UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

LA INFLUENCIA DEL SISTEMA DE CREENCIAS EN LOS PROCESOS DUALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE NÚMEROS RACIONALES EN NIVEL SECUNDARIA

Tesis que para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

Daniela Guadalupe Ochoa Piña

Directora de Tesis:

Dra. Lorena Jiménez Sandoval

Zacatecas, Zac. Junio, 2024

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías
por el apoyo económico brindado mediante la
beca con número de registro de CVU 1004623,
para la realización de mis estudios de Maestría.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 17 del mes de junio del año 2024, el (la) que suscribe Daniela Guadalupe Ochoa Piña alumno(a) del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 30113929; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado intitulado La influencia del sistema de creencias en los procesos duales en la resolución de problemas sobre números racionales en nivel secundaria bajo la dirección de la Dra. Lorena Jiménez Sandoval.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Daniela Guadalupe Ochoa Piña

Nombre y Firma del estudiante

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre"La influencia del sistema de creencias en los procesos duales en la resolución de problemas sobre números racionales en nivel secundaria" y que fue realizado bajo mi asesoría por la C. Daniela Guadalupe Ochoa Piña de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

A T E N T A M E N T E:

Zacatecas, Zac., a 17 de junio del 2024

Lorena

Dra. Lorena Jiménez Sandoval
Asesora

Agradecimientos

A las Doctoras Carolina Carrillo, Darly Ku, Yuridia Arellano y Ofelia Montelongo por darse el tiempo y ofrecer las observaciones acertadas para este trabajo.

También a mis docentes de maestría, por compartir sus conocimientos y exigirme lo suficiente para mejorar en mi práctica docente, especialmente a la Dra. Judith Hernández y Carolina Carrillo, que me recuerdan la importancia de conjuntar la empatía y el profesionalismo para ser un excelente docente.

A la maestra Nancy Calvillo por su eficiencia durante mi estancia en la maestría.

A mis colegas y compañeros de maestría Ariel, Liz, Oscar y Julianne por hacer los sábados más amenos y divertidos y a July doble agradecimiento por darme las facilidades de aplicar mis cuestionarios con sus alumnos e igualmente a sus compañeras por su tiempo y apoyo.

A la Dra. Lorena Jimenez Sandoval por su constante ayuda, por la paciencia y comprensión y sobre todo por aceptar mis ideas y llevarlas a plasmar en lo que ahora son.

A mi familia por su eterno apoyo, confianza y por permitirme la libertad de ser y hacer lo que quiero.

A mi Universidad, de la que siempre me sentiré orgullosa de representar y pertenecer.

Dedicatoria

A mi amigo Efrén por ser un ejemplo constante de perseverancia y pasión a lo que se hace en la vida.

A mi amigo Gilis por su enseñanza de la incansable busca del bien social desde donde uno lo pueda hacer.

A mi mejor amiga Lupis por recordarme de dónde vengo y por creer más en mí de lo que yo misma lo hago.

A mi mejor amigo Luisi por ser el mejor chofer, consejero, maestro, suplente, coach, jefe y cómplice que la vida me pudo dar y porque pase lo que pase siempre es el responsable directo de la felicidad de mis días.

A Daniela niña por ser la que elimina todos los obstáculos que le pone la Daniela adulta.

Resumen

Existen investigaciones como las de Caballero-Jiménes y Espinola- Reyna, 2016; Gomez-Chacón, 2006 que muestran la importancia que tiene el aspecto emocional en relación con el fracaso que presentan los estudiantes al resolver problemas de matemáticas. Estos estudios dejan en claro que las creencias que los alumnos tienen sobre las matemáticas, su enseñanza, su aprendizaje y sobre su propia capacidad, tienen una fuerte relación con la manera con la que estos enfrentan la solución de un problema en el que específicamente ponen en juego sus conocimientos matemáticos. Asimismo, existen estudios como los de Gómez-Chacón, et al., 2014; Leron & Hazzan, 2009; Tzur, 2011; Evan & Stanovich, 2013 que identifican los dos procesos cognitivos que utilizan los alumnos al momento de resolver problemas; los cuales involucran tanto el razonamiento analítico como el intuitivo, el uso de un razonamiento intuitivo en matemáticas suele llevar a errores, sin embargo, como es un razonamiento más accesible, suele anticiparse al uso del razonamiento analítico. La investigación que se presenta tiene como objetivo, describir la influencia que tiene el sistema de creencias en los estudiantes de secundaria, en la determinación del sobreponer el pensamiento intuitivo sobre el pensamiento analítico al momento de resolver problemas con números racionales. El marco de referencia se construyó con base en lo reportado en investigaciones de corte cuantitativo-descriptivo sobre la aplicación de la Teoría del doble proceso en la Matemática Educativa, el cual fue el enfoque central. Los métodos para el levantamiento de la información que se emplearon fueron; la aplicación de una escala de creencias para caracterizar el sistema de creencias de los estudiantes, dos cuestionarios de problemas sobre números racionales elaborados con base a otros reportados en investigaciones como la de González-Forte, et al. (2019a) para identificar la aplicación del Sistema de Razonamiento Tipo 1 (S1) y/o el Sistema de Razonamiento Tipo 2 (S2) cuando los estudiantes resuelven problemas y analizan cómo las creencias pueden estar influyendo en esta aplicación de S1 o S2. Los resultados muestran que el razonamiento intuitivo se hizo presente en 41 alumnos, mientras que el razonamiento analítico lo aplicaron 67 alumnos al resolver problemas matemáticos. Se concluye que el sistema de creencias de los alumnos influye en gran medida en la definición del tipo de razonamiento que utilizaron cuando resolvieron problemas con números racionales. Se destacaron las creencias de autoeficacia y las creencias sobre la matemática, si estas se encuentran en niveles que podrían identificarse como bajos, se pronostica una imposición del razonamiento intuitivo por sobre el razonamiento analítico que lleva a los estudiantes a cometer errores en determinados problemas que requieren de un razonamiento más reflexivo y de más tiempo de análisis.

Palabras clave: sistemas de creencias, secundaria, aprendizaje, razonamiento tipo 1 y tipo 2, solución de problemas.

Abstract

There are investigations such as those of Caballero-Jiménes y Espinola- Reyna, 2016; Gomez-Chacón, 2006 that show the importance of the emotional aspect in relation to the failure that students present when solving mathematics problems. These studies make it clear that the beliefs that students have about mathematics, its teaching, its learning and about their own ability, have a strong relationship with the way in which they face the solution of a problem in which they specifically put into question. play your mathematical knowledge. Likewise, there are studies such as those of Gómez-Chacón, et al., 2014; Leron & Hazzan, 2009; Tzur, 2011; Evan & Stanovich, 2013 that identify the two cognitive processes that students use when solving problems; which involve both analytical and intuitive reasoning, the use of intuitive reasoning in mathematics usually leads to errors, however, as it is a more accessible reasoning, it usually anticipates the use of analytical reasoning. The objective of the research presented is to describe the influence that the belief system has on high school students in determining whether to superimpose intuitive thinking over analytical thinking when solving problems with rational numbers. The reference framework was built based on what was reported in quantitative-descriptive research on the application of the Double Process Theory in Educational Mathematics, which was the central focus. The methods used to collect information were: the application of a belief scale to characterize the belief system of students. Two problem questionnaires on rational numbers prepared based on others reported in research such as that of González-Forte et al. (2019a) to identify the application of Reasoning System Type 1 (S1) and/or Reasoning System Type 2 (S2) when students solve problems and analyze how beliefs may be influencing this application of S1 or S2. The results show that intuitive reasoning was present in 41 students, while analytical reasoning was applied by 67 students when solving mathematical problems. It is concluded that the students' belief system greatly influences the definition of the type of reasoning they used when solving problems with rational numbers. Self-efficacy beliefs and beliefs about mathematics were highlighted; if these are at levels that could be identified as low, an imposition of intuitive reasoning over analytical reasoning is predicted, which leads students to make errors in certain problems that require more reflective reasoning and more time for analysis.

Keywords: belief systems, secondary school, learning, type 1 and type 2 reasoning, problem solving.

Índice General

Índice De Tablas

Índice De Figuras

Introducción

Según Caballero-Jiménez y Espínola-Reyna (2016), existen pensamientos que se relacionan con las creencias y estereotipos que hacen que la matemática se califique como “complicada” para los estudiantes, desde el nivel preescolar hasta el nivel superior, lo que a la larga hace que su rendimiento en esta materia sea malo.

Gómez-Chacón (2006) explica que una parte esencial para contrarrestar la presencia de ideas negativas de los alumnos respecto de la matemática es conocer las creencias que tienen específicamente cuando resuelven problemas en una clase. Según esta autora las creencias no surgen de manera independiente, sino que se organizan en una red que suele denominarse sistema de creencias. Este sistema se caracteriza por “la forma en que un estudiante cree y no tanto por lo que cree, ya que dos personas pueden tener las mismas creencias, pero distintos sistemas de creencias lo que hará que desarrollen la actividad matemática de manera diferente” (Gómez-Chacón, 2006, p. 311). Explicando esto con un ejemplo; dos personas pueden creer que resolver problemas de matemáticas es difícil, pero una de ellas puede tener además un alto sentido de eficacia a diferencia de la otra, de forma tal que cada una de ellas experimenta de manera diferente esta tarea en el aula; mientras una siente emociones positivas reafirmando sus creencias de autoeficacia, la otra experimenta frustración afectando negativamente su trabajo cotidiano en el aula de matemáticas.

En los últimos años, diversos investigadores (Gómez-Chacón, et al., 2014; Leron & Hazzan, 2009; Tzur, 2011) se han enfocado en las teorías de los procesos duales, para analizar el desempeño de los estudiantes en la solución de problemas de matemáticas, la cual sostiene que existen dos tipos o sistemas de razonamiento denominados razonamiento tipo 1 y razonamiento tipo 2.

Estos tipos de razonamiento se refieren a la elección, generalmente no consciente, que hacen las personas al momento de resolver un problema. El razonamiento tipo 1 se ve representado cuando sólo se usa la intuición, es decir, cuando se ofrece una respuesta rápida que no requiere un gran trabajo de memoria mientras que el razonamiento tipo 2 se ve representado cuando, para dar una respuesta, existe un análisis y razonamiento más profundo. Es este tipo de razonamiento el que se espera se utilice de manera común en matemáticas de nivel secundaria ya que con los problemas planteados en este nivel escolar se busca que los estudiantes realicen un análisis y reflexión profunda y que no sólo de la primera respuesta que le venga a la mente ya que ésta, con cierta frecuencia, será errónea (Evans & Stanovich, 2013).

En la presente investigación se indagó cómo el sistema de creencias está presente cuando los estudiantes resuelven situaciones matemáticas, a modo de explicar la influencia del sistema de creencias en la determinación que toman los estudiantes al aplicar un tipo de razonamiento por sobre otro cuando resuelven problemas de matemáticas.

El documento que se presenta se divide en 9 capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el apartado de antecedentes se presenta la revisión de algunos artículos que explican resultados de investigaciones asociadas a temáticas centrales para la investigación que se propone: dificultades que tienen los estudiantes del nivel secundaria con el aprendizaje de la matemática, la importancia que tienen los aspectos del dominio afectivo, específicamente las creencias y el sistema de creencias de los estudiantes en los problemas de aprendizaje que enfrentan, los tipos de razonamiento que ponen en juego los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas y lo que se sabe hasta el momento de la forma en la que están presentes las creencias y el sistema de creencias en estos tipos de razonamiento.

El apartado de Planteamiento del problema se divide a su vez en 4 subapartados: La problemática en la que se explican las generalidades del problema de investigación que han abordado ya otros investigadores, El problema de investigación; en el que se habla específicamente del problema identificado; La pregunta de investigación y los objetivos, en donde se enuncia la pregunta de investigación que nos lleva a delimitar la problemática en la que nos enfocamos, el objetivo general que fueron el propósito de nuestra investigación y los objetivos específicos los cuales ayudaron a llegar al objetivo general; finalmente, en el subapartado de Justificación se presentan algunos argumentos que explican por qué fue conveniente realizar la investigación propuesta.

El tercer apartado corresponde a la Justificación en la cual se hace un análisis de la importancia de llevar a cabo investigaciones relacionadas con el dominio afectivo en matemáticas, y se deja en claro el alcance teórico esperado con la investigación.

El Marco teórico es el apartado número cuatro e incluye los aspectos generales del dominio afectivo, corriente teórica en la que se enmarca la investigación que se presenta, las creencias como uno de los descriptores básicos del dominio afectivo, el sistema de creencias y los tipos de razonamiento involucrados en la solución de problemas de matemáticas.

El apartado número cinco, describe el marco metodológico que se empleó para la elaboración y aplicación de los instrumentos que fueron útiles para el levantamiento de la información, así como para el análisis de ésta.

El apartado seis, corresponde al análisis de la información, en donde se hace la recopilación de los datos obtenidos en la investigación, los cuales permiten llegar a una conclusión del estudio.

El apartado número siete es el de los resultados, el cual muestra aquellos datos que se recopilaron, pero a manera de respuesta de los cuestionamientos que se realizaron en un principio de la investigación.

El apartado de las conclusiones, corresponde al número ocho en donde se desglosan los resultados encontrando datos específicos sobre la investigación realizada, y en donde concretamos el estudio que se realizó.

El apartado nueve es el de las referencias bibliográficas, donde se colocan todas aquellas fuentes que sirvieron de apoyo para la realización de nuestra investigación.

Por último, el apartado diez corresponde a los anexos del estudio, en donde se incorporan los cuestionarios, fotos y evidencias que fueron parte de la investigación.

Motivación

En segundo año de secundaria tuve una maestra que me contagió su amor por las matemáticas, tanto que empecé a esforzarme y adentrarme más a los conocimientos de matemáticas. La maestra observó mi interés y me citaba por las tardes para llevar clases extracurriculares, nos preparamos para participar en olimpiadas y en concursos regionales. Después de esa experiencia con mi maestra de primero y segundo, me cambiaron de profesor en tercero el cual sólo nos dictaba problemas y hacía que los intentáramos resolver durante las dos horas de clase, lo que a mí me parecía aburrido. Fueron momentos tan frustrantes que aún recuerdo la sensación de estar en el salón y cómo se sentía sucio y caluroso, lo que hacía hincapié en lo incómodo que eran las dos horas de su clase.

Durante la preparatoria tuve otros profesores con los que sentí que no avance en mis conocimientos sobre matemáticas y eso hizo que mi interés disminuyera de manera significativa, pero no desapareció por completo. Al ingresar al bachillerato decidí entrar al de físico matemático para poder seguir aprendiendo y determinar si aún me seguía interesando como antes… Resultó que sí, que aún me gustaba, que realmente me apasionaba y fue en donde me di cuenta que en las matemáticas existía una lógica de razonamiento que debía ser explorada a fondo para la resolución de problemas y no sólo guiarse por los conocimientos previos que pueden orientar a dar respuestas dadas por la intuición.

En mi experiencia como alumna me he podido centrar en mi interés o desinterés por las materias y surge mi duda del origen de mis propias creencias hacía las áreas y, en este caso, hacia las matemáticas. Lo que realmente ahora comprendo, con el paso del tiempo en la vida estudiantil, es que todas las cosas que sucedían en mi entorno modificaban mi perspectiva y me hacían enfocarme e involucrarme en las materias. Todo esto me llevó a analizar que, específicamente, las matemáticas tienen una importancia relevante y el hecho de que te gusten o no puede tener su origen en algún momento específico en el que alguien te dijo que eras bueno, o alguien te dijo que no sabías aplicarlas, o alguien dijo que no podrías con ellas, o sin necesidad de que alguien más lo hiciera; tú te diste cuenta de que resolver problemas te llenaba de alegría o te frustraba el pensar en aplicar fórmulas (entre otras cosas).

Las matemáticas juegan un rol en el alumno en el cual parece sólo permitir amarlas u odiarlas y la razón de tomar una idea en particular sobre ellas, ya sea positiva o negativa, el porqué de tomar esa perspectiva y la manera de aplicar los conocimientos ante la resolución de los problemas que se presentan, son las que me motivan y me entusiasma el conocer e indagar para poder aplicar en algún futuro, como profesora, métodos específicos que ayuden a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la misma.

1. Antecedentes

El análisis de los antecedentes se realizó en torno a las ideas iniciales sobre cómo las creencias de los estudiantes influyen en la forma en la que éstos viven la clase de matemáticas, así como en las dificultades que enfrentan, los tipos de razonamiento presentes en la resolución de problemas de matemáticas. La organización de este apartado se trabajó de manera cronológica ascendente en relación con el foco de estudio de las investigaciones, siendo el problema de aprendizaje, la teoría de los procesos duales en la matemática educativa y la influencia de las creencias en los problemas de aprendizaje.

1.1 La Influencia de las Creencias en los Problemas de Aprendizaje

Gómez-Chacón (2003) menciona que la Educación Matemática ha dejado de lado los aspectos afectivos, por el hecho de que se le ve como algo meramente intelectual. Ella hace énfasis en la importancia del lado afectivo en el área de matemáticas; menciona que se le ha dado una reconceptualización al dominio afectivo con el fin de consolidar un marco teórico y por la apertura para tomar en cuenta el contexto social en las clases ya que, las investigaciones previas dan enfoque orientado a la aplicación de cuestionarios dejando de lado el contexto social, por lo que se hace énfasis en indagar la relación afectiva y motivación por el aprendizaje de las matemáticas, el cual requiere una comprensión del contexto sociocultural dentro y fuera de lo escolar que esté influyendo en el estudiante.

Para conocer bien los aspectos que se mencionan, Gómez-Chacón (2003) especifíca que el afecto es un sistema de representación de los individuos; es decir, el afecto codifica información de manera significativa dependiendo del contexto físico y social, puede ser desde las configuraciones cognitivas y afectivas del individuo, hasta las configuraciones cognitivas de otros en las que se encuentran incluidas las expectativas sociales representadas y proyectadas por el mismo individuo. También menciona que lo afectivo tiene tanto una base biológica como social, ya que las dimensiones emocionales se manifiestan en la interacción; en los trabajos previos (Gómez-Chacón, 1997, 2000, 2003) se les han llamado afecto global, afecto local y emociones situadas.

En el artículo de Gómez-Chacón (2003) se explica que el término meta-afecto o toma de conciencia de la actividad emocional se utiliza para referirnos a la conciencia de las propias emociones y a la gestión de éstas. Este concepto es importante, debido a que los estudios realizados han puesto de manifiesto que la estabilidad de las creencias de los individuos tiene mucho que ver con la interacción de la estructura de creencias y no sólo con el afecto, sino también con el meta afecto. Otro aspecto interesante que resalta es el de las ideas que los estudiantes tienen acerca de sí mismos, con respecto a cómo las matemáticas moldean sus comportamientos en el estudio de la disciplina; por tanto, si se puede manejar esta situación a favor del aprendizaje es importante el hacerlo. Las creencias positivas aumentan nuestras capacidades, las limitativas giran alrededor del “no puedo”, pero es posible cambiarlas o modificarlas para permitir variar la conducta.

En este artículo, Gómez-Chacón (2003) destaca el uso de la gráfica emocional la cual se les aplicó después de cada resolución de un problema y consta de seis cuestiones, tres referidas a sentimientos y reacciones emocionales y tres a los aspectos de transferencia y aprendizaje en clase de matemáticas y la vida cotidiana. Por otra parte, en el instrumento para trabajar las creencias limitativas se utilizan actividades provocativas, se refiere a que mediante determinada instrucción observar cómo resuelven los problemas que perciben y cómo seleccionan los procedimientos a seguir.

Gómez-Chacón (2003) menciona como propuesta la elaboración de marcos más amplios y visiones holísticas para adoptar las relaciones que rigen las matemáticas y su enseñanza en contextos y paradigmas culturales teniendo en cuenta las características afectivas y cognitivas del estudiante. También hace énfasis en la necesidad de trabajar los aspectos meta afectivos en el aprendizaje de las matemáticas, al igual que las dimensiones emocionales deben de estar trabajándose constantemente. Las creencias cuentan con un papel esencial en el aprendizaje y puede manejarse en sentido positivo para la enseñanza.

De acuerdo con Gómez-Chacón et al. (2006) los reportes de evaluaciones internacionales sostienen que los estudiantes tienen dificultades para aplicar sus conocimientos matemáticos en la solución de problemas en contextos reales. Estos autores destacan que parte de estas dificultades se deben a la falta de conexiones que los estudiantes no establecen entre su conocimiento, la metacognición, la autorregulación y sus creencias positivas sobre la matemática y su aprendizaje. La investigación busca determinar elementos que favorezcan el establecimiento de esta conexión entre el conocimiento matemático y las creencias de los estudiantes. Para lograr este objetivo describen el sistema de creencias de un grupo de 279 estudiantes de secundaria para explicar, entre otros aspectos, la correspondencia de éste con el rendimiento. Se explica que, al igual que De Corte y Op´t Eynde (2002 y 2003, citados por Gómez-Chacón et al., 2006), consideran que las creencias no se presentan de manera aislada y no son independientes unas de otras, de forma tal que las entienden como un sistema estructurado por tres tipos de creencias: creencias sobre la educación matemática, creencias de los estudiantes sobre sí mismos y creencias sobre su contexto de clase, integradas a su vez por una subclasificación. De acuerdo con su análisis, el sistema de creencias está estrechamente relacionado con el tipo de problemas que el profesor emplea en clase y con la forma en que los estudiantes los resuelven.

Los resultados que se presentan en este sentido indican que son las creencias sobre la competencia personal y el gusto por las matemáticas las que se relacionan con el nivel de rendimiento de los estudiantes; entre menor es el gusto, más bajo es el rendimiento. Entre las conclusiones de los autores, destaca la importancia de identificar las diferentes categorías de creencias que constituyen el sistema de creencias de los estudiantes hacia la matemática para desentrañar el papel de las creencias en el aprendizaje matemático.

En Gómez-Chacón (2007) se reporta una investigación que tiene como centro de atención validar el cuestionario Mathematics-Related Beliefs Questionnaire (MRBQ), tipo Likert, compuesto por 44 ítems que contemplan diferentes subescalas o multi dimensiones y la forma que se distribuyen las respuestas entre las cinco opciones que van desde “totalmente de acuerdo” hasta “totalmente en desacuerdo” de uno a cinco. El MRBQ mide: “las creencias acerca del papel y la función del profesor, las creencias sobre el significado y la competencia en Matemáticas, las creencias sobre las Matemáticas como una actividad social, las creencias sobre las Matemáticas como un dominio de excelencia" (p.125). Es por esto, que el marco teórico se conforma en torno al sistema de creencias, el cual se considera conformado por tres componentes: creencias sobre la educación matemática, creencias sobre sí mismos y creencias sobre el contexto.

Las conclusiones a las cuales se llegó con el estudio fue que el cuestionario MRBQ se puede considerar un instrumento razonable para medir los cuatro factores que involucran diversas creencias. Se encontró que los sistemas de creencias en los estudiantes españoles y flamencos se caracterizan por dimensiones similares, sin embargo, se estructuran de diferente manera. Ambos grupos estudiados (flamencos y españoles) manifiestan una relación entre las creencias positivas sobre cómo perciben a su profesor y la confianza que sienten en ellos mismos. Sin embargo, en el estudio español se ha puesto de manifiesto que, "aunque los estudiantes perciben las dimensiones cognitiva, motivadora y afectiva que los profesores utilizan en su estilo de enseñanza en el aula, en algunos casos se ha detectado que el funcionamiento de su profesor y el estilo instruccional en el aula no tienen la consiguiente repercusión en sus creencias y en su comportamiento en clase." (Gómez-Chacón, 2007, pp. 138-139).

Para próximas investigaciones Gómez-Chacón (2007) sugiere la necesidad de considerar en relación con las creencias los contextos personales como lo indican investigaciones previas (Gómez-Chacón, et al., 2006), esto permitirá una mejor comprensión para detectar los orígenes de las creencias. Otro aspecto que señala como importante será un enfoque en la actuación del profesor, ya que, las creencias de los estudiantes son relevantes tanto como los conocimientos. Por lo que, es de gran aporte el estimular investigaciones que permitan una mayor comprensión y desarrollo de la influencia del sistema de creencias en el aprendizaje de la matemática, esto último, destaca el enfoque que se abordará en este trabajo de investigación, debido a que la orientación que tendremos es hacia las creencias.

Chávez et al. (2008) realizan un estudio en donde tratan de describir la influencia que tienen las creencias de los estudiantes con respecto a las matemáticas y su propia enseñanza. La investigación muestra una revisión teórica sobre artículos relacionados con el tema, observando una diversidad de contextos en los que se presentan las creencias de los estudiantes en el aprendizaje; ya que se especifica que en todos los sectores sociales hay una presencia del rechazo por las matemáticas que, se observa, va encaminado a los estereotipos formados y promovidos por la sociedad que contribuyen a formar una creencia particular sobre las matemáticas. La preocupación es, cuando comienza a reflejarse en el fracaso escolar debido a la predisposición a la disciplina.

Los resultados de las investigaciones consideradas en el estudio de Chávez et al. (2008) coinciden en que los estudiantes perciben las matemáticas como una disciplina útil, pero difícil. El proceso educativo puede establecer cambios en los componentes afectivos que permitan mejorar el aspecto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo que es importante la preparación pedagógica que propicie emociones y actitudes positivas que transformen las creencias que puedan afectar la adquisición de conocimientos matemáticos.

Gómez-Chacón et al. (2011) explican, a manera de introducción en su estudio sobre las creencias sobre uno mismo, la resolución de problemas matemáticos y las habilidades de autorregulación de 56 estudiantes de secundaria, la implicación que tienen los factores afectivos en los procesos de aprendizaje matemático, incluyendo la interacción de las variables cognitivas y metacognitivas que surgen en la resolución de problemas a los que se enfrentan los alumnos.

Mencionan que para que, los estudiantes puedan adquirir una disposición matemática que los haga más competentes en esta materia, se requiere que dominen cinco categorías de aptitud, las cuales, según autores como De Corte (2004) y Schoenfeld (2002) (citados por Gómez-Chacón et al., 2011) son: conocimiento matemático, métodos heurísticos, metaconocimiento, habilidades de autorregulación, creencias positivas sobre uno mismo en relación con el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas, y creencias sobre las matemáticas y el aprendizaje matemático. Estos autores afirman que gran parte de la dificultad de enseñar y aprender matemáticas surge como resultado de la falta de conexión del alumno con estas aptitudes.

En el estudio recién mencionado, la autora considera un marco unificado sobre las creencias de los estudiantes, obtenido de Op't Eynde, et al. (2002) el cual propone tres componentes básicos para la construcción del sistema de creencias: creencias sobre el contexto social, el yo y el objeto. Por esta razón toman en cuenta el cuestionario de creencias relacionado con matemáticas (MRBQ) incluyendo otras dimensiones como las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, las creencias de los estudiantes sobre el aprendizaje y la resolución de problemas, las creencias de los estudiantes sobre ellos mismos y una dimensión afectiva y conductual en cuanto a su compromiso con el aprendizaje matemático. El cuestionario que les ayudó a delimitar el sistema de creencias de los estudiantes fue el de CreeMat el cual es una escala tipo Likert propuesta y diseñada por Gómez-Chacón y García-Madruga (2009). Este cuestionario consta de 13 ítems que cubren diferentes subescalas y dimensiones: compromiso afectivo y conductual en el aprendizaje matemático; confianza y creencias sobre la competencia personal en las matemáticas; creencias matemáticas y creencias sobre la resolución de problemas matemáticos. La distribución de la puntuación del cuestionario se realizó en un formato de suma de puntuaciones, de modo que distribuyeron las respuestas entre cinco opciones que van de "totalmente de acuerdo" a "totalmente en desacuerdo". Los elementos se puntuaron del uno al cinco.

El estudio de Gómez-Chacón et al. (2011) analizó las aptitudes cognitivas de los estudiantes considerando la teoría de los procesos duales, la cual hace referencia a la presencia de dos tipos de razonamiento cuando las personas resuelven problemas, que llaman: “sistema 1” refiriéndose a aquellos procesos cognitivos que ocurren de manera espontánea y no requieren mucha atención del individuo, estos procesos son automáticos y no son reflexivos; mientras que el “sistema 2” hace referencia a los procesos que realizan una comprensión más profunda y organizan la implementación autorreguladora de estrategias para la solución del problema. Para tener acceso a dichos procesos en la cognición de los estudiantes de secundaria emplearon el Test de Reflexión Cognitiva (CRT) presentado por Frederick (2005), con una adaptación. Dicho Test ayudó a medir las aptitudes de los estudiantes para controlar su comportamiento de forma reflexiva que los lleva a inhibir la primera respuesta que se le viene a la mente y que generalmente representa una respuesta intuitiva.

Como parte de sus conclusiones, Gómez-Chacón et al. (2011) confirman la hipótesis que indica que las puntuaciones en la prueba de reflexión cognitiva, las creencias sobre matemáticas y las creencias sobre la propia competencia son predictivas del rendimiento matemático. Lo que significa que las personas con puntuaciones más altas en la reflexión cognitiva poseen creencias más positivas sobre sí mismos. El análisis en profundidad de los procesos cognitivos y los contextos del aprendizaje matemático debe tenerse en cuenta para mejorar la calidad del razonamiento de los estudiantes. Concluyen explicando la necesidad de más estudios experimentales para que sea posible tener una comprensión más profunda de los procesos de razonamiento que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas.

Erazo-Hurtado y Aldana-Bermúdez (2015) realizaron una investigación con el objetivo de recopilar información que presente una explicación concreta de la influencia de las creencias en los estudiantes. Exponen el sistema de creencias como aquel que refleja los aspectos de actitud, emociones y factores determinantes que favorecen o perjudican la comprensión de las matemáticas, ya que serán los que condicionarán el comportamiento y la capacidad de entender de los propios estudiantes; afirman que estas actitudes se presentarán en el aula de clases y se irán haciendo más sólidas, de modo que se conviertan en positivas o negativas; asimismo, mencionan la importancia de descubrir las creencias con las que cuentan y trabajar con ellas a fin de liberar las que sean limitativas para el conocimiento matemático.

Erazo-Hurtado y Aldana-Bermúdez (2015) hacen referencia a estudios como el de De Corte (2004) y Schoenfeld (1992), quienes han destacado aptitudes que el estudiante debe adquirir para tener una buena actitud frente a las matemáticas, como lo son: conocimiento, métodos adecuados de estudio, metacognición, autorregulación y sistema de creencias positivas ante las matemáticas y su aprendizaje. Describen la existencia de algunas creencias que se involucran con el desempeño en la materia de matemáticas, por lo que Schoenfeld (1992, citado por Erazo-Hurtado y Aldana-Bermúdez, 2015) propone una lista sobre creencias típicas de los estudiantes acerca de la naturaleza de las matemáticas, la cual menciona aspectos en relación con las creencias adquiridas a lo largo de su propia experiencia con las matemáticas.

Erazo-Hurtado y Aldana-Bermúdez (2015) concluyen la evidente importancia de tomar en cuenta los diferentes factores que disponen la influencia afectiva en los procesos educativos, como: creencias, actitudes, emociones y relaciones. Se menciona que para mejorar el desempeño del propio docente es primordial dar importancia a las creencias de los estudiantes, realizando investigaciones en un contexto que desmitifique las matemáticas y procurando mejor conexión entre conocimiento y métodos de estudio que fortalezcan las creencias positivas ante las matemáticas.

Vizcaino-Escobar et al. (2015) realizaron un estudio con el que buscaron validar una traducción y adaptación del cuestionario de creencias epistemológicas sobre la matemática, propuesto por Walker (2007, citado por Vizcaino, et al., 2015), en alumnos de secundaria básica, así como definir los factores que integran el constructo de creencias epistemológicas sobre la matemática. La revisión bibliográfica que presentan los autores resulta relevante para nuestra investigación ya que citan la importancia que se la ha dado durante los últimos tiempos a la problemática del aprendizaje de las matemáticas desde distintas variables de naturaleza cognitiva-motivacional. Destacan creencias que, según De Corte et al. (2002) y Llinares (1994) (ambos citados por Vizcaino et al., 2015), tienen estudiantes de todos los niveles educativos sobre la matemática. “Los alumnos ven a la matemática como la memorización de una variedad de algoritmos, creen que los problemas matemáticos deben ser resueltos rápidamente y que, si no pueden lograrlo entonces la resolución está fuera de sus posibilidades” (p. 303).

Citan hallazgos de Chávez et al. (2008), Gómez-Chacón (2000), Pehkonen y Törner (1996), Schoenfeld (1992) sobre cómo los alumnos que tienen creencias negativas sobre la matemática enfatizaron la memoria por sobre la comprensión, enfatizan que “cuando un alumno que dispone de un buen bagaje de conocimientos y estrategias y un buen control sobre lo que hace, la única cosa que permite explicar el fracaso es su sistema de creencias” (p. 303).

Para Vizcaino et al. (2015) las creencias epistemológicas son “el sistema de creencias que posee un individuo acerca de la naturaleza del conocimiento matemático y el aprendizaje” (p. 304) y éstas ofrecen una interpretación para comprender ideas y conductas de los alumnos que permiten estimar sus capacidades y necesidades y ayudan a elegir proyectos que se adapten a las estrategias de enseñanza.

Los autores aplicaron el cuestionario a 2023 estudiantes de secundaria y del cual se hace un análisis cuantitativo, se hizo evidente un 0.83 de coeficiente de fiabilidad, pudieron observar una “presencia simultánea de creencias sobre la matemática de tipo ingenuo y sofisticado (…) se encontró que los alumnos presentan menor desarrollo de sus creencias en cuanto a la estructura, origen (fuente) y aplicabilidad del conocimiento de la matemática, así como la velocidad de su adquisición” (p. 312). Otro resultado importante del estudio es el de la “elaboración de una escala definitiva que se puede utilizar no sólo para evaluar las creencias epistemológicas sobre la matemática, sino también como herramienta para la instrucción e investigación en educación matemática” (Vizcano et al., 2015, p. 313), que fue referente para los instrumentos que diseñamos para nuestra investigación.

1.2 El Problema del Aprendizaje de los Números Racionales

El presente subapartado tiene la intención de establecer la naturaleza del problema de aprendizaje que tienen los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas con números racionales. Se presenta el análisis de diferentes artículos de investigación que abordan el citado problema de aprendizaje desde lo que ha sido llamado por Ni y Zhou (2005, citado por Van Hoof, et al., 2013) el “sesgo del número natural” para referir el uso inadecuado del conocimiento que se tiene sobre números naturales para resolver problemas con números racionales. Interesa esta perspectiva del problema de aprendizaje con números racionales porque, como los artículos reportados enseguida explican, el dar una respuesta con cierta inmediatez a problemas que requieren de un análisis más profundo, explica algunos aspectos del problema de aprendizaje pero que según Gómez-Chacón et al. (2006), sería la falta de conexiones que los estudiantes tienen entre su conocimiento, la metacognición, la autorregulación y sus creencias sobre la matemática y su aprendizaje, lo que podría explicar los aspectos faltantes.

