

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”



UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS



**ASPECTOS DE LOS USOS DE LA VARIABLE EN
TAREAS DE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN EL
NIVEL MEDIO SUPERIOR**

Tesis para obtener el grado de
Maestra en Matemática Educativa
con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

Perla Valenzuela Ulloa

Directoras de tesis:

Dra. Darly Alina Kú Euán

Dra. Beatriz Adriana Rodríguez González

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre “**Aspectos de los usos de la variable en tareas de medidas de tendencia central en el nivel medio superior**” y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Perla Valenzuela Ulloa de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 11 de Noviembre del 2024



Dra. Darly Alina Ku Euan



**Dra. Beatriz Adriana Rodríguez
González**



**Dra. Judith Alejandra Hernández
Sánchez**

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 08 del mes de agosto del año 2024, la que suscribe Perla Valenzuela Ulloa alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 37183398; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado “**Aspectos de los usos de la variable en tareas de medidas de tendencia central en el nivel medio superior**” bajo la dirección de la Dra. Darly Alina Ku Euan, la Dra. Beatriz Adriana Rodríguez González y la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.



Lic. Perla Valenzuela Ulloa

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías
por el apoyo económico brindado mediante la
beca con número de registro de CVU 1241963,
para la realización de mis estudios de Maestría.

Resumen

Diversas investigaciones coinciden en que el Álgebra trasciende hacia otras áreas de la Matemática, siendo la variable y sus usos un elemento común y versátil en la Matemática. Sin embargo, la mayoría de los estudios se han enfocado en el uso de la variable dentro del ámbito del Álgebra, dejando de lado como se presenta en otros campos como es el caso de la Estadística. Esta carencia de investigaciones centradas en los elementos algebraicos en tareas estadísticas, especialmente aquellas que involucran el uso de la variable, es evidente. El presente estudio explora cómo los usos de la variable se manifiestan en tareas estadísticas, con un enfoque particular en las medidas de tendencia central (MTC). El objetivo es describir los aspectos y usos de la variable que se manifiestan en las tareas de MTC realizadas y reconocidas por dos grupos de estudiantes de nivel medio superior.

Para alcanzar este objetivo, se define en el sustento teórico, el marco matemático, considerando las MTC más comunes: la media, la mediana y la moda. También se introduce la definición tarea matemática y se adopta el Modelo de los Tres Usos de la Variable (Modelo 3UV), el cual abarca la variable: como incógnita, como relación funcional y como número general, cada uno con sus aspectos específicos. En cuanto a la metodología de la investigación, se emplea el análisis a través de tres de sus niveles: objetivo, subjetivo y fenomenológico. Para la recolección de datos, se aplicaron un cuestionario y una encuesta a dos grupos de estudiantes: uno de primer semestre inscrito en un curso de Estadística bajo el plan de estudios de la Nueva Escuela Mexicana 2023, y otro de sexto semestre, también en un curso de Estadística, pero bajo el plan de estudios 2017. Los resultados obtenidos muestran que, en las tareas relacionadas con las medidas de tendencia central, se identifican principalmente dos de los usos de la variable, como incógnita (aspectos I1-I5) y como número general (aspectos G2 y G4). Específicamente se observa una relación positiva entre la presencia de estos aspectos y las respuestas correctas. Además, el grupo de sexto semestre presentó una mayor frecuencia de respuestas correctas en comparación con el grupo de primer semestre. Esto sugiere que haber cursado Álgebra antes de Estadística tiene un impacto positivo en la comprensión y uso de la variable por parte de los estudiantes.

Palabras clave. Usos de la variable, Aspectos de la variable, Medidas de Tendencia Central, Estadística, Nivel Medio Superior.

Abstract

Various studies agree that Algebra transcends into other areas of Mathematics, with the variable and its uses being a common and versatile element within Mathematics. However, most research has focused on the use of the variable within the scope of Algebra, overlooking its appearance in other fields such as Statistics. This lack of research centered on algebraic elements in statistical tasks, especially those involving the use of variables, is evident. This study aims to explore how the uses of the variable manifest in statistical tasks, with a particular focus on measures of central tendency (MCT). The main objective is to identify the aspects and uses of the variable that appear in MCT tasks completed and recognized by two groups of high school students.

To achieve this objective, the theoretical framework defines the mathematical background, considering the most common MCTs: mean, median, and mode. The definition of mathematical task is also introduced, and the Model of the Three Uses of the Variable (3UV Model) is adopted, which encompasses three uses of the variable: as an unknown, as a functional relation, and as a general number, each with its specific aspects. Regarding the research methodology, analysis is conducted through three levels: objective, subjective, and phenomenological. For data collection, a questionnaire and a survey were administered to two groups of students: one group in their first semester enrolled in a Statistics course under the 2017 curriculum, and another group in their sixth semester, also in a Statistics course, but under the New Mexican School curriculum of 2023.

The results show that, at least in tasks related to measures of central tendency, the use of the variable is mainly identified as an unknown (aspects I1-I5) and as a general number (aspects G2 and G4). Additionally, a positive relationship is observed between the presence of these aspects and correct answers. Specifically, the sixth-semester group showed a higher frequency of correct responses compared to the first-semester group. This suggests that having taken Algebra before Statistics has a positive impact on students' understanding and use of the variable.

Keywords: Uses of the variable, Aspects of the variable, Statistics, High School Level.

Índice General

Resumen	4
Abstract	5
Introducción	11
Capítulo 1. Planteamiento del Problema de Investigación	13
1.1 Motivación	13
1.2 Antecedentes	14
1.2.1 Trascendencia del Álgebra a otras áreas de la Matemática	14
1.2.2 Trabajo algebraico en tareas de Estadística	15
1.2.3 Investigaciones sobre dificultades relacionadas con la variable	16
1.2.4 Tendencias de investigación del concepto de variable y Modelo 3UV	18
1.3 Reflexión	19
1.4 Problemática	19
1.5 Problema	20
1.6 Pregunta de investigación	21
1.7 Objetivo General	21
1.8 Objetivos Particulares	21
1.9 Justificación	22
Capítulo 2. Sustento Teórico	24
2.1 Modelo 3UV	24
2.2 La tarea matemática	26
2.3 Marco Matemático	26
Capítulo 3. Metodología	29

3.1 Tipo de investigación	29
3.2 Descripción de la población	29
3.3 Método e instrumentos de investigación	31
3.3.1 Análisis de tareas como método de investigación	32
3.3.2 Ficha de registro, cuestionario y encuesta como instrumentos de la investigación	33
3.4 Fases metodológicas	48
Capítulo 4. Análisis y resultados	50
4.1 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 1)	50
4.2 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 2)	57
4.3 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 3)	60
4.4 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 4)	66
4.5 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 5)	69
4.6 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 6)	71
Capítulo 5. Conclusiones y Reflexiones	74
5.1 Conclusiones sobre la pregunta de investigación	74
5.1.1 La variable como número general en las tareas analizadas.	74
5.1.2 La variable como relación funcional en las tareas analizadas.	74
5.1.3 La variable como incógnita en las tareas analizadas.	75
5.2 Conclusiones sobre aplicaciones a los grupos 1 y 2	75
5.3 Conclusiones sobre el Modelo 3UV en Estadística	75
Reflexiones Finales	77
Referencias Bibliográficas	79
Anexos	82

Índice de Figuras

Figura 1. Fórmula para calcular la media aritmética de datos no agrupados	27
Figura 2. Fórmula para calcular la media aritmética de datos agrupados	27
Figura 3. Fórmula para obtener la ubicación de la mediana	27
Figura 4. Cálculo de la mediana para datos agrupados	28
Figura 5. Progresión 13, programa de estudios de Pensamiento Matemático I. Relaciones con las metas, categorías y subcategorías.	30
Figura 6. Aprendizajes clave de la asignatura: Probabilidad y estadística	31
Figura 7. Fases metodológicas de la investigación	48
Figura 8. Respuesta de A14G1	52
Figura 9. Respuesta de A25G1	53
Figura 10. Respuesta de A10G1	53
Figura 11. Respuesta de A23G2	54
Figura 12. Respuesta de A16G2	54
Figura 13. Respuesta de A2G2	54
Figura 14. Respuesta de A3G2	56
Figura 15. Respuesta de A13G2	56
Figura 16. Respuesta de A7G1	59
Figura 17. Respuesta de A3G2	59
Figura 18. Respuesta de A8G2	59
Figura 19. Respuesta de A13G1	62
Figura 20. Respuesta de A20G1	63
Figura 21. Respuesta de A6G1	64
Figura 22. Respuesta de A16G1	64
Figura 23. Respuesta de A3G2	65
Figura 24. Respuesta de A15G2	65
Figura 25. Respuesta de A16G2	66
Figura 26. Respuesta de A10G1	68
Figura 27. Respuesta de A4G2	68
Figura 28. Respuesta de A6G1	70
Figura 29. Respuesta de A11G2	71

Figura 30. Respuesta de A14G1

73

Figura 31. Respuesta de A16G2

73

Índice de Tablas

Tabla 1. Tabla de metodología	31
Tabla 2. Ficha de registro	34
Tabla 3. Análisis del ambiente de la tarea	35
Tabla 4. Agrupamiento por respuesta a Tarea 1	50
Tabla 5. Agrupamiento por aspectos de Tarea 1	51
Tabla 6. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 1	52
Tabla 7. Agrupamiento por respuesta a Tarea 2	57
Tabla 8. Agrupamiento por aspectos de Tarea 2	57
Tabla 9. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 2	58
Tabla 10. Agrupamiento por respuesta a Tarea 3	60
Tabla 11. Agrupamiento por aspectos de Tarea 3	61
Tabla 12. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 3	62
Tabla 13. Agrupamiento por respuestas a Tarea 4	66
Tabla 14. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 4	67
Tabla 15. Agrupamiento por respuesta a Tarea 5	69
Tabla 16. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 5	70
Tabla 17. Agrupamiento por respuesta a Tarea 6	71
Tabla 18. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 6	72

Introducción

En el ámbito de la Matemática Educativa, la comprensión y aplicación de conceptos algebraicos representan un desafío persistente para los estudiantes. Numerosas investigaciones (por ejemplo, Oliva (2023); Gil (2018); Díaz (2009); Cury (2004); Trigueros *et al.* (2000)) convergen en la idea de que los elementos algebraicos no se limitan simplemente al ámbito del álgebra, sino que trascienden hacia otras áreas de las matemáticas, revelando así la importancia de abordar este tema de manera integral.

Un denominador común en las investigaciones existentes sobre enseñanza-aprendizaje algebraico es la destacada presencia de la variable y sus usos (por ejemplo, en Castro *et al.* (2024); Mariano e Isla (2018); Ursini y Trigueros (2006); Díaz y Morales (2005)). No obstante, es relevante señalar que gran parte de estos estudios se centran predominantemente en los usos de la variable en el contexto algebraico. Existe una notable brecha en la literatura en lo que respecta a investigaciones que exploren específicamente el Álgebra y los usos de la variable en tareas de Estadística.

Este trabajo se enfoca en aportar a dicho vacío, centrándose en los usos y aspectos de la variable algebraica en tareas de Estadística, con especial énfasis en aquellas relacionadas con las medidas de tendencia central. En este contexto, se observan dificultades significativas en el manejo de la variable, lo que motiva la necesidad de una investigación detallada de la presencia de la variable en tareas estadísticas.

El objetivo principal de esta investigación es describir los aspectos y usos de la variable que se manifiestan en las tareas de MTC realizadas y reconocidas por dos grupos de estudiantes de primer y sexto semestre del nivel medio superior. Para ello, se adopta teóricamente lo siguiente: la concepción de tarea matemática según Herbst (2012), la definición de medidas de tendencia central; media, mediana y moda propuestos en Ortiz *et al.*, (2019) y el Modelo de los Tres Usos de la Variable (Modelo 3UV) expuesto en Ursini y Trigueros (2006). El Modelo 3UV, originalmente es concebido en el contexto algebraico (Ursini y Trigueros, 2006), sin embargo en esta investigación se propone observar dicho modelo en el ámbito estadístico, anticipando que esta adaptación permitirá identificar aspectos cognitivos relacionados con la variable que difieren de los encontrados en contextos puramente algebraicos, aportando así nuevos y valiosos conocimientos a la comprensión de los desafíos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en donde se presente actividad algebraica.

La investigación tiene un enfoque cualitativo, siendo de tipo exploratoria y descriptiva. En cuanto a la metodología, se emplea un análisis detallado de tareas propuestas por Orozco (1991), que se realiza en tres niveles: objetivo, subjetivo y fenomenológico. Complementariamente, se utiliza un cuestionario y una encuesta para la recolección de datos y una tabla de registro para el análisis de los datos. Esperando que esta combinación metodológica permita identificar aspectos cognitivos asociados a los usos de la variable en un contexto estadístico, ofreciendo así una perspectiva integral y enriquecedora que va más allá de los estudios tradicionalmente centrados en el ámbito puramente algebraico.

Este documento está estructurado en cinco capítulos, cada uno de los cuales aborda aspectos clave de la investigación realizada:

Capítulo 1: Planteamiento del Problema. Este capítulo se inicia con la motivación que llevó a la realización de esta investigación, estableciendo un marco de antecedentes que contextualizan el estudio y conducen a una reflexión profunda sobre el tema. A continuación, se define la problemática y se delimita el problema de investigación, formulando la pregunta de investigación correspondiente. Además, se presentan los objetivos que se pretenden alcanzar y se justifica la relevancia del estudio, argumentando la importancia y la pertinencia de los resultados esperados.

Capítulo 2: Sustento Teórico. En este capítulo se expone el marco teórico que fundamenta la investigación, dividido en tres secciones principales. Primero, se presenta el Modelo 3UV, una herramienta conceptual clave para el estudio. Luego, se define el concepto de tarea matemática, describiendo sus características y su relevancia en el contexto del análisis. Finalmente, se aborda el marco matemático, que incluye definiciones esenciales como la moda, la mediana y la media aritmética, proporcionando las bases teóricas necesarias para la investigación.

Capítulo 3: Metodología. El tercer capítulo se centra en la metodología empleada en la investigación. Se detalla el tipo de estudio realizado y se describe la población objetivo. También se presenta el análisis de tareas como el principal método de investigación, explicando los instrumentos utilizados, tales como la ficha de registro, el cuestionario y la encuesta. Además, se incluye un diagrama que ilustra las fases metodológicas de la investigación, ofreciendo una visión clara y organizada del proceso seguido.

Capítulo 4: Análisis y Resultados. Este capítulo presenta los resultados obtenidos a partir del análisis de datos, organizados en función de las tareas 1 a 6 que conforman el cuestionario aplicado. Se muestran fragmentos significativos del análisis de las aplicaciones, así como una comparación detallada de los resultados de la encuesta aplicada a los dos grupos estudiados. Esta sección destaca los hallazgos más relevantes y cómo estos se relacionan con los objetivos planteados.

Capítulo 5: Conclusiones y Reflexiones Finales. En el último capítulo se presentan las conclusiones del estudio, sintetizando los hallazgos más importantes y reflexionando sobre su impacto y posibles aplicaciones. Se discuten las implicaciones de los resultados y se ofrecen recomendaciones para futuras investigaciones, destacando la contribución del estudio al campo de la matemática educativa.

Capítulo 1. Planteamiento del Problema de Investigación

Este capítulo comienza con la exposición de la motivación que condujo al interés por llevar a cabo esta investigación. Posteriormente, se presentan los antecedentes obtenidos de diversas fuentes literarias, seguidos de una reflexión sobre la información recopilada. Luego se aborda la problemática y se formula el planteamiento del problema. Asimismo, se plantea la pregunta de investigación, la cual se pretende responder al alcanzar los objetivos particulares dentro del objetivo general. Por último, el capítulo concluye con la sección de justificación, donde se argumenta el motivo de la relevancia y pertinencia de realizar esta investigación.

1.1 Motivación

Los motivos que inspiraron este estudio se relacionan con mi experiencia académica, donde he notado que el Álgebra desempeña un papel fundamental y transversal en las Matemáticas. Los conceptos fundamentales del Álgebra, como el de variable, trascienden su aplicación en esta disciplina específica. En Álgebra, se estudia como objeto en construcción, pero también se utiliza como herramienta esencial en áreas como el Cálculo, la Probabilidad y la Estadística.

Por otro lado, he descubierto que los errores y dificultades respecto al concepto de variable y sus usos, son comunes y a menudo representan obstáculos en el proceso de aprendizaje. Sin embargo, también considero que la identificación y análisis de dificultades y errores por parte de los profesores pueden ser una oportunidad valiosa para mejorar la enseñanza.

Cuando los estudiantes hacen la transición de la Aritmética al Álgebra, se encuentran con la interpretación y los usos de variables, lo cual a veces puede resultar en rechazo hacia las Matemáticas. Ya que se pasa de trabajar solo con números y operaciones a trabajar también con literales. La introducción de otros símbolos en lugar de solo números y operaciones puede dar lugar a la famosa frase que a menudo se escucha: “Me gustaban las Matemáticas hasta que les pusieron letras”.

Cabe mencionar que en un inicio mi interés se centró en la investigación sobre tratamientos de errores relacionados con los usos de la variable en tareas propias del Álgebra. Sin embargo, a partir de la lectura de trabajos que realizan análisis sobre qué aspectos de los usos de la variable se presentan en el currículo de Nivel Medio Superior, me di cuenta de que los usos de la variable también son relevantes en otras asignaturas, como Estadística. Ahora me interesa analizar cómo se presentan los usos de la variable en tareas concretas y cómo se manifiestan los aspectos de los usos de la variable en las respuestas de los estudiantes en un contexto estadístico.

Al investigar sobre los usos de la variable en tareas de Probabilidad y Estadística desde el enfoque del modelo 3UV, noté una falta de trabajos existentes en este campo. Por esta razón,

mi investigación podría aportar resultados innovadores a la comunidad de la Matemática Educativa.

1.2 Antecedentes

A continuación, se presentan cuatro categorías que funcionan como brechas hacia el tema de investigación. En la primera y segunda categoría, se presenta cómo el Álgebra, sus elementos y dificultades trascienden a otras áreas de las Matemáticas. Seguida de la tercera categoría, se recopilan trabajos relacionados específicamente con el análisis de dificultades en el aprendizaje y manejo de la variable. Finalmente, en la cuarta categoría se presentan los focos de las investigaciones que abordan la variable en los últimos años.

1.2.1 Trascendencia del Álgebra a otras áreas de la Matemática

En su trabajo, Trigueros *et al.* (2000) subraya la significativa influencia del Álgebra y sus componentes, particularmente el concepto de variable, en el estudio y la comprensión integral de las matemáticas. Los autores enfatizan que “la comprensión de cualquier disciplina matemática requiere de un dominio completo y profundo de los conceptos algebraicos, especialmente del concepto de variable” (p. 27). Este énfasis se debe a que el Álgebra se reconoce como el cimiento de las matemáticas, proporcionando una herramienta esencial para abordar una amplia gama de problemas matemáticos en diversos campos, que van desde la Aritmética hasta la Estadística, la Geometría y el Cálculo.

Según Cury (2004), en el ámbito del Cálculo, se pueden rastrear algunos errores cometidos por los estudiantes que están vinculados directamente con el contenido del Álgebra impartido en su educación previa. Estos errores abarcan diversas áreas, incluyendo: errores al multiplicar un monomio por un binomio, errores al calcular el producto de potencias con la misma base, errores al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, errores al no identificar la variable de integración, errores en las cancelaciones y sustituciones de variables, errores relacionados con operaciones, con la aplicación de propiedades y con la factorización, entre otros.

Posteriormente, en el trabajo de Díaz (2009), se destacan errores relacionados con temas algebraicos fundamentales que resultan esenciales para el curso de Cálculo, comprendiendo temas tales como: operaciones con racionales, desarrollo binomial, leyes de cancelación, términos semejantes, exponenciación, ley distributiva, uso del cero, factorización y despeje de variables.

En una investigación posterior realizada por Ascencio *et al.* (2017), se abordan de manera similar temas algebraicos que tanto la literatura especializada como los docentes de Cálculo Diferencial señalan como áreas donde los estudiantes tienden a enfrentar dificultades con frecuencia. Estos temas incluyen: leyes de exponentes, productos notables y factorización, simplificación de fracciones algebraicas y ecuaciones (lineales, cuadráticas y racionales).

Al observar estas listas de errores y temas algebraicos que presentan una alta incidencia de equivocaciones, resulta evidente que un factor recurrente en la mayoría de ellos es la variable. Trigueros *et al.* (2000) señalan que “si bien los diferentes usos de la variable están siempre presentes en cada uno de los cursos de matemáticas que se imparten en la enseñanza media, los estudiantes no adquieren la capacidad de implementarlos, de simbolizarlos y de manipularlos”. Esta falta de comprensión adecuada de la variable puede conducir a los estudiantes a cometer errores en diversas áreas de las matemáticas donde la variable desempeña un papel fundamental. Se han identificado áreas y temas específicos donde la variable cobra vida y donde sus diversos usos se hacen evidentes.

En línea con estos resultados, Ursini y Trigueros (2006) sostienen que un entendimiento completo de los diversos usos de la variable requiere una implementación y exploración integral de todos los aspectos relacionados con cada uno de ellos.

De acuerdo con Oliva (2023) en su análisis al Plan de Estudios 2017 de Nivel Medio Superior (NMS), específicamente en el caso de la Probabilidad y Estadística se identifican los tres usos de la variable, pero no todos sus aspectos; en el caso de la variable como número general no se abordan los aspectos G1 (reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas) y G5 (simbolizar enunciados, reglas o métodos generales). En la variable como incógnita no se abordan los aspectos I1 (reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido, que debe ser determinado considerando las restricciones del problema) y I2 (interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos). Y en la variable como relación funcional no se abordan los aspectos F4 (reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional) y F5 (determinar el intervalo de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra).

1.2.2 Trabajo algebraico en tareas de Estadística

De la educación básica hasta la educación universitaria los alumnos se encuentran con la variable en distintas áreas de las Matemáticas, pero “a pesar de que, desde su formación temprana escolar, los estudiantes tratan con el concepto de variable, en rara ocasión reciben una instrucción formal acerca de sus diversos significados y diferencias” (Cortínez, *et al.*, 2020). Por lo que los alumnos tienden a presentar dificultades en su comprensión desde contextos algebraicos hasta estadísticos.

