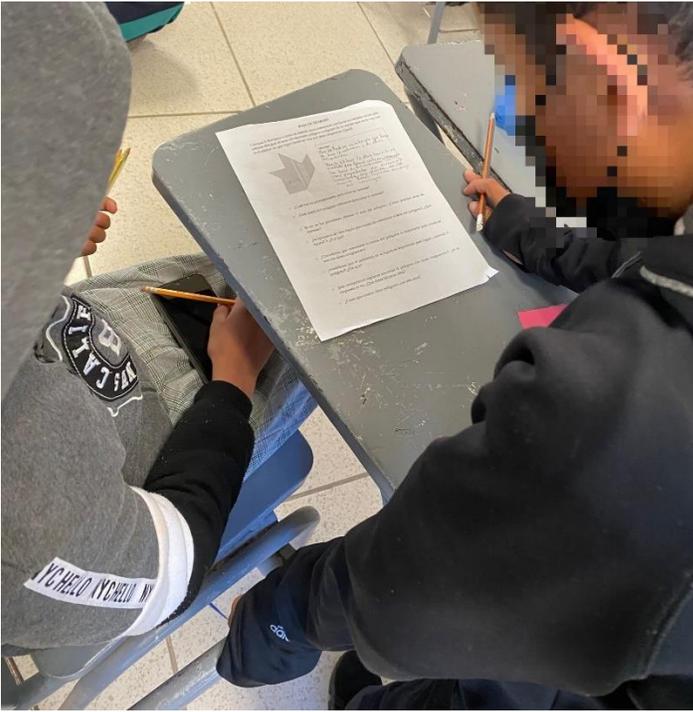
P: ¿creen que existan más polígonos con esta área?

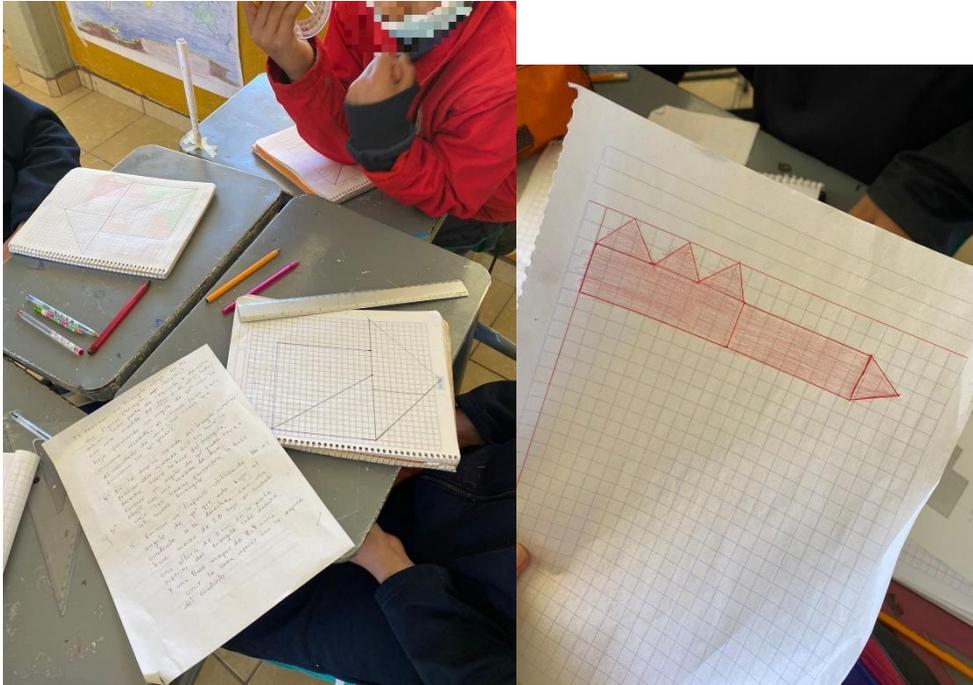
As: sí.

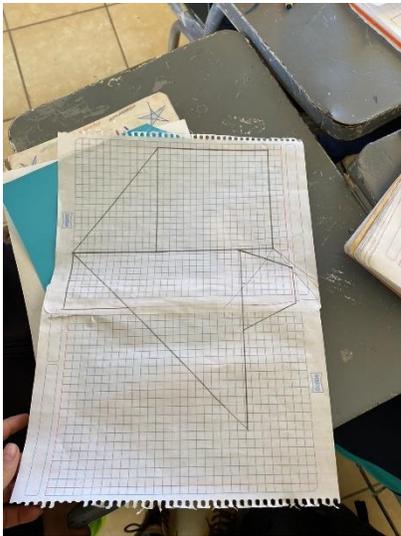
P: si se fijan en los mensajes donde tomaron en cuenta la forma de la figura no se llegó a ella mucho menos el área porque no dan los datos de las figuras en las que se dividió el polígono. Y datos como el perímetro no eran necesarios porque podemos encontrar polígonos con misma área y diferente perímetro o al contrario así que era un dato innecesario. En esta actividad ningún equipo llego a construir el polígono, pero no quiere decir que sea todo perdido, pues descubrimos que datos son necesarios para construir polígonos con áreas congruentes y que tanto la forma como el perímetro son datos que no son necesarios para crear el mensaje.

EVIDENCIAS FOTOGRÁFICAS DE LA CLASE Y PRODUCCIONES DE LOS ALUMNOS









HOJA DE TRABAJO

Compara 2. Busquen o creen un método para comunicar, mediante un mensaje escrito (sin utilizar dibujos) el área del siguiente polígono a alguien de su equipo que no lo vea, con la finalidad de que logre construir uno con área congruente (igual).