Van Hoof et al. (2013) muestran los resultados que dan respuesta a la incógnita de si para los alumnos de secundaria aún es un obstáculo lo que saben sobre números naturales al momento de introducirlos en tareas con números racionales. Según estos autores, algunas de las diferencias se ven reflejadas en la estructura de los números naturales la cual es diferente a la de los números racionales. Mientras que los números naturales, se caracterizan por la discreción (puede decir qué número sigue después que otro), para los números racionales esto no es posible (siempre hay una cantidad infinita de números racionales entre otros dos cualesquiera) (Desmet et al., 2009, citado por Van Hoof et al., 2013). Esta diferencia va de la mano de muchos conceptos erróneos.

En el estudio de Van Hoof et al. (2013) se compara el análisis de las respuestas dadas de los alumnos desde la teoría de los procesos duales (la cual diferencia ampliamente la utilización del razonamiento intuitivo y analítico en la resolución de problemas), argumentando que los procesos de pensamiento intuitivos a menudo conducen a la respuesta correcta, pero suele ser errónea en situaciones donde se necesitan procesos de pensamiento más analíticos. En estos casos hay dos posibilidades: pueden ocurrir procesos de pensamiento intuitivo incorrectos sin detección de conflictos (ausencia de un proceso metacognitivo) entre la respuesta intuitiva y la respuesta correcta, y se dará, por tanto, una respuesta incorrecta. Y la otra posibilidad es que haya una detección de conflictos (presencia de un proceso de metacognición), de forma tal que ocurre la intervención del sistema de procesamiento analítico, evaluando la respuesta intuitiva, inhibiéndola y generando una respuesta alternativa correcta. El estudio se basó en la medición de precisión y tiempo en que los estudiantes reaccionaban a tareas de comparación de fracciones, el experimento constó de la aplicación de 190 ítems, cada ítem contenía dos fracciones que se mostraban simultáneamente en una pantalla de computadora (usando el paquete de software E-Prime).

Se concluyó que los números racionales son un obstáculo importante para muchos niños, coincidiendo con estudios previos (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi et al., 2012, citados por Van Hoof et al., 2013). El obstáculo se atribuye sobre todo a la interferencia de su conocimiento sobre los números naturales, lo que los lleva a dar respuestas erróneas (Ni & Zhou 2005, citados por Van Hoof et al., 2013). Según estos autores, investigaciones anteriores mostraron que el sesgo del número natural en la comparación de fracciones no sólo ocurre con niños en edad escolar primaria (Meert et al., 2010a, citados por Van Hoof et al., 2013), sino también en adultos (Meert et al., 2010b; Vamvakoussi et al., 2012, citados por Van Hoof et al., 2013). Había una brecha en la literatura sobre lo que sucede en los años intermedios. Lo que le da un enfoque principal al averiguar si el sesgo del número natural tiene un carácter intuitivo, aplicando un análisis del tiempo de reacción.

González-Forte et al. (2019a) reportan los resultados de una investigación de corte cualitativo en la que analizan los razonamientos que realizan los alumnos de primaria y secundaria cuando resuelven problemas sobre la magnitud de las fracciones. Dichos autores, mencionan que, en las investigaciones previas realizadas con base en fracciones, por lo general se tratan las cuestiones de cálculo, en éstos por lo regular se encuentran ítems que comparan los números decimales y las fracciones que son congruentes o incongruentes con las comparaciones de números naturales. Los congruentes se refieren a aquellos ítems que pueden responderse de manera correcta con el conocimiento que se tiene sobre los números naturales, mientras que los incongruentes son aquellos en los que el uso del conocimiento sobre los números naturales lleva a una respuesta incorrecta.

Según estos autores, una de las posibles causas de las deficiencias presentadas en la utilización incorrecta de las operaciones en números racionales se debe a la aplicación de las características de los números naturales; sin embargo, añaden que existen resultados que no han ido en la misma dirección en cuanto a las hipótesis esperadas, ya que existen resultados de estudios en los que se reporta mayor éxito en los ítems congruentes que incongruentes, y, por otro lado, hay resultados de estudios con mayor éxito en los ítems incongruentes que en los congruentes. Esta situación pone de manifiesto que el uso de las características de los números naturales probablemente no sea la única razón que pueda explicar las dificultades que presentan los estudiantes con las fracciones, por lo que se resalta la necesidad de tener en cuenta otros posibles factores.

Una explicación posible, que consideran González-Forte et al. (2019a), es el uso de un razonamiento que se conoce como “sesgo inverso" (*reverse bias*) el cual se basa en la comparación de los denominadores, considerando como fracción mayor aquella con el denominador menor” (p. 364). Un ejemplo que podría explicar este razonamiento sería el presentar 3/6 y 2/8 y que el alumno argumente que es mayor 2/8 por el hecho de que 8 es mayor que 6. Otra explicación que mencionan se basa en la dada por Pearn y Stephens (2004, citado por González-Forte et al., 2019a) quienes hacen referencia al empleo del pensamiento de diferencias (*gap thinking*) la cual se basa en comparar la diferencia entre el numerador y denominador en las dos fracciones presentadas, como ejemplo se puede dar 3/4 es mayor que 8/10, esto porque de 3 a 4 hay una diferencia de uno y de 8 a 10 hay una diferencia de dos.

Además de la aplicación de un cuestionario de opción múltiple de 31 ítems que aplicaron a 1262 estudiantes de primaria y secundaria, González-Forte et al. (2019a) realizaron una entrevista para identificar la confianza de los estudiantes ante la resolución de los problemas, las cuales fueron realizadas de manera individual y grabadas en video, sin tiempo límite.

En los resultados que reportan destaca una clasificación de los estudiantes en:

- Estudiantes que respondieron todos (o casi todos) correctamente- Perfil correcto.
- Estudiantes que resolvieron incorrectamente todos los ítems incongruentes y correctamente los congruentes- Estudiantes completamente sesgados por el número natural (Full NNB).
- Estudiantes que tuvieron dificultades en los ítems congruentes e incongruentes con números decimales- estudiantes sesgados por el número natural en ítems de fracciones (Fraction NNB).
- Estudiantes que tuvieron dificultades sólo en los ítems en los que el pensamiento en diferencias conducía a la respuesta incorrecta (GT).
- Estudiantes que resolvieron de manera incorrecta los ítems congruentes con fracciones y resolvieron correctamente los incongruentes, y con números decimales resolvieron correctamente los ítems congruentes e incongruentes (RB –sesgo inverso).
- Estudiantes que resolvieron los ítems sin ningún patrón identificable (Resto).

El análisis de los resultados de la investigación permite validar los resultados ofrecidos en el estudio cuantitativo previo, ya que los estudiantes entrevistados de cada perfil usaron razonamientos en las entrevistas consistentes con las respuestas que dieron el cuestionario, por lo que, en concreto, apoyan la existencia de tres formas de utilizar el razonamiento sobre la magnitud de la fracción en operaciones de comparación de fracciones, que resultan incorrectas: razonamiento basado en el uso del conocimiento del número natural (sesgo del número natural), razonamiento basado en la diferencia entre numerador (pensamiento en diferencias) y razonamiento basado en el tamaño del denominador (sesgo inverso).

González-Forte et al. (2019b) realizan una investigación orientada a analizar las dificultades que tienen los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven operaciones con los números racionales que se deben al uso inadecuado de las propiedades de los números naturales en el conjunto de los números racionales. El objetivo fue examinar los niveles de éxito y los razonamientos de los estudiantes, desde que se les da la introducción del tema, hasta ver la resolución de multiplicaciones de un número natural por un racional. Diversos autores, como Behr, et al. (1983) y Kieren (1992) (citados por González-Forte et al., 2019b), mencionan que el aprendizaje del número racional es esencial para el aprendizaje de otros contenidos matemáticos. Fischbein et al. (1985), Resnick et al. (1989) y Resnick, et al. (2019) (citados por González-Forte et al., 2019b) reportan algunas causas que se le adjudican a las dificultades que presentan los estudiantes, las cuales se deben a la aplicación de las propiedades de los números naturales a los números racionales, misma que resulta inapropiada. González-Forte et al. (2019b) explica que es un tema que ha sido estudiado durante un tiempo por diversos autores (Vamvakoussi et al., 2012; Van Dooren et al., 2015, citados por González, 2019b), que le han dado el nombre de "*natural number bias*" (sesgo del número natural), que indica que los conocimientos que tienen los estudiantes sobre los números naturales facilita la resolución de problemas con números racionales cuando estos conocimientos son compatibles, sin embargo, dificulta todas aquellas tareas en las que estos conocimientos no lo son.

González-Forte et al. (2019b) mencionan que las diferencias entre comparar números naturales y fracciones radica en que en el caso de los números racionales es necesaria la comprensión entre dos relaciones de orden, pero los estudiantes a menudo tienen dificultades interpretando el símbolo a/b, considerándolo como dos números naturales independientes, separados por una barra (Mack, 1995; Stafylidou & Vosniadou, 2004, citados por González-Forte et al., 2019b). Esto los lleva a concluir que una fracción es mayor que otra cuando su numerador, su denominador, o ambos en una fracción son mayores que en la otra, por ejemplo 23/50 sería mayor que 14/20 porque 23 y 50 son mayores que 14 y 20. También se encuentra una dificultad importante cuando se comparan números racionales en su forma decimal, ya que los estudiantes relacionan esta comparación con la cantidad de dígitos en la representación decimal, ya que no se relaciona con su magnitud, pues los estudiantes basan su razonamiento en que el mayor número de dígitos es el más grande, por ejemplo el creer que 2.345 será mayor que 2.8 por la razón de que 345 es mayor que 8, o que 4.56 y 4.560 son números distintos.

> "Por otra parte, el conjunto de números racionales se caracteriza por la densidad, que no tiene el conjunto de números naturales (conjunto discreto)" (Post et al., 1993; Streefland, 1991; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, citados en González-Forte et al., 2019b, p.4). Es decir, hay un número infinito de números entre dos números racionales cualquiera (Hartnett & Gelman, 1998 citado por González-Forte et al., 2019b). Es decir, la mayoría de los alumnos creen que entre 7/9 y 8/9 no hay ningún número, o que entre 3/5 y 1/5 únicamente está el 2/5. Lo mismo ocurre con números decimales, por ejemplo, los estudiantes pueden llegar a creer que entre 4.2 y 4.3 no es posible hallar otros números, o que hay un número finito de números decimales entre ambos (González-Forte et al., 2019b).

Se mencionan algunas de las dificultades de los estudiantes de primaria y secundaria que presentan con los números racionales, las cuales se pueden explicar por el uso del conocimiento de los números naturales que no se adecúa a los racionales. Uno de los principales es con las sumas y restas de fracciones, por ejemplo, al sumar o restar fracciones se suelen hacer las sumas o restas entre numeradores por una parte y denominadores por otra parte. Un ejemplo sería 15/20 + 4/6 dan como resultado 19/26 o en la resta 2/5-1/3 dan como resultado 1/2. En el caso de las multiplicaciones con fracciones, se presenta cuando se multiplican fracciones con el mismo denominador, el error surge cuando el alumno sólo considera el numerador, por ejemplo, 3/5 x 2/5 dan como resultado 6/5 (Lortie-Forgues et al., 2015; Siegler & Pyke, 2013; Siegler et al., 2011 citados en González-Forte et al., 2019b).

Por otra parte, González-Forte et al., (2019b) argumentan que en los números decimales los procedimientos para las operaciones son muy similares a los números naturales, por lo que sólo se debe tener en cuenta la posición del punto decimal. Se ha encontrado en la literatura que los estudiantes tienen dificultad cuando los números no tienen la misma cantidad de dígitos después del punto, por ejemplo, 0.12+0.3= 0.15. En relación con la multiplicación y la división, González-Forte et al. (2019b) citan a Fischbein et al. (1985) quienes hablan sobre la identificación de la influencia de modelos derivados de las operaciones con los números naturales, en el caso de la multiplicación, basándose en la idea de sumas repetidas, conduce a los alumnos al modelo implícito de que el resultado de la multiplicación ha de ser siempre un número mayor que los factores. Mientras que, para la división, basada en la idea de reparto, el modelo implícito es que el cociente debe ser menor que el dividendo.

La investigación citada se realizó en Alicante, España, fue de tipo transversal, en 438 estudiantes desde 5to de primaria hasta 4to de secundaria, con un rango de edad entre 10 a 16 años, con un nivel socioeconómico de clase media y alta. Su finalidad fue obtener evidencias cualitativas que evidencien hipótesis obtenidas de estudios cuantitativos previos. El instrumento de recogida de datos fue un cuestionario formado por 4 ítems de multiplicación de un número natural por un racional. Los ítems fueron diseñados teniendo en cuenta dos variables: el tipo de representación (fracción o número decimal) y la congruencia con el conocimiento sobre los números naturales (ítem congruente o incongruente). Los resultados mostraron porcentajes de éxito menores en problemas donde el conocimiento de los números naturales no es compatible para resolverlas. El análisis de los razonamientos de los estudiantes en estas tareas hace evidente la existencia del fenómeno” *natural number bias*” (sesgo del número natural) en educación primaria y secundaria. Sus resultados amplían y apoyan los resultados obtenidos en previas investigaciones cuantitativas.

Este estudio da muestra de las investigaciones que se han realizado con anterioridad en el área de los números racionales, dejando en claro las evidentes dificultades que presentan los alumnos en los diferentes grados académicos y que surgen en cualquier tipo de operación, en este caso el centro fue la multiplicación, sin embargo, su revisión de antecedentes mencionó los errores que se tienen en suma, restas y divisiones de números racionales por querer aplicar las concepciones que se tienen con respecto a los números naturales. Por lo que, queda un amplio camino por recorrer y estudiar en relación con éstos.

Todos estos artículos, permiten observar las dificultades que los alumnos presentan en relación a los números racionales y permiten entender uno de los enfoques que se tomó en cuenta para este trabajo, el cual es el de el sesgo del número natural, pues identifica que los alumnos buscan que los racionales sean aplicados igual que los números enteros en los problemas que se les presentan.

1.3 La teoría de los Procesos Duales en la Matemática Educativa

Crespo (2008) explica que el conocimiento matemático se construye y se sustenta por dos modos de comprensión y expresión, los cuales son la intuición y la razón. A pesar de conocer sus diferencias, la autora menciona la manera en que se complementan y son indispensables entre sí. La intuición entendida como aquella captación de conceptos que permite la comprensión de lo que nos rodea, surge desde la niñez y va construyéndose para definir un punto de partida en la investigación y el aprendizaje; en relación con matemáticas, la intuición suele saltar los escalones del razonamiento, conduciendo a caminos rápidos y prácticos, los que en ocasiones pueden ser erróneos.

Según Crespo (2008), la evidencia de la intuición suele ser subjetiva, ya que depende de los hábitos de cada persona y no siempre es positiva pero tampoco siempre es negativa, ésta se combina con la experiencia, ofrece representaciones globales compactas de datos, ayuda a inferir de información incompleta, pero confiere a la actividad mental la posibilidad de continuar. Según esta autora, en el ámbito estudiantil ayuda a crear una percepción respecto a un tema dado y explica que los matemáticos sostienen el fundamental rol de la intuición en el avance del razonamiento en esta ciencia, enfatizando que la validez de las afirmaciones matemáticas se sustenta en la evidencia y la propia intuición. El progreso de las ciencias siempre se ha apoyado en justificar y mejorar, así como eliminar los elementos intuitivos que figuran en el desarrollo de las teorías que ya están en formalización, debido a que ya no deben existir dudas o cuestiones que queden al aire y que no permitan el progreso.

Muchas de las afirmaciones de que la intuición necesita de la razón se ven reflejadas en las aulas de clases, donde se da respuesta a problemas de manera incorrecta que sugieren que el alumno hizo una utilización meramente de su poder intuitivo, los mismos que hacen reflexionar a la corroboración de que algunos procesos intuitivos tienden a producir un conflicto y confusión en el alumno que los hacen pensar que las matemáticas son difíciles creando así un desinterés, que en el futuro se convierte obstáculo para la enseñanza.

Crespo (2008) menciona que la intuición, por sí sola, no dará certeza para comprobar afirmaciones matemáticas. Aunque la razón actúa controlando la intuición espontánea, es importante saber que pueden y deben trabajar en conjunto y se debe comprender que la intuición puede distorsionar representaciones y conducir a errores. Se pueden discutir razonamientos, pero no intuiciones, compartirse resultados, pero no evidencias. Por tanto, la intuición en matemática combina la intuición sensible y la razón evidenciada a través de la intuición intelectual, y participa de ambas. La fertilidad de la intuición va a depender de su refinamiento y relación con la razón y la propia experiencia.

Attridge e Inglis (2014) reportan los resultados de un estudio en el que buscan aportar elementos que puedan responder a las preguntas ¿cómo un estudiante decide cuándo emplear el razonamiento Tipo 2 por encima del razonamiento Tipo 1? y ¿cómo podemos ayudar a que un estudiante use más el razonamiento Tipo 2 que el Tipo 1 cuando resuelve problemas de matemáticas? Estos autores presentan varios ejemplos de investigaciones en las que ha sido demostrado que tanto estudiantes jóvenes como adultos resuelven problemas empleando el razonamiento Tipo 1, dado que éste es más rápido y no requiere de un trabajo de memoria. Explican también que hay autores como Thompson (2009) y Stanovich (2009) (citados por Attridge e Inglis en 2014) que realizaron investigaciones en los que proponen a los estudiantes emplear procesos de metacognición para que determinen y describan en qué tipo de problemas y en qué momentos durante la solución de éstos, identifican la presencia de un tipo u otro de razonamiento. En otras investigaciones, según Attridge e Inglis (2014), se les ha indicado explícitamente a los estudiantes cómo los problemas propuestos pueden llevarlos a dar respuestas incorrectas, pero explican que esto sólo ha provocado que los estudiantes centren la atención únicamente en aquello que se les indica al momento de resolver los problemas.

El artículo de Attridge e Inglis (2014), reporta resultados de un estudio en el que participaron 61 estudiantes de pregrado de segundo año de cursos de ingeniería en la Universidad de Loughborough, Inglaterra. Fueron 61 estudiantes universitarios y se les dieron 10 minutos para que resolvieran problemas de las llamadas Matrices Progresivas Avanzadas de Raven (RAPM por sus siglas en inglés), que fueron elegidos aleatoriamente por la computadora frente a la cual tecleaban la opción correcta o incorrecta. También se tenía que resolver la Prueba de reflexión cognitiva (CRT, por sus siglas en inglés) que se emplea para indagar la presencia del razonamiento Tipo 2 porque las tareas que se pide que el estudiante responda, admiten respuestas intuitivas pero incorrectas, y las respuestas correctas son bastante simples de calcular si el razonamiento Tipo 2 inhibe la respuesta intuitiva. Ellos elegían cual contestar primero, 32 de ellos resolvieron primero la CRT y luego tuvieron 10 minutos para resolver problemas de la RAPM.

Los resultados mostraron que bastaba resolver un problema de la RAPM para que los estudiantes obtuvieran más respuestas correctas en las tareas propuestas en la CRT, es decir, aunque no hubo diferencia significativa entre aquellos que resolvieron más de un problema de la RAPM antes de responder la CRT, sí existió diferencia con aquellos que no resolvieron ninguna de las tareas propuestas en la RAPM y la cantidad de respuestas intuitivas incorrectas dadas en la CRT. Según estos autores, sus hallazgos sugieren que es posible manipular la probabilidad de comprometer el razonamiento tipo 2, aun cuando consideran que la intervención fue intensiva ya que 10 minutos podrían considerarse mucho tiempo de presión en emplear el razonamiento tipo 2 para inclinar a los estudiantes a sobreponer este tipo de razonamiento en problemas que admiten una respuesta intuitiva, aunque incorrecta.

Este artículo resulta importante para esta investigación dado que respalda la presencia de dos tipos de razonamiento cuando los estudiantes resuelven problemas de matemáticas, y demuestra que cuando los estudiantes han resuelto problemas que exigen la aplicación de un razonamiento analítico antes que resolver un problema en el que basta la aplicación del razonamiento intuitivo, resulta provechoso para promover la aplicación del razonamiento tipo 2.

A modo de síntesis, podemos comprenden que los tipos de razonamiento y su aplicación implican un resultado positivo o negativo en cuanto a la resolución de los problemas en matemáticas, nuestro propósito fue el de identificar la relación de esta aplicación con las creencias que los estudiantes presentan, específicamente, en el tema de los números racionales.

2. Planteamiento Del Problema

El siguiente apartado, tiene como objetivo, presentar de dónde surge la idea del estudio que se realizó en esta investigación, el cual parte de una motivación inicial por el dominio afectivo en la matemática educativa y sus implicaciones en la resolución de problemas matemáticos y se complementa con los estudios existentes que mencionan la teoría del doble proceso en matemáticas. Lo que permite llegar a una pregunta de investigación, así como hipótesis y objetivos de la misma.

2.1 Problemática

En este apartado exponemos algunas ideas que dan muestra del abordaje que algunos autores (Fabian, 2013, López, et al., 2012, Crespo, 2008, López, 2004, Attridge & Inglis, 2015, Gómez-Chacón, et al., 2014, González-Forte et al., 2019) han hecho sobre las dificultades que tienen los estudiantes de nivel secundaria cuando resuelven problemas de matemáticas, las destrezas que deben adquirir en la clase de matemáticas que les permitirán la solución de problemas, la presencia de dos tipos de razonamiento cuando se resuelven problemas matemáticos propuestos por las teorías de doble proceso y los aspectos del dominio afectivo que influyen en la resolución de problemas.

Con esto respaldamos la problemática que identificamos en estudiantes de nivel secundaria quienes han desarrollado creencias negativas hacia las matemáticas que influyen en la forma en que abordan los problemas matemáticos.

Fabián (2013) explica que las capacidades específicas que son útiles en la resolución de problemas de matemáticas son: analizar el problema, identificar y plantear estrategias; aplicar algoritmos y revisar el proceso de resolución, sin embargo, aunque estas se encuentran planteadas en el currículo, rara vez se logran desarrollar en el aula.

De acuerdo con López et al. (2012) "el pensamiento estratégico, entendido como la planeación organizada de tareas con miras al logro de una meta, es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas (Pape & Wang, 2003, citados en López, et al., 2012)" (p. 41), pero no suficiente. La metacognición, una dimensión motivacional, es el otro aspecto directamente involucrado. Según estos autores es la reflexión consciente ejercida sobre el proceso de solución de un problema, la que conduce a un aprendizaje significativo y la capacidad de análisis la que se asocia con un razonamiento matemático eficaz. Los resultados de su estudio revelaron la existencia de una relación estadística entre el logro matemático y la autorregulación de aprendizaje que es considerada como la articuladora de la dimensión cognitiva y motivacional de la construcción del conocimiento matemático.

Ya escribimos en párrafos anteriores que Crespo (2008) explica que el conocimiento matemático se construye y se sustenta por dos modos de comprensión y expresión, los cuales son la intuición y la razón. Que la intuición, como modo de pensamiento depende de las habilidades que las personas están habituadas y que se combina con experiencia que a su vez ofrece representaciones. Si consideramos que es en la experiencia en donde, a través del tiempo, se conforman las creencias, estas influyen de manera directa en la intuición de las personas.

López (2006) expone que la intuición ha sido investigada en relación con diversas temáticas como la resolución de problemas, imágenes, modelos, creencias y estadios de desarrollo de la inteligencia. Que comúnmente se asocia al sentido común y crea la apariencia de certeza. Que el proceso de representación intuitiva puede producir "una representación distorsionada de la realidad original y que las predicciones pueden ser total o parcialmente incorrectas, por eso la intuición se considera como una fuente potencial de error" (p. 29). Según esta autora existen afirmaciones cuya verdad puede ser admitida intuitivamente "sin sentir necesidad alguna de una prueba formal o empírica" (p. 30) y pueden ejercer "un efecto coercitivo sobre las vías de razonamiento" (p. 31), son difícilmente erradicadas y se opone al razonamiento analítico. Aun cuando la intuición tiene a la experiencia como un factor fundamental en su formación y es "una guía invaluable para la construcción de conocimiento" (p. 35), en matemáticas, las analogías intuitivas, por ejemplo, pueden ser benéficas "si después de ser aceptadas pueden ser justificadas lógicamente" (p. 35).

De acuerdo con Attridge & Inglis (2015) las matemáticas generalmente requieren de la inhibición de la intuición para abrir la posibilidad de la aplicación de nuevas habilidades, conocimientos y fórmulas que requieren un pensamiento más analítico. Según estos autores las teorías del doble proceso, que se han desarrollado en áreas de la psicología cognitiva y han sido aplicadas recientemente al pensamiento matemático, proponen que existen al menos dos tipos de pensamiento que se ponen en juego cuando se resuelven problemas, particularmente en matemáticas, estos dos tipos de pensamiento pueden entrar en conflicto y sobreponerse uno al otro dando respuestas incorrectas a problemas específicos.

Según Gómez-Chacón et al. (2014), autores como De Corte (2004) y Schoenfeld (1992 y 2005) han demostrado que la competencia matemática depende de factores como: conocimiento matemático, métodos heurísticos, metaconocimiento, habilidades de autorregulación, creencias positivas sobre uno mismo en relación con el aprendizaje matemático y resolución de problemas, y creencias sobre las matemáticas y su aprendizaje. En su estudio, en el que buscan profundizar lo que hasta ahora se conoce sobre las barreras que impone el sistema de creencias a la reflexión cognitiva y el razonamiento, y las variables que se consideran clave en la interacción entre el llamado razonamiento tipo 1 y razonamiento tipo 2 propuestos por las teorías del doble proceso, explican que Stanovich y West (2000, citado por Gómez-Chacón et al., 2014) sostienen que el razonamiento tipo 1 se ha caracterizado como inconsciente, asociativo, rápido y no vinculado a recursos individuales como la memoria y que además permite a las personas acceder rápidamente a respuestas que a menudo suelen ser válidas pero también lleva a cometer errores. El razonamiento tipo 2, en cambio, es considerado consciente, lento, controlado y vinculado a los recursos de memoria de un individuo. La implementación del razonamiento tipo 2 anula al tipo 1 y son este tipo de razonamientos los que ponen en juego los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas.

Attridge & Inglis (2014) explican que hay ejemplos en los que el conflicto entre el razonamiento o sistema tipo 1 y tipo 2 ha sido documentado, ya citamos en los antecedentes el llamado el sesgo del número natural, el sesgo inverso y el pensamiento en diferencias.

González-Forte et al. (2019a) investigan el sesgo del número natural cuando estudiantes de primaria y secundaria realizan tareas de multiplicación de un número natural por un número racional en donde se encuentran presentes modelos implícitos como que:

> "El resultado de la multiplicación debe ser siempre un número mayor que los factores (Fischbein et al., 1985). Mientras que, para la división, basada en la idea de reparto, el modelo implícito es que el cociente debe ser menor que el dividendo" (Fischbein et al., 1985; Greer, 1987 citados por Gonález-Forte, et al, 2019a). (p. 36)

Estos modelos generan contradicciones cuando se usan con los números racionales.

Gómez-Chacón et al. (2014), citan constructos dados por Schoenfeld (1987) que según los autores ilustran la relevancia que las creencias pueden tener en la forma en que selecciona una dirección o forma particular para resolver un problema. Conceptualizan la metacognición que se refiere al conocimiento sobre los propios procesos de pensamiento, la Autoconciencia o autorregulación que habla de qué tan bien se hace un seguimiento de lo que se está haciendo cuando, por ejemplo, se resuelven problemas y las Creencias que define como las ideas que tiene un individuo sobre la matemática y que influyen en la forma en la que hace matemáticas.

En este orden de ideas es que consideramos importante profundizar, cómo es que el sistema de creencias de los estudiantes de secundaria influye en la forma en la que aplican el sistema de razonamiento tipo 1 o el tipo 2 cuando resuelven problemas sobre números racionales, a través de un estudio en el que describamos cualitativamente dicha influencia.

2.2 Pregunta de Investigación

¿Cómo es la influencia del sistema de creencias de los estudiantes de secundaria en la determinación implícita de emplear un sistema de razonamiento intuitivo (S1) por encima del sistema de razonamiento analítico-reflexivo (S2) cuando resuelven problemas de matemáticas con números racionales?

2.3 Hipótesis

La teoría de doble proceso plantea la existencia de al menos dos sistemas de razonamiento cuando se resuelven problemas, el sistema de razonamiento tipo 1 que se caracteriza por aplicar un método rápido de respuesta que no involucra un trabajo de memoria, el cual se basa en la intuición y el sistema de razonamiento tipo 2 que se caracteriza por ser un proceso de razonamiento más a fondo que implica un ejercicio de análisis y memoria. Gómez-Chacón, et al., (2014) menciona, que en la interacción del sistema de razonamiento 1 y 2 cuando se resuelven problemas de matemáticas están presentes las creencias de los estudiantes sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje y las creencias de autoeficacia, además de la reflexión cognitiva, el trabajo de memoria y el razonamiento, pero no explica ¿cómo es que las creencias influyen en esta interacción? En la investigación que se presenta se pretende describir cualitativamente esta interacción y determinar la influencia positiva o negativa que las creencias tienen en la solución de problemas; si las creencias del sistema son positivas, actúan sobre nuestras capacidades aumentándolas; si son negativas, por lo general giran alrededor del “no puedo...” y actúan limitando estas capacidades (Gómez-Chacón, 2003) Por lo que las creencias positivas orientarían a un razonamiento analítico mientras que las creencias negativas a un razonamiento intuitivo.

2.4 Objetivo General

Describir la influencia del sistema de creencias de los estudiantes de la secundaria en la determinación que toman al resolver problemas de matemáticas de números racionales sobreponiendo el sistema de razonamiento tipo 1 o pensamiento intuitivo S1 al sistema de razonamiento tipo 2 o pensamiento analítico S2.

2.4.1 Objetivos Específicos

1. Identificar el sistema de creencias de un grupo de estudiantes del nivel secundaria.
2. Identificar como el sistema de creencias se involucra en la resolución de problemas de matemáticas de números racionales.
3. Identificar la presencia de la aplicación del sistema de razonamiento tipo 1 y tipo 2 cuando los estudiantes de secundaria resuelven problemas de números racionales.
4. Identificar las interacciones entre el sistema de creencias y la determinación de los estudiantes de aplicar alguno de los tipos de razonamiento.

3. Justificación

En Sánchez y Quintana (2016) se expresa que el rendimiento académico es uno de los aspectos que guarda relación con el interés por el curso de matemáticas, la atribución de resultados al propio esfuerzo y la esperanza de obtener un resultado determinado, así como la Influencia de los exámenes en la nota y la capacidad del profesor. Estas características, además, van a influir directamente en las creencias.

Erazo-Hurtado y Aldana-Bermúdez (2015) mencionan que los estudiantes, en particular, poseen creencias, emociones y actitudes frente a las matemáticas y a la forma como comúnmente se presenta y suele evaluarse, lo que puede ser tanto positivo como negativo, los aspectos que dificultarán el aprendizaje serán aquellos resultados de creencias negativas, las cuales son producto de la experiencia vivida en la escuela e influenciada por el contexto social en el que se desenvuelven los estudiantes.

En consecuencia, las creencias crean resultados; si son positivas, actúan sobre nuestras capacidades aumentándolas; si son limitativas, por lo general giran alrededor del "no puedo…". En muchos casos, es posible cambiarlas y desarrollarlas. Cambiar las creencias permite variar la conducta para que esta se cambie más rápidamente si se dispone de las capacidades o estrategias para realizar una tarea (Gómez-Chacón, 2003). Razón que deja en claro la importancia de conocer las creencias que tienen los alumnos al resolver problemas de matemáticas, para identificar las negativas y modificar de manera directa, permitiendo un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.1 Alcance Teórico

Una intervención basada en la teoría de doble proceso podría mejorar el pensamiento matemático de los estudiantes dejando a favor la aplicación de un pensamiento reflexivo y analítico (S2) ante poniéndolo sobre la intuición (S1) (Evans & Stanovich, 2013). Lo que se espera en este trabajo, es caracterizar cómo el sistema de creencias está presente en los tipos de razonamiento empleados a la hora de resolver los problemas con números racionales, con la finalidad de lograr entender la intervención de uno de los descriptores básicos del dominio afectivo en el desarrollo o ejercicio de la cognición.

Hay varias áreas de las matemáticas, como álgebra (presente en el nivel secundaria), donde el pensamiento S2 es esencial, pero donde la intuición puede interferir de manera negativa, dejando dar una respuesta práctica y rápida a un problema que requiere una solución más elaborada (Vamvakoussi et al., 2012). Es por esto, que el tener en cuenta la aplicación de los procesamientos y la interacción de las creencias con éstos mismos, dejarán en claro las necesidades de intervención en los estudiantes, lo que permitirá abrir el paso a investigaciones sobre la generación de creencias en favorables para la disposición optima del razonamiento matemático la resolución de problemas.

4. Marco De Referencia

Este capítulo tiene la finalidad de establecer los constructos teóricos que juegan un papel importante en el alcance del objetivo de la presente investigación.

4.1 El Dominio Afectivo

Según Gil, et al. (2005) durante mucho tiempo las investigaciones sobre los aspectos afectivos presentes en la enseñanza aprendizaje de la matemática fueron escasas. Gómez-Chacón (2000) explica que fue McLeod en 1989 quien establece la que hasta ahora se conoce como concepción clásica del dominio afectivo considerándolo como una amplia gama de creencias, sentimientos y estados de ánimo que generalmente se considera que van más allá del dominio de la cognición (McLeod, 1992 citado por Gómez-Chacón, 2000).

Una de las definiciones más comúnmente utilizada es la propuesta por Krathwohl, et al. (1973, citados por Gil, et al., 2005), en donde mencionan que el dominio afectivo incluye actitudes, creencias, apreciaciones, gustos y preferencias, emociones, sentimientos y valores. Por otra parte, según Gil, et al. (2005) los autores, Aiken (1970); Kulm (1980) y Reyes (1984), utilizaron también esta definición, aunque se centraron más en el estudio de las actitudes que en analizar y describir los componentes del dominio afectivo.

En este sentido, Gómez-Chacón (2000) afirma, que la presencia constante de fracasos en el aprendizaje de las matemáticas, en todas las edades y niveles educativos, puede explicarse, en gran medida, por el sentido afectivo involucrado, refiriéndose, específicamente, a la aparición de actitudes negativas debidas a factores personales y ambientales, cuya detección podría funcionar como un primer paso para minimizar su impacto negativo con la afectividad.

Gil, et al. (2005) afirma que las creencias se consideran uno de los descriptores básicos del dominio afectivo, mencionando que diversos autores como Gómez-Chacón (1997); McLeod (1989); Goldin (1998), entre otros, coinciden en que en la enseñanza y aprendizaje de la matemática hay dos categorías importantes de las creencias: creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje y creencias sobre uno mismo como aprendiz de la matemática, usualmente llamadas creencias de autoeficacia y autoconcepto. Chávez, et al., (2008) explican que hay evidencia de que los estudiantes se forman sus creencias sobre la matemática gracias a las experiencias que se platican en los entornos familiares y de amigos, predisponiéndolos a que estas son una materia difícil y en la que no cualquiera tiene éxito. Bandura (1994) (Citado por Caballero-Carrasco, et al., 2014) explica que las creencias de autoeficacia contribuyen a la motivación determinando la metas que las personas establecen para sí mismos, la cantidad de esfuerzo que invierten en alcanzarlas, el tiempo que perseveran en él ante las dificultades y la capacidad de resistencia ante las fallas.