Como se mencionó anteriormente en investigaciones como la realizada por Oliva (2023), se llevó a cabo un análisis exhaustivo del Plan de Estudios 2017 de NMS con el objetivo de identificar la presencia de los tres usos fundamentales de la variable algebraica en el campo disciplinario de las matemáticas. Los resultados de este estudio revelaron que, si bien se abordan los tres usos de la variable (como incógnita, número general y relación funcional), no se profundiza en cada uno de los aspectos asociados a dichos usos.

Ahora, se reportan errores en cuanto al uso de la variable algebraica en Estadística. Algunos otros trabajos, como Batanero *et al.* (1994), abordan errores comunes en la comprensión de los conceptos básicos de Estadística elemental, donde reporta un error consistente en emplear la fórmula para calcular la media de datos agrupados ya que como menciona Schuyten (1991) citado en Batanero *et al.* (1994) a los estudiantes de nivel superior no les es fácil aceptar que para obtener un mismo promedio (para datos no agrupados o agrupados) se deban usar algoritmos diferentes.

Mayén (2009) identifica errores algebraicos como “utilizar fórmulas incorrectas para calcular la media” (p.101) aunado a esto Pollatsek, *et al.*, (1981) citado en Mayén (2009) nos dice que estos errores de cálculo vienen de la falta de comprensión por el estudiante de las propiedades algebraicas de los promedios, por ejemplo se cree que un conjunto de números y su promedio forman un grupo (cumpliendo propiedades) lo que es incorrecto ya que por una parte el promedio de un conjunto de datos no necesariamente pertenece a este conjunto de datos, por lo que ya no se cumpliría la propiedad de cerradura. Cabe mencionar que Mayén (2009) identifica una serie de propiedades algebraicas (llamándose desde A1 a A6) implicadas en tareas de Estadística, especialmente en tareas de medidas de tendencia central; A1 Operación interna (válida para la moda), A2 La media, mediana y moda, consideradas como operaciones algebraicas no tienen elemento neutro ni simétrico. A3. No tienen la propiedad asociativa para el caso general. A4 Son operaciones conmutativas. A5 Las medidas de tendencia central conservan los cambios de origen y escala. A6 La media de la suma de dos o más variables, es igual a la suma de las medias de dichas variables.

De la misma forma Gil (2018) observa errores al momento de aplicar la fórmula algebraica para calcular la media aritmética de datos agrupados, ya que utiliza la fórmula de la media simple y no la de la media ponderada. Y Cortínez, *et al.* (2020), en un estudio sobre las distintas interpretaciones que alumnos de universidad le dan a la variable en Estadística, encuentran en los estudiantes “confusión acerca del papel que juega n , el tamaño de la muestra, considerándolo en algunos casos como una variable y en otros no identificándose”.

1.2.3 Investigaciones sobre dificultades relacionadas con la variable

Estudios a lo largo de los años (Bolaños y Lupiáñez, 2021; Acosta, 2019; Herrera *et al.*, 2016; Lucariello *et al.*, 2014; Booth *et al.*, 2014; Bush y Karp, 2013; Escalante y Cuesta, 2012; Asquith *et al.*, 2007; Díaz y Morales, 2005; Gris *et al.*, 2005; Trigueros *et al.*, 2000) coinciden en que en el aprendizaje del Álgebra se presentan varios problemas, en específico los alumnos muestran varias dificultades en torno a los usos de la variable en tareas algebraicas y tienden a presentar errores persistentes.

Bolaños y Lupiáñez (2021), se enfocan en clasificar e interpretar los errores algebraicos que presentan un grupo de estudiantes. En su estudio, identifican que los errores más frecuentes “responden al uso de la letra como incógnita de valor específico, letra como número

generalizado o en el manejo de la letra como variable donde éstas requieren un mayor nivel cognitivo” (p. 14). En relación con el uso de la variable, los autores señalan que “el concepto de variable es difícil para los estudiantes en general, los de niveles educativos más avanzados lo utilizan con mayor flexibilidad, aunque su pensamiento algebraico en muchas ocasiones no se desarrolla como se debería” (Bolaños y Lupiáñez, 2021, p. 14).

Este tipo de dificultades en el manejo de la variable no solo afecta el desempeño de los estudiantes en Álgebra, sino que puede repercutir en su rendimiento en otras áreas matemáticas. Un ejemplo claro de esta influencia es en el cálculo de las MTC, particularmente al resolver la media aritmética. Aunque a primera vista pueda parecer un procedimiento sencillo, su correcta ejecución requiere la aplicación de fórmulas algebraicas que demandan una comprensión adecuada de la variable. Sin un pensamiento algebraico bien desarrollado, los estudiantes pueden tener dificultades para operar correctamente con las fórmulas, lo que impacta negativamente su desempeño en tareas estadísticas.

Este análisis resalta la importancia de fortalecer el pensamiento algebraico desde las primeras etapas educativas, ya que su desarrollo adecuado es crucial para afrontar con éxito no solo problemas de Álgebra, sino también de otras áreas de la Matemática que implican el uso de conceptos algebraicos, como es el caso de las medidas de tendencia central.

De la misma forma, Mariano e Isla (2018) afirman que “investigaciones realizadas con estudiantes que finalizan el bachillerato e ingresan a la universidad muestran que éstos presentan dificultades a la hora de resolver actividades que involucran distintos usos de la variable y su simbolización” (p. 247), agregando una dificultad “que tiene que ver con que los estudiantes traen de su escolaridad previa una fuerte imagen conceptual acerca del uso de las letras para simbolizar: siempre es una incógnita y se simboliza con una x ” (p. 263). Aunado a esto, Escalante y Cuesta describen que “efectivamente, existen dificultades para realizar una lectura analítica de los enunciados verbales y serios obstáculos en el proceso de traducción de los lenguajes natural, aritmético y geométrico al lenguaje algebraico” (2012, p. 109), lo cual se relaciona con el uso que se le da a la variable.

Díaz y Morales (2005) concluyen que “los resultados de varias investigaciones con estudiantes de todos los niveles nos muestran la persistencia de concepciones erróneas y la evidencia de que el concepto de variable es una cuestión confusa para los estudiantes” (p.44). Además de que no se distinguen, comprenden e implementan los distintos usos de la variable al resolver tareas algebraicas ya que:

Los mismos símbolos son utilizados para denotar diferentes caracterizaciones de la variable, y diferentes símbolos son empleados para representar la misma caracterización de la variable. Esto contribuye a opacar las diferencias entre las distintas caracterizaciones de la variable y ocultar las condiciones que determinan dónde y cómo puede variar su valor (Matz, 1982, citado en Morales y Díaz, 2003.)

Con respecto al análisis de textos, Ursini y Trigueros muestran una posible causa de que los alumnos tengan problemas para incorporar los distintos usos de la variable en sus tareas escolares como “que ni en los programas de estudio ni en los textos escolares se hace énfasis en la integración de los distintos usos de la variable” (2006, p.35).

Un par de años después, Díaz y Morales (2005) realizan un análisis en libros de texto de Matemáticas a nivel primaria, secundaria, bachillerato y superior, sobre la forma en que se presenta la definición de variable y nos dicen que “algunos libros le dedican a lo más una página para explicar el concepto de variable, pero otros generalmente mucho menos, e incluso algunos no definen el concepto” (p.39).

1.2.4 Tendencias de investigación del concepto de variable y Modelo 3UV

En un reciente estudio de revisión literaria que abarca el periodo de 2005-2023, y que incluye investigaciones tanto nacionales como internacionales, Castro *et al.* (2024) presenta un estudio exhaustivo de las tendencias de investigación relacionadas con el concepto de variable, utilizando como marco teórico el Modelo 3UV. Castro *et al.* (2024) encuentra que, según los objetivos planteados en cada investigación, estas se pueden clasificar en tres focos principales:

- **Propuestas de Enseñanza:** Este foco incluye estudios que se centran en cómo se enseña el concepto de variable. Estos trabajos analizan métodos pedagógicos y estrategias para mejorar la comprensión de las variables en los estudiantes.
- **Propuestas de Aprendizaje:** Este segundo foco aborda las dificultades y errores que los estudiantes enfrentan al aprender sobre variables. Se analizan intervenciones educativas y enfoques que pueden ayudar a superar estos desafíos.
- **Materiales Didácticos:** El tercer foco se centra en los materiales educativos, como el análisis de libros de texto, para evaluar cómo se presenta el concepto de variable y cómo estos recursos pueden mejorarse para facilitar el aprendizaje.

Es importante resaltar que, a pesar de cubrir un periodo de 18 años, las investigaciones sobre el concepto de variable bajo el Modelo 3UV se limitan predominantemente al contexto algebraico. Esto subraya la necesidad de realizar más investigaciones sobre la aplicabilidad del Modelo 3UV en otras áreas de la matemática para proporcionar una comprensión del uso de variables en diferentes contextos matemáticos.

1.3 Reflexión

Como se describió en el apartado de antecedentes, la mayoría de las investigaciones se enfocan en los análisis de errores y dificultades relacionados con los usos de la variable en Álgebra. Sin embargo, es notable la ausencia de trabajos que se centren en la presencia de los usos de la variable, en otras áreas de la Matemática, como por ejemplo la Estadística.

En cuanto a trabajos sobre el análisis de textos que tienen finalidades de indagar cómo se aborda la definición de variable o sus usos, coinciden en que parte de las dificultades tienen que ver con el hecho de que los libros de texto abordan escasamente el concepto de variable y sus usos. Es decir, ya se tiene identificada una posible parte de la raíz del problema que da paso a las dificultades y ahora se abre la brecha para atacar estas causas y contribuir al tratamiento de las dificultades de los alumnos en cuanto a la definición de variable y sus usos.

Por último, se encontró que, al revisar la literatura existente, hay investigaciones que se centran en los usos de la variable y otras que se enfocan en las medidas de tendencia central. Sin embargo, no se dan en conjunto, por lo que hay escasas investigaciones que aborden específicamente los usos de la variable en tareas de Estadística a nivel medio superior.

1.4 Problemática

La variable es una componente fundamental del currículo de matemáticas, ya que permite la abstracción y generalización de los elementos matemáticos, facilitando la transición hacia niveles más avanzados de pensamiento algebraico (Küchemann, 1980). Sin embargo, se ha documentado que muchos estudiantes tienen dificultades en comprender el concepto de variable y en el manejo de sus usos (Bolaños y Lupiáñez, 2021; Acosta, 2019; Herrera et al., 2016; Lucariello et al., 2014; Booth et al., 2014; Bush y Karp, 2013; Escalante y Cuesta, 2012; Díaz y Morales, 2005; Asquith et al., 2007; Gris et al., 2005; Trigueros et al., 2000).

Estas dificultades pueden afectar significativamente el rendimiento académico de los estudiantes y su actitud hacia las matemáticas al usar incorrectamente la variable. Ursini y Trigueros (2006) han señalado que la confusión en el manejo de los diferentes usos de la variable es un problema común entre los estudiantes. Bolaños y Lupiáñez (2021) observaron que hay más dificultades al usar la variable como incógnita o como un número general. Además, Mariano e Isla (2018) descubrieron que la mayoría de los estudiantes tienden a relacionar la variable solo con su uso como incógnita. Por lo tanto, muchas de estas dificultades están relacionadas con la falta de comprensión de los usos de la variable. Ursini y Trigueros (2006) enfatizan la importancia de comprender y dominar los tres usos de la variable para lograr una comprensión y una construcción adecuada de la misma.

Según Kieran y Yagüe (1989), la comprensión del concepto de variable es un indicador clave del éxito en matemáticas. Además, el estudio de Escalante y Cuesta (2012) sugiere que las dificultades con las variables a menudo se deben a una falta de comprensión conceptual más que a una falta de habilidad para realizar cálculos.

Por otro lado, existen investigaciones que informan sobre dificultades propiamente algebraicas en diferentes asignaturas de la Matemática. Por ejemplo, Ascencio *et al.* (2017) destacan cómo los errores relacionados con las leyes de exponentes y los productos notables, así como la factorización, están presentes tanto en Cálculo como en Álgebra. Según ellos, “es necesario usar productos notables para derivar por medio de límites o realizar transformaciones algebraicas mediante leyes de exponentes para derivar potencias de x ” (p. 54). De manera

similar, Díaz (2009), al administrar un examen a estudiantes de Cálculo Diferencial, identificó errores en el despeje de variables. En otras palabras, elementos del Álgebra se presentan en otras áreas de la Matemática. En esta investigación nos limitamos a la presencia de los usos de la variable en Estadística, específicamente en las MTC.

Las MTC, como la media, la mediana y la moda, son conceptos esenciales que los estudiantes deben dominar para interpretar y analizar datos adecuadamente. Estas medidas no solo son fundamentales en el currículo de matemáticas, sino también en otras disciplinas y en la vida cotidiana, donde la interpretación de datos estadísticos es cada vez más relevante (del Pino y Estrella, 2012).

La combinación de estos dos elementos; los usos de la variable y las medidas de tendencia central, es particularmente relevante para los estudiantes de nivel medio superior. Donde el comprender la conexión de estos conceptos puede mejorar significativamente la comprensión de los estudiantes y su capacidad para aplicar las matemáticas en contextos reales. Es por eso, que es necesario primero entender cómo los estudiantes actualmente utilizan y comprenden estos conceptos simultáneamente.

Aunque existen estudios sobre el aprendizaje de la variable y sus usos, y las medidas de tendencia central por separado, hay una notable escasez de investigaciones que aborden la intersección de estos temas. Con base en ellos se plantea el siguiente problema, que se presenta a continuación.

1.5 Problema

A partir de la revisión bibliográfica, se identifica que la mayoría de las investigaciones se enfocan en analizar dificultades o propuestas de enseñanza en relación con los usos de la variable en contextos algebraicos. Sin embargo, surge una pregunta importante: ¿qué sucede en otras áreas?, aquí es donde se observa una falta de trabajos que se enfoquen en la investigación de la presencia de los usos de la variable en el área de la Estadística y en específico en tareas de medidas de tendencia central.

Investigaciones previas, como las de Díaz y Morales (2005), Escalante y Cuesta (2012), Mariano e Isla (2018), y Bolaños y Lupiáñez (2021), han señalado que es frecuente que los estudiantes enfrenten dificultades al trabajar con el concepto de variable y sus usos en el contexto algebraico. Sin embargo, Trigueros *et al.* (2000) han indicado que, el álgebra trasciende a otras áreas de las matemáticas. Es importante destacar que la noción de variable y sus usos no se limita únicamente al ámbito del Álgebra; se extiende a otras ramas de las matemáticas, como la Estadística (Oliva, 2023). Por lo tanto, surge el interés de explorar la forma en la que la variable aparece en el campo de la Estadística y si las mismas dificultades que se enfrentan en un contexto algebraico ocurren en otros contextos.

El estudio de las variables y sus usos en el contexto de las medidas de tendencia central en estudiantes de nivel medio superior es un área que ha recibido poca atención en la investigación educativa (Castro *et al.*, 2024). La escasez de estudios previos sobre este tema

específico significa que hay un conocimiento limitado sobre cómo los estudiantes comprenden y utilizan la variable y sus usos en contextos estadísticos. Esta falta de información dificulta el desarrollo de estrategias didácticas adecuadas y deja a los profesores sin las herramientas necesarias para abordar efectivamente las dificultades que los estudiantes encuentran. Sin investigaciones que aborden estos problemas, es difícil implementar mejoras significativas en la enseñanza de las matemáticas.

Además, la escasa investigación específica sobre cómo los estudiantes utilizan los usos de la variable y sus aspectos en el contexto de las medidas de tendencia central indica una brecha en la literatura educativa. Es por eso, que nos planteamos la siguiente pregunta de investigación.

1.6 Pregunta de investigación

¿Cuáles son los aspectos y usos de la variable que se manifiestan en las tareas de MTC realizadas y reconocidas por dos grupos de estudiantes de diferentes grupos del nivel medio superior?

Esta pregunta de investigación surge de la necesidad de entender cómo los estudiantes manejan el concepto y los usos de la variable en el contexto específico de las MTC. La respuesta a esta pregunta se dará a partir de los siguientes objetivos.

1.7 Objetivo General

Describir los aspectos y usos de la variable que se manifiestan en las tareas de MTC realizadas y reconocidas por dos grupos de estudiantes de diferente grado del nivel medio superior.

1.8 Objetivos Particulares

1. Identificar los aspectos y uso de la variable en tareas de medidas de tendencia central para el nivel medio superior.
2. Diseñar y validar dos instrumentos para identificar los aspectos de los usos de la variable que reconocen los estudiantes en el contexto de las medidas de tendencia central.
3. Interpretar las respuestas de los estudiantes de nivel medio superior para entender cómo se presentan y si son reconocidos los aspectos de los usos de la variable en tareas de medidas de tendencia central.

1.9 Justificación

La justificación de esta investigación radica en la importancia de comprender cómo los estudiantes de nivel medio superior situados en dos modelos curriculares diferentes manejan los usos de la variable en el contexto de las medidas de tendencia central.

Comprender estos usos y las dificultades asociadas es crucial para mejorar la enseñanza de las matemáticas en este nivel educativo. Esta investigación no solo proporcionará una visión detallada de los aspectos y usos de las variables en este contexto, sino que también los hallazgos podrán dar elementos para el desarrollo de estrategias didácticas más efectivas que puedan facilitar una mejor comprensión y aplicación de estos conceptos por parte de los estudiantes. Al proporcionar bases para el diseño de intervenciones educativas, esta investigación tiene el potencial de mejorar el rendimiento académico y la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.

Además, la pertinencia de la investigación está ligada a que hay investigaciones que muestran cómo es que se presentan los usos de la variable y cada uno de sus aspectos en los planes curriculares. Por ejemplo, Oliva (2023) realiza un análisis de la forma en que están representados los tres usos de la variable en el Plan de Estudios de (NMS) donde reporta especialmente en el área de Probabilidad y Estadística que se promueven los tres usos de la variable, es decir, la variable como número general, como relación funcional y como incógnita.

Según Oliva (2023), los aspectos que se identifican para el caso del número general son: “G2 (G2: Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor), G3 (G3: Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas) y G4 (G4: Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica)” (p.60). Para la variable como incógnita:

I3 (I3: Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero), I4 (I4: Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas) e I5 (I5: Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones) (p.61).

Y para la variable como relación funcional “se ven los aspectos (F1, F2, F3 y F6)” (p.62). Donde F1: Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F2: Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. F3: Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente. F6: Simbolizar una relación funcional, basada en el análisis de los datos de un problema.

Como podemos apreciar según Oliva (2023), efectivamente los usos de la variable se promueven en el Plan de Estudios de NMS (2017) dentro de la Probabilidad y Estadística, por lo que no es una idea errada el poner el lente sobre los usos de la variable en tareas dentro de un contexto estadístico. Lo que realmente queda es aterrizar ahora específicamente en las tareas los aspectos y usos de la variable que ya han sido observados en el plan de estudios.

Capítulo 2. Sustento Teórico

A continuación, se presenta el Modelo 3UV base para esta investigación. El modelo 3UV surge a partir de un profundo análisis sobre los requisitos para resolver ejercicios y problemas típicos presentes en los textos escolares de álgebra. Asimismo, se aborda la definición de tarea matemática y por último el marco matemático enfocado a las MTC específicamente a la media aritmética, a la moda y media.

2.1 Modelo 3UV

Para el desarrollo del estudio se tomará como referencia el Modelo 3UV. Éste “surge al analizar qué se requiere para resolver ejercicios y problemas típicos que aparecen en los textos escolares de álgebra” (Ursini y Trigueros, 2006, p.4).

El Modelo 3UV identifica tres usos fundamentales de la variable: la variable como incógnita, la variable como número general y la variable como relación funcional. Cada uno de estos usos implica una comprensión diferente de lo que representa una variable, lo que puede influir en la forma en que los estudiantes abordan y resuelven problemas. En el caso del uso de la variable como incógnita la variable representa un valor desconocido en una ecuación o problema que se quiere resolver. Por ejemplo, en una ecuación como $x + 2 = 10$, x representa la incógnita cuyo valor se desea encontrar. En el uso como número general la variable representa cualquier valor en un conjunto de números. No se busca en específico un valor, sino que la variable permite generalizar una relación matemática. Por ejemplo, en la expresión $a + b = b + a$, a y b representan números cualesquiera en el conjunto de los números reales. Por último, el uso de la variable como relación funcional, la variable representa una cantidad que cambia en función de otra, por ejemplo, en la función $y = x + 2$, la variable y depende del valor de x . La variable aquí facilita la comprensión de cómo se relacionan dos cantidades. (Ursini *et al.*, 2005)

En esta investigación nos centramos en las producciones de estudiantes cuando trabajan el tema de MTC en tareas del área estadística. Por lo tanto, se partirá de los aspectos involucrados en los distintos usos de la variable; como incógnita, como número general y como relación funcional, tratando de identificar cuáles de esos aspectos aparecen al trabajar en contenidos relacionados con la estadística. Enseguida se mencionan los aspectos declarados en Ursini y Trigueros (2006) del Modelo 3UV que serán tomados como un referente inicial.

La incógnita. Para el trabajo exitoso del alumno es necesario:

- I1 Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido, que debe ser determinado considerando las restricciones del problema.
- I2 Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
- I3 Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas o aritméticas.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Número general. Para el trabajo exitoso del alumno es necesario:

G1 Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.

G2 Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.

G3 Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.

G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Relación funcional. Para el trabajo exitoso del alumno es necesario:

F1 Reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada.

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la variable independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional.

F5 Determinar el intervalo de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar la relación funcional, basado en el análisis de los datos de un problema. (pp. 7-8)

Este enfoque pone de manifiesto que la construcción de la variable se lleva a cabo considerando sus tres usos: incógnita, número general y relación funcional. Estos tres roles representan un marco esencial en el contexto del Álgebra y proporcionan una sólida base para abordar una amplia variedad de problemas matemáticos.

Si bien el Modelo 3UV tiene su origen en el ámbito algebraico, plantea una interesante pregunta sobre la posibilidad de que esta estructura también sea aplicable en otras áreas de las matemáticas, incluida la Estadística. A través de la exploración de la transversalidad del Modelo 3UV hacia distintas ramas de las matemáticas, como la estadística, se busca determinar si este enfoque puede estar presente en la resolución de problemas en diversos contextos matemáticos.