Mensaje:
 Paso 1. Realizar un rectángulo que tenga de base 12 centímetros y de altura 16.5 centímetros.
 Paso 2. Utilizar la alfiler izquierda del cuadrado para formar un triángulo que tenga base de 8 centímetros con una línea perpendicular en la dirección izquierda que sea igual a la izquierda de abajo del rectángulo.

- ¿Cuál fue su procedimiento para crear su mensaje?
- ¿Se dividió en partes para explicar mejor?
- ¿Qué datos del polígono utilizaron para crear el mensaje? Las medidas de las figuras divididas.
- ¿Si no se les permitiera obtener el área del polígono, ¿Cómo podrían crear su mensaje? Ayudarnos con algunas figuras.
- ¿Se apoyaron de otra figura para tratar de comunicar el área del polígono? ¿Qué figura? ¿Por qué? Sí, de triángulos y cuadrados para que sea más fácil de explicar.
- ¿Consideran que comunicar la forma del polígono es importante para construir uno con áreas congruentes? No.
- ¿Consideran que el perímetro de la figura es importante para lograr construir el polígono? ¿Por qué? No.
- ¿Sus compañeros lograron construir el polígono con áreas congruentes? Si su respuesta es no, ¿Qué datos hicieron falta?
- ¿Crees que existan otros polígonos con esta área?

3 - Realizar un triángulo opalo de los dos triángulos (triángulo con la base de 8 cm y el otro lado que una medida de 12 cm y el otro lado que una medida de 16.5 cm).
 Paso 1. Realizar un triángulo opalo de los dos triángulos (triángulo con la base de 8 cm y el otro lado que una medida de 12 cm y el otro lado que una medida de 16.5 cm).
 Paso 2. Utilizar la alfiler izquierda del cuadrado para formar un triángulo que tenga base de 8 centímetros con una línea perpendicular en la dirección izquierda que sea igual a la izquierda de abajo del rectángulo.

4 - En la esquina izquierda del triángulo exterior formar otro triángulo de 2 cm hacia la derecha sobre la base del triángulo. Formar un ángulo de 90 grados hacia el lado con una medida de 8 cm. Unir las líneas formando la base del nuevo triángulo.
 5 - Formar un triángulo utilizando el ángulo de 90 grados de esta parte al cuadrado a la derecha con una base menor de 8 cm para el cuadrado. Una altura de 2 cm en la parte superior del triángulo lado derecho. Y una base mayor de 8 cm.
 Unir la línea inferior con la esquina del cuadrado.

HOJA DE TRABAJO

todo para comunicar, mediante un mensaje escrito (sin utilizar dibujos) el área del siguiente polígono a alguien de su equipo que no lo vea, con uno con área congruente (igual).

Mensaje: Dividir la figura en partes y sacar las medidas de cada parte y sumarla ya que todas las partes estén sumadas, sumar todas las áreas de cada figura para obtener el área correcta de la figura, tal resultado sea 166.8 cm² y utilizando el procedimiento $a = \frac{b \times h}{2}$

Para crear su mensaje? Dividir la figura en partes y al final sumarla.

Mensaje: $12 \times 16.5 = 198$
 $12 \times 16.5 = 198$
 $198 - 31 = 167$
 tiene 2 triángulos arriba y en la izquierda otro triángulo y en medio un rectángulo y en la derecha otro triángulo y abajo en la derecha otro triángulo.

- **ACTIVIDAD III.**

La actividad III tenía como objetivo que los estudiantes demuestren la conservación del área en polígonos con diferente forma (áreas equivalentes).

- **Situación de Acción**

//la profesora organiza a los alumnos en equipos//

P: ¿creen que estos polígonos tengan la misma área? *//muestra los polígonos a los alumnos//*

As: no. Uno tiene un pico.

As: sí.

P: pues dejen les digo que sí, tienen la misma área. les voy a entregar una hoja de trabajo con los polígonos, vayan leyendo las instrucciones mientras lo hago.

//la profesora pasa por los lugares//

P: Alumno 1, lea las instrucciones por favor.

A1: Los polígonos tienen la misma área. demuestren que se trata de polígonos con áreas equivalentes.

P: en este caso, ustedes deben demostrarme con el procedimiento que quieran que se trata de dos polígonos con la misma área. Pueden hacer uso de ellos.

- Situación de formulación.

//se da un momento para que los alumnos interactúen con el material, luego se pasa por los lugares para analizar sus posibles procedimientos//

Equipos 1.

P: ¿Cómo vamos? ¿Qué piensan hacer?

//los alumnos analizan las figuras, luego uno de ellos empalma los polígonos y se da cuenta que si recorta una de ellos puede ponerlo para que quede igual que el otro//

A2: ¿maestra y lo podemos cortar?

P: sí.

A2: es que mire aquí queda igual.

P: Muy bien, si un polígono cubre totalmente a otro quiere decir que tendrán áreas iguales. Excelente, no dejen que otros equipos vean su estrategia.

//los alumnos empiezan a recortar el polígono//

Equipo 2.

P: ¿Cómo vamos? ¿Qué piensan hacer?

A5: pues vamos a dividir al polígono en estas figuras *//señala las figuras//* y luego vamos a obtener su área para ver si son las mismas.

P: ah, muy bien.

//este procedimiento lo realizaron dos equipos//

//se interrumpe la clase por suspensión y queda pendiente la socialización de los procedimientos de los equipos//

EVIDENCIAS FOTOGRÁFICAS DE LA CLASE Y PRODUCCIONES DE LOS ALUMNOS