4.2 Creencias y Sistema de Creencias

Para Chávez, et al. (2008) una creencia es “una actitud adquirida por el individuo, que se va a determinar por situaciones aprendidas en un pasado y generarán respuesta sin tener conciencia de ello”. Para Gómez-Chacón, et al. (2006) las creencias no aparecen de manera aislada, no son independientes y todas se interrelacionan, razón por la cual suelen considerarse como un sistema; el sistema de creencias.

De acuerdo con Op´t Eynde, et al. (2002) el sistema de creencias está constituido por creencias sobre la educación matemática, creencias sobre sí mismos, y creencias sobre el contexto, los mismos autores, establecen la siguiente categorización y características de las creencias:

Creencias sobre la educación matemática, que incluye:
1) creencias de los estudiantes sobre las matemáticas,
2) creencias sobre el aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos,
3) creencias sobre la enseñanza de la matemática.

McLeod (1989) Habla sobre la existencia de por lo menos dos categorías principales de creencias que pueden tener una influencia en las matemáticas, las que desarrollan los estudiantes, sobre las matemáticas como disciplina. Estas creencias generalmente implican muy poco efecto, pero forman una parte importante del contexto en el que se desarrollan.

Una segunda categoría de creencias trata de las creencias de los estudiantes (y de los profesores) sobre sí mismos y su relación con las matemáticas. Esta categoría tiene un componente afectivo más fuerte e incluye creencias que están relacionadas con la confianza, el autoconcepto y las atribuciones causales de éxito o fracaso.

Para nuestra investigación el sistema de creencias se integra por las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, sobre la enseñanza, el aprendizaje y la resolución de problemas y las creencias de autoeficacia en la resolución de problemas matemáticos.

4.3 Teoría del Doble Proceso

Se habla de una teoría ampliamente aceptada en el ámbito de la ciencia cognitiva: la teoría dual del razonamiento (Skemp, 1979; Evans y Over, 1996; Stanovich y West, 2000; Evans, 2003; Legrenzi, 2008; López Astorga, 2009 citados por López-Astroga, 2019).

Esta teoría incluye la afirmación de que existen dos unidades cognitivas distintas en el cerebro humano conocidas como Sistemas de Razonamiento tipo 1 (S1 o R1) y Sistema o Razonamiento tipo 2 (S2 o R2). En específico cada sistema o tipo de razonamiento se distingue en que S1 se relaciona con el ámbito intuitivo y es el responsable de, entre otros factores, los heurísticos más o menos irracionales que aprendemos de la experiencia (Reyna, 2004) y que utilizamos de manera inconsciente y con gran rapidez. Por otra parte, el S2 o R2 se refiere a lo que habitualmente consideramos de manera coloquial simplemente como, razonamiento, vinculado con procesos mentales analíticos y reflexivos que generalmente demandan cierto tiempo de dedicación a las personas.

Por su parte, Leron & Hazzan (2009) explican que la Teoría del doble proceso establece que en nuestra cognición y comportamiento están presentes dos modos de pensamiento: el pensamiento analítico y el pensamiento intuitivo. Los procesos de razonamiento S1 se caracterizan por ser rápidos, automáticos, sin esfuerzo, generalmente inconscientes e inflexibles, mientras que, los procesos S2 son lentos, conscientes, esforzados y pueden incluir cálculos costosos que echan mano de la memoria y diversos recursos que tienen a su disposición, además de ser relativamente flexible. Ambos sistemas difieren principalmente en la dimensión de accesibilidad: qué tan rápido y qué tan fácil se me ocurren las cosas. Estos autores explican que muchos de los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas, se deben a que las soluciones exigen la aplicación de reglas que pueden llegar a chocar con su inteligencia natural.

Leron & Hazzan (2006) muestran, cómo algunos desarrollos recientes en la psicología cognitiva pueden ayudar en la interpretación de resultados empíricos de la enseñanza de la matemática. Comienzan por mencionar el trabajo empírico de Kahneman y Tversky (1982) el cual se interpretó como una demostración de que, en muchas condiciones, principalmente las que implican decisiones bajo incertidumbre y pensamiento estadístico, las personas se comportan de manera irracional. Dicha investigación dio lugar a un extenso análisis en psicología cognitiva, denominada genéricamente heurísticas y sesgos (H&B) y resumido en Kahneman y Tversky (1982) y, más recientemente, en Gilovich et al. (2002, citados ambos por Leron & Hazzan, 2006). Es en base a estos estudios que surgió el nuevo marco teórico en el que se ha reformulado la investigación de H&B, denominado teoría del proceso dual. Según esta teoría, en nuestra cognición y conducta operan en paralelo dos modos diferentes de razonamiento llamados Sistema 1 y Sistema 2, que se corresponden con las nociones de nuestro sentido común, pensamiento intuitivo y pensamiento analítico. Estos modos operan de manera diferente, son activados por diferentes partes del cerebro y tienen diferentes orígenes evolutivos.

Según estos autores, aunque la distinción entre percepción y cognición es antigua y bien conocida, la introducción de S1, que se encuentra a medio camino entre la percepción y la cognición analítica, es relativamente nueva y tiene importantes consecuencias sobre cómo se interpretan los hallazgos empíricos en psicología cognitiva, incluido el debate sobre la racionalidad y la aplicación a la investigación en educación matemática. Al igual que la percepción, los procesos S1 se caracterizan por ser rápidos, automáticos, sin esfuerzo, inconscientes e inflexibles, difíciles de cambiar o superar; a diferencia de la percepción, los procesos S1 pueden estar mediados por el lenguaje y relacionarse con eventos que no están en el aquí y ahora, es decir, eventos en lugares lejanos y en el pasado o el futuro. En contraste, los procesos de S2 son lentos, conscientes, esforzados y relativamente flexibles. En muchas situaciones, S1 y S2 funcionan en conjunto, pero hay situaciones en las que S1 produce respuestas no normativas automáticas rápidas, mientras que S2 puede o no intervenir en su papel de monitor y crítico. Cuando una persona se vuelve experta en alguna habilidad puede convertirse en una habilidad S1 para esta persona.

Según Stanovich & West (2000, citado por Leron & Hazzan, 2006) la diferencia más importante entre los dos sistemas es la tendencia a conducir a diferentes tipos de construcciones de tareas. Las interpretaciones desencadenadas por el Sistema 1 están altamente contextualizadas, personalizadas y socializadas. La primacía de estos mecanismos conduce a lo que se ha denominado el sesgo de cálculo fundamental en la cognición humana, la tendencia hacia la contextualización automática de problemas. Frente a este, los procesos más controlados del S2 que es más hábil, sirve para descontextualizar y despersonalizar problemas y representar en términos de reglas y principios subyacentes. Puede tratar problemas sin contenido social y no está dominado por el objetivo de atribuir intencionalidad ni por la búsqueda de relevancia conversacional.

Tabla 1

Diferencias entre la aplicación de sistemas

	Percepción	**Intuición S1**	**Razonamiento S2**
Proceso	Rápido Paralelo Automático Simple Asociativo Lento aprendizaje		Lento Secuenciado Controlado Esforzado Regulación guiada Flexible
Contenido	Percepciones Estimulación actual Estímulos limitados	Representaciones conceptuales Pasado, presente y futuro Puede ser hablado mediante el lenguaje	

Nota: Tabla tomada de Kahneman (2002, citado por Leron & Hazzan, 2006). Traducción propia.

En su búsqueda de alcanzar su objetivo (mostrar como algunos desarrollos recientes en psicología cognitiva pueden ayudar en la educación matemática), Leron & Hazzan (2006) afirman, que gran parte de la investigación en educación matemática se ocupa, explícita o implícitamente, de la relación entre los modos intuitivo y analítico de pensamiento y comportamiento y que en esta disciplina la definición y función de la intuición son similares a las de S1, ambos se caracterizan por su inmediatez, alta accesibilidad, automaticidad y sencillez. Además, ambos se consideran sumamente útiles y confiables en condiciones normales de la vida diaria, pero son propensos a errores en condiciones más complejas y abstractas. Otra similitud que encuentran estos autores entre la psicología cognitiva, particularmente la teoría de los procesos duales, y la educación matemática es la coincidencia de la función de autocontrol de S2 y de la metacognición, aunque ambos van más allá de solo un monitoreo o autorregulación.

Entre las diferencias que establecen estos autores entre las dos disciplinas, está la división que hacen de nivel superior de pensamiento, aunque en ambas el nivel superior se divide en dos categorías principales, las divisiones son diferentes; en educación la matemática son cognición y metacognición, mientras que en psicología cognitiva son Sistema 1 y Sistema 2. S2, tal como se utiliza en psicología cognitiva, consiste en parte de la cognición que se asume en la educación matemática (la parte del pensamiento analítico) y parte de la metacognición (la parte del autocontrol) y aunque la metacognición comparte con S2 la parte de autocontrol, la metacognición contiene una funcionalidad adicional entre las que se encuentran las creencias que pueden convertirse en un factor crucial junto a la gestión de tiempo (si un problema no se puede resolver en 10 minutos, no se puede resolver en absoluto y no tiene sentido emprender una búsqueda inútil).

Mientras que la psicología cognitiva tiene como objetivo examinar la cognición cotidiana, utilizando principalmente tareas simples y mundanas, en la educación matemática, el objetivo es estudiar la comprensión matemática y la resolución de problemas de los estudiantes que previamente recibieron enseñanza en la materia, es decir, no se espera que los estudiantes comprendan ecuaciones algebraicas o teoría de grupos sin tutoría explícita del mismo modo los investigadores de la psicología cognitiva no esperan que las personas piensen detenidamente o den explicaciones y justificaciones de todas sus respuestas. En la enseñanza de la matemática se espera que los individuos dediquen una cantidad importante de tiempo a la solución de problemas, a que piensen detenidamente en lo que hacen y que expliquen sus respuestas. Dicho de otra forma, en la enseñanza de la matemática hay una necesidad de formar personas conscientes de la forma en que operan S1 y S2 y que esta conciencia forme parte de su caja de herramientas para la resolución de problemas.

Leron & Hazzan (2006), resumen lo descrito anteriormente en la siguiente tabla:

Tabla 2

Comparación de Educación Matemática y Teoría de Procesos Duales

<table>
<tr><td rowspan="2">Perspectiva de la Educación Matemática</td><td colspan="2">Cognición</td><td colspan="2">Metacognición</td></tr>
<tr><td>Intuición</td><td>Pensamiento analítico</td><td>Autocontrol</td><td>Recursos y gestión de creencias, etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Perspectiva del proceso dual</td><td rowspan="2">Sistema 1</td><td>Pensamientos y reglas en serie</td><td>Autocontrol</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Sistema 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cognición</td></tr>
</table>

La idea de que en la enseñanza de la matemática las personas deben ser conscientes de la forma en que operan S1 y S2 y que esta conciencia forme parte de su caja de herramientas para la resolución de problemas, tiene una naturaleza recursiva interesante y casi paradójica para la psicología cognitiva, ya que implica un monitoreo de S1 por S2 además de un monitoreo de la interacción S1-S2; por tanto, S2 tiene que supervisar su propio funcionamiento de supervisión de S1, que si bien es cierto que monitorear y criticar a S1 es una de las razones por las que S2 ha evolucionado en primer lugar, monitorear la interacción S1-S2 parece ser lo que según Geary (2002 citado por Leron & Hazzan, 2006) ha llamado capacidad cognitiva secundaria, algo que normalmente no se desarrolla sin una instrucción explícita.

La cita dada a continuación deja claro que esta idea no ha pasado desapercibida en la investigación sobre la enseñanza de la matemática.

> “El problema principal es aprender a vivir con la carga intuitiva de conceptos, necesaria para la fluidez productiva del razonamiento, y, al mismo tiempo, controlar el impacto del curso mismo del razonamiento de estas influencias intuitivas. Para ello, el alumno debe aprender a tomar conciencia del significado formal y exacto y de las implicaciones de los conceptos matemáticos, por un lado, y de las intuiciones subyacentes, por otro.” (Fischbein, 1987, p.207 citado en Leron & Hazzan, 2006)

Dada la necesidad de distinguir la aplicación o puesta en juego del S1 y S2 cuando los estudiantes resuelven problemas con números racionales, es que encontramos en la literatura (González-Forte, et. al., 2019b) el llamado sesgo del número natural concepto que entenderemos como una dificultad presentada por los estudiantes, que consiste en basar todos los conocimientos que se tienen respecto a los números naturales, con relación a los contenidos de operaciones básicas y su influencia negativa al querer aplicarlos de manera igualitaria en los números racionales.

5. Marco Metodológico

En esta sección se explica el tipo de investigación que se decidió realizar, tomando en cuenta nuestras posibilidades, así como nuestros objetivos particulares. Es por eso que se toma en cuenta la investigación cualitativa, la cual fue compatible con la problemática de nuestro estudio y que se observó que era aplicada en estudios similares al nuestro. También se explican a profundidad los cuestionarios que se aplicaron y las fuentes base para su elección.

5.1 Investigación Cualitativa

El enfoque será cualitativo, debido a que busca identificar características que se encuentran en cierta población de estudio. El enfoque cualitativo, nace a partir del surgimiento de diversos métodos y técnicas de investigación, que pretenden dar cuenta de asuntos complejos como los sentimientos, las emociones, las percepciones, la significación de las acciones humanas (Mieles, et al., 2012).

Particularmente en nuestra investigación, se busca el conocer las creencias involucradas en los procesos de razonamiento elegidos por los estudiantes al momento de resolver problemas, describimos cuales son las creencias y como es que estas influyen en la determinación que toman los estudiantes de secundaria cuando, al resolver problemas de matemáticas, aplican un razonamiento intuitivo o analítico.

Kothari (2008) menciona que la investigación cualitativa, se ocupa de los fenómenos relacionados con o que involucran calidad o bondad (como el comportamiento humano). Por tanto, el tipo de investigación será descriptivo, ya que incluirá encuestas y consultas de investigación, aparte el objetivo principal será la misma descripción de la situación que se presente tal como existe en la actualidad el investigador no tendrá control sobre las variables; sólo podrá informar lo que ha sucedido o lo que está sucediendo. También se menciona la investigación empírica que es apropiada cuando se busca la prueba de que ciertas variables afectan de algún modo a otras variables.

Por tanto, nuestra investigación se centra tanto en identificar el sistema de creencias de los alumnos al resolver problemas matemáticos, pero de igual manera, se busca describir las implicaciones del sistema de creencias para la toma de decisiones al utilizar el sistema de razonamiento tipo 1 o 2.

El tipo de investigación es descriptivo, ya que incluye encuestas y consultas de investigación para alcanzar el objetivo principal que será la descripción misma de la situación que se presente, tal como existe en la actualidad, según refiere Kothari (2008).

La temporalidad es transversal ya que fue en un solo momento en el tiempo, y se hizo una sola aplicación de los instrumentos, esto debido a que, con la única aplicación de los instrumentos en un momento dado, fue suficiente para obtener los resultados que ayudaron a responder nuestra pregunta de investigación y sustentar la hipótesis planteada (Mieles, et al., 2012).

Mientras que el alcance será descriptivo el cual permite describir las situaciones que investigamos, midiéndolos, y evidenciando las características que presente. Estos estudios tienen el objetivo de identificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. (Danhke, 1989 citado por y Hernández, et al., 2003).

Nuestra investigación tiene también un alcance explicativo, ya que se determinaron las relaciones causales que permitieron explicar por qué se dan los fenómenos o la relación existente entre dos o más variables (Hernández, et al., 2003).

Escribir como las creencias que tienen los estudiantes sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje y sobre sí mismos, hacen que utilicen un tipo de razonamiento sobre otro. Explicando así la experiencia vivida por dichos alumnos, sin ninguna intervención o modificación.

En Mieles, et al. (2012) describen que la investigación cualitativa ayudará a desarrollar procesos de investigación sistemáticos, rigurosos y documentados que cualifiquen las prácticas científicas, contribuyan a la comprensión de los hechos humanos e impulsen procesos de transformación y emancipación.

En este orden de ideas la contribución teórica que se espera en esta investigación es alcanzar una mejor comprensión de la influencia de las creencias de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la matemática, particularmente se aporta en torno a las creencias presentes cuando los estudiantes resuelven problemas con números racionales y aplican pensamiento intuitivo o pensamiento analítico.

5.2 Tipos de Instrumentos

Se aplicaron los instrumentos a quinientos ochenta y cinco alumnos de primero, segundo y tercero de secundaria que correspondían a los grupos “A”, “B”, “C”, “D” Y “E” de la escuela secundaria Camilo Arriaga de San Luis Potosí, la cual es una escuela de sector público, de nivel básico de turno matutino. En el exterior de la escuela se pueden encontrar servicios de transporte, agua, luz, drenaje. A sus alrededores se encuentran oficinas, parques y tiendas de autoservicio.

La mayoría de las familias de los alumnos son de un nivel socioeconómico medio o medio bajo que en su mayoría cuentan con un acceso a internet ya sea por medio de computadora o celular. En el momento de la aplicación de los instrumentos los alumnos tomaban aún clases virtuales, por la pandemia SARS COVID-19, por lo que los cuestionarios fueron aplicados de esta misma manera, adaptándonos a las condiciones existentes. La escala de creencias y las dos primeras secciones del cuestionario de problemas se elaboraron en un cuestionario de Google y la tercera sección del cuestionario de problemas sobre números racionales se escribió en un archivo PDF para que los estudiantes lo resolvieran a modo de tarea, esto con la intención de no ocupar más tiempo de clases de las profesoras.

En el proceso de investigación existen diferentes técnicas de recolección de los datos, según el trabajo que se esté llevando a cabo y tomando en cuenta las características o variables a utilizar y comparar, se podrá elegir entre la que más convenga, en el caso de la investigación cualitativa existen la observación, entrevista, cuestionario y grupo de discusión (Herrera, 2008).

La observación se ocupa de obtener información por medio de la percepción del investigador sobre cierto fenómeno que se esté produciendo en personas o grupos y se utiliza especialmente cuando se sabe que existen dificultades de los participantes por manifestarse en el acontecimiento a investigar. La participación del observador tiene un enfoque particular en el papel que desempeñará el investigador, que será el observador, dependiendo de la interacción que requieran sus objetivos. Aquí también puede mencionarse el grupo de discusión en el cual se observará la interacción que tienen sobre el debate de algún tema en particular y se analizarán las formas, conductas y maneras de interrelacionarse, entre otras cosas, que busque el investigador (Herrera, 2008).

La entrevista se refiere a una técnica en la que el investigador solicita información acerca de un tema en particular, con el fin de conocer las ideas, creencias y supuestos que se tienen sobre las variables involucradas en la investigación. Estas pueden ser por parte del investigador hacia un participante, o bien hacia un grupo de participantes. Es importante que en esta técnica el investigador debe contar con una preparación que le permita enfocarse en las respuestas reales y no asumir juicios personales (Herrera, 2008).

El cuestionario es de las formas más conocidas en la recolección de datos de la investigación cualitativa, ésta permite sondear opiniones de un grupo de personas. Por lo regular se recomienda que los cuestionarios no sean de más de 30 preguntas y se sabe que estos cuestionarios suelen basarse en investigaciones cuantitativas previas, sin embargo, puede ser un método de recolección de datos bastante eficiente. El diseño del cuestionario irá enfocado en cuestiones que permitan establecer las ideas, creencias o supuestos que se relacionan con el problema de investigación. Existen dos tipos de cuestionarios dependiendo de la información que se quiere recoger; los que buscan investigación descriptiva concreta (opción abierta, no sé o prefiero no contestar) y una información de carácter cualitativo (opción abierta <respuestas expresadas en un lenguaje comprensible>, opción cerrada <confirmar o des afirmar> y opción múltiple <posibles alternativas de escala>, especificar información) (Herrera,2008).

La elección de la técnica utilizada se realizó con base en los objetivos de la investigación, así como también con base en a las cualidades presentadas en determinado grupo, nivel socioeconómico, características, modalidades, costumbres, hábitos. Y para un trabajo formal y completo se recomienda que el cuestionario se pruebe en una submuestra que ayudará a determinar la calidad y funcionamiento de la herramienta que se empleará (Herrera, 2008).

5.2.1 Cuestionarios

Los ítems de los cuestionarios cuentan con una valoración según los resultados esperados que ayudarán a conocer el problema. Los ítems deben de ser redactados de acuerdo con los participantes, es decir, que vayan adecuados al nivel de lectura que ellos identifiquen. Se recomienda una redacción breve y explícita y realizar un pilotaje que ayude a darle veracidad y claridad a su comprensión en la población elegida.

5.2.2 Escalas

En la metodología para medir creencias de eficacia, se emplean ítems que representan diferentes niveles de exigencias de tareas y los individuos estiman la fortaleza de sus creencias en la habilidad que poseen para desempeñar las actividades requeridas.

Existen escalas que registran la fortaleza de sus creencias de eficacia en una escala de 100 puntos dividida en intervalos de 10 puntos que varían desde 0 (no puedo hacerlo), a través de grados intermedios de seguridad, 5 (relativamente seguro de poder hacerlo); hasta una completa seguridad, 10 (seguro de poder hacerlo).

Pajares, et al., 2001 sugiere que se deben evitar las escalas que utilizan solamente pocas alternativas de respuesta por ser menos sensibles y confiable. Las instrucciones preliminares deben establecer pautas apropiadas para juzgar la propia eficacia. Se les pregunta a las personas acerca de sus capacidades operativas en el presente, no acerca de sus capacidades potenciales o sobre sus capacidades futuras esperadas.

Se recomienda realizar un pretest de los ítems. Los ítems ambiguos deben descartarse o redactarse nuevamente. Deben eliminarse aquellos ítems que reciban la misma puntuación por parte de la mayoría de las personas, ya que tales ítems no discriminan entre los sujetos (Pajares et al. 2001).

Aquellos ítems en los que la gran mayoría de los sujetos eligen la categoría correspondiente a la máxima eficacia carecen de suficiente dificultad, desafío, o impedimento para discriminar los niveles de eficacia entre los sujetos. En tales casos, es conveniente incrementar el nivel de dificultad elevando el grado de desafío que el ítem representa (Pajares et al. 2001).

5.2.2.1 El Cuestionario de Creencias (CreeMat). El cuestionario de creencia (CreeMat) es una escala tipo Likert en la que 1 representa "Totalmente en desacuerdo " y 5 " completamente de acuerdo. " El propósito de esta prueba es evaluar los sistemas de creencias sobre matemáticas en estudiantes de secundaria. El cuestionario está compuesto por 13 ítems (figura 3) y cubre 4 subescalas o dimensiones: compromiso afectivo y conductual en el aprendizaje matemático (ítems 1, 2 y 3); creencias sobre la competencia personal en matemáticas (ítems 4, 6, 8 y 12); creencias matemáticas (ítems 5, 9 y 13); y creencias sobre la resolución de problemas matemáticos (ítems 7, 10 y 11) (Ver figura 3).

Figura 1

Datos descriptivos del cuestionario CreeMat

Artículos	Media	Dakota del Su
Ítem 1: trabajo duro en matemáticas	3.13	1,16
Ítem 2: Si cometo errores, trabajo hasta corregirlos Ítem 3: Me gusta	3,61	1,28
inventar nuevos problemas	1,70	1.01
Ítem 4: Aprendo matemáticas rápidamente	3.30	0,87
Ítem 5: Las matemáticas nos permiten comprender mejor el mundo en el que vivimos Ítem 6: Cuando me piden	3,41	0,95
que resuelva problemas matemáticos, me pongo nervioso	3.32	1,24
Ítem 7: Cuando no puedo resolver un problema matemático rápidamente, sigo intentando Ítem 8: Me siento	3,77	1.08
confuso fi mella cuando estudio o trabajo en matemáticas Ítem 9: Cualquiera puede aprender matemáticas	3,14	0,96
	4.18	1.05
Ítem 10: Prefiero las tareas desafiantes para aprender cosas nuevas.	3,68	0,90
Ítem 11: Las clases de matemáticas no deben darle mucha importancia a resolución de problemas	3,52	1.04
Ítem 12: Me siento feliz cuando resuelvo problemas matemáticos	3,93 0,99	
Ítem 13: Las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar	3,21 1,14	
Media	3.37 0,46	
Total	43,75 6,09	

Nota: Tomado del cuestionario original (Gómez-Chacón, et al. 2014).

5.3 Descripción de Instrumentos Empleado Para Levantamiento de Información

5.3.1 La escala de creencias

Para conocer el sistema de creencias (entendido éste como un sistema integrado por las creencias sobre la matemática, creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y creencias de autoeficacia) (objetivo 1), utilizamos como base el cuestionario CreeMat. Para alcanzar el propósito de nuestra investigación fue necesario realizar una adaptación en la que omitimos los ítems correspondientes a la dimensión del compromiso afectivo y conductual en el aprendizaje matemático y 3 ítems de la competencia personal. Añadimos 7 ítems que cubren las 4 dimensiones que integran el sistema de creencias en nuestra investigación: creencias sobre la matemática, creencias sobre la enseñanza de la matemática, creencias sobre el aprendizaje de la matemática y creencias de autoeficacia y sobre la capacidad para resolver tareas matemáticas, específicamente, problemas con números racionales. Dicho ajuste se hace en el entendido fundamental del carácter cualitativo de nuestra investigación en el que los resultados de la escala de creencias contrastarán y complementarán con los obtenidos con el levantamiento de información a través de otros instrumentos.

Figura 2

Cuestionario sobre creencias en la matemática CreeMat

Nombre………………………………………………………….. **Edad**……. **Sexo**……

Centro: ………………………………..…………………………. **Fecha**…………….

Ahora responde a las siguientes afirmaciones. Indica tu grado de acuerdo poniendo una cruz en la respuesta que consideres que expresa tu opinión.

	Casi nunca	Ocasionalmente	Alrededor de la mitad de tiempo	Usualmente	Casi siempre
1. Trabajo duro en matemáticas					
2. Si cometo errores, trabajo hasta corregirlos					
3. Me gusta inventarme nuevos problemas					
	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	No seguro	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
4. Aprendo las matemáticas rápidamente					
5. Las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos					
6. Cuando me piden que resuelva problemas de matemáticas me pongo nervioso					
7. Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente, dejo de intentarlo					
8. Siento confianza cuando estudio o trabajo en matemáticas					
9. Todo el mundo puede aprender matemáticas					
10. Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas					
11. Las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos.					
12. Me siento feliz cuando resuelvo problemas de matemáticas.					
13. Las Matemáticas consisten en memorizar.					

Nota: La imagen representa el cuestionario Original sobre el que Gómez-Chacón, 2014 elaboró su propia versión que se ilustra en la figura 3.

Modificaciones realizadas:

Se omitieron los ítems 1,2,3,6,8,12 puesto que miden el compromiso afectivo y conductual en el aprendizaje de matemáticas el cual no es una dimensión de interés para nuestra investigación.

Se incluyen 2 ítem sobre en la dimensión de creencias sobre la matemática:

-Solo los genios aprenden matemáticas (también perteneciente a la dimensión sobre aprendizaje)

-Las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de otros problemas.

Un ítem sobre la dimensión de la enseñanza de la matemática:

-Recuerdo todo lo que me enseñaron sobre fracciones

Se añaden cuatro ítems en la dimensión de las creencias de autoeficacia.

-Puedo resolver cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones

-Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil

-Se resolver correctamente cualquier problema con fracciones

-Entiendo todo lo que mi profesor explica sobre fracciones

Se agregan tres ítems respecto a las creencias sobre la solución de problemas:

-Los problemas de matemáticas se deben resolver rápido.

-La respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse.

-La respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que me viene a la cabeza.

La escala sobre Sistema de Creencias sobre las Matemáticas para nivel secundaria (Anexo I) que se empleó quedo integrada por: cuatro ítems para la dimensión de creencias sobre el aprendizaje (1,5,4 y 9), cuatro ítems sobre las creencias sobre la matemática (7, 8, 2 y 9), cinco ítems de creencias de autoeficacia (3,10,11, 12 y 13), dos ítems sobre las creencias sobre la enseñanza (14 y 6) y tres ítems sobre las creencias sobre la solución de problemas (15, 16 y 17), y así fue como se aplicó a los estudiantes.

5.3.2 Cuestionario Sobre Problemas de Números Racionales

Para el cuestionario sobre problemas de números racionales (objetivo 2) tomamos en cuenta estudios previos que hacen referencia al sesgo del número natural, como citábamos en el marco de referencia.

Se eligieron 4 ítems del instrumento empleado por González-Forte et al. (2019) los cuales consisten en una multiplicación de un número natural por un racional, mismos que fueron diseñados teniendo en cuenta dos variables: el tipo de representación (fraccionaria o decimal) y la congruencia o incongruencia con el conocimiento implícito sobre los números naturales respecto de la multiplicación en la que consideran que el producto de dos números naturales siempre es mayor que cualquiera de los factores.

El primer ítem:

1.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 5 x ½ ¿El resultado será mayor o menor que 5?

-Mayor que 5

-Menor que 5

¿Cómo lo sabes?

En este caso el producto de 5 por ½ que es un ítem incongruente con el modelo implícito derivado del conocimiento de la multiplicación con números naturales, ya que el resultado de la multiplicación es 2.5 y es un número menor que el número natural que figura como factor (5).

Mientras que el segundo ítem:

2.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 10 x $\frac{3}{2}$¿El resultado será mayor o menor que 10?

-Mayor que 10

-Menor que 10

¿Cómo lo sabes?

Es congruente con el modelo implícito derivado del conocimiento de la multiplicación con números naturales, ya que el resultado de la operación (15) es un número mayor que 10.

Los ítems 4 y 5:

4.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 2 x 0.5 ¿El resultado será mayor o menor que 2?

-Mayor que 2

-Menor que 2

¿Cómo lo sabes?

5.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 7 x 1.5 ¿El resultado será mayor o menor que 7?

-Mayor que 7

-Menor que 7

¿Cómo lo sabes?

Consisten en la multiplicación de un número natural por un número racional en su representación decimal (2 × 0.5, 7 × 1.5) El ítem 4 es incongruente con el conocimiento de los números naturales, ya que el resultado (1) es menor que el número natural multiplicado (2); mientras que el ítem 5 es congruente con el conocimiento de los números naturales ya que el resultado (10.5) es mayor que el número natural que es uno de los factores (7) (González-Forte et al., 2019).

Agregamos dos ítems más (3 y 6):

3.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 8 x $\frac{5}{2}$¿El resultado será mayor o menor que 8?

-Mayor que 8

-Menor que 8

¿Cómo lo sabes?

6.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 8 x 2.5 ¿El resultado será mayor o menor que 8?

-Mayor que 8

-Menor que 8

¿Cómo lo sabes?

Ambos congruentes con el conocimiento implícito, pero en los que consideramos que las respuestas de los estudiantes podrían reflejar un razonamiento analítico al darse cuenta de que el número racional por el que se realiza el producto es mayor que 1 de una manera más obvia (8 x 5/2) y (8 x 2.5). Todos los ítems se siguen de la pregunta abierta ¿Cómo lo sabes?, que deben contestar de manera explícita.

Se esperaba que los problemas congruentes los resolverán sólo empleando el razonamiento tipo 1 (razonamiento intuitivo) y, a menos que la respuesta a la pregunta explícita contenga alguna idea clara que refleje un conocimiento explícito sobre números racionales y sus propiedades, se asumirá que aplicaron razonamiento analítico. Dicho de otra forma, si el problema es incongruente y lo resuelven de manera incorrecta, entonces se ratifica que los estudiantes sólo aplican el razonamiento tipo 1. Si el problema es incongruente y lo resuelven de manera correcta y su respuesta a la pregunta explícita se asocia a alguna idea sobre números racionales, consideraremos que los estudiantes emplearon el razonamiento tipo 2 (tabla 3).

Tabla 3

Tipo de razonamiento empleado según su respuesta en problemas incongruentes

	Resolución	**Tipo de Razonamiento**
Problema Incongruente	Incorrecta	Tipo 1
	Correcta	Tipo 2

Para una segunda sección se integraron problemas de comparación de fracciones empleados también por González-Forte et al. (2019), siendo éstos congruentes (mismo denominador), en los que el razonamiento intuitivo conduce a una respuesta correcta, incongruentes (mismo numerador) que consisten en dos fracciones con numeradores iguales (x / a y x / b) en los que es necesario que el alumno suprima la respuesta generada intuitivamente y piense analíticamente, teniendo en cuenta el numerador y el denominador de ambas (Van-Hoof, et al., 2013). Y finalmente fracciones con diferente denominador y numerador en los que la respuesta necesariamente implica que los estudiantes cuentan con una estrategia que les permita comparar las fracciones, dicha estrategia podría ser escribir la representación decimal de cada número racional y comparar la parte entera, escribir fracciones equivalentes a las dadas, llevándolas a fracciones con un denominador común y entonces sólo comparar los numeradores para determinar cuál es mayor y cual es menor o bien calcular productos cruzados, numerador de una fracción por el denominador de la otra y determinar cuál de éstos es mayor para saber cuál de las fracciones lo es. En cualquiera de estos casos se considera que el estudiante aplica un razonamiento analítico para resolver estos problemas de comparación de fracciones. Los estudiantes que resuelvan correctamente estos tres ítems (13, 14 y 15), se está considerando a priori que resolverán correctamente los problemas anteriores, sean estos congruentes o incongruentes. La siguiente tabla (tabla 4), resume esta explicación.

Tabla 4

Tipo de razonamiento aplicado y respuesta a la que conduce

Problemas	**Razonamiento**	**Conduce a Respuesta**
Congruentes (mismo denominador)	Intuitivo	Correcta
	Analitico	Correcta
Incongruentes (mismo numerador)	Intuitivo	Incorrecta
	Analitico	Correcta
Diferente denominador y numerador	Inituitivo	Incorrecta
	Analitico	Correcta

La tercera y última sección (anexo 2) del cuestionario consta de la resolución de problemas de sumas (3 ítems), restas (3 ítems) y multiplicaciones (5 ítems) de dos números racionales. En este apartado se esperaba que los alumnos presenten la dificultad de aplicar conocimientos de los números naturales en los racionales, como puede ser el sumar o restar, por ejemplo, únicamente denominadores y/o numeradores. De igual manera en las multiplicaciones, cuando existe un mismo denominador, el alumno podría sólo considerar el cálculo del producto de los numeradores. Las respuestas incorrectas a estos ítems ratificarán el empleo de un razonamiento intuitivo o analítico, si éstas son correctas -(Lortie-Forgues, et al., 2015; Siegler & Pyke, 2013; Siegler et al., 2011 citados en González-Forte et al., 2019b) y que se esperaba estuvieran en correspondencia con las soluciones dadas a los apartados anteriores del cuestionario.