En este sentido, se investiga si los principios fundamentales subyacentes al Modelo 3UV, que se han demostrado efectivos en Álgebra, también pueden ser de utilidad para analizar y resolver problemas en otras áreas de la Matemática, como la Estadística. Esto resalta la versatilidad y el potencial de aplicabilidad de este modelo y plantea la posibilidad de una

comprensión más amplia y unificada de la construcción y el uso de variables en distintos campos de estudio matemático.

2.2 La tarea matemática

Una tarea matemática no solo implica la resolución de un problema matemático, sino que también representa una manifestación de la actividad matemática en sí. Además, esta tarea involucra el uso de herramientas y procesos matemáticos. En otras palabras, una tarea matemática se convierte en una representación tangible de la actividad matemática en acción, donde las personas interactúan con herramientas y conceptos matemáticos en el proceso de resolverla (Herbst, 2012). Y estas representaciones tangibles se vuelven objeto de estudio de la investigación, de modo que, den luz de la presencia de los aspectos de cada uno de los tres usos de la variable.

2.3 Marco Matemático

En este apartado se presentan las medidas de tendencia central donde Ortiz *et al.* (2019) las describen de la siguiente forma.

Conocidas también como medidas de tendencia central, nos indican donde se concentran la mayoría de los datos de una muestra y nos sirven como puntos de referencia para poder ubicar o comparar cualquier dato de la muestra analizada, entre las más comunes están la media aritmética, moda y mediana (Ortiz *et al.*, 2019, p.60).

Para definir el contenido matemático que se aborda en el cuestionario a aplicar se utilizan los documentos que toma como referencia el profesor de nuestra población de estudio, siendo La guía de actividades del alumno para el desarrollo de competencias en Probabilidad y Estadística I, quinto semestre, del Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California (2019).

El documento especifica los símbolos para expresar la media aritmética de una muestra y de una población, la define y da la fórmula para obtenerla, tanto para datos no agrupados (Figura 1) como agrupados (Figura 2). Se continúa con la definición de moda y finalmente con la definición de mediana, así como la fórmula para calcular la ubicación de la mediana de datos no agrupados (Figura 3) y agrupados (Figura 4). A continuación, se muestra lo descrito anteriormente.

Media aritmética. Conocida también como promedio o media, es la medida de centralización más utilizada; se usa el símbolo \bar{X} para referirse a la media aritmética de una muestra y μ para la media de una población. El valor de la media aritmética se obtiene al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos (Ortiz *et al.*, 2019, p.60).

Figura 1. Fórmula para calcular la media aritmética de datos no agrupados

$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{N}$	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{N}$	$\bar{X} = \frac{\text{suma todo los datos}}{\text{total de datos}}$
Donde X_1, X_2, X_3 son los datos de la muestra y N es el total de datos.		

Nota: Tomada de Ortiz *et al.* (2019, p. 60)

Figura 2. Fórmula para calcular la media aritmética de datos agrupados

$\bar{X} = \frac{(X1 * F1) + (X2 * F2) + (X3 * F3) + (X4 * F4) \dots}{N}$	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n Xi * Fi}{N}$
Donde: <ul style="list-style-type: none"> X_i = Marca de clase F_i = Frecuencia N = Total de datos de la muestra 	

Nota: Tomada de Ortiz *et al.* (2019, p. 61)

Moda. La moda es una medida de tendencia central que describe “lo más común” o “lo que más se repite” (lo más frecuente) en un conjunto de datos que pueden ser numéricos o cualitativos. La moda puede no existir (si ningún dato se repite) y si existe, entonces puede ser unimodal, bimodal o multimodal (Ortiz *et al.*, 2019, p.62).

Mediana. “Es otra medida de tendencia central que muestra el valor que se encuentra justo en el centro de un conjunto de datos numéricos ordenados de menor a mayor. La mediana divide al conjunto de datos en dos partes iguales” (Ortiz *et al.*, 2019, p.63).

Figura 3. Fórmula para obtener la ubicación de la mediana

<p>Para Datos No agrupados.</p> <p>La ubicación de la mediana de n datos ordenados se determina por: $\frac{(n + 1)}{2}$</p>

Nota: Tomada de Ortiz *et al.* (2019, p. 63)

Figura 4. Cálculo de la mediana para datos agrupados

Para Datos Agrupados.

$$Me = L_i + \frac{c \left(\frac{n}{2} - F_{i-1} \right)}{f_i} = L_i + \frac{c(0.50 - H_{i-1})}{h_i}$$

Donde:
L_i = Límite Inferior del intervalo que contiene a la Mediana
F_{i-1} = Frecuencia Acumulada en la clase anterior i-ésima
f_i = Frecuencia en la clase que contiene a la mediana
H_{i-1} = Frecuencia Relativa Acumulada en la clase anterior i-ésima
h_i = Frecuencia Relativa en la clase que contiene a la mediana
c = Tamaño del intervalo de clase.

Nota: Tomada de Ortiz *et al.* (2019, p. 64)

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se expone el diseño metodológico, abordando aspectos como el tipo de investigación, la descripción de la muestra, las fases que componen el proceso investigativo, así como los métodos e instrumentos considerados para llevar a cabo el estudio.

3.1 Tipo de investigación

En la presente investigación se adopta un enfoque cualitativo, ya que se busca reconocer los usos de la variable al resolver tareas de medida de tendencia central. Lo anterior se realizará mediante la interpretación de las respuestas proporcionadas por los estudiantes en dichas tareas; esto corresponde a la perspectiva interpretativa como lo declaran en Hernández *et al.* (2014) sobre que “el enfoque cualitativo puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas” (p.7). Además, el estudio parte de lo particular, específicamente del análisis detallado de cada una de las respuestas de los estudiantes y la identificación de los aspectos del uso de la variable que puedan presentarse. Para posteriormente abordar aspectos más generales, permitiendo así la construcción de una perspectiva más amplia (Hernández *et al.*, 2014).

Asimismo, la investigación se define como exploratoria. Esta clasificación se fundamenta en la revisión bibliográfica, la cual revela que la presencia de los aspectos y usos de la variable en tareas de estadística constituye un tema escasamente explorado. Lo cual coincide con lo que Sabino (1992), define como una investigación exploratoria como aquella que se “realiza especialmente cuando el tema elegido ha sido poco explorado, cuando no hay suficientes estudios previos y cuando aún, sobre él, es difícil formular hipótesis precisas o de cierta generalidad” (p.43).

La investigación, además de identificar esta brecha tiene un alcance descriptivo, ya que Sabino (1992) nos dice que, en la investigación descriptiva “su preocupación primordial radica en describir algunas características fundamentales de conjuntos homogéneos de fenómenos” (p.43). Y la presente se enfoca en la descripción detallada de las respuestas de los estudiantes para identificar los aspectos del uso de la variable presente.

3.2 Descripción de la población

El estudio se lleva a cabo con dos grupos de estudiante que cursan Estadística pero que difieren en que, el primero de ellos lleva el plan de estudios de la nueva escuela mexicana, mientras que el segundo el plan de estudios 2017, como se describe a continuación: el Grupo 1 con 25 alumnos de primer semestre de la escuela preparatoria estatal Valentín Gómez Farías de Monte Escobedo, Zacatecas, México. El cual está conformado por 10 mujeres y 15 hombres de edades entre 14 y 16 años. La aplicación se realiza a finales del semestre agosto-diciembre 2023, con la finalidad de tener la certeza de que los alumnos abordaron recientemente el contenido de medidas de tendencia central. Ya que según el Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I (2023) en la progresión número 13 se abordan las medidas de tendencia central, tal como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Progresión 13, programa de estudios de Pensamiento Matemático I. Relaciones con las metas, categorías y subcategorías.

13

Describe un fenómeno, problemática o situación de interés para el estudiantado utilizando las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y de dispersión (desviación estándar, varianza, rango intercuartil, etc.) adecuadas al contexto y valora que tipo de conclusiones puede extraer a partir de dicha información.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
<p>M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.</p>	<p>C2 Procesos de intuición y razonamiento.</p>	<p>S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo. S3 Pensamiento formal.</p>
<p>M3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.</p>	<p>C3 Solución de problemas y modelación.</p>	<p>S1 Uso de modelos. S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.</p>

Nota: Tomada de Plan de Estudios de la SEP (2023, p.11)

El Grupo 2, de sexto semestre, perteneciente a la misma institución, está conformado por 27 alumnos, 16 hombres y 11 mujeres de entre 17 y 18 años. Esta aplicación se realiza a mediados del semestre enero-julio 2024. Donde según el Plan de Estudios, Probabilidad y Estadística I de la Subsecretaría de Educación Media Superior (2017) en el eje del manejo de la información al pensamiento estocástico, con componente, riesgo, inferencia y aleatoriedad: elementos de la Estadística y la Probabilidad, se encuentra en el bloque III como contenido central el tratamiento y significado de las medidas de tendencia central, tal como se muestra en la figura 6.

Figura 6. Aprendizajes clave de la asignatura: Probabilidad y estadística

Eje disciplinar	Componentes	Contenidos centrales
Del manejo de la información al pensamiento estocástico.	Riesgo, inferencia y aleatoriedad: Elementos de la Estadística y la Probabilidad.	Conceptos básicos de Estadística y Probabilidad.
		Concepto de Riesgo en situaciones contextuales.
		Recolección de datos y su clasificación en clases.
		Manejo de la información en situaciones de la vida cotidiana.
		Tratamiento y significado de las medidas de Tendencia Central
		Tratamiento y significado de medidas de Dispersión.
		Uso del conteo y la probabilidad para eventos.
		Contextualización de los elementos de probabilidad condicional e interpretación del teorema de Bayes.

Nota: Tomada de Plan de Estudios de la SEP (2017, p.149)

Una diferencia significativa entre estos dos grupos es que con el grupo de primer semestre se está trabajando con el plan de estudios 2023 de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), mientras que con el grupo de sexto se continúa trabajando con el anterior plan de estudios 2017.

Ambas aplicaciones se llevaron a cabo en condiciones idénticas. En la aplicación 1, destinada a los alumnos de segundo semestre, y en la aplicación 2, destinada a los alumnos de sexto semestre, se les entregó a los estudiantes un cuestionario compuesto por 6 tareas (ver Anexo 2). Cada estudiante tuvo a su disposición dos módulos de 50 minutos cada uno para completarlo. Días después de realizar estas aplicaciones se realiza una encuesta (ver Anexo 3) relacionada con el cuestionario donde se les proporcionó a cada estudiante su cuestionario para recordar sus respuestas y procedimientos, y así contestar la encuesta, en el tiempo correspondiente a un módulo.

3.3 Método e instrumentos de investigación

Para llevar a cabo este trabajo de tesis, se han establecido tres fases que se rigen por los objetivos particulares y serán explicados al final de este capítulo. En la Tabla 1, se evidencia la implementación del método de análisis de tareas, junto con sus respectivas etapas según la descripción de Orozco (1991). Además, se detallan los instrumentos utilizados para cada objetivo específico.

Tabla 1. Tabla de metodología

Objetivos particulares	Método	Etapas	Instrumento
------------------------	--------	--------	-------------

1. Identificar los aspectos y uso de la variable en tareas de medidas de tendencia central para el nivel medio superior.	Análisis de tareas y Modelo 3UV	Análisis del ambiente de la tarea	Ficha de registro
2. Diseñar y validar dos instrumentos para identificar los aspectos de los usos de la variable que reconocen los estudiantes en el contexto de las medidas de tendencia central.		Análisis del ambiente de la tarea	Ficha de registro
3. Interpretar las respuestas de los estudiantes de nivel medio superior para entender cómo se presentan y si son reconocidos los aspectos de los usos de la variable en tareas de medidas de tendencia central.		Análisis del espacio de la tarea	Ficha de registro, cuestionario y encuesta

Fuente. Elaboración propia

3.3.1 Análisis de tareas como método de investigación

Para lograr el objetivo se ha optado por utilizar el análisis de tareas como herramienta metodológica, el cual permite detallar minuciosamente y de forma diferenciada pero complementaria la naturaleza de las tareas, asimismo los resultados producidos por la persona que resuelve dichas tareas (Orozco, 1991). Lo cual permite al investigador la elección intencionada de tareas y la predicción de producciones del alumno al resolver. Según Orozco (2000) “el análisis de tareas es un método convencionalmente utilizado en la psicología cognitiva, que adaptó al análisis de problemas y tareas de tipo matemático” (p. 1).

Este método está conformado por dos etapas y a su vez por cuatro niveles de análisis (subjetivo, objetivo, metasubjetivo y fenomenológico) de los cuales dados nuestros objetivos tomaremos solo tres; la primera etapa corresponde al ambiente de la tarea, que se refiere a la manera en que el profesor describe la tarea que propone, aquí se llevan a cabo los primeros dos niveles de análisis (objetivo y subjetivo). La segunda etapa corresponde al espacio de la tarea,

que se refiere a la manera en cómo el investigador interpreta la producción de la persona que resuelve la tarea y ésta comprende al nivel de análisis metasubjetivo y fenomenológico, siendo únicamente este último el que se utilizará para fines del análisis en la presente investigación, dejando de lado el análisis metasubjetivo que corresponde a la demanda mental del estudiante, lo cual no es nuestro foco. A continuación, se realiza una descripción de cada etapa y los respectivos niveles de análisis.

3.3.1.1 Ambiente de la tarea

Dentro del ambiente de la tarea se realiza un *análisis objetivo*, que “consiste en describir la tarea y especificar las características estructurales y sustantivas de la misma, con el propósito de objetivar y entender su complejidad” (Orozco, 2000, p. 140) teniendo en cuenta la perspectiva cualitativa (enunciado de la tarea), matemática (términos y relaciones matemáticas) y estructural de la tarea.

También se realiza un *análisis subjetivo* donde “se pueden distinguir dos momentos: la identificación y descripción del proceso de solución ideal y el análisis de los procesos que efectivamente posibilitan las soluciones variadas y diferenciadas que los alumnos dan a la tarea” (Orozco, 2000, p. 143) es decir, se establecen los algoritmos de la solución. Para fines de la investigación, en el análisis subjetivo solo se tomará en cuenta aquel algoritmo de solución donde se vea reflejado los aspectos del uso de la variable que predomina en la tarea.

3.3.1.2 Espacio de la tarea

Por otro lado, para el espacio de la tarea se toma en cuenta el análisis fenomenológico que hace referencia a “qué es lo que un sujeto cualquiera hace cuando resuelve una tarea” (Orozco, 1991, p.71). De modo que se da en correspondencia con el nivel de análisis subjetivo.

3.3.2 Ficha de registro, cuestionario y encuesta como instrumentos de la investigación

Son tres los principales instrumentos en la investigación, el primero corresponde a la ficha de registro de la que se hace uso como instrumento en la metodología para llevar a cabo el análisis de tareas y así de estas seleccionar las adecuadas para el cuestionario, el cual es el segundo instrumento destinado a recolectar información de las respuestas de los grupos de estudio. Dado que al realizar su aplicación se notó que en las respuestas de los estudiantes se presentaban de forma implícita los aspectos de los usos de la variable, se optó por realizar y aplicar una encuesta actuando como tercer instrumento. Ésta nos permitió observar que los estudiantes reconocían los aspectos de los usos de la variable en sus respuestas al cuestionario. A continuación, se describen a detalle los instrumentos mencionados.

3.3.2.1 Ficha de registro

Como instrumento para facilitar el análisis y la interpretación de los datos se tiene la ficha de registro que según Arias (2020) “permite recolectar datos e información de las fuentes que se están consultando, las fichas se elaboran y diseñan teniendo en cuenta la información que se desea obtener para el estudio; es decir, no existe un modelo estable” (p.57). Con fines de nuestra investigación, la ficha de registro a utilizar (Tabla 2) consta de varias secciones. En la primera columna, se enlistan las n tareas que serán sometidas al análisis. La segunda columna especifica el uso de la variable que predomina en cada tarea y los aspectos que se identifican. Las dos columnas siguientes se destinan al análisis de tareas, dividiendo los dos primeros niveles (objetivo y subjetivo). Para el análisis objetivo se toma en cuenta la estructura del enunciado de la tarea, qué pide la tarea, los términos y relaciones matemáticas que se identifican. Respecto al análisis subjetivo, como se dijo anteriormente es el algoritmo de solución que el profesor o investigador propone para la tarea, en nuestro caso este algoritmo de solución está guiado por los aspectos del uso de la variable que se identifica en la tarea.

Tabla 2. Ficha de registro

Tarea	Modelo 3uv. (uso y aspectos que predominan)	Análisis de la tarea Análisis del Ambiente de la Tarea	
		Análisis Objetivo	Análisis Subjetivo (Desde los aspectos del modelo 3UV)
1			
2			
.			
.			
.			
n			

Fuente: *Elaboración propia*

El análisis completo que se realizó del total de tareas recopiladas puede ser consultado en el Anexo 1.

3.3.2.1 Cuestionario

Otro de los instrumentos a utilizar en congruencia con el objetivo específico 3 de la investigación, es el cuestionario (Anexo 2) estructurado como instrumento dirigido a los participantes. La conformación de este cuestionario se llevó a cabo mediante un minucioso análisis de tareas, seleccionando un total de seis tareas específicas.

Muñoz (2003) nos dice que un cuestionario es “preparado sistemática y cuidadosamente, sobre los hechos y aspectos que interesan en una investigación” (p. 02). Este instrumento de recolección de datos se revela como una herramienta valiosa, ya que permitirá indagar en aspectos subyacentes a las respuestas de los estudiantes.

El cuestionario fue diseñado con el objetivo de obtener información detallada sobre los diferentes usos de la variable y sus aspectos cuando los estudiantes responden a tareas relacionadas con medidas de tendencia central.

Las primeras tres tareas se centraron en el uso de la variable como incógnita. En las tareas 1 y 2, se identificaron los cinco aspectos del uso de la variable como incógnita, denominados I1 a I5. En la tarea 3, se identificaron específicamente los aspectos I1, I4 e I5.

Las tres tareas restantes se enfocan en el uso de la variable como número general. En estas, se identificaron los aspectos G2 y G4, de modo que en estos casos se utilizaba a la variable en fórmulas con relación en la obtención de la media, la moda y la mediana.

A continuación, en la Tabla 3, se presenta el análisis detallado de estas tareas que conforman el cuestionario. Esta tabla proporciona una visión clara de cómo se distribuyen los aspectos del uso de la variable en cada una de las tareas seleccionadas, ofreciendo un panorama integral de la manera en que los estudiantes abordan el concepto de variable en diferentes contextos sobre tareas de medida de tendencia central. En la primera columna de la tabla se ubican las 6 tareas del cuestionario, en la segunda columna se presentan el uso de la variable que predomina y los aspectos ordenados según su aparición en el algoritmo de solución que se encuentra en la cuarta columna. Por último, en la tercera columna se observa el análisis al enunciado de la tarea, es decir el análisis objetivo.

Tabla 3. Análisis del ambiente de la tarea

Tarea	Modelo 3UV (uso y aspectos que predomina)	Análisis de la tarea	
		Análisis del Ambiente de la Tarea	
		Análisis Objetivo	Análisis Subjetivo (Desde los aspectos del modelo 3UV)

<p>1. Un alumno tiene dos notas (a y b) en matemáticas con escala de 1 a 7. Si el promedio es 5.5 y la suma de las notas es 11, ¿Cuáles son sus posibles notas, sabiendo que son números enteros? Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.</p>	<p>Incógnita I1 I5 I2/I3 I4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) ¿Cuáles son sus notas? Con la utilización del pronombre interrogativo “cuáles” se espera que se indiquen las notas. Dos notas de alumnos tal que su promedio es 5.5, su suma 11 y se encuentran entre 1 y 7.</p> <p>Matemática (términos y relaciones) Dos notas desconocidas a y b; Escala; Promedio; Suma; $(a + b)/2=5.5$; $a + b=11$; $1 < a, b < 7$</p> <p>Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media $(a + b)/2=5.5$.</p>	<p>Algoritmo de solución -Reconoce e identifica la presencia de datos desconocidos (a y b). -Simbolizar cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones. $(a + b)/2=5.5$; $a + b=11$; $1 < a, b < 7$ -Interpretar los símbolos como valores específicos para sustituir los posibles valores que hacen verdadero el enunciado. $(6+5) /2=5.5$ y $(7+ 4) /2=5.5$ o bien $(5+6) /2=5.5$ y $(4+7) /2=5.5$ $6+5=11$ y $7+4=11$ o bien $5+6=11$ y $4+7=11$ $1 \leq 6 \leq 7, 1 \leq 5 \leq 7$ y $1 \leq 7 \leq 7, 1 \leq 4 \leq 7$ -Determinar que las posibles notas serán</p>
---	---	---	--

			las parejas (6 y 5), (7 y 4), (5 y 6) y (4 y 7).
<p>2. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa? Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.</p>	<p>Incógnita</p> <p>I1</p> <p>I5</p> <p>I4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos)</p> <p>Con el adverbio interrogativo “cómo” se espera que se indique la repartición a realizar.</p> <p>Matemática (términos y relaciones)</p> <p>Repartición de forma equitativa.</p> $X=(5+8+6+1+0)/5=4$ <p>Estructural</p> <p>Problema que requiere utilizar el concepto de media.</p>	<p>Algoritmo de solución</p> <p>-Identificar la presencia de un dato desconocido, que es el número equitativo de caramelos para cada persona.</p> <p>-Simbolizar la cantidad desconocida X y utilizarla para plantear la ecuación $X=(5+8+6+1+0)/5=4$</p> <p>-Realiza operaciones para encontrar la cantidad desconocida X=4.</p>
<p>3. Se sabe que un cazador sale cada día al campo y a su regreso trae la siguiente cantidad de conejos 2, 4, 6, 8, la cantidad del último día está dada por x, se sabe que en promedio el cazador atrapó 10 conejos en los 5 días ¿Cuál de los siguientes valores representa la cantidad de</p>	<p>Incógnita</p> <p>I1</p> <p>I5</p> <p>I4/I2</p> <p>I3</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos)</p> <p>Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indique la cantidad de conejos cazados el quinto día.</p>	<p>Algoritmo de solución</p> <p>-Identificar la presencia de un dato desconocido x, que es la cantidad de conejos cazados el último día.</p> <p>-Simbolizar la cantidad</p>

<p>conejos que atrapó el cazador el último día? Comprueba tu respuesta y justifica tu respuesta.</p>		<p>Matemática (términos y relaciones) Cantidad, promedio. $(2+4+6+8+x)/5=10$ Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media</p>	<p>desconocida x y utilizarla para plantear la ecuación. $(2+4+6+8+x)/5=10$ -Realizar operaciones para encontrar la cantidad desconocida $x=30/$ Interpreta los símbolos como valores específicos. $(x=10, x=20...)$ -Sustituir el valor encontrado $x=30$ en la ecuación inicial, haciendo a ésta una ecuación verdadera.</p>
--	--	---	---

<p>4. Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6.2, 6.0, 6.0, 6.3, 6.1, 6.23, 6.15, 6.2 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto? (calcular media, mediana y moda) Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.</p>	<p>Número General G2 G4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indique la mejor estimación del peso del objeto.</p> <p>Matemática (términos y relaciones) Estimación, 6.2+6.0+6.0+6.3+6.1 + 6.23+6.15+6.2/8</p> <p>Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media, mediana y moda.</p>	<p>Algoritmo de solución (1) Cálculo de media - Interpretar la fórmula de media $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_i}{N}$ -Identificar el valor de las x_i y de N (total de los pesos). -Sustituir los términos conocidos (N) en la fórmula. 6.2+6.0+6.0+6.3+6.1 + 6.23+6.15+6.2/8 -Operar para obtener el valor de la media 6.14</p> <p>(2) Cálculo de moda -Identificar qué 6.2 se repite 2 veces al igual que 6. -Concluir en que es bimodal por lo que las modas son 6.2 y 6.</p> <p>(3) Cálculo de mediana</p>
--	---	--	---

		<p>-Ordenar los datos de menor a mayor: 6, 6, 6.1, 6.15, 6.2, 6.2, 6.23, 6.8</p> <p>-Utilizar las expresiones generales para encontrar las posiciones de los datos con los que se calculará su promedio.</p> <p>-Sustituir en las expresiones y calcular las posiciones $8/2+1=5$ y $8/2=4$</p> <p>-Identificar que en la posición 4 se encuentra el dato 6.15 y en la 5 6.2.</p> <p>-Calcular el promedio de los dos datos, siendo este la mediana $(6.15+6.2)/2=6.175$</p>
--	--	---

<p>5. La cantidad de empresas que hay en 7 ciudades están dadas por los siguientes datos: ¿En cuál de los siguientes conjuntos de datos la media, la mediana y la moda coinciden?</p> <p>A. 3,4,5,9,10,11 B. 3,4,5,6,7,8,9 C.6,3,4,6,8,9,6 D.1,2,3,4,5,5,5 E.2,4,6,8,10,12</p>	<p>Número General</p> <p>G2</p> <p>G4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos)</p> <p>Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indiquen el par de conjuntos de datos que cumplen en coincidir con su media, moda y mediana.</p> <p>Matemática (términos y relaciones)</p> <p>Conjunto, mediana y moda</p> <p>Estructural</p> <p>Problema que requiere utilizar el concepto de mediana, moda y media.</p>	<p>Algoritmo de solución</p> <p>Cálculo de media:</p> <p>- Interpretar la fórmula de media</p> $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{N}$ <p>- Identificar y sustituir el valor de las x_i y de N.</p> <p>- Manipular/desarrollar para determinar el valor de la media.</p> <p>Cálculo de mediana:</p> <p>- Ordenar los datos de menor a menor, utilizar la expresión $\frac{n+1}{2}$ para encontrar la posición de la mediana e identificar el valor.</p> <p>- Cálculo de moda: Identificar el dato con mayor frecuencia.</p> <p>Todo esto para cada uno de los conjuntos de datos, hasta concluir que para el conjunto de datos de C, la moda mediana</p>
--	---	--	---

			y media son iguales a 6.												
<p>6. Encuentra la mediana para los datos agrupados en la siguiente tabla de frecuencias:</p> <table border="1" data-bbox="240 825 649 997"> <tr> <td>Dato</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Frecuencia</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> </table>	Dato	0	1	2	3	4	Frecuencia	1	1	2	1	8	<p>Número General G2 G4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del verbo “encontrar” se espera que el estudiante determine la media de los datos. Matemática (términos y relaciones) Calcular, datos agrupados, mediana, frecuencias. Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de mediana.</p>	<p>Algoritmo de solución - Calcular las frecuencias acumuladas. (10, 20, 22, 36, 44) - Sustituir n en la expresión y operar, obteniendo 22.5 - Identificar en las frecuencias acumuladas que para el 22.5 se encuentran entre los datos 2 y 3. - Obtener el promedio de los dos valores, siendo éste el valor de la mediana $(2+3)/2=2.5$.</p>
Dato	0	1	2	3	4										
Frecuencia	1	1	2	1	8										

Fuente: *Elaboración propia*

3.3.2.1 Encuesta

Por último, se presenta una encuesta como instrumento de investigación, la cual es considerada como un valioso recurso para la recolección de datos (Falcón et al., 2019). Esta encuesta fue diseñada con un total de seis reactivos, cada uno correspondiente a una tarea específica. A través de esta encuesta, se le pregunta al estudiante qué aspectos considera o reconoce al momento de resolver cada tarea del cuestionario. Las opciones para elegir están basadas en los aspectos identificados previamente en cada tarea, pero resumidos y adaptados al contexto específico de las mismas.

El objetivo de esta encuesta es obtener una comprensión detallada de cómo los estudiantes perciben y utilizan los aspectos de la variable en diferentes escenarios de medidas de tendencia central. A continuación, se presenta la encuesta completa, proporcionando una herramienta estructurada para identificar los aspectos de los usos de la variable que estudiantes implementan en este ámbito específico.

Estimado(a) alumno(a):

La presente encuesta tiene la finalidad de recabar información sobre tus respuestas al cuestionario de Medidas de Tendencia Central respondido anteriormente.

Tus respuestas no serán catalogadas como correctas o incorrectas y tendrán como única finalidad aportar datos para mi trabajo de tesis en la Maestría en Matemática Educativa. De antemano agradezco tu disposición de responder.

Atentamente: Lic. Perla Valenzuela Ulloa

Datos Generales

Nombre: _____ . Edad: _____ .

Grupo: _____ . Fecha: _____ .

Instrucciones: Lee cada reactivo y marca **las opciones** que consideres adecuadas

1. Al resolver la tarea 1 tome en cuenta los siguientes aspectos

Identifiqué la presencia de datos desconocidos.

Simbolice datos desconocidos y los utilicé para plantear ecuaciones.

Sustituí por valores que hacen verdadera la o las ecuaciones planteadas.

Determiné sibles notas realizando operaciones.

Utilicé fórmulas para encontrar los valores desconocidos.

Simbolice s generales.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

2. Al resolver la tarea 2 tome en cuenta los siguientes aspectos

Identifiqué la presencia de un dato desconocido.

Simbolice el dato desconocido y lo utilicé para plantear una ecuación.

Determiné o desconocido realizando operaciones.

Sustituí por valores que hacen verdadera la ecuación planteada.

Utilicé fórmulas para encontrar los valores desconocidos.

Simbolice s generales.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

3. Al resolver la tarea 3 tome en cuenta los siguientes aspectos

Identifiqué la presencia de un dato desconocido.

Simbolice el dato desconocido y lo utilicé para plantear una ecuación.

Sustituí el que hace verdadera la ecuación

Sustituí por valores específicos buscando el indicado para hacer verdadera la ecuación.

Determiné o desconocido realizando operaciones.

Utilicé fórmulas para encontrar los valores desconocidos.

Reconocí es, percibir reglas y métodos en secuencias.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

4. Al resolver la tarea 4 tome en cuenta los siguientes aspectos.

Utilicé e interpreté una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor.

Manipulé fórmula.

Simbolice el dato desconocido y lo utilicé para plantear una ecuación.

Sustituí por valores que hacen verdadera la ecuación planteada.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

5. Al resolver la tarea 5 tome en cuenta los siguientes aspectos.

Utilicé e interpreté una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor.

Manipulé fórmula.

Simbolice el dato desconocido y lo utilicé para plantear una ecuación.

Sustituí por valores que hacen verdadera la ecuación planteada.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

6. Al resolver la tarea 6 tome en cuenta los siguientes aspectos.

Utilicé e interpreté una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor.

Manipulé fórmula.

Simbolice el dato desconocido y lo utilicé para plantear una ecuación.

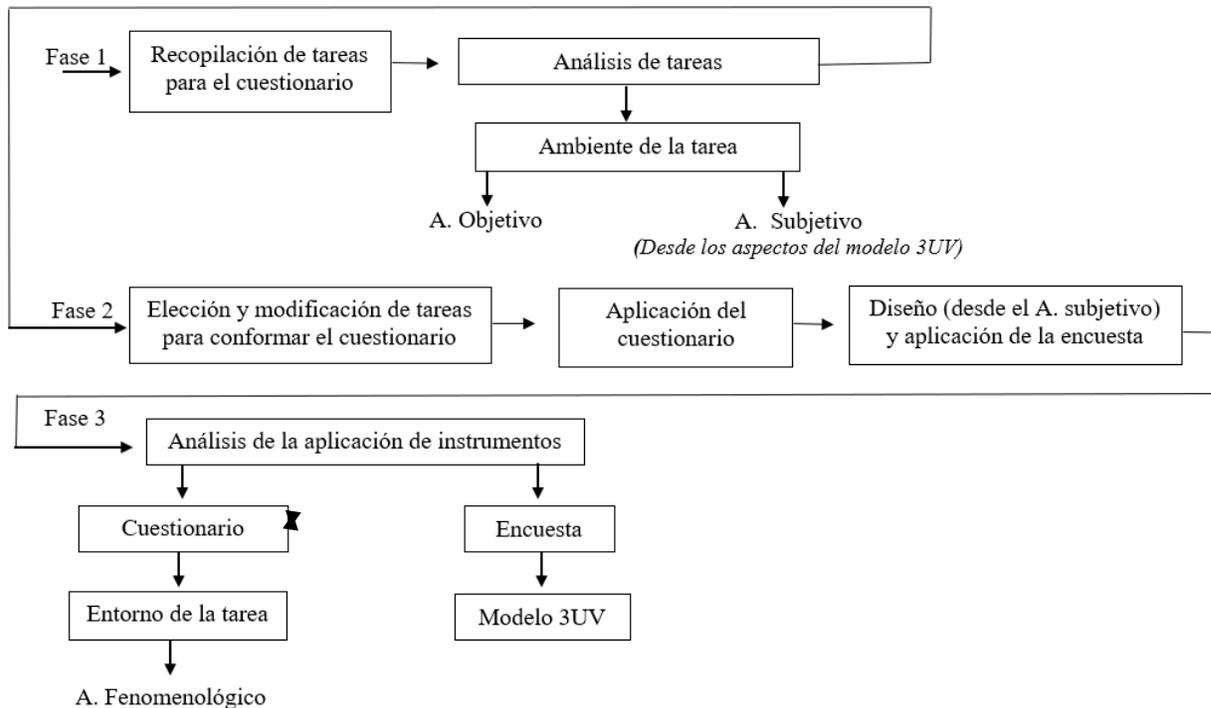
Sustituí por valores que hacen verdadera la ecuación planteada.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

3.4 Fases metodológicas

Cerrando este capítulo se presenta un diagrama de flujo (Figura 7) donde se ilustran las fases metodológicas de la investigación.

Figura 7. Fases metodológicas de la investigación



Fuente: *Elaboración propia*

La primera fase del estudio inicia con la recopilación de tareas provenientes de bibliografía revisada, tales como las propuestas por Batanero (2000); Batanero (2001); Llinás y Rojas (2006) y Betancourt (2012). Posteriormente, se procede al análisis de estas tareas (Anexo 1), enfocándose en dos niveles ubicados dentro del ambiente de la tarea. Por un lado, el análisis objetivo, donde se realiza el análisis del enunciado de la tarea, se identifica cuál es el uso de la variable que predomina, para en base a ello modificar el enunciado de la tarea con el fin de promover los aspectos del uso de la variable identificado. Por otro lado, se realiza el análisis subjetivo, donde se plantea específicamente el algoritmo de solución en el cual aparecen los aspectos del uso de la variable predominante en la tarea.

En la segunda etapa, se diseña y aplica el cuestionario como parte integral del proceso, para el cual se eligieron del análisis de tareas, tres tareas donde predomina el uso de la variable como incógnita y tres tareas donde predomina el uso de la variable como número general. La razón por la que no se incluyen tareas en relación con el uso de la variable como relación funcional, es porque hasta el momento no se encuentran tareas de medidas de tendencia central

donde se pueda identificar este uso. Al final de la etapa se diseña y aplica la encuesta con seis reactivos correspondientes para que el estudiante identifique los aspectos aplicados en la resolución de cada tarea.

Tras completar esta segunda etapa se da paso a la tercera, donde se retoma el análisis de tareas, pero esta vez desde el entorno de la tarea. Es decir, se lleva a cabo el análisis fenomenológico de la tarea (Anexo 4) que es la descripción de las respuestas de los estudiantes a las 6 tareas. A partir de estas tareas se estructura se aplica y se realiza el análisis de la encuesta, realizando un recuento de los aspectos de los usos de la variable del Modelo 3UV que los alumnos reconocieron en sus respuestas al cuestionario.

Este enfoque metodológico secuencial permite obtener una comprensión de los procesos involucrados en la resolución de dichas tareas, facilitando así la identificación de los aspectos de los usos de la variable que se presenten.

Capítulo 4. Análisis y resultados

En este capítulo se presentan evidencias del análisis fenomenológico que se realizó a las respuestas de los estudiantes de primero y sexto semestre (grupo 1 y grupo 2, respectivamente) a cada una de las seis tareas del cuestionario (el análisis completo se encuentra en el Anexo 3). Para seleccionar los ejemplos abordados en el documento, se agruparon a los estudiantes según el tipo de respuesta y se eligió a un estudiante representativo de cada grupo. Posteriormente, se elaboró una tabla que agrupa a los estudiantes según los aspectos identificados en sus respuestas, lo que permite observar la relación entre las respuestas correctas y los aspectos identificados. Enseguida se presentan también de manera general los resultados de la encuesta, identificando los aspectos asociados a los usos de la variable que los estudiantes reconocen en el procedimiento de su respuesta a cada una de las tareas del cuestionario.

4.1 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 1)

El análisis del cuestionario se realiza por tarea. A continuación, se presenta la tarea 1 y la tabla 4 en donde se muestran las respuestas y los porcentajes de estudiantes tanto del grupo 1 como del grupo 2. Este enfoque permite una comparación detallada y estructurada de cómo cada grupo de estudiantes aborda cada tarea específica, facilitando la identificación de diferencias en el uso de la variable y las medidas de tendencia central.

Tarea 1

Un alumno tiene dos notas (a y b) en matemáticas con escala de 1 a 7. Si el promedio es 5.5 y la suma de las notas es 11, ¿Cuáles son sus posibles notas, sabiendo que son números enteros? Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.

Tabla 4. Agrupamiento por respuesta a Tarea 1

Respuesta	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
(5 y 6) y/o (6 y 5)	56%	44.44%
(7 y 4) y/o (4 y 7)	0%	7.40%
(5 y 6) y (4 y 7) o (5 y 6) y (7 y 4)	20%	18.51%
(5 y 6), (4 y 7), (6 y 5), (7 y 4)	0%	14.81%
Sin respuesta	12%	11.11%
Otra	12%	3.70%

Nota. Elaboración propia.

Podemos observar variedad de respuestas para la tarea 1, tanto del grupo 1 como del grupo 2, sin embargo, es más amplia la variedad de respuestas que dieron los estudiantes del grupo 2. Además de que un 3.70% de los estudiantes del grupo 2 da como respuesta todas las

posibles parejas de números que resuelven la tarea, mientras que en el grupo 1 no se presentó esta respuesta.

A continuación, se presenta en la Tabla 5 los porcentajes de estudiantes en los que se identificó por medio del análisis fenomenológico aspectos del uso de la variable como incógnita en la tarea 1, tanto para el grupo 1 como para el grupo 2.

Tabla 5. Agrupamiento por aspectos de Tarea 1

Aspectos en tarea 1	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
I1, I2, I4	20%	0%
I1, I4	48%	70.37%
I1, I2, I3, I4, I5	0%	7.40%
No se identifica a falta de procedimiento	32%	22.22%

Nota. En el análisis del ambiente de la tarea 1 se identificaron los aspectos de I1 a I5.

En cuanto a los aspectos identificados en la tarea 1, en las respuestas de los estudiantes del grupo 1 el mayor número de aspectos identificados fueron 3; I1, I2 e I4, representando apenas el 20%. Es importante destacar que los estudiantes que proporcionaron la respuesta ideal (5 y 6) y/o (6 y 5), según se muestra en la Tabla 4, corresponden a aquellos que identificaron los aspectos I1, I2 e I4.

Respecto a los aspectos identificados en la tarea 1 por el grupo 2 podemos observar en la Tabla 5 como en este caso si hubo estudiantes en los que se identificara la aplicación de los 5 aspectos del uso de la variable como incógnita, posicionándose el 7.40% de los estudiantes, los cuales corresponden a estudiantes que respondieron (5 y 6), (4 y 7), (6 y 5), (7 y 4).

Por último, para la tarea 1, se presentan en la Tabla 6 los datos de la encuesta, respecto a qué aspectos fueron reconocidos por los estudiantes. Cabe mencionar que de los 25 estudiantes del grupo 1 solo 20 respondieron la encuesta y de los 27 estudiantes del grupo 2 solo 23 respondieron la encuesta.

Tabla 6. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 1

Aspectos en tarea 1	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2	Total
Identifique la presencia de datos desconocidos. (I1)	50%	30.43%	39.53%
Simbolice datos desconocidos y los utilice para plantear ecuaciones. (I5)	25%	13.04%	18.60%
Determine las posibles notas realizando operaciones. (I4)	45%	60.86%	53.48%
Sustituí posibles valores que hacen verdadera la o las ecuaciones planteadas. (I3)	40%	4.34%	20.93%
Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos.	35%	26.08%	30.23%
Simbolice reglas generales.	30%	13.01%	20.93

Nota. Los aspectos escritos con negritas corresponden a los identificados en el análisis del ambiente de la tarea, por lo tanto, son las respuestas consideradas como adecuadas.

Al comparar los datos de las tablas 5 y 6, es notorio que en los dos grupos y tanto en lo interpretado por el investigador y lo que reconoce el estudiante, coincide en que los aspectos más comunes son I1 e I4.

También se observa que ya en la encuesta realizada los estudiantes si reconocen los aspectos del uso de la variable como incógnita en sus tareas, ya que en su mayoría son porcentajes altos para la Tabla 6.

A continuación de la Figura 8 a la Figura 10, se presentan las respuestas de los alumnos seleccionados del grupo 1 y su respectivo análisis fenomenológico. Para fines prácticos se designa la siguiente nomenclatura, llamaremos A#Gx donde A hace referencia a alumno (a), el # hace referencia al número de estudiantes y Gx hace referencia al grupo G1 es grupo 1 y G2 es grupo 2.

Figura 8. Respuesta de A14G1

Handwritten mathematical equations: $b = a$ and $5 = B$

$$6+5=11, \quad 11 \div 2 = 5.5 \quad \textcircled{6} \quad \textcircled{5}$$

El estudiante A14G1 responde correctamente que las notas son 6 y 5 expresándose como “a y B”, por lo que podemos decir que está reconociendo e identificando la presencia de datos desconocidos. Además, toma en cuenta las restricciones de la tarea (I1) comprobando por medio de operaciones que la suma de 5 y 6 es igual a 11 y su promedio es igual a 5.5. (I4).

Figura 9. Respuesta de A25G1

R. 5 y 6 o 7 y 4

$$\textcircled{1} a y b \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{N} \quad \begin{array}{l} 6+5=11 \\ 7+4=11 \end{array}$$

Números de 1 a 7
 Promedio 5.5
 La suma de sus notas: 11

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{11} = \frac{28}{11}$$

El alumno A25G1 responde correctamente al identificar dos posibles combinaciones: “5 y 6 o 7 y 4” asignando estos valores a las notas solicitadas en la tarea. En su procedimiento muestra que reconoce e identifica los datos desconocidos, expresándose como “a y b”, así como también expresa las restricciones de la tarea: “números de 1 a 7”, “promedio 5.5”, “la suma de sus notas: 11” (I1). Sin embargo, se observan errores en la interpretación y aplicación de la fórmula de media aritmética. El estudiante considera incorrectamente los valores de los x_i como números del 1 al 7 (I2) en lugar de las dos notas a y b. Luego suma estos valores (obteniendo 28) y los divide entre 11, que es la suma de las dos notas. A pesar de este error en el cálculo, el estudiante verifica que al sumar las dos parejas de números (“5 y 6” o “7 y 4”) se obtiene 11, confirmando así la validez de sus respuestas. (I4)

Figura 10. Respuesta de A10G1

$$5.5 + 5.5 = 11 \quad 6 + 5 = 11 \quad 3 + 8 = 11 \quad 10 + 1 = 11$$

Yo pose esos números porque si tenía que ser 2 números para llegar a 11 busque los números que fueran para 11

El estudiante A10G1 proporciona una respuesta con cuatro parejas de números para las notas (a y b), siendo estas (5.5 y 5.5), (6 y 5), (3 y 8) y (10 y 1). Además, justifica que son números que sumados dan 11, lo que muestra que el estudiante llega a reconocer e identificar la

presencia de los datos desconocidos determinados por una restricción que marca la tarea (I1). Sin embargo, para determinar estos, solo considera una restricción planteada en la tarea, la cual es que la suma es igual a 11 (I4), dejando de lado una condición importante: que las notas son números que van del 1 al 7.

A continuación de la Figura 11 a la Figura 15, se presentan las respuestas de los alumnos seleccionados del grupo 2 y su respectivo análisis fenomenológico.

Figura 11. Respuesta de A23G2

6 + 5 = 11/2 = 5.5 6 y 5 son las posibles notas solo utilice la logica

El estudiante A23G2 responde “6 y 5 son las posibles notas solo utilice la lógica” en este caso nos plantea explícitamente el estudiante que utilizó solo la lógica y nos deja ver en su procedimiento que encontró que $6+5=11/2=5.5$, (I4) reconociendo la presencia de dos datos desconocidos que deben ser determinados considerando las restricciones del problema (I1).