5.3.3 Interpretación de los Resultados de la Escala

En la presente descripción las preguntas que formaron parte de la escala se escribirán con letra negrita para su distinción, mientras que las respuestas *siempre, casi siempre, más o menos, solo a veces o casi nunca*, se escribirán con cursivas.

Considerando que la escala se conformó de ítems sobre creencias sobre la matemática, sobre el aprendizaje, sobre la enseñanza, sobre la autoeficacia y sobre la solución de problemas, la interpretación se dividió en cinco apartados.

Los siguientes apartados explican la estructura que se le dio al cuestionario de creencias, mismo que se ve desglosado por tipo de creencia, ítems que le corresponden y mencionando la respuesta esperada para ser favorable a algún tipo de razonamiento.

5.3.3.1 Creencias Sobre la Matemática. Diremos que las creencias sobre la matemática del estudiante son favorables a la aplicación del razonamiento S2, cuando respondan *siempre o casi siempre* a los ítems 2 y 8 y respondan *más o menos*, *solo a veces o casi nunca* a los ítems 7 y 9. Se ejemplifica en la siguiente tabla:

Tabla 5

Descripción de respuestas sobre creencias de la matemática y su asociación con el tipo de razonamiento

Item	Respuesta	Favorable
2.Las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
8.Las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
7.Las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar	Siempre o casi siempre	S1
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S2
9.Solo los genios aprenden matemáticas	Siempre o casi siempre	S1
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S2

De este modo las creencias sobre la matemática, favorables al empleo de S2, se leerían:

Siempre o casi siempre "**Las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos**", **"Las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas**" y *casi nunca, solo a veces o más o menos* "**Las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar**" al igual que "**Solo los genios aprenden matemáticas**".

Cuando los estudiantes respondan *siempre o casi siempre* a los ítems 7 y 9 (y respondan *más o menos, solo a veces o casi nunca* a los ítems 2 y 8) diremos que las creencias sobre la matemática del estudiante son desfavorables a aplicar el razonamiento analítico y las creencias serán favorables a la aplicación de un razonamiento intuitivo S1. En este caso las creencias sobre la matemática desfavorables a la aplicación de S2 y favorables a la aplicación de S1, se leerán:

Más o menos, Nunca o Casi nunca "**Las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos**", "**Las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas**" y *siempre o casi siempre* "**Las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar**" al igual que "**Solo los genios aprenden matemáticas**".

Para cualquier variante que se presente en las respuestas que no coincida con lo antes mencionado, se realizará un cruce de resultados con las respuestas que dieron en los otros instrumentos para definir si dichas creencias fueron o no favorables a la aplicación del pensamiento analítico.

5.3.3.2 Creencias Sobre el Aprendizaje. Diremos que las creencias sobre el aprendizaje del estudiante son favorables a la aplicación S2 cuando ellos contesten *siempre o casi siempre* a los ítems 1, 4 y 5 mientras que el ítem 9 lo respondan con un *solo a veces, casi nunca o más o menos*, esta conclusión se asumirá siempre y cuando las respuestas en la dimensión de creencias de autoeficacia muestren un alto sentido de autoeficacia. Se ejemplifica, en la siguiente tabla:

Tabla 6

Descripción de respuestas sobre creencias sobre el aprendizaje y su asociación con el tipo de razonamiento

Item	Respuesta	Favorable
1. Aprendo las matemáticas de clase rápidamente	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
4. Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
5. Cualquiera puede aprender matemáticas	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
9. Solo los genios aprenden Matemáticas	Siempre o casi siempre	S1
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S2

De este modo las creencias sobre el aprendizaje del estudiante favorables a la aplicación S2, se leerán:

Siempre, casi siempre "**Aprendo las matemáticas de clase rápidamente**" "**Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas**" y "**Cualquiera puede aprender matemáticas**" y *más o menos, solo a veces o casi nunca* "**Solo los genios aprenden Matemáticas**".

En caso contrario se concluirá que las respuestas correspondientes a la dimensión del aprendizaje son poco favorables a la aplicación del S2, cuando los ítems 1, 4 y 5 se respondan *con nunca o casi nunca* y el ítem 9 con un *siempre o casi siempre*.

En este caso las creencias sobre la matemática desfavorables a la aplicación de S2 y favorables a la aplicación de S1, se leerán:

Siempre o casi siempre “**Solo los genios aprenden matemáticas”** y *casi nunca, solo a veces o más o menos* “**Aprendo las matemáticas de clase rápidamente**” “**Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas**” y “**Cualquiera puede aprender matemáticas**”.

En cualquier caso, diferente a los mencionados, se realizará un cruce de los resultados con las respuestas que darán en los otros instrumentos para definir si dichas creencias fueron o no favorables a la aplicación del pensamiento analítico.

5.3.3.3 Creencias Sobre la Enseñanza. Diremos que las creencias sobre la enseñanza de los estudiantes serán favorables al S2 cuando los alumnos contesten *siempre o casi siempre* al ítem 6 y *solo a veces, más o menos o casi nunca* al ítem 14. Por el contrario, diremos que las creencias de los estudiantes serán desfavorables cuando los alumnos contesten *siempre o casi siempre* al ítem 14 y *solo a veces, nunca o casi nunca* al ítem 6. A continuación, se muestra esto en una tabla:

Tabla 7

Descripción de respuestas sobre creencias de la enseñanza y su asociación con el tipo de razonamiento

Item	Respuesta	Favorable
6. Las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
14. Recuerdo todo lo que me enseñaron sobre fracciones	Siempre o casi siempre	S1
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S2

En este caso las creencias sobre la enseñanza favorables a la aplicación de S2 y desfavorables a la aplicación de S1, se leerán:

Siempre o casi siempre “**Las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos**” y *Solo a veces, Más o menos, casi nunca* “**Recuerdo todo lo que me enseñaron sobre fracciones**”.

De lo contrario, leeremos:

Siempre o casi siempre ““**Recuerdo todo lo que me enseñaron sobre fracciones**” y *Solo a veces, Más o menos, casi nunca* “**Las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos**”.

5.3.3.4 Creencias de Autoeficacia. Las creencias sobre autoeficacia se consideran favorables al empleo de S2 cuando éstos contestan *siempre o casi siempre* de los ítems 10, 11, 12 y 13 y responden *más o menos, solo a veces o casi nunca*, al ítem 3 en este caso diremos que los estudiantes tienen un alto sentido de autoeficacia y esto es favorable a la aplicación del S2. A continuación, se desglosa mediante una tabla:

Tabla 8

Descripción de respuestas sobre creencias de autoeficacia y su asociación con el tipo de razonamiento

Item	Respuesta	Favorable
10. Puedo trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
11. Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
12. Puedo resolver correctamente cualquier problema con fracciones	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
13. Entiendo todo lo que mi profesor explica sobre fracciones	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
3. Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejó de intentarlo	Siempre o casi siempre	S1
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S2

De este modo las creencias sobre la autoeficacia, favorables al empleo de S2, se leerían:

Siempre o casi siempre "**Puedo trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones**", "**Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil**", "**Puedo resolver correctamente cualquier problema con fracciones**" y "**Entiendo todo lo que mi profesor explica sobre fracciones**" y *más o menos, solo a veces o casi nunca* "**Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejó de intentarlo**".

En caso contrario diremos que las respuestas correspondientes a la dimensión de la autoeficacia son desfavorables a la aplicación de S2, cuando respondan con *más o menos, solo a veces o casi nunca* a los ítems 10, 11, 12 y 13 y el ítem 3 con *siempre o casi siempre*. En este caso diremos que los estudiantes tienen un bajo sentido de autoeficacia y que sus creencias son desfavorables a la aplicación de S2 o favorables a la aplicación de S1.

De este modo las creencias de autoeficacia, favorables al empleo de S1, se leerían:

Más o menos, solo a veces o casi nunca “**Puedo trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones**”, “**Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil**”, “**Puedo resolver correctamente cualquier problema con fracciones**” al igual que “**Entiendo todo lo que mi profesor explica sobre fracciones**” y *Siempre o casi siempre* “**Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejó de intentarlo**”

5.3.3.5 Creencias Sobre la Solución de Problemas. Estas creencias serán favorables a la aplicación de S2 cuando se responda *siempre o casi siempre* al ítem 16 y se responda *más o menos, solo a veces o casi nunca* a los ítems 15 y 17. Se ejemplifica en la siguiente tabla:

Tabla 9

Descripción de respuestas sobre creencias de la solución de problemas y su asociación con el tipo de razonamiento

Item	Respuesta	Favorable
16. La respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse	Siempre o casi siempre	S2
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S1
15. Los problemas de matemáticas se deben resolver rápido	Siempre o casi siempre	S1
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S2
17. La respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que me viene a la cabeza	Siempre o casi siempre	S1
	Casi nunca, solo a veces o más o menos	S2

De este modo las creencias sobre la solución de problemas, favorables al empleo de S2, se leerán:

Siempre o casi siempre **“La respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse”** y *más o menos, solo a veces o casi nunca “***Los problemas de matemáticas se deben resolver rápido”** y “**La respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que me viene a la cabeza**”.

En caso contrario, diremos que las respuestas desfavorables a la aplicación de S2 o favorables a la aplicación de S1, se darán cuando se contesté con *siempre o casi siempre* a los ítems 15 y 17 y con *más o menos, solo a veces o casi nunca* al ítem 16.

De esta manera, las creencias sobre la solución de problemas, desfavorables al empleo de S2 o favorables al empleo de S1, se leerán:

Siempre o casi siempre "**Los problemas de matemáticas se deben resolver rápido**" al igual que "**La respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que me viene a la cabeza**" y *más o menos, solo a veces o casi nunca "***La respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse***".*

5.3.4 Descripción de la Interpretación de los Resultados del Cuestionario de Problemas

Asumiremos una postura a priori respecto de los apartados del cuestionario (ítems congruentes e ítems incongruentes sobre producto y comparación de fracciones y problemas de respuestas abiertas sobre sumas y productos de números racionales) interpretando como la aplicación de un razonamiento analítico el hecho de que un estudiante que resuelva correctamente y justifique las respuestas de la tercera sección del cuestionario empleando sus conocimientos sobre números racionales, sus operaciones y sus propiedades, se esperaría entonces que tanto los ítems incongruentes como los congruentes de las otras dos secciones, los resolvería de manera correcta.

Para el análisis de las respuestas del cuestionario, comenzaremos pues por presentar el análisis de los últimos once ítems y luego confirmar la idea citada en el párrafo anterior revisando cómo resuelven los ítems incongruentes y finalmente, los congruentes.

Considerando que el cuestionario incluyó siente ítems congruentes y ocho incongruentes.

El sesgo del número natural evidenciará la aplicación de razonamiento intuitivo cuando:

a) Den **respuesta correcta** al menos a uno de los ítems sobre números racionales congruentes (el conocimiento que tienen los estudiantes sobre números naturales y coincide con la aplicación en racionales) y en las respuestas a las preguntas abiertas no evidencian la aplicación de propiedades sobre números racionales.

b) Den **respuestas incorrectas** al menos a cinco o más de los ítems incongruentes (el conocimiento que tienen los estudiantes sobre números naturales y no coincide con la aplicación en los racionales) y en las respuestas a las preguntas abiertas no se evidencian la aplicación de propiedades sobre números racionales.

El sesgo del número natural evidenciará la aplicación de razonamiento analítico cuando:

a) Den una **respuesta correcta** al menos a cinco de los ítems incongruentes con el conocimiento que tiene sobre los números naturales y la respuesta a la pregunta abierta ¿cómo lo sabes? Refuerza este hecho (es decir, explica su respuesta argumentando con propiedades sobre números racionales).

b) En casos especiales, la respuesta de los estudiantes a la pregunta abierta de ¿Cómo lo sabes? Es correcta, en el sentido de que explican con base a propiedades de los números racionales una respuesta correcta, pero responden de manera incorrecta al ítem incongruente por un error numérico o de signo.

En este caso se asume a priori que los estudiantes responderán correctamente los siete ítems congruentes.

6. Análisis de la Información

Se enviaron los instrumentos para quinientos ochenta y cinco alumnos de la escuela secundaria Camilo Arriaga de San Luis Potosí. En el momento de la aplicación de los instrumentos los alumnos tomaban aún clases virtuales, aunado a que se encontraban fuera de Zacatecas, por lo que los cuestionarios fueron aplicados de esta misma manera. La escala de creencias y las dos primeras secciones del cuestionario de problemas se elaboraron en un cuestionario de Google y la tercera sección del cuestionario de problemas sobre números racionales se escribió en un archivo PDF.

Se envió el cuestionario de manera grupal el día 3 de mayo del 2021. Las maestras fueron las encargadas de dar una breve explicación y enviarles los enlaces y el PDF de trabajo.

Del cuestionario de creencias se obtuvieron en total 247 respuestas, del cuestionario de problemas 173 y de la sección 3 de problemas se obtuvieron 130 cuestionarios resueltos. Por lo que se hizo un análisis de las intersecciones en las respuestas obtenidas y el total de alumnos que contesto la escala y las 3 secciones del cuestionario fueron 108.

Los resultados de la prueba se muestran a continuación y se corresponden con los resultados de un grupo de 33 alumnos de primero, 29 alumnos de segundo y 46 de tercero siendo todos, niños y niñas de entre 12 y 16 años.

Los resultados fueron capturados en la hoja de Excel, en una lista vertical se escribieron los nombres de todos los alumnos que coincidieron en contestar tanto la escala como las tres secciones del cuestionario de problemas con números racionales. De manera horizontal se colocaron las preguntas realizadas; en primer lugar, las de escala de creencias, después el cuestionario de problemas de opción múltiple (primeras secciones), y finalmente se incluyeron las preguntas de la sección de respuestas abiertas del cuestionario. Esta estrategia en el vaciado de la información permitía leer y revisar por columna las respuestas de todos los estudiantes a una misma pregunta y por fila, cada una de las respuestas de los estudiantes a los dos instrumentos aplicados.

6.1 Resultados

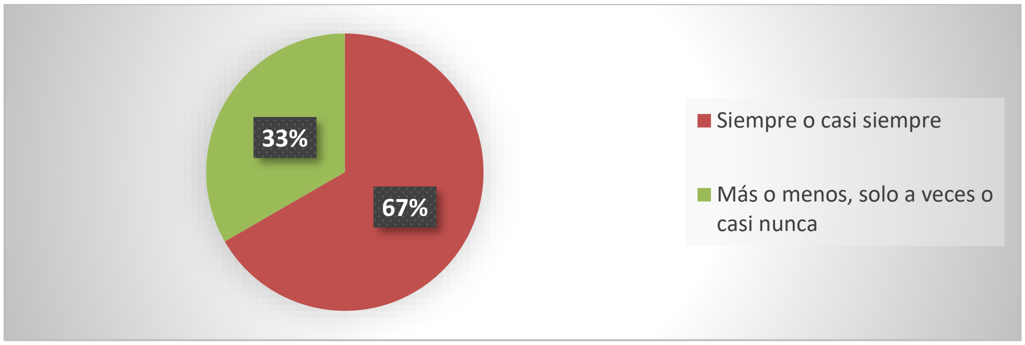
El siguiente apartado muestra los resultados obtenidos de la aplicación de las tres secciones utilizadas en nuestros instrumentos (cuestionario preguntas cerradas, cuestionario de creencias y cuestionario de preguntas abiertas) mismos que permiten realizar la explicación de nuestro análisis.

6.1.1 Creencias Sobre la Matemática

De las creencias sobre la matemática los resultados indican que la mayoría de los estudiantes tienen creencias que podrían considerarse favorables a la aplicación del pensamiento analítico, pues setenta y dos de los ciento ocho estudiantes creen que las matemáticas se tratan *siempre o casi siempre* de **entender mejor el mundo en el que vivimos** (figura 3).

Figura 3

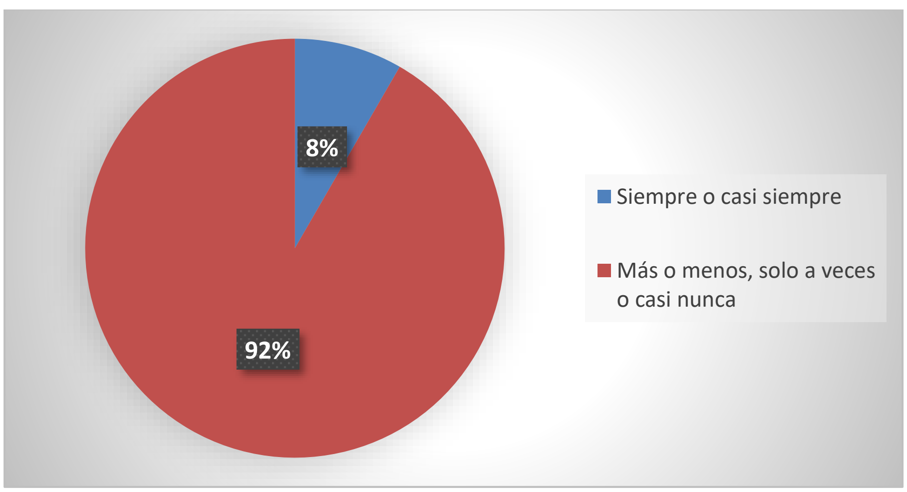
Respuestas al ítem: Las matemáticas se tratan de entender mejor el mundo en el que vivimos



Noventa y cinco, también consideran que **las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas** y noventa y nueve responden *más o menos, solo a veces o casi nunca* que **Solo los genios aprenden matemáticas** (figura 4).

Figura 4

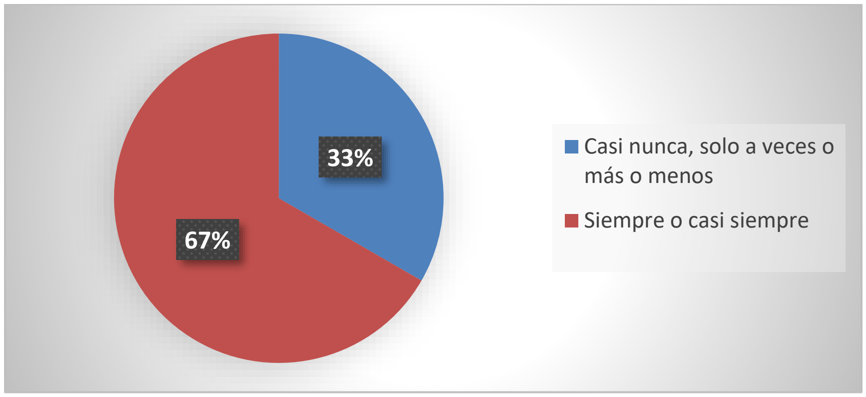
Respuestas al ítem: Solo los genios aprenden matemáticas



En nuestra propuesta de interpretación, asumimos que los estudiantes que respondieran *siempre o casi siempre* a los ítems 2 y 8, responderían *más o menos, solo a veces o casi nunca* a los ítems 7 y 9 y tendrían creencias favorables a S2, sin embargo, solo treinta y seis consideraron que *casi nunca, solo a veces o más o menos*, **las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar** (figura 5).

Figura 5

Respuestas al ítem: Las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar

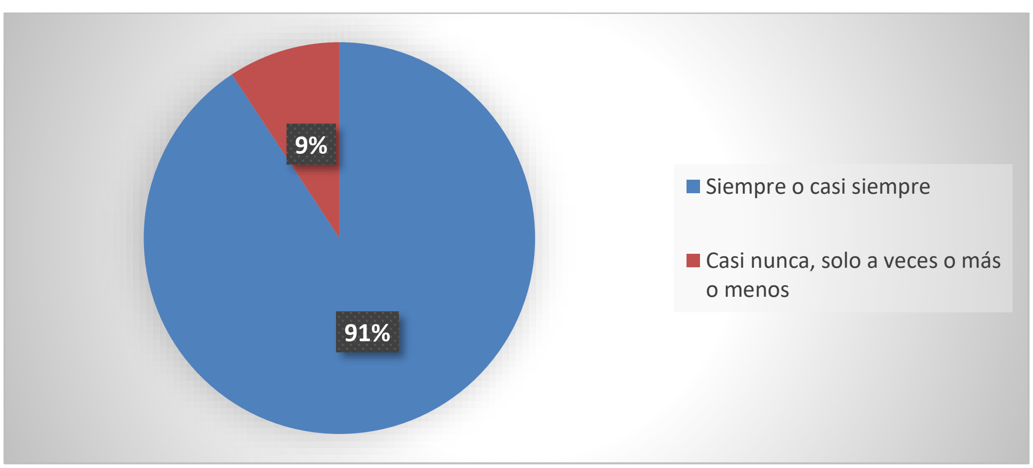


A pesar del predominio del *siempre o casi siempre* en esta última creencia, encontramos entonces un contraste con el hecho de la creencia de los noventa y cinco que consideran que **las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas**, interpretamos este hecho como la existencia de una conciencia en los estudiantes, de que si bien, en matemáticas es importante entender procedimientos, la memoria forma parte fundamental de su aprendizaje.

Solo nueve de los ciento ocho estudiantes consideran que *siempre o casi siempre* **solo los genios aprenden matemáticas**, que se refuerza con los noventa y ocho estudiantes que dicen que *siempre o casi siempre* **cualquiera puede aprender matemáticas** (figura 6).

Figura 6

Respuestas al ítem: Cualquiera puede aprender matemáticas

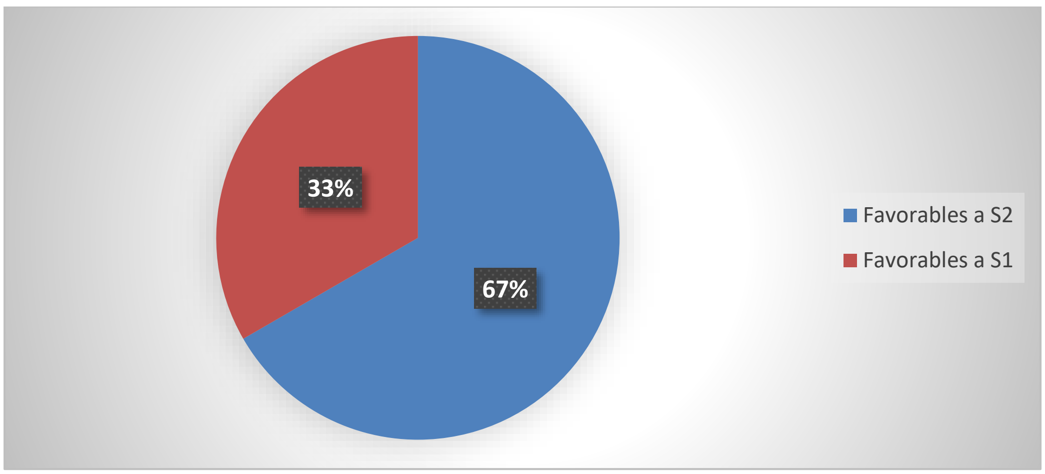


También encontramos que, de estos nueve estudiantes, cuatro dicen **aprender rápidamente las matemáticas de la clase**, *casi siempre*. Tres dicen *que casi siempre* **entienden todo lo que su profesor explica sobre fracciones**. Estos cuatro, además de uno más de los nueve, dicen que *siempre o casi siempre* **pueden trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones**, lo que pudiera indicar que la creencia de que **solo los genios aprenden matemáticas** corresponde con una creencia que suele llamarse por algunos autores, creencias de persuasión social, es decir los alumnos se han formado esta creencia por el solo hecho de que todos a su alrededor la repiten frecuentemente y la consideran como un hecho.

De este modo se puede decir que a lo más el 33% de los estudiantes tiene creencias sobre la matemática desfavorables a la aplicación del pensamiento analítico y favorables entonces a la aplicación del pensamiento intuitivo (figura 7).

Figura 7

Creencias de las matemáticas favorables a los tipos de razonamiento

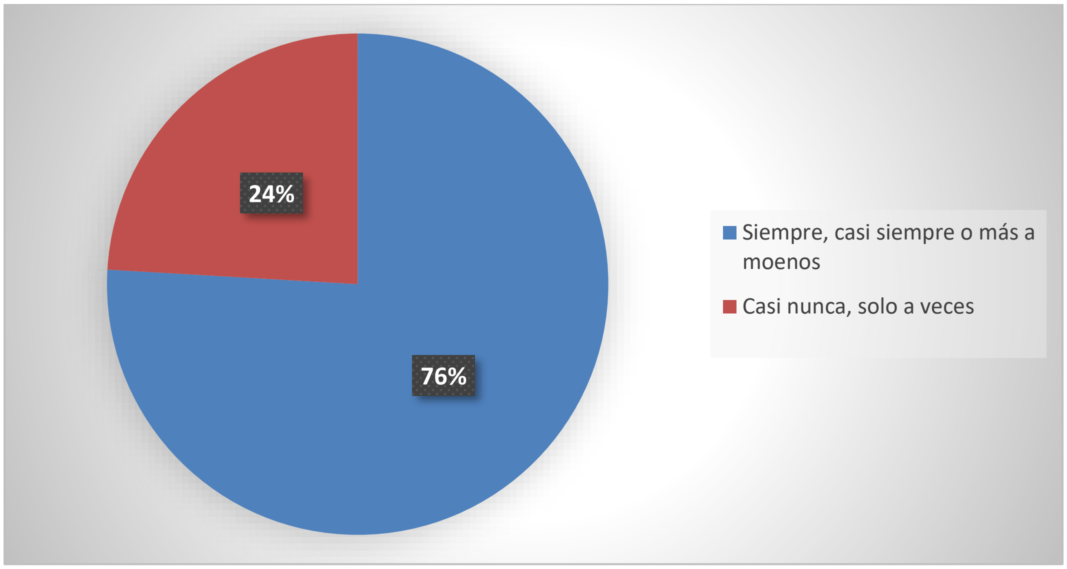


6.1.2 Creencias Sobre el Aprendizaje

Encontramos que las creencias sobre el aprendizaje son también favorables a la aplicación del pensamiento analítico. Ochenta y dos de los ciento ocho estudiantes dicen que *siempre, casi siempre o más o menos* **prefieren tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas** (figura 8), noventa y cuatro dicen que *siempre, casi siempre o más o menos* **aprenden las matemáticas de clase rápidamente.** Ya se señalaba que noventa y ocho estudiantes dicen que *siempre o casi siempre* **cualquiera puede aprender matemáticas** y noventa y nueve responden que *más o menos, solo a veces o casi nunca* que **Solo los genios aprenden matemáticas**. Estas creencias las interpretamos como una predisposición positiva hacia el aprendizaje ya que prefieren que este sea un reto además de que los alumnos se asumen como parte de los que sí aprenden matemáticas.

Figura 8

Respuestas al ítem: Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas



Esto se corresponde con los datos de las creencias sobre la matemática ya que se observa que la mayoría de los alumnos (noventa y ocho) **creen que cualquiera puede aprender matemáticas**, haciendo pensar que consideran que ellos mismos pueden aprender matemáticas y respaldando el hecho de que ochenta y dos de los ciento ocho alumnos, **prefieren tareas que supongan retos para aprender cosas nuevas sobre matemáticas**, lo que pone de evidencia su interés por el aprendizaje a través de retos en la enseñanza.

6.1.3 Creencias Sobre la Enseñanza

De las creencias sobre la enseñanza los resultados indican que la mayoría de los estudiantes tienen creencias que pueden considerarse favorables a la aplicación del pensamiento analítico, pues setenta y nueve de los estudiantes creen que *siempre o casi siempre* **las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos** (figura 9), lo que podría evidenciar que los alumnos asumen la importancia de la solución de problemas para el aprendizaje de la matemática pero el 50% de los alumnos considera que *más o menos, solo a veces o casi nunca* **recuerdan todo lo que su profesor les enseñó sobre fracciones** (figura 10), lo que indica que no existe una correspondencia directa de este aprendizaje o no aprendizaje con alguna de las profesoras, considerando que son alumnos de diferentes grados y que tienen diferente profesora.

Figura 9

Respuestas al ítem: Las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos

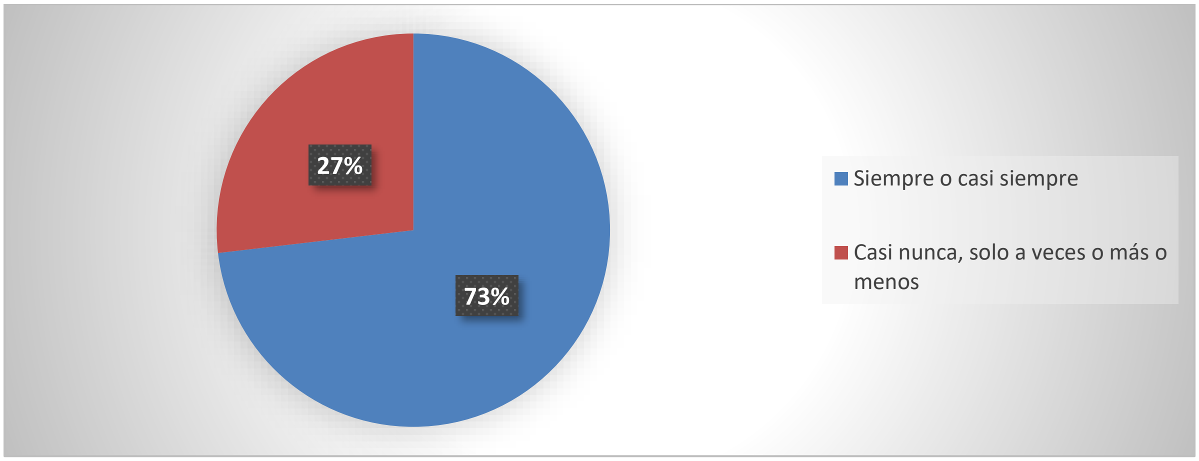
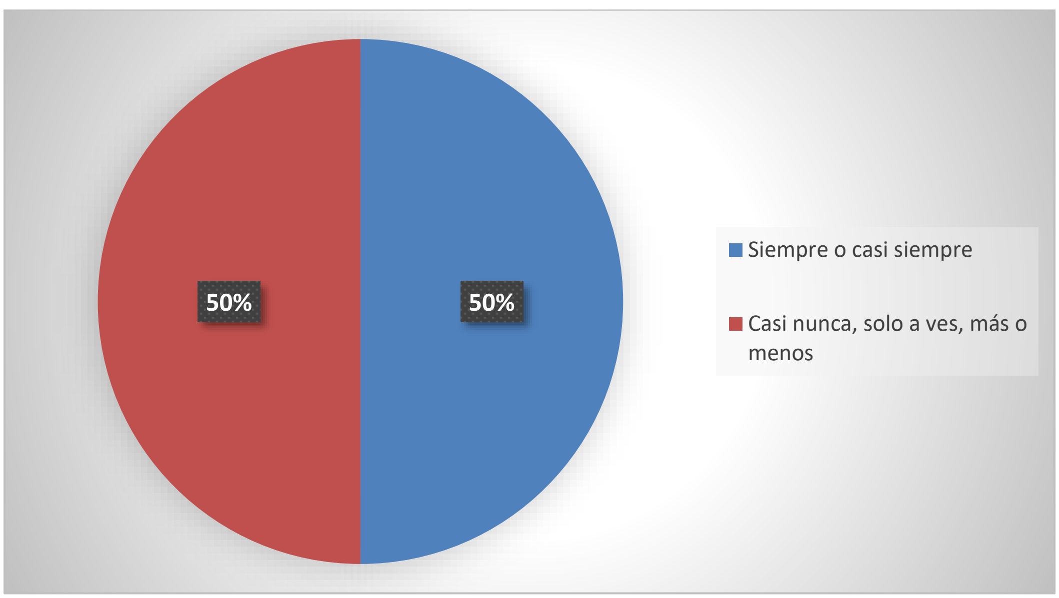


Figura 10

Respuestas al ítem: Recuerdo todo lo que mi profesor me enseñó sobre fracciones



De igual forma si interpretamos la creencia sobre la enseñanza: **las clases de matemática debieran dar importancia a la solución de problemas** como favorable al pensamiento analítico, los resultados de la escala indican que ningún estudiante descarta con un casi nunca o con un solo a veces esta creencia, es decir veintinueve estudiantes manifiestan que *más o menos* **las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos**.

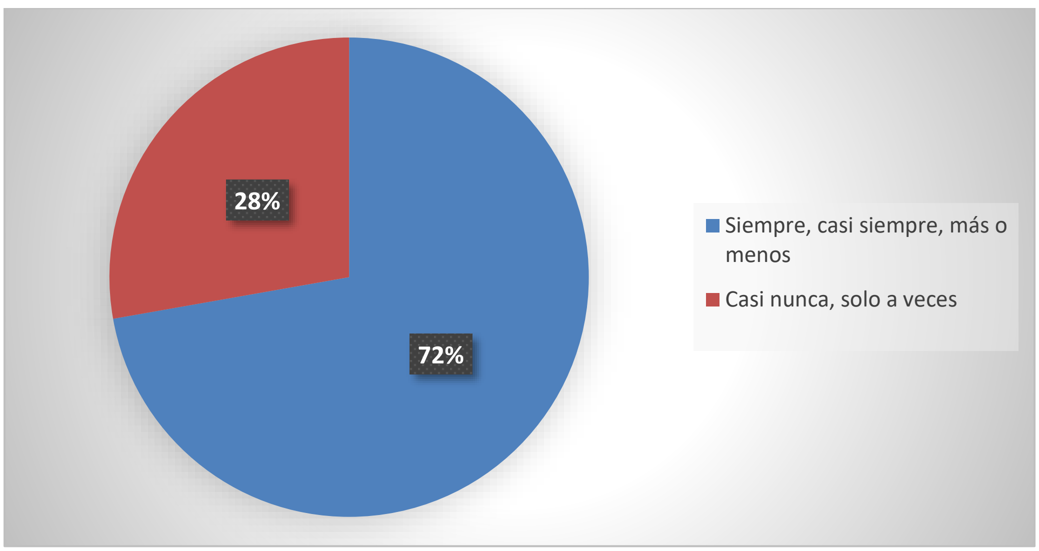
Noventa y cuatro estudiantes consideran que *más o menos, casi siempre* o *siempre* **aprenden las matemáticas rápidamente** y además de que *siempre* o *casi siempre* (Noventa y ocho) cualquiera puede hacerlo. 76% de los estudiantes responden con un *más o menos, casi siempre o siempre* prefieren que **las tareas supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas en casa**.

6.1.4 Creencias de Autoeficacia

El sentido de autoeficacia es en general alto en la mayoría de los estudiantes. En sus respuestas encontramos que el 72%, creen que *más o menos, casi siempre o siempre* **pueden resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil** (figura 11). Noventa de los ciento ocho estudiantes creen que *más o menos, casi siempre o siempre* han **entendido todo lo que su profesor explicó sobre fracciones**, que lo recuerdan y que **pueden resolver cualquier problema de fracciones**.