Figura 12. Respuesta de A16G2

Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.
De 4 y 7 que sumados dan 11 y dividido dan 5.5

A	B
1	
2	
3	
4	7 = 11/2 = 5.5
5	
6	
7	4 =

La mai 11/2

Por culpa de Fátima y yo hacedle caso

El estudiante A16G2 responde correctamente con los valores 4 y 7. En su procedimiento se muestra una tabla donde en la primera columna asigna valores a “a” del 1 al 7, mientras que en la segunda columna asigna el valor de 7 y 4 para “b” (I1), emparejándose con 4 y 7 respectivamente. Luego realiza la comprobación de que sumados dan 11 y su promedio es igual a 5.5 (I4).

Figura . Respuesta de A2G2

5 y 6 o 4 y 7

Problema ①

a b

posibilidades

$5 + 6 = 11$

$4 + 7 = 11$

$\bar{x} = \frac{11}{5.5} = 2$

1 a 7 calif.

Promedio 5.5

la suma 11 mediana

2 calificaciones de 5 cada una, que al sumar son 10 y al dividirse da un promedio de 5

X

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

a b

$4 + 7 = 11 \div 2 = 5.5 \rightarrow$ promedio

calificación notas

$5 + 6 = 11 \div 2 = 5.5 =$ correcto

El estudiante A2G2 proporciona inicialmente las respuestas 5 y 6 o 4 y 7, las cuales son correctas, pero no considera las posibilidades de (6 y 5) y (7 y 4), dado que las notas a y b son distintas. A pesar de identificar y reconocer los datos desconocidos (II), donde simboliza las notas con a y b, no las utiliza para plantear ecuaciones. Inicialmente, en su procedimiento, intenta obtener la media planteando incorrectamente $\bar{x} = \frac{11}{5.5} = 2$, pero luego corrige su procedimiento tachándolo como incorrecto. Posteriormente, plantea los números del 1-7, marcando como parejas al (5 y 6) y (4 y 7) comprobando que su suma es igual a 11 y su promedio es igual a 5.5 (I4).

Figura 14. Respuesta de A3G2

① Datos

$a: \{ \in \mathbb{R}, \mathbb{Z} \} \{ 1 < a < 7 \}$

$b: \{ \in \mathbb{R}, \mathbb{Z} \} \{ 1 < a < 7 \}$

$\frac{a+b}{2} = 5.5$

$a+b = 11$

encontrar todos los valores de a y b

Procedimiento

$a+b = 11$

Si "a" vale 4, entonces "b" vale 7

Si "a" vale 5, entonces "b" vale 6

Si "a" vale 6, entonces "b" vale 5

Si "a" vale 7, entonces "b" vale 4

Si "a" vale 3 o menos, no se puede

R=4 formas posibles

El estudiante A3G2 reconoce e identifica los datos desconocidos a y b (I1). Además, define sus conjuntos, de tal forma que los expresa como números que pertenecen al conjunto de los números reales y al conjunto de los números enteros, especificando que deben ser mayores que 1 y menores que 7, donde comete el error de utilizar los símbolos de mayor que y menor que, en lugar de menor o igual que y mayor o igual que. Posteriormente, utiliza estos datos desconocidos para plantear ecuaciones (I5). Elige la ecuación $a + b = 11$ interpretando los símbolos como valores específicos (I2), y asigna valores en la ecuación para hacer una afirmación verdadera (I3). Si bien no se mira explícitamente que el estudiante realice operaciones, sin embargo, lo hace al asignar, por ejemplo, $a=4$ y por consiguiente, $b=7$ porque $4+7=11$ (I4).

Figura 15. Respuesta de A13G2

①

$$\bar{X} = \frac{\sum \frac{1}{7} = 1 \times 11}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N} = \frac{77}{17} = 1,307$$

En este caso el estudiante A13G2 plantea la fórmula para calcular la media aritmética, pero no asigna ni sustituye con los valores correctos, tampoco realiza correctamente las operaciones. Por lo que, para este caso no se identifican en la respuesta aspectos del uso de la variable como incógnita.

Con estos casos de respuestas cerramos lo correspondiente a la tarea 1 y se continúa con la tarea 2.

4.2 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 2)

A continuación, se presenta la tarea 2 y la tabla 7 en donde identificamos los porcentajes de las respuestas que dieron los estudiantes a la tarea 2 tanto del grupo 1 como del grupo 2.

Tarea 2

Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa? Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.

Tabla 7. Agrupamiento por respuesta a Tarea 2

Respuesta	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
4	100%	85.18%
5	0%	3.70%
<i>Sin respuesta</i>	0%	3.70%
<i>Otra</i>	0%	7.40%

Nota. Elaboración propia.

En el grupo 1 todas las respuestas a la tarea 2 fueron correctas, de modo que el 100% de los estudiantes se sitúan en una misma respuesta como se muestra en la Tabla 7. Por otro lado, con los estudiantes del grupo 2 un 85.18% respondió correctamente, en este caso las respuestas de los estudiantes fueron un poco más variadas.

En seguida, se presenta en la Tabla 8 los porcentajes de estudiantes en los que se identificó por medio del análisis fenomenológico aspectos del uso de la variable como incógnita en la tarea 2, tanto para el grupo 1 como para el grupo 2.

Cabe mencionar que en el análisis fenomenológico, como se menciona en el capítulo 3, se realiza la descripción de las respuestas de los estudiantes, “lo que un sujeto cualquiera hace cuando resuelve una tarea” (Orozco, 1991, p.71).

Tabla 8. Agrupamiento por aspectos de Tarea 2

Aspectos en tarea 2	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
<i>I1, I4, I5</i>	0%	3.70%
<i>I1, I5</i>	0%	3.70%
<i>I1, I4</i>	88%	81.48%
<i>I1</i>	12%	3.70%
<i>No se identifica a falta de procedimiento</i>	0%	7.40

Nota. En el análisis del ambiente de la tarea 2 se identificaron los aspectos de I1, I5, I4.

Respecto a los aspectos que se identifican en las respuestas, en el grupo 2 el 88% de los estudiantes aplican los aspectos I1 e I4, mientras que el 12% restante solo el aspecto I1.

De igual forma en los aspectos identificados, se tiene más variedad para el grupo 2 en comparación al grupo 1. Además, en este grupo hubo un estudiante en el que sí se logró identificar la aplicación de los tres aspectos de la tarea (I1, I4 e I5).

Por último, para la tarea 2, se presentan en la Tabla 9 los datos de la encuesta, respecto a qué aspectos fueron reconocidos por los estudiantes.

Tabla 9. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 2

Aspectos en tarea 2	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2	Total
Identifique la presencia de datos desconocidos. (I1)	30%	17.39%	23.25%
Simbolice datos desconocidos y los utilice para plantear ecuaciones. (I5)	40%	17.39%	27.90%
Determine las posibles notas realizando operaciones. (I4)	60%	56.52%	58.13%
Sustituí posibles valores que hacen verdadera la o las ecuaciones planteadas. (I3)	20%	13.04%	16.27%
Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos.	55%	39.10%	46.51%
Simbolice reglas generales.	20%	13.04	16.27%

Nota. Los aspectos escritos con negritas corresponden a los identificados en el análisis del ambiente de la tarea, por lo tanto, son las respuestas consideradas como adecuadas.

Si bien el 100% de los estudiantes del grupo 1 respondió correctamente, esto no significó que se identificaran los tres aspectos del uso de la variable como incógnita (I1, I5, I4) si no que los estudiantes respondieron limitándose al uso de operaciones aritméticas sin necesidad de recurrir a ecuaciones algebraicas. Y para el grupo 2 hubo estudiantes que aplican los tres aspectos de la variable como incógnita (I1, I5, I4), de igual forma que el grupo 1, los estudiantes se limitan al uso de operaciones aritméticas en sus procedimientos, tal como se expone en las siguientes respuestas.

Figura 16. Respuesta de A7G1

$$\left. \begin{array}{l} A=5 \\ M=8 \\ J=4 \\ C=1 \\ D=0 \end{array} \right\} = 20 \quad 20 \div 5 = 4$$

Suma todos los dulces que llevo cada quien y despues lo dividi entre 5

El alumno A7G1 responde que, le corresponden 4 dulces a cada niño. En su procedimiento identifica este dato desconocido que es la cantidad de dulces que le tocaría a cada niño (II). Sin embargo, no simboliza esta cantidad desconocida en un inicio, ni la utiliza para plantear ecuaciones. En su lugar, aplica la fórmula de la media aritmética, sumando todos los dulces y dividiendo el total entre el número de niños, pero todo esto desde operar de forma aritmética (I4). Luego el alumno A3G2 responde:

Figura 17. Respuesta de A3G2

⊗ Datos

todos los alumnos llevan cantidades diferentes de caramelos, debemos promediarlos para repartirlos equitativamente

Andrés → 5
 María → 8
 José → 6
 Camer → 1
 Daniel → 0

Procedimiento

$$\frac{5+8+6+1+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

R=4

El estudiante A3G2 indica la cantidad de dulces que lleva cada niño, realiza la suma de todos y la divide entre el total de niños que es 5, de lo que obtiene como resultado 4 representado como R=4, de modo que identifica este dato desconocido (II) y lo determina por medio de las restricciones/operaciones que indica el problema (I4)

Figura 18. Respuesta de A8G2

por así juntan todos los dulces y ya juntados nos da la cantidad de 20 y son 5 niños les tocará de 5 dulces a cada uno

En el caso del estudiante A8G2 no se observan operaciones algebraicas ni aritméticas, pero en su explicación verbal, se identifica como realiza la suma de los dulces que lleva cada niño expresándose como “juntan todos los dulces y ya juntados nos da la cantidad de 20” (I4). Además, de que en su procedimiento está consciente de la presencia de un dato desconocido (II) que al final encuentra su valor igual a 5. Esta respuesta debido a que comete un error al dividir 20/5 y obtener como resultado 5.

4.3 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 3)

A continuación, se presenta una tabla 10 que agrupa a los estudiantes del grupo 1 y 2 según su respuesta a la tarea 3.

Tarea 3

Se sabe que un cazador sale cada día al campo y a su regreso trae la siguiente cantidad de conejos 2, 4, 6, 8, la cantidad del último día está dada por x , se sabe que en promedio el cazador atrapó 10 conejos en los 5 días ¿Qué cantidad de conejos atrapó el cazador el último día? Comprueba y justifica tu respuesta.

Tabla 10. Agrupamiento por respuesta a Tarea 3

Respuesta	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
<i>30 conejos (simboliza)</i>	20%	29.62%
<i>5 conejos (simboliza)</i>	20%	18.51%
<i>2 conejos (no simboliza)</i>	16%	11.11%
<i>10 conejos (no simboliza)</i>	20%	0%
<i>Sin respuesta</i>	12%	7.40%
<i>Otro</i>	12%	7.40%

Nota. Elaboración propia.

Las respuestas más comunes para el grupo 1 fueron 30, 5 y 10 conejos, mientras que para el grupo 2 fueron 30, 5 y 2 conejos. Siendo las dos primeras respuestas aquellas en las que los estudiantes simbolizan el dato desconocido, mientras que en las otras no lo hacen.

En la Tabla 11 se muestran los aspectos identificados en las respuestas del grupo 1 y 2 a la tarea 3.

Tabla 11. Agrupamiento por aspectos de Tarea 3

Aspectos en tarea 3	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
<i>I1, I4</i>	12%	0%
<i>I1, I5</i>	16%	7.40%
<i>I1</i>	48%	51.85%
<i>I1, I2, I3, I4, I5</i>	0%	7.40%
<i>I1, I2, I4, I5</i>	0%	7.40%
<i>I1, I2, I4, I3</i>	0%	7.40%
<i>I1, I2, I4</i>	0%	7.40%
No se identifica a falta de procedimiento	24%	11.11%

Nota. En el análisis del ambiente de la tarea 3 se identificaron los aspectos de I1 a I5.

En el grupo 1 la mayoría de los estudiantes identifica sólo un aspecto y el resto identifica un par. Para el grupo 2 si hubo estudiantes que aplicaran los 5 aspectos de los usos de la variable, además de que es un poco más variada su aplicación a comparación del grupo 1.

Finalmente, se presenta la tabla 12 con los aspectos de los usos de la variable que el estudiante reconoce en su procedimiento y marca en la encuesta.

Tabla 12. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 3

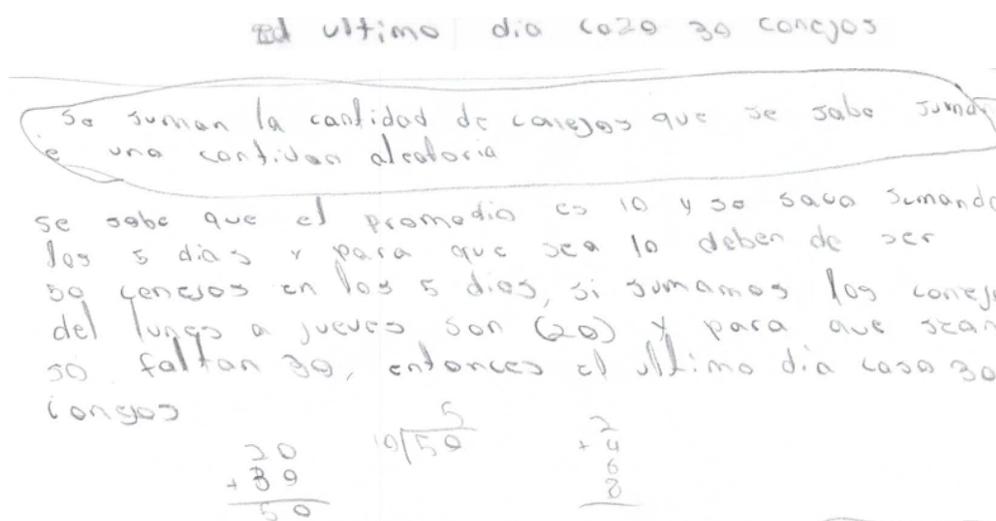
Aspectos en tarea 3	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2	Total
Identifique la presencia de datos desconocidos. (I1)	40%	43.47%	41.86%
Simbolice datos desconocidos y los utilice para plantear una ecuación. (I5)	40%	21.73%	30.23%
Determinar el dato desconocido realizando operaciones. (I4)	40%	21.73%	30.23%
Sustituí el valor que hacen verdadera la ecuación. (I3)	30%	4.34%	16.27%
Sustituí posibles valores específicos buscando el indicado para hacer verdadera la ecuación. (I2)	15%	4.34%	9.30%
Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos.	50%	34.78%	41.86%
Reconocí patrones, percibir reglas y métodos en secuencias.	20%	21.73%	20.93%

Nota. Los aspectos escritos con negritas corresponden a los identificados en el análisis del ambiente de la tarea, por lo tanto, son las respuestas consideradas como adecuadas.

Al comparar los datos de las tablas 11 y 12, es notorio que en los dos grupos y tanto en lo interpretado por el investigador y lo que reconoce el estudiante, coincide en que el aspecto más común es el I1. Sin embargo, en los resultados de la encuesta podemos ver como la opción de “utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos” tiene un porcentaje significativo en cuanto a que es reconocida por los estudiantes.

A continuación de la Figura 19 a la Figura 25, se presentan las respuestas de los alumnos seleccionados del grupo 1 y 2 así como su respectivo análisis fenomenológico.

Figura 19. Respuesta de A13G1

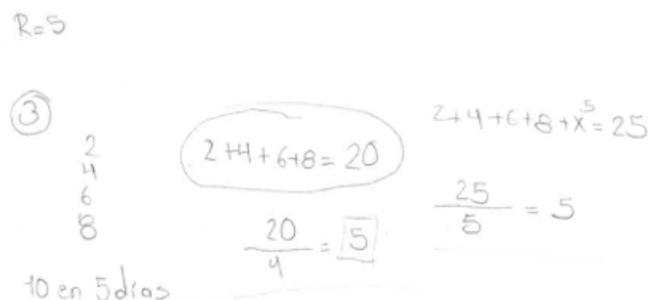


El estudiante A13G1 responde que el último día cazó 30 conejos, explica que el promedio de conejos atrapados por día durante cinco días es 10, lo que resulta en un total de 50 conejos atrapados. (algebraicamente $\frac{\text{Suma de las cantidades de los 5 días}}{5} = 10$, entonces, $\text{Suma de las cantidades de los 5 días} = 50$).

Luego, el alumno suma los conejos atrapados en los primeros cuatro días, lo cual da 20 conejos ($\text{conejos atrapados en los primeros 4 días} = 20$). El alumno razona que, para alcanzar el total de 50 conejos en cinco días, debe haber 30 conejos atrapados el último día. (algebraicamente $20 + \text{cantidad de conejos el último día} = 50$, entonces, $\text{cantidad de conejos el último día} = 30$).

El estudiante no muestra en su procedimiento como tal una ecuación donde se simbolice el dato desconocido, sin embargo, en su explicación verbal se podría decir que está planteando ecuaciones como las anteriores.

Figura 20. Respuesta de A20G1



Primero, el estudiante A20G1 calcula el promedio de los conejos atrapados en los primeros cuatro días, que es correcto. Suma los conejos atrapados en esos días ($2 + 4 + 6 + 8$) y luego divide el total por el número de días (4). Esto resulta en un promedio de 5 conejos por día.

Luego, el alumno intenta utilizar este promedio para encontrar la cantidad de conejos atrapados el último día. Sin embargo, el enfoque utilizado es incorrecto. Suma los conejos atrapados en los primeros cuatro días nuevamente ($2 + 4 + 6 + 8$), pero esta vez agrega la cantidad desconocida atrapada el último día (representada por x^5), lo iguala a 25 y luego divide este total por cinco días, lo que le da como resultado 5.

En resumen, la respuesta contiene errores en el cálculo y el razonamiento utilizado para determinar la cantidad de conejos atrapados el último día.

Figura 21. Respuesta de A6G1

$$\frac{2+4+6+8}{10} = \frac{20}{10} = 2 \text{ conejos}$$

La respuesta del estudiante A6G1 es incorrecta y parece haber una confusión en el cálculo. Para llegar al resultado suma los conejos atrapados en los primeros cuatro días ($2 + 4 + 6 + 8 = 20$) y luego divide ese total por 10, que es el promedio dado, obteniendo como resultado 2.

Sin embargo, esto no es correcto. El promedio de 10 conejos por día ya está dado y no necesita ser recalculado. Además, la suma de los conejos atrapados en los primeros cuatro días no se divide por 10, ya que el promedio se calcula dividiendo la suma total de conejos atrapados por el número de días.

Por lo tanto, la respuesta de "2 conejos" no es correcta según el razonamiento proporcionado. El estudiante podría beneficiarse de una revisión del concepto de media y cómo se aplica en este problema específico.

Figura 22. Respuesta de A16G1

Yo digo que 10 conejos. Por que si el promedio son 10 conejos en 5 días, en la semana cazador atrapo 50 conejos

$$\textcircled{3} \quad 5 \overline{) 50} \begin{array}{r} 10 \\ 50 \\ \hline 0 \end{array}$$

La respuesta del estudiante A16G1 indica que el cazador atrapó 10 conejos el último día. El razonamiento detrás de esta respuesta podría ser que, si el promedio de conejos atrapados por día durante cinco días es 10, entonces en total el cazador atrapó 50 conejos en la semana. Luego, al dividir este total por los cinco días, se llega a 10 conejos por día.

A primera vista, este razonamiento parece lógico y puede llevar a pensar que la respuesta es correcta. Sin embargo, hay un error crucial en el análisis. El problema radica en que el alumno asumió que el promedio de 10 conejos por día se mantiene constante a lo largo de los cinco días, lo que no es cierto, ya que en la tarea se dice que en el primer día atrapó 2, el segundo 4, el tercero 6 y el cuarto 8.

El promedio de 10 conejos por día se refiere al promedio general de los cinco días, no al número exacto de conejos atrapados cada día.

Por lo tanto, simplemente dividir el total de conejos atrapados en la semana por los cinco días no garantiza que el cazador atrapó 10 conejos el último día. El número de conejos atrapados cada día puede variar, siempre y cuando el promedio general sea de 10 conejos por día.

En resumen, aunque la respuesta parece lógica a primera vista, contiene un error fundamental al asumir que el promedio se aplica de manera uniforme a cada día, lo que lleva a una conclusión incorrecta.

Figura 23. Respuesta de A3G2

③ Datos
El promedio del cazador nos lo dan
y 4 de estos datos, entonces
usando fórmula de promedio despegamos
el 5to dato

er → 2
da → 4
er → 6
to → 8
to → x
? → 10

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

Procedimiento

$$10 = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + x}{5}$$

$$50 = 20 + x$$

$$30 = x$$

R = 30 conejos

El estudiante A3G2 comienza por **simbolizar** los datos dados en la tarea (la cantidad de conejos cazados del primer al cuarto día) y el **dato desconocido** x (cantidad de conejos cazados el quinto día). Luego plantea la **fórmula** de media aritmética para cinco datos, sustituye los datos conocidos y **opera** para determinar el valor de x . De acuerdo con el análisis del ambiente de la tarea el estudiante logra indicar el número de conejos cazados en quinto día utilizando el concepto de media aritmética, haciendo alusión al término promedio.

Figura 24. Respuesta de A15G2

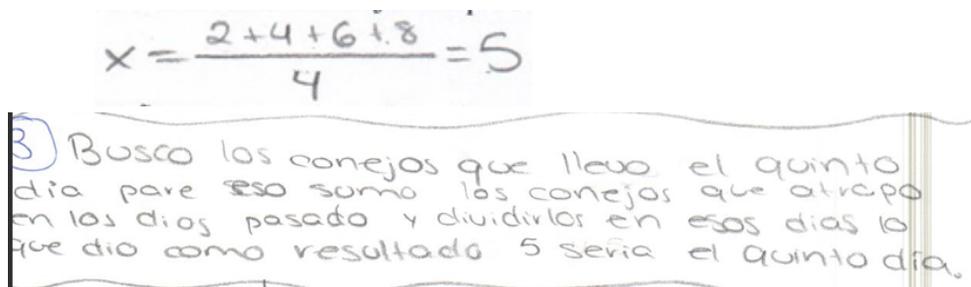
respuesta. Por día atrapo 2 conejos. Si se pone a sumar los 5 dias da la cantidad de 10 y entonces si divides 10/5 da 2 que son los conejos por día

La respuesta del alumno A15G2 demuestra un intento de aplicar el concepto de media para resolver el problema. Afirma que el cazador atrapó 2 conejos por día. Para justificar esta

afirmación, el alumno suma los conejos atrapados en los cinco días ($2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$) y luego divide este total por el número de días, lo que da como resultado 2 conejos por día.