Figura 11

Respuestas al ítem: Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil



6.1.5 Creencias Sobre la Solución de Problemas

De las creencias sobre la solución de problemas ochenta y seis de los estudiantes cree que **los problemas de matemáticas deben reflexionarse**, lo que es favorable para la aplicación de S2 (figura 12). Sin embargo, sesenta y dos de los estudiantes creen que los problemas de matemáticas deben resolverse rápido (figura 13) y sesenta y seis dicen que los problemas deben contestarse con la primera idea que viene a su cabeza, esto habla de una tendencia hacia la aplicación del pensamiento intuitivo.

Figura 12

Respuestas al ítem: Los problemas de matemáticas deben reflexionarse

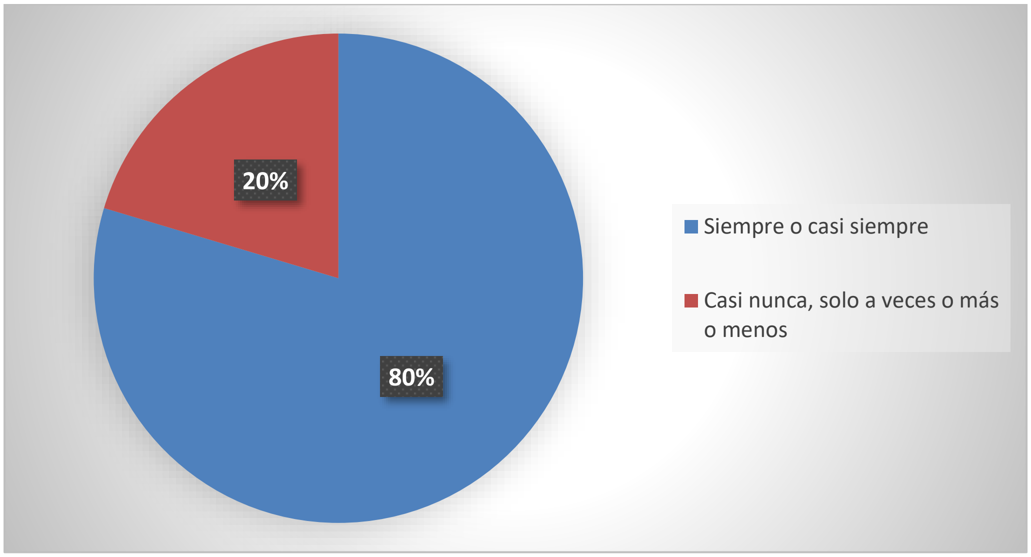
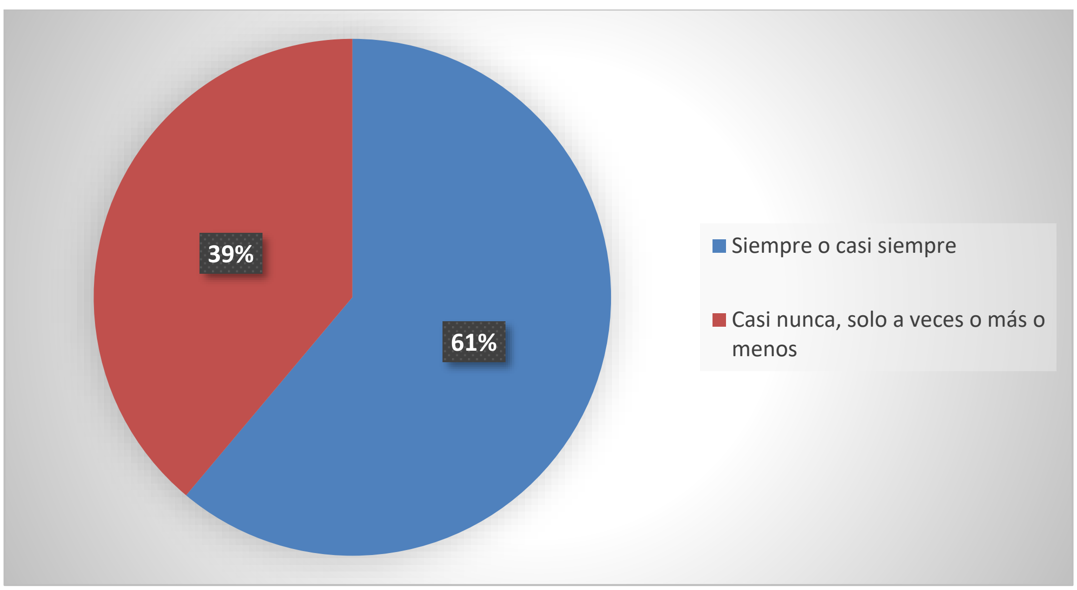


Figura 13

Respuestas al ítem: Las matemáticas se tratan de entender mejor el mundo en el que vivimos



La figura 14 puede ilustrar la generalidad de las respuestas dadas por los estudiantes. Se colocaron las preguntas según la dimensión a la que correspondía. Los colores indican las respuestas dadas en cada una de las preguntas. El azul corresponde a la respuesta "*casi nunca*", el rojo corresponde a "*solo a veces*", el verde a "*más o menos*", el morado a "*casi siempre"* y el azul celeste a "*siempre*", también se encuentran de izquierda a derecha en esa misma correspondencia.

Se escribieron en principio las creencias sobre la matemática (9, 2, 8, 7), en donde se observa una preponderancia del color azul celeste en 2, 8 y 7 y del azul en el caso de la 9 que se interpreta en efecto que los alumnos se asumen como pertenecen al grueso de los estudiantes que sí aprenden matemática aun si ser genios.

Después las creencias de autoeficacia (13, 12, 11, 10, 3), en las que, de igual forma, se puede ver la tendencia mayor en los colores azul celeste y morado que se corresponden con el "*siempre"* y "*casi siempre*", reforzando con el azul del "*casi nunca*" **Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejo de intentarlo**.

Las creencias sobre la solución de problemas (15, 17, 16), **Los problemas de matemáticas se deben resolver rápido**, **la respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que me viene a la cabeza**, con colores correspondientes mayoritariamente al "*nunca*" o "*casi nunca*" azul y rojo correspondiéndose con el mayoritariamente "*siempre*" o "*casi siempre*" **a la respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse**, en colores morado y azul celeste.

Luego las creencias sobre la enseñanza de la matemática (6 y 14) con la preponderancia del azul celeste, el morado y el verde en ambas.

Por último, las creencias sobre el aprendizaje (4, 5, 1 y 9). En las que también se observa la preponderancia del azul celeste, el morado y el verde en la 4, 5 y 1 contra la preponderancia del azul en la creencia 9.

La redacción de las preguntas se encuentra incompleta para facilitar la lectura de la gráfica, pero se pueden leer en el apartado sobre el cuestionario de creencias.

Figura 14

Resumen de resultados de cuestionario de creencias

Nota: Los cinco tipos de creencias mostraron una inclinación mayoritaria hacia la aplicación del pensamiento analítico.

6.2 Sobre Cuestionario de Números Racionales

6.2.1 Resultados de la Sección 1 y 2 del Cuestionario

A continuación, se presentan dos tablas que muestran la cantidad de respuestas correctas e incorrectas a cada uno de los ítems incluidos en el cuestionario, se separaron los congruentes de los incongruentes.

Tabla 10

Respuestas dadas en ítems incongruentes

Ítem	Alumnos que contestaron incorrectamente	Alumnos que contestaron correctamente
1.- 5 x ½	27	81
4.- 2 x 0.5	8	100
10.- $\frac{12}{5}$ y $\frac{12}{8}$	33	75
11.- $\frac{3}{15}$ y $\frac{3}{30}$	37	71
12.- $\frac{24}{36}$ y $\frac{24}{51}$	40	68
13.- $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{18}$	39	69
14.- $\frac{29}{17}$ y $\frac{13}{20}$	34	74
15.- $\frac{36}{21}$ y $\frac{7}{56}$	29	79

De acuerdo con los números de la Tabla 10 y al filtro de la información en el archivo Excel (base de datos), al menos el 48% de los estudiantes empleó el razonamiento analítico, ya que responden correctamente al menos a 5 de los ítems incongruentes.

Tabla 11

Respuestas dadas en ítems congruentes

Ítem	Cantidad de alumnos que contestaron incorrectamente	Cantidad de alumnos que contestaron correctamente
2.- 10 $\times$ 3/2	17	91
3.- 8 x 5/2	20	88
5.- 7 x 1.5	5	103
6.- 8 x 2.5	5	103
7.- $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{3}$	24	84
8.- $\frac{13}{35}$ y $\frac{12}{35}$	22	86
9.- $\frac{25}{7}$ y $\frac{31}{7}$	25	83

De acuerdo con esta tabla y el análisis que se tomó en cuenta para definir el tipo de razonamiento aplicado, un promedio de noventa y uno de los ciento ocho estudiantes aplicó el razonamiento intuitivo.

En seguida, se presentan ejemplos de las respuestas que dieron los estudiantes a las preguntas ¿cómo lo sabes? correspondientes a ítems congruentes e incongruentes. Se presentan, en un inicio, respuestas de los ítems incongruentes, resaltando en verde las correctas y en rojo las incorrectas, las cuales son dadas por el modelo implícito derivado del conocimiento de la multiplicación con números naturales.

Pregunta: 1.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 5 x ½ ¿El resultado será mayor o menor que 5?

A9

Mayor que 5	Al ser una multiplicación al multiplicar lo por lógica tiene que ser mayor

Pregunta: 4.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 2 x 0.5 ¿El resultado será mayor o menor que 2?

A77

Menor que 2	0.5 sería como el 50% de cualquier número, osea la mitad, si se multiplica el resultado sería la mitad de 2.

A continuación, se ejemplifican las respuestas a ítems congruentes, resaltando igualmente en verde las correctas y en rojo las incorrectas.

Pregunta 2.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 10 x 3⁄2 ¿El resultado será mayor o menor que 10?

A17

Mayor que 10	Porque cuando se multiplican fracciones: 10/1×3/2 que el resultado se divide (30:2) y queda 15

Pregunta: 3.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 8 x 5⁄2 ¿El resultado será mayor o menor que 8?

A9

Menor que 8	Es una fracción impropia

Algunos ejemplos de las respuestas a ítems congruentes en comparaciones de fracciones ya que cuentan con el mismo denominador.

Pregunta: 7. ¿Cuál número es mayor, dados 2/3 y 5/3?

A65

5/3	Porque tiene mismo denominador y el numerador más grande

Pregunta: 8. ¿Cuál número es mayor, dados 13/35 y 12/35?

A11

12/35	Por que tomo de referencia que 1/2 es mayor que 1/4 entonces el numero menor es mayor

Algunos ejemplos de respuestas a ítems incongruentes de comparación de fracciones, en este caso se propone la comparación de fracciones con el mismo numerador.

Pregunta: 11. ¿Cuál número es mayor, dados 3/15 y 3/30?

A25

3/15	Porque 3/15 es mayor y si quiero convertirlo a treintavos seria 6/30

Pregunta: 10. ¿Cuál número es mayor, dados 12/5 y 12/8?

A24

12/8	Por que el número 8 es más grande qué el 5 aún q los dos tengan un 12

A continuación, ejemplos de las respuestas dadas de los estudiantes a los ítems de fracciones con diferente numerador y denominador.

Pregunta: 14. ¿Cuál número es mayor, dados 29/17 y 13/20?

A19

29/17	Por que 29/17 si lo simplificamos sería 1 entero y 12/17 mientras que 13/20 ni si quiera alcanza un entero

Pregunta: 13. ¿Cuál número es mayor, dados 3/5 y 7/18?

A76

7/18	Por qué el numerador y denominador es más grande q la otra fracción

6.2.2 Resultados de la Sección 3 del Cuestionario

Los resultados del análisis de las respuestas de los ítems de la tercera sección, en la que se incluyeron once problemas de respuesta abierta que consistían en el cálculo de sumas, restas y multiplicaciones de números racionales en las que debían además explicar el procedimiento que llevaron a cabo en cada cálculo, se presentan por operación, es decir, describiremos las respuestas de los estudiantes a las sumas, restas y, por último, a las multiplicaciones.

Para los ítems de sumas de fracciones (1,3 y 5) identificamos dos métodos distintos que los estudiantes emplean para dar respuestas numéricas correctas y la explicación dada sobre el método aplicado se corresponde con el método empleado.

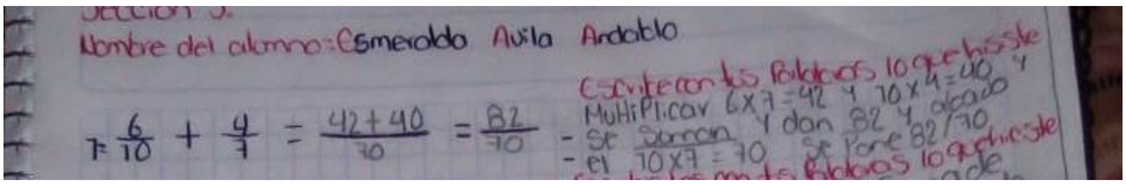
1.-*Método cruzado*. Es un método para calcular la suma de fracciones que se emplea en el salón de clases (SEP, 2023). Dicho método consiste en sumar el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción con el producto del denominador de la primera fracción por numerador de la segunda, esta suma se corresponde con el numerador de la fracción suma, el denominador de la suma se calcula con el producto de los dos denominadores.

En el caso de este método, se identificaron a su vez cuatro respuestas correctas diferentes, ya que algunos estudiantes, además de hacer el cálculo, simplifican la fracción resultante, expresan el resultado como fracción mixta o, una vez calculada la suma, calculan su representación decimal.

Se presentan a continuación, imágenes de los cuatro tipos de respuesta encontrados:

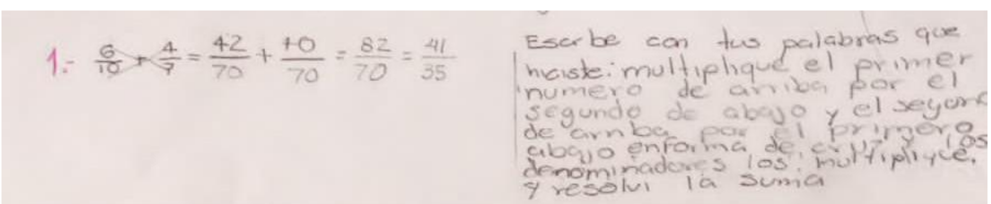
a) Método Cruzado:

A-3



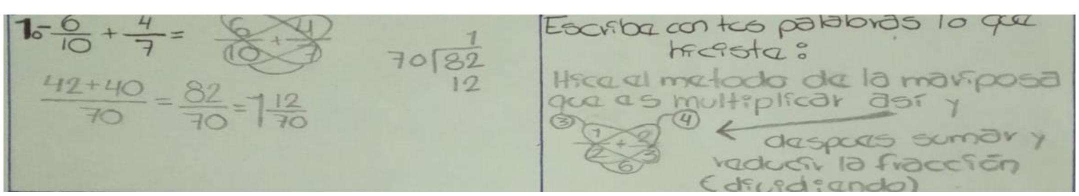
b) Método cruzado y simplificación; En este tipo de respuesta los estudiantes además de calcular la suma correctamente simplifican el resultado, identificando y eliminando factores comunes entre numerador y denominador.

A-90



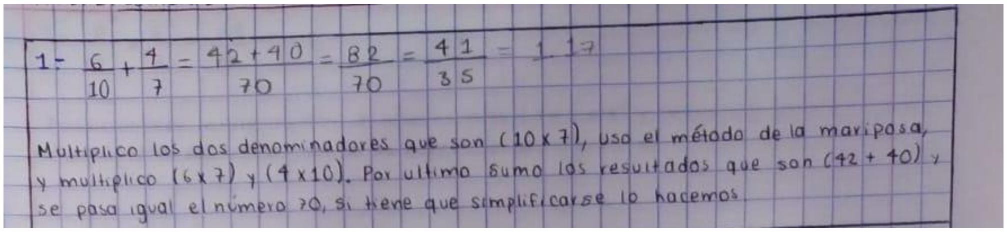
c) Método cruzado y fracción mixta; en este caso, los alumnos calculan correctamente la suma, simplifican la fracción y luego expresan esta fracción propia en una fracción mixta.

A-96



d) Método cruzado y representación decimal; En este tipo de solución los alumnos luego de aplicar el método cruzado y obtener la representación fraccionaria de la suma, calcularon también la representación decimal.

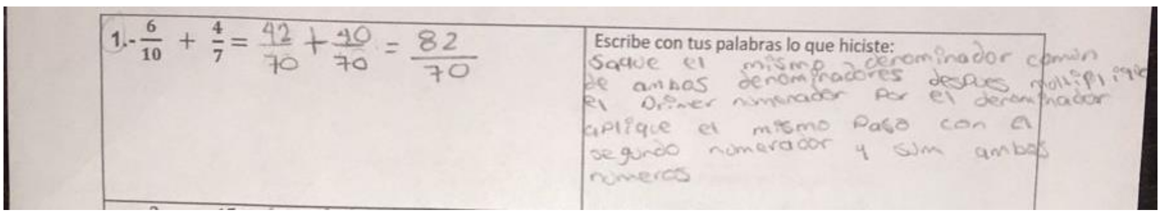
A-76



$1.-\ \frac{6}{10}+\frac{4}{7}=\frac{42+40}{70}=\frac{82}{70}=\frac{41}{35}$

Multiplico los dos denominadores que son (10 x 7), uso el método de la mariposa, y multiplico (6 x 7) y (4 x 10). Por ultimo sumo los resultados que son (42 + 40) y se pasa igual el número 70, si tiene que simplificarse lo hacemos.

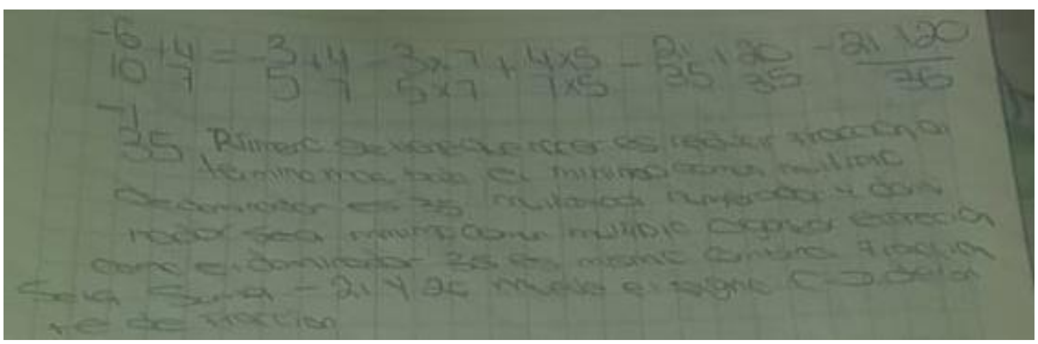
2.- *Método del Mínimo Común Múltiplo*; en este procedimiento, los alumnos calcularon y explicaron que buscaron el mínimo común múltiplo de los dos denominadores, transformaron cada una de las fracciones en fracciones equivalentes con el mismo denominador para, finalmente, sumar únicamente los numeradores. Tal es el caso de A24:



$1.-\ \frac{6}{10}+\frac{4}{7}=\frac{42}{70}+\frac{40}{70}=\frac{82}{70}$

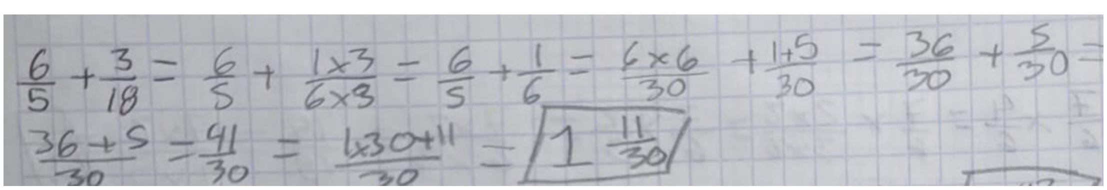
Escribe con tus palabras lo que hiciste:
Saque el mismo denominador comun de ambos denominadores despues multiplique el primer numerador por el denominador aplique el mismo paso con el segundo numerador y sum ambos numeros

Y A7 quien primero simplifica una de las fracciones, luego convierte ambas a fracciones equivalentes usando los denominadores y calcula la suma de fracciones con un mismo denominador.



La respuesta de este estudiante es más elaborada en el sentido que escribe explícitamente cada una de las operaciones que otros estudiantes realizan de manera implícita y que quizá le fue difícil describir con palabras, sin embargo, es una muestra clara de la aplicación de un razonamiento analítico.

A-69

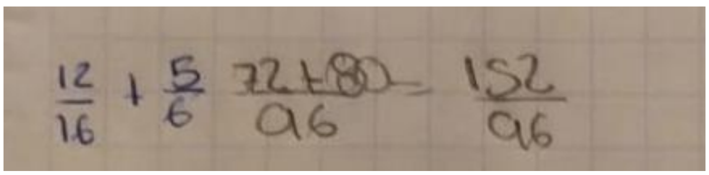


$\frac{6}{5}+\frac{3}{18}=\frac{6}{5}+\frac{1\times3}{6\times3}=\frac{6}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6\times6}{30}+\frac{1\times5}{30}=\frac{36}{30}+\frac{5}{30}=\frac{36+5}{30}=\frac{41}{30}=\frac{1\times30+11}{30}=\boxed{1\frac{11}{30}}$

Después del primer signo de igualdad el estudiante da cuenta de la identificación de un factor común entre el numerador y el denominador del segundo sumando, luego del segundo signo de igualdad el estudiante simplifica dicha fracción. Luego del tercer signo de igualdad el estudiante convierte cada sumando en fracciones equivalentes con mismo denominador, para lo cual emplea la multiplicación por el factor 6 en la primera fracción y por el factor 5 en la segunda, obteniendo así 36/30 y 5/30, luego suma numeradores y obtiene 41/30, emplea el algoritmo de la división para expresar el 41 en términos del cociente y residuo considerando a 30 como el divisor, razón por la cual escribe en el numerador que 41=30x1+11, para finalmente escribir que la representación como fracción mixta de 41/30 es: un entero 11/30.

Encontramos también respuestas correctas en los que se hace evidente un método de cálculo correcto pero los alumnos no explican el procedimiento con palabras. Estos casos los excluimos del conteo de respuestas correctas porque la intención de estos ítems era que los estudiantes evidenciaran la aplicación de un razonamiento analítico que hacemos corresponder con la explicación del método empleado para el cálculo de la solución y esto es imposible corroborar en estos casos. Como ejemplo se presenta:

A-89

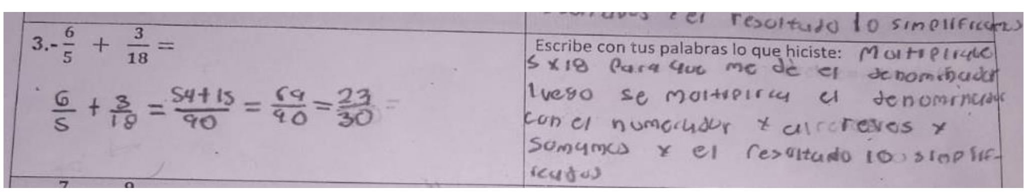


Entre las respuestas incorrectas a los ítems 1,3 y 5, encontramos respuestas en las que los alumnos aplican de manera correcta un método, pero cometen errores de cálculo:

1. *Método cruzado y errores de cálculo*:

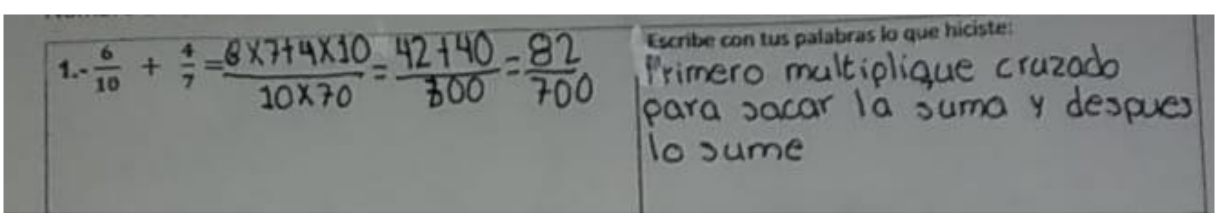
a) Errores en productos cruzados

A-8



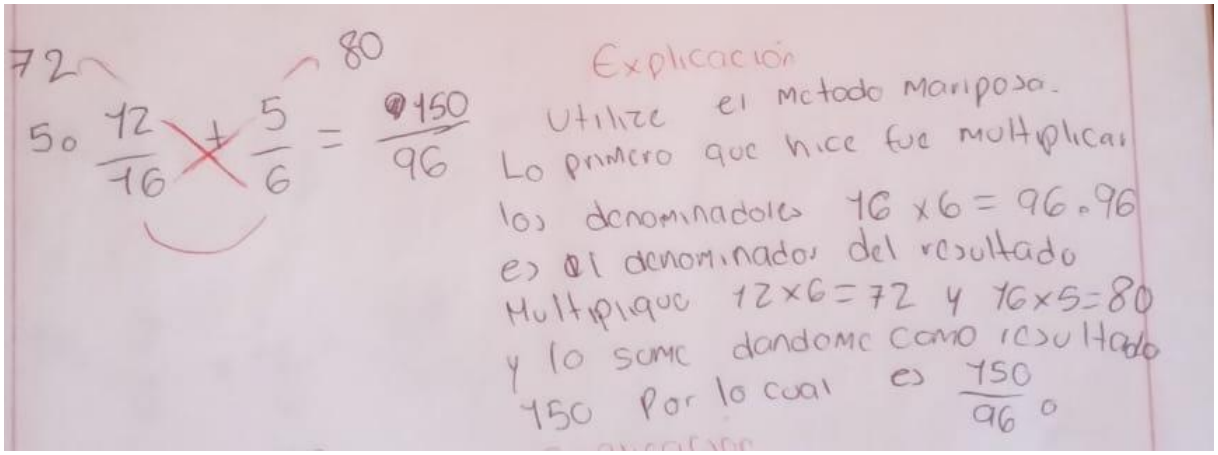
b) Errores en el producto de los denominadores

A-15



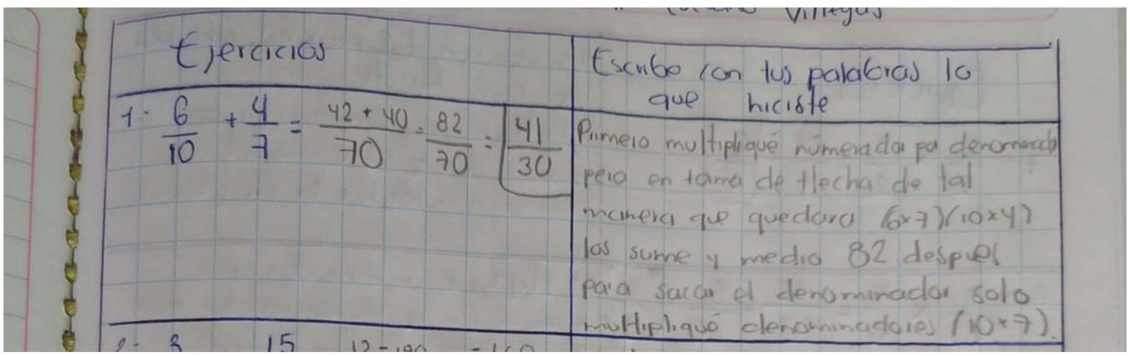
c) Errores en el cálculo de la suma de los productos cruzados:

A-59

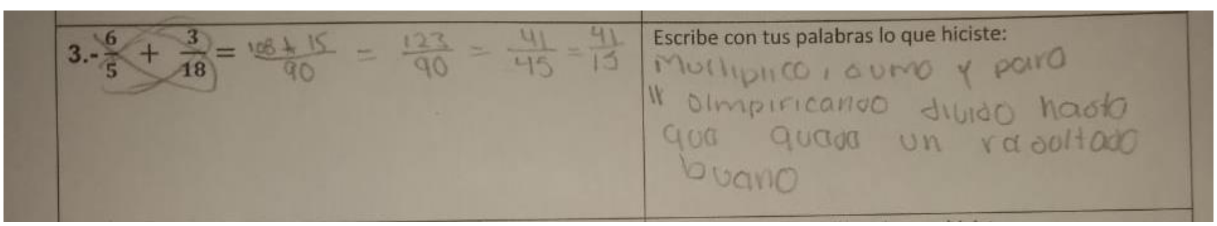


d) Errores en la simplificación de la fracción:

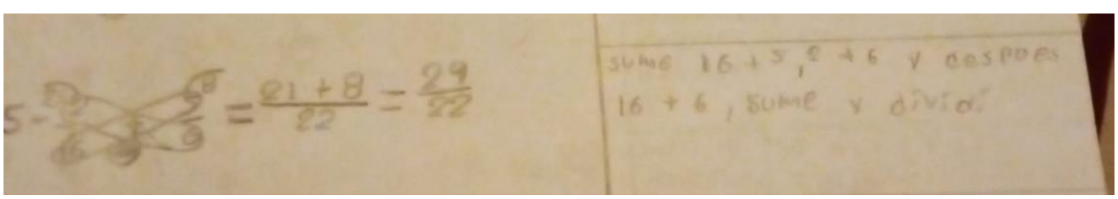
A-84



A-33

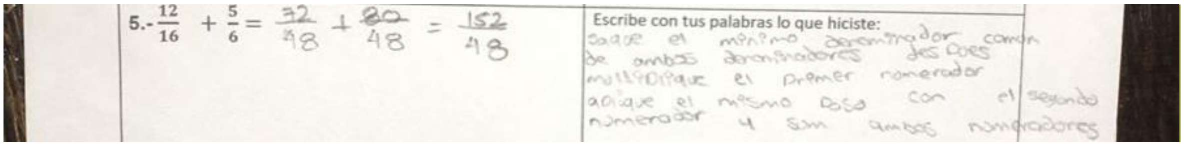


A-35



2.- *Método del Mínimo Común Denominador con errores de cálculo* en el mínimo común múltiplo u otro cálculo posterior a este. En este caso de respuestas incorrectas, los estudiantes aplican correctamente el método del mínimo común denominador, pero cometen un error al calcular el mínimo común múltiplo de los dos denominadores o bien en algún cálculo posterior a este.

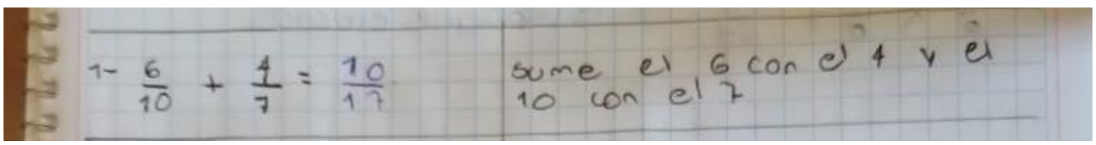
A24



3.- *Métodos incorrectos del cálculo de la suma*.

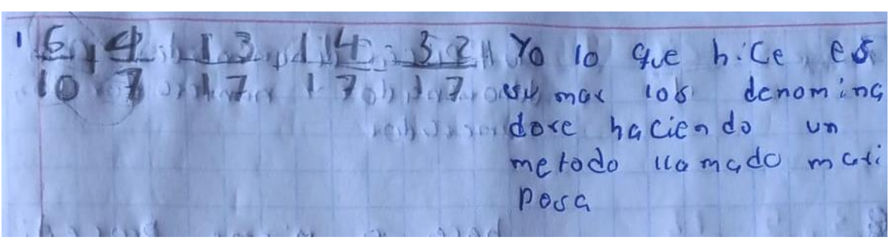
a) Suma de numerador con numerador y denominador con denominador.

A-13



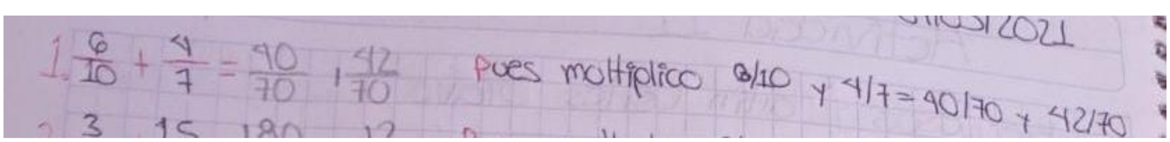
b) Suma del numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda fracción, luego sumó el denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda fracción y ambos resultados los sumó entre sí para obtener el numerador resultante, mientras que, para obtener el denominador, sumó los dos denominadores de las fracciones involucradas.

A-108



c) Convierte las fracciones involucradas en la suma en fracciones equivalentes, usando los denominadores de las fracciones, pero luego ya no realiza ningún cálculo que concluya con el cálculo de la suma.

A64



d) Suma numerador de la primera fracción con denominador de la segunda y este lo considera como denominador del resultado y el numerador lo calcula sumando el denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda.

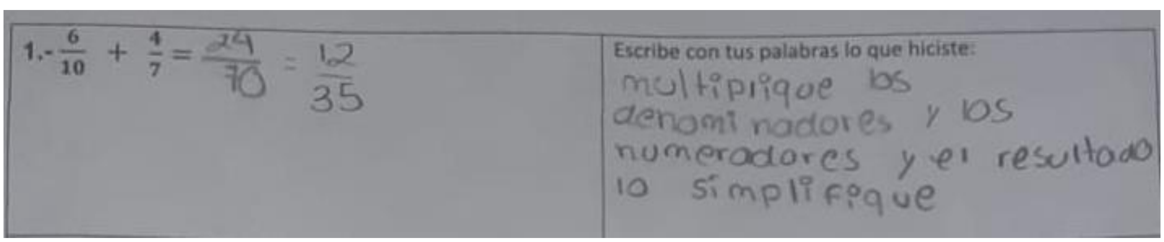
A-63

e) Suma numerador de la primera fracción con denominador de la segunda y este lo considera como numerador del resultado y el denominador lo calcula sumando el denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda.

A-18

4.- *Multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.*

A-11



Respuestas en las que los alumnos no hacen explícito el método empleado para el cálculo, no redactan el procedimiento empleado y/o lo que explican no se corresponde con el método incorrecto que si hacen explícito.