Esta respuesta muestra un entendimiento básico del concepto de promedio y cómo se aplica en el contexto del problema. Sin embargo, hay un detalle importante que el alumno no ha considerado: la cantidad de conejos atrapados en los primeros cuatro días es 20 ($2 + 4 + 6 + 8 = 20$), no 10 en los 5 días.

Figura 25. Respuesta de A16G2


$$x = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = 5$$

3) Busco los conejos que llevo el quinto dia para eso sumo los conejos que atrapo en los dias pasado y dividirlo en esos dias lo que dio como resultado 5 seria el quinto dia.

El estudiante A16G2 aplicó la fórmula de media aritmética, sin embargo, solo utilizó 4 datos (2, 4, 6, 8). Luego de operar, obtuvo como resultado 5, que es la respuesta proporcionada para la tarea. En este caso, el estudiante **identificó** el dato desconocido al hacer alusión a “buscar los conejos que llevó el quinto día”, aunque no lo simbolizó correctamente en la ecuación el dato desconocido x .”

Ahora daremos paso a los resultados obtenidos en el análisis de las últimas tres tareas del cuestionario, donde predomina el uso de la variable como número general. En el análisis del ambiente de estas tres tareas se identificaron los aspectos G2 y G4, sin embargo, en el análisis fenomenológico de las tareas no aparecen explícitamente estos aspectos. Pero al realizar el análisis de la encuesta los alumnos si identifican la aplicación de estos aspectos en la resolución a las tareas. Dicho esto, en los siguientes apartados para las tareas 4, 5 y 6 se presentará solo la tabla que corresponden a las respuestas que dieron los alumnos y la tabla de porcentajes en los aspectos que se seleccionaron en la encuesta, seguidas de evidencias de las respuestas de los alumnos a cada tarea.

4.4 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 4)

A continuación, se presenta la tarea 4 y la tabla 13 en donde se muestran los porcentajes a cada una de las respuestas de los estudiantes tanto del grupo 1 como del grupo 2.

Tarea 4

Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6.2, 6.0, 6.0, 6.3, 6.1, 6.23, 6.15, 6.2 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto? (calcular media, mediana y moda) Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.

Tabla 13. Agrupamiento por respuestas a Tarea 4

Respuesta	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
Media, Mediana y Moda correctas	44%	11.11%
Media incorrecta	0%	3.70%
Moda incorrecta	8%	0%
Mediana incorrecta	8%	18.51%
Mediana y Moda incorrectas	12%	7.40%
Mediana y Media incorrectas	8%	25.92%
Ninguna correcta	12%	11.11%
No responde	8%	22.22%

Nota. Elaboración propia.

Podemos observar variedad en respuestas para la tarea 4, tanto del grupo 1 como del grupo 2, sin embargo, para el grupo 1 hay una mayor cantidad de alumnos que respondieron correctamente con un 44%, es decir casi cuatro veces más que las respuestas correctas en el grupo 2. Además de que en el grupo 2 un porcentaje alto de estudiantes no respondió la tarea.

A continuación, se presenta en la Tabla 14 los datos de la encuesta, respecto a qué aspectos del uso de la variable como número general fueron reconocidos por los estudiantes.

Tabla 14. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 4

Aspectos en tarea 4	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2	Total
Utilice e interprete una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor. (G2)	35%	47.82%	41.86%
Manipule una fórmula. (G4)	40%	39.13%	39.13%
Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación	20%	8.69%	13.95%
Sustituí posibles valores que hacen verdadera la ecuación planteada.	45%	13.04%	27.90%

Nota. Los aspectos escritos con negritas corresponden a los identificados en el análisis del ambiente de la tarea, por lo tanto, son las respuestas consideradas como adecuadas.

En la Tabla 14 se observa como para los dos grupos de alumnos el mayor porcentaje lo encontramos en G2 y G4, siendo un poco mayor el de G2. Sin embargo, para la opción de “Sustituí posibles valores que hacen verdadera la ecuación planteada” tenemos en el grupo uno un 45% de alumnos por encima del porcentaje de alumnos para G2 y G4, lo que indica que el estudiante pudo interpretar en sus respuestas que estaba utilizando una ecuación y no una expresión general o en su caso, por ejemplo, la fórmula de media aritmética.

A continuación, en la figura 26 y la figura 27, se presentan las respuestas de los alumnos seleccionados del grupo 1 y 2 así como su respectivo análisis fenomenológico.

Figura 26. Respuesta de A10G1

$$4. \text{ Moda} = 6.0 + 6.0 + 6.2 + 6.2 = 24.4 / 4 = 6.1$$

$$\text{Media} = 6.0 + 6.0 + 6.1 + 6.2 + 6.2 + 6.3 + 6.15 + 6.23 = 49.18 / 8 = 6.147$$

$$\text{Mediana} = 6.2 + 6.2 / 2 = 6.2$$

El estudiante A10G1 identifica que los datos con mayor frecuencia (de 2) son 6 y 6.2, sin embargo, no define el conjunto de datos como bimodal, sino que trata de sacar una especie de promedio entre los cuatro datos y obtiene 6.1. Luego para obtener la media opera correctamente y obtiene que es igual a 6.14 y finalmente para identificar la mediana, no ordena correctamente los datos, lo que lo lleva a obtener el promedio de 6.2 y 6.2, obteniendo como resultado 6.2.

Figura 27. Respuesta de A4G2

④ 6.0, 6.0, 6.1, 6.15, 6.2, 6.2, 6.23, 6.3

MEDIA:

$$\frac{6 + 6 + 6.1 + 6.15 + 6.2 + 6.23 + 6.3}{8} = 6.147$$

MEDIANA:

$$\frac{6.15 + 6.2}{2} = 6.175$$

MEDIA: 6.147
MEDIANA: 6.175
MODA: 6.0 y 6.2

En el estudiante A4G2 podemos observar cómo ordenar los datos correctamente, opera para calcular la media y la mediana e identifica la moda correctamente. Sin embargo, todo su procedimiento es operacional y no se identifica explícitamente el uso de la variable, por lo tanto, no se identifican tampoco aspectos aplicados en la resolución a la tarea.

Con estos casos de respuestas cerramos lo correspondiente a la tarea 4 y se continúa con la tarea 5.

4.5 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 5)

A continuación, se presenta la tarea 5 y la tabla 15 en donde se muestran los porcentajes a cada una de las respuestas de los estudiantes tanto del grupo 1 como del grupo 2.

Tarea 5

La cantidad de empresas que hay en 7 ciudades están dadas por los siguientes datos:
¿En cuál de los siguientes conjuntos de datos la media, la mediana y la moda coinciden?

- A. 3,4,5,9,10,11
- B. 3,4,5,6,7,8,9
- C. 6,3,4,6,8,9,6
- D. 1,2,3,4,5,5,5
- E. 2,4,6,8,10,12

Tabla 15. Agrupamiento por respuesta a Tarea 5

Respuesta	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
C	64%	55.55%
B	8%	3.70%
A	4%	0%
D	0%	3.70%
B y C	8%	0%
A y E	0%	11.11%
C y D	0%	11.11%
A, B, C y D	4%	3.70%
No responde	12%	11.11%

Nota. Elaboración propia.

Igual que en el caso de la tarea 4, en la tarea 5 los estudiantes del grupo 1 tienen un porcentaje mayor en respuestas correctas sobre el grupo 2. Aun así, para los dos grupos más del 50% de los estudiantes respondieron correctamente a la tarea.

En seguida, se presenta en la Tabla 16 los datos de la encuesta, respecto a qué aspectos fueron reconocidos por los estudiantes.

Tabla 16. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 5

Aspectos en tarea 4	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2	Total
Utilice e interprete una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor. (G2)	40%	47.82%	44.18%
Manipule una fórmula. (G4)	40%	17.39%	27.90%
Sustituí posibles valores que hacen verdadera la ecuación planteada.	35%	13.04%	23.25%
Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación	40%	13.04%	25.52%

Nota. Los aspectos escritos con negritas corresponden a los identificados en el análisis del ambiente de la tarea, por lo tanto, son las respuestas consideradas como adecuadas.

En la Tabla 16 se observa como para los dos grupos de alumnos el mayor porcentaje lo encontramos en G2 y G4, siendo un poco mayor el de G2. Sin embargo, para la opción de “Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación” tenemos en el grupo 1 un 40% de alumnos, igualando el porcentaje de G2 y G4, lo que indica que el estudiante pudo interpretar en sus respuestas que estaba utilizando una ecuación y no una expresión general o en su caso, por ejemplo, la fórmula de media aritmética.

A continuación, en la figura 28 y la figura 29, se presentan las respuestas de los alumnos seleccionados del grupo 1 y 2 así como su respectivo análisis fenomenológico. Cabe mencionar que la mayoría de las respuestas para esta tarea carecen de procedimiento, lo que hace aún más difícil identificar la presencia de la variable.

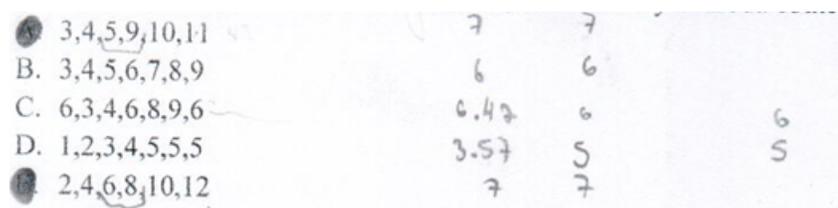
Figura 28. Respuesta de A6G1

$$\begin{aligned} \text{Moda} &= 6 \\ \text{Media} &= 6, 3, 4, 6, 8, 9, 6 = 42/7 = 6 \\ \text{Mediana} &= 3, 4, 6, 6, 8, 9 = 6 \end{aligned}$$

C

En el estudiante A6G1 podemos observar cómo identifica correctamente el valor de la moda, opera y obtiene correctamente la media e identifica correctamente la mediana. Sin embargo, todo su procedimiento es operacional y no se identifica explícitamente el uso de la variable, por lo tanto, no se identifican tampoco aspectos aplicados en la resolución a la tarea.

Figura 29. Respuesta de A11G2



El estudiante A11G2 opera para obtener media, mediana y moda de todos los conjuntos de datos y concluye que el conjunto de datos A y el conjunto de datos B coinciden en que su media y mediana son iguales a 7. Al igual que con el estudiante A6G1 no se identifican aspectos en la resolución de la tarea.

Con estos casos de respuestas cerramos lo correspondiente a la tarea 5 y se continúa con la tarea 6.

4.6 Análisis y resultados del cuestionario y encuesta (Tarea 6)

A continuación, se presenta una tabla 17 que agrupa a los estudiantes del grupo 1 y 2 según su respuesta a la tarea 6.

Tarea 6

Encuentra la mediana para los datos agrupados de la siguiente tabla de frecuencias:

Dato	0	1	2	3	4
Frecuencia	10	10	2	14	8

Tabla 17. Agrupamiento por respuesta a Tarea 6

Respuesta	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2
2.5	4%	3.70%
2.13	0%	3.70%
2 y 3	0%	3.70%
55.6	0%	3.70%
2	32%	37.03%
4	0%	7.40%
2.75	0%	3.70%
10	28%	18.51%

8.8	8%	0%
3.5	12%	0%
No responde	16%	18.51%

Nota. Elaboración propia.

Podemos observar variedad de respuestas para la tarea 6, tanto del grupo 1 como del grupo 2, sin embargo, es más amplia la variedad de respuestas que dieron los estudiantes del grupo 2. Además de que un 3.70% de los estudiantes del grupo 2 da respuesta correcta, mientras que el grupo 1 ligeramente un poco más con 4% de los estudiantes. Algo a resaltar es que la respuesta que mayor porcentaje de alumnos dieron fue 2, con un 32% de alumnos del grupo 1 y con un 37.03% de alumnos del grupo 2.

En seguida, se presenta en la Tabla 18 los datos de la encuesta, respecto a qué aspectos fueron reconocidos por los estudiantes.

Tabla 18. Aspectos seleccionados en la encuesta para la tarea 6

Aspectos en tarea 6	Porcentaje de estudiantes grupo 1	Porcentaje de estudiantes grupo 2	Total
Manipule una fórmula. (G4)	45%	43.47%	41.86%
Utilice e interprete una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor. (G2)	35%	30.43%	32.55%
Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación	35%	13.04	23.25%
Sustituí posibles valores que hacen verdadera la ecuación planteada.	40%	8.69%	25.58%

Nota. Los aspectos escritos con negritas corresponden a los identificados en el análisis del ambiente de la tarea, por lo tanto, son las respuestas consideradas como adecuadas.

En la Tabla 18 se observa como para los dos grupos de alumnos el mayor porcentaje lo encontramos en G4, siendo un poco mayor para el grupo 1 que para el grupo 2. Seguido de “Sustituí posibles valores que hacen verdadera la ecuación planteada” con un 40% para el grupo 1, lo que indica que el estudiante pudo interpretar en sus respuestas que estaba utilizando una ecuación y no una expresión general o en su caso, por ejemplo, la fórmula de media aritmética.

A continuación, en la figura 30 y la figura 31, se presentan las respuestas de los alumnos seleccionados del grupo 1 y 2 así como su respectivo análisis fenomenológico. Cabe mencionar

Capítulo 5. Conclusiones y Reflexiones

En este capítulo se presentan las conclusiones que se desprenden de los resultados obtenidos de la investigación. Primero se presenta la respuesta a la pregunta de investigación que se planteó en un inicio, luego se presentan las conclusiones sobre la aplicación de los instrumentos, posteriormente se presentan las conclusiones sobre el uso del Modelo 3UV en el área de la estadística. Por último, se presentan las reflexiones finales que se desprenden de la realización de este trabajo.

5.1 Conclusiones sobre la pregunta de investigación

Con relación a la pregunta de investigación ¿Cuáles son los aspectos y usos de la variable que se manifiestan en las tareas de MTC realizadas y reconocidas por dos grupos de estudiantes de nivel medio superior? Los resultados mostraron que los aspectos y usos de la variable que se identificaron en las tareas de estadística dependen de la actividad algebraica que está presente en las tareas. Los aspectos y usos de la variable que se manifestaron en las tareas de MTC se enuncian a continuación.

5.1.1 La variable como número general en las tareas analizadas.

A partir de los resultados obtenidos en el análisis de tareas, podemos concluir que los usos de la variable dependen del tipo de tarea, es decir los usos y por ende los aspectos que se movilizan y son reconocidos por los estudiantes están condicionados por la actividad algebraica que se requiere. En este sentido las tareas que solicitan encontrar la media, mediana y moda se caracterizan por el predominio del uso de la variable como número general (ejemplo en las tareas 4, 5 y 6, donde se identificando los aspectos G2 y G4) limitadas principalmente a la aplicación de fórmulas para calcular estas MTC. Esto indica que los estudiantes tienden a utilizar la variable en un contexto más operacional, centrando su atención en la aplicación directa de fórmulas preestablecidas para obtener resultados específicos.

La mayoría de los estudiantes recurrió a procedimientos aritméticos para abordar las tareas planteadas. Solo unos pocos optaron por emplear expresiones o ecuaciones que involucran variables, ya sea como un número general o como incógnita. Esto indica que, aunque algunos lograron identificar la existencia de una cantidad desconocida, no la representaron de manera simbólica. Este hecho resulta especialmente evidente en el caso del uso de la variable como número general. Y este resultado es consistente con lo señalado por Ursini y Trigueros (2006) y Trigueros *et al.* (2000), quienes destacan este fenómeno en sus investigaciones.

5.1.2 La variable como relación funcional en las tareas analizadas.

En el tema de medidas de tendencia central, al realizar un análisis exhaustivo de los usos de la variable en tareas, no se observan tareas donde se evidencie el uso de la variable como relación

funcional; sin embargo, es necesario profundizar en esta situación para evidenciar si es una característica asociada al tema o bien si es posible proponer tareas que promuevan este uso para el caso de las MTC. Este tipo de uso de la variable, que implica una comprensión más profunda de cómo las variables se interrelacionan mutuamente, podría identificarse en tareas relacionadas con otros temas estadísticos más avanzados.

5.1.3 La variable como incógnita en las tareas analizadas.

En cuanto a los aspectos de los usos de la variable como incógnita, a partir de los resultados se identifican tanto en el ambiente de las tareas como en las respuestas a las tareas, los cinco aspectos asociados (I1 a I5). Esto sugiere que los estudiantes tienen una comprensión más completa y matizada de la variable cuando se utiliza como incógnita. Por otro lado, para el uso de la variable como número general, solo se identifican los aspectos G2 y G4. Esta limitación podría deberse a la naturaleza más concreta de las tareas en las que se aplica este uso de la variable.

5.2 Conclusiones sobre aplicaciones a los grupos 1 y 2

Las conclusiones derivadas de la aplicación del cuestionario y la encuesta revelan diferencias significativas entre el grupo 1 (primer semestre) y el grupo 2 (sexto semestre). El grupo 1 obtuvo menos respuestas correctas en el cuestionario en comparación con el grupo 2. Además, en el grupo 2 se observó una mayor variedad de aspectos en el proceso de resolución de tareas por parte de los estudiantes. Esto sugiere que las respuestas correctas están asociadas a la aplicación de los aspectos del uso de la variable que predominan en cada tarea. La mayor variedad de aspectos identificados en el grupo 2 indica que los estudiantes de sexto semestre tienen una comprensión más diversa y profunda de los usos de la variable, posiblemente debido a su mayor experiencia y exposición a conceptos algebraicos y estadísticos.

Un hallazgo interesante es el hecho de que los estudiantes hayan llevado o no un curso de álgebra anterior a estadística parece influir en sus respuestas. Los estudiantes de primer semestre, que siguen el plan de estudios 2023 de la Nueva Escuela Mexicana y aún no han cursado álgebra, muestran un desempeño diferente en comparación con los estudiantes de sexto semestre, quienes siguieron el plan de estudios 2017 y sí cursaron álgebra posteriormente. Este hecho resalta la importancia de una base sólida en álgebra para la comprensión y aplicación efectiva de conceptos estadísticos. La exposición previa al álgebra parece normar y mejorar la capacidad de los estudiantes para aplicar correctamente los conceptos de variable en tareas estadísticas.

Otro hallazgo relevante es el hecho de que los aspectos de los usos de la variable no aparecen del todo explícitos en la resolución de las tareas sobre todo en aquellas que predomina el uso de la variable como número general, pero sí se pueden ver reflejados, ya que los

estudiantes reconocen su aplicación en su proceso de solución a las tareas, tal como se mostró en el análisis de las encuestas.

5.3 Conclusiones sobre el Modelo 3UV en Estadística

Respecto al Modelo 3UV, se puede afirmar que su relevancia trasciende el Álgebra y se extiende a otras áreas como la Estadística, ya que por medio de este modelo podemos identificar usos y aspectos de la variable en tareas de Estadística. Este modelo ha permitido una mejor identificación de la aplicación de la variable en contextos estadísticos, demostrando su utilidad y adaptabilidad más allá de su ámbito original. La efectividad del modelo 3UV en mejorar los resultados estudiantiles en estadística sugiere que puede ser una herramienta valiosa para la enseñanza de conceptos matemáticos complejos (Ursini y Trigueros, 2006), es decir, en los resultados observamos que los estudiantes que responden correctamente una tarea, identifican y hacen uso de los aspectos de la variable en juego, entonces este hecho muestra cómo el Modelo 3UV podría ser una herramienta para la enseñanza-aprendizaje de conceptos estadísticos.

Como aportes para investigaciones futuras, queda abierto el campo para la identificación de errores en el uso de la variable en Probabilidad y Estadística. Es crucial investigar más sobre las dificultades y errores en torno al uso de la variable que afectan el aprendizaje de las medidas de tendencia central. La pregunta que surge es: ¿Cuáles son las dificultades y errores relacionados con el uso de la variable que impactan el aprendizaje de las medidas de tendencia central?.

Esta investigación ha sentado las bases para futuras exploraciones en la didáctica de la matemática, específicamente en cómo los diferentes usos de la variable influyen en tareas estadísticas esenciales. Además, sugiere la necesidad de diseñar intervenciones educativas que aborden errores y dificultades en torno al uso de la variable en tareas de medidas de tendencia central, proporcionando a los estudiantes herramientas más efectivas para comprender y aplicar las variables en diversos contextos matemáticos.

Reflexiones Finales

En primer lugar, es importante destacar que, aunque investigaciones como la de Oliva (2023) reportan la presencia de los tres usos de la variable (incógnita, número general y relación funcional) en el área de Probabilidad y Estadística, especialmente en el tema de medidas de tendencia central, nuestra investigación solo ha identificado dos de estos usos (incógnita y número general) en el análisis de tareas específicas de medidas de tendencia central. Esta discrepancia me lleva a cuestionar la ausencia del uso de la variable como relación funcional en nuestras tareas analizadas. Es fundamental investigar si este tercer uso es necesario en las tareas de medidas de tendencia central y, de ser así, cómo se puede identificar eficazmente.

Por otro lado, el modelo 3UV, que originalmente surge en el contexto del Álgebra, ha demostrado su aplicabilidad en otras áreas de la matemática, como la Estadística. La capacidad de este modelo para identificar los usos de la variable y sus aspectos en estadística refuerza su utilidad y versatilidad. Esta trascendencia del modelo 3UV subraya la importancia de tener herramientas teóricas robustas que puedan adaptarse a distintos contextos matemáticos, proporcionando una base sólida para la enseñanza y el aprendizaje.

Una de las conclusiones más significativas derivadas de los resultados es que la ausencia de un curso de Álgebra previo a Estadística parece afectar negativamente el desempeño de los estudiantes. Los estudiantes de primer semestre, que no han cursado Álgebra debido al plan de estudios de la Nueva Escuela Mexicana 2023, obtuvieron menos respuestas correctas y aplicaron con menor frecuencia los aspectos de los usos de la variable en comparación con los estudiantes de sexto semestre, quienes siguen el plan de estudios 2017 y cursaron Álgebra antes de Estadística. Este hallazgo plantea serias dudas sobre la estructura actual del plan de estudios y su efectividad en la preparación de los estudiantes para enfrentar conceptos estadísticos complejos. Es crucial reconsiderar si la secuenciación de los cursos está realmente diseñada para maximizar el beneficio en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Ahora hablando sobre mi desarrollo profesional este trabajo de investigación ha enriquecido mi desarrollo tanto como investigadora como profesora. Al ser mi primer trabajo de tesis, ha fortalecido mis destrezas de investigación, desde la formulación de preguntas de investigación hasta el análisis de datos y la interpretación de resultados. Además, como profesora, he adquirido una mayor comprensión de cómo ciertas modificaciones en el plan de estudios pueden impactar significativamente el rendimiento de los estudiantes.