A-103

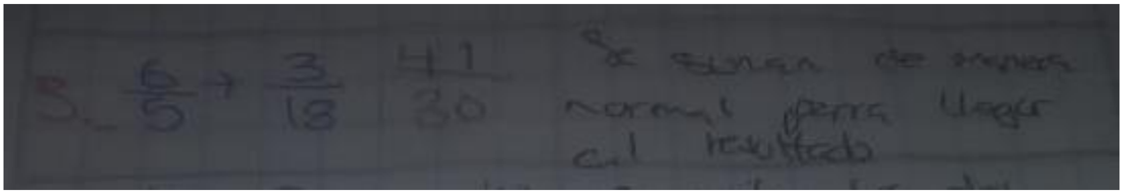
3.- $\frac{6}{5} + \frac{3}{18}$ =**41/30**	Escribe con tus palabras lo que hiciste: **sumando las fracciones**

A-23

5.- **12/16** + **5/6** =152/96   Escribe con tus palabras lo que hiciste:

resolví la operación mentalmente

A-41



A-78

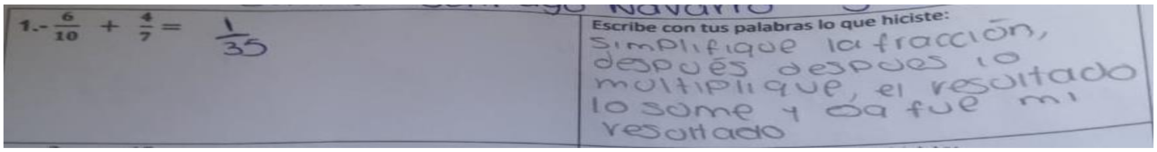


Tabla 12

Resultados resumidos de la suma ítem 1

Método de aplicación	Resultado correcto
Método De Mariposa	35
Método De Mariposa Y Simplificación	18
Método De Mariposa Y Fracción Mixta	14
Método De Mariposa Y Decimales	2
Mínimo Comun Denominador	3
Mínimo Comun Denominador Y Simplificó A Fracción Mixta	1
No Hay Explicación	3

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método De Mariposa	8
Método De Mariposa Y Simplificación	3
Método De Mariposa Y Fracción Mixta	2
Mínimo Comun Denominador	1
Mínimo Comun Denominador Y Simplificó A Fracción Mixta	2
Sumó De Manera Lineal	6
No Realizaron Procedimiento Escrito	3
Método De Mariposa, Pero Sumando	2
Multiplica La Fracción Por Numerador	1
Multiplicó Denominador Por Fracción (Dos Resultados)	1
Procedimiento Como División	1
Procedimiento Como Multiplicación	2

Tabla 13

Resultados resumidos de la suma ítem 3

Método de aplicación	Resultado correcto
Método De Mariposa	37
Método De Mariposa Y Simplificación	15
Método De Mariposa Y Fracción Mixta	13
Método De Mariposa Y Decimales	1
Mínimo Comun Denominador	3
Mínimo Comun Denominador Y Simplificó A Decimales	1
No Hay Explicación	5

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método De Mariposa	13
Método De Mariposa Y Simplificación	2
Método De Mariposa Y Fracción Mixta	2
Minimo Comun Denominador	2
Sumó De Manera Lineal	6
No Realizaron Procedimiento Escrito O Procedimiento	3
Método De Mariposa, Pero Sumando	2
Multiplica La Primera Fracción Por El Segundo Denominador	1
Multiplicó Denominadores Por Fracción (2 Resultados)	1
Procedimiento Como División	1

Tabla 14

Resultados resumidos de la suma ítem 5

Método de aplicación	Resultado correcto
Método De Mariposa	33
Método De Mariposa Y Simplificación	23
Método De Mariposa Y Fracción Mixta	11
Método De Mariposa Y Decimales	1
Mínimo Comun Denominador	1
Mínimo Comun Denominador Y Simplificó A Decimal	1
Sin Explicación	6

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método De Mariposa	10
Método De Mariposa Y Simplificación	1
Método De Mariposa Y Fracción Mixta	3
Mínimo Comun Denominador	4
Sumó De Manera Lineal	6
Sumó De Manera Cruzada	2
No Realizaron Procedimiento Escrito	3
Método De Mariposa, Pero Sumando	1
Multiplica Denominadores Por Fracción	1
Multiplico Denominador Por Fracción, Dos Resultados	1

Para los ítems de la resta de fracciones (2, 4 y 6) identificamos dos métodos distintos que los estudiantes emplean para dar respuestas numéricas correctas y la explicación dada sobre el método que usaron se corresponde con el método aplicado.

1.-*Método cruzado*; el que consiste en la resta del producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda, en ese orden, esta resta se corresponde con el numerador de la fracción resultante, mientras que el producto entre ambos denominadores será el denominador del resultado correcto.

Para este método, se identificaron a su vez cuatro respuestas correctas diferentes, ya que algunos estudiantes, además de hacer el cálculo, simplifican la fracción resultante, expresan el resultado como fracción mixta o, una vez calculada la resta de fracciones calculan su representación decimal.

A continuación, se presentan imágenes de los cuatro tipos de respuestas encontradas:

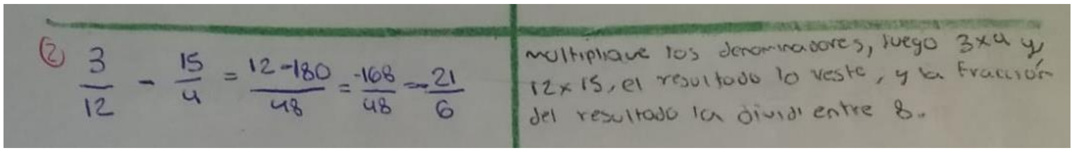
a) Método cruzado:

A-25

4. $\frac{7}{11} - \frac{9}{8} = \frac{56-99}{88} = \frac{-43}{88}$	Escribe con tus palabras lo que hiciste: **Al ser diferentes denominadores lo multiplique, el resultado fue 88 y lo puse como denominador, luego multiplique 7 por 8 y el resultado fue 56, y lo puse como numerador, luego multiplique 11 por 8 y el resultado fue 99, luego reste 56 menos 99 y me dio -43 y lo puse como numerador y el 88 lo puse como denominador.**

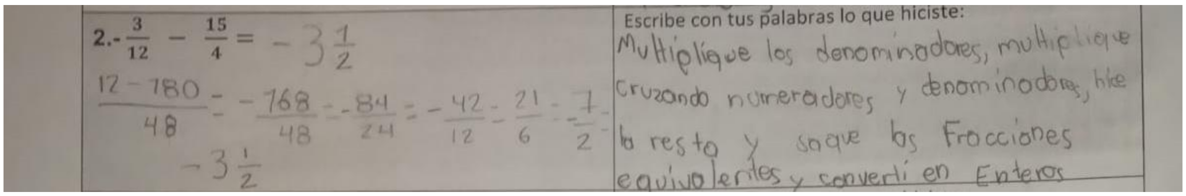
b) Método cruzado y simplificación; En esta clasificación los estudiantes además de calcular la resta correctamente simplifican el resultado, identificando y eliminando factores comunes entre numerador y denominador.

A-74



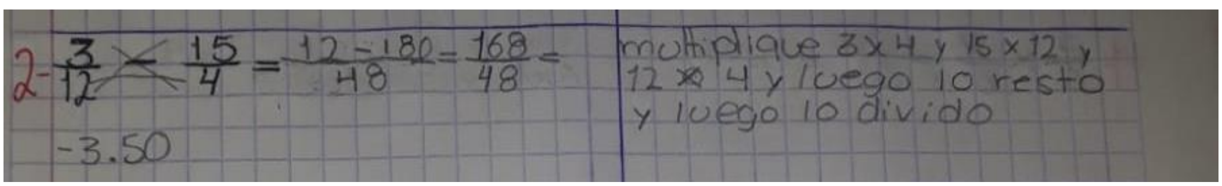
c) Método cruzado y fracción mixta; en este caso, los alumnos calcularon correctamente la resta de fracciones, simplifican el resultado y luego expresan la fracción propia en una fracción mixta.

A-1



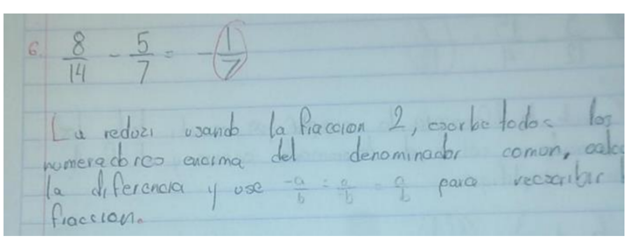
d) Método cruzado y representación decimal; este tipo de solución dada por los alumnos es cuando luego de aplicar un método de mariposa para obtener la representación fraccionaria de la resta, calcularon también la representación decimal.

A-2



2.- *Método del Mínimo Común Múltiplo*; en este procedimiento, los alumnos realizaron la búsqueda de mínimo común múltiplo de los dos denominadores, convirtiendo cada una de las fracciones en equivalentes con el mismo denominador para restar solamente los numeradores entre sí.

A-58

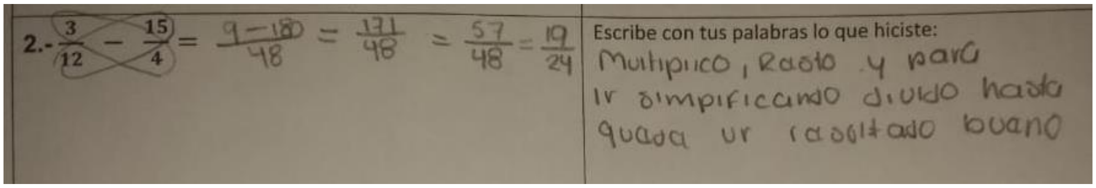


Entre las respuestas incorrectas a los ítems 2,4 y 6, encontramos respuestas en las que los alumnos aplican de manera correcta un método, pero cometen errores de cálculo, a continuación, se ejemplifican los errores encontrados;

1.-*Método cruzado y errores en cálculo*:

a) Error en productos cruzados:

A-33

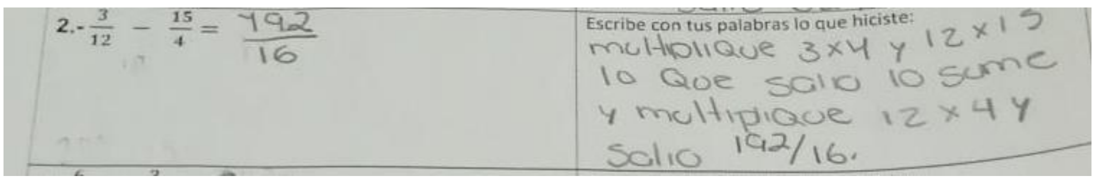


2.- $\frac{3}{12} - \frac{15}{4} = \frac{9-180}{48} = \frac{171}{48} = \frac{57}{48} = \frac{19}{24}$

Escribe con tus palabras lo que hiciste:
Multipiico, Rasto y para ir simpificando divido hasta quada ur rasoltado buano

b) Error en el producto de los denominadores

A-55

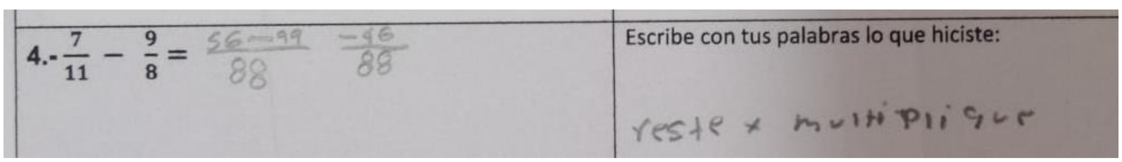


2.- $\frac{3}{12} - \frac{15}{4} = \frac{192}{16}$

Escribe con tus palabras lo que hiciste:
multiplique 3x4 y 12x15 lo Qoe salio lo sume y multipiqoe 12x4 y Salio 192/16.

c) Errores en el cálculo de la resta de los productos cruzados

A-57

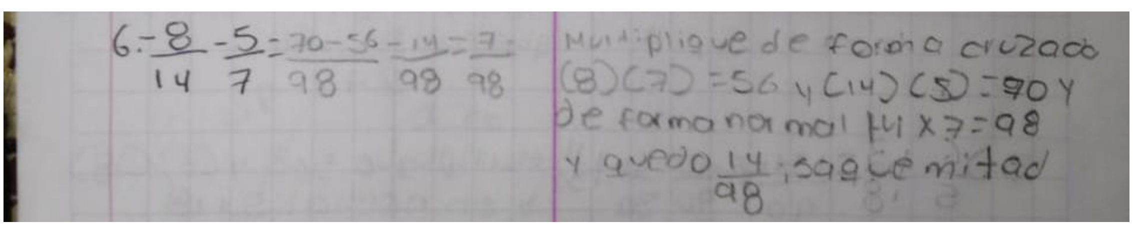


4.- $\frac{7}{11} - \frac{9}{8} = \frac{56-99}{88} \quad \frac{-46}{88}$

Escribe con tus palabras lo que hiciste:
reste x multipliqur

d) Errores en la simplificación de la fracción

A-107

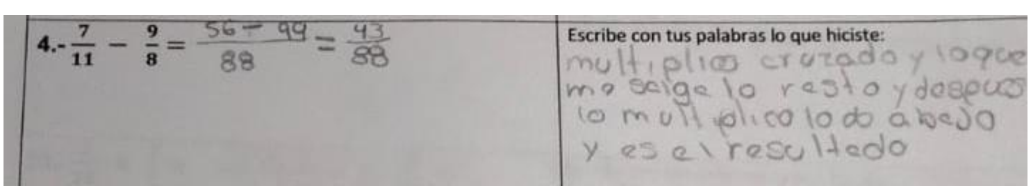


6.- $\frac{8}{14} - \frac{5}{7} = \frac{70-56}{98} = \frac{14}{98} = \frac{7}{98}$

Multiplique de forma cruzado (8)(7)=56 y (14)(5)=70 y de forma normal 14x7=98 y quedo $\frac{14}{98}$, saque mitad

e) Error en la resta de los productos cruzados, y en el resultado de la resta porque no se escribe el signo correcto.

A-102

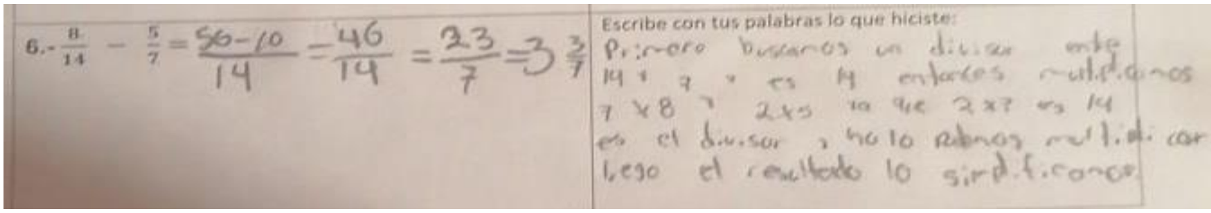


4.- $\frac{7}{11} - \frac{9}{8} = \frac{56-99}{88} = \frac{43}{88}$

Escribe con tus palabras lo que hiciste:
multiplico cruzado y loque me saiga lo resto y despues lo multiplico lo do abajo y es el resultado

2.- *Método de Mínimo común denominador con errores de cálculo* en el mínimo común múltiplo u otro cálculo posterior a este. En este caso de respuestas incorrectas, los alumnos aplican correctamente el método del mínimo común denominador, pero cometen un error al calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores o bien en algún cálculo posterior a este.

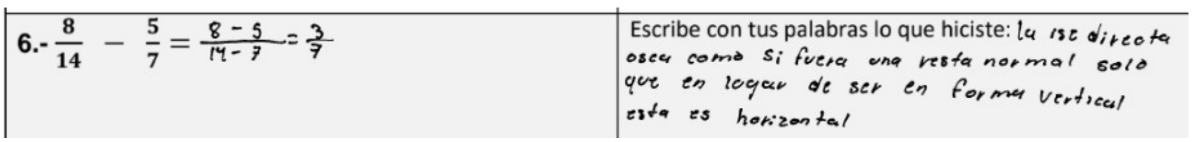
A-54



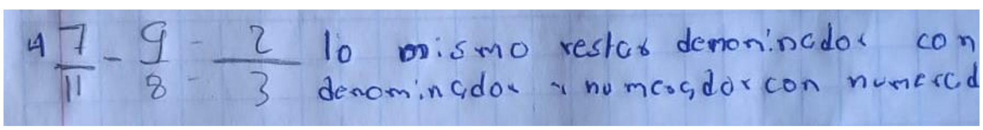
3.- *Otros métodos incorrectos* del cálculo de la resta

a) Resta de numerador con numerador y denominador con denominador

A-62

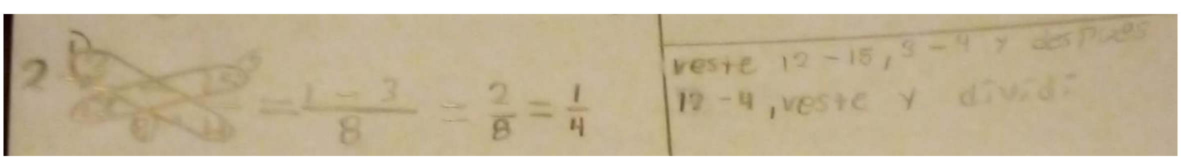


A- 10



b) Restó el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda fracción, luego restó el denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda fracción y ambos resultados los restó entre sí para obtener el numerador resultante, mientras que, para obtener el denominador, restó los dos denominadores de las fracciones involucradas.

A-35

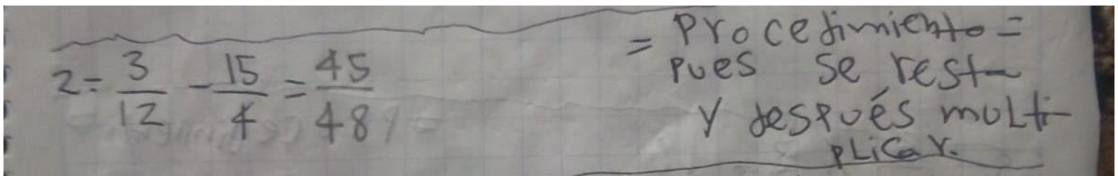


c) Resta el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda fracción y obtiene el numerador resultante, después resta el denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda fracción y obtiene el denominador de la fracción resultante.

A-13

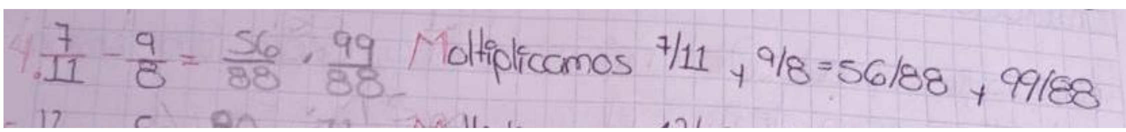
4.- *Multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.*

A-91



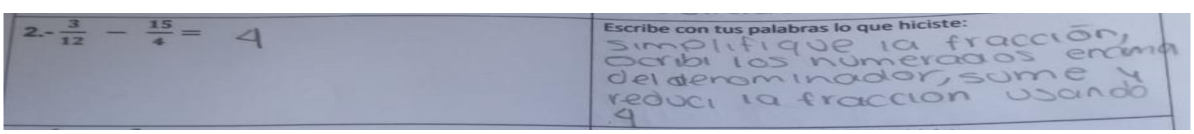
5.- *Multiplica el denominador de la segunda fracción por la primera fracción y multiplica el denominador de la primera fracción por la siguiente fracción*, obteniendo así dos resultados.

A-64



Respuestas en las que los alumnos no hacen explícito el método empleado para el cálculo, no redactan el procedimiento y/o lo que explican no se corresponde con el método incorrecto que si hacen explícito.

A-78



A-29

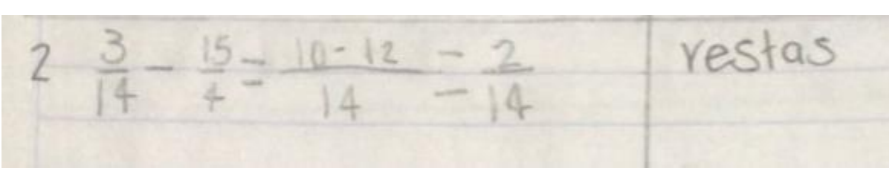


Tabla 15

Resultados resumidos de resta Ítem 2

Método de aplicación	Resultado correcto
Método de mariposa	4
Método de mariposa y simplificación	7
Método de mariposa y fracción mixta	5
Método de mariposa y decimales	2
Minimo comun denominador	1
No hay explicación	1

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método de mariposa	47
Método de mariposa y simplificación	14
Método de mariposa y fracción mixta	4
Minimo comun denominador	5
Restó de manera lineal	6
No realizaron procedimiento escrito	3
	3
Multiplicó denominador por fracción (dos resultados)	1
Procedimiento como división	3
	1
Procedimiento como multiplicación	1

Tabla 16

Resultados resumidos de resta Ítem 4

Método de aplicación	Resultado correcto
Método de mariposa	20
Método de mariposa y decimales	1
No hay explicación	3

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método de mariposa	62
Método de mariposa y simplificación	1
Método de mariposa y decimales	2
Minimo comun denominador	4
Sumó de manera lineal	6
No realizaron procedimiento escrito o procedimiento	5
Multiplicó denominadores por fracción (2 resultados)	1
Procedimiento como división	3

Tabla 17

Resultados resumidos de resta Ítem 6

Método de aplicación	Resultado correcto
Método de mariposa	13
Método de mariposa y simplificación	7
Método de mariposa y decimales	1
Minimo comun denominador	1
Sin explicación	4

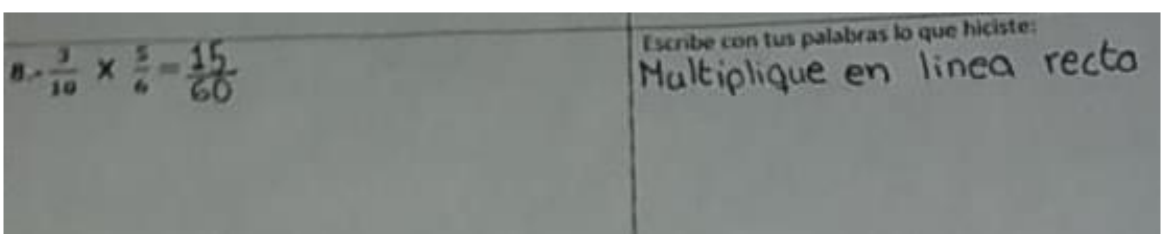
Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método de mariposa	47
Método de mariposa y simplificación	14
Método de mariposa y número decimal	1
Minimo comun denominador	4
Restó de manera lineal	7
Restó de manera cruzada	3
No realizaron procedimiento escrito	3
Multiplico denominador por fracción, dos resultados	1
No realizó ningun procedimiento	2

Para los ítems 7,8, 9, 10 Y 11 que planteaban la solución de multiplicaciones de fracciones, se encontró cuatro tipos de respuestas correctas en las que los estudiantes aplicaron correctamente la definición de producto de fracciones y expresaron la fracción resultante de maneras diferentes: Fracción propia con o sin factores comunes entre el numerador y denominador y otros que dan la representación decimal del resultado.

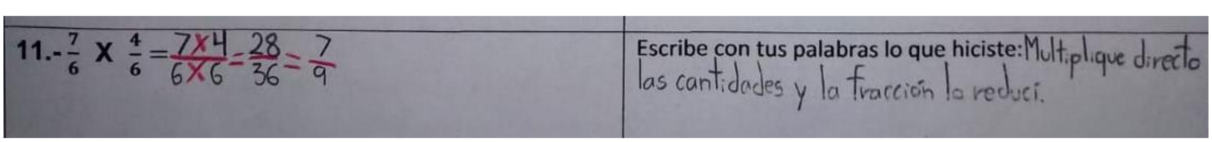
Ejemplos de estas:

1.- *Expresión del resultado como fracción propia* con o sin factores comunes entre el numerador y denominador.

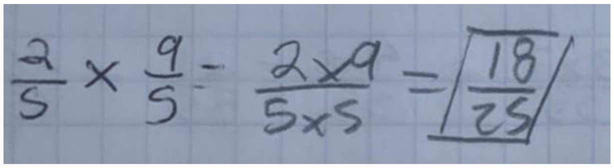
A-15



A-26

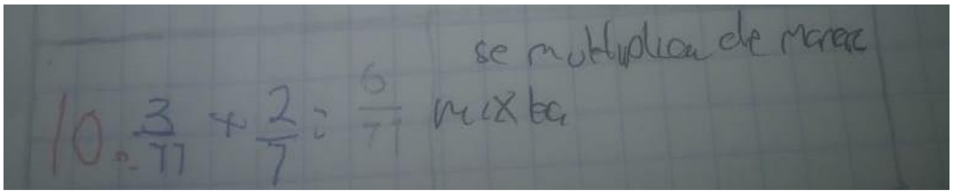


A-70



Este estudiante no expresa con palabras su procedimiento correcto.

A-41



Este estudiante parece no tener un nombre correcto para su procedimiento.

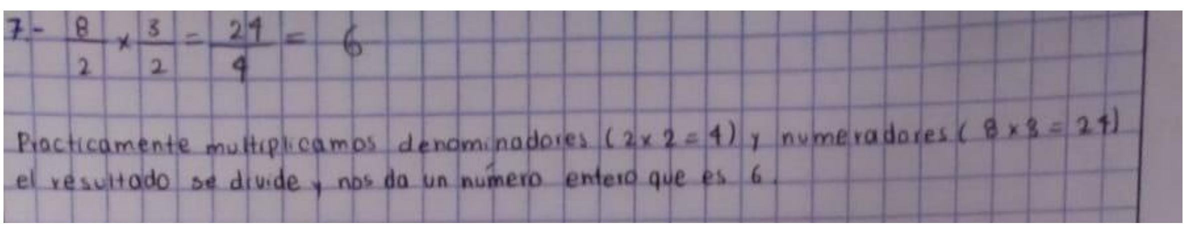
A-23

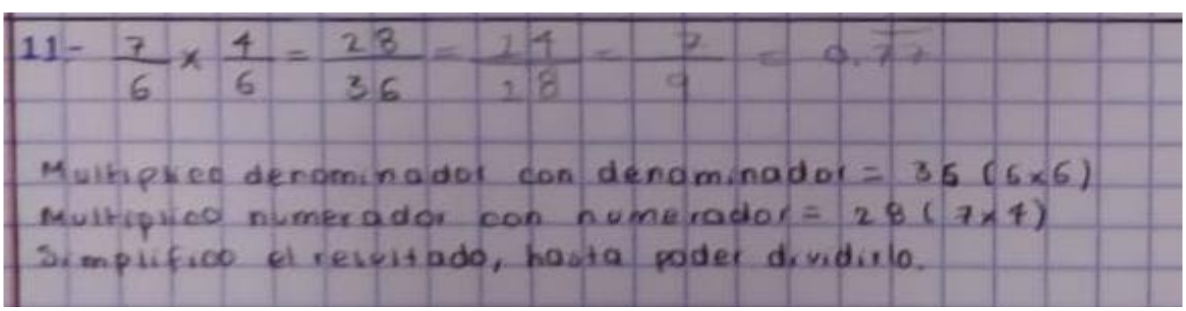
7.- **8/2** X **3/2** =24/4

resolví la operación mentalmente

2.- *Expresión del resultado del producto en representación decimal*

A-77





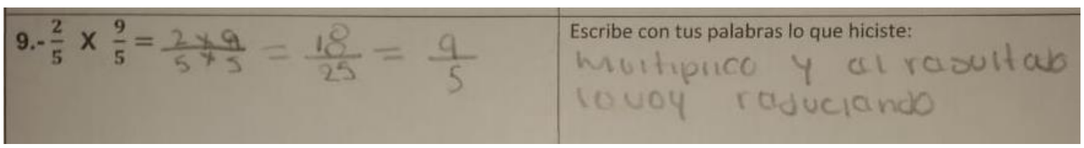
Entre las respuestas incorrectas se encontraron respuestas en las que se aplica correctamente la definición de producto, pero los estudiantes cometen errores de cálculo en las multiplicaciones de números enteros, errores al momento de intentar simplificar la fracción resultante y errores por la aplicación de una definición incorrecta de producto de números racionales. Algunos ejemplos a continuación:

1.-*Multiplicación de números enteros incorrecta*

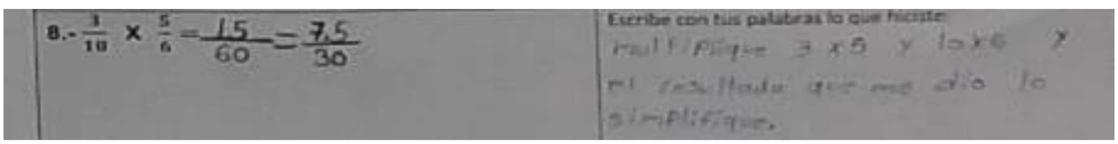
A-10

2.- *Errores en la simplificación de la fracción resultado.*

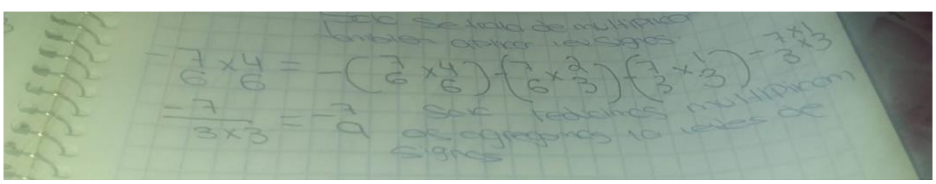
A-33



A-106



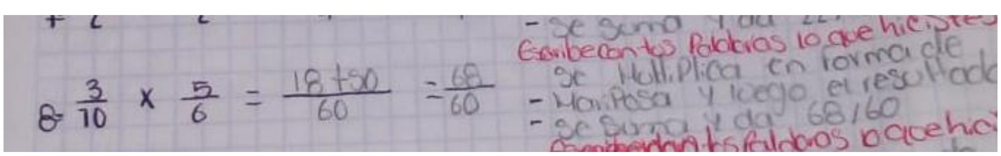
A-7



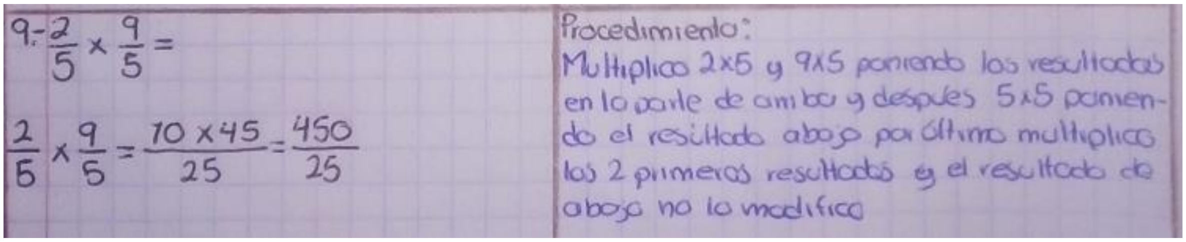
A7 realiza una simplificación de fracciones antes de calcular el producto y comete un error de la segunda a la tercera igualdad, además de escribir incorrectamente un signo negativo en una de las fracciones involucradas que no era parte del problema original.

3.- *Aplicación de una definición incorrecta de producto de números racionales*.

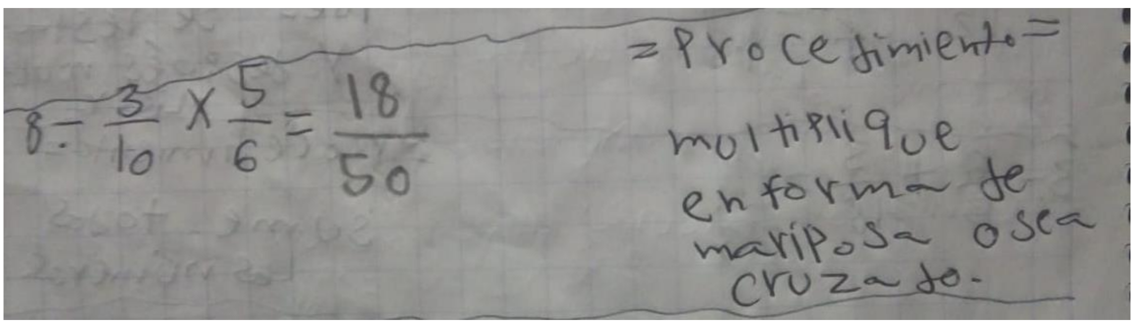
A-3 calcula el producto como si fuera una suma de números racionales.



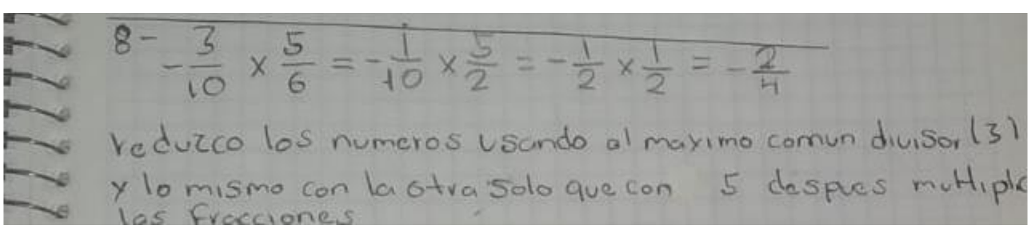
Algunos como A-17, calculan el producto con un método similar al de suma de fracciones, en donde el numerador multiplica además los productos obtenidos con productos cruzados.



A-91 y otros emplean un procedimiento de cálculo que se utiliza para la división de fracciones, multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y el producto es el numerador resultante, mientras que el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción será el denominador resultante.



A-88 al igual que otros, argumentan emplear el máximo común divisor para la reducción de las fracciones y después calcula el producto directo de numerador por numerador y denominador por denominador. Sin embargo, sus cálculos son incorrectos.



Igual que en el caso de los ítems correspondientes a la suma y la resta, se presentan los resultados resumidos en las siguientes tablas:

Tabla 18

Resultados resumidos de multiplicación ítem 7

Método de aplicación	Resultado correcto
Método directo	31
Método directo y simplificación	36
Método directo y decimal	2
No explica	7

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método directo	5
Método directo y simplificación	2
Mètodo directo, resultado con signo negativo	2
Otros	23

Tabla 19

Resultados resumidos de multiplicación Ítem 8

Método de aplicación	Resultado correcto
Método directo	39
Método directo y simplificación	29
Método directo y decimal	2
No explica	4

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método directo	2
Método directo y simplificación	3
Método directo y simplificó a decimal	1
Método directo, resultado con signo negativo	3
Otros	25

Tabla 20

Resultados resumidos de multiplicación Ítem 9

Método de aplicación	Resultado correcto
Método directo	65
Método directo y decimal	3
No explica	3

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método directo	9
Método directo y decimales	1
Mètodo directo, resultado con signo negativo	3
Otros	24

Tabla 21

Resultados resumidos multiplicación Ítem 10

MÉTODO DE APLICACIÓN	RESULTADO CORRECTO
MÉTODO DIRECTO	74
MÉTODO DIRECTO Y DECIMAL	2
NO EXPLICA	3

MÉTODO DE APLICACIÓN	RESULTADO INCORRECTO
MÉTODO DIRECTO	5
MÉTODO DIRECTO, RESULTADO CON SIGNO NEGATIVO	1
OTROS	23

Tabla 3

Resultados resumidos multiplicación ítem 11

Método de aplicación	Resultado correcto
Método directo	32
Método directo y simplificación	36
Método directo y decimal	3
No explica	4

Método de aplicación	Resultado incorrecto
Método directo	8
Método directo, resultado con signo negativo	2
Otros	23

6.3 Cuestionario de Problemas Escritos

Para este cuestionario se utilizaron problemas de preguntas abiertas las cuales consistían en la resolución y explicación del procedimiento que llevaron a cabo en cada uno de los ítems, los cuales consistían en la resolución de sumas (3) restas (3) y multiplicación (5).

El cuestionario se envió en formato PDF y los alumnos debían resolverlo y tomar foto de los resultados, para después enviarlas vía WhatsApp al número que se les proporcionó. Aparte del resultado de las operaciones, debían escribir con sus propias palabras lo que hicieron para llegar a la respuesta dada.

En esta sección se observa si los alumnos presentan la dificultad de aplicar conocimientos de los números naturales en los racionales, como lo puede ser el sumar o restar al querer resolver el problema sumando denominadores y numeradores. De igual manera en las multiplicaciones cuando existe un mismo denominador, el alumno puede solo considerar los numeradores las cuales indican un pensamiento intuitivo y no analítico (Lortie-Forgues, et al., 2015; Siegler & Pyke, 2013; Siegler et al., 2011 citados en González-Forte, et al., 2019b).

Para la interpretación de este cuestionario, se toman en cuenta las respuestas correctas y la explicación escrita de los alumnos, es decir, si la respuesta era correcta en las sumas y restas y se describe de manera escrita el procedimiento de multiplicar el primer numerador por el segundo denominador y sumar o restar con la multiplicación del primer denominador con el segundo numerador para el resultado colocarlo en el numerador resultante, y obtener el denominador resultante multiplicando ambos denominadores entre sí. Mientras que en las multiplicaciones se esperaba que, si tenían la respuesta correcta, escribieran en sus enunciados que se multiplicaron numeradores entre sí y denominadores entre sí.

Si las respuestas de los ejercicios eran correctas y la explicación escrita era incorrecta, es decir, explicar otro procedimiento que no daría el resultado correcto, se tomaba como respuesta incorrecta puesto que pudo ser copiada o buscada en internet. De igual manera, si la respuesta dada era incorrecta pero la explicación escrita era correcta, el ítem se tomaba como incorrecto puesto que, a pesar de hacer una descripción correcta, algún procedimiento llevado a cabo fue incorrecto.

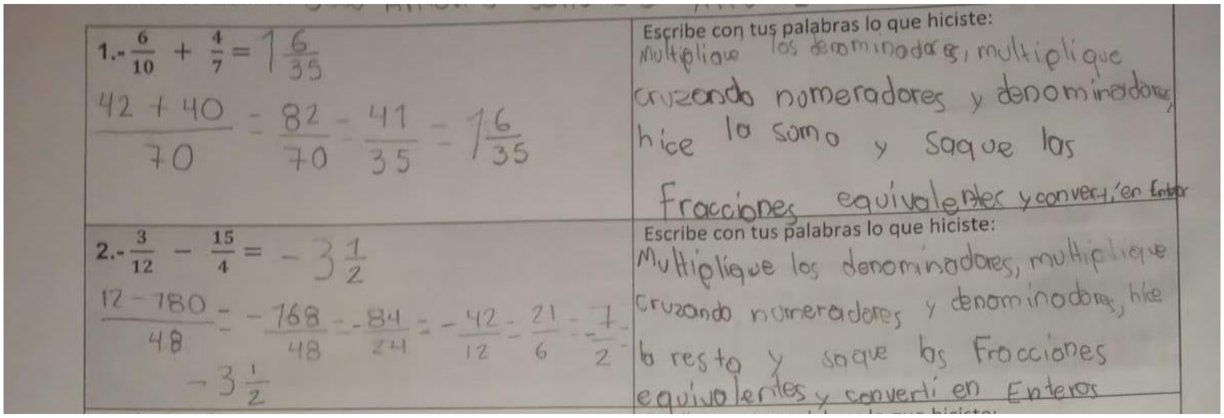
Estos problemas ayudan a complementar y reforzar el análisis del cuestionario anterior, ratificando la aplicación de un razonamiento correcto (respuestas correctas y enunciados del procedimiento correcto) o un razonamiento incorrecto (respuestas incorrectas y enunciados incorrectos o respuestas correctas y enunciados incorrectos o respuestas incorrectas y enunciados correctos).

A continuación, se ejemplifican dos situaciones en las que los alumnos contestan el cuestionario según lo esperado, es decir, de manera correcta y explicando el procedimiento que llevaron a cabo utilizando características de los números racionales y, por otra parte, una situación incorrecta en la que se contesta de manera errónea y aplicando conocimientos de números naturales en la resolución de los problemas. Así mismo, se toman las dos situaciones de un mismo grado para que no haya distinción marcada en cuanto a los conocimientos de cada uno.

Situación 1

Cuestionario de problemas resuelto correctamente sumas

A1



1.- $\frac{6}{10} + \frac{4}{7} = 1\frac{6}{35}$

$\frac{42+40}{70} = \frac{82}{70} = \frac{41}{35} = 1\frac{6}{35}$

Escribe con tus palabras lo que hiciste: Multiplique los denominadores, multiplique cruzando nomeradores y denominadores, hice la suma y saque las fracciones equivalentes y converti en enteros

2.- $\frac{3}{12} - \frac{15}{4} = -3\frac{1}{2}$

$\frac{12-180}{48} = -\frac{168}{48} = -\frac{84}{24} = -\frac{42}{12} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$-3\frac{1}{2}$

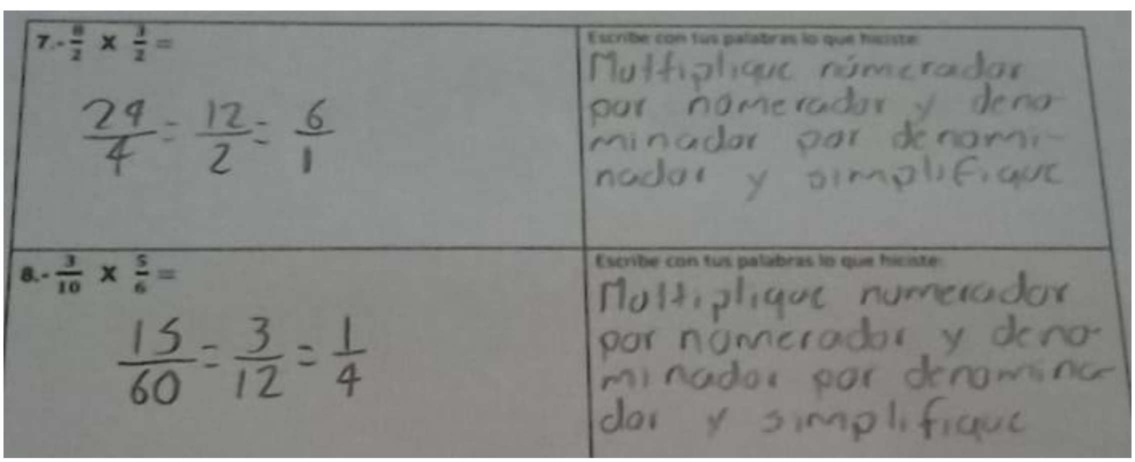
Escribe con tus palabras lo que hiciste: Multiplique los denominadores, multiplique cruzando numeradores y denominadores, hice la resta y saque las fracciones equivalentes y converti en enteros

Tanto en la suma como en la resta, el alumno especifica que realiza una multiplicación de los denominadores entre sí, y de manera cruzada multiplica para realizar la suma o resta y sigue el procedimiento de reducir la fracción lo más posible.

Situación 2

Cuestionario de problemas resuelto correctamente multiplicaciones

A50



7.- $\frac{8}{2} \times \frac{3}{2} =$

$\frac{24}{4} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1}$

Escribe con tus palabras lo que hiciste: Multiplique númerador por nomerador y denominador por denominador y simplifique

8.- $\frac{3}{10} \times \frac{5}{6} =$

$\frac{15}{60} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

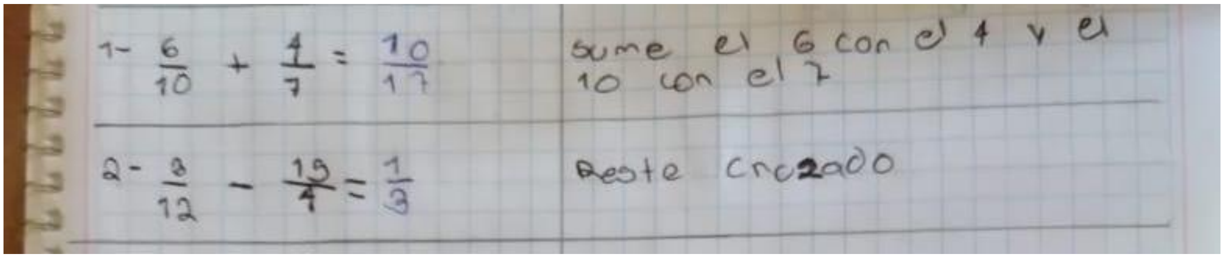
Escribe con tus palabras lo que hiciste: Multiplique numerador por nomerador y denominador por denominador y simplifique

En las multiplicaciones, explica que se multiplica de manera lineal y se reduce al máximo la fracción resultante, siendo correctas las respuestas, la explicación y el procedimiento.

Situación 3

Cuestionario de problemas resuelto incorrectamente sumas

A13

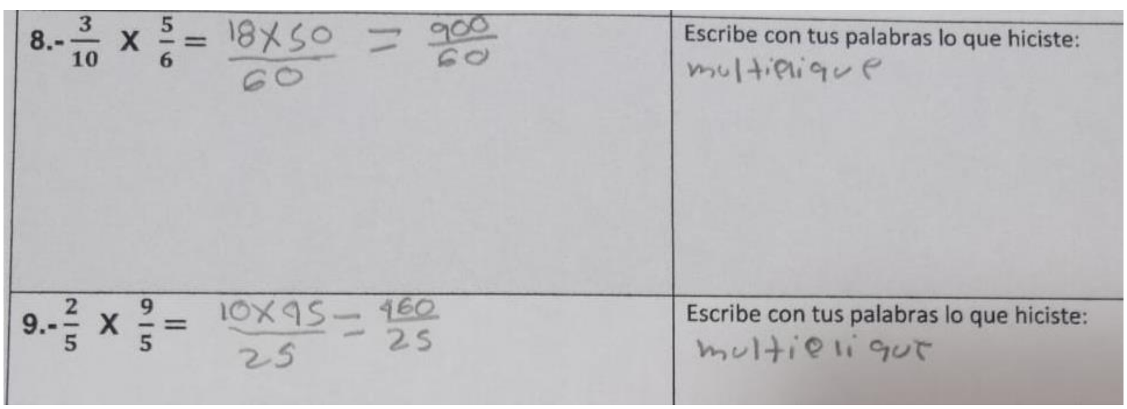


Se deja en visto que realiza una suma entre numeradores y denominadores. En cambio, en la resta lo hace de manera cruzada, el primer numerador menos el segundo denominador quedan como el numerador resultante, mientras que el denominador resultante lo obtiene de restar el primer denominador y el segundo numerador.

Situación 4

Cuestionario de problemas resuelto incorrectamente multiplicaciones

A57



Tal como lo indica, el proceso que lleva a cabo es una multiplicación cruzada (tal vez confundiendo un poco la manera de resolver sumas).

7. Creencias vs Solución de Problemas

Solo siete de los 108 estudiantes obtuvieron los todos los ítems (11) de la tercera sección (cuestionario de respuestas abiertas) del cuestionario resueltos de manera correcta, tres de ellos A26, A61, A67 resuelve además todos los ítems incongruentes de manera correcta al igual que los ítems congruentes. Las respuestas de estos tres estudiantes dan cuenta del empleo de un razonamiento analítico. En cuanto a sus creencias podemos decir que Creen que *"siempre"* o *"casi siempre"* **aprenden las matemáticas de clase rápidamente**, **cualquiera puede aprender matemáticas** y **prefieren tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas**. Tienen un alto sentido de eficacia ya que consideran que *"siempre"* o *"casi siempre"* **pueden trabajar con cualquier tarea de matemáticas** y **obtener buenas calificaciones, resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil, pueden resolver correctamente cualquier problema con fracciones, entendieron todo lo que su profesor explicó sobre fracciones** y *"casi nunca"*; **cuando no pueden resolver un problema de matemáticas rápidamente dejan de intentarlo**.

Consideran que *"siempre"* **las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos**, que **las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar**, pero también que *"siempre"* **las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas**. Como la mayoría de los estudiantes consideran que *"casi nunca"* **solo los genios aprenden matemáticas.**

Sus creencias respecto de la enseñanza consideran que "*siempre*" **las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos**. Sobre la solución de problemas consideran que *"siempre"* **la respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse** y **recuerdan todo lo que les enseñaron sobre fracciones**. Dos de ellos coinciden en que *"casi siempre"* **los problemas de matemáticas se deben resolver rápido** y por tanto que *"casi nunca"* **la respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que se le viene a la cabeza**, a diferencia de A67 que cree que *"casi nunca"* **los problemas de matemáticas se deben resolver rápido** y que "más o menos" **la respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que se viene a la cabeza**.

Ocho estudiantes resolvieron diez ítems de la tercera sección del cuestionario de manera correcta, de estos se identificaron dos casos (A58 y A90) en los que la explicación escrita que se solicitaba en el apartado de comparación de fracciones es la misma para cada ítem, en el primero de los casos expresa *"es mi opinión"* y en el segundo *"una división",* asumimos que los estudiantes, si bien conocen los métodos de cálculo de las operaciones y comparación de fracciones, sus respuestas obedecen más bien a un pensamiento mecánico más que intuitivo, son los estudiantes de este rango de respuestas correctas que obtienen menor cantidad de ítems incongruentes resueltos de manera incorrecta, 3 y 2 respectivamente, los otros seis estudiantes resuelven de 5 a 8 ítems incongruentes resueltos de manera correcta. En los ítems congruentes, son también los estudiantes que obtienen resultados incorrectos en dos y tres ítems respectivamente. Cuatro de los seis estudiantes restantes resuelven correctamente todos los ítems congruentes, dos más reflejan en sus respuestas dificultades en la interpretación de la forma fraccionaria de un número decimal, parece que el solo hecho de tener la representación fraccionaria de un número racional hace que lo asuman como un número menor que uno, salvo en los casos en los que son capaces de calcular la representación decimal de dicho número racional, para darse cuenta que dichos números son mayores que uno. Las creencias de estos ocho estudiantes no difieren mucho de los que obtuvieron los 11 ítems resueltos de manera correcta. En la creencia de que **los problemas de matemáticas se deben resolver rápido**, los ocho estudiantes citados consideran mayoritariamente, que esto ocurre *"solo a veces"* a diferencia de los siete que resuelven los 11 ítems de manera correcta y que consideran mayoritariamente que *"casi siempre*" **los problemas de matemáticas se deben resolver rápido**.

Ocho estudiantes más obtienen nueve de los 11 ítems correctos. Tres de ellos (A2, A28, A78) obtienen cinco, cuatro y cuatro ítems incongruentes, respectivamente, que corresponden con comparación de números racionales resueltos de manera incorrecta y dos de ellos obtienen dos ítems congruentes también incorrectos. El razonamiento analítico se evidencia solo en A78 en las respuestas a la pregunta ¿Cómo lo sabes? Ya que los otros dos estudiantes repiten la misma respuesta en todos los ítems, *porque es mayor, e*n el caso de A2 y *comparando,* en el caso de A28*,* A28 es el único de los veintitrés estudiantes acumulados hasta el momento que dice que *"siempre"* **cuando no puede resolver un problema de matemáticas rápidamente deja de intentarlo**.

Destaca el "solo a veces" y "casi nunca" **puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil,** de A21, A28 quienes resuelven 9 de los 11 ítems de las operaciones con fracciones de manera correcta y de A58 y A90 que resuelven 10 de los 11, frente al *"más o menos"* o *"casi siempre"* del resto de los veintitrés, así como el *"solo a veces"* y *"casi nunca"* **recuerdo todo lo que me enseñaron sobre fracciones,** de A2, A21 y A90, frente a la creencia de *"más o menos"*, *"casi siempre"* y *"siempre"* .

También se destaca el *"casi nunca"* y *"solo a veces"* ***la respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse*** de A2, A45 y A58, respecto del *"más o menos"*, *"casi siempre"* y *"siempre",* creencia de los veinte estudiantes restantes*.* Al igual que el *"solo a veces"* ***aprendo las matemáticas de clase rápidamente****, de A50 y A93, que resuelven correctamente 9 y 10 ítems de los 11, respectivamente, frente al "más o menos"*, *"casi siempre"* y *"siempre",* que son las creencias de resto*. De igual manera se resalta el "solo a veces" las* **matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas** de A50 y A74 del *más o menos"*, *"casi siempre"* y *"siempre" del* resto de los compañeros y el "solo a veces" entiendo **todo lo que mi profesor explica sobre fraccione** de A58 y A90 de las creencias *"más o menos"*, *"casi siempre"* y *"siempre"* de los veintiún estudiantes entre el rango de 9 a 11 ítems resueltos de manera correcta. Análogo a la creencia de "solo a veces" **la respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse** de A45 y A58.

Veintidós alumnos más resuelven 8 de los 11 ítems de operaciones con números racionales de manera correcta. Los ítems incorrectos en los veintidós casos fueron porque no consideraron los signos de las fracciones negativas involucradas en las operaciones, no todos omitieron los mismos signos. Once de los catorce asociados a la creencia "más o menos" **prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas**, corresponden a este grupo de estudiantes, frente a los diecinueve *siempre* o *casi siempre* de la mayoría, y de los doce *solo a* *veces* y *casi nunca*. Esta es la creencia en la que se identifica diferencia respecto de los acumulados hasta el momento (45).

Para el análisis consideramos el rango de ítems correctos del tercer apartado del cuestionario dividido en tres; los que obtuvieron entre 11 y hasta 8 ítems correctos, que corresponden con los cuarenta y cinco descritos hasta el momento, los que obtuvieron entre 7 y 5, y, por último, los que obtuvieron menos de 5.

Treinta y tres estudiantes obtuvieron entre 7 y 5 ítems correctos en el cuestionario. De estos, doce estudiantes obtienen entre uno y cuatro ítems incongruentes resueltos de manera correcta, Si los ocho ítems incongruentes se aplicaran en una evaluación, estos alumnos no estarían aprobados ya que obtendrían una calificación menor o igual a cinco. De acuerdo con la propuesta de interpretación dada en las páginas 46 y 47, el sesgo del número natural evidencia en estos estudiantes la aplicación del razonamiento intuitivo. Tal es el caso de: A12, A24, A29, A36, A66, A76, A81, A86, A87, A104, A106, es decir estos doce estudiantes tienen una tendencia a emplear el razonamiento intuitivo, más que el analítico, incluso también resuelven de manera incorrecta algunos ítems congruentes, uno para el caso de A24 y A81, dos para A76 y A104, tres para A66 y cinco para A9 y A29. Solo cinco de los doce resuelven correctamente todos los ítems congruentes. No identificamos diferencias o coincidencias entre las creencias de estos 12 estudiantes que los diferenciaran de los treinta y tres restantes, ni de los 45 del bloque anterior. Solo se resalta el hecho que, en el caso de A66, A76, las creencias sobre la solución de problemas refleja cierta contradicción ya que consideran *"solo a veces"* como respuesta asociada a las tres creencias: **los problemas de matemáticas se deben resolver rápido**, **la respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse**, **la respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que me viene a la cabeza**, cuando el resto de los alumnos si presentan correspondencia natural entre considerar que *"siempre"* o *"casi siempre",* **la respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse**, entonces *"casi nunca"* o *"solo a veces"*, **la respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que me viene a la cabeza** y "casi nunca" o "solo a veces", **los problemas de matemáticas se deben resolver rápido**.

Para los estudiantes del último bloque, los que obtienen menos de cinco ítems correctos en la tercera sección del cuestionario, que son los treinta restantes, encontramos que hay quienes obtienen los ocho ítems incongruentes resueltos de manera correcta, y quienes obtienen entre 7 y 5, quienes, de acuerdo a la interpretación inicial propuesta, el sesgo del número natural evidenciaría una aplicación del pensamiento analítico por sobre el intuitivo, sin embargo, no fueron capaces de resolver problemas de sumas y productos de números racionales correctamente y hacer explícito su razonamiento, tal es el caso de: A3, A5, A8, A17, A22, A23, A30,A33, A35, A37, A52, A53, A57,A88, A92 y A103.

Respecto a las creencias se destaca que solo cinco de los citados en el párrafo anterior, consideran que *"siempre"* o *"casi siempre"* pueden **trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones** (A5, A8, A17, A30 y A35), el resto asocia un *"más o menos"* y a un *"solo a veces".* Solo seis de ellos consideran también que *"siempre"* o *"casi siempre", pueden* **resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil** (A3**,** A5, A8, A17, A30 y A35). Solo nueve asocian un "*siempre"* o *"casi siempre"* a la creencia: **puedo resolver correctamente**

cualquier problema con fracciones (A5, A8, A17, A30, A33, A35, A37, A52 y A87). Solo diez creen que *"siempre"* o *"casi siempre"* entienden **todo lo que su profesor explica sobre fracciones**. (A5, A8, A17, A27, A30, A31, A33, A37, A52 y A53) y solo ocho consideran que *"casi nunca"* **cuando no pueden resolver un problema de matemáticas rápidamente dejan de intentarlo** (A3**,** A5, A8, A17, A27, A35 y A57). Estas creencias son las creencias sobre autoeficacia, tenemos entonces que no más de diez de los estudiantes de este bloque, tienen un bajo o mediano sentido de autoeficacia, en comparación con la mayoría de los estudiantes.

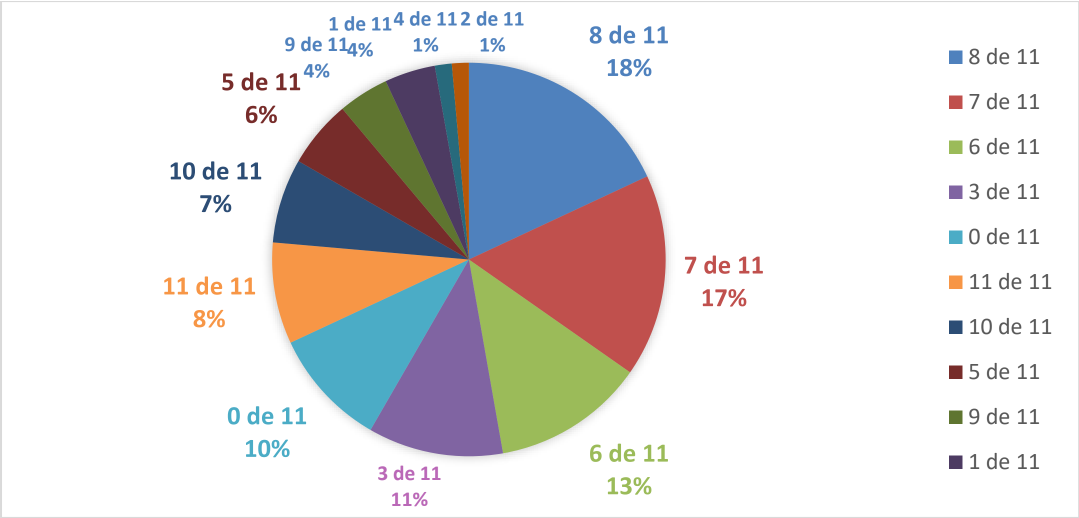
7.1 Perfil de Creencias

De acuerdo con la interpretación propuesta en las páginas 44-47, encontramos que 72 estudiantes presentan creencias sobre las matemáticas favorables a la aplicación del pensamiento analítico y la idea de que los responderían *siempre o casi siempre* a los ítems 2 y 8, responderían *más o menos*, *solo a veces o casi nunca* a los ítems 7 y 9, se correspondió en 55 de los casos, que representan un 77%.

A continuación, las gráficas que ilustran cómo respondieron a los ítems de cada sección del cuestionario.

Figura 15

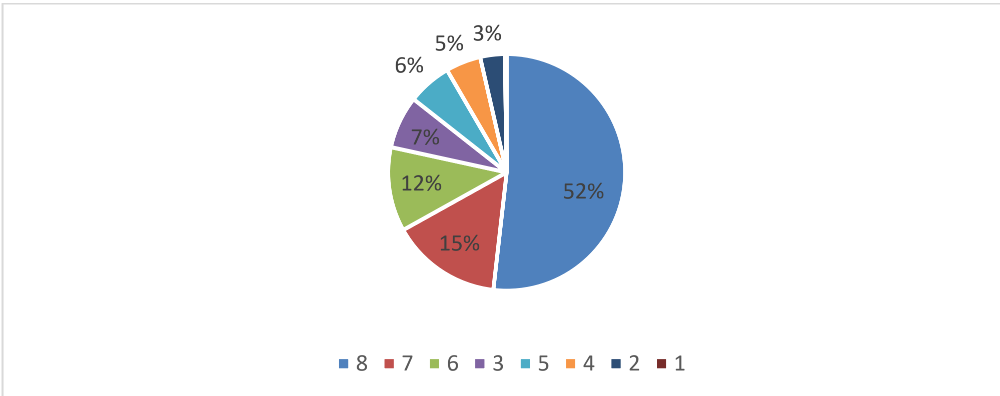
Descripción de ítems de la sección 3 que resuelven correctamente los estudiantes con creencias sobre la matemática y favorables al pensamiento analítico



Nota: El 73% resuelven entre 5 y 11 ítems correctamente.

Figura 16

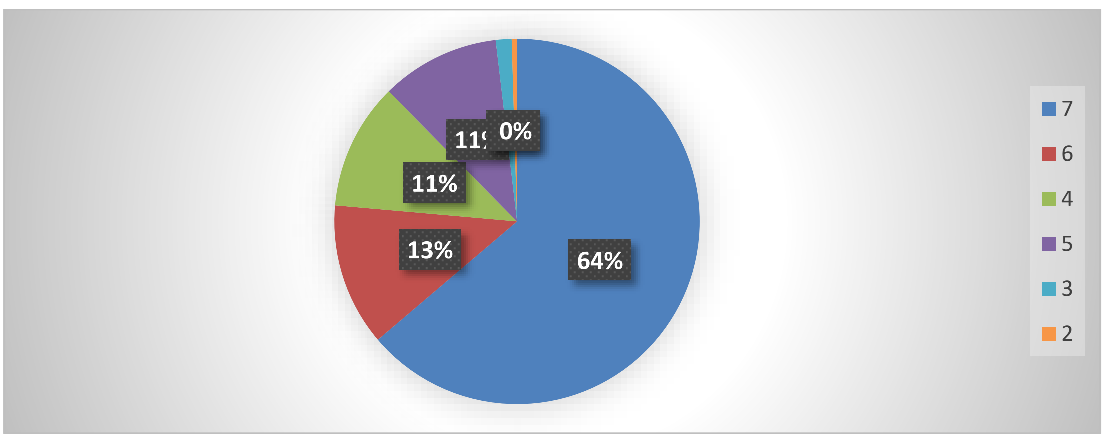
Descripción de ítems incongruentes resueltos correctamente por estudiantes con creencias sobre la matemática y favorables al pensamiento analítico



Nota: El 90% resuelven de 5 a 8 ítems incongruentes correctamente.

Figura 17

Descripción de ítems congruentes resueltos correctamente por los estudiantes con creencias sobre la matemática favorables al pensamiento analítico

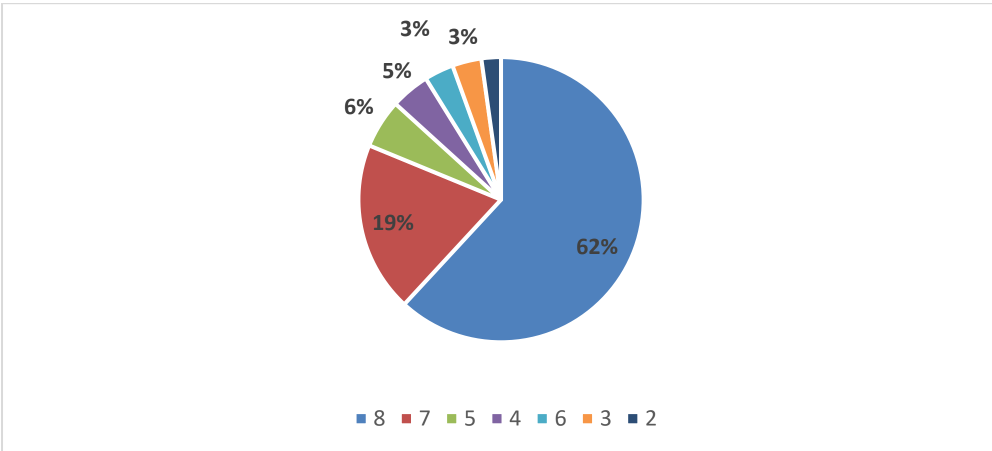


Nota: EL 99% resuelven correctamente entre 5 y 7 ítems congruentes.

Respecto a las creencias sobre el aprendizaje, veintiocho estudiantes responden “siempre” o “casi siempre” a los ítems 1, 4 y 5. A continuación las gráficas que presenta los porcentajes de ítems de los tres apartados del cuestionario, de los estudiantes con creencias sobre el aprendizaje favorables al pensamiento analítico

Figura 18

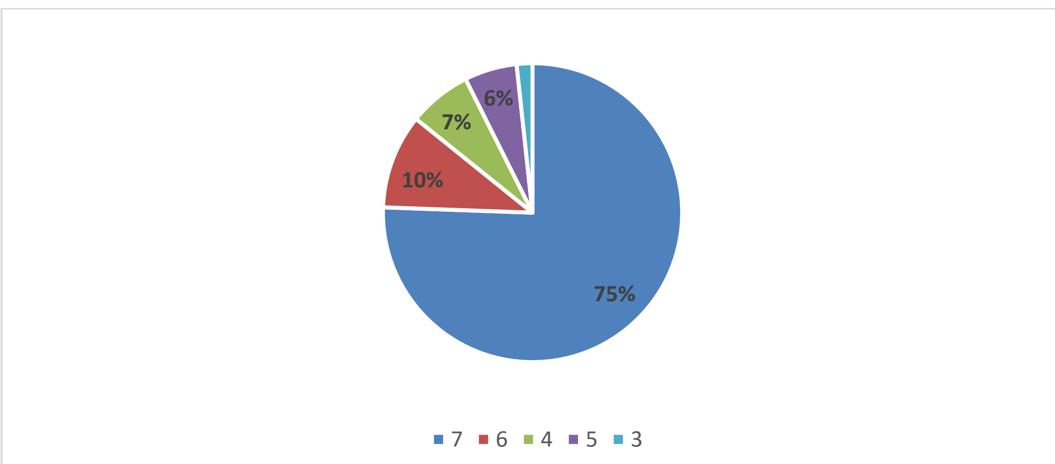
Descripción de ítems incongruentes que responden correctamente los estudiantes con creencias de aprendizaje favorables al pensamiento analítico



Nota: El 89% responden correctamente entre 5 y 8 ítems incongruentes correctamente.

Figura 19

Descripción de ítems congruentes respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre aprendizaje favorables al pensamiento analítico

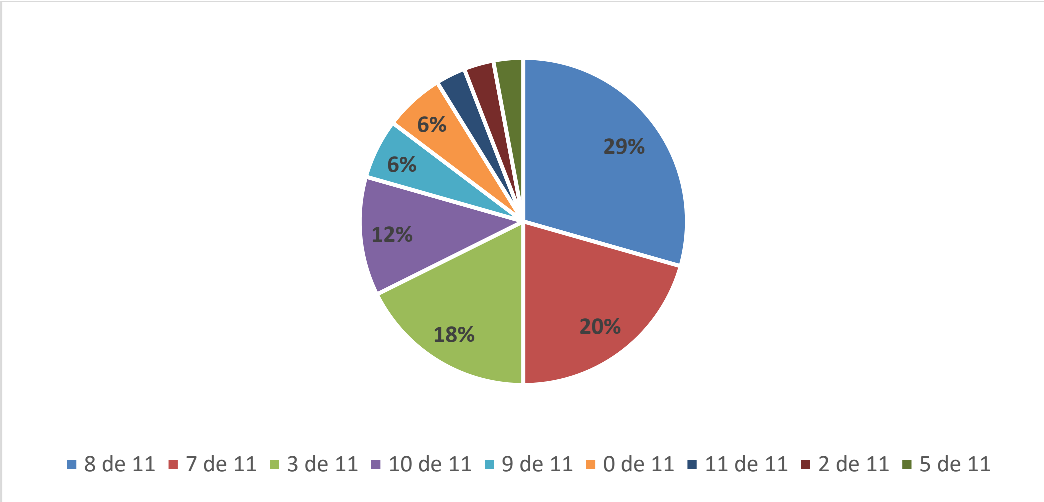


Nota: El 91% resuelve correctamente de 5 a 7 ítems congruentes.

Respecto a las creencias sobre la enseñanza, 34 estudiantes tienen creencias favorables al pensamiento analítico, de estos el 73% responden de 5 a 11 ítems correctos de la tercera sección del cuestionario. 61% respondieron correctamente de 5 a 8 ítems incongruentes y el 68% respondieron correctamente de 5 a 7 ítems congruentes.

Figura 20

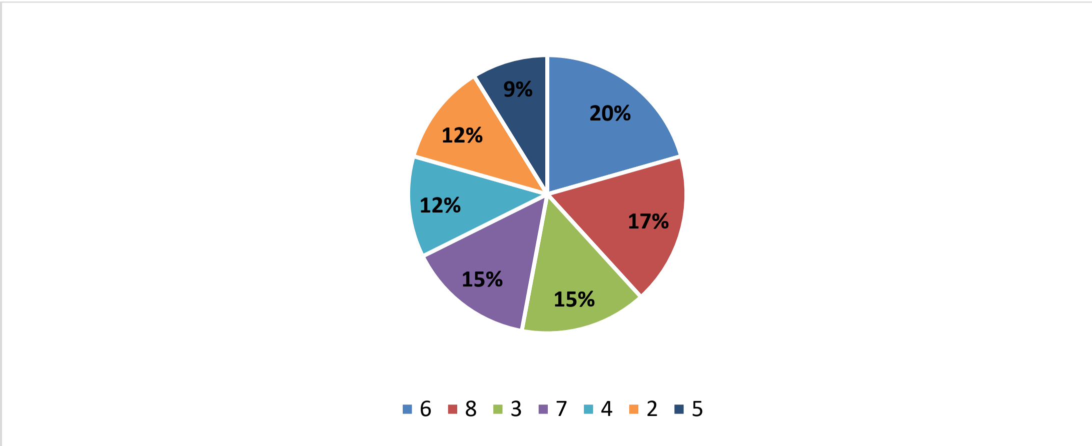
Descripción de ítems de respuestas abiertas respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre la enseñanza favorables al pensamiento analítico



Nota: El 73% resuelven entre 5 y 11 ítems de manera correcta.