Para futuras investigaciones, se abre un campo amplio para explorar más a fondo los errores y dificultades en torno al uso de la variable en Probabilidad y Estadística. Es crucial investigar las dificultades y errores que afectan el aprendizaje de las medidas de tendencia central y cómo estos pueden ser mitigados mediante intervenciones educativas adecuadas. La pregunta clave que surge es: ¿Cuáles son las dificultades y errores relacionados con el uso de la variable que impactan el aprendizaje de las medidas de tendencia central? Responder a esta

pregunta será fundamental para mejorar las estrategias de enseñanza y asegurar que los estudiantes adquieran una comprensión profunda y duradera de los conceptos estadísticos.

Referencias Bibliográficas

- Acosta, S. (2019). *Diseño de una secuencia didáctica para la detección y superación de errores algebraicos*. [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Institucional.
- Arias, J. L. (2020). *Técnicas e instrumentos de investigación científica*. (1er ed.). Enfoques consulting eirl.
- Ascencio, R., Nesterova, E. y Eccius, C. C. C. (2017). Estrategia correctiva para errores algebraicos de alumnos en cálculo diferencial. *AMIUTEM*, 5(2), 46-58
- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., y Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249-272. <https://doi.org/10.1080/10986060701360910>
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 41-58.
- Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. *Granada: Universidad de Granada*.
- Batanero, C., Godino, J., Green, D., Holmes, O., y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547. <https://www.researchgate.net/publication/237768038>
- Betancourt, A. (2012). *Caracterización de algunas dificultades que presentan los docentes de básica secundaria, en la enseñanza de las medidas de tendencia central*. [tesis de licenciatura, Universidad del Valle]. Repositorio Institucional.
- Bolaños, H., y Lupiáñez, J. L. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia*, 35(1), 1-18. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.1>
- Booth, J. L., Barbieri, Ch., Eyer, F., y Pare-Blagoev, E. J. (2014) Persistent and pernicious errors in algebraic problem solving. *The Journal of Problem Solving*, 7, 10-23 <https://docs.lib.purdue.edu/jps/vol7/iss1/3>
- Bush, S. B. y Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 613-632. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.001>
- Castro, F., Lop, R., y Juárez, A. (2024). El concepto de variable y el modelo 3UV: una revisión bibliográfica. *Revista de Didáctica de la Matemática*, 5(1), 21-31. Doi: 10.34007/jdm.v5il.2105

- Cortínez, A., Albert, A., y Ruiz, B. (2020). Dificultades de los estudiantes para la articulación de los distintos significados de variable en un curso básico de estadística universitaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 49-59.
- Cury, H., y Cassol, M. (2004). Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 6(1), 27-36.
- Del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento educativo*, 49(1), 53-64.
- Díaz, J. L., y Morales, L. (2005). El concepto de variable en los libros de texto. En H. Leyva Castellanos, F. A. Carrillo y J. L. Díaz (Eds.), *Memorias de la XV semana regional de investigación y docencia en matemáticas*. (pp.39-44).
- Díaz, J. L. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El cálculo y su Enseñanza*, 1, 91-97.
- Escalante, J. E., y Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24(1), 107-132.
- Falcón, V. L., Pertile, V. C., & Ponce, B. E. (2019). La encuesta como instrumento de recolección de datos sociales: Resultados diagnóstico para la intervención en el Barrio Paloma de la Paz (La Olla)-ciudad de Corrientes (2017-2018). In *XXI Jornadas de Geografía de la UNLP 9-11 de octubre de 2019 Ensenada, Argentina. Construyendo una Geografía Crítica y Transformadora: En defensa de la Ciencia y la Universidad Pública*. Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Departamento de Geografía.
- Gil, A. (2008). *Diseño, implementación y rediseño de una secuencia de actividades del tema medidas de tendencia central en la unidad educativa Nicolás Infante Díaz*. [tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación]. Repositorio Institucional.
- Gris, S. S., Loud, B. J., y Sokolowski, C. (2005). Undergraduates' Errors in Using and Interpreting Algebraic Variables: A Comparative Study. *Proceedings of the 27th Annual Meeting of PME-NA North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Frameworks that Support Research and Learning*, 1-7. https://scholarworks.merrimack.edu/mth_facpub/9
- Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (1), 5-22.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGRAW-HILL.
- Herrera, H., Cuesta, A., y Escalante, J. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación Matemática*, 28(3), 217-240.

- Kieran, C., & Yagüe, E. F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 229-240.
- Küchemann, D. E. (1980). *The Understanding of Generalised Arithmetic (algebra) by Secondary School* (Doctoral dissertation, University of London).
- Lucariello, J., Tine, M. T., y Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 30-41. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.001>
- Marino, T., e Isla, D. (2018). Usos de la variable, sentido simbólico y metacognición: una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra elemental. *Revista Paradigma*, 39(1), 246-266. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/>
- Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. [tesis doctoral, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional.
- Morales, L., y Díaz, J. L. (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos*, (11), 109-114
- Muñoz, T. G. (2003). El cuestionario como instrumento de investigación/evaluación. *Centro Universitario Santa Ana*, 1(1), 1-47.
- Oliva, P. (2023). *Los usos de la variable. Un análisis del currículo en matemáticas del Nivel Medio Superior* [tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Zacatecas]. Repositorio Institucional UAZ.
- Orozco, M. (1991). El análisis de tareas instrumento de trabajo en educación matemática. *Educación Matemática*, 3(3), 68-74.
- Orozco, M. (2000). El análisis de tareas: cómo utilizarlo en la enseñanza de la matemática en primaria. *Revista EMA*, 5(2), 139-151.
- Ortiz, I., Vázquez, L., y Terríquez, M. (2019). *Probabilidad y estadística I*. (2da ed.). Dirección de Planeación Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California.
- Sabino, C. (1992). *El proceso de investigación*. (1er ed.). Panapo.
- Trigueros, M., Ursini, S., y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática*, 12(2), 27-48.
- Ursini, S., Escareño, D., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa* (1er ed.). Trillas.
- Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518302>

Anexos

Anexo 1

Análisis de tareas.

Tarea	Modelo 3UV (uso y aspectos que predominan)	Análisis del ambiente	
		Análisis Objetivo	Análisis Subjetivo
<p>1. Un alumno tiene dos notas (a y b) en matemáticas con escala de 1 a 7. Si el promedio es 5.5 y la suma de las notas es 11, ¿Cuáles son las sus posibles notas, sabiendo que son números enteros? Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.</p>	<p>Incógnita I1 I5 I4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) ¿Cuáles son sus notas? Con la utilización del pronombre interrogativo “cuáles” se espera que se indiquen las notas. Dos notas de alumnos tal que su promedio es 5.5, su suma 11 y se encuentran entre 1 y 7.. Matemática (términos y relaciones) Dos notas desconocidas a y b; Escala; Promedio; Suma; $(a + b)/2 = 5.5$; $a + b = 11$; $1 < a, b < 7$ Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media $((a + b)/2 = 5.5)$.</p>	<p>Algoritmo de solución -Identificar la presencia de datos desconocidos (a y b). -Simbolizar cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones. $(a + b)/2 = 5.5$; $a + b = 11$; $1 < a, b < 7$ -Sustituir los posibles valores que hacen verdadera la ecuación. $6 + 5 = 11$ y $7 + 4 = 11$ -Determinar que las posibles notas serán 6 y 5 pero también 7 y 4.</p>

<p>2. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa? Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.</p>	<p>Incógnita I1 I5 I4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con el adverbio interrogativo “cómo” se espera que se indique la repartición a realizar. Matemática (términos y relaciones) Repartición de forma equitativa. $X=(5+8+6+1+0)/5=4$ Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media.</p>	<p>Algoritmo de solución -Identificar la presencia de un dato desconocido, que es el número equitativo de caramelos para cada persona. -Simbolizar la cantidad desconocida X y utilizarla para plantear la ecuación $X=(5+8+6+1+0)/5=4$ -Realiza operaciones para encontrar la cantidad desconocida X=4.</p>
<p>3. Se sabe que un cazador sale cada día al campo y a su regreso trae la siguiente cantidad de conejos 2, 4, 6, 8, la cantidad del último día está dada por x, se sabe que en promedio el cazador atrapó 10 conejos en los 5 días ¿Cuál de los siguientes valores representa la cantidad de conejos que atrapó el cazador el último día? Comprueba tu respuesta y justifica tu respuesta.</p>	<p>Incógnita I1 I5 I4 I3</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indique la cantidad de conejos cazados el quinto día. Matemática (términos y relaciones) Cantidad, promedio. $(2+4+6+8+x)/5=10$ Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media</p>	<p>Algoritmo de solución -Identificar la presencia de un dato desconocido x, que es la cantidad de conejos cazados el último día. -Simbolizar la cantidad desconocida x y utilizarla para plantear la ecuación. $(2+4+6+8+x)/5=10$ -Realizar operaciones para encontrar la cantidad desconocida x=30. -Sustituir el valor encontrado x=30 en la ecuación inicial, haciendo a ésta una ecuación verdadera.</p>

<p>4. Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas en el ascensor? Describe el procedimiento que realizaste.</p>	<p>Incógnita I1 I5 I4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indique el peso medio de las 10 personas. Matemática (términos y relaciones) Peso medio, $= (4 \cdot 60 + 6 \cdot 80) / 10$ Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media</p>	<p>Algoritmo de solución -Identificar la presencia de datos desconocidos, que es el peso medio de las 10 personas. -Simbolizar la cantidad desconocida y utilizarla para plantear la ecuación. $= (4 \cdot 60 + 6 \cdot 80) / 10$ -Realizar operaciones para encontrar la cantidad desconocida =72</p>
<p>5. La altura media de los alumnos de un colegio es 1.40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1.38, 1.42, 1.60, 1.40. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante? Justifica tu respuesta</p>	<p>Incógnita I1 I5 I4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indique la probable altura del quinto estudiante. Matemática (términos y relaciones) Altura media; muestra aleatoria; altura más probable; $1.38 + 1.24 + 1.60 + 1.40 + x = 1.40$ Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media</p>	<p>Algoritmo de solución -Identificar la presencia de datos desconocidos, que es la altura del quinto estudiante. -Simbolizar la cantidad desconocida x y utilizarla para plantear la ecuación $1.38 + 1.24 + 1.60 + 1.40 + x = 1.40$ -Realizar operaciones para encontrar la cantidad desconocida =1.2</p>

<p>6. El peso en kilos de 9 niños es 15,25,17,19,16,26,18,19,24. ¿Cuál es el peso medio de los niños? Describe el procedimiento y operaciones que realizaste.</p>	<p>Número General G2 G4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indiquen el peso medio de los niños</p> <p>Matemática (términos y relaciones) Peso medio, (15+25+17+19+16+26+18+19+24)/9</p> <p>Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media</p>	<p>Algoritmo de solución - Interpretar la fórmula De media</p> $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{N}$ <p>-Identificar el valor de las x_i y de N (total de los pesos). -Sustituir los términos conocidos en la fórmula. $\bar{x}=(15+25+17+19+16+26+18+19+24)/9$ -Operar para obtener el valor de la media</p>
---	---	---	--

<p>7. Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6.2, 6.0, 6.0, 6.3, 6.1, 6.23, 6.15, 6.2 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto? (calcular media, mediana y moda) Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.</p>	<p>Número General G2 G4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indique la mejor estimación del peso del objeto.</p> <p>Matemática (términos y relaciones) Estimación, 6.2+6.0+6.0+6.3+6.1+6.23+6.15+6.2/8</p> <p>Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media, mediana y moda.</p>	<p>Algoritmo de solución (1) Cálculo de media - Interpretar la fórmula De media $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{N}$ -Identificar el valor de las x_i y de N (total de los pesos). -Sustituir los términos conocidos en la fórmula. $\bar{x} = \frac{6.2+6.0+6.0+6.3+6.1+6.23+6.15+6.2}{8}$ -Operar para obtener el valor de la media 6.14</p> <p>(2) Cálculo de moda -Identificar qué 6.2 se repite 2 veces al igual que 6. -Concluir en que es bimodal por lo que las modas son 6.2 y 6.</p> <p>(3) Cálculo de mediana -Ordenar los datos de menor a mayor: 6, 6, 6.1, 6.15, 6.2, 6.2, 6.23, 6.8 -Utilizar las expresiones generales para encontrar las posiciones de los datos con los que se calculará su promedio. -Sustituir en las expresiones y calcular las posiciones $\frac{8}{2}+1=5$ y $\frac{8}{2}=4$</p>
--	-------------------------------------	--	--

			<p>-Identificar que en la posición 4 se encuentra el dato 6.15 y en la 5 6.2.</p> <p>-Calcular el promedio de los dos datos, siendo este la mediana</p> $(6.15+6.2)/2=6.175$
--	--	--	--

<p>8. Como parte de un proyecto los estudiantes de una clase registran cada uno su número de calzado, obteniéndose los siguientes datos: 35,38,36,36,43,42</p> <p>Si se pregunta cuál sería el mejor número para representar este conjunto de datos, ¿qué número elegirías? Explica tu respuesta</p>	<p>Número General G2 G4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del adverbio interrogativo “qué” se espera que se indique el número elegido.</p> <p>Matemática (términos y relaciones) Número; conjunto de datos; $35+38+36+36+43+43/6$</p> <p>Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media</p>	<p>Algoritmo de solución (1) Cálculo de media. -Aplicar la fórmula para calcular la media aritmética. -Sustituir los valores conocidos (números de calzados y total de números). $\underline{x}35+38+36+36+43+43/6$ -Realizar las operaciones y obtener que la media es 38.3.</p> <p>(2) Cálculo de moda. -Identificar que el dato 36 es el único que se repite dos veces por lo que la moda será 36.</p> <p>(3) Cálculo de mediana -Ordenar los datos de menor a mayor, 35, 36, 36, 38, 42, 43 -Utilizar las expresiones generales para encontrar las posiciones de los datos con los que se calculará su promedio. -Sustituir en las expresiones y calcular las posiciones $6/2+1=4$ y $6/2=3$ -Identificar que en la posición 4 se encuentra el dato 38 y en la 3 el 36. -Calcular el promedio de los dos datos, siendo este la mediana $(38+36)/2=37$</p>
--	---	---	---

<p>9. La cantidad de empresas que hay en 7 ciudades están dadas por los siguientes datos: ¿En cuál de los siguientes conjuntos de datos la media, la mediana y la moda coinciden?</p> <p>A. 3,4,5,9,10,11 B. 3,4,5,6,7,8,9 C.6,3,4,6,8,9,6 D.1,2,3,4,5,5,5 E.2,4,6,8,10,12</p>	<p>Número General G2 G4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del pronombre interrogativo “cuál” se espera que se indiquen el par de conjuntos de datos que cumplen en coincidir con su media, moda y mediana.</p> <p>Matemática (términos y relaciones) Conjunto, mediana y moda</p> <p>Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de mediana, moda y media.</p>	<p>Algoritmo de solución Cálculo de media:</p> <p>-Interpretar la fórmula de media</p> $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{N}$ <p>-Identificar y sustituir el valor de las x_i y de N.</p> <p>-Manipular/desarrollar para determinar el valor de la media.</p> <p>Cálculo de mediana:</p> <p>-Ordenar los datos de menor a menor, utilizar la expresión $\frac{n+1}{2}$ para encontrar la posición de la mediana e identificar el valor.</p> <p>- Cálculo de moda: Identificar el dato con mayor frecuencia.</p> <p>Todo esto para cada uno de los conjuntos de datos, hasta concluir que para el conjunto de datos de C, la moda mediana y media son iguales a 6.</p>
--	---	--	---

<p>10. Encuentra la mediana para los datos agrupados en la siguiente tabla de frecuencias:</p>	<p>Número General G2 G4</p>	<p>Cualitativa (enunciado, objetos)</p>	<p>Algoritmo de solución</p>												
<table border="1"> <tr> <td>Dato</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Frecuencia</td> <td>10</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>14</td> <td>8</td> </tr> </table>	Dato	0	1	2	3	4	Frecuencia	10	10	20	14	8		<p>Con la utilización del verbo “encontrar” se espera que el estudiante determine la media de los datos.</p>	<p>- Calcular las frecuencias acumuladas. (10, 20, 22, 36, 44)</p>
Dato	0	1	2	3	4										
Frecuencia	10	10	20	14	8										
		<p>Matemática (términos y relaciones)</p>	<p>-Sustituir n en la expresión y operar, obteniendo 22.5</p>												
		<p>Calcular, datos agrupados, mediana, frecuencias.</p>	<p>-Identificar en las frecuencias acumuladas que para el 22.5 se encuentran entre los datos 2 y 3.</p>												
		<p>Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de mediana.</p>	<p>-Obtener el promedio de los dos valores, siendo éste el valor de la mediana $(2+3)/2=2.5$.</p>												

Anexo 2

Cuestionario.

Estimado(a) alumno(a):

El presente cuestionario tiene la finalidad de recabar información sobre la resolución de tareas de Medidas de Tendencia Central.

Las respuestas que proporcione serán confidenciales y tendrán como única finalidad aportar datos para mi trabajo de tesis en la Maestría en Matemática Educativa. De antemano agradezco tu disposición de responder.

Atentamente: Lic. Perla Valenzuela Ulloa

Datos Generales

Nombre: _____ . Edad: _____ .

Grupo: _____ . Fecha: _____ .

Instrucciones: Lee cada tarea y contesta lo que se pide.

Nota. En caso de querer cambiar tu respuesta te pedimos que encierres en un círculo lo que quisiste eliminar y continua con tu respuesta.

Recuerda que: la media aritmética/promedio se calcula de la siguiente forma .

Que si tenemos n datos (n -par), la mediana es el promedio de los datos que están en las posiciones $n/2$ y $(n/2)+1$. Y que la moda es el dato que más se repite, es decir, es el dato que aparece con mayor frecuencia.

- Un alumno tiene dos notas (a y b) en matemáticas con escala de 1 a 7. Si el promedio es 5.5 y la suma de las notas es 11, ¿Cuáles son las sus posibles notas a y b , sabiendo que son números enteros? Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.
- Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa? Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.
- Se sabe que un cazador sale cada día al campo y a su regreso trae la siguiente cantidad de conejos 2, 4, 6, 8, la cantidad del último día está dada por x , se sabe que en promedio el cazador atrapó 10 conejos en los 5 días ¿Qué cantidad de conejos atrapó el cazador el último día? Comprueba y justifica tu respuesta.

5. Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6.2, 6.0, 6.0, 6.3, 6.1, 6.23, 6.15, 6.2 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto? (calcular media, mediana y moda) Describe el procedimiento y justifica tu respuesta.
6. La cantidad de empresas que hay en 7 ciudades están dadas por los siguientes datos: ¿En cuál de los siguientes conjuntos de datos la media, la mediana y la moda coinciden?
- A. 3,4,5,9,10,11
 B. 3,4,5,6,7,8,9
 C. 6,3,4,6,8,9,6
 D. 1,2,3,4,5,5,5
 E. 2,4,6,8,10,12
7. Encuentra la mediana para los datos agrupados de la siguiente tabla de frecuencias:

Dato	0	1	2	3	4
Frecuencia	10	10	2	14	8

¡Muchas gracias!

Anexo 3

Encuesta.

Estimado(a) alumno(a):

La presente encuesta tiene la finalidad de recabar información sobre tus respuestas al cuestionario de Medidas de Tendencia Central respondido anteriormente.

Tus respuestas no serán catalogadas como correctas o incorrectas y tendrán como única finalidad aportar datos para mi trabajo de tesis en la Maestría en Matemática Educativa. De antemano agradezco tu disposición de responder.

Atentamente: Lic. Perla Valenzuela Ulloa

Datos Generales

Nombre: _____ . Edad: _____ .

Grupo: _____ . Fecha: _____ .

Instrucciones: Lee cada reactivo y marca **las opciones** que consideres adecuadas

7. Al resolver la tarea 1 tome en cuenta los siguientes aspectos

- Identifique la presencia de datos desconocidos.
- Simbolice datos desconocidos y los utilice para plantear ecuaciones.
- Sustituí por valores que hacen verdadera la o las ecuaciones planteadas.
- Determine sibles notas realizando operaciones.
- Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos.
- Simbolice s generales.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

8. Al resolver la tarea 2 tome en cuenta los siguientes aspectos

- Identifique la presencia de un dato desconocido.
- Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación.

Determine o desconocido realizando operaciones.

Sustituí por valores que hacen verdadera la ecuación planteada.

Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos.

Simbolice s generales.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

9. Al resolver la tarea 3 tome en cuenta los siguientes aspectos

- Identifique la presencia de un dato desconocido.
- Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación.

Sustituí el que hace verdadera la ecuación

Sustituí por valores específicos buscando el indicado para hacer verdadera la ecuación.

Determine o desconocido realizando operaciones.

Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos.

Reconocí es, percibir reglas y métodos en secuencias.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

10. Al resolver la tarea 4 tome en cuenta los siguientes aspectos.

Utilice e interprete una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor.

Manipule fórmula.

Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación.

Sustituí por valores que hacen verdadera la ecuación planteada.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

11. Al resolver la tarea 4 tome en cuenta los siguientes aspectos.

Utilice e interprete una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor.

Manipule fórmula.

Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación.

Sustituí por valores que hacen verdadera la ecuación planteada.

Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

12. Al resolver la tarea 4 tome en cuenta los siguientes aspectos.

Utilice e identifique una fórmula como entidad general que puede asumir cualquier valor.

Manipule la fórmula.

Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación.

Sustituya los valores que hacen verdadera la ecuación planteada.

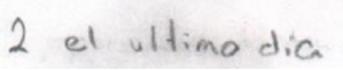
Explica o justifica por qué elegiste esos aspectos.

Anexo 4

Análisis de respuestas.