Figura 21

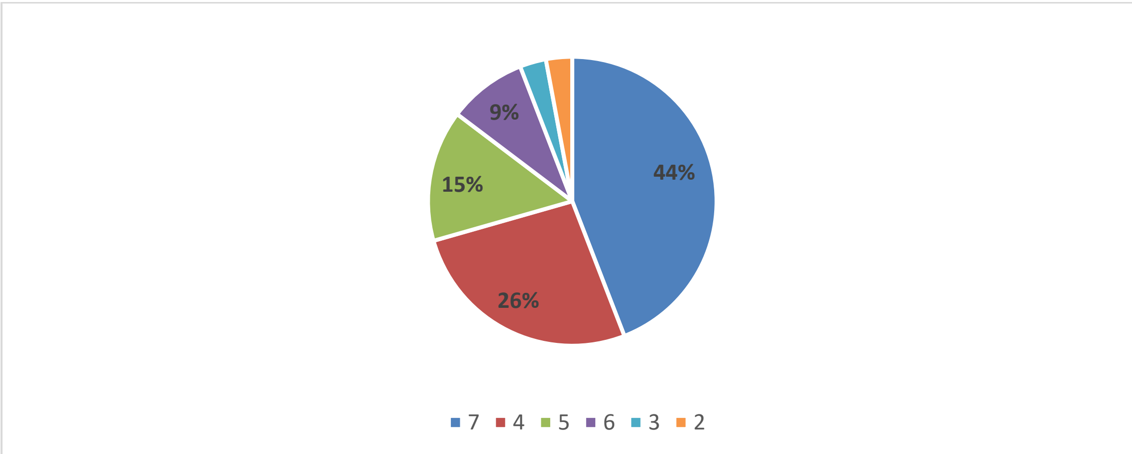
Descripción de ítems incongruentes respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre la enseñanza favorables al pensamiento analítico



Nota: 61% resuelven entre 5 y 8 ítems incongruentes resueltos de manera correcta.

Figura 22

Descripción de ítems congruentes respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre la enseñanza favorables al pensamiento analítico

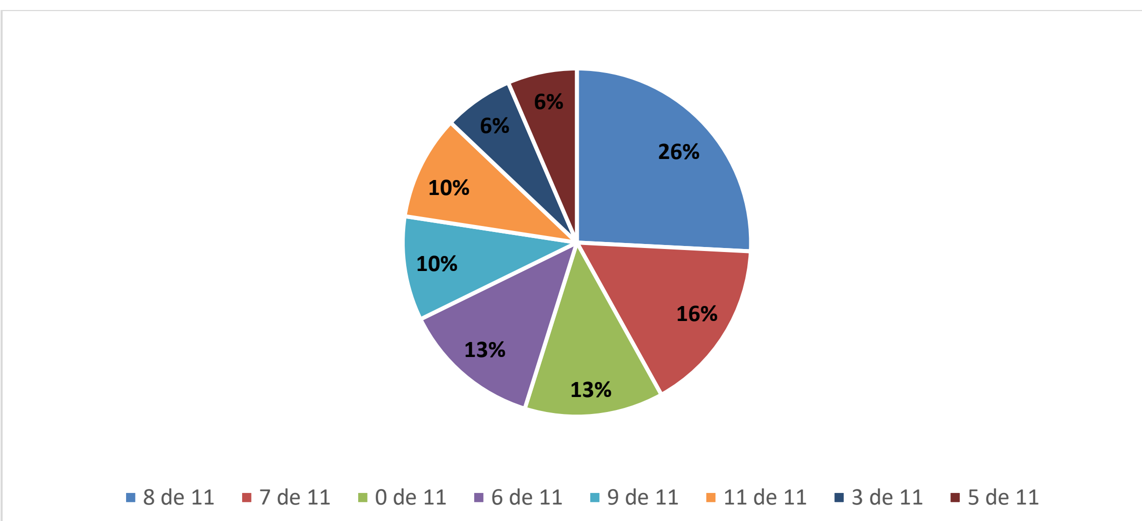


Nota: 70% resuelven entre 5 y 7 ítems congruentes resueltos de manera correcta.

Sobre las creencias de autoeficacia favorables al pensamiento analítico:

Figura 23

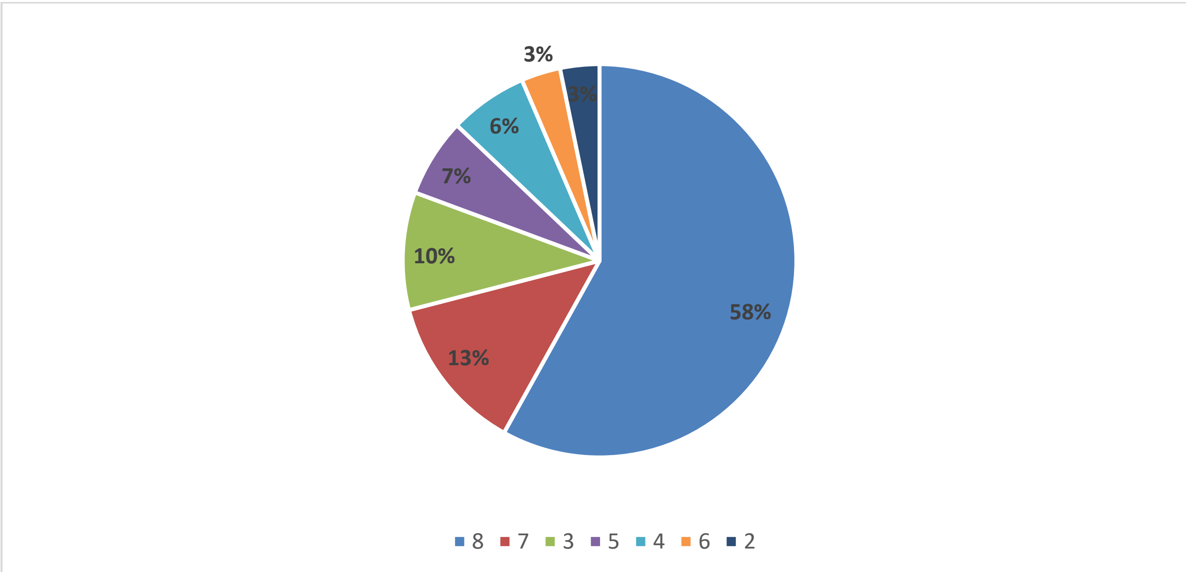
Descripción de ítems de respuestas abiertas respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre autoeficacia favorables al pensamiento analítico



Nota: 81% resuelven entre 5 y 8 ítems de respuestas abiertas de manera correcta

Figura 24

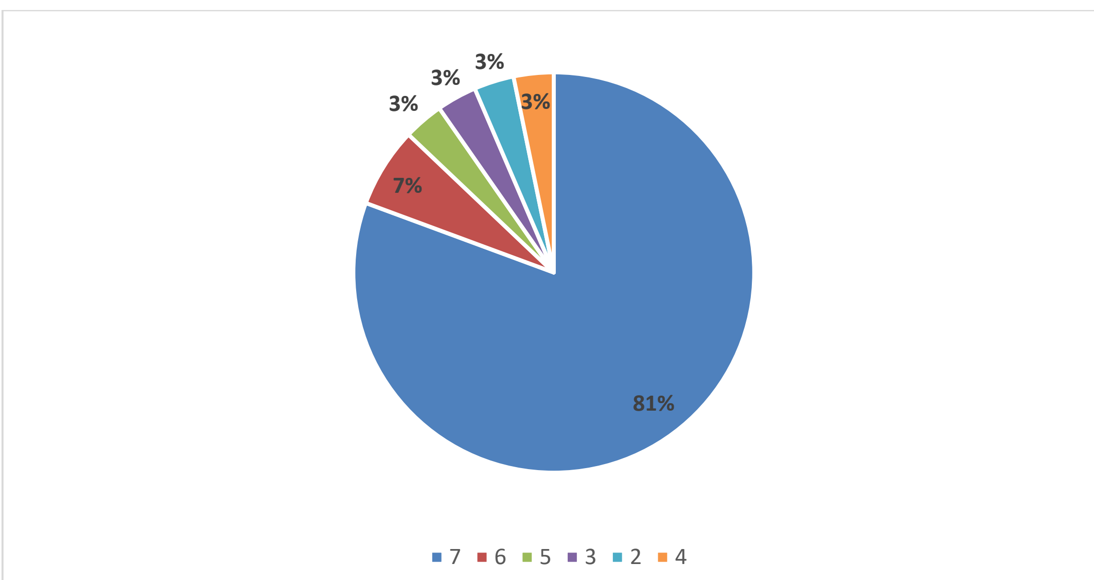
Descripción de ítems incongruentes respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre autoeficacia favorables al pensamiento analítico



Nota: 81% Resuelven entre 5 y 8 ítems incongruentes resueltos de manera correcta.

Figura 25

Descripción de ítems congruentes respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre autoeficacia favorables al pensamiento analítico

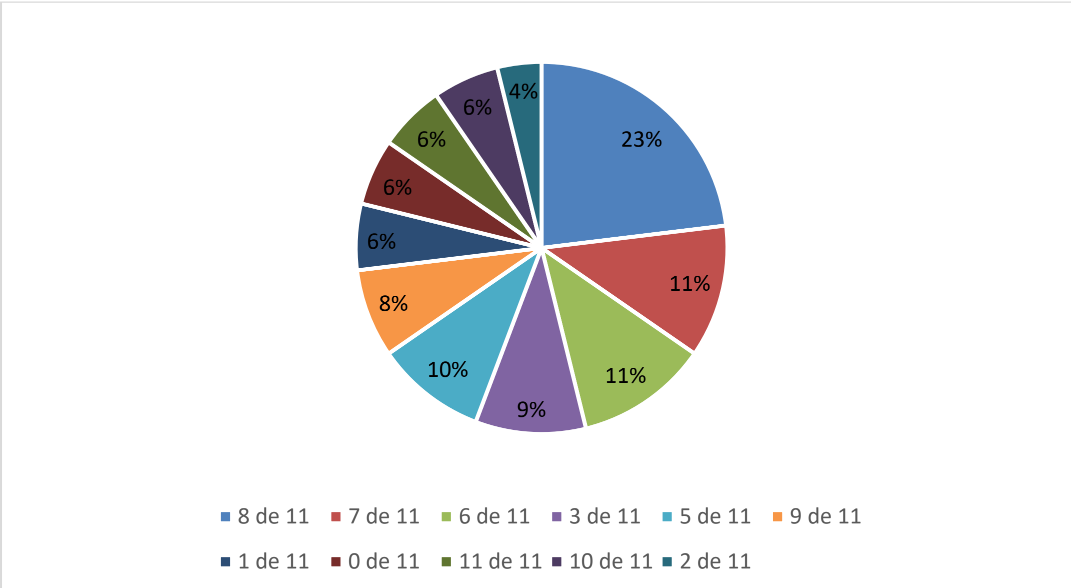


Nota: 91% resuelven entre 5 y 7 ítems congruentes resueltos de manera correcta.

Respecto de las creencias sobre solución de problemas:

Figura 26

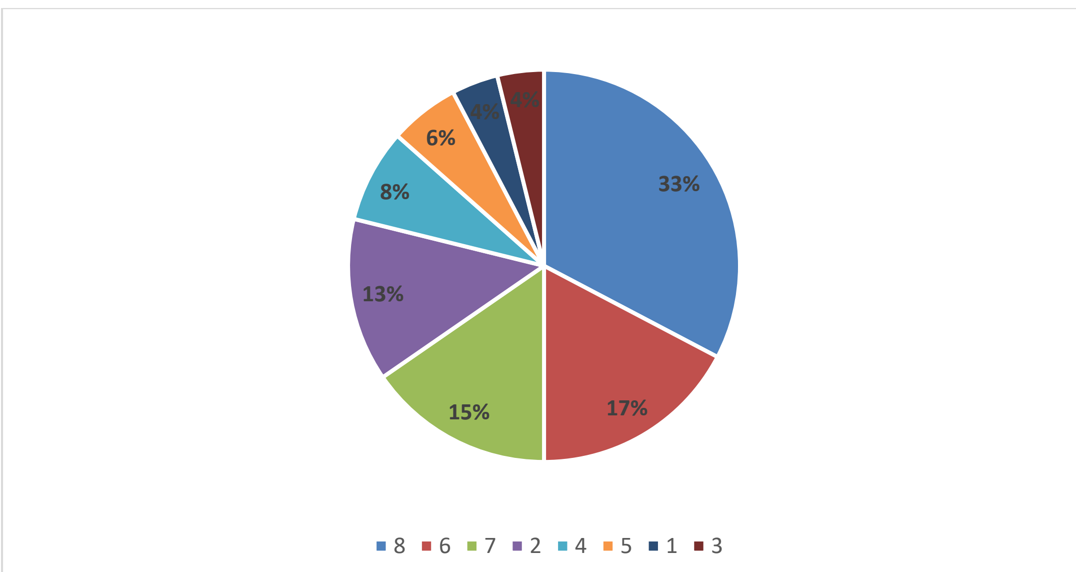
Descripción de ítems de respuestas abiertas respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre solución de problemas favorables al pensamiento analítico



Nota: 80% resuelven de 5 a 11 ítems de respuestas abiertas de manera correcta.

Figura 27

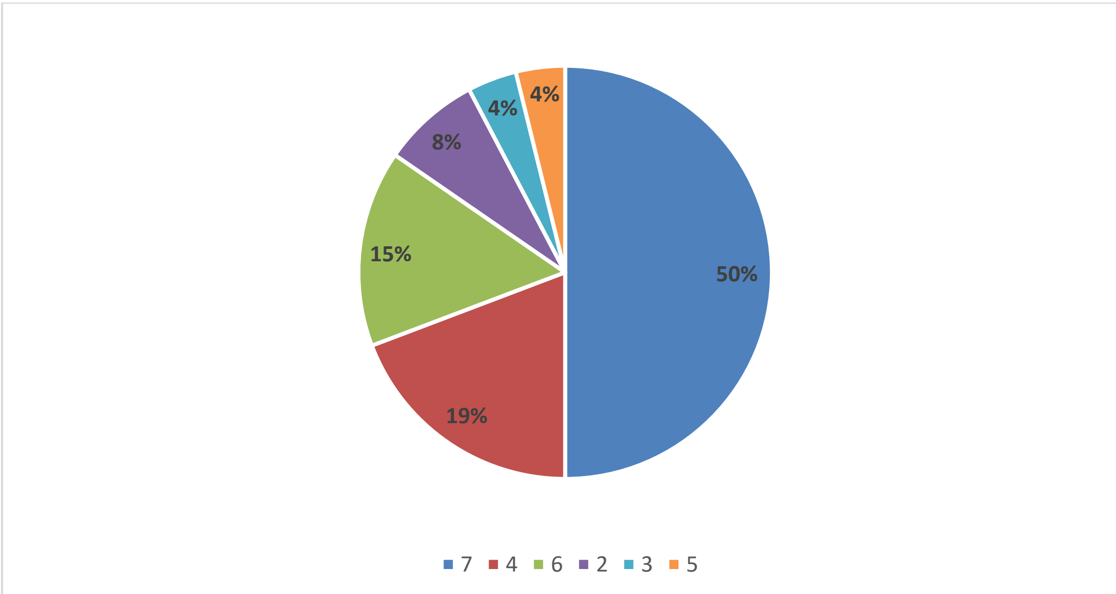
Descripción de ítems incongruentes respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre solución de problemas favorables al pensamiento analítico



Nota: El 71% resuelven más de 5 ítems incongruentes de manera correcta.

Figura 28

Descripción de ítems congruentes respondidos correctamente por los estudiantes con creencias sobre solución de problemas favorables al pensamiento analítico



Nota: 69% resuelven más de 5 ítems congruentes de manera correcta.

8. Conclusiones

Considerando que nuestra pregunta de investigación fue ¿Cómo es la influencia del sistema de creencias de los estudiantes de secundaria en la determinación implícita de emplear un sistema de razonamiento intuitivo (S1) por encima del sistema de razonamiento analítico-reflexivo (S2) cuando resuelven problemas de matemáticas con números racionales?

En la Escuela General Camilo Arriaga de San Luis Potosí se encontró consistencia entre un sistema de creencias, que en la presente investigación se interpretó como favorable al empleo del razonamiento analítico y el razonamiento empleado por los estudiantes cuando resuelven problemas con números racionales. Cuando el sistema de creencias integrado por creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, creencias de autoeficacia y creencias sobre la solución de problemas se encontró favorable a la aplicación del pensamiento analítico, en efecto, de acuerdo a lo reportado en las páginas anteriores, un porcentaje mayor al 60%, de estudiantes aplican dicho razonamiento resolviendo más de 5 ítems de respuesta abierta de manera correcta, más de 5 ítems incongruentes resueltos de manera correcta al igual que los ítems congruentes.

Las tres secciones del cuestionario fueron útiles para identificar la presencia de razonamiento analítico ya que las respuestas dadas por los estudiantes se complementaron. Se encontró consistencia en tanto que los estudiantes que daban respuestas correctas a los ítems de respuestas abiertas y las justificaban resolvieron la mayoría de los ítems incongruentes de manera correcta y tal y como se esperaba ocurrió lo mismo con los ítems congruentes. De este modo se confirmó también la presencia del sesgo del número natural en los estudiantes que resolvían los ítems empleando solo el razonamiento intuitivo tal y como se reporta en Van Hoof, et al. (2013).

Al igual que como Chávez, et al. (2008) concluye que los estudiantes perciben las matemáticas como una disciplina útil pero difícil, en el presente estudio se corrobora esta idea en el nivel secundaria ya que ochenta y cuatro de los ciento ocho alumnos, tienen la creencia siempre o casi siempre "Las matemáticas nos permiten entender el mundo en el que vivimos" , sin embargo contrasta el hecho de que más de la mitad de los alumnos participantes no coinciden con la creencia de que "Solo los genios pueden aprender matemáticas", ya que como decíamos en la redacción de los resultados, todo indica que los estudiantes se cuentan entre los que pueden aprender matemáticas sin ser necesariamente genios.

Un estudio previo de Gómez-Chacón, et al. (2011) realizado con 56 estudiantes de nivel secundaria, prueba que los estudiantes con puntuaciones más altas en cuanto a la reflexión cognitiva poseen creencias más positivas sobre ellos mismos. En este sentido, encontramos que más de la mitad de los alumnos que participaron en la presente investigación tienen un alto sentido de autoeficacia, y es en presencia de estas creencias favorables a la aplicación del pensamiento analítico, en las que se encontraron los más altos porcentajes de respuestas correctas en los tres apartados del cuestionario.

Al igual que en el estudio realizado por González-Forte et al. (2019a) en España con 438 estudiantes desde quinto de nivel primaria hasta cuarto de educación secundaria en el que se explica que en el cuestionario sobre comparación de fracciones, se sostiene la existencia de tres formas en las que los alumnos utilizan el razonamiento basado en el uso del conocimiento del número natural; sesgo del número natural, pensamiento de diferencias y sesgo inverso, se encontró que las respuestas de los estudiantes a la pregunta "¿Cómo lo sabes?" en los ítems de la tercera sección del cuestionario se presentaron cada uno de estos tres tipos de sesgos cuya presencia no fue profundizada por no ser el objetivo de la presente investigación.

Nuestra investigación deja de manifiesto la importancia de que un sistema de creencias fortalecido permite a los alumnos un mayor rendimiento en cuanto al desempeño de sus capacidades. Los sujetos con creencias apropiadas, alta reflexión cognitiva y alto nivel de trabajo de memoria muestran un mejor razonamiento y rendimiento académico en matemáticas dando paso al pensamiento analítico cuando se resuelven problemas de matemáticas en coincidencia con la idea de Gómez-Chacón, et al. (2014).

El sistema de creencias de los alumnos influye en gran medida en definición del tipo de razonamiento que utilizaron cuando resolvieron problemas con números racionales. Se destacaron las creencias de autoeficacia y las creencias sobre la matemática, si estas se encuentran en niveles que podrían identificarse como bajos, se pronostica una imposición del razonamiento intuitivo por sobre el razonamiento analítico que lleva a los estudiantes a cometer errores en determinados problemas que requieren de un razonamiento más reflexivo y de más tiempo de análisis.

Es importante resaltar las enormes limitaciones que se enfrentaron durante el análisis de la información obtenida. Debemos comenzar con el señalamiento de que la información recabada rebaso por completo la posibilidad de analizarla en su totalidad. En las respuestas de los estudiantes a los ítems de respuestas abiertas existe una riqueza de datos que pueden y deben ser analizadas con diversas lentes. Por ejemplo, se encontraron dificultades de aprendizaje en la representación fraccionaria de los números racionales que ya se señalaba en el apartado de resultados. Hay evidencia para sustentar el hecho que los estudiantes no identifican esta representación fraccionaria como "un número racional" sino como un momento intermedio de escritura entre el resultado de la división del numerador entre el denominador, de la que además solo son capaces de dar un dato aproximado que tampoco asocian a un mismo número racional. El algoritmo de la división entre números enteros parece estar totalmente ausente en lo que se refiere al cálculo de la representación decimal en la mente de cualquiera de los estudiantes.

En las respuestas a los ítems incongruentes a la pregunta ¿cómo lo sabes? Se identificó la presencia de los diferentes sesgos abordados en la literatura en los que tampoco se profundizo por no ser el objetivo de nuestra investigación.

No se hizo énfasis alguno en el grado escolar de los 108 estudiantes, se encontró por ejemplo que en cuanto al tipo de razonamiento utilizado en los alumnos se encontraron variantes según el grado escolar en el que se ubicaban. El razonamiento intuitivo se hizo presente en 14 alumnos de primer de secundaria, en 10 alumnos de segundo y en 17 de tercer año, sumando un total de 41 alumnos que aplicaron un razonamiento intuitivo. Mientras que el razonamiento analítico lo aplicaron 19, 19 y 29 alumnos de primero, segundo y tercer año respectivamente, sumando un total de 67 alumnos que aplican el razonamiento analítico al resolver problemas matemáticos.

Tampoco se enfatizó en cuestiones de género, punto para el cual también se cuenta con datos que podrían mostrar diferencias entre la aplicación del razonamiento analítico e intuitivo diferenciado por género.

Es posible, dada la cantidad de estudiantes, presentar datos interesantes desde el punto de vista cualitativo descriptivo, para lo cual se cuenta también con información suficiente.

En lo particular, esta investigación fue de gran aporte para mi practica docente, pues me permitió indagar a profundidad un tema, como lo fue el estudio de los racionales, que he trabajado y sigo haciéndolo con alumnos de nivel secundaria. Pude comprender que, en la mayoría de los casos, existe un prejuicio importante que influye de manera directa en relación a las fracciones pues son éstos son los que alimentan sus creencias y las convierten en desfavorables para el estudio de las fracciones. Esto permite que el enfoque en el aspecto del dominio afectivo tome la importancia adecuada en el proceso de enseñanza, pues es de donde se puede partir para hacer que las creencias sean favorables al aprendizaje de cualquier tema en matemáticas, pero en particular, en el de los números racionales.

De igual manera, esta investigación ayudó a fortalecer mi idea de seguir aportando al estudio de la matemática educativa, a impartir desde el aula las bases de una buena educación y permitir que los alumnos sigan creyendo en sí mismos, en que las matemáticas son fundamentales y que si, todos pueden aprenderlas.

9. Referencias

Attridge, N. & Inglis, M. (2014) Increasing cognitive inhibition with a difficult prior task: implications for mathematical thinking. *Mathematics Education* 47, 723-734.

Attridge, N. & Inglis, M. (2015) La teoría de la disciplina formal y la lógica mental. *Práxis Filosófica*, (41), 723–734. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0656-1.

Caballero-Carrasco, A., Cárdenas-Lizarazo, J. y Gómez del Amo, R. (2014) El dominio afectivo en la resolución de problemas matemáticos: Una jerarquización de sus descriptores. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, 7 (1), 233-246.

Caballero-Jiménez, F. y Espínola-Reyna, J. G. (2016) El rechazo al aprendizaje de las matemáticas a causa de la violencia en el bachillerato tecnológico. *Ra Ximhai*, 12(3), 143-161.

Chaves, E., Castillo, M. y Gamboa, R. (2008) Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* *3*(4), 29-44. http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6906/6592.

Crespo, C. (2008) Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 717-727). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and Perspectives in Reseacher on Learning (Mathematics) from Instruction. *Applied Psychology: An International Review*, 53(2), 279-310.

Erazo-Hurtado, J. y Aldana-Bermúdez, E. (2015) Sistema de creencias sobre las matemáticas en los estudiantes de educación básica. *Praxis*, *vol. 11*, 163-169.

Evans J. & Stanovich K.E. (2013) Dual-process theories of higher cognition advancing the debate. *Perspect. Psychol Sci.* 8, 223–41.

Fabian, G. (2013) Efectividad de un modulo de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de secundaria de Callao. *Propósitos y Representaciones*, 1 (1), 87-105.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2005) El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, vol. 2 (1) 15-32.

Gómez-Chacón, I.M. (2000) Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. *ESE* 3, 158-160.

Gómez-Chacón, I. M. (2003) La Tarea intelectual en Matemáticas Afecto, Meta-afecto y los Sistemas de Creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X(2),* 225-247.

Gómez-Chacón, I.M. (2006) Procesos de intuición en matemáticas: una experiencia con estudiantes para profesores de Secundaria. *Matematicalia: revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española* 2(4), 1-5.

Gómez-Chacón, I. M., Op't Eynde, P. y De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las ciencias*, 24(3), 309-324.

Gómez-Chacón, I. M. (2007) Sistema de creencias sobre las matemáticas en alumnos de secundaria Creencias. *Revista Complutense de Educación*, 18,125-143.

Gómez-Chacón, I.M., García-Madruga, J.A., Rodríguez, R., Vila, J.O. & Elosúa, Ma. R. (2011) Mathematical beliefs and cognitive reflection: Do they predict academic achievement? *MAVI-17-Faculty of Mathematics, Univesity of Bochum Germany* (Eds.), 1-10.

Gómez-Chacón, I. M., García-Madruga, J.A., Vila, J. O., Elosúa Ma. R. & Rodrígez, R. (2014). The dual processes hypothesis in mathematics performance: belifes, cognitive reflection, working memory and reasoning. *Learning and Individual Differences*, *vol. 29* (2014) 67-73. http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.001

González-Forte, J., Fernández, C. y Llinares, S. (2019a). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante* 28 (2), 32-52.

González-Forte, J., Fernández, C., Hoof, J. V. y Dooren, W. V. (2019b) Estudio cualitativo de los razonamientos de los estudiantes de primaria y secundaria sobre la magnitud de las fracciones. *Investigación en Educación Matemática* XXIII, 363-372.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista P. (2003) Recolección de los datos. *Metodología de la Investigación*. 3ª edición. México: Mc Graw Hill 2003; 342-482.

Herrera, J. (2008). La investigación cualitativa. pp. 1-39. Recuperado de https://juanherrera.files.wordpress.com/2008/05/investigacion-cualitativa.pdf

Kothari, C.R. (2008). *Research Methodology Methods and Techniques (second revised edtion),* new delhi, new age international.

Leron, U. & Hazzan, O. (2006) The rationality debate: Aplication of cognitive psychology to mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 62 (2006), 105-126. 10.1007/s10649-006-4833-1.

Leron U. & Hazzan, O. (2009) Intuitive vs analytical thinking: Four perspectives. *Educational Studies in Mathematics* 71 (2009), 263-278.

López-Astorga, M. (2019) Links between mythology and philosophy: Homer´s Iliad and current criterio of rationality*. Principía*, 23(1), 69-78.

López, O., Hederich, C. y Camargo, A. (2012). Logro de aprendizaje en ambientes hipermediales: andamiaje autorregulador y estilo cognitivo. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 44(2), 13-26.

López, C. (2006). La intuición y la matemática. *Revista de Ciencia y Tecnología Facultad de Ingeniería. Universidad de Palermo*, 6, 29-36.

McLeod, D.B. (1989) The role of affect in mathematical problem solving. Affect and Mathematical Problem Solving: *A new perspective*, 20-36.

Mieles B., M. D., Tonon, G., Alvarado, S. V. (2012). Investigación cualitativa: el análisis temático para el tratamiento de la información desde el enfoque de la fenomenología social. *Universitas Humanística*, 74, 195-225. http://www.scielo.org.co/pdf/unih/n74/ n74a10.pdf.

Op't Eynde, P., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. *Beliefs: A hidden variable in mathematics, education?* pp. 13-38.

Pajares, F. Hartley & Valiante, G. (2001). Response format in Writing self-efficacy assessment: greater discrimination increases prediction. *Measurement and evaluation in counseling and development*, 33 (4), 214-221.

Reyna, V. F. (2004) How people make decisions that involve risk: a dual-processes approach. *Current Directions in Psychological Science*, (13), 60-66.

Sánchez, G. y Quintana, A. (2016) Atribución de motivación de logro y rendimiento académico en matemática*. PsiqueMag*, 4(1), 81-97.

Schonfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, en Grouws, D.A. (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 334-370.

Secretaría de Educación Pública. (2023). Saberes y pensamientos científicos (1ra ed.) Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública. https://libros.conaliteg.gob.mx/2023/S1SAA.htm?#page/1

Tzur, R. (2011) Can Dual processing Theories of Thinking inform conceptual learning in Mathematics?. *The Mathematics Enthusiast*, 8 (3), 597-635.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013): Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks*, Research in Mathematics Education*, 15 (2), 154-164.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2012). ¿Naturalmente sesgado? En busca de pruebas de tiempo de reacción de un sesgo numérico natural en adultos. *The Journal of Mathematical Behavior, 31* (3), 344–355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Vizcaíno-Escobar, A. E., Manzano-Mier, M., y Casas-Cardoso, G. (2015). Validez de constructo y confiabilidad del Cuestionario de Creencias Epistemológicas sobre la Matemática en alumnos de secundaria básica. *Revista Colombiana de Psicología*, 24 (2), 301-316. 10.15446/rcp.v24n2.43974.

10. Anexos

10.1 Anexo 1

Cuestionario Sistema de Creencias

La escala sobre Sistema de Creencias sobre las Matemáticas para nivel secundaria que emplearemos quedo integrada por: cuatro ítems para la dimensión de creencias sobre el aprendizaje (1,5,4 y 9), cuatro ítems sobre las creencias sobre la matemática (7, 8, 2 y 9), cinco ítems de creencias de autoeficacia (3,10,11, 12 y 13), dos ítems sobre las creencias sobre la enseñanza (14 y 6) y tres ítems sobre las creencias sobre la solución de problemas (15, 16 y 17), el cual se presenta a continuación tal y como se aplicó a los estudiantes:

- El siguiente cuestionario se elaboró con el fin de recolectar los datos necesarios para la investigación “La influencia del sistema de creencias en los procesos duales en la resolución de problemas sobre números racionales en nivel secundaria”. La información que nos proporciones será confidencial y el único fin de su recolección es estrictamente académico.

Nombre_______________________________________ Edad _____ Sexo______

Escuela ________________Grado y Grupo____________ Fecha ______________

A continuación, te pedimos que respondas a las siguientes afirmaciones tachando en el recuadro de aquella respuesta que consideres que expresa de mejor manera tu opinión.

No	Afirmación	Casi nunca	Solo a veces	Más o menos	Casi siempre	Siempre
1.	Aprendo las matemáticas de clase rápidamente.					
2.	Las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos.					
3.	Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejo de intentarlo.					
4.	Cualquiera puede aprender matemáticas.					
5.	Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas.					
6.	Las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos.					
7.	Las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar.					
8.	Las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas.					

9.	Solo los genios aprenden matemáticas.					
10.	Puedo trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones.					
11.	Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil.					
12.	Puedo resolver correctamente cualquier problema con fracciones.					
13.	Entiendo todo lo que mi profesor explica sobre fracciones.					
14.	Recuerdo todo lo que me enseñaron sobre fracciones.					
15.	Los problemas de matemáticas se deben resolver rápido.					
16.	La respuesta a un problema de matemáticas debe reflexionarse.					
17.	La respuesta a un problema de matemáticas coincide con la primera idea que me viene a la cabeza.					

10.2 Anexo 2

Cuestionario de Problemas Matemáticos con Números Racionales

Contesta correctamente los siguientes problemas que se presentan, no puedes utilizar calculadora ni ningún otro dispositivo móvil. Tu participación debe ser lo más honesta posible para apoyo a nuestra investigación.

Nombre____ Edad ____ Sexo______

Escuela _________________Grado y Grupo__________ Fecha _______________

1.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 5 x ½ ¿El resultado será mayor o menor que 5?

-Mayor que 5

-Menor que 5

¿Cómo lo sabes?

____

2.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 10 x $\frac{3}{2}$ ¿El resultado será mayor o menor que 10?

-Mayor que 10

-Menor que 10

¿Cómo lo sabes?

____

3.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 8 x $\frac{5}{2}$ ¿El resultado será mayor o menor que 8?

-Mayor que 8

-Menor que 8

¿Cómo lo sabes?

____

4.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 2 x 0.5 ¿El resultado será mayor o menor que 2?

-Mayor que 2

-Menor que 2

¿Cómo lo sabes?

____

5.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 7 x 1.5 ¿El resultado será mayor o menor que 7?

-Mayor que 7

-Menor que 7

¿Cómo lo sabes?

____

6.-Sin hacer operaciones, si se multiplica 8 x 2.5 ¿El resultado será mayor o menor que 8?

-Mayor que 8

-Menor que 8

¿Cómo lo sabes?

____

Sección 2. A continuación, sin hacer operaciones, encierra en un círculo el número que consideres que es mayor que el otro y responde que idea tomaste en cuenta para llegar a esa decisión.

7.- $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$

¿Cómo sabes? ____

8.- $\frac{13}{35}$, $\frac{12}{35}$

¿Cómo lo sabes? ____

9.- $\frac{25}{7}$, $\frac{31}{7}$

¿Cómo lo sabes? ____

10.- $\frac{12}{5}$, $\frac{12}{8}$

¿Cómo sabes? ____

11.- $\frac{3}{15}$, $\frac{3}{30}$

¿Cómo lo sabes? ____

12.- $\frac{24}{36}$, $\frac{24}{51}$

¿Cómo lo sabes? ____

13.- $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{18}$

¿Cómo sabes? ____

14.- $\frac{29}{17}$, $\frac{13}{20}$

¿Cómo lo sabes? ____

15.- $\frac{36}{21}$, $\frac{7}{56}$

¿Cómo lo sabes? ____

Sección 3. Resuelve las siguientes operaciones de fracciones y escribe o explica el procedimiento que llevaste a cabo.

16.- $\frac{6}{10} + \frac{4}{29} =$

17.- $\frac{4}{12} - \frac{15}{20} =$

18.- $\frac{6}{13} + \frac{4}{22} =$

19.- $\frac{7}{11} - \frac{9}{32} =$

20.- $\frac{12}{32} + \frac{55}{6} =$

21.- $\frac{8}{14} - \frac{5}{7} =$

22.- $\frac{8}{2}\ X\ \frac{3}{2} =$

23.- $\frac{3}{10}\ X\ \frac{5}{6} =$

24.- $\frac{2}{5}\ X\ \frac{9}{5} =$

25.- $\frac{3}{11}\ X\ \frac{2}{7} =$

26.- $\frac{7}{6}\ X\ \frac{4}{6} =$