Tarea 3	Modelo 3UV (uso y aspectos que predomina)	Análisis de tareas Análisis del ambiente	
		Análisis Objetivo	Análisis Subjetivo (Desde los aspectos del modelo 3UV)
Se sabe que un cazador sale cada día al campo y a su regreso trae la siguiente cantidad de conejos 2, 4, 6, 8, la cantidad del último día está dada por x , se sabe que en promedio el cazador atrapó 10 conejos en los 5 días ¿Qué cantidad de conejos atrapó el cazador el último día?	Incógnita I1 I5 I4/I2 I3	Cualitativa (enunciado, objetos) Con la utilización del pronombre interrogativo “qué” se espera que se indique la cantidad de conejos cazados el quinto día. Matemática (términos y relaciones) Promedio, comprueba, justifica $(2+4+6+8+x)/5=10$	Algoritmo de solución -Identificar la presencia de un dato desconocido x , que es la cantidad de conejos cazados el último día. -Simbolizar la cantidad desconocida x y utilizarla para plantear la ecuación. $(2+4+6+8+x)/5=10$ -Realizar operaciones para encontrar la cantidad desconocida $x=30$ / Interpreta los símbolos como valores específicos. ($x=10$, $x=20\dots$)

Comprueba y justifica tu respuesta.		Estructural Problema que requiere utilizar el concepto de media.	-Sustituir el valor encontrado $x=30$ en la ecuación inicial, haciendo a ésta una ecuación verdadera.
-------------------------------------	--	--	---

stu dia	Respuesta	Análisis de tareas Espacio de la tarea Análisis Fenomenológico/Análisis General desde el modelo 3uv
E1		El estudiante no muestra procedimiento, solo responde “2 el último día”
	<input checked="" type="checkbox"/> Identifique la presencia de un dato desconocido. <i>identificando los datos de cada día</i> <input checked="" type="checkbox"/> Determine el dato desconocido realizando operaciones. <i>luego siguiendo el patron para aver lo del ultimo dia</i> <input type="checkbox"/>	Al realizar la encuesta selecciona dos de las opciones, correspondientes a los aspectos I1 e I4 , para la

		<p>primera justifica con “identificando los datos de cada día” lo que muestra que percibe más de un dato desconocido, pero en la tarea solo se tiene como dato desconocido el número de conejos cazados el quinto día. Para la segunda justifica con “siguiendo el patrón para hallar lo del último día” lo que da evidencia que el estudiante identifica el patrón que va de 2 en 2 en los datos de la tarea (2,4,6,8), sin</p>
--	--	--

		<p>embargo, aunque tenga esta idea no expresa como siguiente dato el número 10, si no que responde con “2”. De donde se concluye que el estudiante identifica patrones, pero no logra identificar el siguiente dato en una sucesión. Aun así, este sería un razonamiento incorrecto específicamente para esta tarea.</p>
--	--	--

E2

$x = 30$, si se suman todos los números y se divide entre la cantidad de días se obtiene el promedio de 10.

③
2, 4, 6, 8, x
Promedio 10 en 5 días
2 } Promedio de 5 ¿para 10?
4 }
6 }
8 } van 8 es decir 2 por día
8 - 10 = 2 le faltan para su promedio de 10 en 5 días

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8}{4} = \frac{30}{4} = 7.5 \quad \uparrow \text{no}$$

2
4
6
8
 $x = 30$
 $\frac{50}{5} = 10$
↓
días → correcto

El estudiante comienza por **identificar** y simbolizar el dato desconocido x, pero sin plantear una ecuación que lo involucre, sino que con la idea que cada día caza 2 conejos identificando un patrón en los datos de la tarea (2,4,6,8) e interpretando cada dato como el acumulado de los conejos cazados (es decir, para el primer día $1 \cdot 2$, para el segundo $2 \cdot 2$, para el tercero $3 \cdot 2$, para el cuarto $4 \cdot 2$ y para

		<p>el quinto $5 \cdot 2$), después cambia su procedimiento y aplica la fórmula de media aritmética para los 4 datos. Pero una vez más cambia su procedimiento y ahora le da un valor específico al dato desconocido $x=30$, así aplica ahora la fórmula de media aritmética para 5 datos (2, 4, 6, 8, $x=30$) comprobando que la media es igual a 10, tal como lo marca la tarea.</p>
--	--	---

		<p>Así concluye y da como respuesta 30.</p> <p style="text-align: center;">I1 I2</p>
	<p><input checked="" type="checkbox"/> Identifique la presencia de un dato desconocido. <i>busco el dato de la pregunta</i></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos. <i>la media</i></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Determine el dato desconocido realizando operaciones. <i>con suma y división (en la media)</i></p>	<p>Al responder la encuesta, marca la opción que corresponde a I1 justificando con “busco el dato de la pregunta”, la opción que corresponde al aspecto I4 justificando con “con suma y división (en la</p>

		<p>media)” y por último marca la opción de utilice fórmulas, refiriéndose a que se utilizó la fórmula de media aritmética.</p>
<p>E3</p>	<p>③ Datos</p> <p>El promedio del cazador nos lo dan y 4 de estos datos, entonces usando fórmula de promedio despegamos el 5to dato</p> <p>er → 2 do → 4 er → 6 to → 8 to → x o → 10</p> $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$ <p>Procedimiento</p> $10 = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + x}{5}$ $50 = 20 + x$ $30 = x$ <p>R = 30 conejos</p>	<p>El estudiante comienza por simbolizar los datos dados en la tarea (la cantidad de conejos cazados del primer al cuarto día) y el dato desconocido x (cantidad de conejos cazados el</p>

		<p>quinto día). Luego plantea la fórmula de media aritmética para cinco datos, sustituye los datos conocidos y opera para determinar el valor de x.</p> <p>De acuerdo con el análisis del ambiente de la tarea el estudiante logra indicar el número de conejos cazados en quinto día utilizando el concepto de media aritmética, haciendo alusión al término promedio.</p>
--	--	--

		I1, I5, I4
	<p><input checked="" type="checkbox"/> Identifique la presencia de un dato desconocido. Si, Coloque x</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación. Si, le di x</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos. Si, plantear ecuación</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Determine el dato desconocido realizando operaciones. Si, resolví ecuación</p>	<p>Posteriormente al aplicar la encuesta hace alusión a que utiliza en su resolución a la tarea los aspectos I1 (justificando con “coloqué x”), I4 (justificando con “resolví ecuación”) e I5 (justificando con le di x). Tres de los cinco</p>

		<p>aspectos considerados en la tarea.</p> <p>Además, considero un aspecto que no se tenía contemplado en el análisis del ambiente de la tarea, eligiendo la opción “Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos” sin embargo lo justifica con “plantear ecuación”, por lo que el estudiante ve a la fórmula como una ecuación. Lo que muestra evidencia de</p>
--	--	---

		<p>que hay una confusión entre los usos de la variable según el modelo 3UV. Resultado presente también en Kú <i>et al.</i>, (2021).</p>
E4	<p>respuesta. 30 conejos. La suma de los conejos de los primeros 4 días es 20, y necesitamos un número mayor que 20 que dividido entre 5 da 10. $50 \div 5 = 10$</p> <p>③ $\frac{2+4+6+8}{4} = 5$</p> <p>$x = ?$</p> <p>$2+4+6+8 = 20$ $x = 30$</p> <p>$30+4+6+8+2 = 50$ $50 \div 5 = 10$</p>	<p>El estudiante comienza por sumar la cantidad de conejos cazados en los primeros 4 días y se da cuenta que necesita un número mayor que el resultado de esta suma para que se cumpla que el promedio de los 5 días es igual a 10.</p>

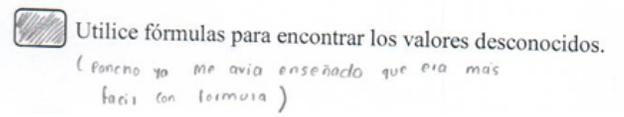
	<p>Luego se percata que $50/5=10$ y como la suma de los primeros 4 días es igual a 20, entonces concluye que la cantidad de conejos cazados el último día es igual a 30.</p> <p>I1 I2</p>
<p> Identifique la presencia de un dato desconocido.</p> <p> Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos.</p>	<p>Posteriormente al aplicar la encuesta hace alusión a que utiliza en su resolución a la tarea los aspectos I1, I4 y la</p>

	<p><input checked="" type="checkbox"/> Determine el dato desconocido realizando operaciones.</p> <p>* Utilicé la suma y división para llegar al resultado</p>	<p>opción de utilizar fórmulas.</p>
E5	<p>Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación.</p> <p>2 conejos al último día</p>	<p>El estudiante no muestra procedimiento, solo responde “2 conejos al último día”</p>
	<p><input checked="" type="checkbox"/> Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación.</p> <p>hice operaciones para salir al resultado</p>	<p>A su vez en la encuesta elige la opción correspondiente al aspecto I5 de simbolizar datos desconocidos, pero justifica con “hice operaciones...” que hace alusión a otro</p>

		<p>aspecto del uso de la variable como incógnita el cual es el I4.</p>
<p>E6</p>	<p>30 conejos, por la suma de los días anteriores y el 5º día extra.</p>	<p>El estudiante no muestra procedimiento, solo responde “30 conejos...”</p>
	<p><input checked="" type="checkbox"/> Identifique la presencia de un dato desconocido.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Reconoci patrones, percibir reglas y métodos en secuencias. por los días de su cacería</p>	<p>Posteriormente al aplicar la encuesta hace alusión a que utiliza en su resolución a la tarea los aspectos I1, I5, G1, justificando en este último “por los días de su cacería” lo que muestra que también se identifica un patrón en</p>

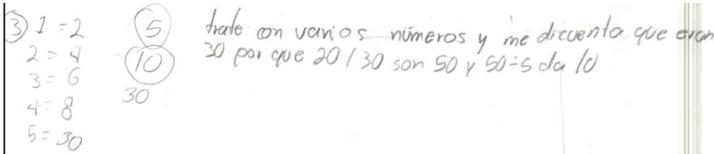
		los datos del problema (2,4,6,8)
E7	No responde	No responde
	No responde	No responde
E8	<i>pues otros 2 puesto que por día caza 2</i>	El estudiante no muestra procedimiento, solo responde “pues otros 2 puesto que por día caza 2” lo que da evidencia que está reconociendo un patrón en los datos de la tarea (2,4,6,8).
	 Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos.	Posteriormente en la encuesta señala que se utilizó fórmulas,

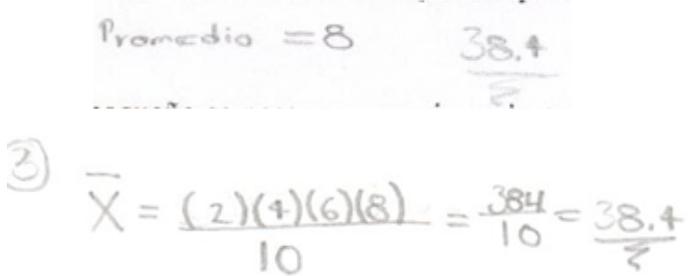
		dejado de lado aspectos del uso de la variable como incógnita.
E9	<p>3. $\bar{x} = \frac{2+4+6+8+x}{5}$</p> <p>Ya no sume 11</p> <p>Sume los conejos y los que me faltaban para dividirlos entre los 5 días y de lo 10 conejos por semana X</p>	El estudiante comienza por plantear una ecuación, que involucra la suma de la cantidad de conejos cazados los primeros 4 días más el dato desconocido x que representa la cantidad de conejos cazados el quinto día, todo esto dividido entre los 5 días de caza, sin embargo, no sustituye otro dato

		<p>conocido que es el promedio de conejos cazados igual a 10, sino que lo deja representado por x y expresa “ya no supe” debido a que no le es posible encontrar el valor de x.</p>
	 <p>Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos. <i>(Pancho ya me avia enseñado que era más fácil con formula)</i></p>	<p>Posteriormente al responder la encuesta marca la opción que hace alusión al uso de fórmulas, justificando “Pancho ya me había enseñado que era más fácil con fórmula” identificando que es necesario aplicar la</p>

		fórmula de media aritmética para 5 datos.
0	E1	No responde
		No responde
1	E1	<p>respuesta. 30 conejos, ya que al sumar los días anteriores (20) más 30 conejos del último día da 50, entre 5 que son los días da 10</p>
		El estudiante logra responder adecuadamente la tarea, señalando que son 30 conejos para el quinto día justificando con “al sumar los días anteriores (20) más 30 conejos del último día da 50, entre 5 que son los días da 10” por esta respuesta

		<p>podemos intuir que al menos el estudiante identifica el dato desconocido (I1), interpreta los símbolos como valores específicos (I2) y realiza operaciones para encontrar el dato desconocido (I4).</p>
	<p><input checked="" type="checkbox"/> Simbolice el dato desconocido y lo utilice para plantear una ecuación. <i>Plantea el promedio que era 10 como un resultado de cada día</i></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Reconoci patrones, percibir reglas y métodos en secuencias. <i>Vi que se repete "cierto patrón" en el problema todo lo que tiene que hacer es sumar y dividir</i></p>	<p>Al realizar la encuesta el estudiante marca la opción correspondiente a I5, sin embargo, en su procedimiento no se logra ver explícito. Además, marca lo</p>

		<p>opción correspondiente a G1 justificando con “vi que se repetía cierto patrón”</p>
<p>2 E1</p>		<p>El estudiante muestra en su procedimiento que le dio distintos valores a x hasta encontrar que para $x=30$ se cumplía que en promedio de los 5 días se casaron 10 conejos. Por lo que podemos decir que en su procedimiento identifica la presencia de un dato desconocido (I1) E interpreta el símbolo como valor específico (I2).</p>

	<input checked="" type="checkbox"/> Sustitui posibles valores específicos buscando el indicado para hacer verdadera la ecuación <i>14. teste con varios números hasta llegar al resultado</i>	<p>Al responder la encuesta identifica la opción correspondiente al aspecto I2</p>
<p>E1 3</p>		<p>El estudiante utiliza el símbolo de promedio, pero en lugar de sumar los datos los multiplica y los divide entre 10, siendo estos datos los que da la tarea (2,4,6,8 y 10). Obtiene como resultado 38.4, pero responde con "Promedio=8"</p>
	<input checked="" type="checkbox"/> Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos. <i>Lo busque lo que mejor se acomodaba y lo implemente</i> <input checked="" type="checkbox"/> Reconoci patrones, percibir reglas y métodos en secuencias. <i>Seguí el curso de el ejercicio y lo respondi</i>	<p>En la encuesta el estudiante elige dos opciones que corresponden al uso de la variable como número general,</p>

		aplica la fórmula de media, pero con datos incorrectos.
	<input checked="" type="checkbox"/> Identifique la presencia de un dato desconocido. <i>Para así saber que es lo que tenía que hacer.</i> <input checked="" type="checkbox"/> Determine el dato desconocido realizando operaciones. <i>hice operaciones y así saque el resultado</i>	Elige la opción correspondiente a I1 y I4 .
6	E1 $x = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$ <p>3) Busco los conejos que llevo el quinto día para eso sumo los conejos que atrapo en los días pasado y dividirlos en esos días lo que dio como resultado 5 sería el quinto día.</p>	El estudiante aplica la fórmula de media aritmética, pero para solo 4 datos (2,4,6,8) por lo que opera y obtiene como resultado 5, que es la respuesta que se da a la tarea. En este caso si

		<p>identifica el dato desconocido haciendo alusión a “<u>buscar</u> los conejos que llevó el quinto día” pero no simboliza correctamente en la ecuación el dato desconocido x.</p>
	<p><input type="checkbox"/> Identifique la presencia de un dato desconocido. <i>Mire que dato no coincide</i></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Reconoci patrones, percibir reglas y métodos en secuencias. <i>mire al y ltimo como salio :)</i></p>	<p>Elige la opción correspondiente a I1 y G1.</p>
<p>E1 7</p>	<p><i>ah atrapado 2 conejos por dia</i></p>	<p>El estudiante no muestra procedimiento, pero responde “a</p>

		atrapado 2 conejos por día”
	<p data-bbox="457 402 1081 451">Identifique la presencia de un dato desconocido.</p> <p data-bbox="688 467 865 516">2, 4, 6, 8, 10</p>	<p data-bbox="1528 394 1894 1385">Al responder la encuesta el estudiante marca la opción que hace referencia al aspecto II identificando que el dato desconocido es la cantidad de conejos atrapados por día igual a 2 ya según los datos proporcionados en la tarea 2,4,6,8, identifica que el siguiente es 10. Sin embargo, su respuesta es “2” lo que nos muestra que el razonamiento del</p>

		<p>estudiante es que cada día se cazan 2 conejos y que los datos que proporciona la tarea son cantidades acumuladas de los conejos cazados. Así el primer día caza 2 conejos, el segundo otros 2, por lo que ya tendría 4 conejos, para el tercer día caza otros dos, por lo que ya tendría 6 conejos, el cuarto día caza igual 2 conejos por lo que ya tendría 8 conejos y así para el quinto día que caza otros dos conejos tendría 10</p>
--	--	--

		conejos cazados en total para el quinto día.
8	E1	2 conejos
		<input checked="" type="checkbox"/> Identifique la presencia de un dato desconocido. Identifique el número que faltaba
9	E1	Atrapó 5 conejos el día final $2+4+6+8=20$ $\frac{20}{4}=5$
		El estudiante aplica la fórmula de

		<p>media aritmética, pero para solo 4 datos (2,4,6,8) por lo que opera y obtiene como resultado 5, que es la respuesta que se da a la tarea. En este caso si identifica, pero no simboliza el dato desconocido x.</p>
	<p><input checked="" type="checkbox"/> Reconoci patrones, percibir reglas y métodos en secuencias.</p> <p>Identifique el número de conejos que atrapaba en promedio</p> <p>4. Al resolver la tarea 4, cuáles de los siguientes...</p>	<p>Elige la opción correspondiente a G1.</p>
<p>0</p> <p>E2</p>	<p>respuesta. atrapo 30 conejos y q-6 es la cantidad faltante para un promedio de 90 conejos.</p>	<p>El estudiante identificar la presencia de un dato desconocido x, que es la cantidad de conejos cazados el último día, luego simbolizar la cantidad desconocida x y utilizarla para plantear</p>

<p>2, 4, 6, 8 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}$ (3)</p> $\frac{2+4+6+8+x}{5} = 10$ $50 = 20 + x$ $x = 30$	<p>la ecuación $(2+4+6+8+x)/5=10$ y finalmente realizar operaciones para encontrar la cantidad desconocida $x=30$</p> <p>11, 15, 14</p>
<p><input checked="" type="checkbox"/> Utilice fórmulas para encontrar los valores desconocidos. <i>utilice la fórmula del promedio para encontrar el resultado</i></p>	<p>Por otro lado, en la encuesta solo hace alusión a que utilizó “la fórmula de promedio”</p>

<p>E2</p> <p>1</p>	<p><i>tratamos con varios números hasta que por 30 y sumando a de los demás días así por me dice 10 de promedio que era lo que buscábamos</i></p> <p>3 = D1 2 D2 4 D3 6 D4 8 = 20 (5) D5 x = 30 (10) 30</p> <p>10 promedio 5 50</p>	<p>El estudiante muestra en su procedimiento que le dio distintos valores a x hasta encontrar que para $x=30$ se cumplía que en promedio de los 5 días se casaron 10 conejos. Por lo que podemos decir que en su procedimiento identifica la presencia de un dato desconocido (I1) e interpreta el símbolo como valor específico (I2).</p>
	<p><input checked="" type="checkbox"/> Sustitui el valor que hace verdadera la ecuación. simplemente me diji que el resultado me daba seguridad con los números que me daba el problema</p>	<p>Elige la opción correspondiente a I3</p>

<p>2</p> <p>E2</p>	<p>respuesta. Pienso creo que el ultimo dia atrape 2 conejos, porque al parecer va de 2 en 2.</p> <p>Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes.</p>	<p>Responde “2 conejos” identificando un patrón en los datos (2,4,6,8) y señala “va de 2 en 2”</p>
	<p><input checked="" type="checkbox"/> Identifique la presencia de un dato desconocido.</p> <p>solo con ese dato puede resolver el problema.</p>	<p>Elige la opción correspondiente a II</p>
<p>3</p> <p>E2</p>	<p>$2+4+6+8$</p> <p>$2+4+6+8 = 20/4 = 5$</p> <p>5 es el promedio de sus ca... 5 es la cantidad del día</p>	<p>El estudiante aplica la fórmula de media aritmética, pero para solo 4 datos (2,4,6,8) por lo que opera y obtiene como resultado 5, que es la respuesta que se da a la tarea. En este caso si identifica el dato desconocido x.</p>

	No se realizó	No se realizó
5 E2	<p data-bbox="457 370 1249 438"> <small>... que cantidad de conejos atrapo el cazador el último día? Comprueba y justifica tu respuesta.</small> $2+4+6+8=20$ $\frac{20}{4}=5$ Atrapó 5 conejos d último día </p> <p data-bbox="457 487 1344 633"> <small>3). En este ejercicio sume las cantidades 2,4,6 y 8 y me dio como resultado 20 y esto lo dividi entre 4 pues esos son 4 medio como resultado 5.</small> </p>	<p data-bbox="1528 373 1900 1177"> El estudiante aplica la fórmula de media aritmética, pero para solo 4 datos (2,4,6,8) por lo que opera y obtiene como resultado 5, que es la respuesta que se da a la tarea. El estudiante no identifica ni simboliza el dato desconocido x por lo que da una respuesta errónea a la tarea. </p>

		No se realizó	No se realizó										
6	E2	2	El estudiante no muestra procedimiento, solo responde "2"										
		No se realizó	No se realizó										
7	E2	<p>el ultimo dia caso 30</p> <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>D₁</td><td>2</td></tr> <tr><td>D₂</td><td>4</td></tr> <tr><td>D₃</td><td>6</td></tr> <tr><td>D₄</td><td>8</td></tr> <tr><td>D₅</td><td>= x = 30</td></tr> </table> $10 = \frac{20+x}{5} = 50 = 20+x = 30$	D ₁	2	D ₂	4	D ₃	6	D ₄	8	D ₅	= x = 30	El estudiante logra responder que el quinto día se cazaron 30 conejos, para esto escribe los datos conocidos en la tarea (2,4,6,8) y simboliza el dato desconocido x, después plantea una
D ₁	2												
D ₂	4												
D ₃	6												
D ₄	8												
D ₅	= x = 30												

		ecuación a partir de la fórmula de media aritmética para 5 datos, finalmente opera y encuentra el valor de $x=30$
	No se realizó	No se realizó